Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1987, 340/S–15
Actes 15^{e} Séminaire Lotharingien, p. 121–128

RECORDS, ANTIRECORDS ET PERMUTATIONS DISCORDANTES

PAR

JIANG ZENG

RÉSUMÉ. — En utilisant le q-analogue de la série hypergéométrique confluente, on établit des q-analogues de toutes les formules de DUMONT-KREWERAS [1] et en raffinant la bijection construite par ces auteurs, on trouve de nouvelles significations énumératives de ces formules. Finalement, un nouveau modèle combinatoire est proposé, le problème restant ouvert étant d'établir une bijection entre ce nouveau modèle et celui de DUMONT-KREWERAS.

1. Introduction. — Posons

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0; \\ a(a+1)\cdots(a+n-1), & \text{si } n \geq 1; \end{cases}$$

et adoptons pour les fractions continues la notation classique "horizontale" (*cf.* [1]) :

$$\begin{aligned}
(1)\quad F(a,b;x) &= \sum_{n\geq 0} F_n(a,b)x^n = \frac{\Omega(a,b;x)}{\Omega(a,b-1;x)} \\
&= 1/1 - ax/1 - bx/\cdots/1 - (a+n)x/1 - (b+n)x/\cdots \\
(2)\quad C(a,b;x) &= \sum_{n\geq 1} C_n(a,b)x^n = ax\frac{\Omega(a+1,b;x)}{\Omega(a,b;x)} \\
&= ax/1 - bx/1 - (a+1)x/1 - (b+1)x/\cdots \\
&\qquad /1 - (a+n)x/1 - (b+n)x/\cdots
\end{aligned}$$

où $\Omega(a,b;x) = 1+(a)_1(b)_1x/1!+(a)_2(b)_2x^2/2!+\cdots+(a)_n(b)_nx^n/n!+\cdots$ est la série hypergéométrique confluente [3]. Récemment DUMONT et KREWERAS[1] ont démontré que $F_n(a,b)$ (resp. $C_n(a,b)$) est le polynôme générateur des records et anti-records sur les permutations (resp. permutations connexes).

Le premier but de cet article est de trouver un q-analogue pour ces deux familles de polynômes. Utilisant les notations suivantes pour la q-factorielle :

$$[a]_n \text{ (resp. } [a]_n!) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0; \\ a + q + \cdots + q^{n-1}, \ (\text{resp. } [a]_1 [a]_2 \cdots [a]_n), & \text{si } n \geq 1; \end{cases}$$

et proposant la série

$$\Omega(a, b, q; x) = 1 + [a]_1! \, [b]_1! \, x/[1]_1! + [a]_2! \, [b]_2! \, x^2/[1]_2! + \cdots + [a]_n! \, [b]_n! \, x^n/[1]_n! + \cdots$$

comme q-analogue de $\Omega(a, b; x)$, il est alors naturel de se demander s'il y a des formules parallèles à (1) et (2), qui utilisent cette q-extension de Ω ; dans le cas affirmatif, si l'on peut trouver une signification énumérative à ces formules. Dans cet article, nous nous proposons de répondre à ces deux questions. De plus, un nouveau modèle combinatoire pour les polynômes $F_n(a, b)$ et $C_n(a, b)$ est construit, laissant ouvert le problème d'établir une bijection entre celui-ci et le modèle de DUMONT-KREWERAS.

2. q-analogues. — Posons

$$F(a, b, q; x) = \sum_{n \geq 0} F_n(a, b, q) x^n = \frac{\Omega(a, b, q; x)}{\Omega(a, bq - q, q; q^{-1} x)},$$

$$C(a, b, q; x) = \sum_{n \geq 1} C_n(a, b, q) x^n = ax \frac{\Omega(aq^{-1} + 1, b, q; qx)}{\Omega(a, b, q; x)}.$$

L'identité évidente

$$\Omega(a, b, q; x) = \Omega(a, bq - q, q; q^{-1} x) + ax \Omega(aq^{-1} + 1, b, q; qx), \tag{3}$$

réécrite sous la forme

$$\frac{\Omega(a, b, q; x)}{\Omega(a, bq - q, q; q^{-1} x)} = \frac{1}{1 - ax \dfrac{\Omega(aq^{-1} + 1, b, q; qx)}{\Omega(a, b, q; x)}},$$

conduit par itération à la fraction continue :

$$\begin{aligned} F(a, b, q; x) &= \frac{\Omega(a, b, q; x)}{\Omega(a, bq - q, q; q^{-1} x)} \\ &= 1/1 - [a]_1 x/1 - [b]_1 qx/1 - [a]_2 qx/1 - [b]_2 q^2 x/ \cdots \\ &\qquad /1 - [a]_n q^{n-1} x/1 - [b]_n q^n x/ \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

En même temps, on obtient

$$
\begin{aligned}
(5)\quad C(a,b,q;x) &= ax\frac{\Omega(aq^{-1}+1,b,q;qx)}{\Omega(a,b,q;x)}\\
&= ax/1-[b]_1qx/1-[a]_2qx/1-[b]_2q^2x/\cdots\\
&\qquad /1-[a]_nq^{n-1}x/1-[b]_nq^nx/\cdots
\end{aligned}
$$

Evidemment (4) et (5) se réduisent respectivement aux formules (1) et (2) en faisant $q=1$. Notons encore sur la série Ω les identités suivantes :

$$
\begin{aligned}
(6)\quad & ax[\Omega(aq^{-1}+1,b,q;qx)-\Omega(a,b,q;x)]\\
&\qquad = bx[\Omega(a,bq^{-1}+1,q;qx)-\Omega(a,b,q;x)]\\
&\qquad = abqx^2\Omega(aq^{-1}+1,bq^{-1}+1,q;q^2x),
\end{aligned}
$$

qui s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad C(a,b,q;x)-ax &= bxF(a,bq^{-1}+1,q;qx)-bx\\
&= abqx^2\frac{\Omega(aq^{-1}+1,bq^{-1}+1,q;q^2x)}{\Omega(a,b,q;x)}.
\end{aligned}
$$

De même, (3) s'écrit encore

$$
(8)\qquad F(a,b,q;x)=1+F(a,b,q;x)C(a,b,q;x).
$$

Ces identités conduisent pour les polynômes $F_n(a,b,q)$ et $C_n(a,b,q)$ aux formules de récurrence suivantes

$$
\begin{aligned}
& F_0=1;\qquad C_1=a;\\
(9)\qquad & C_n(a,b,q)=bq^{n-1}F_{n-1}(a,bq^{-1}+1,q);\\
(10)\qquad & F_n(a,b,q)=\sum_{k=1}^{n}C_k(a,b,q)F_{n-k}(a,b,q).
\end{aligned}
$$

Les coefficients de ces polynômes sont des entiers positifs. Leur interprétation énumérative donnée dans cet article s'inspire naturellement de celle qu'avaient trouvée Dumont et Kreweras dans le cas $q=1$.

3. Interprétation combinatoire. — Rappelons tout d'abord quelques notions usuelles concernant les permutations. Notons $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de $\{1,2,\ldots,n\}=[n]$. Étant donnée une permutation $\sigma = x_1x_2\ldots x_n$ de $[n]$, un terme x_k est dit *record*, s'il n'existe aucun terme plus grand à sa gauche, c'est-à-dire si $x_i<x_k$ pour $i<k$. L'entier k est la *position* du record x_k ; un terme x_k est dit *anti-record*, s'il n'existe aucun

terme plus petit à sa droite, c'est-à-dire si $x_k < x_j$ pour $j > k$. Appelons *anti-record exclusif*, tout anti-record qui n'est pas en même temps un record. Le nombre de records (resp. d'anti-records exclusifs) d'une permutation σ est noté $\operatorname{Rec}\sigma$ (resp. $\operatorname{Ant}\sigma$). Un couple (x_i, x_j) est appelé *inversion*, si $x_i > x_j$ et $i < j$. Une permutation est dite *connexe*, si l'ensemble de ses i premiers termes ne coïncide avec $[i]$ pour aucun i inférieur à n. Notons $\mathfrak{C}_n$ l'ensemble des permutations connexes de $[n]$. Introduisons encore une notation utile : pour une formulation A, on écrit $\chi(A) = 1$, si A est vraie et $\chi(A) = 0$, si A est fausse. Par exemple, le *nombre d'inversions*, noté $\operatorname{Inv}\sigma$, d'une permutation $\sigma = x_1 \dots x_n$ peut être défini par :

$$\operatorname{Inv}\sigma = \sum_{1\le i<j\le n} \chi(x_i > x_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \chi(x_j > x_i).$$

Appelons $\mathfrak{F}(n,r,s,t)$ l'ensemble des permutations de $[n]$ qui ont r records, s anti-records exclusifs et t inversions, et $f(n,r,s,t)$ son cardinal. Appelons, de même, $\mathfrak{C}(n,r,s,t)$ la partie de $\mathfrak{F}(n,r,s,t)$ constituée par les permutations connexes et $c(n,r,s,t)$ son cardinal. Nous établirons que le coefficient de $a^r b^s q^t$ dans $F_n(a,b,q)$ est le nombre de permutations de $[n]$ qui ont r records, s anti-records exclusifs et t inversions et que le coefficient de $a^r b^s q^t$ dans $C_n(a,b,q)$ a la même signification pour les permutations connexes.

Notre principal outil est le même que celui de [1], à savoir une transformation particulière ρ qui fait correspondre à toute permutation σ de $[n]$ une permutation $\tau = \rho(\sigma)$ de $[n-1]$.

Soit $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$ une permutation quelconque de $[n]$ et soit $S = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ l'ensemble des positions des anti-records de σ, avec $i_1 < i_2 < \dots < i_s (= n)$. On définit $\tau = y_1 y_2 \dots y_{n-1}$ par :

$$\begin{aligned} y_i &= x_i - 1, && \text{si } i \notin S;\\ y_{i_k} &= x_{i_{k+1}} - 1, && \text{si } i \in S \text{ et } i = i_k, \text{ pour } 1 \le k \le s-1. \end{aligned}$$

Exemple. — Soient $n = 9$ et $\sigma = 2\ 7\ \mathbf{1}\ 8\ \mathbf{3}\ 9\ 5\ \mathbf{4}\ \mathbf{6}$ une permutation (les anti-records étant reproduits en caractères gras). Alors

$S = \{3,5,8\} \cup \{9\}$ et $\tau = \mathbf{1}\ 6\ \mathbf{2}\ 7\ \mathbf{3}\ 8\ 4\ \mathbf{5}$.

Rappelons quelques propriétés de la transformation ρ (*cf.* [1]) :

(a) si σ est une permutation connexe, l'ensemble R des positions des records de $\rho(\sigma)$ est le même que celui des records de σ ;

(b) si $\sigma = x_1 x_2 \dots x_n$ est une permutation connexe, aucun de ses termes x_k ne peut être à la fois record et anti-record;

(c) pour déterminer tous les antécédents connexes d'une permutation donnée τ de $[n-1]$, c'est-à-dire, tous les σ connexes tels que $\rho(\sigma) = \tau$, il suffit de choisir une partie S' arbitraire de l'ensemble T des positons des anti-records exclusifs de τ. La permutation σ dont les anti-records autres que x_n occcupent les positions dans S' est entièrement déterminée : si $S' = \{i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}\}$, il suffira de définir σ comme suit :

pour $i \notin S'$, $\quad x_i = y_i + 1$, en convenant que $y_n = y_{i_{s-1}}$,

pour $i \in S'$ et $i = i_k$, $\quad x_{i_k} = y_{i_{k-1}} + 1$, en convenant que $y_{i_0} = 0$.

Donc, si τ est une permutation de $[n-1]$ ayant t anti-records exclusifs, le nombre d'antécédents connexes de τ qui ont s anti-records est le binomial $\binom{t}{s-1}$.

Considérons maintenant le changement du nombre d'inversions après cette transformation. Soit $\sigma = x_1 x_2 \ldots x_n$ une permutation connexe de $[n]$ et soit $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$ l'ensemble des positions des anti-records (exclusifs) de σ, avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$ $(= n)$.

Remarquons d'abord qu'entre deux termes x_i et x_j $(i < j)$, s'il existe un terme x_l $(i < l < j)$ tel que $x_i < x_l < x_j$, les termes x_i et x_j ne sont certainement pas deux anti-records consécutifs, c'est-à-dire, $x_{i_k} = x_i$ et $x_{i_{k+1}} = x_j$ pour certain $k \in [s-1]$. Il en résulte immédiatement que pour $k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$, on a $\sum_{j=i_k+1}^{i_{k+1}} \chi(x_j > x_{i_{k+1}}) = i_{k+1} - i_k - 1$, où l'on convient que $i_0 = 0$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{i_{k+1}} \chi(x_j > x_{i_{k+1}}) &= \sum_{j=1}^{i_k} \chi(x_j > x_{i_{k+1}}) + \sum_{j=i_k+1}^{i_{k+1}} \chi(x_j > x_{i_{k+1}}) \\
&= \sum_{j=1}^{i_k} \chi(x_j - 1 > x_{i_{k+1}} - 1) + i_{k+1} - i_k - 1 \\
&= \sum_{j=1}^{i_k} \chi(y_j > y_{i_k}) + i_{k+1} - i_k - 1.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $i \notin S$, on a $\sum_{j=1}^{i} \chi(x_j > x_i) = \sum_{j=1}^{i} \chi(y_j > y_i)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Inv} \sigma &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \chi(x_j > x_i) = \sum_{i \notin S} \sum_{j=1}^{i} \chi(x_j > x_i) + \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{i} \chi(x_j > x_i) \\
&= \sum_{i \notin S} \sum_{j=1}^{i} \chi(y_j > y_i) + \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{i} \chi(y_j > y_i) + n - s \\
&= \operatorname{Inv} \tau + n - s,
\end{aligned}$$

i.e., $\operatorname{Inv} \tau = \operatorname{Inv} \sigma + s - n$.

Il résulte de tout ce qui précède que l'on a

$$c(n,r,s,t)=\sum_{\nu\geq s-1}\binom{\nu}{s-1}f(n-1,r,\nu,t+s-n). \tag{11}$$

On a défini $f(n,r,s,t)$ comme le nombre de permutations de $[n]$ qui ont r records, s anti-records exclusifs et t inversions, et $c(n,r,s,t)$ comme le nombre de celles d'entre elles qui sont connexes. Il est facile de donner plus généralement une expression pour le nombre $f_k(n,r,s,t)$ de celles dont la "première composante connexe" est de longueur k, ce qui signifie que k est *le plus petit entier* tel que $\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}=[k]$; de ce fait $c(n,r,s,t)$ n'est rien d'autre que $f_n(n,r,s,t)$.

En effet, pour une permutation $\sigma\in F(n,r,s,t)$ dont la première composante est de longueur k, si la première composante possède λ records, μ anti-records exclusifs et ν inversions, on a la formule

$$f_k(n,r,s,t)=\sum_{(\lambda,\mu,\nu)}c(k,\lambda,\mu,\nu)f(n-k,r-\lambda,s-\mu,t-\nu). \tag{12}$$

Comme $f(n,r,s,t)=\sum_{k=1}^{n}f_k(n,r,s,t)$, on vérifie immédiatement que les formules (11) et (12) sont exactement celles qui résultent de l'identification des coefficients de $a^rb^sq^t$ dans les formules (9) et (10). Ces coefficients ont donc bien la signification énumérative annoncée.

4. L'autre modèle. — Soit E un ensemble fini non-vide; on désigne par $\mathfrak{S}_E$ le groupe des permutations de E. Deux permutations σ et τ appartenant à $\mathfrak{S}_E$ sont dites *discordantes*, si pour toute partie A de E, distincte de E, les restrictions σ_A et τ_A de σ et τ à la partie A ne sont pas toutes deux des permutations de A. L'ensemble des couples de permutations discordantes de E est noté $\mathfrak{D}_E$. Lorsque $E=[n]$, on écrit $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{D}_n$ au lieu de $\mathfrak{S}_{[n]}$ et $\mathfrak{D}_{[n]}$. Enfin, $\operatorname{cyc}\sigma$ désigne le *nombre de cycles* de la permutation σ. Posons maintenant :

$$D_n(a,b)=\sum_{(\sigma,\tau)\in\mathfrak{D}_n}a^{\operatorname{cyc}\sigma}b^{\operatorname{cyc}\tau}\quad\text{et}\quad D(a,b;x)=1+\sum_{n\geq 1}D_n(a,b)\frac{x^n}{n!}.$$

Comme $(a)_n$ est la fonction génératrice du nombre de cycles de $\mathfrak{S}_n$, on a

$$\sum_{(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_n}a^{\operatorname{cyc}\sigma}b^{\operatorname{cyc}\tau}=(a)_n(b)_n. \tag{13}$$

Or à chaque couple (σ,τ) correspond un sous-ensemble *unique* A de $[n]$ contenant 1, tel que les restrictions $\sigma'=\sigma_A$ et $\tau'=\tau_A$ soient *discordantes*. Les autres restrictions $\sigma'' = \sigma_{[n]\setminus A}$ et $\tau'' = \tau_{[n]\setminus A}$ sont des permutations *quelconques* de $[n] \setminus A$. Comme $\operatorname{cyc}\sigma = \operatorname{cyc}\sigma' + \operatorname{cyc}\sigma''$ et $\operatorname{cyc}\tau = \operatorname{cyc}\tau' + \operatorname{cyc}\tau''$, on peut réécrire la sommation (13) de la façon suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{A} \sum_{(\sigma',\tau')} a^{\operatorname{cyc}\sigma'} b^{\operatorname{cyc}\tau'} \sum_{(\sigma'',\tau'')} a^{\operatorname{cyc}\sigma''} b^{\operatorname{cyc}\tau''},$$

où A est de cardinal k et contient 1. On en tire immédiatement :

$$(14)\quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} D_k(a,b)(a)_{n-k}(b)_{n-k} = (a)_n(b)_n \qquad (n \geq 1),$$

ou encore (avec $l = n - k$) :

$$\sum_{l=0}^{n-1} \frac{D_{n-l}(a,b)}{(n-l-1)!} \frac{(a)_l(b)_l}{l!} = ab\frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}}{(n-1)!},$$

soit :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{D_{n+1}(a,b)}{n!} x^n = ab\frac{\Omega(a+1,b+1;x)}{\Omega(a,b;x)}.$$

D'où par intégration :

$$(15)\qquad D(a,b;x) = ab\int_0^x \frac{\Omega(a+1,b+1;t)}{\Omega(a,b;t)}\, dt.$$

Remarque. — On peut encore obtenir l'identité (15) par les techniques du *composé partitionnel abélien* (*cf.* [2]). En effet, la formule exponentielle $\Omega(a,b;x) = \exp D(a,b;x)$ exprime le fait que tout couple de permutations se décompose en un ensemble d'orbites, eux-mêmes discordantes. L'identité (15) en découle immédiatement.

5. Relation entre les deux modèles. — En faisant $q = 1$ dans (7), on obtient l'identité (*cf.* [1]) :

$$(16)\quad C(a,b;x) - ax = bxF(a,b+1;x) - bx = abx^2\frac{\Omega(a+1,b+1;x)}{\Omega(a,b;x)}.$$

Les formules (15) et (16) entraînent alors

$$(17)\qquad D_n(a,b) = (n-1)!\, C_{n+1}(a,b)\,;$$

$$(18)\qquad D_n(a,b) = (n-1)!\, b\, F_n(a,b+1).$$

Posons

$$\mathfrak{D}_n(r,s) = \{(\sigma,\tau) \in \mathfrak{D}_n \mid \operatorname{cyc}\sigma = r,\ \operatorname{cyc}\tau = s\}\,;$$

$$\mathfrak{F}_n(r,s) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \operatorname{Rec}\sigma = r,\ \operatorname{Ant}\sigma = s\}\,;$$

$$\mathfrak{C}_n(r,s) = \{\sigma \in \mathfrak{C}_n \mid \operatorname{Rec}\sigma = r,\ \operatorname{Ant}\sigma = s\}\,;$$

et introduisons la relation d'équivalence R sur $\mathfrak{D}_n(r,s)$, en convenant que $(\sigma,\tau)R(\sigma',\tau')$ si et seulement s'il existe $\omega \in \mathfrak{S}_n$ fixant n tel que $\omega\sigma\omega^{-1} = \sigma'$ et $\omega\tau\omega^{-1} = \tau'$. Il est facile de vérifier que le cardinal de chaque classe d'équivalence dans $\mathfrak{D}_n(r,s)$ est $(n-1)!$ Si donc $\mathfrak{D}_n(r,s)/R$ désigne l'ensemble-quotient correspondant, les identités (17) et (18) entraînent les formules :

$$|\mathfrak{D}_n(r,s)/R| = |\mathfrak{C}_{n+1}(r,s)| \; ; \tag{19}$$

$$|\mathfrak{D}_n(r,s)/R| = \sum_{t\geq s-1} \binom{t}{s-1} |\mathfrak{F}_n(r,t)| \, . \tag{20}$$

Le problème qui reste ouvert est de trouver une démonstration "bijective" de ces deux formules; autrement dit, d'établir une correspondance biunivoque entre les ensembles $\mathfrak{D}_n(r,s)/R$ et $\mathfrak{C}_{n+1}(r,s)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUMONT (Dominique) et KREWERAS (Germain). — Sur le dévelopement d'une fraction continue liée à la série hypergéométrique et son interprétation en terme de records et anti-records dans les permutations, à paraître dans *Europ. J. Comb.*

[2] FOATA (Dominique). — *La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération.* — Presses de l'Université de Montréal, 1974.

[3] WALL (H. S.). — *Analytic Theory of Continued Fractions.* — Chelsea, 1948, chap. XVIII.

Jiang ZENG,
Département de mathématique,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes,
F-67084 Strasbourg, France.