Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1987, 340/S-15
Actes 15^e Séminaire Lotharingien, p. 97-99

Optimale Matching Forests

by
Ursula Rütsch, Köln

Im folgenden wird, als Verallgemeinerung der Branching- und Matchingprobleme, das Matching Forest Problem behandelt. Man betrachtet hier einen gemischten Graphen und sucht unter gewissen Zielvorstellungen eine Teilmenge der Kanten des Graphen, so daß diese Kanten keine Kreise bilden und jeder Knoten höchstens Endknoten einer Kante ist. Eine Kantenmenge mit dieser Eigenschaft nennt man Matching Forest. Eine erste theoretische Behandlung dieses Problems findet man bei R. Giles (1) - (3). In (2) wird ein polynomialer Algorithmus vorgestellt, der für jede Kantenbewertung in gemischten Graphen einen Matching Forest mit maximalen Gewicht bestimmt. In (4) sind Modifikationen dieses Algorithmus entwickelt worden, die andere Zielfunktionen berücksichtigen. Eine Implementation dieser Algorithmen ist verfügbar.

Sei also $G = (V,E)$ ein gemischter Graph mit Knotenmenge V, Kantenmenge $E = D \cup U$, bestehend aus gerichteten Kanten in D und ungerichteten Kanten in U und einer Kostenfunktion $c : E \rightarrow$. Mehrfachkanten und Schleifen seien ausgeschlossen.

Eine Menge $J \subseteq E$ heißt Matching Forest, falls gilt:

i) Der (V,J) zugrundeliegende ungerichtete Graph ist kreisfrei.

ii) Für alle $v \in V$ gilt $|J \cap \delta(v)| \leq 1$.

Dabei sei $\delta(v) = \{e \in E \mid e = (u,v) \in D \vee e = \{u,v\} \in U\}$. Gilt für alle $v \in V \mid J \cap \delta(v) \mid = 1$, so heißt J perfekt, ist an einem Knoten $w \mid J \cap \delta(w) \mid = 0$, so heißt J unvollständig bei w.

Zunächst betrachtet man das Problem

(MF) $\quad max\ \{\sum_{e \in J} c_e \mid J$ (perfekter) Matching Forest$\}$

In den beiden Spezialfällen $E = U$ bzw. $E = D$ erhält man so das bekannte Matching- bzw Branchingproblem.

Bemerkung:

$J \subseteq E$ ist perfekter Matching Forest genau dann, wenn gilt:

i) $\quad |J \cap \delta(v)| = 1 \quad \forall v \in V$

ii) $\quad |J \cap \gamma(S)| \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq V, |S| \geq 2$

iii) $\quad |J \cap \bar{\gamma}(S)| \leq \frac{1}{2}(|S| - 1) \quad \forall S \subseteq V, |S| \geq 3$ und ungerade.

Dabei sei $\gamma(S) = \bar{\gamma}(S) \cup \vec{\gamma}(S)$ die Kantenmenge des durch S induzierten Teilgraphen.

Die Bedingung (ii) und (iii) können in einer Ungleichungsklasse verallgemeinert werden. Man betrachtet dann die Familie $\mathcal{G}$ aller Paare $(R,\mathcal{D})$ mit $R \subseteq V$, $|R| \geq 2$, $\mathcal{D}$ Familie von disjunkten Teilmengen $S \subseteq R$ $\forall S \in \mathcal{D}$ mit $|S| \geq 2$ und für alle $J \subseteq E$ sei $J(R,\mathcal{D}) := J \cap (\bar{\gamma}(R) \cup \bigcup_{S \in \mathcal{D}} \vec{\gamma}(S))$. $J(R,\mathcal{D})$ ist also die Menge aller ungerichteten Kanten von J, deren beide Endknoten Elemente von R sind vereinigt mit der Menge aller gerichteten Kanten von J deren beide Enden in einem Element von $\mathcal{D}$ liegen. Sei $q(R,\mathcal{D}) := \lfloor \frac{1}{2}\{ |\mathcal{D}| + |R - U_{S \in \mathcal{D}} S| \rfloor + \sum_{S \in \mathcal{D}}(|S| - 1)$. Dabei sei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl unterhalb von x, $x \in$. Man kann nun zeigen, daß $J \subseteq E$ perfekter Matching Forest ist, genau dann, wenn (i) und $|J(R,\mathcal{D})| \leq q(R,\mathcal{D})$ $\forall (R,\mathcal{D}) \in \mathcal{G}$ wie oben definiert gilt. Daraus läßt sich zur Lösung von (MF) das lineare Programm

$$
\begin{array}{lll}
 & max \sum c_j x_j & \\
\text{(P)} & x_j \geq 0 & \forall j \in E \\
 & x(\delta(v)) \leq 1 & \forall v \in V \\
 & x(E(R,\mathcal{D})) \leq q(R,\mathcal{D}) & \forall (R,\mathcal{D}) \in \mathcal{G}
\end{array}
$$

ableiten. Dabei sei $x(A) = \sum_{j \in A} x_j$ für $x \in$ und $A \subseteq E$. x ist genau dann ganzzahlige zulässige Lösung des Problems (P), wenn x Inzidenzvektor eines perfekten Matching Forest ist. Wie bei Branching- und Matchingproblemen kann man zur Lösung des Matching Forest Problems die Komplementaritätsbedingungen ausnutzen. Führt man die Dualvariablen y_v für jedes $v \in V$ und $Y(R,\mathcal{D})$ für jedes Paar $(R,\mathcal{D})$ ein, so erhält man das duale Programm

$$
\begin{array}{lll}
 & min \sum_{v \in V} y_v + \sum_{(R,\mathcal{D}) \in \mathcal{G}} Y(R,\mathcal{D}) & \\
\text{(D)} & Y(R,\mathcal{D}) \geq 0 \quad \forall (R,\mathcal{D}) \in \mathcal{G} & \\
 & s(y,Y,j) \geq c_j \quad \forall j \in E &
\end{array}
$$

wobei

$$s(y,Y,j) := y_v + \sum (Y(R,\mathcal{D}) \mid j \in \vec{\gamma}(S), S \in \mathcal{D}, (R,\mathcal{D}) \in \mathcal{G}) \quad \forall j = (u,v) \in D$$

und

$$s(y,Y,j) := y_v + y_w + \sum (Y(R,\mathcal{D}) \mid j \in \bar{\gamma}(R), (R,\mathcal{D}) \in \mathcal{G}) \quad \forall j = \{u,w\} \in U.$$

Das Prinzip vom komplementären Schlupf sagt in diesem Fall:

Theorem: Sei J ein perfekter Matching Forest und (y,Y) eine zulässige duale Lösung. Dann ist

$\sum_{j\in J} c_j = \sum_{v\in V} y_v + \sum_{(R,\mathcal{D})\in\mathcal{G}} Y(R,\mathcal{D})$

genau dann, wenn

i) $\forall j \in J \quad s(y,Y,j) = c_j$

ii) $\forall (R,\mathcal{D}) \in \mathcal{G} \quad Y(R,\mathcal{D}) > 0 \Rightarrow |J(R,\mathcal{D})| = q(R,\mathcal{D})$

Das Prinzip des Algorithmus ist also, ausgehend von einer zulässigen dualen Lösung im Graphen aller Kanten, die (i) des Satzes erfüllen, einen möglichst großen Matching Forest zu finden. Ist dieser maximal, aber nicht perfekt, so können die Dualvariablen so geändert werden, daß (ii) gilt, die Zulässigkeit erhalten bleibt und alle schon in den Matching Forest aufgenommenen Kanten auch weiter verwendet werden können. Eine iterative Anwendung dieses Prinzips liefert einen perfekten Matching Forest oder die Aussage, daß ein solcher nicht existiert. Der Algorithmus hat ein theoretische Komplexität von $0(|V| \; 2 \; |E|)$. Er kann modifiziert auch zur Lösung des Bottleneck Problems

$min \; max \; \{c_j \; | J \text{ perfekter Matching Forest } \}$

und des Time Cost-Problems

$$lexmin\left\{ \begin{pmatrix} max\, c(J) \\ J \cap \{j \in E \quad | \quad c(J) = c_j\} \end{pmatrix} \mid J \text{ perfekter Matching Forest} \right\}$$

$(c(J) := max\{c_j \mid j \in J)\})$ mit Komplexität $0(|V| 2 \; |E|)$ verwendet werden.

Literaturverzeichnis:

[1] R. Giles, Optimum Matching Forest I: Special Weights,
Mathematical Programming 22 (1982), 1 - 11

[2] R. Giles, Optimum Matching Forest II: General Weights,
Mathematical Programming 22 (1982), 12 - 38

[3] R. Giles, Optimum Matching Forest III: Facets of
Matching Forest Polyhedra
Mathematical Programming 22 (1982), 38 - 51

[4] U. Rütsch, Optimum Matching Forests,
Diplomarbeit, Köln, 1985