Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1987, 340/S-15
Actes 15^e Séminaire Lotharingien, p. 85-87

SULLE PROPRIETÀ P e P^* NEI SEMIGRUPPI

GIUSEPPE PIRILLO

RIAASSUNTO. — I semigruppi liberi non banali ed il gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_n$ non hanno la proprietà P^*, che è più debole della proprietà P definita da Restivo e Reutenauer.

Come è ben noto, il problema di Burnside per i semigruppi consiste nello studio delle condizioni di finitezza per i semigruppi finitamente generati e periodici. Un recente notevole contributo in questo settore è stato fornito da Restivo e Reutenauer ([3]).

Definizione 1. Sia S un semigruppo ed n un intero $\geqslant 2$. Diciamo che S ha la proprietà P_n sse, per ogni n-pla di elementi

$$x_1, \dots, x_n$$

in S, esiste una permutazione p di $\{1, \dots, n\}$, $p \neq id$, tale che

$$x_1 \dots x_n = x_{p(1)} \dots x_{p(n)}$$

Diciamo che S ha la proprietà P sse, per qualche intero $n \geqslant 2$, il semigruppo S ha la proprietà P_n.

Teorema ([3]). Sia S un semigruppo finitamente generato. Le due condizioni seguenti sono equivalenti:

1) S è finito
2) S è periodico ed ha la proprietà P.

Una domanda naturale è la seguente: è possibile sostituire nel teorema di Restivo e Reutenauer la proprietà P con una più debole?

Definizione 2. Sia S un semigruppo ed n un intero $\geqslant 2$. Diciamo che S ha la proprietà P^*_n sse, per ogni n-pla di elementi

$$x_1, \dots, x_n$$

in S, esistono due permutazioni p e q di $\{1, \dots, n\}$, $p \neq q$, tali che

$$x_{p(1)} \dots x_{p(n)} = x_{q(1)} \dots x_{q(n)}$$

Diciamo che S ha la proprietà P^* sse, per qualche intero $n \geqslant 2$, il semigruppo S ha la proprietà P^*_n.

In [1] è stato dimostrato che esiste un semigruppo con la propriet P* e senza la proprietà P ed in [2] è stato presentato un esempio di semigruppo finitamente generato con la proprietà P* e senza la proprietà P.

Attualmente non siamo in grado di dire se l'enunciato che si ottiene dal teorema di Restivo e Reutenauer sostituendo P con P* resta valido.

Ricordiamo che un sottoinsieme X di un semigruppo libero A^+ è un <u>codice</u> se, per ogni $n \geq 1$, $m \geq 1$, $x_1, \ldots, x_n \in X$, $y_1, \ldots, y_m \in X$,

$$x_1 \ldots x_n = y_1 \ldots y_m$$

implica

$$n = m$$

e, per ogni $1 \leq i \leq n$,

$$x_i = y_i.$$

Si ha la seguente proposizione.

<u>Proposizione</u> 1. <u>Sia</u> A <u>un alfabeto con più di una lettera</u>. <u>Il semigruppo libero</u> A^+ <u>non ha la proprietà</u> P*.

<u>Dimostrazione</u>. Sia n un intero ≥ 2 e k un intero tale che il sottoinsieme K di A^+ costituito da tutte le parole aventi lunghezza k abbia almeno n elementi. E' noto che K è un codice. Consideriamo n parole di K, a due a due distinte, che indichiamo con

$$u_1, \ldots, u_n.$$

Ovviamente una relazione

$$u_{p(1)} \ldots u_{p(n)} = u_{q(1)} \ldots u_{q(n)}$$

non può essere verificata quando p e q sono permutazioni distinte. Così A^+ non ha la proprietà P^*_n. ∎

Notiamo infine che vale anche la seguente proposizione, nella quale N indica l'insieme dei numeri naturali, O incluso.

Proposizione 2. Sia n un intero $\geqslant 2$. Il gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_{n+1}$ non ha la proprietà P^*_n ed il gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_N$ (cioè il gruppo di tutte le biiezioni $\beta: N \longrightarrow N$ con supporto finito) non ha la proprietà P^*.

Dimostrazione. Consideriamo gli $n+1$ interi $0,1,\dots,n$ e le n trasposizioni $\tau_1,\dots,\tau_n$ definite in modo tale che τ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ scambi 0 con i. Più formalmente:

$$\tau_i(j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j=i \\ i & \text{se } j=0 \\ j & \text{se } j \notin \{0, i\} \end{cases}$$

Siano f e g due permutazioni distinte di $\{1,\dots,n\}$. E' facile convincersi che

$$\tau_{f(1)} \cdots \tau_{f(n)}$$

e

$$\tau_{g(1)} \cdots \tau_{g(n)}$$

sono due distinti cicli massimali.

Così $\mathfrak{S}_{n+1}$ non ha la proprietà P^*_n. La conclusione per il gruppo $\mathfrak{S}_N$ segue ora facilmente. ■

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. G. Pirillo, On permutation properties for semigroups, Group Theory Conference, Bressanone-Brixen, 1986.

2. G. Pirillo, On permutation properties for finitely generated semigroups, Combinatorics '86, Passo della Mendola, 1986.

3. A. Restivo - C. Reutenauer, On the Burnside Problem for semigroups, J.of Algebra 89 (1984) 102-104.