Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1987, 340/S-15
Actes 15e Séminaire Lotharingien, p. 5-7

EIN PROBLEM VOM ERDÖS-TYPUS

Gerd Baron, Wien

ERDÖS hat in [1] Quotienten der Bauart $\frac{n!}{\Pi a_k!}$ betrachtet und untersucht, wie groß Σa_k (mit $a_k \geqq m$) werden kann, wenn der Quotient eine ganze Zahl sein soll. Für $m=2$ erhielt er als kleinste obere Schranke $\frac{5}{2}n$ und für $m>2$ stellte er das entsprechende Problem.

In [2] wurde das Problem auf ein lineares Programm zurückgeführt und damit im Prinzip gelöst. In [3] wurde es auf Quotienten der Bauart $\frac{L^n.n!}{\Pi L^{a_k}.a_k!}$ verallgemeinert und auch das q-Analogon behandelt (und dieses sogar allgemein gelöst). Da der von ERDÖS betrachtete Quotient der Multinomialkoeffizient ist und für $\Sigma a_k \leqq n$ stets ganzzahlig ist, kann man das Problem in eine Klasse von Problemen vom ERDÖS-Typus einordnen.

ET Problem: Sei $F(n;\langle a_k\rangle)$ eine Funktion, die für alle Folgen $\langle a_k\rangle$ mit $f(\langle a_k\rangle)\leqq g(n)$ ganzzahlige Werte annimmt. Sei weiters E eine Menge von Folgen $\langle a_k\rangle$. Gesucht ist
$e(n)=\sup\{f(\langle a_k\rangle):\langle a_k\rangle \in E, F(n;\langle a_k\rangle) \in \mathbb{N}\}$.

Besonders interessant sind für Kombinatoriker natürlich solche Funktionen F, die eine kombinatorische Bedeutung haben, wie z.B. der von ERDÖS betrachtete Multinomialkoeffizient. Sein Problem erhält man also mit $F(n;\langle a_k\rangle) = \frac{n!}{\Pi a_k!}$, $f(\langle a_k\rangle) = \Sigma a_k$ und $E = E_m$ die Menge aller (endlichen) Folgen $\langle a_k\rangle$ mit $a_k \geqq m$. Das Ergebnis aus [2] lautet dann $e_m(n)<c_m.n$, wobei sogar

$$c_m = \lim \frac{e_m(n)}{n} = \sup \frac{e_m(n)}{n} \text{ gilt.}$$

In [3] wurde $c_m = 1 + \theta\left(\frac{\log m}{m}\right)$, also die Existenz von Konstanten $a = \frac{3}{\log 720}$ und $b = \frac{1}{\log 2}$ mit

$$1 + a\,\frac{\log m}{m} \leqq c_m \leqq 1 + b\,\frac{\log m}{m}$$

für genügend große Werte von m nachgewiesen.

Eine Übertragung auf q-Funktionen liefert das

qET Problem: Sei $F([n];\langle [a_k]\rangle)$ eine Funktion, die für alle Folgen $\langle a_k\rangle$ mit $f(\langle a_k\rangle)\leqq g(n)$ Werte im Polynomring $\mathbb{Q}[q]$ (resp. $\mathbb{Z}[q]$) annimmt. Sei weiters E eine Menge von Folgen $\langle a_k\rangle$. Gesucht ist

$$e^{(q)}(n)=\sup\{f(<a_k>):<a_k> \in E, F([n];<[a_k]>) \in \mathbb{Q}[q] (\text{resp. } \mathbb{Z}[q])\}.$$

Für das q-Analogon des ursprünglichen ERDÖS-Problem mit dem Multinomialkoeffizienten und den Folgemengen $E_m (a_k \geq m)$ wurde in [3]

$e_m^{(q)}(n) \leq c_m^{(q)}.n$ (wobei sogar $c_m^{(q)} = \lim \frac{e_m^{(q)}(n)}{n} = \sup \frac{e_m^{(q)}(n)}{n}$)

mit $c_{2k}^{(q)} = c_{2k+1}^{(q)} = 1 + \frac{1}{2k+1}$ nachgewiesen.

Wir wollen uns hier mit jener Funktion F beschäftigen, die die Permutationen vom Zyklentypus $\Pi x_k^{a_k}$ abzählt.

$$F(n;<a_k>) = \frac{n!}{\Pi(k^{a_k} a_k!)} \qquad f(<a_k>) = \Sigma k a_k.$$

Für $f(<a_k>) \leq n$ gilt $F(n;<a_k>) \in \mathbb{N}$ resp. $F([n];<[a_k]>) \in \mathbb{Q}[q]$.

Wir wollen zunächst folgenden Satz beweisen.

SATZ 1. $e_m(n) = \theta(n^2)$; $e_m^{(q)}(n) = \theta(n^2)$.

Beweis. Die folgenden Überlegungen gelten für das qET Problem ganz analog. Sei wieder $E_m = \{<a_k>: 1 \leq k \leq K, a_k \geq m\}$.

Damit $F(n;<a_k>) \in \mathbb{N}$ dürfen K und die a_k höchstens gleich 2n sein, da sonst nach Bertrands Postulat (siehe [4]p.189) im Nenner eine Primzahl auftritt, die im Zähler nicht auftritt. Also gilt $\Sigma k a_k \leq 2n.2n = 4n^2$ und somit $e_m(n) = O(n^2)$.

Da $\frac{n!}{\Pi(k^m.m!)} = \frac{n!}{K!^m.m!^K}$ für $mK+Km = 2mK \leq n$ als Multinomialkoeffizient ganzzahlig ist, gilt

$$e_m(n) \geq \Sigma km = \frac{m}{2} \cdot \left\lfloor \frac{n}{2m} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2m} \right\rfloor + 1\right) = \Omega(n^2).$$

Insgesamt also

$$\frac{1}{8m}(1-o(1)) \leq \frac{e_m(n)}{n^2} \leq 4.$$

Der Satz 1 sagt aus, daß hier sogar die Ordnung von g(n) durch e(n) übertroffen wird.

Die im Beweis des Satzes 1 als obere Abschätzung auftretende Konstante 4 kann noch verbessert werden.

SATZ 2. $\frac{e_m(n)}{n^2} \leq \frac{c_m^2}{6m}(1+o(1))$; $\frac{e_m^{(q)}(n)}{n^2} \leq \frac{c_m^{(q)2}}{6m}(1+o(1))$.

Beweis. Aus $\dfrac{n!}{\Pi(k^{a_k}a_k!)} \in \mathbb{N}$ $a_k \geq m$ folgt $\dfrac{n!}{K!^m a_k!} \in \mathbb{N}$ also

$$mK+\Sigma a_k = 2mK+\Sigma(a_k-m) \leq c_m n$$

$$\Sigma k a_k = \Sigma km + \Sigma k(a_k-m) \leq m\,\frac{K(k+1)}{2} + K\Sigma(a_k-m) \leq \frac{mK(K+1)}{2} + c_m nK - 2mK^2 =$$

$$= \left(\frac{m}{2} + c_m n\right)K - \frac{3m}{2}K^2 = \varphi(K),$$

wobei $\varphi(K)$ seinen maximalen Wert $\dfrac{(\frac{m}{2}+c_m n)^2}{6m}$ für $K = \dfrac{m+2c_m n}{6m}$ annimmt.

Daher gilt $\dfrac{e_m(n)}{n^2} \leq \dfrac{c_m^2}{6m}\left(1 + \dfrac{m}{c_m}\cdot\dfrac{1}{n} + \dfrac{m^2}{4c_m^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Für das q-Analogon läuft die Rechnung ganz gleich mit $c_m^{(q)}$ statt c_m.

Literaturverzeichnis.

[1] ERDÖS P., Problem 85-6*. The Mathematical Intelligencer 7(1985), p.35.

[2] BARON G., Solution of Problem 85-6*. The Mathematical Intelligencer 8(1986), pp 42-43.

[3] BARON G., Ein lineares Programm in der Zahlentheorie (wird erscheinen in Lecture Notes in Mathematics)

[4] NIVEN I.- ZUCKERMANN H.S., An Introduction to the Theory of Numbers. (2nd Ed.),John Wiley & Sons Inc.1966.