SUR LE DÉVELOPPEMENT D'UNE FRACTION CONTINUE
LIÉE À LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE ET SON INTERPRÉTATION
EN TERMES DE RECORDS ET ANTI-RECORDS DANS LES PERMUTATIONS

Dominique Dumont
Université Louis-Pasteur, Strasbourg
&
Germain Kreweras
Université Pierre et Marie Curie, Paris

Euler a étudié la célèbre fraction continue

(1) $1/1-x/1-x/1-2x/1-2x/\dots \quad = \sum_{n\geqslant 0} n!\, x^n$

et a introduit également [3] l'extension suivante :

(2) $1/1-ax/1-x/1-(a+1)x/1-2x/\dots = 1+ax+a(a+1)x^2+\dots+a(a+1)\dots(a+n-1)x^n+\dots$

Notre objectif est d'étudier les polynômes $F_n(a,b)$ définis par l'introduction naturelle d'une variable supplémentaire b :

(3) $1/1-ax/1-bx/1-(a+1)x/1-(b+1)x/\dots/1-(a+n)x/1-(b+n)x/\dots = \sum_{n\geqslant 0} F_n(a,b)x^n$

Ces polynômes sont liés à la série hypergéométrique de la façon suivante : on considère [6] la série formelle

(4) $\Omega(a,b;x)=1+ab\,x+a(a+1)b(b+1)\frac{x^2}{2!}+\dots+a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)\frac{x^n}{n!}+\dots$

qui n'est autre que $\lim_{c\to\infty} F(a,b,c\,;\,cx)$ et porte de ce fait le nom de série hypergéométrique confluente. Mais cette série a un rayon de convergence nul. L'identité évidente

(5) $\Omega(a,b\,;\,x)=\Omega(a,b-1\,;\,x)+ax\,\Omega(a+1,b\,;\,x)$

réécrite sous la forme

$$(6)\quad \frac{\Omega(a,b\,;x)}{\Omega(a,b-1\,;x)} = \cfrac{1}{1 - ax\,\dfrac{\Omega(a+1,b\,;x)}{\Omega(a,b\,;x)}}$$

conduit par itération à la fraction continue considérée plus haut :

$$(3')\quad \frac{\Omega(a,b\,;x)}{\Omega(a,b-1\,;x)} = 1/1-ax/1-bx/1-(a+1)x/1-(b+1)x/\ldots/1-(a+n)x/1-(b+n)x/\ldots = \sum_{n\geqslant 0} F_n(a,b)x^n$$

$$= F(a,b\,;x)$$

Nous introduisons de même les polynômes $C_n(a,b)$ donnés par :

$$(7)\quad ax\,\frac{\Omega(a+1,b\,;x)}{\Omega(a,b\,;x)} = ax/1-bx/1-(a+1)x/1-(b+1)x/\ldots = \sum_{n\geqslant 1} C_n(a,b)x = C(a,b\,;x)$$

Notons encore sur la série Ω les identités

$$(8)\quad ax[\Omega(a+1,b\,;x)-\Omega(a,b\,;x)] = bx[\Omega(a,b+1\,;x) - \Omega(a,b\,;x)]$$

$$= ab\,x^2\,\Omega(a+1,b+1\,;x)\ ,$$

qui s'écrivent

$$(8')\quad C(a,b\,;x) - ax = bx\,F(a,b+1\,;x) - bx = ab\,x^2\,\frac{\Omega(a+1,b+1\,;x)}{\Omega(a,b\,;x)}$$

de même que (5) s'écrit encore

$$(5')\quad F(a,b\,;x) = 1 + F(a,b\,;x)\,C(a,b\,;x)\ ;$$

ces identités conduisent, sur les polynômes F_n et C_n, à la récurrence suivante :

$$F_0 = 1 \qquad C_1 = a$$

$$(9)\quad C_n(a,b) = b\,F_{n-1}(a,b+1)$$

$$(10)\quad F_n(a,b) = \sum_{k=1}^{n} C_k(a,b)\,F_{n-k}(a,b)$$

Les coefficients de ces polynômes sont des entiers non-négatifs dont nous allons maintenant donner une signification énumérative.

Cette signification sera liée aux notions de records et d'anti-records d'une permutation et à la notion de connexité. Dans une permutation de $\{1,2,\dots,n\} = [n]$, considéréecomme un mot de n lettres, nous appelons record tout terme qui n'a aucun terme plus grand à sa gauche et anti-record tout terme qui n'a aucun terme plus petit à sa droite ; et nous appelons anti-record exclusif tout anti-record qui n'est pas en même temps un record.

Nous établirons que le coefficient de $a^r\ b^s$ dans $F_n(a,b)$ est le nombre de permutations de $[n]$ qui ont r records et s anti-records exclusifs, et que le coefficient de $a^r\ b^s$ dans $C_n(a,b)$ a la même signification pour les permutations connexes de $[n]$, c'est-à-dire pour celles dans lesquelles l'ensemble des i premiers termes ne coïncide avec $[i]$ pour aucun i inférieur à n ; l'énumération des permutations connexes a été faite par Comtet [1] [2], qui les appelle "indécomposables".

Notre principal outil sera une transformation particulière ρ qui fait correspondre à toute permutation x de $[n]$ une permutation $y = \rho(x)$ de $[n-1]$.

Soit $x = x_1\ x_2\ \dots\ x_n$ ou $x(1)\ x(2)\ \dots\ x(n)$ une permutation quelconque de $[n]$ et soit $S = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ l'ensemble des positions des anti-records de x , avec $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ $(=n)$. On définit y_i ou $y(i)$ comme suit :

$$
\begin{array}{lll}
\text{si} & i \notin S & y(i) = x(i) - 1 \\
\text{si} & i \in S & y(i_1) = x(i_2) - 1 \\
 & & y(i_2) = x(i_3) - 1 \\
 & & \text{---------} \\
 & & y(i_{s-1}) = x(n) - 1
\end{array}
$$

Exemple : $n = 9$, anti-records soulignés

$x = 2\ 8\ \underline{1}\ 9\ \underline{3}\ 7\ 5\ \underline{4}\ \underline{6}$ $\qquad S = \{3,\ 5,\ 8\} \cup \{9\}$

$y = \underline{1}\ 7\ \underline{2}\ 8\ \underline{3}\ 6\ \underline{4}\ \underline{5}$

La définition de ρ entraîne que si x_i est un anti-record de x autre que x_n, y_i est aussi un anti-record de y. L'ensemble T des positions d'anti-records de y <u>inclut</u> donc l'ensemble $S - \{n\}$, comme l'illustre l'exemple ci-dessus.

Si l'on veut déterminer <u>toutes</u> les <u>antécédentes</u> d'une permutation donnée y de [n-1], c'est-à-dire tous les x tels que $\rho(x) = y$, il suffit de se donner une partie S' <u>arbitraire</u> de l'ensemble T des anti-records de y. La permutation x dont les anti-records autres que x_n occupent les positions S' est alors entièrement déterminée :

si $S' = \{i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}\}$, il suffira de définir x comme suit :

$$
\begin{array}{llll}
\text{pour} & i \notin S', & x(i) & = y(i) + 1 \\
\text{pour} & i \in S', & x(i_1) & = 1 \\
 & & x(i_2) & = y(i_1) + 1 \\
 & & \multicolumn{2}{l}{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-} \\
 & & x(i_{s-1}) & = y(i_{s-2}) + 1 \\
\text{enfin pour} & i = n, & x(n) & = y(i_{s-1}) + 1
\end{array}
$$

Par exemple la permutation y qui résultait de l'exemple considéré plus haut, et pour laquelle $T = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, si l'on voulait en chercher l'antécédente correspondant à $S' = \{5,7\}$ $(\subset T)$, et non plus à $\{3, 5, 8\}$, donnerait un autre x, à savoir $2\ 8\ 3\ 9\ \underline{1}\ 7\ \underline{4}\ 6\ \underline{5}$.

Il suit de là que si y est une permutation de [n-1] donnée ayant t anti-records, le nombre d'antécédentes de y qui ont s anti-records est le binomial $\binom{t}{s-1}$.

Notons également une propriété de la transformation ρ qui nous sera utile : quel que soit i, l'ensemble des i premiers termes de $y = \rho(x)$ est majoré globalement par l'<u>ensemble</u> des i premiers termes de x. Il s'agit non pas d'une majoration terme à terme, mais d'une majoration <u>globale</u>, laquelle est si l'on veut une majoration terme à terme après récriture des deux ensembles dans l'ordre croissant.

Appelons $\mathcal{F}(n, r, s)$ l'ensemble des permutations de [n] qui ont r records et s anti-records exclusifs, et f(n, r, s) son cardinal ; on doit évidemment avoir $1 \leqslant r \leqslant n$ et $r+s \leqslant n$, d'où $0 \leqslant s \leqslant n-1$. Appelons de même $\mathcal{C}(n, r, s)$ la partie de $\mathcal{F}(n, r, s)$ constituée par les permutations connexes, et c(n, r, s) son cardinal.

Remarquons d'abord que si dans une permutation x le k-ième terme x_k est à la fois record et anti-record, x n'est certainement pas connexe. C'est évident si $k = 1$; si $k \geqslant 2$ cela implique que tous les termes à gauche de x_k sont inférieurs à x_k et que tous les termes à droite de x_k sont supérieurs à x_k , donc que $x_k = k$ et $\{x_1\ x_2\ \dots\ x_{k-1}\} = [k-1]$.

Il en résulte notamment, pour $n \geqslant 2$, la propriété de symétrie (qui se constate aussi sur (8')) $c(n,r,s)=c(n,s,r)$. En effet pour les permutations connexes, nous savons maintenant que tous les anti-records sont exclusifs. Mais les permutations connexes x sont en involution avec les permutations x' qui s'en déduisent par "retournement et complémentation", opération qui échange records et anti-records.

Exemple :

$$x = \overline{4}\ 2\ \underline{1}\ \overline{6}\ \underline{3}\ \underline{5} \qquad\qquad x' = \overline{2}\ \overline{4}\ \underline{1}\ \overline{6}\ 5\ \underline{3}$$

(records surlignés, anti-records soulignés).

(Bien entendu cette propriété de symétrie est propre à c et n'existe pas pour f).

Il résulte aussi de la même remarque que si une permutation x est connexe, l'ensemble R des positions des records de $\rho(x)$ est le même que celui des records de x .

Donnons-nous maintenant une permutation quelconque y de [n-1] et cherchons les antécédents connexes x de y .
Appelons R l'ensemble des positions des records de y , T* l'ensemble des positions de tous les anti-records de y , et $T(\subset T^*)$ l'ensemble des positions des anti-records exclusifs de y . Nous avons vu que tout antécédent x de y s'obtient à partir d'une partie S' arbitraire de T* et que $S' \cup \{n\}$ est alors l'ensemble

des positions des anti-records de x. Si l'on veut que x soit connexe, il faut donc choisir S' de façon qu'il soit inclus non seulement dans T^* mais dans T ; ce qui, pour un cardinal t de T connu et pour un cardinal $s-1$ de S' imposé, est possible de $\binom{t}{s-1}$ manières distinctes.

Reste à montrer qu'un tel choix de S' suffit pour que x soit connexe. Or supposons que x ne soit pas connexe. Il existe alors un entier k plus petit que n et tel que $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = [k]$. x_k est certainement un anti-record de x puisque tous les termes situés à sa droite sont plus grands que k, donc plus grands que x_k ; donc $k \in S'$. Le plus petit, et par conséquent le plus à gauche, des anti-records de x situés au-delà de la position k, a pour valeur $k+1$, d'où il résulte que $y_k = k$; comme, en vertu de la remarque de "majoration globale" faite plus haut, on a aussi $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} = [k]$, y_k est un record de y, donc certainement pas un anti-record exclusif. On en conclut que $k \notin T$. Le fait que $k \in S'$ et $k \notin T$ est incompatible avec le choix d'un S' inclus dans T ; l'hypothèse que x n'est pas connexe conduit donc à une contradiction.

Il résulte de tout ce qui précède que l'on a

$$(9') \qquad c(n,r,s) = \sum_{t=s-1}^{n-1} \binom{t}{s-1} f(n-1,r,t) \quad .$$

On a défini $f(n,r,s)$ comme le nombre de permutations de $[n]$ qui ont r records et s anti-records exclusifs, et $c(n,r,s)$ le nombre de celles d'entre-elles qui sont connexes. Il est facile de donner plus généralement une expression du nombre $f_k(n,r,s)$ de celles dont la "première composante connexe" est de longueur k, ce qui signifie que k est le plus petit entier tel que $\{x_1\ x_2 \ldots x_k\} = [k]$; de ce fait $c(n,r,s)$ n'est rien d'autre que $f_n(n,r,s)$. En effet, si parmi les r records d'une permutation, il y en a λ qui appartiennent à sa première composante connexe et si parmi les s anti-records exclusifs il y en a μ qui appartiennent à cette même composante connexe, on a la formule

$$(10') \qquad f_k(n,r,s) = \sum_{(\lambda,\mu)} c(k,\lambda,\mu)\ f(n-k,r-\lambda,s-\mu)$$

On a évidemment d'autre part

$$(10'') \qquad f(n,r,s) = \sum_{k=1}^{n} f_k(n,r,s) \quad .$$

Or les formules (1') et (2") sont exactement celles qui résultent de l'identification des coefficients de $a^r b^s$ dans les formules (1) et (2) . Ces coefficients ont donc bien la signification énumérative annoncée ; leurs valeurs numériques pour $n \leqslant 6$ sont données par les tableaux ci-dessous. On remarque

(1°) que dans les tableaux F_n les sommes de lignes sont les nombres de Stirling de 1ère espèce, ce qui confirme le fait bien connu que ces nombres répartissent les permutations suivant leurs nombres de records.

(2°) que dans les tableaux F_n et C_n les termes eux-mêmes des lignes $r = 1$ sont eux aussi des nombres de Stirling de 1ère espèce ; cela résulte du fait que les permutations de [n] à un seul record sont celles qui commencent par n donc qui sont automatiquement connexes, et du fait que la répartition par nombre d'anti-records est la même que la répartition par nombre de records.

(3°) que les termes des tableaux F_n et C_{n+1} correspondant à $r + s = n$ sont les nombres de Narayana $\frac{1}{n}\binom{n}{r}\binom{n}{r-1}$ [5], ce qui confirme un résultat établi dans [4].

F_1	s = 0
r=1	1

C_2	s = 1
r=1	1

F_2	s = 0	1
r=1	0	1
2	1	

C_3	s = 1	2
r=1	1	1
2	1	

F_3	s = 0	1	2
r=1	0	1	1
2	0	3	
3	1		

C_4	s = 1	2	3
r=1	2	3	1
2	3	3	
3	1		

F_4	s = 0	1	2	3
r=1	0	2	3	1
2	0	5	6	
3	0	6		
4	1			

C_5	s = 1	2	3	4
r=1	6	11	6	1
2	11	17	6	
3	6	6		
4	1			

F_5	s = 0	1	2	3	4
r= 1	0	6	11	6	1
2	0	15	25	10	
3	0	15	20		
4	0	10			
5	1				

C_6	s = 1	2	3	4	5
r=1	24	50	35	10	1
2	50	95	55	10	
3	35	55	20		
4	10	10			
5	1				

Voici à titre d'exemple, la liste des $\underline{5}$ permutations de [4] à 2 records (surlignés) et 1 anti-record exclusif (souligné) :

$\overline{1}\ \overline{4}\ 3\ \underline{2}$

$\overline{2}\ \overline{4}\ 3\ \underline{1}$

$\overline{3}\ 2\ \underline{1}\ 4$

$\overline{3}\ \underline{2}\ \overline{4}\ \underline{1}$

$\overline{3}\ \overline{4}\ 2\ \underline{1}$

<u>Trois</u> d'entre elles (la 2è, la 4è et la 5è) sont connexes.

<u>Références</u>

[1] L. Comtet, Sur les coefficients de l'inverse de la série formelle $\Sigma n!t^n$, C. R. Acad. Sci. Paris 275 (1972), 569-572.

[2] L. Comtet, Advanced Combinatorics, Reidel, p. 261-262, ex.14 (1974).

[3] L. Euler, De transformatione seriei divergentis $1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + \ldots$ in fractionem continuam, Nova Acta Acad. Sci. Petropol., (1784).

[4] G. Kreweras, Classification des permutations suivant certaines propriétés ordinales de leur représentation plane, in <u>Permutations</u> (Actes du Colloque sur les permutations, juillet 1972 Paris), <u>Mouton & Cie</u>, 1974, p. 110.

[5] T.V. Narayana, Sur les treillis formés par les partitions d'un entier, C.R.Ac.Sc., 240-I, (1955), p. 1188.

[6] H.S. Wall, Analytic Theory of Continued fractions, Chelsea (1948), p. 336, 350.