XIV^e Séminaire Lotharingien de Combinatoire
Burg Feuerstein, mai 1986

INTERPOLATION DANS LES $\mathbb{K}$ - ESPECES

Gilbert Labelle
Département de mathématiques et d'informatique
U. du Québec à Montréal

---------- **RÉSUMÉ** ----------

Soit F une espèce ne possédant aucune structure sur le vide et une seule sur chaque singleton (ex.: l'espèce C des permutations circulaires) et soit H une espèce quelconque. Pour $n \in \mathbb{N}$ désignons par $F^{\langle n \rangle} = F \circ F \circ \cdots \circ F$ (n ieme itérée) l'espèce des F-arborescences de hauteur $\leq n$ et par $H \circ F^{\langle n \rangle}$ l'espèce des H-forêts de telles arborescences. Il s'agit de donner un sens combinatoire à l'expression $H \circ F^{\langle t \rangle}$ pour des valeurs de t qui ne sont pas des entiers naturels. Nous montrons que lorsque $t \in \mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est un anneau binômial, alors $H \circ F^{\langle t \rangle}$ est une $\mathbb{K}$-espèce au sens de Y.N. Yeh [3]. Le résultat est aussi vrai lorsque H et F sont elles-mêmes des $\mathbb{K}$-espèces ainsi que dans le cas multisorte. Notre approche est simple : elle consiste en une adaptation, au contexte des $\mathbb{K}$-espèces, de la formule classique d'interpolation de Newton $E^t = (I + \Delta)^t = \sum_{\nu \geq 0} \binom{t}{\nu} \Delta^\nu$ (où E et Δ sont des opérateurs de "translation" et de "différence" bien choisis). Cette technique a déjà été utilisée par par G.Labelle[2] pour effectuer l'itération "continue" des séries formelles puis, par A.Joyal[1bis], pour effectuer combinatoirement l'inversion ($t = -1$) des espèces virtuelles (i.e. $\mathbb{Z}$ - espèces).

--- LE PROBLÈME D'INTERPOLATION ---

Soit F une espèce de structures telle que

$F[\emptyset] = \emptyset$, i.e. aucune F-structure sur le vide et

$F'[\emptyset] = 1$, i.e. une seule F-structure sur les singletons.

Décomposition moléculaire de F :

$$\begin{aligned} & F_0 + F_1 \quad + \quad F_2 \quad + \quad F_3 \quad + \ldots \\ = \; & 0 + X \quad + (a_1E_2+a_2X^2) \quad + (b_1E_3+b_2C_3+b_3XE_2+b_4X^3) + \ldots \end{aligned}$$

où $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots \in \mathbb{N}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$F^{\langle n \rangle} = F \circ F \circ \ldots \circ F \qquad (n^e \text{ itérée}).$$

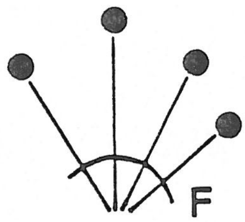
Plus généralement, considérons l'espèce

$$H \circ F^{\langle n \rangle}$$

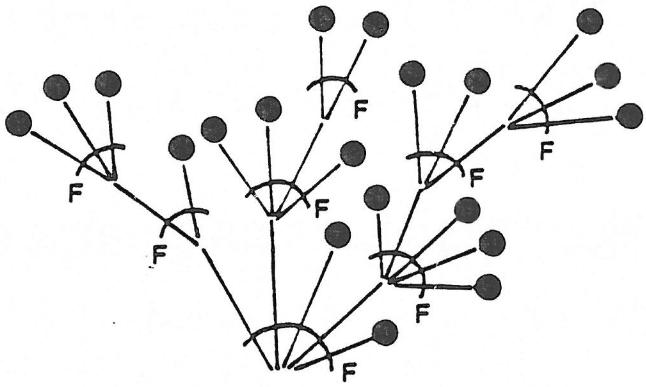
où H est une espèce quelconque, $n \in \mathbb{N}$.

Graphiquement,

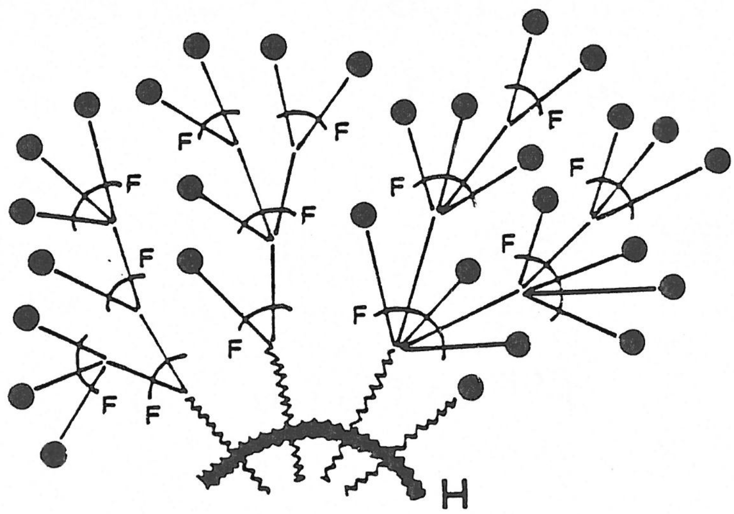
Une F-structure :



Une $F^{\langle n \rangle}$-structure
c'est une F-arborescence
de hauteur $\leq n$:



Une $H \circ F^{\langle n \rangle}$-structure
c'est une H-forêt de
F-arborescences
de hauteurs $\leq n$:



<u>Problème</u> : Donner un sens "combinatoire" à

$$H \circ F^{\langle t \rangle}$$

où t n'est pas nécessairement un entier ≥ 0.

Nous allons donner une solution à ce problème en nous plaçant dans le contexte des $\mathbb{K}$-espèces au sens de Yeong Nan YEH [3].

---------- LES $\mathbb{K}$-ESPÈCES ----------

Définition. Un anneau $\mathbb{K}$ est dit **binômial** ssi

a) $\exists$ $\mathbb{Q}$ - algèbre $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$

et

b) $\forall t \in \mathbb{K}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$: $t(t-1)(t-2)...(t-\nu+1) / \nu! \in \mathbb{K}$.

Exemples: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}[i]$ sont des anneaux binômiaux

$\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Z}[i]$ n'en sont pas $\left(\binom{i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \notin \mathbb{Z}[i]\right)$

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des (types d'isomorphie d') espèces moléculaires (i.e. indécomposables sous +).

Définition Une $\mathbb{K}$-espèce est une $\mathbb{K}$-combinaison linéaire formelle infinie d'espèces moléculaires. [Si $\mathbb{K}=\mathbb{Z}$ on dit espèce virtuelle].

Toute $\mathbb{K}$-espèce H s'écrit donc, de façon unique, sous la forme

$$H = \sum_{M \in \mathcal{M}} c_M M$$
$$= s1 + tX + (u_1E_2 + u_2X^2) + (v_1E_3 + v_2C_3 + v_3XE_2 + v_4X^3) + \ldots$$

où $s, t, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots \in \mathbb{K}$.

Désignons par $\mathcal{Q}$ l'ensemble des (types d'isomorphie d') espèces atomiques (i.e. moléculaires et indécomposables sous le produit d'espèces).

<u>Théorème</u> Yeh [3]. Le module des $\mathbb{K}$-espèces est en fait un **anneau** isomorphe à l'anneau

$$\mathbb{K}[[\mathcal{Q}]]$$

des séries formelles à une infinité de variables.

<u>Note</u> : Les opérations de dérivation et de substitution (pléthysme) s'étendent, de façon naturelle, aux $\mathbb{K}$ - espèces. (Le cas de l'extension de la substitution n'est pas évident, voir Joyal [1] et Yeh [3]).

Cet anneau est muni d'une infinité d'autres opérations. En fait, $\mathbb{K}[[\mathcal{Q}]]$ est un β-anneau au sens de Joyal [1].

SOLUTION AU PROBLÈME $H \circ F^{\langle t \rangle} = ?$

<u>Lemme</u>. Soit $\mathbb{K}$ un anneau binômial, soit $\mathcal{P}$ un $\mathbb{K}$-module et considérons le $\mathbb{K}$-module

$$\mathcal{P}^{\mathbb{N}} = \{ p = (p_k)_{k\geq 0} \mid p_k \in \mathcal{P} \text{ , } k=0,1,2,\ldots \}.$$

Définissons les opérateurs linéaires

$$\Delta \text{ , } E : \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \quad \text{par}$$

$$(\Delta p)_k = p_{k+1} - p_k \text{ , } \qquad (Ep)_k = p_{k+1} \text{ , } k=0,1,2,\ldots .$$

On a : $\quad \forall n \in \mathbb{N}: \; E^n = (I + \Delta)^n = \sum_{\nu \geq 0} \binom{n}{\nu} \Delta^\nu$

Explicitement :

$$\forall n,k \in \mathbb{N}: \; p_{n+k} = (E^n p)_k = \sum_{\nu \geq 0} \binom{n}{\nu} (\Delta^\nu p)_k .$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; p_n = (E^n p)_0 = \sum_{\nu \geq 0} \binom{n}{\nu} (\Delta^\nu p)_0 .$$

"<u>**Définition**</u>" ($\mathbb{K}$-interpolation de Newton)

Si la suite $(\Delta^\nu p)_0$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ est "sommable",

<u>on définit</u>, pour tout $t \in \mathbb{K}$,

$$p_t = (E^t p)_0 = \sum_{\nu \geq 0} \binom{t}{\nu} (\Delta^\nu p)_0 \quad \in \mathcal{P}.$$

<u>**Note**</u> : $\quad p_{-1} = (E^{-1} p)_0 = \sum_{\nu \geq 0} (-1)^\nu (\Delta^\nu p)_0 \quad \in \mathcal{P}.$

Plaçons-nous dans le cas où

$$\mathcal{P} = \mathbb{K}[[a]] \quad \text{et} \quad p_k = H \circ F^{\langle k \rangle} \in \mathbb{K}[[a]].$$

Prenons $E = E_F, \Delta = \Delta_F : \mathbb{K}[[a]] \to \mathbb{K}[[a]]$ définis par (comparer avec [2]) :

$$E_F G = G \circ F, \qquad \Delta_F G = G \circ F - G.$$

<u>Théorème</u>. Soit $\mathbb{K}$ un anneau binômial, H une $\mathbb{K}$-espèce et F une espèce de la forme

$$F = X + (a_1E_2 + a_2X^2) + (b_1E_3 + b_2C_3 + b_3XE_2 + b_4X^3) + \ldots .$$

La formule

$$H \circ F^{\langle t \rangle} = \sum_{\nu \geq 0} \binom{t}{\nu} \Delta_F^{\nu} H$$

définit une famille

$$(H \circ F^{\langle t \rangle})_{t \in \mathbb{K}}$$

de $\mathbb{K}$-espèces satisfaisant

$$\forall n \in \mathbb{N} : H \circ F^{\langle t \rangle} \Big|_{t:=n} = H \circ F \circ \ldots \circ F \quad \text{(n facteurs)}$$

et

$$\forall s \forall t \in \mathbb{K} : (H \circ F^{\langle t \rangle}) \circ F^{\langle s \rangle} = H \circ F^{\langle t+s \rangle}.$$

<u>Démonstration</u>. Il suffit d'établir la sommabilité de la famille $(\Delta_F^\nu H)_{\nu\geq 0}$. En effet, les deux dernières propriétés découlent alors du **lemme** et de la "**formule de Vandermonde**" :

$$\left(\sum_{\nu\geq 0}\binom{t}{\nu}\Delta_F^\nu\right)\left(\sum_{\nu\geq 0}\binom{s}{\nu}\Delta_F^\nu\right) = \sum_{\nu\geq 0}\binom{t+s}{\nu}\Delta_F^\nu .$$

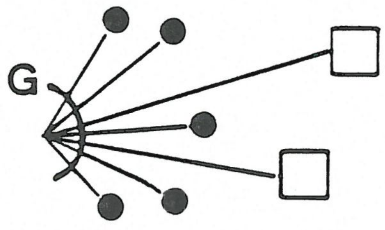
Sommabilité de $(\Delta_F^\nu H)_{\nu\geq 0}$: Par linéarité, il suffit de se restreindre au cas des espèces et de montrer que

$$[\,G : \text{espèce}\,,\ \mathrm{ord}\, G \geq k\,] \implies \mathrm{ord}\,\Delta_F G \geq k+1.$$

On peut écrire $\quad F = X + \hat{F}\quad$ où $\ \mathrm{ord}\,\hat{F} \geq 2.$

Donc $\Delta_F G = G(X+\hat{F}) - G(X) = G(X+Y) - G(X)\,\big|_{Y:=\hat{F}}$

Mais une $[G(X+Y) - G(X)]$-structure c'est une

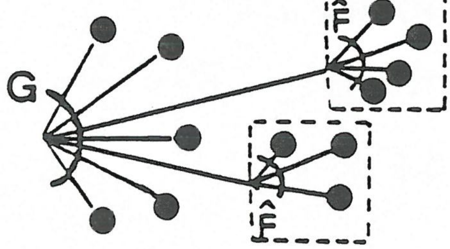


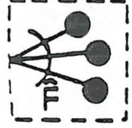
X : ● Y : □

<u>avec au moins</u> k ● ou □

<u>dont au moins un</u> □ .

Donc, une $\Delta_F G$-structure c'est une



<u>avec au moins une</u> 

D'où $\quad \mathrm{ord}\,\Delta_F G \geq k+1.$

Posant $H = X$, $F^{\langle t \rangle} = \sum_{\nu \geq 0} \binom{t}{\nu} \Delta_F^\nu X$, on obtient:

<u>Corollaire 1</u> Pour toute espèce F de la forme

$$F = X + (a_1 E_2 + a_2 X^2) + (b_1 E_3 + b_2 C_3 + b_3 X E_2 + b_4 X^3) + \ldots$$

il existe une famille $(F^{\langle t \rangle})_{t \in \mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$-espèces

$$F^{\langle t \rangle} = X + (a_1(t) E_2 + a_2(t) X^2) + (b_1(t) E_3 + b_2(t) C_3 + b_3(t) X E_2 + b_4(t) X^3) + \ldots$$

où

$$a_1(t),\ a_2(t),\ b_1(t),\ b_2(t),\ b_3(t),\ b_4(t), \ldots$$

sont des <u>polynômes</u> en t, satisfaisant

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad F^{\langle t \rangle} \Big|_{t:=n} = F \circ \ldots \circ F \quad \text{(n facteurs)}$$

et

$$\forall s\, \forall t \in \mathbb{K}: \quad F^{\langle t \rangle} \circ F^{\langle s \rangle} = F^{\langle t+s \rangle}.$$

Faisant $t = -1$, on obtient en particulier:

<u>Corollaire 2</u> Pour toute espèce F de la forme

$$F = X + (a_1 E_2 + a_2 X^2) + (b_1 E_3 + b_2 C_3 + b_3 X E_2 + b_4 X^3) + \ldots$$

il existe une unique espèce virtuelle $F^{\langle -1 \rangle}$

telle que $F \circ F^{\langle -1 \rangle} = F^{\langle -1 \rangle} \circ F = X$.

Elle est donnée par

$$F^{\langle -1 \rangle} = \sum_{\nu \geq 0} (-1)^\nu \Delta_F^\nu X .$$

Remarque: La formule d'inversion précédente est due à Joyal [1bis] qui l'a établie dans le contexte plus large où F est elle-même une espèce virtuelle. Il en a fait une étude combinatoire poussée. C'est d'ailleurs lui qui, pour la première fois, a remarqué que l'opérateur Δ_F pouvait être utilisé pour l'inversion en théorie des espèces. On peut montrer que tous les résultats précédents sont encore valables lorsque F est elle-même une $\mathbb{K}$-espèce.

Exemples: 1) (Joyal [1bis], Yeh [3]) Prenons l'espèce $F = E-1 = \exp(X)-1$ de tous les **ensembles non vides**, on obtient alors l'espèce <u>virtuelle</u>

$$F^{\langle -1\rangle} = \Lambda(X) = \mathcal{L}og(1+X)$$

qui satisfait l'équation fonctionnelle "combinatoire"

$$\Lambda(X) + \Lambda(Y) = \Lambda(X+Y+XY).$$

L'espèce virtuelle "parente"

$$\mathcal{L}og(1/(1-X))$$

(à ne pas confondre avec l'espèce $C(X)$ des cycles orientés!) a été utilisée par Joyal en rapport avec l'étude des algèbres de Lie libres.

2) Yeh [3] a montré qu'<u>il n'existe pas</u> de $\mathbb{Z}$-espèce (i.e. espèce virtuelle) $\mathcal{S}in = \mathcal{S}in(X)$ telle que

$$\mathcal{S}in(X) = X + \cdots, \quad \mathcal{S}in'' = -\mathcal{S}in, \quad (\mathcal{S}in)^2 + (\mathcal{S}in')^2 = 1.$$

Il a cependant établi que $\mathcal{S}in$ <u>existe en tant que</u> $\mathbb{Q}$-<u>espèce</u>. On peut donc parler de la $\mathbb{Q}$-espèce $\mathcal{S}in^{\langle -1\rangle}$.

Remarque: Ayant été établis dans l'anneau $\mathbb{K}[[\mathcal{C}]]$, tous les résultats précédents "passent" automatiquement au niveau des <u>séries indicatrices des cycles</u> et des <u>séries génératrices</u>. De plus, ils peuvent facilement s'étendre au cas <u>multisorte</u>.

-------- RÉFÉRENCES --------

[1] A. Joyal. Règle des signes en algèbre combinatoire, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol. VII, No.5,1985,285-290.

[1bis] A. Joyal. Foncteurs analytiques et espèces de structures. Proc. Colloque de combinatoire énumérative UQAM 1985, Springer Lecture Notes in Math. (à paraître).

[2] G. Labelle. Sur l'inversion et l'itération continue des séries formelles , Europ. J. Combin., Vol.1,1980,113-138.

[3] Y.N. Yeh. On the Combinatorial Species of Joyal , Thèse de Ph.D., State University of New York at Buffalo, 1985.

Département de Mathématiques et d'Informatique

Université du Québec à Montréal

C.P. 8888, Succ. "A", Montréal (Québec)

CANADA, H3C 3P8

1986