XIV^{e} Séminaire Lotharingien de Combinatoire
Burg Feuerstein, mai 1986

q-ANALOGUES EN THEORIE DES ESPECES

Hélène Décoste
Département de mathématiques et de stastistique
U. de Montréal

---------- **RÉSUMÉ** ----------

En théorie des fonctions symétriques, il existe une substitution très utile (Macdonald, Foata, Stanley, ...) permettant de générer plusieurs q-analogues. Comme l'a remarqué Joyal en 1982, c'est par le biais des séries indicatrices que l'on peut relier cette substitution à la théorie combinatoire des espèces. Le but du présent exposé est de développer, dans ce contexte, une théorie du q-comptage des espèces de structures (pondérées ou non). Un certain nombre de résultats généraux sont présentés et plusieurs exemples particuliers sont traités explicitement: q-comptage des espèces atomiques de degré ≤ 5, des dérangements, des configurations d'Hermite, etc. Ce travail fait partie de ma thèse de Ph.D. présentement en cours de rédaction.

Pour $n \in \mathbb{N}$, les formules

$$[n]_q = 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1} = \frac{(1-q^n)}{(1-q)}$$

$$n!_q = [1]_q[2]_q \ldots [n]_q = \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{(1-q)^n}$$

définissent les q-analogues classiques des suites

$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ et $0!, 1!, 2!, 3!, 4!, \ldots, n!, \ldots$

Problème: Étant donnée une espèce de structures M, qui est dénombrée par la suite d'entiers

$|M[0]|, |M[1]|, |M[2]|, |M[3]|, \ldots, |M[n]|, \ldots$

définir un q-comptage de M:

$$\left.\begin{array}{l} M : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{E} \\ \text{dénombrée par} \\ |M[n]|,\ n \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} |M[n]|_q = \ ?\ ,\ n \geq 0 \\ \text{tels que} \\ \lim_{q \to 1} |M[n]|_q = |M[n]| \end{array}\right.$$

Solutions: • (Hofbauer[4]) Espèces linéaires

• Nous utiliserons plutôt la série indicatrice des cycles de l'espèce M,

$$Z_M(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n\geq 0} 1/n! \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{Fix}_M[\sigma]\ I[\sigma]$$

où $I[\sigma] = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \ldots$

$$Z_M(x,0,0,0,\ldots) = M(x) = \sum_{n\geq 0} |M[n]|\ x^n/n!$$

$$\Big\uparrow\ q \to 1$$

$$Z_M(x_1,x_2,\ldots)\Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} = M(x;q)$$

$$\Big\downarrow\ q \to 0$$

$$Z_M(x,x^2,x^3,\ldots) = \tilde{M}(x) = \sum_{n\geq 0} |\tilde{M}[n]|\ x^n/n!$$

$$= \sum_{n\geq 0} |\pi_0 M[n]|\ x^n$$

DÉF.: Soit $M:\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{E}$ une espèce de structures. La *q-série génératrice* de M,

$$M(x;q) = \sum_{n\geq 0} |M[n]|_q \, x^n/n!_q,$$

ou *série génératrice des q-comptages* de M, est définie par:

$$M(x;q) = Z_M(x_1, x_2, \ldots)\Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}}$$

Remarque: (Gessel[3], Joyal[6]) Cette dernière substitution correspond à $\xi_k := (1-q)xq^{k-1}$, utilisée par Foata[2], Macdonald[8], Stanley[9],... en théorie des fonctions symétriques:

$$M(x;q) = \sum_{n\geq 0} \left[\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{Fix}_M[\sigma]\, I(\sigma) \Big|_{x_i := \sum_{k\geq 1} \xi_k^i} \right] \Big|_{\xi_k := (1-q)xq^{k-1}}$$

Prop.: Soit E l'espèce de tous les ensembles. L'unique substitution de la forme $x_i := f_i(q)x^i$, $i \geq 1$, qui satisfait $Z_E\big|_{x_i := f_i(q)x^i} = \sum_{n\geq 0} x^n/n!_q$ est donnée par $f_i(q)x^i := (1-q)^i x^i/(1-q^i)$.

Premiers exemples:

$E^\bullet$: espèce des ensembles pointés

$$E^\bullet(x) = \sum_{n\geq 0} n\ x^n/n!$$

$$E^\bullet(x;q) = \sum_{n\geq 0} [n]_q\ x^n/n!_q$$

$$\text{où } [n]_q = (1-q^n)/(1-q)$$

L : espèce des ordres linéaires

$$L(x) = \sum_{n\geq 0} n!\ x^n/n!$$

$$L(x;q) = \sum_{n\geq 0} n!_q\ x^n/n!_q$$

$$\text{où } n!_q = [1]_q[2]_q[3]_q \dots [n]_q$$

$E_k \cdot E$: espèce des sous-ensembles de cardinal k

$$E_k \cdot E\,(x) = \sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} x^n/n!$$

$$E_k \cdot E\,(x;q) = \sum_{n\geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^n/n!_q$$

$$\text{où } \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{n!_q}{k!_q(n-k)!_q}$$

THÉOREME:

Soit $M:\mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{E}$ une espèce de structures et $M(x;q) = \sum_{n\geq 0}|M[n]|_q\, x^n/n!_q$ sa q-série génératrice. Alors, pour $n\geq 0$, $|M[n]|_q$ est un polynôme en q à coefficients entiers positifs. ■

Le théorème se prouve via la théorie des fonctions symétriques. Pour les petites cardinalités, on peut le vérifier directement (en utilisant les tables de séries indicatrices données par J. Labelle[7]):

ESPECES MOLÉCULAIRES

$\|E_0\|_q = 1$	$n=0$	$\|E_3\|_q = 1$	$n=3$
$\|E_1\|_q = 1$	$n=1$	$\|C_3\|_q = 1+q^3$	
$\|E_2\|_q = 1$	$n=2$	$\|E_3^\bullet\|_q = 1+q+q^2$	
$\|L_2\|_q = 1+q$		$\|L_3\|_q = 1+2q+2q^2+q^3$	

ESPÈCES ATOMIQUES

$$\boxed{n=4}$$

$$|E_4|_q = 1$$

$$|E_4^{\pm}|_q = 1+q^6$$

$$|E_2 \circ E_2|_q = 1+q^2+q^4$$

$$|P_4^{bic}|_q = 1+2q^2+2q^4+q^6$$

$$|C_4|_q = 1+q^2+q^3+2q^4+q^5$$

$$|E_2 \circ L_2|_q = 1+q+3q^2+2q^3+3q^4+q^5+q^6$$

$$\boxed{n=5}$$

$$|E_5|_q = 1$$

$$|E_5^{\pm}|_q = 1+q^{10}$$

$$|P_5/\mathbb{Z}_2|_q = 1+q^4+q^5+q^6+q^7+q^8$$

$$|P_5|_q = 1+q^2+q^3+2q^4+2q^5+2q^6+q^7+q^8+q^{10}$$

$$|(L_2 \cdot C_3)/\mathbb{Z}_2|_q = 1+q+2q^2+2q^3+3q^4+2q^5+3q^6+2q^7+2q^8+q^9+q^{10}$$

$$|C_5|_q = 1+q^2+3q^3+4q^4+6q^5+4q^6+3q^7+q^8+q^{10}$$

PROP.: Soit M et N deux espèces de structures,

alors **1)** $M+N(x;q) = M(x;q)+N(x;q)$

2) $M\cdot N(x;q) = M(x;q)\cdot N(x;q)$

3) $M\circ N(x;q) =$

$$Z_M\left[N(x;q), N\left(\frac{(1-q)^2x^2}{1-q^2};q^2\right), N\left(\frac{(1-q)^3x^3}{1-q^3};q^3\right), \ldots\right] \blacksquare$$

Puisque toute espèce M se décompose comme somme d'espèces moléculaires,

$$M = \sum_{n\geq 0}\sum_{\mathcal{M}\in Mol(n)} a_{\mathcal{M}}\mathcal{M}, \quad a_{\mathcal{M}}\in\mathbb{N},$$

et que chaque espèce moléculaire $\mathcal{M}$ s'écrit (de façon unique, Yeh[10]) comme produit d'espèces atomiques, ces tables confirment le fait que pour $n\leq 5$, $|M[n]|_q \in \mathbb{N}[q]$.

Autres exemples:

$E^{\pm}$: espèce des ensembles orientés

$$|E^{\pm}[n]|_q = 1+q^{n(n-1)/2}, \quad n\geq 2.$$

C : espèce des cycles (permutations circulaires)

$$C(x) = \sum_{n\geq 1} (n-1)!\ x^n/n!$$

$$C(x;q) = \sum_{n\geq 1} |C[n]|_q\ \ x^n/n!_q \qquad \text{où}$$

$$|C[1]|_q = 1$$
$$|C[2]|_q = 1$$
$$|C[3]|_q = 1+q^3$$
$$|C[4]|_q = 1+q^2+q^3+2q^4+q^5$$
$$|C[5]|_q = 1+q^2+3q^3+4q^4+6q^5+4q^6+3q^7+q^8+q^{10}$$
$$|C[6]|_q = 1+2q^2+5q^3+8q^4+11q^5+17q^6+16q^7$$
$$+17q^8+15q^9+12q^{10}+7q^{11}+6q^{12}+2q^{13}+q^{14}$$

$$\vdots$$

$$|C[n]|_q = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d)\ \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q^d)^{n/d}}$$
$$= \frac{n!_q}{n} \sum_{d|n} \varphi(d)\ (1-q)^{n-n/d} / [d]_q^{n/d}$$

S : espèce des permutations

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} n!\ x^n/n!$$

$$S(x;q) = \sum_{n\geq 0} |S[n]|_q\ \ x^n/n!_q \qquad \text{où}$$

$$|S[0]|_q = 1$$

$$|S[1]|_q = 1$$

$$|S[2]|_q = 2$$

$$|S[3]|_q = 3+q+q^2+q^3$$

$$|S[4]|_q = 5+2q+5q^2+4q^3+5q^4+2q^5+q^6$$

$$|S[5]|_q = 7+5q+11q^2+16q^3+20q^4+20q^5+18q^6 +12q^7+7q^8+3q^9+q^{10}$$

$$|S[6]|_q = 11+8q+23q^2+37q^3+61q^4+73q^5 +98q^6+93q^7+97q^8+78q^9+63q^{10}+37q^{11} +27q^{12}+9q^{13}+4q^{14}+q^{15}$$

$$\vdots$$

$$|S[n]|_q = \sum_{\substack{(d_1,\ldots,d_n)\\ \sum \nu d_\nu = n}} \prod_{1\leq i\leq n} (1-q^i)^{1-d_i}$$

D : espèce des dérangements

$$D(x) = \sum_{n\geq 0} |D[n]|\ x^n/n!$$

$$\text{où } |D[n]| = n! \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k/k!$$

$$D(x;q) = \sum_{n\geq 0} |D[n]|_q\ x^n/n!_q \quad \text{où}$$

$$|D[0]|_q = 1$$

$$|D[1]|_q = 0$$

$$|D[2]|_q = 1$$

$$|D[3]|_q = 1+q^3$$

$$|D[4]|_q = 2+2q^2+q^3+3q^4+q^5$$

$\vdots$

$\vdots$

$$|D[n]|_q = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{k(k-1)/2} |S[n-k]|_q$$

$$= n!_q \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!_q} \sum_{\substack{(d_1,d_2,\ldots,d_{n-k}) \\ \sum \nu d_\nu = n-k}} q^{k(k-1)/2} \frac{(1-q)^{n-k}}{\prod_{1\leq i\leq n-k} (1-q^i)^{d_i}}$$

ESPÈCES PONDÉRÉES

DÉF: Soit $F_w : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{E}_A$ une espèce pondérée.

On associe à F_w les séries suivantes:

- La *série génératrice* de F_w :

$$F_w(x) = \sum_{n\geq 0} \text{poids}(F_w[n])\, x^n/n!$$

- La *série indicatrice* de F_w :

$$Z_{F_w} = \sum_{\substack{\underline{d}=(d_1,d_2,\ldots) \\ \sum \nu d_\nu < \infty}} \text{poids}_{F_w}(\underline{d})\ \underline{x}^{\underline{d}}/\text{aut}(\underline{d})$$

où $\underline{x}^{\underline{d}} = x_1^{d_1} x_2^{d_2} x_3^{d_3} \ldots$

$\text{aut}(\underline{d}) = 1^{d_1} d_1! \, 2^{d_2} d_2! \, 3^{d_3} d_3! \ldots$

$\text{poids}_{F_w}(\underline{d})$ = somme des poids des structures laissées fixes par une permutation de type $\underline{d}$.

- La *q-série génératrice* de F_w :

$$F_w(x;q) = \sum_{n\geq 0} |F_w[n]|_q \, x^n/n!_q$$

$$= Z_{F_w}(x_1, x_2, x_3, \ldots)\Big|_{x_i := (1-q)^i x^i/(1-q^i)}$$

THÉOREME:

1) $Z_{F_w}(x,0,0,\dots) = F_w(x)$

2) $Z_{F_w}(x,x^2,x^3,\dots) = \tilde{F}_w(x)$

3) $Z_{F_w+G_v} = Z_{F_w} + Z_{G_v}$, $Z_{F_w \cdot G_v} = Z_{F_w} \cdot Z_{G_v}$

4) $Z_{F_w \circ G_v} = Z_{F_w}(Z_{G_v})$ (Joyal[5])

$$= Z_{F_w}\big((Z_{G_v})_1, (Z_{G_{v^2}})_2, (Z_{G_{v^3}})_3, \dots\big)$$

où $v^n(s)=(v(s))^n$

et G_{v^n} est l'espèce G pondérée par le poids v^n. ■

Coroll.: Les q-séries pondérées "préservent" les opérations sur les espèces pondérées.

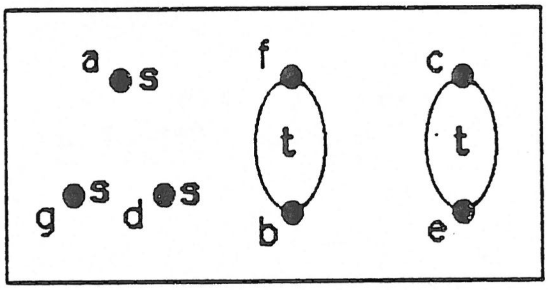
Exemples:

Les familles classiques de polynômes orthogonaux donnent lieu à des exemples intéressants d'espèces pondérées. Une même famille peut être décrite à l'aide de modèles non-isomorphes. Puis le passage aux q-séries peut fournir des q-analogues différents.

HERMITE

Modèle 1: $H_{s,t} = E(X_s)\cdot E((E_2)_t)$

$H_{s,t}$ est l'espèce des involutions (s, t)-pondérées:



Une involution sur $\{a,b,c,d,e,f,g\}$. Son poids est s^3t^2.

$$H_{s,t}(x) = \sum_{n\geq 0} H_n(s,t)\ x^n/n! = e^{sx+tx^2/2}$$

$$H_{s,t}(x;q) = \sum_{n\geq 0} H_n(s,t;q)\ x^n/n!_q$$

$$= \prod_{i\geq 1} \frac{1}{1-(1-q)q^{i-1}sx} \prod_{i\leq j} \frac{1}{1-(1-q)^2q^{i+j-2}tx^2}$$

$H_0(s,t;q) = 1$

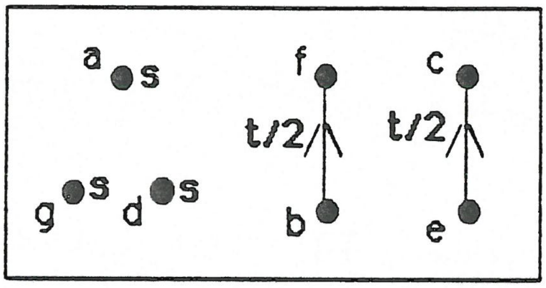
$H_1(s,t;q) = s$

$H_2(s,t;q) = s^2+t$

$H_3(s,t;q) = s^3+[3]st = s^3+(1+q+q^2)st$

HERMITE (bis)

Modèle 2: $\mathcal{H}_{s,t} = E(X_s)\cdot E((L_2)_{t/2})$



Une $\mathcal{H}$-structure sur $\{a,b,c,d,e,f,g\}$. Son poids est $s^3(t/2)^2$.

$$\mathcal{H}_{s,t}(x) = \sum_{n\geq 0} H_n(s,t)\ x^n/n! = e^{sx+(t/2)x^2}$$

$$\mathcal{H}_{s,t}(x;q) = \sum_{n\geq 0} \mathcal{H}_n(s,t;q)\ x^n/n!_q$$

$$= \prod_{i\geq 1} \frac{1}{(1-(1-q)q^{i-1}sx)} \prod_{i\geq 1} \left[\frac{1}{1-\frac{t}{2}(1-q)^2 q^{i-1} x^2}\right]^i$$

$\mathcal{H}_0(s,t;q) = 1$

$\mathcal{H}_1(s,t;q) = s$

$\mathcal{H}_2(s,t;q) = s^2 + \frac{1}{2}[2]t = s^2 + \frac{1}{2}(1+q)t$

$\mathcal{H}_3(s,t;q) = s^3 + \frac{1}{2}[2][3]st = s^3 + \frac{1}{2}(1+2q+2q^2+q^3)st$

Quelques formules:

$$|\mathbf{M}[n]|_q$$

$$= \sum_{\substack{(d_1,d_2,\ldots,d_n) \\ \Sigma \nu d_\nu = n}} \frac{\mathrm{Fix}_{\mathbf{M}}[d_1,d_2,\ldots,d_n]}{1^{d_1} d_1!\, 2^{d_2} d_2! \ldots n^{d_n} d_n!} P_n(d_1,d_2,\ldots,d_n;q)$$

$$\text{où} \quad P_n(d_1,d_2,\ldots,d_n;q) = \prod\nolimits_{1\le i\le n} (1-q^i)^{1-d_i} \in \mathbb{Z}[q]$$

$$= \sum_{0\le\mu\le n(n-1)/2} 1/n! \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{Fix}_{\mathbf{M}}[\sigma] \sum_{\Sigma i k_i=\mu} (-1)^{\Sigma k_i} \binom{1-\sigma_1}{k_1} \cdots \binom{1-\sigma_n}{k_n} q^\mu$$

$$= (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n) \sum_{(s,\varphi)\in \mathbf{M}_n(\mathbb{N})} q^{\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)}$$

$$\text{où} \quad \mathbf{M}(\mathbb{N}) = \sum\nolimits_{n\ge 0} \mathbf{M}_n(\mathbb{N}) = \sum\nolimits_{n\ge 0} (\mathbf{M}[n]\times\mathbb{N}^n)/\mathfrak{S}_n$$

$$= \sum_{\substack{\Sigma_{0\le i\le s} n_i = n \\ n_\nu>0,\, s\ge 0}} \left|\mathcal{O}\left(\prod\nolimits_{1\le i\le n}\mathfrak{S}_{n_i}\times\mathbf{M}[n]\to\mathbf{M}[n]\right)\right| \sum_{0\le i_1<\ldots<i_s} t_{i_1}^{n_1}\ldots t_{i_s}^{n_s} \Big|_{t_k:=(1-q)q^k}$$

... etc.

Références:

[1] J. Désarménien: "Les q-analogues des polynômes d'Hermite", Actes du Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Burg Feuerstein, septembre 1982.

[2] D. Foata: "Fonctions symétriques et applications combinatoires", Notes de conférences, Séminaire de combinatoire, UQAM 1981.

[3] I. Gessel: Communication verbale.

[4] J. Hofbauer: "A q-analog of Sheffer polynomials and the Exponential Formula", Commnication Verbale, Séminaire Lotharingien, Sainte-Croix aux Mines, mai 1983.

[5] A. Joyal: Communication verbale.

[6] A. Joyal: "λ-anneaux et combinatoire", Communication verbale, Séminaire de combinatoire UQAM, mars 1982.

[7] J. Labelle: "Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité", Ann. Sc. Math. du Québec, 9, no.1, 1985, 31-58.

[8] I.G. Macdonald: "Symmetric Functions and Hall Polynomials", Oxford Science Publications 1979.

[9] R. Stanley: "Theory and application of plane partitions I-II", Studies in Appl. Math., 50, 1971, 167-188, 259-279.

[10] Y.N. Yeh: "On the Combinatorial Species of Joyal", Thèse Ph.D., State Univ. of New York at Buffalo, 1985.