ENUMERATION DES CARTES DE GENRE UN

(résumé)

Didier ARQUES

Institut des Sciences Exactes et Appliquées

4, rue des frères Lumière 68093 Mulhouse, France

I. Définitions et notations.

1. Définition: On appelle carte topologique C sur une surface orientable Σ de R^3, une partition de Σ en trois ensembles finis de cellules:

a. L'ensemble des *sommets* de C qui est un ensemble fini de points;

b. L'ensemble des *arêtes* de C qui est un ensemble fini d'arcs simples ouverts de Jordan, deux à deux disjoints, dont les extrémités (confondues ou non) sont des sommets;

c. L'ensemble des *faces* de C qui sont des domaines simplement connexes dont les frontières sont des réunions de sommets et d'arêtes.

.Le *genre* de la carte C est le genre de la surface Σ. Une carte de genre 0 est dite *planaire*, et sera représentée en projection stéréographique sur le plan.

.On appelle *brin* une arête orientée de la carte.

2. Carte pointée:

.Une carte est dite *pointée* si un brin b^* est choisi. Le brin b^* est appelé brin pointé de la carte, et son sommet initial s^* est appelé le sommet pointé de la carte.

On appelle alors *face extérieure* de la carte (notée f.e., figure 1) la face de la carte qui se trouve à droite du brin b^* pour son orientation positive.

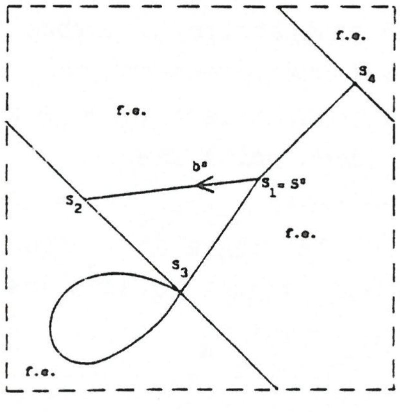

figure 1: carte pointée sur le tore.

.Une carte planaire est dite *doublement pointée* si un deuxième brin est choisi, de sommet initial différent du sommet pointé s^*.

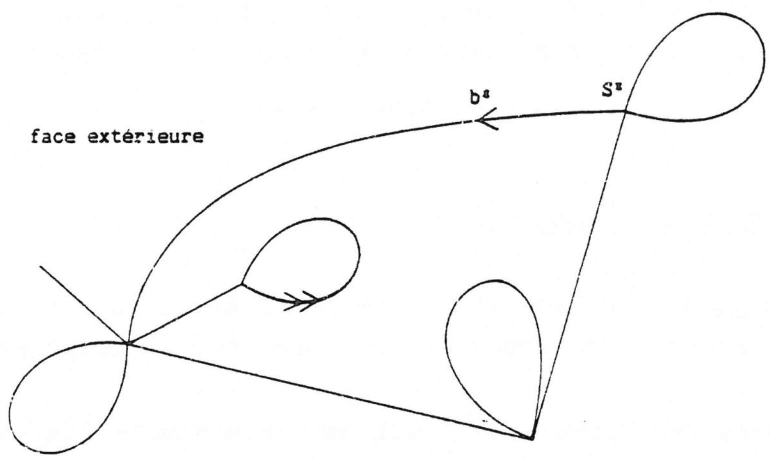

figure 2: carte planaire doublement pointée.

3. Isomorphisme:

Deux cartes pointées de même genre sont dites isomorphes, s'il existe un homéomorphisme de la surface associée, préservant son orientation, et appliquant les sommets, arêtes faces et brin pointé (éventuellement second brin pointé) de la première carte respectivement sur ceux de la seconde.

Ce sont les classes d'isomorphie des cartes pointées de genre 1 que l'on cherche à dénombrer.

II. Décompositions et relations fonctionnelles pour les cartes pointées de genre 1 et les cartes planaires doublement pointées.

On note $Q_g(v,s,f)$ la série génératrice du nombre des cartes pointées de genre g (= 0 ou 1 dans la suite), le degré de v donnant le degré du sommet pointé, le degré de s donnant le nombre de sommets moins un, et le degré de f, le nombre de faces moins une.

On note $D(v_1,v_2,s,f)$ la série génératrice du nombre des cartes planaires doublement pointées, le degré de v_1 (resp. v_2) donnant le degré du premier (resp. second) sommet pointé, les degrés de s et f ayant la même signification que pour Q_g.

On a les relations fonctionnelles:

Théorème 1:

Q_1 est solution de l'équation (où l'on note Q_g pour $Q_g(v,s,f)$):

$$(1)\quad Q_1(v,s,f) = 2v^2 f Q_0 Q_1 + \frac{1}{s} v^2 D(v,v,s,f) + vs\,\frac{vQ_1 - Q_1(1,s,f)}{v-1}$$

Théorème 2:

D est solution de l'équation (où l'on note D pour $D(v_1,v_2,s,f)$):

$$(2)\quad D(v_1,v_2,s,f) = 2v_1^2 fD.Q_0(v_1,s,f) + v_1 s\,\frac{v_1 D - D(1,v_2,s,f)}{v_1 - 1}$$

$$+ v_1 v_2 s \frac{\partial}{\partial v_2}\left[v_2 \frac{v_1 Q_0(v_1,s,f) - v_2 Q_0(v_2,s,f)}{v_1 - v_2} \right]$$

Remarque: Pour établir ces deux relations, on utilise l'idée de contraction d'une arête, introduite par W.T. Tutte(cf [13]).

III. Applications au dénombrement des cartes de genre 1.

La résolution des équations (1) et (2) conduit aux résultats de dénombrement suivants:

Théorème 3:

La série $sfQ_1(1,s,f)$, qui décompte les cartes pointées sur le tore en fonction du nombre de sommets et du nombre de faces, est solution du système paramétrique, où p et q sont les paramètres:

$$\left|\begin{array}{l} s = p(1-p-2q) \\ f = q(1-2p-q) \\ sfQ_1(1,s,f) = pq\,\dfrac{1-p-q}{[(1-2p-2q)^2-4pq]^2} \end{array}\right.$$

Remarque:

Nous avons montré dans [1], que $sfQ_0(1,s,f)$ qui décompte les cartes planaires pointées en fonction du nombre de sommets et du nombre de faces, est solution du système paramétrique (cf également [15]):

$$\left|\begin{array}{l} s = p(1-p-2q) \\ f = q(1-2p-q) \\ sfQ_0(1,s,f) = pq(1-2p-2q). \end{array}\right.$$

On déduit de ces systèmes paramétriques les résultats de dènombrement:

Corollaire 1:

Le nombre de cartes pointées sur le tore ayant m_1 (≥ 1) sommets et m_2 (≥ 1) faces, est:

$$\sum 2^{j_1+j_2}\, 3^{l-i_1-i_2} \binom{l}{i_1,i_2} \binom{m_1+1+l-i_2+h}{h} \binom{m_2+1+l-i_1+k}{k} \ldots$$

$$\ldots \binom{h}{j_1} \binom{k}{j_2} \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{j_2}{m_2+1+l-i_1+k} - \frac{1}{2}\,\frac{j_1}{m_1+1+l-i_2+h}\right)$$

où:

.On note $\displaystyle \binom{l}{i_1,i_2} = \frac{l!}{i_1!\,i_2!\,(l-i_1-i_2)!}$

.La sommation porte sur les uplets (l,i_1,i_2,h,k,j_1,j_2) tels que:

$$i_1 \geq 0,\ i_2 \geq 0,\ 0 \leq i_1 + i_2 \leq l,\ 0 \leq j_1 \leq h,\ 0 \leq j_2 \leq k$$

et

$$h-j_1+j_2+l-i_2 = m_1-1, \quad k-j_2+j_1+l-i_1 = m_2-1.$$

Si l'on identifie les variables s et f en une même variable z, celle-ci décompte (par la formule du genre) le nombre d'arêtes de la carte.
On obtient alors:

Théorème 4:

a. La série génératrice $G_1(z)$ du nombre des cartes pointées de genre 1 décomptées en fonction du nombre d'arêtes, satisfait au système paramétrique (paramètre r):

$$\begin{cases} z = r(1-3r) \\ G_1(z) = \dfrac{r^2}{(1-2r)(1-6r)^2} \end{cases}$$

b. Le nombre de cartes pointées de genre 1 à n (≥ 2) arêtes est:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-2} 2^{n-3-k}(3^{n-1}-3^k)\binom{n+k}{k}.$$

Remarque:

1. Les formules de dénombrement données au corollaire 1 et au b du théorème 4, se déduisent des systèmes paramétriques associés, par application de la formule de Lagrange, respectivement à deux variables et une variable. Le a du théorème 4 se déduit de façon évidente du théorème 3 en identifiant s et f à z et en simplifiant. Se reporter à [6] pour les démonstrations.

2. Des résultats analogues sont obtenus pour les hypercartes pointées de genre 1 (cf [7]).

Bibliographie:

[1] *D. Arquès*, "Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes planaires pointées", Jour. of Comb. Theory, Series B, Vol.39, N°1, 1985.

[2] *D. Arquès*, "Relations fonctionnelles et dénombrement des hypercartes planaires pointées", Colloque de Combinatoire énumérative, Univ. Québec, 28-5 au 1-6-85, Lecture Notes Springer Verlag.

[3] *D. Arquès*, "Les hypercartes planaires pointées sont des arbres très bien étiquetés", Dicrete Mathematics 58 (1986) 11-24

[4] *D. Arquès*, "Une nouvelle bijection entre hypercartes planaires et arbres très bien étiquetés. Calcul formel sur les fractions multicontinues", soumis au Journal Européen de Combinatoire.

[5] *D. Arquès & J. Françon*, "Arbres bien étiquetés et fractions multicontinues" 9ième Colloque sur les arbres en algèbre et programmation, Mars 84, Cambridge University Press.

[6] *D. Arquès*, "Relations fonctionnelles et dénombrement des cartes pointées sur le tore", Août 1985, accepté au Jour. of Comb. Theory.

[7] *D. Arquès*, "Hypercartes pointées sur le tore: Décompositions et dénombrements", Septembre 1985, accepté au Journ. of Comb. Theory.

[8] *W.G. Brown*, "On the enumeration of non planar maps", Mem. Amer. Math. Soc. 65, (1966), 1-42.

[9] *R. Cori*, "Un code pour les graphes planaires et ses applications", Astérisque, S.M.F., 27, 1975.

[10] *R. Cori & J. Hardouin-Duparc*, "Manipulations des cartes planaires à partir de leur codage", Journées de Combinatoire et Informatique, Bordeaux, Juin 1975.

[11] *R. Cori & B. Vauquelin*, "PLanar maps are well labeled trees", Can. Jour. Math., Vol XXXIII, n°5, 1981, 1023-1042.

[12] *I.P. Goulden & D.M. Jackson*, "Combinatorial enumeration", Wiley-Interscience Series in Discrete Math., (1983).

[13] *W.T. Tutte*, "A census of slicings", Canad. J. Math., 14, (1962), 708-722.

[14] *W.T. Tutte*, "A census of planar maps", Canad. J. Math. 15, (1963) 249-271.

[15] *W.T. Tutte*, "On the enumeration of planar maps" Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 64-74.

[16] *T.R.S. Walsh* & *A.B. Lehman*, "Counting rooted maps by genus.I", J. Comb. Theory (B), 13, 192-218, 1972.

[17] *T.R.S. Walsh* & *A.B. Lehman*, "Counting rooted maps by genus.II", J. Comb. Theory (B), 13, 122-141, 1972.

[18] *T.R.S. Walsh* & *A.B. Lehman*, "Counting rooted maps by genus.III nonseparable maps", J. Comb. Theory (B), 18, 222-259, 1975.

[19] *T.R.S. Walsh*, "Hypermaps versus bipartite maps", J. Comb. Theory (B), 18, 155-163, 1975.

D. Arquès
Institut des Sciences
Exactes et Appliquées
Université de Haute Alsace
4, rue des frères Lumière
68093 Mulhouse-cedex
France.