Sulla finitezza dei semigruppi periodici e di tipo (m,G)

di GIUSEPPE PIRILLO (Firenze)

Riassunto. Sia S un semigruppo (finitamente generato). Se S è periodico ed è di tipo (m,G) (si vedano qui di seguito le definizioni) allora S è finito.

E' ben noto che per il problema di Burnside (si veda [3]) sono state fornite risposte negative sia nel caso dei semigruppi (Morse - Hedlund, si veda [2]) sia nel caso dei gruppi (Golod - Shafarevitch, si veda il capitolo 8 di [1]).

Fra i risultati ottenuti nel settore di ricerca aperto da queste risposte negative ci limitiamo a ricordare il teorema di Restivo e Reutenauer (si veda [3]), dimostrato facendo uso di un profondo teorema di combinatoria dovuto a Shirhov.

In questo lavoro ci limitiamo a descrivere brevemente un nostro contributo a questo tipo di ricerche.

Ricordato, per comodità, che un semigruppo si dice periodico se ogni suo elemento genera un sottosemigruppo finito, poniamo la seguente definizione:

Definizione. Diciamo che un semigruppo S è a generazioni di cardinale limitato da un intero positivo m su un suo insieme di generatori G (brevemente " S è di tipo (m,G) ") se per ogni intero positivo i la i-esima generazione di G in S, cioè il sottoinsieme G^i, contiene al più m elementi.

I semigruppi di tipo (m,G) sono stati studiati in [4] e [5] .

Si dimostra la seguente proposizione:

Proposizione. Sia S un semigruppo (finitamente generato). Le due seguenti condizioni sono equivalenti:

1) S è finito
2) S è periodico e di tipo (m,G).

Il fatto che 1) implica 2) è banale mentre il fatto che 2) implica 1) si basa sulla proprietà seguente: per ogni semigruppo S di tipo (m,G) esiste un sottoinsieme finito F di S tale che ogni elemento s di S appartiene ad F oppure ammette una fattorizzazione

$$s = u\, v^{n}\, u'$$

dove n è un intero ed u,v,u' appartengono ad F (si veda [5]).

BIBLIOGRAFIA

1) HERSTEIN, I.N., Noncommutative rings, chap.8, Carus Math. Assoc. Amer., Washington, D.C., 1969.

2) MORSE, M. and G.HEDLUND, Unending chess, symbolic dinamics and a problem in semigroups, Duke Math.J.,11, (1944) 1-7.

3) RESTIVO, A. and C.REUTENAUER, On the Burnside Problem for Semigroups, J.Algebra, 89, (1984) 102-104.

4) JUSTIN, I., Propriétés combinatoires de certains semigroupes C.R. Acad. Sci. A 1969, 269, 1113-1115.

5) PIRILLO, G., 1981 Thèse de 3émé cycle, Université Paris 7.

GIUSEPPE PIRILLO
Istituto di Analisi Globale del C.N.R.
Via S.Marte 13/A
FIRENZE