TEORIA DELLE MATROIDI

sugli

INSIEMI PARZIALMENTE ORDINATI

Luigi Pezzoli

(Università di Bologna)

Il mio proposito non é di convincere che la teoria delle matroidi é una importante teoria, ma piuttosto che essa riguarda collezioni di ideali di insiemi parzialmente ordinati e che, pertanto, risponde alla natura delle cose sviluppare la teoria delle matroidi sugli insiemi parzialmente ordinati.

Lavoro finanziato in parte con fondi ministeriali per la ricerca (40% e 60%) ed in parte dal Progetto Finalizzato Trasporti del C.N.R.

1 INTRODUZIONE

Come é noto, la teoria delle matroidi sugli insiemi riguarda concetti quali circuiti, indipendenti, basi, generatori, iperpiani e così via, che incontriamo, per esempio, negli spazi vettoriali e nei grafi.

Ciascuno di essi può essere scelto come concetto iniziale della teoria ed essere definito assiomaticamente. Come tipici esempi di definizioni assiomatiche possiamo rammentare le seguenti:

1.1 Definizione di BASI

Le basi di una matroide M sull'insieme S sono una collezione $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di S che verifica gli assiomi

B1 $\mathcal{B} \neq \emptyset$

B2 Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, con $B_1 \neq B_2$, allora $B_1 \nsubseteq B_2$

B3 Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, per ogni $x \in B_1$ esiste $y \in B_2$ tale che $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$

(Assioma di scambio)

1.2 Definizione di CIRCUITI

I circuiti di una matroide M sull'insieme S sono una collezione $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di S che verifica gli assiomi

C1 $\emptyset \notin \mathcal{C}$

C2 Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, con $C_1 \neq C_2$, allora $C_1 \nsubseteq C_2$

C3 Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, con $C_1 \neq C_2$, $x \in C_1$ e $x \in C_2$ allora esiste $C \in \mathcal{C}$ tale che $C \subseteq (C_1 \cup C_2) - x$

(Assioma di eliminazione)

D'altra parte, ciascuno di essi può essere, invece, derivato dal concetto scelto come iniziale e definito mediante esso. Come esempi tipici di tali definizioni, se scegliamo come concetto iniziale quello di basi, possiamo rammentare le seguenti:

1.3 Definizione di INDIPENDENTI

Gli indipendenti di una matroide $M = M(\mathcal{B})$ sull'insieme S, avente $\mathcal{B}$ come collezione delle basi, sono la collezione $\mathcal{J}$ dei sottoinsiemi delle basi.

1.4 Definizione di CIRCUITI

I circuiti di una matroide $M = M(\mathcal{B})$ sull'insieme S, avente $\mathcal{B}$ come collezione delle basi, sono la collezione $\mathcal{C}$ dei sottoinsiemi di S non indipendenti (= DIPENDENTI) minimali.

I due modi di presentare lo stesso concetto sono, naturalmente, collegati da teoremi che ne stabiliscono l'equivalenza e che vengono sovente chiamati teoremi di criptomorfismo. Il seguente ne é un tipico esempio:

1.5 Teorema

Una collezione $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di S é la collezione dei circuiti di una matroide M (vale a dire, la collezione dei dipendenti minimali relativamente ad opportune basi $\mathcal{B}$) se e solo se verifica gli assiomi C1,C2,C3.

Questa situazione si presenta, senza mutamenti di rilievo, per le collezioni di ideali di un insieme parzialmente ordinato P.

Rammentiamo che un ideale D di P é un sottoinsieme di P tale che

$$x \in D \text{ e } y \leqslant x \implies y \in D$$

Per indicare che D é un ideale di P scriveremo $D \leqslant P$.

Occorre tenere in speciale conto che, mentre la sola relazione fra elementi e sottoinsiemi di S é l' "appartenenza" , fra elementi ed ideali di P esistono due relazioni:

l' "appartenenza", che indicheremo, al solito con $\in$ e

l' "essere massimale in", che indicheremo con $\Leftarrow$

cosicché

$x \in D$ significherà "x appartiene a D", mentre

$x \Leftarrow D$ significherà "x é un elemento massimale di D".

Ovviamente, se l'ordine di P é quello banale, vale a dire

$x \leqslant y$ se e solo se $x=y$, si ha che $\Leftarrow \; = \; \in$. Diremo anche, in tal caso, che P é un insieme.

Ora dobbiamo

sostituire la parola "sottoinsieme" con "ideale"

ed

esaminare quando " $\in$ " significa realmente " $\in$ " e quando invece significa " $\Leftarrow$ ".

Fatto questo (e poco di più) la teoria regge!

2 FONDAMENTI

Seguendo una delle linee di presentazione della teoria più tradizionali, scegliamo, come concetto iniziale, quello di basi e diamo, pertanto, assiomaticamente la

2.1 Definizione di BASI

Le basi di una matroide M sull'insieme parzialmente ordinato P sono una collezione $\mathcal{B}$ di ideali di P verificanti gli assiomi

B1 $\mathcal{B} \neq \emptyset$

B2 Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, con $B_1 \neq B_2$, allora $B_1 \nsubseteq B_2$

B3 Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, per ogni $x \in B_1$ esiste $y \in B_2$ tale che $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$

(Si veda la Fig. 1)

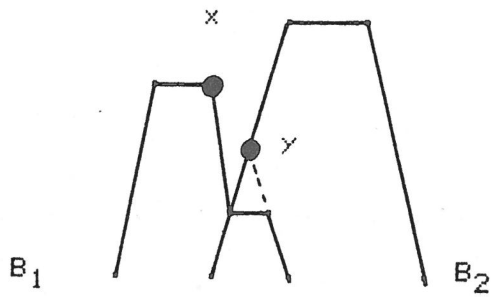


Fig. 1

La teoria ristretta ai soli insiemi ci suggerisce ora la seguente

2.2 Definizione di INDIPENDENTI

Gli indipendenti di una matroide $M = M(\mathcal{B})$ su P, avente $\mathcal{B}$ come collezione delle basi, sono la collezione $\mathcal{J}$ degli ideali delle basi

Ma vale in generale l'atteso

2.3 Teorema di criptomorfismo

Una collezione $\mathfrak{J}$ di ideali di P é la collezione degli indipendenti di una matroide M se e solo se verifica gli assiomi

I1 $\mathfrak{J} \neq \phi$

I2 Se $I_1 \in \mathfrak{J}$ e $I_2 \leqslant I_1$ allora $I_2 \in \mathfrak{J}$

I3 Se $I_1, I_2 \in \mathfrak{J}$ e $\# I_1 < \# I_2$ allora esiste $x \in I_2$ tale che $I_1 \cup x \in \mathfrak{J}$

In modo analogo, lasciandoci cioé guidare dalla teoria ristretta agli insiemi, daremo la

2.4 Definizione di CIRCUITI

I circuiti di una matroide $M = M(\mathcal{B})$ su P, avente $\mathcal{B}$ come collezione delle basi, sono la collezione $\mathscr{C}$ degli ideali di P dipendenti (= non indipendenti) minimali

Vale allora il seguente

Teorema

La collezione $\mathscr{C}$ dei circuiti di una matroide $M = M(\mathcal{B})$ su P verifica gli assiomi seguenti:

C1 $\phi \notin \mathscr{C}$

C2 Se $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$, con $C_1 \neq C_2$, allora $C_1 \nleq C_2$

C3 Se $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$, con $C_1 \neq C_2$ e $x \leqslant C_1$ e $x \leqslant C_2$ allora esiste $C \in \mathscr{C}$ tale che $C \subseteq (C_1 \cup C_2) - x$

(Si veda la Fig. 2)

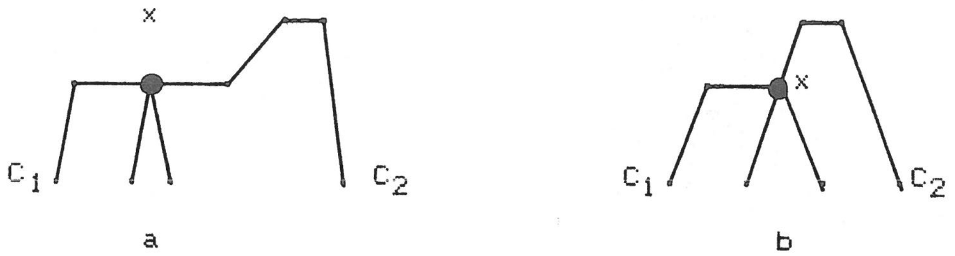


Fig.2

L'assioma C3 non richiede nulla nella situazione della Fig.2/b, in cui $x \leqslant C_1 \wedge C_2$ ma $x \nleqslant C_2$.

E' immediato osservare che gli assiomi C1,C2,C3 si ottengono adattando opportunamente, e secondo la strategia indicata nell'introduzione, i familiari assiomi insiemistici agli insiemi parzialmente ordinati.

Sfortunatamente, il teorema precedente non rappresenta il richiesto teorema di criptomorfismo, poiché fornisce una condizione soltanto necessaria. Per questo motivo il completo sviluppo della teoria richiede qualcosa di più di quanto finora esposto.

Precisamente, dobbiamo estendere agli insiemi parzialmente ordinati l'idea di "complementazione".

2.5 Definizione

Siano P un insieme parzialmente ordinato ed X un suo ideale.

Chiameremo "complementare di X (in P)", e lo indicheremo con P-X, o anche, se P é fissato, con X^{γ} l'ideale di P

$$P-X = \{ y \in P : \text{per ogni } x \in X \text{ , } y \ngeqslant x \}$$

(Si veda la Fig.3)

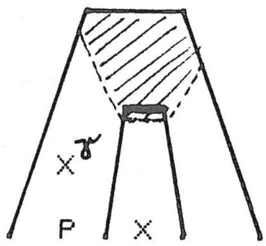


Fig.3

Si può ora dimostrare che la collezione $\mathcal{C}$ dei circuiti di una matroide $M = M(\mathcal{B})$ su P verifica un quarto assioma, che é banalmente soddisfatto, se P é un insieme, da ogni collezione di sottoinsiemi ed é perciò rimasto nascosto

C4 Se $X \preccurlyeq P$ ed X contiene un solo membro, C_1, di $\mathcal{C}$, allora, per ogni $1 \in C_1$, si ha

$$X-1 \preccurlyeq \bigcup_{s \in C_1} (X-s)$$

dove $\preccurlyeq$ significa "é uguale a o coperto da". (Assioma nascosto)

Per esempio, se P é l'insieme $\{1,2,3\}$ ordinato come in Fig.4

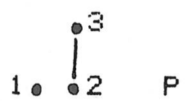


Fig.4

allora l'ideale 23 é l'unico circuito di una matroide su P, avente una sola base, 12. Infatti verifica C4.

Invece 12 non può essere l'unico circuito di una matroide su P, perché $P-1 = 23$, $P-2 = 1$ ed 1 non é coperto da $(P-1) \cup (P-2)$. In tal caso infatti le basi risulterebbero 1 e 23 che hanno cardinalità diverse, mentre vale ancora il teorema di equicardinalità delle basi.

Ora finalmente abbiamo il

2.6 Teorema di criptomorfismo

Una collezione $\mathcal{C}$ di ideali di P é la collezione dei circuiti di una matroide M se e solo se verifica gli assiomi C1,C2,C3 e C4.

3 ESEMPI ed APPLICAZIONI

Esempio 1. Matroidi da spazi proiettivi

Siano V uno spazio proiettivo ed $F=\{F_1,F_2,\ldots,F_n\}$ un insieme di sottospazi di V. Scriveremo $F_k \leqslant V$ per indicare tale circostanza. Associamo, ad ogni F_k, una catena (cioé un insieme linearmente ordinato) C_k, tale che

$$\# C_k = \dim F_k + 1$$

e, ad F, l'unione disgiunta delle C_k, che indicheremo con

$$P = C_1+C_2+\ldots+C_n$$

(Si veda la Fig.5)

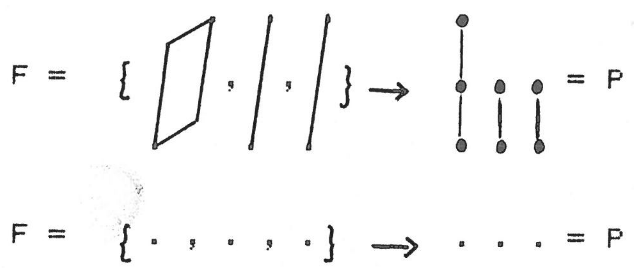


Fig.5

L'elemento massimo di ogni catena rappresenta, quindi, il sottospazio considerato, mentre ogni altro elemento della stessa catena rappresenta un sottospazio "generico" di questo.

Le "posizioni" degli F_i in V definiscono una matroide su P se, per ogni ideale I di P, che sarà della forma

$$I = I_1+I_2+...+I_n \qquad \text{con } I_k \leqslant C_k$$

poniamo

I é indipendente se e solo se esistono $G_1, G_2, ..., G_n$ tali che

$G_k \leqslant F_k$

$1+\dim G_k = \# I_k$

$1+\dim(G_1 \vee G_2 \vee ... \vee G_n) = \# I$

Nella seguente Fig.6 sono rappresentate quattro situazioni ed elencate, per ciascuna di esse, le basi e, per le ultime due, anche i circuiti. Le prime due mostrano poi che il classico esempio delle matroidi proiettive su di un insieme, uno di quelli che hanno motivato la teoria, é il caso particolare che si ottiene prendendo soltanto sottospazi di dimensione zero.

NOTA. La costruzione che ho ora presentata, visualizzandola mediante sottospazi di uno spazio proiettivo, é in realtà legata a funzioni sottomodulari. Si può quindi , mettendo in risalto tale legame, generalizzare.

Ringrazio A. Dress che me lo ha fatto notare.

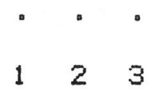
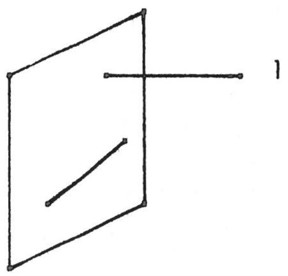
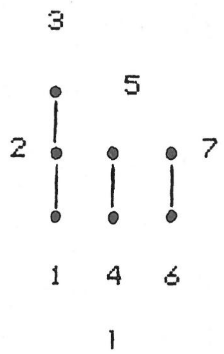
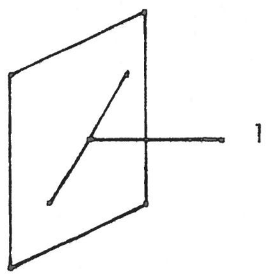
FIGURA	P	MATROIDE
		$\mathcal{B} = \{12,13,23\}$
		$\mathcal{B} = \{123\}$
		$\mathcal{B} = \{1234,1245,1246,$ $1456,1467,4567\}$ $\mathcal{C} = \{1267,12456\}$
		$\mathcal{B} = \{1234,1245,1246,$ $1456,1467\}$ $\mathcal{C} = \{4567,12345\}$

Fig.6

Permettetemi ora una piccola pausa "dedicata alla psicologia". Consideriamo le due figure seguenti, Fig.7/a e Fig.7/b

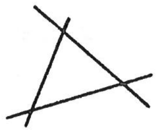


Fig.7/a

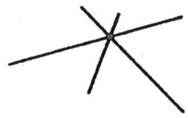


Fig.7/b

Entrambe definiscono una matroide su P (vedi Fig.7/c)

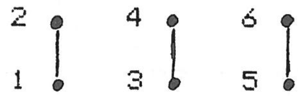


Fig.7/c

e le basi di esse sono rispettivamente

$$\mathcal{B}_a = \{123,125,134,135,156,345,356\} = \mathcal{B}_b$$

Le matroidi, cioé, non "distinguono" le due figure. Ciò avviene perché le matroidi "vedono" soltanto ciò che abbiamo scelto, cioé tre rette, mentre per distingure le due figure occorre anche "guardare" il punto di intersezione di due di esse. Per ottenere ciò dobbiamo pertanto considerare le seguenti Fig.8/a e Fig.8/b

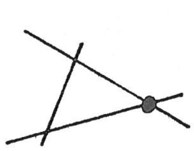


Fig.8/a

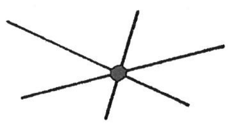


Fig.8/b

che definiscono ciascuna una matroide su P' (vedi Fig.8/c).

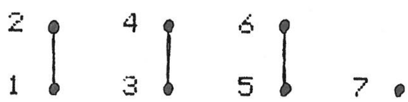


Fig.8/c

E tali matroidi sono diverse perché $567 \in \mathcal{B}'_a$ ma $567 \notin \mathcal{B}'_b$.

Esempio 2 Matroidi semiuniformi

Siano A un ideale di P e k un numero naturale con $k \leq \# A$. Poniamo

$$\mathcal{B}(A,k) = \left\{ B \leq P : B \leq A \text{ e } \# B = k \right\}$$

Allora $\mathcal{B}(A,k)$ é la collezione delle basi di una matroide M su P che chiameremo "matroide semiuniforme".

Sebbene le matroidi semiuniformi siano di tipo elementare, tuttavia esse sono strettamente collegate alla seguente

Applicazione. Il problema del breakfast

Volete fare la prima colazione ed avete a disposizione dei toasts e dei panettini di burro. Se potete prendere una sola cosa, probabilmente sceglierete un toast. Pertanto possiamo dire che un toast "vale" più di un panettino di burro

$$v(\text{toast}) > v(\text{burro})$$

Ma se potete prendere due cose probabilmente preferirete scegliere un toast ed un panettino di burro anziché due toasts, e quindi

$$v(\text{due toasts}) < v(\text{toast+burro})$$

Poiché non ha nessuna importanza chiedersi "quale toast" o "quale panettino di burro", sembra adeguato alla realtà rappresentare le possibili scelte come ideali di un insieme parzialmente ordinato P, come indicato nella Fig.9

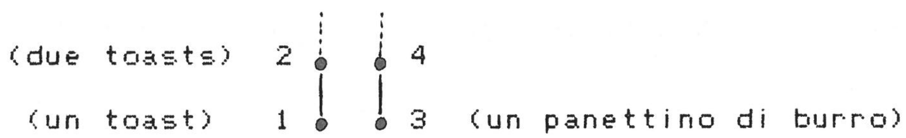


Fig.9

Per ciascuno di essi é definito un "valore" v

$v : D(P) = \{ X : X \leqslant P \} \longrightarrow R_o^+$ (insieme dei numeri reali non negativi)

Come effettuare ora la scelta migliore?

Naturalmente, il problema, così formulato, é troppo generale.

Occorre assegnare ad esso dei vincoli e, affinché quelli che daremo non appaiano artificiosamente imposti, ci ricollegheremo ad un classico risultato, di cui richiamiamo i punti fondamentali, relativo alla teoria ristretta agli insiemi.

(*) Sia S un insieme. Una "funzione peso" w su S é una funzione

$w : 2S \longrightarrow R_o^+$

tale che, per ogni $s \in S$, $w(s) \geqslant 0$ e $w(X) = \sum_{s \in X} w(s)$

(*) L'algoritmo greedy costruisce un sottoinsieme di S, partendo dal vuoto, scegliendo un elemento alla volta, senza mai ritornare sui suoi passi.

(*) L'algoritmo greedy massimizza ogni funzione peso w sull'ideale $\mathfrak{J}$ di 2^S se e solo se $\mathfrak{J}$ é la collezione degli indipendenti di una matroide su S.

Osserviamo ora che vale il

3.1 Teorema

Per ogni funzione peso w sull'insieme S esistono delle costanti positive $c_1, c_2, \dots, c_n$ ed una catena di sottoinsiemi di S, $A_1, A_2, \dots, A_n$ tali che

$$w(X) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \#(A_k \cap X)$$

Poiché la funzione $X \longrightarrow \#(A_K \cap X)$ é la funzione rango di una matroide (semiuniforme) su S, si ha che l'algoritmo greedy massimizza sugli indipendenti di una matroide le combinazioni lineari a coefficienti positivi dei ranghi di "buone matroidi".

Ma che cosa sono le "buone matroidi" ?

Possiamo dare una unica risposta valida per entrambe le questioni poste.

3.2 Definizione di RANGO

Sia M una matroide sull'insieme parzialmente ordinato P.

Chiameremo funzione rango associata ad M la funzione

$$r(M;X) : D(P) \longrightarrow N$$

definita da

$$r(M;X) = \max \{\#I : I \leqslant X \text{ e } I \text{ indipendente di } M\}$$

3.3 Definizione di SEMIVALUTAZIONE

Chiameremo semivalutazione su P una funzione

$$v : D(P) \longrightarrow R_0^+$$

definita da

$$v(X) = \sum_{k=1}^{n} c_K r_K(X)$$

con $c_K \in R^+$

r_K = funzione rango associata alla matroide semiuniforme M_K i cui indipendenti indicheremo con $\mathfrak{I}_K$

$$\mathfrak{I}_1 \subseteq \mathfrak{I}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{I}_n$$

3.4 Teorema

L'algoritmo greedy massimizza ogni semivalutazione v su $\mathfrak{I} \leqslant D(P)$ se e solo se $\mathfrak{I}$ é la collezione degli indipendenti di una matroide su P.

4 LA VISIONE RETICOLARE

Siamo stati forzati, per poter descrivere i circuiti, ad introdurre una "complementazione" negli insiemi parzialmente ordinati. Ciò suggerisce di collegare la teoria delle matroidi con la teoria dei reticoli. Pertanto in questa sezione diremo "algebre di Boole", "reticoli distributivi","elementi","sottoinsiemi" ed "ideali" anziché, rispettivamente,"insiemi","insiemi parzialmente ordinati","ideali", "collezioni di ideali" e "collezioni discendenti di ideali".

Presenteremo alcuni fatti della teoria per i quali il punto di vista reticolare risulta, secondo la nostra opinione, particolarmente vantaggioso. Per ragioni di brevità li esporremo in maniera piuttosto informale, ma siamo convinti che quel che si perde in rigore si acquisti in immediatezza della visione intuitiva e che quindi una tale presentazione risulti ugualmente significativa.

Dualità

Si può dimostrare che, se $\mathcal{B}$ é la collezione delle basi di una matroide M sul reticolo distributivo D, allora, detto D^* il reticolo duale, l'insieme $\mathcal{B}^*$ degli elementi duali di quelli di $\mathcal{B}$ (che saranno definiti da un antiisomorfismo fra D e D^*) é l'insieme delle basi di una matroide M^* su D^*.

Si vede allora facilmente che i duali degli indipendenti di M sono i generatori di M^* e la dualità si rivela essere la descrizione da parte di un secondo osservatore, che rovesci l'ordine del reticolo, di ciò che vede un primo osservatore (si veda la Fig.10)

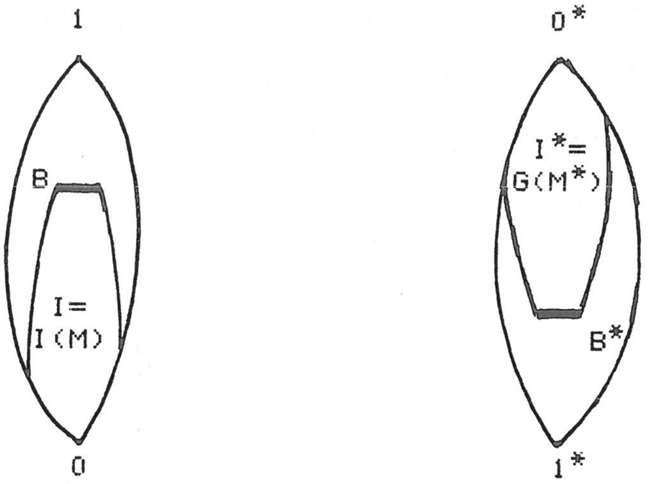


Fig.10

Pertanto, per ogni concetto della teoria, e per ogni teorema, vi sono un concetto e, rispettivamente, un teorema duale, che si ottengono dai primi semplicemente per dualità reticolare.

Per esempio, poiché per ogni $x \in D$, il rango é la "lunghezza di una catena completa fra 0 ed un indipendente massimale contenuto in x", il concetto duale di rango é la "lunghezza di una catena completa fra un generatore minimale contenente x, ed 1".

Restrizione e contrazione

Le nozioni di restrizione e contrazione nascono, come é noto, dalla teoria dei grafi e si sono rivelate proprie della teoria delle matroidi, almeno nel caso booleano, e l'una duale dell'altra.

Non vi é però alcuna difficoltà a definirle in generale.

Se M é una matroide su D ed x un elemento di D, diremo "restrizione di M ad x" la matroide, sul segmento di estremi 0 ed x, avente come indipendenti quelli di M che sono contenuti in x.

Mediante il concetto di dualità precedentemente discusso é allora immediato ottenere la più semplice definizione di "contrazione di M mediante x": é la matroide sul segmento di estremi x ed 1 avente come generatori quelli di M che contengono x (Si veda la Fig.11).

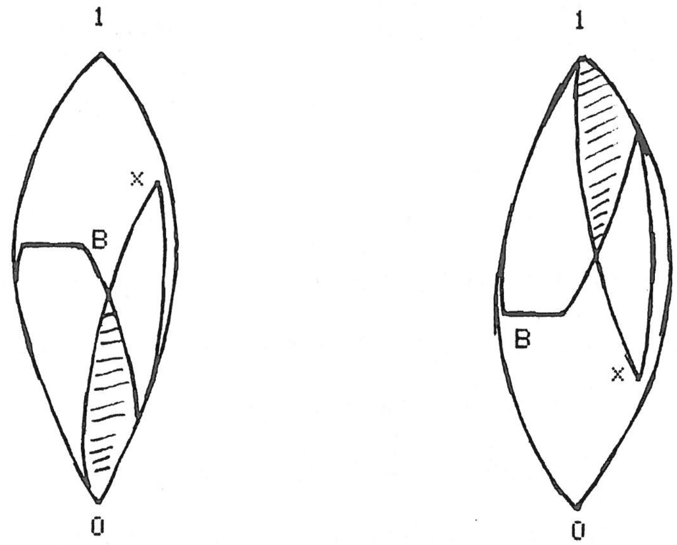


Fig.11

Invarianti di Tutte-Grothendieck

Per poter esporre l'ultimo aspetto che intendiamo presentare della teoria, abbiamo bisogno di una ulteriore considerazione riguardo alla complementazione.

Poiché, come é noto, ogni reticolo distributivo D é il reticolo degli ideali di un insieme parzialmente ordinato P, possiamo trasferire il concetto di complementazione da P a D, come suggerisce la Fig.12

$1^{\gamma} = 3 \quad , \quad 2^{\gamma} = 1 \quad , \quad 4^{\gamma} = 0$

Fig.12

Poniamo ora $[a,b] = \{x \in D : a \leqslant x \leqslant b\}$

Vale allora la seguente notevole proprietà

4.1 Teorema

Per ogni sup-irriducibile l di D si ha

$$[0,l^{\gamma}] \cup [l,1] = D \quad , \quad [0,l^{\gamma}] \cap [l,1] = \emptyset$$

Pertanto, per ogni sup-irriducibile l di D, possiamo definire la contrazione di M mediante l e la restrizione di M ad l^{γ}, che indicheremo rispettivamente, seguendo la consuetudine della teoria insiemistica, con M/l ed M-l.

Se poi indichiamo con M_0 l'unica matroide sul reticolo D=D($\emptyset$), possiamo facilmente estendere alle matroidi sugli insiemi parzialmente ordinati la seguente

4.2 Definizione

Diremo "Polinomio di Tutte-Grothendieck , $T(M;x,y)$" il polinomio associato alla matroide M su D, definito dalla recursione

$$T(M_0;x,y) = 1$$

$$T(M;x,y) = (y-1)^{h(D;1)-r(M;1)}T(M/1;x,y) + $$
$$+ (x-1)^{r(M;1)-r(M;1^{\gamma})}T(M-1;x,y) \qquad \text{(per 1 sup-irrid. di D)}$$

dove $h(D;1)$ indica l'altezza di 1.

Sfruttando il teorema 4.1 si può infatti dimostrare che $T(M;x,y)$ dipende solo da M e non dalla scelta di 1 in D. (Si veda anche la Fig.13)

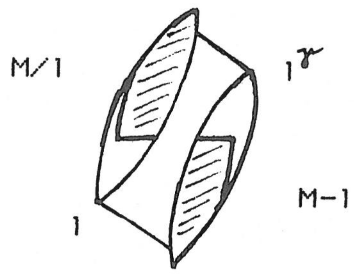


Fig.13

Le valutazioni di $T(M;x,y)$, in un qualunque anello commutativo, costituiscono i cosiddetti "T-G invarianti" (Brylawski).

Si pone quindi in modo naturale la questione

"Esistono per le matroidi su P dei T-G invarianti altrettano significativi che nel caso booleano? Ed, eventualmente, quali?"

Per ora, possiamo indicarne, a titolo di esempio, solamente uno elementare

$T(M;2,1)$ = numero degli indipendenti di M

Se ogni elemento di D é indipendente in M, si ottiene un metodo ricorsivo per contare il numero degli ideali di P.

Vorrei infine concludere questa breve esposizione, tentando di dare una risposta a quella che avrebbe dovuto essere la prima domanda: "che cosa é la teoria delle matroidi?"

Se P é un insieme parzialmente ordinato e D(P) il reticolo dei suoi ideali, questi é, a sua volta, parzialmente ordinato; porremo

$D^2(P) = D(D(P))$ e, per semplicità, identificheremo un elemento di $D^2(P)$ con l'insieme dei suoi sup-irriducibili massimali.

Con queste convenzioni e notazioni, é facile osservare che le collezioni dei circuiti, delle basi e degli iperpiani di una matroide M su P sono elementi di $D^2(P)$ e che si ha

$\mathcal{C}^{\gamma} = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^{\gamma}$ = collezione degli iperpiani

se γ indica la complementazione in $D^2(P)$.

Pertanto la teoria delle matroidi su P é la teoria di certe γ-orbite di $D^2(P)$.

BIBLIOGRAFIA

1) T. Brylawski "A decomposition for combinatorial geometries" Trans. Amer. Math. Soc. 171 (1972), 235-282

2) T. Brylawski "The Tutte-Grothendieck ring" Algebra Universalis 2 (1972), 375-388

3) T. Brylawski "The Tutte polynomial. General theory." Matroid theory and its applications (A.Barlotti,Ed.) Corso C.I.M.E. 1980

4) H. Crapo "Unities and negation: On the representation of finite lattices" J. Pure. Appl. Algebra 23 (1982), 109-135

5) H. Crapo, G.C. Rota "On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries" M.I.T. Press 1970

6) F.D.J. Dunstan, A.W. Ingleton, D.J.A. Welsh "Supermatroids" Combinatorics,Proceedings,Conf.Comb.Math. Math.Inst.Oxford Inst.Math.Appl Southend-on-Sea (1972) 72-122

7) G. Nicoletti "Generating cryptomorfic axiomatizations of matroids Proceedings Conf. Geom. and Diff. Geom. Haifa Springer-Verlag (1979)

8) G. Nicoletti, N. White "Axiom systems" in "Combinatorial Geometries" (N. White,Ed) Encyclopaedia of Math. and Its Appl. Addison-Wesley, Reading, Mass. (in press.)

9) L. Pezzoli "Sistemi di indipendenza modulari" B.U.M.I. B (5) 18-B (1981), 575-590

10) L. Pezzoli "Iperpiani e circuiti delle matroidi sugli insiemi parzialmente ordinati" Atti del Convegno di Geom. Comb. e di Incidenza Rend. Sem. Mat. Brescia (7), 539-551

11) L. Pezzoli "On D-Complementation" Adv. in Math. 3-51 (1984), 226-239

12) D.J.A. Welsh "Matroid Theory" Academic Press (1976)