Über die Inversionsstatistiken von MacMahon und Goulden-Jackson

Peter Paule*

Einleitung

Gegeben sei eine geordnete Partition $\Pi = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ von n (d.h. $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$). Die q-*Multinomialkoeffizienten* seien definiert durch

$$\left[{n \atop n_1, n_2, \ldots, n_k}\right] = \frac{[n]!}{[n_1]![n_2]!\ldots[n_k]!}\text{, wobei } [n]! = [n][n-1]\ldots[1],$$

$[0]! = 1$ mit $[n] = 1+q+\ldots+q^{n-1}$.

Diese Polynome interpretierte *MacMahon* [4] u.a. folgendermaßen:

$$(1) \qquad \left[{n \atop n_1, n_2, \ldots, n_k}\right] = \sum_{m \in M_\Pi} q^{\mathrm{inv}(m)},$$

dabei ist M_Π = Menge aller Permutationen der Multimenge $\{1^{n_1}, 2^{n_2}, \ldots, k^{n_k}\}$ und inv(m) = Anzahl der Inversionen von $m \in M_\Pi$.

Z.B.: Für $\Pi = (1,2,1)$ hat $m = \binom{1\ 2\ 3\ 4}{2\ 3\ 2\ 1} \in M_\Pi$ die Inversionen

$\binom{1}{2}\binom{4}{1}, \binom{2}{3}\binom{3}{2}, \binom{2}{3}\binom{4}{1}$ und $\binom{3}{2}\binom{4}{1}$; also inv(m) = 4.

Der Inversionsstatistik von MacMahon sei die von *Goulden* und *Jackson* [1] gegenübergestellt:

---

* Unterstützt durch die Alexander von Humboldt-Stiftung

$$(2) \qquad \left[{n \atop n_1,n_2,\ldots,n_k}\right] = \sum_{\rho\in R_\Pi} q^{\mathrm{inv}(\rho)} ,$$

hier ist R_Π = Menge aller Permutationen von $\underline{n} = \{1,2,\ldots,n\}$,

d.h. aller Elemente aus $S_{\underline{n}}$, welche auf den Blöcken

Π_j $(j = 1,2,\ldots,k)$,

$$\Pi_j = \{(\sum_{l=1}^{j-1} n_l)+1,\ (\sum_{l=1}^{j-1} n_l)+2,\ldots,\ \sum_{l=1}^{j} n_l\},$$

monoton steigende Funktionen darstellen.

Z.B.: Für $\Pi = (1,2,1)$ hat $\rho = 4132 \in R_\Pi$ die Inversionen

$(4,1),(4,3),(4,2)$ und $(3,2)$; also $\mathrm{inv}(\rho) = 4$.

Wir werden nun sehen, daß diese beiden Statistiken ganz eng zusammenhängen. Es existiert nämlich eine natürliche Bijektion φ,

$$\begin{aligned} &\varphi: M_\Pi \to R_\Pi \text{ mit} \\ (3) \qquad &\mathrm{inv}(m) = \mathrm{inv}(\varphi(m)) \quad \text{für alle } m \in M_\Pi . \end{aligned}$$

Damit erhält man einen äußerst einfachen Beweis der klassischen MacMahon-Statistik (1), denn die Goulden-Jacksonsche Interpretation läßt sich leicht wie folgt einsehen:

Beweis von (2)

R_Π ist eine Transversale der Linksnebenklassen von der Younguntergruppe S_Π in $S_{\underline{n}}$ (vgl. z.B. [3]). Dabei ist $S_\Pi = \{\sigma \in S_{\underline{n}} \mid \sigma[\Pi_j] = \Pi_j \text{ für } j = 1,2,\ldots,k\}$ kanonisch isomorph zum direkten Produkt

$$S_{\underline{n_1}} \times S_{\underline{n_2}} \times \ldots \times S_{\underline{n_k}} \quad .$$

Benützt man dazu noch die wohlbekannte Tatsache, daß

$$(4) \qquad [n]! = \sum_{\gamma \in S_{\underline{n}}} q^{\mathrm{inv}(\gamma)}$$

(Beweis z.B. durch vollständige Induktion nach n), so erhält man

$$[n]! = \sum_{\gamma \in S_{\underline{n}}} q^{\mathrm{inv}(\gamma)} = \sum_{\substack{\rho \in R_\Pi \\ \sigma \in S_\Pi}} q^{\mathrm{inv}(\rho\sigma)} = \sum_{\substack{\rho \in R_\Pi \\ \sigma \in S_\Pi}} q^{\mathrm{inv}(\rho)+\mathrm{inv}(\sigma)}$$

$$= \Big(\sum_{\rho \in R_\Pi} q^{\mathrm{inv}(\rho)}\Big)\Big(\sum_{\sigma_1 \in S_{\underline{n_1}}} q^{\mathrm{inv}(\sigma_1)}\Big)\ldots\Big(\sum_{\sigma_k \in S_{\underline{n_k}}} q^{\mathrm{inv}(\sigma_k)}\Big)$$

$$= [n_1]![n_2]!\ldots[n_k]! \sum_{\rho \in R_\Pi} q^{\mathrm{inv}(\rho)} \qquad \text{(nach (4))} \ ,$$

und damit die Gültigkeit von (2).

<u>Die Bijektion $\varphi: M_\Pi \to R_\Pi$</u>

Wir schreiben $m \in M_\Pi$ als $m = s(1)s(2)\ldots s(n)$ mit $s:\underline{n} \to \underline{k}$, wobei $|s^{-1}[\{j\}]| = |\{x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,n_j}\}| = n_j$ und $x_{j,1} < x_{j,2} < \ldots < x_{j,n_j}$ für $j = 1,2,\ldots,k$.
In der Zweizeilenschreibweise

$$(5) \qquad m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & n \\ s(1) & s(2) & \ldots & s(j) & \ldots & s(n) \end{pmatrix}$$

denken wir uns die Spalten $\binom{j}{s(j)}$ als fest.

Eine *Transposition* sei das Vertauschen *benachbarter* Spalten $\binom{y}{b}\binom{x}{a}$ mit $b > a$ in $\binom{x}{a}\binom{y}{b}$.
Wegen $y < x$ *verringert* jede Transposition die Anzahl der Inversionen in der zweiten Zeile und *erhöht* die Anzahl der Inversionen in der ersten Zeile jeweils um genau 1.

Nach Ausführung aller möglichen Transpositionen in (5) erreicht man

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n_1} & x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n_2} & \cdots & x_{k,1} & x_{k,2} & \cdots & x_{k,n_k} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & \cdots & k & k & \cdots & k \end{pmatrix} .$$

Nun definieren wir

$\varphi(m) := x_{1,1}\, x_{1,2} \cdots x_{1,n_1} \cdots x_{k,1}\, x_{k,2} \cdots x_{k,n_k} \in R_\Pi$.
Die Bijektivität und die inversionserhaltende Eigenschaft (3) von φ sind wegen der Konstruktion klarerweise erfüllt.

Z.B.: $\Pi = (1,2,1)$, $m = 2321 \in M_\Pi$ mit $\mathrm{inv}(m) = 4$:

$$m = \binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{3}{2}\binom{4}{1} \to \binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{2} \to \binom{1}{2}\binom{4}{1}\binom{2}{3}\binom{3}{2}$$

$$\to \binom{4}{1}\binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{3}{2} \to \binom{4}{1}\binom{1}{2}\binom{3}{2}\binom{2}{3} = \varphi(m).$$

Also ist $\varphi(m) = 4\ 1\ 3\ 2 \in R_\Pi$ mit $\mathrm{inv}(\varphi(m)) = 4$.

<u>Bemerkung:</u> Im Falle $k = n$ und $n_1 = n_2 = \ldots = n_n = 1$ ist $\varphi(m)=m^{-1}$ die *inverse* Permutation zu $m \in M_\Pi = S_{\underline{n}}$. D.h. unsere Bijektion φ verallgemeinert die Beobachtung von *Rothe* in [2]:
Für alle $\sigma \in S_{\underline{n}}$ *gilt:* $\mathrm{inv}(\sigma) = \mathrm{inv}(\sigma^{-1})$.

L i t e r a t u r

[1] I.P. GOULDEN, D.M. JACKSON: Combinatorial Enumeration. John Wiley & Sons, New York, 1983.

[2] K.F. HINDENBURG (Ed.): Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen 2, Leipzig, 1800.

[3] A. KERBER, K.-J. THÜRLINGS: Symmetrieklassen von Funktionen und ihre Abzähltheorie, Teil II. Bayreuther Math. Schriften, Heft 15, 1983.

[4] P.A. MACMAHON: Two applications of general theorems in combinatory analysis, Proc. London Math. Soc. (2) 15 (1916), 314-321.

Derzeitige Adresse des Autors:
Lehrstuhl II für Mathematik
Universität Bayreuth, Postfach 3008
D-8580 Bayreuth