COMPARAISON DE DEUX DECOMPOSITIONS SYMETRIQUES DES NOMBRES D'ANDRE

G. Kreweras, Université Pierre et Marie Curie, Paris

1. Introduction

Il est connu depuis Désiré André [1] que les nombres c_n définis par

$$\frac{1+\sin t}{\cos t} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$$

comptent (entre autres choses, cf. [5]) les permutations $x = x_1 x_2 \dots x_n$ des entiers $1,2,\dots,n$ telles que, pour tout $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, la différence $x_{i+1} - x_i$ soit du signe de $(-1)^i$. Nous appellerons "alternées down-up" ces permutations et nous désignerons leur ensemble par D_n .

Les premiers nombres c_n sont rappelés ci-après :

$n =$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_n =$ 1	1	1	2	5	16	61	272	1385	7936	50521...

Ceux d'indices pairs ont été souvent appelés nombres sécants, ceux d'indices impairs nombres tangents ; nous leur donnons ici la dénomination commune de "nombres d'André" , et nous ne nous y intéressons que pour $n \geqslant 2$.

Parmi les décompositions des nombres d'André c_n , les plus étudiées ont été les nombres d'Entringer ([4], [8]) et les nombres de Carlitz ([2], [9]). Le but du présent article est d'étudier et de comparer entre elles deux décompositions qui présentent l'une et l'autre une symétrie interne, et que nous désignerons par (A) et (B).

2. Loi des anticipations

Toute permutation "down-up" de D_n peut être considérée comme extension linéaire de l'ordre partiel défini sur un ensemble de n éléments $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ par les relations $a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < \ldots$
Le nombre total de ces extensions linéaires est précisément c_n. Etant donné un élément de référence quelconque ℓ de D_n, on peut faire correspondre à tout élément x de D_n une certaine distance à ℓ, soit d, telle que $d \in \{0,1,2,\ldots,n-2\}$.

L'une des manières de définir cette distance d de x à ℓ consiste à considérer la permutation $y = x \circ \ell^{-1}$ et à compter le nombre d'<u>anticipations</u> de y ; une anticipation est par définition un entier qui apparaît dans la permutation $y = y_1\, y_2 \ldots y_n$ <u>avant</u> l'entier immédiatement inférieur (exemple pour n = 6 : la permutation <u>2</u> <u>4</u> 1 <u>6</u> 5 3 présente 3 anticipations, soulignées).

En vertu d'un théorème général sur les ensembles partiellement ordonnés, dû à Stanley [10] et rétabli dans [7], le nombre v(n,d) des éléments x de D_n situés à la distance d de l'élément de référence ℓ est indépendant du choix de ℓ. En outre, toujours en vertu de même théorème, le fait que, pour l'ordre considéré ici, toutes les chaînes maximales ont même longueur (= 2) entraîne la propriété de symétrie v(n,d) = v(n,n-2-d).

Un moyen assez rapide de calcul de v(n,d) résulte de [6], où l'on a dénombré les applications de $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ dans $\{1,2,\ldots,t\}$ qui préservent l'ordre $a_1 > a_2 < a_3 > \ldots$ Si $P_n(t)$ est le nombre de ces applications, on montre sans difficulté, grâce au théorème de Stanley, que

$$v(n,d) = \sum_{s=0}^{d} (-1)^{\lambda} \binom{n+1}{s} P_n(d+2-s) \quad .$$

Quant à la valeur de $P_n(t)$ elle peut se calculer comme terme de la dernière ligne et de la dernière colonne de la matrice M^{n+1}, où M est une matrice "sud-est" d'ordre t-1 (le terme de i-ième ligne et j-ième colonne est 1 si $i+j \geq t$ et 0 sinon). Un calcul équivalent consiste à utiliser la récurrence du $(t-1)^{\underline{me}}$ ordre

$$P_n(t) = \sum_{\lambda=1}^{t-1} A_\lambda^t \; P_{n-\lambda}(t) ,$$

où

$$A_\lambda^t = (-1)^{\binom{\lambda-1}{2}} \binom{\lfloor \frac{t+\lambda-1}{2} \rfloor}{\lambda} \qquad ;$$

cette récurrence se réduit, pour les valeurs 3 et 4 de t , à

$$P_n(3) = P_{n-1}(3) + P_{n-2}(3) \qquad \rightarrow \text{(nombres de Fibonacci)}$$

$$P_n(4) = 2P_{n-1}(4) + P_{n-2}(4) - P_{n-3}(4) .$$

D'où le début de tableau

$P_n(t)$	n = 2	3	4	5	6	7	8
t = 2	1	1	1	1	1	1	1
3	3	5	8	13	21	34	55
4	6	14	31	70	157	353	793

qui permet, grâce à la symétrie et aux sommes c_n connues, de former le tableau

(A)

v(n,d)	d = 0	1	2	3	4	5	6	$\Sigma = c_n$
n = 2	1							1
3	1	1						2
4	1	3	1					5
5	1	7	7	1				16
6	1	14	31	14	1			61
7	1	26	109	109	26	1		272
8	1	46	334	623	334	46	1	1385

La ligne n = 4 a la signification suivante :

D_4 = {2143, 3142, <u>3241</u>, 4132, 4231} (c_4 = 5)

Choisissons $\ell = 3241$.

			d =	
$x^1 = 2\,1\,4\,3$	$x^1 \circ \ell^{-1} = y^1 = \underline{3}\,1\,2\,4$		1	
$x^2 = 3\,1\,4\,2$	$x^2 \circ \ell^{-1} = y^2 = \underline{2}\,1\,3\,4$		1	
$x^3 = 3\,2\,4\,1$	$x^3 \circ \ell^{-1} = y^3 = 1\,2\,3\,4$	0		
$x^4 = 4\,1\,3\,2$	$x^4 \circ \ell^{-1} = y^4 = \underline{2}\,1\,\underline{4}\,3$			2
$x^5 = 4\,2\,3\,1$	$x^5 \circ \ell^{-1} = y^5 = 1\,2\,\underline{4}\,3$		1	

$v(4,0) = 1 \qquad v(4,1) = 3 \qquad v(4,2) = 1$

3. Loi des triplets

Une autre loi symétrique repose sur la considération des n-2 triplets formés par trois termes consécutifs $x_\lambda\, x_{\lambda+1}\, x_{\lambda+2}$ d'une permutation x de D_n ($\lambda \in \{1,2,\ldots,n-2\}$). Dans un tel triplet, le terme de valeur médiane est nécessairement soit x_λ (triplet "divergent"), soit $x_{\lambda+2}$ (triplet "convergent"). On peut alors appeler w(n,e) le nombre de permutations de D_n qui ont (par exemple) e triplets divergents et par conséquent n-2-e triplets convergents, et il est évident que l'on aura $w(n,e) = w(n,n-2-e)$.

Pour calculer w(n,e), il est commode de se poser à titre intermédiaire le problème suivant : parmi les w(n,e) permutations de D_n qui ont e triplets divergents, quelles sont celles qui se terminent par ...i j ? La question n'a évidemment de sens que si $i > j$ lorsque n est pair et si $i < j$ lorsque n est impair. Dans les deux cas, appelons W(n,e,i,j) l'ensemble considéré.

Soit $x \in W(n,e,i,j)$, avec n <u>pair et $i > j$</u> . Si l'on supprime le terme final j de x et que l'on "tasse" les termes restants (c'est-à-dire que l'on diminue d'une unité tous les termes qui étaient supérieurs au terme supprimé), on obtient une permutation x' qui se termine par i-1 et qui comprend e ou e-1 triplets divergents suivant que le dernier triplet de x était convergent ou divergent ; on a alors

dans la 1ère hypothèse $x' \in W(n-1,e,k,i-1)$ avec $k < j-1$
dans la 2ème hypothèse $x' \in W(n-1,e-1,k,i-1)$ avec $k > j$.

Si $x \in W(n,e,i,j)$, avec n impair et $i < j$, on a de façon analogue, en définissant toujours x' par suppression du dernier terme j et tassement :

si le dernier triplet de x est convergent $x' \in W(n-1,e-1,k,i)$, avec $k \leq i-1$

si le dernier triplet de x est divergent $x' \in W(n-1,e,k,i)$, avec $k \geq i$.

Dans tous les cas considérés, on revient de x' à x par réadjonction d'un terme j à la fin et réaugmentation d'une unité de tous ceux qui étaient $> j$. On en conclut aisément les deux récurrences entre les cardinaux w des ensembles W :

n pair $\quad w(n,e,i,j) = \sum_{k \leq j-1} w(n-1,e,k,i-1) + \sum_{k \geq j} w(n-1,e-1,k,i-1)$

n impair $\quad w(n,e,i,j) = \sum_{k \leq j-1} w(n-1,e-1,k,i) + \sum_{k \geq j} w(n-1,e,k,i)$.

On peut alors former de proche en proche les tableaux triangulaires (T_n) ci-après (sud-ouest pour n pair, nord-est pour n impair), dans lesquels on inscrira dans la case (i,j) les valeurs successives de w pour e=0,1,2,...,n-2 :

(T_3)

	j = 2	3
i = 1	10	01
2		00

(T_4)

	j = 1	2	3
i = 2	000		
3	010	000	
4	001	010	010

(T_5)

	j = 2	3	4	5
i = 1	0110	0110	0020	0011
2		1100	0200	0110
3			0100	0010
4				0000

(T_6)

	j = 2	2	3	4	5
i = 2	000..				
3	001..	011..			
4	012..	022..	121..		
5	003..	005..	023..	032..	
6	001..	002..	012..	013..	013..

(T_7)

	j = 2	3	4	5	6	7	8
i = 1	017...	017...	016...	005...	002...	001...	
2		$03\overline{10}$...	$02\overline{10}$...	$00\overline{10}$...	005...	003...	
3			156...	047...	026...	015...	
4				045...	016...	004...	
5					013...	001...	
6						000...	

(T_8)

	j = 1	2	3	4	5	6	7
i = 2	000....						
3	001....	017....					
4	004....	$01\overline{10}$....	$04\overline{17}$....				
5	018....	$02\overline{13}$....	$04\overline{21}$....	$18\overline{22}$....			
6	008....	$00\overline{13}$....	$00\overline{23}$....	$04\overline{26}$....	$08\overline{27}$....		
7	004....	006....	$00\overline{11}$....	$02\overline{15}$....	$03\overline{20}$....	$04\overline{22}$....	
8	001....	002....	005....	019....	$01\overline{13}$....	$01\overline{14}$....	$01\overline{14}$....

Le nombre finalement cherché, $w(n,e)$, n'est autre que $\sum_{(i,j)} w(n,e,i,j)$,

c'est-à-dire la somme de tout ce qui est en $(e+1)^{\underline{me}}$ position dans (T_n).

On obtient ainsi, toujours grâce à la symétrie et aux sommes c_n connues, le tableau

(B)

w(n,e)	e = 0	1	2	3	4	5	6	$\Sigma = c_n$
n = 2	1							1
3	1	1						2
4	1	3	1					5
5	1	7	7	1				16
6	1	14	31	14	1			61
7	1	26	109	109	26	1		272
8	1	46	336	619	336	46	1	1385

Interprétation de la ligne 4 :

		e =
x^1 = 2 1 4 3	214 div., 143 conv.	1
x^2 = 3 1 4 2	314 div., 142 conv.	1
x^3 = 3 2 4 1	324 div., 241 div.	2
x^4 = 4 1 3 2	413 conv., 132 conv.	0
x^5 = 4 2 3 1	423 conv., 231 div.	1

4. Distribution croisée avec un ℓ particulier

La confrontation des deux tableaux (A) et (B) permet de constater que, malgré l'apparence des lignes $n \leq 7$, les deux décompositions v et w sont distinctes ; les premières valeurs qui ne coïncident pas sont $v(8,3) = 334$ et $w(8,3) = 336$. Il résulte de calculs effectués par Ö. Eğecioğlu [3] jusqu'à $n = 12$ que la loi (A) des anticipations est légèrement plus "pointue" que la loi (B) des triplets ; toutefois l'excès relatif du maximum de (A) sur celui de (B) atteint à peine 1 % pour $n \leq 12$: $v(12,5) = 1009391$, $w(12,5) = 1019051$.

Nous apporterons plus loin une précision supplémentaire à la proximité des deux lois, en montrant que l'on a toujours non seulement l'égalité à peu près triviale

$$v(n,0) = v(n,n-2) = w(n,0) = w(n,n-2) = 1 ,$$

mais encore l'égalité beaucoup moins évidente

$$v(n,1) = v(n,n-3) = w(n,1) = w(n,n-3) .$$

Nous utiliserons pour cela une extension linéaire de référence particulière, à savoir

$$(1) \qquad \ell = n \; 1 \; \overline{n-1} \; 2 \; \overline{n-2} \; 3 \; \ldots$$

Dans ces conditions, si

$$x = x_1 \, x_2 \, x_3 \ldots . x_n \in D_n ,$$

alors $\quad x \circ \ell^{-1} = y = x_2 \, x_4 \, x_6 \ldots . x_5 \, x_3 \, x_1 = y_1 \, y_2 \ldots y_n$.

Il sera commode d'appeler y la "forme dépliée" de x ; bien entendu y n'appartient pas <u>en général</u> à D_n .

L'intérêt de cette particularisation de ℓ est que le nombre e de triplets divergents de x n'est autre que le nombre de différences $y_{j+1} - y_j$ <u>négatives</u> dans y . On s'en assure en observant que si $x_i\ x_{i+1}\ x_{i+2}$ est un triplet divergent on a

$$\text{soit} \quad x_{i+2} < x_i < x_{i+1}$$

$$\text{soit} \quad x_{i+1} < x_i < x_{i+2} \ .$$

Dans le 1er cas les indices i et i+2 sont tous deux pairs et correspondent à deux indices j et j+1 consécutifs tels que $y_{j+1} - y_j < 0$, avec $j < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; dans le second cas les indices i+2 et i sont impairs et correspondent également à deux indices j et j+1 consécutifs tels que $y_{j+1} - y_j < 0$, mais avec $j > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. N.B. Pour la seule valeur $j = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, on a toujours $y_{j+1} - y_j > 0$.

Exemple (n = 7) :

$$x = 6\ 1\ 4\ \underline{3}\ \underline{\underline{7}}\ 2\ 5 \rightarrow y = 1\ \underline{\underline{3\ 2}}\ 5\ \underline{7\ 4}\ 6$$

triplet divergent	437	→	7 4
" "	372	→	3 2

Le choix particulier fait en (1) pour ℓ permet ainsi de voir aisément les deux paramètres descriptifs d et e de tout $x \in D_n$ sur la forme dépliée y correspondante. Mais il permet en outre de constater que pour $n \in \{2,3,4,5\}$, les valeurs numériques de d et de e deviennent égales sur <u>toutes</u> les permutations.

Exemple : $x = 5\ 2\ 3\ 1\ 4 \rightarrow y = \underline{2}\,\big|\,1\ \underline{4}\,\big|\,3\ 5$

d = 2 anticipations (soulignées)

e = 2 différences négatives (barres verticales).

Malheureusement cette propriété ne subsiste plus pour <u>toutes</u> les permutations dès que $n \geqslant 6$. Exemple :

$$x = 5\ 1\ 3\ 2\ 6\ 4 \rightarrow y = 1\ 2\ \underline{4}\ \underline{6}\,\big|\,3\ 5 \qquad d = 2 \quad e = 1 \ .$$

Ce fait $(d \neq e)$ est néanmoins exceptionnel et ne se présente que pour 4 des 61 permutations de D_6. On est ainsi conduit assez naturellement à étudier la distribution croisée de d et e dans D_n ; celle-ci donne, pour les valeurs 6 et 7 de n , les tableaux

n = 6	e = 0	1	2	3	4	
d = 0	1					1
1		13	1			14
2		1	29	1		31
3			1	13		14
4					1	1
	1	14	31	14	1	61

n = 7	e = 0	1	2	3	4	5	
d = 0	1						1
1		22	4				26
2		4	93	12			109
3			12	93	4		109
4				4	22		26
5						1	1
	1	26	109	109	26	1	272

5. Symétrie par rapport au centre

Si l'on appelle $g_n(d,e)$ le nombre d'éléments de D_n pour lesquels d et e prennent des valeurs imposées, on constate que ces tableaux présentent une symétrie par rapport à leurs centres, qui s'exprime par

(2) $$g_n(d,e) = g_n(n-2-d,\ n-2-e)\ .$$

Pour établir cette symétrie dans le cas le plus général il est commode de distinguer deux cas, suivant que n est pair $(=2p)$ ou impair $(=2p+1)$.

Si $n=2p$, on définit dans D_n unr involution naturelle entre la permutation $x = x_1\, x_2 \ldots x_n$ et la permutation $x = \overline{n+1-x_n}\ \ \overline{n+1-x_{n-1}} \ldots \overline{n+1-x_1}$ obtenue à partir de x par retournement et complémentation. Dans ces conditions, si à x correspond $y = uv$, concaténation de deux sous-suites u et v formées chacune de p entiers, à x* correspondra $y^* = \overline{v}\,\overline{u}$ (où la barre désigne la complémentation).

Si $n = 2p+1$, on obtient x^* à partir de x par simple retournement, sans complémentation. Si alors $y = uv$, avec p entiers pour u et $p+1$ pour v , à x^* correspondra $y^* = u'v'$ (où l'accent désigne le retournement).

Exemples :

$n = 6$ $x = 5\ 1\ 3\ 2\ 6\ 4$ $x^* = 3\ 1\ 5\ 4\ 6\ 2$

$y = \underbrace{1\ 2\ \underline{4}}_{u}\ \underbrace{\underline{6}|3\ 5}_{v}$ $y^* = \underbrace{1\ \underline{4}|2}_{\bar{v}}\ \underbrace{\underline{6}|5|3}_{\bar{u}}$ $d+d^* = e+e^* = 4$

$n = 7$ $x = 3\ 1\ 7\ 4\ 6\ 2\ 5$ $x^* = 5\ 2\ 6\ 4\ 7\ 1\ 3$

$y = \underbrace{1\ \underline{4}|2}_{u}\ \underbrace{5\ 6\ 7|3}_{v}$ $y^* = \underbrace{\underline{2}\ \underline{4}|1}_{u'}\ \underbrace{3\ \underline{7}|\underline{6}|5}_{v'}$ $d+d^* = e+e^* = 5$

Dans les deux cas on s'assure sans peine que si y présente d anticipations, y^* en présente $n-2-d$, et que si y présente e différences $y_{i-1} - y_i$ négatives, y^* en présente $n-2-e$ (dans les deux cas la différence $y_{p+1} - y_p$, et elle seule, est <u>nécessairement positive</u>). La symétrie (2) en résulte immédiatement.

Les tableaux relatifs aux valeurs 6 et 7 de n pourraient laisser croire qu'il y a également symétrie par rapport à la diagonale $d = e$; mais cela ne peut être le cas puisque l'on a vu que les deux lois marginales sont distinctes. Le tableau pour $n = 8$ (calculé par Eğecioğlu [3]) donne en effet le premier exemple de dissymétrie :

n = 8	e = 0	1	2	3	4	5	6	
d = 0	1							1
1		34	12					46
2		12	248	73	1			334
3			75	473	75			623
4			1	73	248	12		334
5					12	34		46
6							1	1
	1	46	336	619	336	46	1	1385

On a donc <u>en général</u> $g_n(d,e) \neq g_n(e,d)$. Cependant nous montrerons dans les deux §§ suivants, que l'on a toujours $g_n(k,1) = g_n(1,k)$ et nous préciserons l'expression de cette valeur commune en fonction de k .

6. Calcul de $g_n(k,1)$

Il s'agit de calculer le nombre de permutations x de D_n dont la forme dépliée y présente 1 seule différence négative et k anticipations.

Traitons d'abord le cas où $x_1 = y_n < n$. La forme dépliée y se compose alors de deux parties croissantes dont la première se termine par n ; si l'on appelle h la longueur de la seconde partie, la première est de longueur $\geqslant h$, faute de quoi h ne pourrait pas être une forme dépliée. De plus, pour la même raison, les h premiers termes de y sont $1,2,\ldots,h$. La seconde partie consiste donc en h termes pris parmi $\{h+1, h+2, \ldots, n-1\}$, décomposés en k <u>séquences</u> $s_1 \ldots s_k$ (dont chacune comprend les entiers "sautés" par une anticipation).

Exemple (n=9 , h=3) :

$$x = 8 \quad 1 \quad 7 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 9 \quad 5 \quad 6$$

$$y = 1 \quad 2 \quad 3 \quad \underline{5} \quad 6 \quad \underline{9} \,|\, \underbrace{4}_{s_1} \quad \underbrace{7 \quad 8}_{s_2}$$

Il est facile de s'assurer que chaque fois que l'on choisit dans $\{h+1, h+2, \ldots, n-1\}$ un ensemble de h entiers présentant k séquences, ces entiers écrits dans l'ordre croissant constituent la seconde partie d'une forme dépliée.

Or le nombre de parties de cardinal h d'un segment de cardinal m , qui présentent k séquences, est facile à calculer : le choix des longueurs successives des séquences peut se faire de $\binom{h-1}{k-1}$ manières, et une fois ce choix fait il y a $\binom{m-h+1}{k}$ de "placer" les k séquences. Ici $m = n - h - 1$; le nombre total de possibilités, pour h connu, est donc

$$\binom{h-1}{k-1}\binom{n-2h}{k} .$$

Si h n'est pas spécifié, le nombre total de permutations de D_n <u>pour lesquelles $x_1 < n$</u> est ainsi

$$(3) \qquad \sum_h \binom{h-1}{k-1}\binom{n-2h}{k} \quad .$$

Reste à traiter le cas où $x_1 = n$. Puisque n est évidemment la plus grande valeur possible que x_1 puisse prendre si $x \in D_n$, nous dirons que x_1 est "en butée". Si en même temps $x_2 = 1$, plus petite valeur possible, nous dirons que x_2 est également "en butée". D'une façon générale nous dirons que x_i est en butée si tous ses prédécesseurs sont en butée est si x_i est la plus petite valeur possible pour i pair ou la plus grande possible pour i impair.

Supposons que les q premiers termes de x et eux seuls soient en butée, <u>et que q soit pair</u> : q = 2r . La forme dépliée y commence de ce fait par 1 2 ... r et se termine par $\overline{n-r+1}\ \overline{n-r+2}$ ... n . La partie médiane de y se compose alors de n-q termes qui, si on les diminue tous de r unités, constituent la forme dépliée y' d'une permutation x' appartenant à D_{n-q} , et pour laquelle on a $x'_1 = y'_{n-q} < n-q$ (faute de quoi le (q+1)-ième terme serait lui aussi en butée). Anticipations et différences négatives demeurent en nombres inchangés, donc on peut appliquer la formule (3), qui indique que le nombre de possibilités est

$$(3') \qquad \sum_h \binom{h-1}{k-1}\binom{n-q-2h}{k} \quad .$$

Si l'on suppose maintenant <u>que q soit impair</u> (q = 2r+1), le raisonnement et la conclusion sont les mêmes : il suffit d'amputer y de ses r premiers et de ses r+1 derniers termes, puis de diminuer les termes restants de r unités, pour trouver la forme dépliée y' d'une permutation $x' \in D_{n-q}$, pour laquelle $x'_1 = y'_{n-q} < n-q$. C'est donc de nouveau l'expression (3') qui compte le nombre de possibilités ; l'expression (3) en est le cas particulier q = 0 .

Pour toute permutation $x \in D_n$, il y a une certaine valeur de q , positive ou nulle, qui dénombre les termes en butée. On obtient donc l'expression finale de $g_n(k,1)$ en sommant (3') pour toutes les valeurs non-négatives de q , ce qui donne

$$(4) \qquad g_n(k,1) = \sum_h \binom{h-1}{k-1}\binom{n+1-2h}{k+1} .$$

Le calcul de $v(n,1)$ peut se faire en sommant l'expression (4) par rapport à k . On peut pour cela sommer d'abord par rapport à k la quantité sous $\sum_h$, ce qui donne $\binom{n-h}{h+1}$, puis sommer ce dernier binomial pour $h \geq 1$, ce qui donne $\binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \ldots$. Si l'on ajoutait aussi les deux termes manquants $\binom{n+1}{0}$ et $\binom{n}{1}$, on obtiendrait le nombre de Fibonacci f_{n+1} ; on en conclut que

$$(5) \qquad v(n,1) = f_{n+1} - (n+1) ,$$

résultat qui confirme le calcul effectué au §2.

7. Calcul de $g_n(1,k)$

On considère cette fois l'ensemble des permutations x de D_n dont la forme dépliée y a une seule anticipation et k différences $y_{j+1} - y_j$ négatives. On commence, comme au §5, par traiter d'abord le cas où $x_1 = y_n < n$, mais on fera en outre l'hypothèse (dont on se libèrera par la suite) que la position de n dans y est l'avant-dernière ($y_{n-1} = n$). En d'autres termes on considèrera l'ensemble des y ("repliables") qui se décomposent en $k+1$ "runs" croissants dont l'avant-dernier se termine par n et dont le dernier se réduit au seul terme y_n . Appelons $R_n^1(k)$ cet ensemble, l'indice supérieur 1 étant là pour rappeler que le dernier run est de longueur 1 .

Par hypothèse le i-ième run, sauf évidemment si $i = k+1$, se compose d'une partie basse u_i et d'une partie haute v_i non vides dont chacune est une séquence d'entiers consécutifs. Seule la partie basse du $(k+1)$-ième run est non-vide (réduite à $u_{k+1} = y_n$) ; de plus l'enchaînement $u_1\ u_2 \ldots u_k\ u_{k+1}\ v_1\ v_2 \ldots v_k$ reproduit la suite des entiers de 1 à n .

Notamment tous ces y commencent par 1. On les groupera en deux classes complémentaires, à savoir

- la classe $S_n(k)$, de cardinal $s_n(k)$, dans laquelle u_1 se réduit à 1 (y_2 est une anticipation)

- la classe $T_n(k)$, de cardinal $t_n(k)$, dans laquelle y commence par 1 2 ...

Nous allons maintenant montrer que les nombres $s_n(k)$ et $t_n(k)$ satisfont aux deux relations de récurrence ci-après :

$$(6) \qquad s_n(k) = s_{n-2}(k) + t_{n-2}(k-1)$$

$$(7) \qquad t_n(k) = s_{n-1}(k) + t_{n-1}(k) \quad .$$

Pour établir (6), partons d'un $y \in S_n(t)$, supprimons-y les termes y_2 et y_{n-1} (=n) et "tassons" les termes restants (c'est-à-dire diminuons d'une unité tous ceux qui étaient supérieurs à y_2 , sans changer les autres) ; on obtient ainsi une permutation y' qui appartient soit à $S_{n-2}(k)$, soit à $T_{n-2}(k-1)$, suivant que le premier run de y se compose d'au moins 3 termes ou de deux termes seulement.

Exemples (n = 9, k = 2) :

$$y \;=\; 1\;4\;5\,|\,2\;6\;7\;8\;9\,|\,3 \quad \in S_9(2)$$

suppression de y_1 et y_8 $\rightarrow$ $1\;5\,|\,2\;6\;7\;8\,|\,3$

tassement $\rightarrow$ $y' = 1\;4\,|\,2\;5\;6\;7\,|\,3 \quad \in S_7(2)$

$$y \;=\; 1\;6\,|\,2\;3\;4\;7\;8\;9\,|\,5 \quad \in S_9(2)$$

suppression de y_1 et y_8 $\rightarrow$ $1\;2\;3\;4\;7\;8\,|\,5$

tassement $\rightarrow$ $y' = 1\;2\;3\;4\;6\;7\,|\,5 \quad \in T_7(1)$

Le caractère bijectif de cette construction se vérifie sans peine. L'égalité (6) est ainsi établie.

Pour établir (7), partons de $y \in T_n(k)$, remplaçons le 1 initial par le terme final retiré de sa position finale, et transformons la suite ainsi obtenue, par complémentation à n+1 et retournement, en une permutation y' . Cette dernière appartient alors soit à $S_{n-1}(k)$, soit à $T_{n-1}(k)$, suivant que l'avant-dernier terme $y_{n-1} = n$ de y est précédé d'un terme $\leqslant n-2$ ou de $n-1$.

Exemples $(n = 9,\ k = 2)$:

$$y = 1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 8\,|\,5\ 9\,|\,6 \quad \in T_9(2)$$

remplacement de 1 par le 6 final $\rightarrow$ $6\,|\,2\ 3\ 4\ 7\ 8\,|\,5\ 9$

retournement et complémentation à 10 $\rightarrow y = 1\ 5\,|\,2\ 3\ 6\ 7\ 8\,|\,4 \quad \in S_8(2)$.

$$y = 1\ 2\ 3\ 4\ 7\,|\,5\ 8\ 9\,|\,6 \quad \in T_9(2)$$

remplacement de 1 par le 6 final $\rightarrow$ $6\,|\,2\ 3\ 4\ 7\,|\,5\ 8\ 9$

retournement et complémentation à 10 $\rightarrow y' = 1\ 2\ 5\,|\,3\ 6\ 7\ 8\,|\,4 \quad \in T_8(2)$

On vérifie aisément que dans les deux hypothèses cette transformation conserve le nombre k de différences négatives, ne change rien au fait qu'il y a une seule anticipation, et a un caractère bijectif ; il en résulte l'égalité (7).

Les formules récurrentes (6) et (7) permettent le calcul explicite de $s_n(k)$ et de $t_n(k)$. Pour $k = 1$, $S_n(k)$ se réduit à la permutation $1\ 3\ 4 \ldots n\,|\,2$, d'où $s_n(k) = 1$; $T_n(k)$ se compose de toutes les permutations du type $1\ 2\ \ldots\ \overline{i-1}\ \overline{i+1} \ldots n\,|\,i$, avec $i \in \{3,4,\ldots,n-1\}$, d'où $t_n(k) = n-3$. Pour les valeurs de k supérieures à 1 , on établit que

$$s_n(k) = \sum_h \binom{h-1}{k-2}\binom{n-3-2h}{k-1}$$

$$t_n(k) = \sum_h \binom{h-1}{k-2}\binom{n-3-2h}{k}$$

(par report de ces expressions dans (6) et (7)) ; d'où le nombre total de permutations x telles que $y \in R_n^1(k)$

$$(8) \quad r_n^1(k) = s_n(k) + t_n(k) = \sum_h \binom{h-1}{k-2}\binom{n-2-2h}{k} \quad .$$

Considérons maintenant les formes repliées y qui ont toujours 1 seule anticipation et k différences négatives, mais où n se trouve non plus en position n-1 mais en position n-m (dernier run de longueur $m \geqslant 2$) ; soit $R_n^m(k)$ leur ensemble.

Si l'on se donne $y \in R_n^m(k)$, le i-ième run (pour $i \leqslant k$) se compose comme précédemment d'une partie basse et d'une partie haute. On peut alors transformer y en y' en supprimant y_1 (=1) et y_n , puis en "tassant" ; le tassement revient à diminuer de 1 tous les termes des parties basses et de 2 tous les termes des parties hautes.

Exemples (n = 14, k = 2, m = 3) :

$$y = 1 \; 2 \; 3 \; 4 \; 5 \; 6 \; \overline{12} \; \overline{13} \,|\, 7 \; 8 \; \overline{14} \,|\, 9 \; \overline{10} \; \overline{11}$$

$$\text{suppression des extrêmes} \rightarrow \quad 2 \; 3 \; 4 \; 5 \; 6 \; \overline{12} \; \overline{13} \,|\, 7 \; 8 \; \overline{14} \,|\, 9 \; \overline{10}$$

$$\text{tassement} \rightarrow y' = \quad 1 \; 2 \; 3 \; 4 \; 5 \; \overline{10} \; \overline{11} \,|\, 6 \; 7 \; \overline{12} \,|\, 8 \; 9$$

Il s'ensuit, comme on s'en assure aisément, que si $m \geqslant 2$ on a

$$r_n^m(k) = r_{n-2}^{m-1}(k) \quad ,$$

donc de proche en proche

$$r_n^m(k) = r_{n-2}^{m-1}(k) = r_{n-4}^{m-2}(k) = \ldots = r_{n-2m+2}^1(k)$$

En vertu de (8) on a ainsi

$$r_n^m(k) = \sum_h \binom{h-1}{k-2}\binom{n-2m-2h}{k} \quad ,$$

ce qui peut encore s'écrire, en remplaçant l'indice muet h par h-m :

$$r_n^m(k) = \sum_h \binom{h-m-1}{k-2}\binom{n-2h}{k} \quad .$$

La sommation de $r_n^m(k)$ pour $m \geqslant 1$ donne

$$\sum_k \binom{h-1}{k-1}\binom{n-2h}{k} \quad ,$$

qui exprime ainsi le nombre total de permutations x de D_n dont la formule repliée à 1 anticipation, k différences négatives et n ailleurs qu'en dernière position.

Cette expression est identique à l'expression (3) du §6. Le raisonnement et le calcul s'achèvent de la même manière qu'au §6 par la considération du nombre q de termes en butée au début de x ; ce qui établit finalement que $g_n(1,k)$ a la même expression (4) que $g_n(1,k)$, et par conséquent que w(n,1) a la même expression (5) que v(n,1).

Le tableau ci-après donne les valeurs communes de $g_n(k,1)$ et $g_n(1,k)$ pour $n \leqslant 13$:

	n = 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
k = 1	1	3	7	13	22	34	50	70	95	125	161
2				1	4	12	28	58	108	188	308
3							1	5	18	50	21
4										1	6
$\Sigma = f_{n+1}-n-1$	1	3	7	14	26	46	79	133	221	364	596

8. Cas particuliers et problèmes ouverts

On remarque sur le tableau ci-dessus que $g_{3k}(k,1) = g_{3k}(1,k) = 1$: il y a une seule permutation y correspondant à chacun de ces cas.

Pour k anticipations et 1 différence négative (2 runs), l'unique permutation y est

$$y = 1 \;\; 2 \; \ldots . \; k \;\; \underline{\overline{k+2}} \;\; \underline{\overline{k+4}} \; \ldots . \; \underline{\overline{3k}} \mid \overline{k+1} \;\; \overline{k+3} \; \ldots . \; \overline{3k-1} \; .$$

Exemple : n = 15 (k=5) .

$$y = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \underline{7}\ \underline{9}\ \underline{\overline{11}}\ \underline{\overline{13}}\ \underline{\overline{15}} \mid 6\ 8\ \overline{10}\ \overline{12}\ \overline{14} \leftrightarrow x = \overline{14}\ 1\ \overline{12}\ 2\ \overline{10}\ 3\ 8\ 4\ 6\ 5\ \overline{15}\ 7\ \overline{13}\ 9\ \overline{11}$$

Pour 1 anticipation et k différences négatives (k+1 runs), le premier run se compose de deux termes, le dernier d'un seul terme, et tous les autres de trois termes. On a plus précisément $y_1=1$, $y_2=\lfloor 3(k+1)/2 \rfloor$ et $y_n=\lfloor (3k+1)/2 \rfloor$; quant aux k-1 runs intermédiaires, les premiers ont une partie basse de deux termes et une partie haute d'un seul et pour les derniers c'est l'inverse (l'ajustement se fait au milieu suivant la parité de k).

Exemples : n = 12 (k = 4)

$$y = 1\ 7 \mid 2\ 3\ 8 \mid 4\ 9\ \overline{10} \mid 5\ \overline{11}\ \overline{12} \mid 6 \;\; \leftrightarrow x = 6\ 1\ \overline{12}\ 7\ \overline{11}\ 2\ 5\ 3\ \overline{10}\ 8\ 9\ 4$$

n = 15 (k = 5)

$$y = 1\ 9 \mid 2\ 3\ \overline{10} \mid 4\ 5\ \overline{11} \mid 6\ \overline{12}\ \overline{13} \mid 7\ \overline{14}\ \overline{15} \mid 8$$
$$\leftrightarrow x = 8\ 1\ \overline{15}\ 9\ \overline{14}\ 2\ 7\ 3\ \overline{13}\ \overline{10}\ \overline{12}\ 4\ 6\ 5\ \overline{11}$$

Par la symétrie étudiée au §5 , on en déduit aisément la permutation unique qui a 3(k-1) anticipations et 2(k-1) différences négatives et celle qui a 2(k-1) anticipations et 3(k-1) différences négatives. Voici à titre d'exemple les formes dépliées correspondantes pour n = 12 (k=4) :

$$d = 9 \;,\; e = 6 : \quad y = \underline{4} \mid \underline{3}\ \underline{8} \mid \underline{2} \mid 1\ \underline{7}\ \underline{\overline{12}} \mid \underline{6}\ \underline{\overline{11}} \mid \underline{\overline{10}} \mid 5\ 9$$

$$d = 6 \;,\; e = 9 : \quad y = \underline{3} \mid 1\ \underline{8} \mid \underline{6} \mid 4 \mid 2\ \underline{\overline{12}} \mid \underline{\overline{11}} \mid \underline{\overline{10}} \mid 9 \mid 7 \mid 5 \; .$$

Il serait notamment intéressant de recenser tous les cas non triviaux où $g_n(d,e) = 1$ et d'identifier les permutations correspondantes ; on peut remarquer que le fait se produit notamment pour $n = 8$ lorsque $d = 2$ et $e = 4$ ou bien $d = 4$ et $e = 2$.

D'autres problèmes demeurent ouverts, notamment :

1°) Montrer que $g_n(d,e)$ ne peut être différent de 0 que si $|d-e|$ n'est pas trop grand ; apparemment on doit avoir $|d-e| \leqslant \lfloor n/2 \rfloor - 2$ pour $n \geqslant 4$.

2°) Etablir les unimodalités qui apparaissent lorsqu'on fixe, en même temps que n , la valeur de d , ou celle de e , ou celle de leur différence.

3°) Trouver des algorithmes de calcul rapide de $g_n(d,e)$, sous forme de généralisation de l'expression (4).

REFERENCES

[1] ANDRE D., Développements de sec x et de tang x , C.R.A.c. Sc., 88 (1879).

[2] CARLITZ L., Eulerian numbers and polynomials, Math. Magazine, 33 (1959).

[3] EǦECIOǦLU Ö. (University of California, Santa-Barbara), communication personnelle (1985).

[4] ENTRINGER R.C., A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers, Nieuw Arch. Wisk., 14 (1966).

[5] FOATA D. & SCHUTZENBERGER M.P., Nombres d'Euler et permutations alternantes, in Srivastava et al., A survey of Combinatorial Theory, North-Hollang (1973).

[6] KREWERAS G., Les préordres totaux compatibles avec un ordre partiel, Math. Sc. Hum., 53 (1976).

[7] KREWERAS G., Polynomes de Stanley et extensions linéaires d'un ordre partiel, Math. Sc. Hum., 73 (1981).

[8] POUPARD C., De nouvelles significations énumératives des nombres d'Entringer, Disc. Math., 38 (1982).

[9] POUPARD Y., Arbres d'André, nombres de Carlitz et d'Entringer, 12è Sém. Loth. de Combinatoire (1985).

[10] STANLEY R., Ordered structures and partitions, Memoirs of the Am. Math. Soc., 119 (1972).