LA CONVEXITÉ DANS LES STRUCTURES COMBINATOIRES

P. Duchet
C.N.R.S.

C.A.M.S. - M.S.H.
54 bd Raspail,
75006 Paris (France)

Dans cet article $\subset$ désigne l'inclusion stricte et $\setminus$ la différence ensembliste.

INTRODUCTION

La convexité n'est pas encore, à proprement parler, une théorie mathématique, mais plutôt le domaine opératoire, le champ notionnel qui se développe autour de cinq concepts de base : situation médiane (~ dépendance convexe), algébricité (~ enveloppe convexe), séparation (~ demi-espaces), extrémalité (~ points extrémaux), face (~ structure de treillis associée aux parties exposées).

A ce titre, la convexité traverse pratiquement toutes les théories combinatoires constituées : théorie des graphes (et hypergraphes), matroïdes (et matroïdes orientés), optimisation (en particulier, optimisation discrète), configurations, théorie extrémale des ensembles, ensembles ordonnés, géométries finies, méthodes énumératives.

Le premier aspect de cette interférence entre convexité et combinatoire est l'utilisation de méthodes combinatoires pour l'étude de la convexité ordinaire (= euclidienne).

Aux travaux innovateurs de Minkowski, Caratheodory [07], Helly [23], Radon [21], puis Kakutani [37], Levi [51], Ellis [52], Rado [52], succédèrent diverses variantes (par exemple Tverberg [66]), amorçant un traitement général axiomatique des propriétés combinatoires des ensembles convexes (voir § 1).

D'autre part, l'étude systématique de la combinatoire des faces des polyèdres, et des ensembles convexes ordinaires aboutit récemment, en partie grâce à l'apport de l'algèbre homologique, aux remarquables travaux de McMullen, Stanley, Billera, Lee, Kalai (voir aussi Barnett [73], Brugesser et Mani [71], Björner [80]). Citons la preuve de la conjecture de Motzkin, dite de la "borne supérieure" par McMullen [71] donnant la valeur maximum de f_k , nombre de faces de dimension k d'un d-polytope à n sommets (d,n fixés et $0 \leq k \leq n$), suivie de sa généralisation aux complexes shellables par Stanley [75], et de la caractérisation complète des f-vecteurs $(f_0,\dots,f_d)$ des d-polytopes simpliciaux par Stanley [80], Billera et Lee [81]. Tout récemment la conjecture d'Eckhoff caractérisant les f-vecteurs des complexes simpliciaux associés aux familles finies de convexes ordinaires de $\mathbb{R}^d$ (= nerfs de ces familles au sens de Wegner), fut prouvée par Kalai [84].

Le second aspect de l'interférence entre combinatoire et convexité est l'utilisation, dans les théories combinatoires existantes, d'idées et de méthodes de la convexité. C'est à cet aspect que se réfère le titre de cet article "Convexité dans les structures combinatoires". Dans le cadre d'une Protothéorie générale de la convexité, contenant notamment l'étude du problème de la partition d'Eckhoff en Section 1, je décrirai les résultats récents (postérieurs à 1968) qui soulignent l'intérêt d'un développement de type axiomatique de l'étude des convexités associées aux structures combinatoires :

La convexité dans les matroïdes orientés apparaît comme un cas intéressant de la théorie des géométries convexes, ou antimatroïdes proposée par Edelman et Jamison [84] ou, dualement, de la théorie des shelling structures, proposée par Korte et Lovasz [84] (en Section 2). La convexité dans les graphes est traitée en Section 3. Les structures ordonnées et arborescentes sont traitées en Section 4.

Un domaine combinatoire particulièrement important fait intervenir intensivement les idées de la convexité : l'Optimisation Combinatoire (notamment discrète). Il s'agit là d'un sujet classique et je n'en parlerai pas ici (voir par exemple, Stoer, Witzgall [70], Rockafeller [70], Grötschel-Lovasz-Schrijver [81], Lawler [76], Lovasz [84] et leurs références). Pour la convexité réelle en général, on consultera avec profit Bonnesen et Fenchel [34], Valentine [64], Grünbaum [67], Larman [81] et également Bair, Fourneau [71,80] et Soltan [84].

Bien que je me sois efforcé de ne rien oublier d'important, cet article est plus un manifeste pour la convexité qu'un panorama du sujet : priorité a été accordée aux résultats significatifs de l'intérêt de l'étude de la convexité dans les structures combinatoires.

§1. ESPACES A CONVEXITE

(1.1) C'est à Motzkin [51] que l'on attribue la recommandation du développement abstrait de la convexité dans un cadre de même généralité que la Topologie, celui des systèmes à fermeture algébrique (Birkhoff [67], Cohn [65], Graetzer [68]). En fait, historiquement, plusieurs approches de cette théorie coexistent, indépendamment de la convexité : Moore [10], Schmidt [52,53], Tarski [30], Hammer [63a]. Pour d'autres approches voir Bryant, Webster [72,72,77], Cantwell [74,78], Prenowitz, Jantosciak [79].

(1.2) Un ensemble E , muni d'un ensemble $\mathcal{C}$ de parties de X forme un espace à convexité $(E, \mathcal{C})$ si les axiomes suivants sont vérifiés :

(C1) $\emptyset \in \mathcal{C}$, $E \in \mathcal{C}$,

(C2) $\mathcal{C}$ est stable par intersection,

(C3) $\mathcal{C}$ est stable par union croissante.

Les éléments de X sont les <u>points</u> ; les éléments de $\mathcal{C}$, les <u>convexes</u>. Les systèmes d'ensembles qui vérifient (C1), (C2) sont connus aussi sous le nom de <u>familles de Moore</u>, et ceux qui vérifient (C3) sous le nom de <u>systèmes inductifs</u>; on travaille évidemment dans une mathématique avec axiome du choix.

(1.3) Soit $\mathcal{C}$ une famille de Moore de parties de X ; l'<u>enveloppe convexe</u> d'une partie A de X . $\langle A\rangle_{\mathcal{C}}$ ou simplement $\langle A\rangle$ est le plus petit ensemble de la famille qui contienne A . L'axiome (C3) traduit le caractère algébrique des convexités puisqu'il est équivalent (Schmidt [52] ou dans Cohn [81]; cf. aussi Hammer [63a]) à la propriété suivante :

(CF) Si $x \in E$, $A \subseteq E$, $x \in \langle A \rangle$, il existe une partie finie $F \subseteq A$ telle que $x \in \langle F \rangle$.

Toute convexité $\mathcal{C}$ peut donc être associée à une famille d'opérateurs $w_i : E^{n_i} \to E$, ce qui permet des démonstrations par récurrence. $\mathcal{C}$ est dit <u>n-aire</u>, si elle peut être associée à une famille d'opérateurs n_i-aire avec $n_i \leq n$. Les convexités 2-aires sont connues sous le nom de <u>convexités d'intervalle</u>; des convexités intéressantes étudiées dans les structures combinatoires sont souvent des convexités d'intervalles (convexités dans les graphes, espaces métriques); la convexité dans les matroïdes orientés n'est pas, en général, une convexité d'intervalle .

(1.4) $\mathcal{C}^{(n)} = \{C \subseteq E; A \subseteq C, |A| \leq n \Rightarrow \langle A \rangle \subseteq C\}$ <u>est la plus petite convexité n-aire contenant</u> $\mathcal{C}$ (Burris [68]) .

(1.5) <u>Tout espace a convexité</u> $(E, \mathcal{C})$ <u>est plongeable dans un espace à convexité d'intervalle</u> $(E', \mathcal{C}')$ <u>avec</u> $|E'| \leq \max(\chi_0, |E|)$, (Burris [72])

au sens suivant : il existe un injection $\varphi : E \to E'$ telle que, pour $A \subseteq X$ on ait $\varphi\langle A \rangle_{\mathcal{C}} = (\varphi E) \cap \langle A \rangle_{\mathcal{C}'}$.

(1.6) Un <u>morphisme convexe</u> $\varphi : (E_1, \mathcal{C}_1) \to (E_2, \mathcal{C}_2)$ est une application $\varphi : E_1 \to E_2$ telle que $\varphi^{-1}(C_2) \in \mathcal{C}_1$ pour tout $C_2 \in \mathcal{C}_2$.

Les espaces à convexités, munis des morphismes convexes forment une espèce de structure au sens de Bourbaki; ce point de vue permet de définir convexité induite et convexité produit. Si $A \subseteq E$ la convexité $\mathcal{C}_A$ induite par $\mathcal{C}$ sur A est $\mathcal{C}_A = \{C \cap A ; C \in \mathcal{C}\}$.

Si $(E_i, \mathcal{C}_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces à convexité, leur produit $(E, \mathcal{C})$ est défini par

$$E = \prod_{i \in I} E_i \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \{\prod_{i \in I} C_i \ ; \ C_i \in \mathcal{C}_i\} .$$

(1.7) Les résultats marquants en convexité axiomatique concernent essentiellement les invariants associés à des propriétés combinatoires, définis ci-après relativement à un espace à convexité $(E, \mathcal{C})$:

(1.8) Propriété de dépendance : Une partie $A \subset E$ est dite libre si $a \notin \langle A \setminus a \rangle$ pour tout $a \in A$. Le rang de $\mathcal{C}$ est la cardinalité maximum d'une partie libre; c'est aussi le plus petit entier k tel que $\mathcal{C}$ satisfasse la propriété :

(L_k) $\begin{cases} \text{Si } c_1, \ldots, c_{k+1} \in \mathcal{C} \text{ l'un des convexes } c_i \\ \text{contient l'intersection de tous les autres.} \end{cases}$

(1.9) Propriété de Helly :

(H_n) $\begin{cases} \text{Si } (C_i)_{i \in I} \text{ est une famille finie de convexes} \\ \text{d'intersection vide alors il existe au plus } n \text{ de} \\ \text{ces convexes qui ont une intersection vide.} \end{cases}$

La convexité euclidienne dans $\mathbb{R}^d$ satisfait (H_{d+1}) (Helly [23]). Les progressions arithmétiques dans $\mathbb{N}$ satisfont (H_2) (Théorème chinois). Pour d'autres applications voir Dantzer, Grünbaum, Klee [63] et Jamison [82].

Le nombre de Helly $h(\mathcal{C})$ est le plus petit entier n tel que $\mathcal{C}$ satisfasse (H_n) ; c'est aussi (Berge, Duchet [75]) la cardinalité maximale des parties $A \subseteq E$ vérifiant $\cap \{ \langle A \setminus a \rangle \, ; a \in A\} \neq \emptyset$.

On a (Duchet [84]) $\text{rang}\,(\mathcal{C}) = \max\{h(\mathcal{C}_A) \mid A \subseteq X\}$.

Pour d'autres résultats généraux sur $h(\mathcal{C})$ voir Sierkma [75,76] et Soltan [84].

(1.10) Propriété de k-partition ($k \geq 2$)

$$(P_{k,n}) \begin{cases} \text{Si } (p_i)_{i \in I} \text{ est une famille de } |I| = n \text{ points, il} \\ \text{existe une partition de } I \text{ en } k \text{ parties } I_j \text{ telle} \\ \text{que } \bigcap_{j=1}^{k} \{a_i \mid i \in I_j\} \neq 0 . \end{cases}$$

La convexité euclidienne dans $\mathbb{R}^d$ satisfait $(P_{k,(k-1)(d+1)+1})$ (Radon [21] pour k=2, Birch [60] pour d=2 et Tverberg [66,82]).

Le k-ième nombre de partition $p_k(\mathcal{C})$ est défini comme le plus petit entier n tel que $\mathcal{C}$ satisfasse $(P_{k,n})$. Le nombre $p_2(\mathcal{C})$ est plus connu sous le nom de nombre de Radon de $\mathcal{C}$ et est également noté $r(\mathcal{C})$. On a (Lévi [51]) : $h(\mathcal{C}) \leq r(\mathcal{C})-1$.

Eckhoff [79] a posé le problème étonnant suivant :

(1.11) Problème de la partition

Tout espace à convexité vérifie-t-il

$p_k - 1 \leq (k-1)(p_2 - 1)$ (inégalité de partition)

Un pas important dans l'étude de ce très difficile problème a été accompli par Jamison-Waldner [81] qui a montré :

$p_{kk'} \leq p_k p_{k'}$ d'où $p_k \leq p_2 \, k^{\log_2 p_2}$

$p_{(k-i)k'+1} \leq (p_k - i) p_{k'} + 1$

De plus Jamison Waldner a prouvé l'inégalité $p_k - 1 \leq (k-1)(p_2 - 1)$ lorsque $p_2 \leq 3$ ainsi que pour les convexités d'ordre, les convexités d'arbre (cf. Section 4) et, plus généralement, pour les convexités qui vérifient la propriété :

CIP (3,2) : Pour tout point x, parmi trois copoints de x deux sont disjoints.

Roudneff [85] apporte une réponse positive au problème de la partition pour les convexités de matroïdes orientés de rang 3.

(1.12) Propriété de Carathéodory.

(C_k) Si $x \in \langle A \rangle$, il existe $F \subset A$, avec $|F| \leq k$, tel que $x \in \langle F \rangle$.

La convexité euclidienne dans $\mathbb{R}^d$ satisfait (C_{d+1}) (Carathéodory [07]). Voir aussi Barany [81].

Le <u>nombre de Carathéodory</u> $c(\mathcal{C})$ est le plus petit entier k tel que $\mathcal{C}$ satisfasse (C_k) ; c'est aussi la cardinalité maximum d'un ensemble A tel que $\langle A \rangle \not\subseteq \bigcup_{a \in A} \langle A \setminus a \rangle$. Pour les convexités d'intervalles, $c(\mathcal{C})$ est le plus petit entier k tel que l'égalité

$$\langle A \rangle = \bigcup_{a \in A} \langle A \setminus a \rangle$$

soit vraie pour tout ensemble A de $k+1$ points (Duchet [85]).

(1.13) <u>Propriété d'échange</u>

$$(E_k) \begin{cases} \text{Si } x \in E \text{ et } A \subseteq E \text{ avec } |A| \geq k \text{ on a :} \\ \langle A \rangle \subseteq \bigcup_{a \in A} \langle \{x\} \cup A \setminus a \rangle \end{cases}$$

La convexité euclidienne dans $\mathbb{R}^d$ satisfait (E_{d+1}) (Reay [65]).

<u>Le nombre d'échange</u> $e(\mathcal{C})$ est le plus petit entier k tel que $\mathcal{C}$ satisfasse (E_k) .

(1.14) <u>Inégalités entre les invariants combinatoires.</u>

Levi [51] : $h \leq r-1$

Sierksma [76]: $e \leq c+1$

Sierksma [77]: $r \leq (h-1)\max(h,e-1)+2$

si $e \leq c$ $\quad r \leq (c-1)(h-1)+3$

Jamison-Waldner [81]: $p_k \leq (k-1)(\text{rang})+1$

Jamison-Waldner [81]: $p_k \leq (k-1)ch-c+2$

(Kay-Womble [71] pour $k=2$)

(1.15) Soit $(E_i, \mathcal{C}_i)$ une famille finie de $n \geq 2$ espaces à convexité et $(E, \mathcal{C})$ leur espace produit (1.6). Posons $h_i = h(\mathcal{C}_i)$, $h = h(\mathcal{C})$; r_i, c_i, e_i, r, c, e sont définis d'une manière analogue.

Sierksma [75] $h = \max_i h_i$

Eckhoff [78,79] $\max_i r_i \leq r$ $\quad r \leq r_1 + r_2 - 1$ si $n=2$

Sierksma [76] $r \leq \sum_i r_i - 2n+2$

Soltan [81](cf. Sierksma [76]) $e = 1 + \sum_i (c_i + \text{sign}\,(e_i - c_i - 1))$

Soltan [81] Sierksma [75] pour $n=2$; Reay [70] pour le cas où les $\mathcal{C}_i$ sont les convexités ordinaires dans R^{d_i} :

$c = e-1+\varepsilon$ où $\varepsilon = 0$ si $e_i = c_i+1$ pour tout i ou si $c_i \geq 2$ pour tout i ; $\varepsilon = 1$ dans les autres cas.

Références complémentaires : Bean [74], Cochand, Duchet [83], Doignon [73,81]

(1.16) <u>Treillis et variétés</u>

Si $(E, \mathcal{C})$ est un espace à convexité, l'ensemble $(\mathcal{C}, \subseteq)$ est un treillis complet. L'ensemble des convexités sur E , ordonné par inclusion est lui-même un treillis. La borne supérieure de deux convexités $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur E est appelé le <u>joint</u> de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (Jamison [82]).

Une classe V d'espaces à convexité constitue une <u>variété de convexités</u> si on a :

(V1) Tout espace isomorphe à un espace de V est dans V .

(V2) Tout sous-espaces d'un espace de V est dans V .

(V3) Si tout sous-espace fini d'un espace $(E, \mathcal{C})$ est dans V , alors $(E, \mathcal{C})$ est dans V .

La plupart des classes de convexités mentionnées dans cet article sont des variétés et quelques unes sont préservées par joint. La classification des convexités au moyen des variétés est un des problèmes majeurs de la protothéorie des espaces à convexité : voir Jamison [82].

(1.17) Mineurs (Jamison-Waldner [82])

Si $(E, \mathcal{C})$ est un espace à convexité et $F \subseteq E$, posons $\mathcal{C}/F = \{C \setminus F \ ; \ C \in \mathcal{C} \text{ et } F \subset C\}$. L'espace $(E \setminus F \ , \mathcal{C}/F)$ est un espace à convexité appelé le contracté de $(E, \mathcal{C})$ par F . Le sous-espace de $(E, \mathcal{C})$ induit par F est $(F, \mathcal{C}(F))$ où $\mathcal{C}(F) = \{C \cap F \ ; \ C \in \mathcal{C}\}$. On appelle espace mineur de $(E, \mathcal{C})$ tout espace à convexité isomorphe à un sous-espace d'un contracté. Les matroïdes usuels, vu comme système de fermés forment une variété d'espaces à convexité qui est préservée par mineur : en fait $(E, \mathcal{C})$ est un matroïde si et seulement si $(E, \mathcal{C})$ n'a pas pour mineur l'espace $Q_1(2) = (\{1,2\} \ , \ \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\})$.

Une autre variété remarquable d'espace à convexité stable par mineur est celle des espaces à convexités géométriques qui peut être définie comme les espaces n'ayant pas pour mineur l'espace

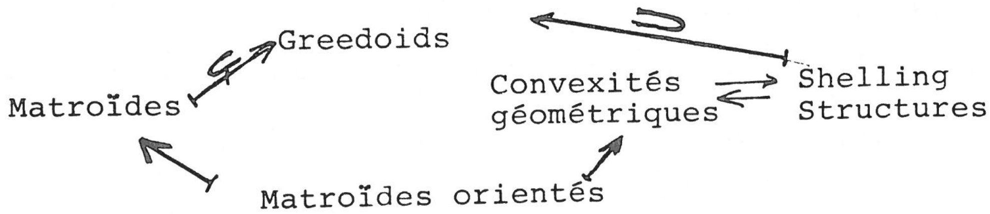
$Q_0(2) = (\{1,2\}, \{\emptyset,\{1,2\}\})$

Ces convexités géométriques sont étudiées dans la prochaine section.

Remarque : La notion de mineur proposée par Jamison-Waldner généralise la notion habituelle de mineur en Théorie des Matroïdes.

§2. CONVEXITES GEOMETRIQUES ET SHELLING STRUCTURES

(2.1) Les convexités géométriques finies (convex geometries de Edelman, Jamison [84], antiexchange-closure systems; Edelman [80], Jamison [80], ou convexité extrêmement détachables de Jamsion [74]), sont les convexités dans lesquelles tout convexe est l'enveloppe de ses points extrémaux. Elles constituent une structure déjà suffisamment riche pour mériter un développement théorique. Ces structures jouent, en un certain sens, un rôle dual de celui des matroïdes dans le cadre de la théorie des greedoïdes introduite récemment par Korte et Lovasz [84a] :



Nous nous limitons dans cette section aux convexités géométriques; mais il est clair que l'axiome (CG2) qui les définit (ci-dessous) a un sens dans le cas infini. Dans toutes les autres sections, le terme convexité géométrique signifie convexité satisfaisant (CG2).

(2.2) GREEDOIDES : $(E, \mathcal{A})$ E : ensemble fini $\mathcal{A} \subseteq 2^X$

(parties accessibles du greedoïde)

(G1) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(G2) Si $A, B \in \mathcal{A}$, $|B| > |A|$, alors $\exists b \in B \setminus A$, $A \cup \{b\} \in \mathcal{A}$

(2.3) MATROIDES : $(E, \mathcal{C})$ E : ensemble fini $\mathcal{C} \subseteq 2^X$

(M1) $(E, \mathcal{C})$ est un espace à convexité

(M2) Si $b, c \notin \langle A \rangle$, $c \in \langle A \cup \{b\} \rangle_{\mathcal{C}}$, alors $b \in \langle A \cup \{c\} \rangle$

(2.4) CONVEXITE GEOMETRIQUE FINIE : $(E, \mathcal{C})$ E : ensemble fini , $\mathcal{C} \subset 2^X$

(CG1) $(E, \mathcal{C})$ est un espace à convexité.

(CG2) Si $b, c \notin \langle A \rangle_{\mathcal{C}}$, $b \neq c$, $c \in \langle A \cup \{b\} \rangle_{\mathcal{C}}$ alors $b \notin \langle A \cup \{c\} \rangle_{\mathcal{C}}$

(2.5) SHELLING STRUCTURE : $(E, \mathcal{S})$ E : ensemble fini, $\mathcal{S} \subset 2^E$

(S1) $\emptyset \in \mathcal{S}$, $E \in \mathcal{S}$

(S2) Si $A, B \in \mathcal{S}$, $B \not\subseteq A$, alors $\exists b \in B \setminus A$, $A \cup \{b\} \in \mathcal{S}$

(2.6) On notera la similitude des axiomes (M2) et (CG2). L'ensemble des parties libres (au sens de la convexité !) d'un matroïde $(E, \mathcal{C})$ forme les ensembles accessibles d'un greedoïde. L'ensemble des parties de la forme $E \setminus C$, $C \in \mathcal{C}$ dans une convexité géométrique finie $(E, \mathcal{C})$ constitue les ensembles accessibles d'une shelling-structure sur E (et réciproquement). Enfin, les shelling-structures sont des greedoïdes puisque l'axiome (S2) implique l'axiome (G2).

Nous verrons plus loin que chaque matroïde orienté $(E,\mathcal{O})$ détermine canoniquement à la fois un matroïde sur E et une convexité géométrique.

(2.7) Soient $(E,\mathcal{C})$ un espace à convexité quelconque et $A \subset E$. Un point $a \in A$ est un <u>point extrémal</u> de A si $a \notin \langle A \setminus a \rangle$. L'ensemble des points extrémaux de A, ext(A) est le <u>profil</u> de A. Une partie $B \subset A$ engendre A si $A \subset \langle B \rangle$. Une partie génératrice minimale de A est un <u>génome</u> de A.

(2.8) <u>THEOREME</u> (Björner [83], Edelman, Jamison [84], Korte, Lovasz [84a]). <u>Pour un espace à convexité fini</u> $(E,\mathcal{C})$ <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u>.

(2.8.i) $\mathcal{C}$ <u>satisfait</u> (CG2).

(2.8.ii) <u>Propriété de Krein-Milman : tout convexe est l'enveloppe de son profil</u>.

(2.8.iii) <u>Tout convexe a un génome unique</u>.

(2.8.iv) <u>Pour tout convexe</u> C <u>et tout point</u> $p \notin C$, p <u>est extrémal dans</u> $\langle C \cup \{p\} \rangle$.

(2.8.v) <u>Pour tout convexe</u> C <u>il existe un point</u> $p \notin C$ <u>tel que</u> $C \cup \{p\}$ <u>soit convexe</u>.

(2.8.vi) <u>Pour tout copoint</u> C <u>relatif à</u> p, $C \cup \{p\}$ <u>est convexe</u>.

(2.8.vii) <u>Toute chaîne maximale de convexes</u>, $\emptyset \subset C_1 \subset \ldots \subset C_k \subset X$ <u>a la même longueur</u>.

(2.8.viii) Pour tout convexe C , la relation $p \in \langle C \cup q \rangle$, notée $p \leq_C q$ est une relation d'ordre.

(2.8.ix) Chaque copoint est relatif à un unique point.

(2.8.x) (Hoffman [79]) . Pour tout $A \subseteq E$, l'intersection de deux parties qui engendrent A engendre A .

(2.9) Systèmes d'ordres totaux.

L'ensemble des ordres totaux sur un ensemble E est noté $E!$. Pour éclairer le lien entre convexités géométriques et shelling structures mentionnées ci-dessus (2.7), il apparait commode de présenter simultanément les deux structures comme deux aspects de la donnée d'un système d'ordres totaux sur E . Il s'agit là des ordres compatibles au sens de Edelman-Jamison et des ordres d'accessibilité ou mots de base au sens de Korte-Lovasz.

Soit $\mathcal{P} \subseteq E!$ un ensemble d'ordre totaux. Une partie $A \subseteq E$ est dite $\mathcal{P}$-initiale (resp. $\mathcal{P}$-finale) s'il existe $a \in E$ et $\leq_\pi \in \mathcal{P}$ tels que

$A = \{x \in E \ ; \ x \leq_\pi a\}$ (resp. $A = \{x \in E \ ; \ a \leq_\pi x\}$) .

Un ordre $\leq_\sigma \in E!$ est dit co-initial avec $\mathcal{P}$ si toute partie $\leq_\sigma$-initiale est $\mathcal{P}$-initiale. Un système initial d'ordres sur E est un ensemble d'ordres, soit $\mathcal{P}$, qui contient tous les ordres co-initiaux avec lui-même. Les systèmes finaux sont définis de la même manière, mutatis mutandis.

THEOREME . Soit $\mathcal{P}$ un système initial d'ordres totaux sur un ensemble fini E . Alors l'ensemble des parties $\mathcal{P}$-initiales (resp. $\mathcal{P}$-finales) est l'ensemble des parties accessibles d'une shelling structure sur E (resp. est l'ensemble des convexes d'une convexité géométrique sur E).

(2.10) Grâce à la correspondance explicitée ci-dessus, les propriétés caractéristiques (2.8.i) et (2.8.x) peuvent se formuler en termes de shelling structures. Méritent également l'attention, les caractérisations des shelling structures parmi les greedoïdes :

THEOREME (Korte-Lovasz [84a]) . Pour un greedoïde $(E,\mathcal{A})$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

(2.10.i) $(E,\mathcal{A})$ est une shelling structure.

(2.10.ii) $E \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est stable par union.

(2.10.iii) Si A , $A \cup \{x\}$, $A \cup \{y\} \in \mathcal{A}$ alors $A \cup \{xy\} \in \mathcal{A}$.

(2.10.iv) Si $A,B,A \cup \{x\} \in \mathcal{A}$ et $A \subseteq B$ alors (propriété d'intervalle sans borne supérieure), $B \cup \{x\} \in \mathcal{A}$.

Remarque : Pour que $\mathcal{A}$ soit l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur E , il faut et il suffit que le greedoïde $(E,\mathcal{A})$ satisfasse

(2.10.iv') (propriété d'intervalle dans borne inférieure), Si $A,B,A \cup \{x\} \in \mathcal{A}$ et $B \subset A$ alors $B \cup \{x\} \in \mathcal{A}$.

(2.11) Exemples : Les convexités géométriques finies forment une variété (cf. 1.16). Outre les convexités finies induites par la convexité euclidienne ordinaire, de nombreux exemples de convexités géométriques montrent la généralité de la théorie :

- Convexité d'ordre : les convexes sont les intersections d'intervalles relatifs à un ordre partiel donné voir (4.1)
- Convexités initiales : formées des idéaux d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$, c'est-à-dire des parties $A \subseteq E$ telles que : $a \in A$, $x \leq a$ impliquent $x \in A$. Un cas particulier important est celui des convexités monotones, c'est-à-dire formées des idéaux d'un ensemble totalement ordonné. Les convexités monotones jouent le rôle d'atomes dans le treillis des convexités géométriques sur E. (Jamison [82]). Voir (4.2).
- Convexité de matroïde orienté acyclique : voir (2.6).
- Convexité par chemins minimaux dans les graphes triangulés : (voir (3.4)
- Convexité géodétique dans les graphes ptolémaïques : (voir (3.5)
- Convexité arborescente : formée des parties connexes d'un arbre : (voir (4.3) à 4.5)
- Convexité semi latticielle finie : cf. (4.6)

D'autres exemples intéressants sont développés dans Jamison-Waldner [84] et dans Korte-Lovasz [84a].

(2.12) Résultats

L'intérêt de la théorie des convexités géométriques se manifeste par la simplification et l'unification de résultats auparavant dispersés, mais aussi par l'obtention de résultats nouveaux, présentés ci-dessous relativement à une convexité géométrique finie $(E, \mathcal{C})$.

Jamison-Waldner [81], Hoffman [79] : $h(\mathcal{C}) = \text{rang}(\mathcal{C})$.

Un treillis T est inf-distributif si lorsque x est l'infinum des éléments couverts par y alors l'intervalle $[x,y]$ est un treillis booléen.

Edelman [80a] : Soit $(E, \mathcal{C})$ un espace à convexité finie. Alors $(E, \mathcal{C})$ est une convexité géométrique si et seulement si le treillis $(\mathcal{C}, \subseteq)$ est inf-distributif.

Edelman, Jamison [84]: Dans le treillis $(\mathcal{C}, \subseteq)$ des convexes de $(E, \mathcal{C})$ la fonction de Möbius est donnée par :

$$\mu(C,D) = \begin{cases} (-1)^{|D-C|} & \text{si } D \setminus C \subseteq \text{ext}(D) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Pour la signification de la fonction de Möbius, voir, par exemple Rota [64], ou Aigner [79]).

Lawrence (unpublished, cf. Edelman, Jamison [84]) .
Soit L_k le nombre de parties libres de cardinalité k , relativement à $(E, \mathcal{C})$. Alors $\sum_k (-1)^k L_k = 0$.

Soit $Z(n)$ le nombre de suites croissantes de n convexes $\emptyset \subseteq C_1 \subseteq \ldots \subseteq C_n \subseteq E$. Alors $n \to Z(n)$ est une fonction polynôme. C'est la fonction zêta de l'ensemble ordonné $(C, \subseteq)$.

Une fonction $f : E \to \{1,\ldots,n\}$ est dite <u>extrémale</u> si pour tout convexe $C \in \mathcal{C}$, f atteint son maximum sur C en un point extrémal de C . La fonction est <u>strictement extrémale</u> si, pour tout $C \in \mathcal{C}$, f n'atteint son maximum sur C qu'en des points extrémaux.

Edelman [80a] (cf. Edelman, Jamison [84], Edelman [80b], Stanley [74]) :

> $Z(n)$ <u>est le nombre de fonctions extrémales</u> $f : E \to \{1,\ldots,n\}$
>
> $(-1)^{|E|} Z(-n)$ <u>est le nombre de fonctions strictement extrémales</u> $f : E \to \{1,\ldots,n\}$.

Korte, Lovasz [84c], Jamison [84] : L'ensemble des ordres totaux compatibles avec $(E, \mathcal{C})$ induit un sous-graphe connexe du permutoèdre sur E (à rapprocher de (4.7)).

Notons que les convexités géométriques peuvent également être caractérisées par mineurs exclus, voir (1.17) ; pour une autre définition des mineurs, voir Korte, Lovasz [84b].

Korte et Lovasz [84b] ont introduit une notion de circuit*: $A \subseteq E$ est un <u>circuit</u> de $(E, \mathcal{C})$ si A est non libre mais $A \setminus a$ est libre pour tout $a \in A$. A contient alors un unique point non extrémal, appelé sa <u>racine</u>. La convexité euclidienne vérifie la propriété :

*identique à celle de la théorie des matroïdes.

(CG3) Si $A \cup \{x\}$ et $A \cup \{y\}$ ont deux circuits de racines x et y respectivement, il existe un unique circuit de racine y de la forme $A' \cup \{x,y\}$ où $A' \subset A$.

THEOREME (Korte, Lovasz [84b]) . Il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que toute convexité géométrique vérifiant (CG3), ayant au moins $f(n)$ points et dont toute partie de trois points est libre, est de rang $\geq n$.

Ce résultat généralise un théorème fameux de Erdös et Szekeres [35] : Il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que tout ensemble de $f(n)$ points dans le plan dont trois quelconques ne sont pas alignés contient n sommets d'un polygone convexe.

(2.13) Matroïdes orientés acycliques

Les matroïdes orientés constituent un cadre axiomatique général pour traiter d'une manière élégante la géométrie des configurations de points, configurations "orientées" dans le sens où l'on prend en compte les séparations opérées dans l'ensemble des points par les hyperplans. Voir Bland, Las Vergnas [78] et Folkman, Lawrence [78]. Ce point de vue permet, pour les matroïdes "acycliques" la définition de faces, comme pour les polytopes de $\mathbb{R}^d$. Ces faces, ordonnées par inclusion, forment un treillis (Las Vergnas [80]). Un point p est dit extrémal si $\{p\}$ est intersection de faces. Un matroïde orienté acyclique de rang r a au moins r points extrémaux (Las Vergnas [80]). En fait, le point de vue "orthogonal", au sens des matroïdes, permet d'associer d'une manière simple une convexité à un matroïde orienté acyclique (voir ci-dessous), dont les points extrémaux seront exactement ceux du matroïde : remarquons que le théorème de Radon dans $\mathbb{R}^d$ implique, pour tout ensemble A de $n \geq d+2$ points, l'existence d'une partition de cet ensemble,

$$A = A_1 \oplus A_2 \text{ , telle que : } \mathrm{Conv}\ (A_1) \cap \mathrm{Conv}\ (A_2) \neq \emptyset \text{ .}$$

De même, toute partie dépendante minimale (= support d'un circuit signé) dans un matroïde orienté se partage d'une manière unique en deux parties dites positive et négative. Le matroïde orienté est dit <u>acyclique</u> si ces partages sont de vraies partitions.

Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des circuits signés d'un matroïde orienté acyclique M sur E . Les circuits signés de la forme $A \oplus \{a\}$ peuvent être considérés comme des opérateurs convexes $A \to \{a\}$ et déterminent ce que Las Vergnas a appelé la <u>convexité du matroïde orienté acyclique</u> M . Cette notion de convexité coïncide en fait avec celle de Goodman et Pollack [82], introduite pour les arrangements de pseudodroites (voir aussi Cordovil [83] et Folkman, Lawrence [78]p. 204).

Las Vergnas [80] a montré que la propriété de Krein - Milman (propriété 2.8.ii) était valide pour les convexités de matroïdes orientés acycliques. Une autre preuve simple est fournie par Edelman [82] : <u>les convexités de matroïdes orientés acycliques sont des convexités géométriques</u>.

<u>Problème</u> : Caractériser les convexités de matroïdes orientés acycliques.

(2.14) Caractérisations des matroïdes orientés par les séparations.

Soit M un matroïde orienté sans boucles sur un ensemble E . Une paire $\{A,B\}$ de parties de E est dite séparable si A et B sont disjoints et si aucun circuit signé $X = (X^+,X^-)$ ne satisfait $X^+ \subseteq A$ et $X^- \subseteq B$. Une Une séparation est une partition $\{A,E \setminus A\}$ de E qui est séparable.

Soit $p \in E$ et $\mathcal{P}$ un ensemble de 2-partitions. Posons $\bar{p} = \cap \{A ; \{A,E \setminus A\} \in \mathcal{P}\}$. Une 2-partition $\{A,B\}$ de est dite p-liée si $p \in A$ et $\{A \setminus \bar{p}, B \cup \bar{p}\} \in \mathcal{P}$. On pose :

$$\mathcal{P} \setminus p = \{\{A \setminus p,B\} \ ; \ p \in A, \{A,B\} \in \mathcal{P}\}$$

$$\mathcal{P}/P + \{\{A \setminus \bar{p},B\} \ ; \ p \in A, \{A,B\} \in \mathcal{P} \text{ et } \{A,B\} \text{ est p-liée}$$

et par induction $\mathcal{P} \setminus \{x_1 \dots x_k\} = (\mathcal{P} \setminus \{x_1 \dots x_{k-1}\}) \setminus x_k$

$$\mathcal{P}/ \{x_1 \dots x_k\} = (\mathcal{P} / \{x_I \dots x_{k-1}\}) / x_k .$$

Bienia, Cordovil [85] : Un ensemble $\mathcal{P}$ de 2-partitions de E est l'ensemble des séparations d'un matroïde orienté sans boucles si et seulement si pour toute paire X,Y de parties de E on a :

$$(\mathcal{P} / X) \setminus Y = (\mathcal{P}/ Y) \setminus X$$

(2.15) Théorèmes de séparation dans les matroïdes orientés acycliques.

Soit M un matroïde orienté acyclique. Pour $X \subseteq E$, $M(X)$ désigne le sous-matroïde induit sur X . $\langle X \rangle_M$ désigne l'enveloppe convexe de X dans M , ${}_{\bar{X}}M$ désigne le matroïde obtenu en changeant de signe sur X . Considérons les diverses propriétés de séparation suivantes, relatives à deux parties A et B de E :

(i) A et B sont séparables.

(ii) ${}_{\bar{A}}M(A \cup B)$ et ${}_{\bar{A}}M(A \cup B)$ sont acycliques et $A \cap B = \emptyset$.

(iii) Il existe une partition $\{A',B'\}$ de E telle que ${}_{\bar{A}'}M$ soit acyclique.

(iv) Il existe une extension M' de M telle que A et B sont séparés par un hyperplan de M' .

(v) Dans toute extension M'' de $M(A \cup B)$ $\langle A\rangle_{M''} \cap \langle B\rangle_{M''} = \emptyset$.

(vi) Dans toute extension M' de M , $\langle A\rangle_{M'} \cap \langle B\rangle_{M'} = \emptyset$

Alors, il y a équivalence entre les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv). De plus (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi).

Ces implications sont de faciles conséquences des résultats de Las Vergnas [80] ou de Mandel [82].

Mandel conjecture que (v) $\Rightarrow$ (iv) ; par contre, il a montré , par un contre-exemple de rang 4, que (vi) $\not\Rightarrow$ (v) .

<u>Problème</u> : Etudier les convexités géométriques infinies, en particulier la propriété de Krein-Milman.

§3. CONVEXITE DANS LES GRAPHES ET HYPERGRAPHES

(3.1) Longtemps limitée à l'herbier des graphes géodétiques (où le plus court chemin entre deux sommets est toujours unique) - problème posé par Ore [62] - l'étude de la convexité dans les graphes ne s'est affirmée que récemment : Feldman Högaasen [69] étudie la convexité dans le permutoèdre, Nebesky [70,71] et Mulder [78,80] étudient les graphes à "médiane" (voir aussi Mulder et Schrijver [79]; puis Harary et Nieminen [81], Jamison [81a] , Duchet, Meyniel [83] abordent une définition générale de la convexité sur les graphes (voir également Farber,Jamison [83], Van der Cruyce [84], Duchet [78,85], Jamison, Nowakowski [84]).

(3.2) Convexité sur un graphe G connexe.

Sans perte en généralité, les graphes considérés sont connexes; le graphe complet à h sommets est noté K_h . Si G G = (S,A) est un graphe (S = ensemble des sommets, A = ensemble des arêtes), on appelle convexité sur G une partie $\mathcal{C} \subset 2^S$ telle que

(CG1) $(S,\mathcal{C})$ est un espace à convexité.

(CG2) Tout convexe induit un sous-graphe connexe de G .

(3.3) Relations avec le nombre de Hadwiger.

La contraction dans les graphes est une opération quotient relative à des parties connexes :

si $\pi = (S_1,\dots,S_h)$ est une partition de l'ensemble S des sommets d'un graphe en ensembles connexes, la contraction de G par π est le graphe G/π où $S_1,\dots,S_h$ sont les sommets, S_i et S_j étant adjacents dans G/π s'ils sont adjacents dans G (i.e. il existe $s_i \in S_i$ et $s_j \in S_j$ tels que $[s_i s_j]$ soit une arête de G). La fameuse conjecture de Hadwiger [43] :

"Si K_h n'est pas une contraction de G , alors G est colorable en h couleurs."

est équivalente pour $n = 5$ au problème des quatre couleurs (Wagner [60], cf. Young [71]). On appelle nombre de Hadwiger ou nombre de contraction d'un graphe G le plus grand entier h tel que K_h soit une contraction de G . Ce nombre noté $\eta(G)$ est étroitement lié à la convexité !

En effet :

Duchet, Meyniel [83] : Pour toute convexité $\mathcal{C}$ sur un graphe connexe G on a : $h(\mathcal{C}) \leq \eta(G)$ et $r(\mathcal{C}) \leq \eta(G)$. De plus $\eta(G)$ est exactement le maximum des nombres de Helly des convexités sur G .

CONJECTURE : $r(\mathcal{C}) \leq \eta(G)+1$ sauf si G est un arbre (dans ce cas $r \leq 4$ et $\eta(G) = 2$) .

Une application de ce résultat aux surfaces compactes connexes par arcs : les convexes intrinsèques de la surface (i.e. les ensembles de points qui contiennent toutes les géodésiques joignant deux de leur points) satisfont la propriété de Helly (H_k) où k est le nombre chromatique de la surface.

(3.4) Convexité par chemins minimaux (m-convexité)

Soit G un graphe. Posons $x,y \to z$ si z est un sommet d'un chemin minimal joignant x et y : "minimal" signifie que deux sommets non consécutifs dans le chemin ne sont pas adjacents dans G . Les opérateurs $x,y \to z$ définissent une convexité sur G appelée m-convexité de G , dont les nombres de Carathéodory, Helly et Radon sont respectivement notés $c_m(G)$, $h_m(G)$, $r_m(G)$. On a (Duchet [85a]) :

$$c_m(G) = 2$$

$$h_m(G) = \omega(G)$$

$$r_m(G) = \omega(G)+1 \quad \text{si } G \text{ n'est pas un arbre.}$$

Ici $\omega(G)$ est le nombre maximum de sommets deux à deux adjacents dans G . Le résultat relatif à h_m a été obtenu indépendamment par Jamison et Nowakowski [84]. La m-convexité, appelée "monophonic convexity" par Jamison, est une convextié géométrique si et seulement si le graphe est triangulé (Farber, Jamison [83]), c'est-à-dire si tout cycle de longueur ≥ 4 possède une corde.

(3.5) Convexité géodétique (g-convexité).

Soit G un graphe. Posons $x,y \to z$ si z est sur un plus court chemin de x à y dans G . La convexité déterminée par ces opérateurs est appelée convexité géodétique du graphe ou g-convexité. Il apparait que la g-convexité est, contrairement à la m-convexité, tout à fait générale : les nombres de Caracthédory, Helly et Radon sont notés c_g , h_g , r_g .

Duchet [85b] : <u>Soit</u> $(E,\mathcal{C})$ <u>un espace à convexité finie. Alors, il existe un graphe fini</u> G <u>tel que</u> :

$$c_g(G) = c(\mathcal{C})$$

$$h_g(G) = h_g(\mathcal{C})$$

$$r_g(G) = r_g(\mathcal{C}) .$$

La g-convexité d'un graphe G est une convexité géométrique si et seulement si G est <u>ptolémaïque</u> (Farber, Jamison [83]), c'est-à-dire si on a pour tout quadruplet x,y,z,t de sommets de G l'inégalité

$$d(x,y)d(z,t) \leq d(x,z)d(y,t) + d(y,z)d(x,t)$$

où $d(a,b)$ désigne la longueur minimum d'un chemin de a à b dans le graphe.

(3.6) <u>Hypergraphes</u>

Farber et Jamison [83] ont étudié des définitions analogues pour les hypergraphes, i.e. les structures $(S,\mathcal{H})$ où $\mathcal{H} \subseteq 2^S$ et ont caractérisé les hypergraphes "totalement équilibrés" (= qui ne contiennent comme structure induite aucun cycle de la théorie des graphes) par une propriété de convexité.

L'ensemble $\mathcal{H}$ des hyperarêtes d'un hypergraphe $H = (S,\mathcal{H})$ peut aussi être vu comme une base d'une convexité, dite <u>convexité propre</u> de H . La propriété de Helly, notamment, a été étudiée de ce point de vue (cf. Mulder, Schrijver [79]). Le nombre maximum d'hyperarêtes d'un hypergraphe p-uniforme (i.e. toutes les hyperarêtes ont p éléments) à n sommets qui vérifient la propriété de Helly (H_k) avec $k < p$ est $\binom{n-1}{p-1}$ avec égalité si et seulement si l'hypergraphe est formé des p-parties qui contiennent un même sommet (Bollobas, Duchet [79,83]).

§4. STRUCTURES ORDONNEES ET ARBORESCENTES.

(4.1) Convexités d'ordre

La convexité d'ordre $\mathrm{Ord}(X, \leq)$ associée ensemble ordonné $(X, \leq)$, peut être définie par ses copoints : tout élément $x \in X$ a deux copoints :

$$C^-(x) = \{y \in X \; ; \; x \not\leq y\}$$

$$C^+(x) = \{y \in X \; ; \; y \not\leq x\}$$

comparer à la définition (2.11). Ainsi $\mathrm{Ord}(X)$ vérifie la propriété $CP(3,2)$ du paragraphe (1.11) et satisfait l'inégalité $p_m - 1 \leq (m-1)(p_2 - 1)$ pour les nombres de partition (Jamison-Waldner [81]).

THEOREME (Jamison [79]). Une convexité $\mathcal{C}$ sur un espace X, $|X| \geq 2$, est la convexité $\mathrm{Ord}(X, \leq)$ pour un ordre $\leq$ sur X si et seulement si elle satisfait aux trois conditions :

(i) Toute partie libre est réunion de deux convexes.

(ii) $c(\mathcal{C}) = 2$.

(iii) Chaque sous-espace d'au plus 5 points est un espace à convexité d'ordre.

THEOREME (Jamison [79]) . Pour tout espace à convexité $(X, \mathcal{C})$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

(iv) $\mathcal{C}$ est une convexité d'ordre total sur X .

(v) Tout sous-espace d'au plus 4 points est un espace à convexité d'ordre total.

(vi) rang $(\mathcal{C}) \leq 2$, $\mathcal{C}$ vérifie l'axiome (CG2) des convexités géométriques et pour tout couple de points x, y , $x \neq y$, il existe un hémispace qui contient x et non y .

Il est à noter que la propriété de Krein-Milman (2.8ii) n'est plus vraie en général pour les convexités d'ordre sur un ensemble infini X , même si l'ordre est total. Cette propriété est vraie pour les parties $A \subseteq X$ qui sont localement complètes, i.e. qui contiennent, pour chaque $a \in A$ un élément minimal $\leq a$ et un élément maximal $\geq a$. Ainsi (2.8ii) est vraie pour les convexités d'ordre sur les treillis complets (Franklin [62]).

(4.2) Convexités initiales

Si $(X, \leq)$ est un ensemble ordonné, $Id(X, \leq)$ est la convexité formée des idéaux de $(X, \leq)$ (downset-convexity, dans Jamison-Waldner [82]).

THEOREME (Edelman, Jamison 84 , Korte, Lovasz 84b) .
Une convexité $\mathcal{C}$ sur un ensemble fini X est une convexité initiale si et seulement si elle a les deux propriétés :

(i) $\mathcal{C}$ est une convexité géométrique.

(ii) L'union de deux convexes est convexe.

Il n'est pas difficile d'étendre ce résultat au cas infini.

Un cas particulièrement simple de convexités hiérarchiques est celui des convexités monotones, formées des idéaux d'un ordre total. D'après notre présentation des convexités géométriques finies et des shelling structures (2.9), il n'est pas difficile de voir que toute convexité géométrique finie $(E, \mathcal{C})$ a une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$ telle que $\mathcal{B}_i$ soit une convexité monotone.

Problème : (Jamison-Waldner [82])

1/ Etudier la "dimension convexe" d'une convexité géométrique , i.e. le plus petit entier k qui satisfait aux conditions ci-dessus.

2/ Caractériser les joints de convexités d'ordre total, c'est-à-dire les convexités qui ont une base de la forme $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$ où les $\mathcal{B}_i$ sont des convexité d'ordres totaux.

(4.3) Convexités d'arbre.

Si un graphe T est un arbre, toutes les notions de convexité sur T (voir (3.2)) coïncident en une seule convexité $\mathscr{C}_T$ dite convexité d'arbre. Les convexités d'arbre ont la propriété CP(3,2) et vérifient donc l'inégalité

$p_m - 1 \leq (m-1)(p_2-1)$ pour les nombres de partition (cf. V.11)). Les points extrémaux sont les sommets pendants.

THEOREME (Duchet [78]) . Pour qu'une convexité $\mathscr{C}$ sur un ensemble E soit une convexité finie d'arbre, il faut et il suffit qu'elle ait un nombre de Helly ≤ 2 et qu'elle vérifie :

(i) (COH) $A, B \in \mathscr{C}$ et $A \cap B \neq \emptyset$ impliquent $A \cup B \in \mathscr{C}$.

(ii) $R(\mathscr{C}) \leq 2$.

(iii) $\mathscr{C}$ est une convexité géométrique.

(4.4) Convexités cohérentes.

Un espace à convexité $(E, \mathscr{C})$ est dit cohérent s'il vérifie l'axiome (COH) du paragraphe précédent. Pour toute partie $\mathscr{H}$ de 2^E, il existe une plus petite convexité cohérente contenant $\mathscr{H}$, dite engendrée par $\mathscr{H}$.

THEOREME (Duchet) . Une convexité $\mathscr{C}$ sur un ensemble fini E est d'ordre total si et seulement si

(i) $\mathscr{C}$ est cohérente.

(ii) $r(\mathscr{C}) \leq 3$.

(iii) $\mathscr{C}$ est une convexité géométrique.

(4.5) <u>Applications aux représentations arborées</u>.

Une famille de parties $\mathcal{H}$ d'un ensemble E est dite <u>arborée</u> (resp. d'<u>intervalles</u>) s'il existe un arbre T sur E (resp. une chaîne C sur E) tel que tout membre de $\mathcal{H}$ soit connexe relativement à T (resp. à C). Comme des résultats précédents on obtient :

Duchet [78], Flament [78] : Soit E un ensemble fini. Pour que $\mathcal{H} \subset 2^E$ soit d'intervalles, il faut et il suffit que la convexité cohérente engendrée par $\mathcal{H}$ soit de nombre de Helly ≤ 2 .

Tucker [72] (cf. Trotter, Moore [76], Duchet [78]) : Soit E un ensemble fini, pour que $\mathcal{H} \subset 2^E$ soit l'intervalle, il faut et il suffit que la convexité cohérente engendrée par $\mathcal{H}$ soit de nombre de Radon ≤ 3 .

(4.6) <u>Convexité semi-latticielle</u>

Soit $(T,\leq)$ un inf-semi-treillis. L'ensemble des sous-demi-treillis (i.e. les ensembles fermés pour l'opérateur infinum) constitue une convexité T appelée convexité <u>semilatticielle</u> de T . . Le nombre de Carathéodory de cette convexité n'est autre que la "breadth" de T , invariant bien connu des demi-treillis (cf. Birkhoff [67] p.99 ou Crawley, Dilworth [73] p.38). Le rang d'une convexité finie $\mathcal{C}$ en général n'est autre que la "breadth" de l'inter-demi-treillis des convexes de $\mathcal{C}$. (Remarques de Jamison-Waldner [82].

(4.7) Ordres partiels et permutoèdres.

Feldman-Högaasen [69] a établi une correspondance de Galois entre les ordres partiels sur un ensemble fini E et les parties g-convexes du permutoèdre de base E .

REFERENCES

[79] AIGNER M. Combinatorial Theory, Springer Verlag, New York 1979.

[75] BAIR J., FOURNEAU R. Etude géométrique des espaces vectoriels, I Une introduction, Lecture Notes in Math., 489, New York - Heidelberg - Berlin, Springer Verlag, 1975.

[80] BAIR, J. FOURNEAU R. Etude géométrique des espaces vectoriels II Polyèdres et polytopes convexes, Lecture Notes in Math. 802, New York - Heidelberg - Berlin, Springer Verlag, 1980.

[81] BARANY I. A generalization of Caratheodory's theorem, preprint 198

[73] BARNETTE D. A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes, Pacific J. Math. 46, 1973, 349-354.

[67] BATTEN L. Geodesic subgraphs, J. of Comb. Th. 2, 1967, 159-164.

[74] BEAN P.W. Helly and Radon type theorems in interval convexity spaces, Pacific J. Math. 51, 1974, 363-368.

[75] BERGE C., DUCHET P. A generalization of Gilmore's theorem in Recent Advances in Graph Theory, Proc. 2nd Czekoslowack Symp., Prague Academia, Prague 1975, 49-55.

[84] BIENIA W., CORDOVIL R. An axiomatic of the non Radon partitions, Res. Report, Univ. of Lisboa 1984.

[81] BILLERA L.J., LEE C.W. A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 2, 1981, 181-185.

[60] BIRCH On 3N points in a plane, Proc. Camb. Phil. Soc. 55, 1960, 289-293.

[67] BIRKHOFF Lattice Theory, 3rd ed., vol. XXV, AMS Coll. Publ., Providence, R.I., 1967.

[80] BJÖRNER A. Shellable and Cohen - Macaulay partially ordered sets, Trans. Amer. Math. Soc. 260, 1980, 159-183.

[83] BJÖRNER A. On matroids, groups and exchange langages, preprint, Dept. of Math., Univ. of Stockholm, 1983.

[78] BLAND R.G., LAS VERGNAS M. Orientability of matroids, J. Comb. Th. (B) 24, 1978, 94-123.

[79] BOLLOBAS B., DUCHET P. Helly families of maximal size, J. Comb. Th. (A) 26, 1979, 197-200.

[83] BOLLOBAS B., DUCHET P. On Helly families of maximal size, J. Comb. Th. (B) 35, 1983, 290-296.

[34] BONNESEN T., FENCHEL W. Theorie der Konvex Körper, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgelicke, Bd 3, Nr. 1, Berlin : Springer (Berichtigter Reprint 1974. Springer : New York - Heidelberg - Berlin).

[71] BRUGESSER H., MANI P. Shellable decompositions of cells and spheres, Math. Scand. 29, 1971, 197-205.

[72] BRYANT V.W., WEBSTER R.J. Convexity spaces I. The basic properties, J. Math. Anal. and Appl. 37, 1972, 206-273.

[73] BRYANT V.W., WEBSTER R.J. Convexity spaces II. Separation, J. Math. Anal. and Appl. 43, 1973, 321-327.

[77] BRYANT V.W., WEBSTER R.J. Convexity spaces III. Dimension, J. Math. Anal. and Appl. 57, 1977, 382-392.

[68] BURRIS S. Representation theorems for closure spaces, Colloq. Math. 19, 1968, 187-193.

[72] BURRIS S. Embedding algebraic closure spaces inZ-ary closure spaces, Portug. Math. 31, 1972, 183-185.

[74] CANTWELL J. Geometric convexity I, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 1974, 2, 289-307.

[78] CANTWELL J. Geometric convextiy III Embedding, Trans. Amer. Math. Soc. 246, 1978, 211-230.

[07] CARATHEODORY C. Über den Variabilitäts bereich der Koeffizienter von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen, Math. Ann. 64, 1907, 95-115.

[83] COCHAND M., DUCHET P. Sous les pavés ..., Ann. Discrete Math. 17, 1983, 191-202.

[65] COHN P.M. Universal Algebra, Harper and Row, New York 1965. Nouvelle édition, D. Reidel Pub. CO., Dordrecht - Boston - London, 1981, 413 pp.

[83] CORDOVIL R. Oriented matroids of rank 3 and arrangements of pseudolines, Ann. Discrete Math. 17, 1983, 219-223.

[73] CRAWLEY P., DILWORTH R.P., Algebraic Theory of Lattices, Princeto Hall, London 1973.

[63] DANZER L., GRUNBAUM B., KLEE V. Helly's theorem and its relatives, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol.VII, Convexity, 1963, 101-180.

[73] DOIGNON J.P. Convexity in cristallographical lattices, Journ. of Geom. 3, 1973, 71-85.

[81] DOIGNON J.P., REAY J.R., SIERKSMA G. A tverberg type generalization of the Helly number of a convexity space, J. of Geometry, 16, 1981, 118-125.

[78] DUCHET P. Propriété de Helly et problèmes de représentation, in Problèmes combinatoires et théorie des graphes, Proc. Coll. Orsay 1976, Coll. Int. C.N.R.S. 260, C.N.R.S. Paris 1978.

[85a] DUCHET P. Convex sets in graphs II : minimal-path-convexity, 1985, to appear in J. Comb. Th. (B).

[85b] DUCHET P. Convex sets in graphs III : geodetic convexity, in preparation.

[83] DUCHET P., MEYNIEL H. Ensembles convexes dans les graphes I : théorèmes de Helly et de Radon pour graphes et survaces, Eur. J. Comb. 4, 1983, 127-132.

[79] ECKHOFF J. Radon's theorem revisited, in Contributions to Geometry, Proc. Geom. Symp., Siegen 1978, J. Toelke and J.M. Wills eds., Birkhäuser, Basel 1979, 164-185.

[85] ECKHOFF J. Conférence donnée à la Rencontre du Groupe de Contact en Géométrie convexe, F.N.R.S.-C.R.O., Bruxelles 1985.

[80a] EDELMAN P.H. Meet distributive lattices and the anti-exchange closure, Alg. Univ. 10, 1980, 290-299.

[80b] EDELMAN P.H. Zeta polynomials and the Möbius function, Eur. J.Comb. 1, 1980, 335-340.

[82] EDELMAN P.H. The lattice of convex sets of an oriented matroid, J. Comb. Th. (B) 33, 1982, 239-244.

[84] EDELMAN P.H., JAMISON R.E. The theory of convex geomatries, Research Rep. August 1984.

[52] ELLIS A general set-separation theorem, Duke Math. J., 19, 1952, 417-421.

[83] FARBER M., JAMISON R.E. Convexity in graphs and hypergraphs, Report CORR 83-46, Univ. of Waterloo, 1983.

[69] FELDMAN HÖGAASEN J. Ordres partiels et permutoèdre, Revue de la Maison des Sciences de l'Homme, 28, 1969, 27-38.

[78] FLAMENT C. Hypergraphes arborés, Disc. Math. 21, 1978, 223-226.

[78] FOLKMAN J., LAWRENCE J. Oriented matroids, J. Comb. Th. (B) 25, 1978, 199-236.

[62] FRANKLIN S.P. Some results on order-convexity, Amer. Math. Mon. 69, 1962, 357-359.

[82] GOODMAN J.E., POLLACK R. Helly-type theorems for pseudoline arrangements in $\mathbb{P}^2$, J. of Comb. Th. (A), 32, 1982, 1-19.

[68] GRAETZER G. Universal Algebra, Van Nostrand, Princeton 1968.

[81] GRÖTSCHEL M., LOVÁSZ L., SCHRIJVER A., The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization, Combinatorica 1, 1981, 169-197.

[67] GRÜNBAUM B. Convex Polytopes, London - New York - Sydney : Wiley, 1967.

[43] HADWIGER B. Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe, Vierteljahrschr. naturf. Ges. Zürich 88, 1943, 133-142.

[63a] HAMMER P.C. Extended topology : domain finitness, Indag. Math. 25, 1963, 200-212.

[63b] HAMMER P.C. Semispaces and the topology of convexity, in Proc. Symp. Pure Math., Am. Math. Soc. 7, 1963, 305-316.

[77] HAMMER R. Beziehungen zwischen den Saetzen von Radon, Helly und Caratheodory bei axiomatischen Konvexitaeten, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 46, 1977, 3-24.

[81] HARARY F., NIEMINEN J. Convexity in graphs, J. Differ. Geom. 16, 1981, 185-190.

[79] HEBBARE S.P.R. A class of distance convex simple graphs, Ars Combinatoria, 7, 1979, 19-26.

[23] HELLY E. Über Mengen konvexer korper mit gemeinschaftlichten punkten, Iber. Deutsch. Math. Verein. 32, 1923, 175-176.

[79] HOFFMAN A. Binding constraints and Helly numbers, Ann. of N.Y. Acad. Sci., 2nd Int. Conf. on Comb. Math., 19, 1979, 284-288.

[74] JAMISON R.E. A general theory of convexity, Ph.D., Univ. of Washington, 1974.

[80] JAMISON R.E. Copoints in antimatroids, Proc. 11th S.E. Conf. Comb. Graph Th. and Computing, Congressus Numerantium 29, 1980, 535-544.

[82] JAMISON R.E. A perspective on abstract convexity : classifying alignments by varietes, in Convexity and Related Combinatorial Geometry, Proc. 2nd Univ. of Oklahoma Conf., D.C. Kay and M. Breen eds., Dekker, New York 1982, 113-150.

[79] JAMISON-WALDNER R.E. A convexity characterization of ordered sets, in Proc. Tenth South Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Florida Atlantic Univ., 1979, 529-540.

[81a] JAMISON-WALDNER R.E. Partition numbers for trees and ordered sets, Pacific J. Math., 96, 1981, 115-140.

[81b] JAMISON-WALDNER R.E. Convexity and block graphs, Congr. Numerantium 33, 1981, 129-142.

[84] JAMISON R.E., NOWAKOWSKI R. A Helly theorem for convexity on graphs, Disc. Math. 51, 1984, 35-39.

[37] KAKUTANI Ein Beweis des Sätzes von Eidelheit über konvexe Mengen, Proc. Imp. Acad. Tokyo 13, 1937, 93-94.

[84] KALAI G. Characterization of f-vectors of families of convex sets in $\mathbb{R}^d$. Part I : necessity of Eckhoff's conditions, Part II : Sufficiency, submitted.

[71] KAY D.C., WOMBLE E.W. Axiomatic convexity theory and relationsh between the Caratheodory, Helly and Radon numbers, Pacific J. Math. 38, 1971, 471-485.

[84] LOVASZ L. Geometrical methods in combinatorial methods in Progress in Combinatorial Optimization, Proc. of the Silver Jubilee Conference on Combinatorics, Waterloo, June 1982, W.R. Pulleyblank ed., Acad. Press, New York 1984.

[84a] KORTE B;, LOVASZ L. Greedoids - a structural framework for the greedy algorithm, in Progress in Combinatorial Optimization, Proc. of the Silver Jubilee Conference on Combinatorics, Waterloo June 1982, W.R. Pulleyblank ed., Acad. Press, New York 1984.

[84b] KORTE B., LOVASZ L. Shelling structures, convexity and a happy end, in Graph Theory and Combinatorics, Proc. of the Cambridge Combinatorial Conference in honour of Paul Erdös, B. Bollobàs ed., Acad. Press, 1984, 219-232.

[84c] KORTE B., LOVASZ L. Basis graphs of greedoids and two-connectivity, Report n° 84324-OR, Inst. of Operations Research, Univ. of Bonn, 1984.

[80] LAS VERGNAS M. Convexity in oriented matroids, J. Comb. Th. (B) 29, 1980, 231-243.

[76] LAWLER E.L. Combinatorial Optimization : networks and matroids, Holt, Rinehart and Windston, New York 1976.

[51] LEVI F.W. On Helly's theorem and the axioms of convexity, J. Indian Math. Soc. 15, 1951, Part A, 65-76.

[71] MCMULLEN P. The maximum number of faces of a convex polytope, Matematika 17, 1971, 179-184.

[82] MANDEL A. The topology of oriented matroids, Ph.D, Univ. of Waterloo, Waterloo 1982.

[10] MOORE Introduction to a form of general analysis, New Haven Math. Colloq., Yale Univ. Press, New Haven 1910.

[51] MOTZKIN S.T.S. Linear inequalities, Mimeographed Lecture Notes, Univ. of California, Los Angeles 1951.

[78] MULDER H.M. The structure of median graphs, Disc. Math. 24, 1978, 197-204.

[80a] MULDER H.M. The interval function of a graph, Doct. Diss. Vrije Universiteit Amsterdam, Math. Center tracts 132, 1980.

[80b] MULDER H.M. n-cubes and median graphs, J. Graph Th. 4, 1980, 107.

[79] MULDER H.M., SCHRIJVER A. Median graphs and Helly hypergraphs, Disc. Math. 25, 1979, 41-50.

[70] NEBESKÝ L. Graphic algebras, Comment. Math. Univ. Carolinae, 1970, 533-544.

[71] NEBESKÝ L. Median graphs, Comment. Math. Univ. Carolinae, 12, 1971, 317-325.

[62] ORE O. Theory of Graphs, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1962.

[79] PRENOWITZ W., JANTOSCIAK J. Joint geometries. A theory of convex sets and linear geometry, Springer 1979, 534 pp.

[52] RADO Theorems on the intersection of convex-sets of points, J. London Math. Soc. 27, 1952, 320-328.

[21] RADON Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten, Math. Ann. 83, 1921, 113-115.

[79] RAO HEEBARE S. P. A class of distance convex simple graphs, Ars Combinatoria 7, 1979, 19-26.

[65] REAY J.R. Generalizations of a theorem of Caratheodory, Mem. Amer. Math. Soc. 54, 1965, 1-50.

[70] REAY J.R. Caratheodory theorems in convex product structures, Pacif. Journal Math. 35, 1970, 227-230.

[70] ROCKAFELLAR R.T. Convex analysis, Princeton, N.J., Princeton Univ. Press, 1970.

[64] ROTA G.C. On the foundations of combinatorial theory : I Theory of Möbius function, Z. Warsch. Verw. Gebiet 2, 1964, 340-368.

[85] ROUDNEFF J.P. A Tverberg theorem for oriented matroids of rank 3, Res. Report, E.R. Combinatoire, C.N.R.S., Paris, 1985.

[52] SCHMIDT J. Veber die Rolle der transfiniten Schlussweisen in einer allgeineinen Ideal-theorie, Math. Nachr. 7, 1952, 165-182.

[53] SCHMIDT J. Einige grundelegende Begriffe and Saetze aus der Theorie der Huellen-operatoren, Bericht ueber die Mathematiker-Tagung in Berlin, Januar 1953, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1953, 21-48.

[75] SIERKSMA G. Caratheodory and Helly numbers of convex-product-structures, Pac. J. Math. 61, 1975, 275-282.

[76] SIERKSMA G. Axiomatic convexity theory and the convex product space, Doct. Diss. Univ. Groningen, 1976, 113 pp.

[81] SOLTAN V.P. Nombres d'échange et de Caratheodory dans le produit cartésien de structures à convexités (en russe), Oukr. Geom. Sb. 24, 1981, 104-108.

[84] SOLTAN V.P. Introduction à la théorie axiomatique de la convexité (en russe), Chtiitsa, Kichiniev 1984.

[74] STANLEY R.P. Combinatorial reciprocity theorems, Adv. in Math. 14, 1974, 194-253.

[75] STANLEY R.P. The upper bound conjecture and Cohen Macaulay rings, Studies in Appl. Math. 54, 1975, 135-142.

[80] STANLEY R.P. The number of faces of a simplicial convex polytope, Adv. Math. 35, 1980, 236-238.

[70] STOER J., WITZGALL C.J. Convexity and optimization in finite dimension I, Springer, Berlin 1970.

[30] TARSKI A. Fondamentale Begriffe der Methodologie der deduktiren Wissenschoften, Monatsh., Math. Phys. 37, 1930, 360-404.

[76] TROTTER W.T., MOORE J.I. Characterization problems for graphs, partially ordered sets, lattices and families of sets, Disc. Math. 16, 1976, 361-381.

[72] TUCKER A. A structure theorem for the consecutive 's property, J. Comb. Th. 12, 1972, 153-162.

[84a] VAN DER CRUYCE P. A convexity problem in 3-polytopal graphs, Arch. Math. 43, 1984, 84-88.

[84b] VAN DER CRUYCE P. A convex characterization of the graphs of the dodecahedron and icasahedron, Disc. Math. 50, 1984, 99-105.

[64] VALENTINE F.A. Convex sets, Mc Graw Hill, New York 1964.

[60] WAGNER K. Bemerkungen zu Hadwigers Vermutung, Math. Ann. 141, 1960, 433-451.

[71] YOUNG H.P. A quick proof of Wagner's equivalence theorem, J. Lond. Math. Soc. (2) 3, 1971, 661-664.