Josef Hofbauer

Ein q-Analogon der Lagrange'schen Inversionsformel

Die klassische Lagrange'sche Inversionsformel gibt die Koeffizienten in der Entwicklung $f(z) = f(o) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \frac{z^n}{\varphi(z)^n}$ an:

$(*)$ $c_n = (\frac{\partial}{\partial z})^{n-1} f'(z)\varphi(z)^n|_{z=0} = LD^{n-1} f'(z)\varphi(z)^n$ in der Notation von [1]. Um ein q-Analogon davon zu erhalten, muß man $\varphi(z)^n$ durch ein geeignetes q-Analogon $\varphi_n(z)$ der n-ten Potenz von $\varphi(z)$ ersetzen. In der Literatur gibt es zwei recht schöne Spezialfälle, wo ganz analoge Formeln für die Koeffizienten gelten:

(A) $\varphi_n(z) = (1-z)(1-qz)\ldots(1-q^{n-1}z)$ Carlitz 1973

(B) $\varphi_n(z) = e(a[n]z)$ Jackson 1910/Cigler 1980

Neue Beweise mittels Operatormethoden findet man in [2]. Allgemein gilt:

<u>Satz</u>: Sind $\varphi_n(z)$ formale Potenzreihen mit $\varphi_n(o) \neq 0$ und $\varphi_n'(z)/[n]\,\varphi_n(z)$ unabhängig von n, dann gilt folgendes q-Analogon von $(*)$:

$$f(z) = f(o) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{[n]!} \frac{z^n}{\varphi_n(z)} \Rightarrow c_n = LD^{n-1} f'(z)\varphi_n(z)$$

Bewiesen wird das, indem man wie in [2] z durch den q-Differentiationsoperator D ersetzt. Formale Potenzreihen in D sind dann Operatoren auf dem Raum der Polynome. Man betrachtet die Polynomfolge (p_n) mit $L \frac{D^k}{\varphi_k(D)} p_n(x) = [n]!\delta_{nk}$, für die man $p_n(x) = x\,\varphi_n(D)x^{n-1}$ herleitet, woraus die q-Lagrangeformel sofort folgt. Diese Polynome sind im Fall (A) übrigens die q-Laguerrepolynome $l_n^{(-1)}(x)$ aus [1] und im Fall (B) ein q-Analogon der Abelpolynome $x(x+an)^{n-1}$.

Beispiele und Anwendungen:

$$\varphi_n(z) = \frac{e(a[n]z + bz)}{a(bz)}.$$

Für $b=0$ reduziert sich das auf (B) und für $b=\frac{1}{1-q}$, $a=-1$ auf (A).

Berechnet man z.B. die Koeffizienten in der Entwicklung

$$\frac{1}{e(-yD)} = \Sigma \frac{b_k^{(a)}(y)}{[k]!} \frac{D^k}{e(a[k]D)}$$

und wendet auf x^n an, ergibt das

$$(x+y)(x+qy)\dots(x+q^{n-1}y) = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] y(qy+[k]a)\dots(q^{k-1}+[k]a) \cdot$$

$$\cdot\ (x-a[k])\dots(x-q^{n-k-1}a[k]),$$

also Jackson's q-Analogon der Abel'schen Identität

$$(x+y)^n = \Sigma \binom{n}{k} y(y+ka)^{k-1}(x-ak)^{n-k}$$

Für weitere Beispiele sei auf [2], [3] verwiesen.

[1] J. Cigler, Elementare q-Identitäten

[2] J. Cigler, Operatormethoden für q-Identitäten III: Umbrale Inversion und die Lagrangesche Formel. Arch.Math. 35, 533-543 (1980)

[3] J. Hofbauer, A q-analog of the Lagrange expansion , preprint.

Institut für Mathematik der Universität Wien
Strudlhofgasse 4
A - 1090 WIEN