Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte

xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi
xvi
xvi

XVI. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

xvi
xvi
xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi--xvi

Mathematik - anregend oder angeregt?

Mathematics – acting or reacting?

Tagung, 26. Mai bis 1. Juni 2024, Mönichkirchen (Niederösterreich)

Kurzfassungen der Vorträge

Herausgeber:
Dr. Christa Binder *e-mail:* `christa.binder@tuwien.ac.at`
Institut für Analyis und Scientific Computing
Technische Universität Wien

Danksagung:
Ohne die großzügige Hilfe durch das
Amt der Niederösterreichischen Landesregierung, Abteilung Kultur und Wissenschaft
wäre die Produktion dieses Bandes nicht möglich gewesen.
Dafür herzlichen Dank.

Photos, Layout und Druckvorlage: Peter Schmitt

KULTUR NIEDERÖSTERREICH

Gefördert durch das Land Niederösterreich.

von links nach rechts und von hinten nach vorne:
Hans Fischer, Stanisław Domoradski *(verdeckt)*
Franz Pichler, Mykhailo Zarichnyi
Karl Kleine, Harald Gropp, Stefan Deschauer, Peter Ullrich
Peter Schmitt, Jasna Fempl Madjarević, Christa Binder

Weitere Bilder: Ausflug nach Vorau 152 / Vortrag 118 / Vortragssaal 60

Herwig Säckl 74 / Stela Segev 37 / Detlef Spalt 105

Rainer Gebhardt, Franz Pichler 63 / Stanisław Domoradski, Mykhailo Zarichnyi 14

am Abend: Gespräche 8 und 151 / Kartenspiel 99 / Puzzle 122

von links nach rechts und von hinten nach vorne:
Karl-Heinz Schlote, Detlef Gronau, Carsten Müller
Nada Razpet, Herwig Säckl, Rainer Gebhardt, Marko Razpet
Rita Meyer-Spasche, Monika Gebhardt, Winfried Mahler
Waltraud Voss, Gerlinde Faustmann, Renate Tobies

Inhalt

Geschichte der Mathematik XVI, Mönichkirchen 2024

P R O G R A M M

Weitere Teilnehmer:

Detlef Gronau (Wien) Juliane Horn (Darmstadt) Winfried Mahler (Jena)
Britta und Carsten Müller (Jena) Karl-Heinz Schlote (Altenburg) Peter Schmitt (Wien)

Die Links <<< >>> in Kopf- bzw. Fußzeile führen zum Programm bzw. zur Teilnehmerliste.

Auf `https://www.mat.univie.ac.at/~schmitt/OeSGdM/` steht der vorliegende Band sowohl in der Printversion als auch in einer erweiterten Version (mit internen Links, mehr Farbe, und einem Anhang) ebenso zur Verfügung wie pdf-Dateien aller bisherigen Symposien.

100 Jahre Walshfunktionen
Beiträge am Mathematischen Institut der Universität Innsbruck

Franz Pichler

Das vom amerikanischen Mathematiker Joseph Walsh im Jahre 1923 publizierte nach ihm benannte System von Funktionen bildet ein vollständiges orthogonales System von Funktionen über einem reellen Intervall [0, 1] mit bemerkenswerten Eigenschaften [1]. Jede Walshfunktion kann als ein Produkt von Rademacherfunktionen erzeugt werden. Sie nehmen damit nur die Werte +1 und -1 an und bilden bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe. Jede quadratisch integrierbare Funktion über dem Intervall [0, 1] kann als Walsh-Fourierreihe dargestellt werden. Mit diesen Eigenschaften war es naheliegend, dass in vielen Ländern sich Mathematiker für die Walshfunktionen und deren möglichen Modifikationen interessierten und mit Beiträgen sich damit befassten. Um dies zu dokumentieren seien dafür für die USA die Mathematiker Fine [2] [3] und Selfridge [4], für England Paley [5], für Frankreich Levy [6] und für die UdSSR Vilenkin [7] genannt.

In Österreich widmete sich Roman Liedl , später Professor an der Universität Innsbruck, in seiner im Jahre 1964 verfassten Dissertation den Walshfunktionen [8]. Er zeigte darin unter anderem, dass die Anzahl der Rademacherfunktionen mit denen eine Walshfunktion erzeugt wird (Liedl nannte dies die Vielfalt“ einer Walshfunktion) bei der Walsh-Fourierdarstellung von Polynomen eine besondere Bedeutung hatte. Neben Roman Liedl war in Innsbruck auch Peter Weiß (später Professor für Wahrscheinlichkeitstheorie an der Universität Linz) am Thema der Walshfunktionen interessiert. Seine im Jahre 1966 angefertigte Dissertation erweiterte die von Liedl erzielten Resultate auf die vom französischen Mathematiker Paul Levy zuerst eingeführten verallgemeinerten Walshfunktionen [9]. Im Jahre 1965 wurde der in Karlsruhe tätige österreichische Nachrichtentechniker Henning Harmuth auf die am Institut für Mathematik an der Innsbrucker Universität durchgeführten Arbeiten zu den Walshfunktionen aufmerksam. Harmuth hatte in verschiedenen Publikationen neuartige Nachrichtensysteme entwickelt, deren signaltheoretische Grundlage durch Walshfunktionen (bei Harmuth als „Mäanderfunktionen“ bezeichnet) gebildet wurde [10] bis [13]. Bei den von Harmuth betrachteten Nachrichten-Übertragungssystemen erhielten Walshfunktionen die Rolle, die in den üblichen Systemen die Kreisfunktionen sin(.) und cos(.) einnahmen. Der in diesen zur Signaldarstellung wichtige Parameter der Frequenz einer Kreisfunktion wurde bei Harmuth durch die „Sequenz“ einer Walshfunktion, definiert als die halbe Zahl der Vorzeichenwechsel im Intervall [0,1], ersetzt. Die mathematische Darstellung die Harmuth für die Systeme seiner „Sequenztechnik“ verwendete hatte jedoch gewisse Schwächen. Es war dafür notwendig, dass neben periodischen Signalen auch nichtperiodische Signale, deren Definitionsbereich die ganze reelle Zahlgerade ist, mittels Walshfunktionen darzustellen waren. Neben der Darstellung der Signale durch eine Walsh-Fourierreihe wurde also auch deren Darstellung durch ein Walsh-Fourierintegral benötigt. In dieser Frage kontaktierte Harmuth das Mathematische Institut der Universität Innsbruck und suchte Hilfe. Man stellt dort fest, dass mit den „generalized Walshfunctions“, wie diese von Fine bereits eingeführt waren, zusammen mit den Arbeiten von Selfridge das mathematische Gerüst dafür bereits vorhanden war. Jedoch war es notwendig dabei auf die von Harmuth gewünschte Signaldarstellung Rücksicht zu nehmen. Die im Jahre 1967 fertig gestellte Dissertation von Franz Pichler lieferte dafür eine Lösung [14]. Darin wurden die Walshfunktionen sal(.) und cal(.) in Analogie zu den Kreisfunktionen sin(.) und cos(.) eingeführt und darauf basierend die für die Nachrichtentechnik notwendigen Signaldarstellungen mittels der Walsh-Fourierreihe und des Walsh-Fourierintegrals durchgeführt. Für Harmuth war es damit möglich seinen neuartigen analogen Nachrichtensystemen eine mathematisch befriedigende Basis zu geben.

In Innsbruck und auch später nach der Übersiedlung von Franz Pichler und Peter Weiß an das Institut für Mathematik an der neugegründeten „Hochschule für Sozial- und Wirtschaftswissenschaften“ (heute die Johannes Kepler Universität) in Linz wurden weitere ergänzende Arbeiten zu den Walshfunktionen und deren Anwendung in der Nachrichtentechnik durchgeführt. Zu erwähnen sind hier die Arbeiten von Peter Weiß zur Codierungstheorie [15] [16] und die von Franz Pichler veröffentlichten Arbeiten zu den Sequenzfiltern [17],[18]. Erwähnt kann hier noch werden der von Franz Pichler für die Fa Schrack, Wien, erarbeitete Vorschlag die Sequenz-Multiplextechnik zur Konstruktion einer vollelektronischen Fernsprechvermittlung zu verwenden [19], [20].

Die von Harmuth mittels der Walshfunktionen eingeführte Sequenztechnik hat in den folgenden Jahren internationale Beachtung bekommen. Ab dem Jahre 1970 fanden in Washington unter der Patronanz der Forschungsstelle der US Navy (Naval Research Laboratory) internationale Symposien zur Anwendung der Walshfunktionen in der Nachrichtentechnik statt. Es zeigte sich, dass an zahlreichen Stellen, sowohl an Universitäten als auch in Firmen, bereits Forschungen und Entwicklungen dazu erfolgreich durchgeführt wurden. Heute haben die Walshfunktionen in ihrer digitalen Definition, wobei die Werte +1 als 1 und -1 als 0 gesetzt werden, eine wichtige Bedeutung in der Technik der digitalen Systeme erhalten. Die von Harmuth damals in Analogtechnik konzipierten Nachrichtensysteme sind heute in digitaler Form in verschiedenen Bereichen der Nachrichtentechnik, vor allem auch im Gebiet der Mobilen Telefonie, realisiert. Von Professor Paul Butzer, TU Aachen, zusammen mit weiteren vier Autoren, wurde kürzlich ein umfangreicher Bericht zum 100 jährigen Bestehen der Walshfunktionen verfasst [21].

Literaturhinweise

[1] J.L. Walsh: A closed set of normal orthogonal functions.
Amer. J. of Math. 45 (1923), 5-24.
[2] N.J. Fine: On the Walsh-Functions. Trans. Amer.Math., Soc. 65 (1949) 372-414
[3] N.J. Fine: The generalized Walsh-Functions. Trans.Amer.Math.Soc. 69 (1950) 66-77
[4] R.G. Selfridge: Generalized Walsh-Transforms. Pac.J. Math. 5 (1955) 451-480
[5] R.E.A.C. Paley: A remarcable series of orthogonal functions
Proc.London Math. Soc. 34 (1932),pp. 241-279.
[6] P.Levy: Sur une generalisation de fonctions orthogonales de M.Rademacher
Comment.Math. Helv. 16 (1944) 146-152
[7] N.W. Vilenkin: Zur Theorie der Fourier-Integrale auf topologischen Gruppen
Math.Sbornik 30 (1952), 233-244.
[8] R. Liedl: Über eine spezielle Klasse von stark multiplikativ orthogonalen
Funktionensystemen. Monatshefte für Mathematik 68 (1964), 130-137.
[9] P. Weiß: Zusammenhang von Walsh-Fourierreihen mit Polynomen
Monatshefte für Mathematik 71(2), 1967, 165-179.
[10] H. Harmuth: Die Orthogonalteilung als Verallgemeinerung der Zeit- und
Frequenzteilung. Archiv der Elektrischen Übertragung, 18 (1964) 43-50
[11] H.Harmuth: Verallgemeinerung des Fourier- Integrals und des Begriffes „Frequenz“.
Archiv der Elektrischen Übertragung,18 (1964),439-451
[12] H. Harmuth: Grundzüge einer Filtertheorie für die Mäanderfunktionen
Archiv der Elektrischen Übertragung, 18 (1964), 544-554
[13] H. Harmuth: Transmission of Information by Orthogonal Functions
Springer Verlag, Berlin 1969.

[14] F. Pichler: Das System der sal-und cal-Funktionen als Erweiterung des Systems der Walsh-Funktionen und die Theorie der sal- und cal-Fouriertransformation Inauguraldissertation Universität Innsbruck 1967.

[15] P. Weiß: Über die Verwendung der Walshfunktionen in der Kodierungstheorie. Archiv der Elektrischen Übertragung 21 (1967), 255-258.

[16] P. Weiß: Die Darstellung der zyklischen Kodes mit Hilfe der Walshfunktionen Archiv der Elektrischen Übertragung 21 (1967), 481-482.

[17] F. Pichler: Synthese linearer periodisch zeitvariabler Filter mit vorgeschriebenem Sequenzverhalten. Archiv der Elektrischen Übertragung 22(1968), 150-161.

[18] F. Pichler: Walsh-Fourier Synthese optimaler Filter Archiv der Elektrischen Übertragung 24 (1970),350-360.

[19] F. Pichler: Das Sequenzvielfach, ein neues Sprechwegenetzwerk für vollelektronische Fernsprechvermittlungsdämter, XII. Int. Koll. Technische Hochschule Ilmenau, September 1967

[20] F. Pichler: Experimentelle vollelektronische Fernsprechvermittlung mit Sequenzvielfach Techn. Bericht (1968)

[21] P.Butzer et al: A twofold commemoration: the 100th birthday of Walsh functions and the 50th anniversary of Professor Joseph Leonhard Walsh´s death. Sampling Theory, Signal Processing and Data Analysis Vol. 22, article number 5, open access publication, Springer 2024

Verfasser: em. Univ. -Prof. Dr. Franz Pichler
Johannes Kepler Universität Linz
Email <telegraph.pichler@aon.at>

Monika und Rainer Gebhardt, Franz Pichler

On results of the Lwów School of Mathematics from the point of view of applications

Stanisław Domoradzki
ORCID 0000-0002-6511-0812
(Institute of History, University of Rzeszów)
stanislawdomoardzki@gmail.com
Mykhailo Zarichnyi
ORCID 0000-0002-6494-2289
(Institute of Mathematics, University of Rzeszów)
zarichnyi@yahoo.com

The Lwów School of Mathematics (LSM) is a group of Polish mathematicians who worked in Lwów, then Poland, between the two world wars. The founders and leaders of the school were Stefan Banach and Hugo Steinhaus. It is generally accepted that the main direction of the school's activity was functional analysis, although significant results were also obtained in topology and real analysis.

The paper [3] is devoted to the history of the LSM (see also [4], where traditions and heritage of the LSM is considered). However, the authors do not pay enough attention to applied aspects of the school's activities.

Non-constructive methods of proof dominated at the LSM. One of this methods was based on the Baire Category Theorem. This theorem, proved in 1999 by the French mathematician René Baire (for Euclidean spaces), made it possible, informally speaking, to distinguish among all metric spaces the so-called spaces of the second category, that is, in some sense, “large” spaces. It is asserted that the spaces of the second category cannot be represented as countable unions of their “small” subspaces.

The source of non-constructivity is also the Axiom of Choice in set theory. It asserts that for an arbitrary family of nonempty sets, a set can be created by choosing one element from each set of the given family. Non-constructivity is manifested here in the absence of a selection algorithm. The Hahn-Banach theorem, one of the principles of functional analysis, which concerns extensions of linear functionals from a subspace to the entire space, is based on non-constructive methods, and the Kuratowski-Zorn lemma is used for its proof. The latter, as is known, is equivalent to the Axiom of Choice. (See [1] on history and applications of the Hahn-Banach theorem.)

The first name that can and should be associated with the applications of mathematics is prof. Hugo Steinhaus (1887-1972) co-founder of the LSM. The

School owes a lot to him. He was able to take care of the journal “Studia Mathematica”, he was the author of “Kaleidoscope of Mathematics”. He knew how to apply mathematics. After World War II in Wrocław, he was the creator of the Wrocław School of Applied Mathematics.

The ideas of using mathematics were continued by his two great students, Mark Kac (1914–1984) and Stanisław Ulam (1909–1984). They emigrated to the USA and achieved successes here. Ulam worked in the Manhattan Project and advised the US president on research spacecraft. Kac created the world’s strongest center for probability theory, mathematical statistics and a computational center in the USA. These two mathematicians, with the help of Steinhaus, thoughtfully and with great success preserved the legacy of mathematical results of the LSM in the world

Functional analysis as a branch of mathematics has numerous applications both in mathematics itself and beyond. In particular, functional analysis is part of the mathematical formalism required for a rigorous description of quantum mechanics. Among the concepts used are the eigenvalues of linear operators in infinite-dimensional Hilbert spaces.

Among the well-known results bearing the name of Stefan Banach is the Banach contraction principle: every contractive self-mapping of a complete metric space has a fixed point. This result is constructive, its proof contains the algorithm of approximation to a fixed point.

This result was later applied in the theory of locally self-similar fractals [6]: it can be used to prove the existence of invariant sets and probability measures for iterated systems of functions.

The Banach contraction principle was unexpectedly applied to Google search algorithms [10] and computer vision [11].

Just as Banach is considered one of the creators of linear functional analysis, Juliusz Schauder (1899-1943) is considered one of the creators of nonlinear functional analysis. Together with Jean Leray, Schauder defined the concept of a degree (Leray-Schauder degree), which is an extension to the infinite-dimensional case of the concept of the degree of continuous mappings of smooth manifolds with boundary. The degree was applied in subjects that were not traditional for the Lwów Mathematical School and were more applied in nature (PDE, bifurcation theory) [8].

One of the important results obtained in Lwów was the Knaster-Kuratowski-Mazurkewicz lemma (KKM-lemma). This result is published in Fundamenta Mathematicae and Lwów is indicated as the city of affiliation of the authors [7].

The KKM-lemma finds various applications in game theory and mathematical economics.

Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe.

Von

B. Knaster, C. Kuratowski und S. Mazurkiewicz (Lwów).

Der Zweck dieser Mitteilung ist, einen kurzen Beweis des folgenden Brouwer'schen Fixpunktsatzes zu geben:

Bei jeder stetigen Abbildung eines n-dimensionalen Simplex auf seine (eigentliche oder uneigentliche) Teilmenge gibt es mindestens einen durch die betreffende Abbildung in sich selbst übergehenden Punkt.

Wir beweisen zuerst einen Hilfssatz, welcher wohl den kombinatorischen Kern eines von E. Sperner [1]) neuerlich gebrachten eleganten Beweises für die Invarianz der Dimensionszahl darstellt; daraus leiten wir ferner einen kombinatorisch-topologischen Satz her, aus welchem sich direkt einerseits der erwähnte Fixpunktsatz, andernseits die Grundprämisse der Sperner'schen Beweisführung (mit deren Folgerungen) ergibt.

A generalization of the KKM-lemma was applied in [9] to a proof of the Nash equilibrium theorem.

Let us also note here the contribution of the Lwów school of mathematics to game theory, which, as is known, has wide applications in economics, social sciences, logic, and computer science. Stefan Mazur formulated problem 43 in „Scottish book", the book of open problems formulated by Lwów mathematicians during their sessions in the Scottish café in Lwów, where he introduced the notion of an infinite topological game. This problem was solved by Stephan Banach and the mentioned game is called the Banach-Masur game. This was the first published example of infinite game with perfect (complete) information. A finite example belongs to E. Zermelo.

Let us now turn to the notion of a random graph. The Erdős–Rényi model was first defined by Paul Erdős and Alfréd Rényi in [5]. In fact, Ulam considered the notion of random graph earlier.

PROBLEM 38: ULAM

Let there be given N elements (persons). To each element we attach k others among the given N at random (these are friends of a given person). What is the probability P_{kN} that from every element one can get to every other element through a chain of mutual friends? (The relation of friendship is not necessarily symmetric!) Find $\lim_{N\to\infty} P_{kN}$ (0 or 1?).

This is Problem 38 from the „Scottish book". Note that random graphs find numerous applications in power grids, social networks, food webs, molecular biology, etc.

We will also mention here the names of two mathematicians who did not formally belong to the LMS, but worked in Lwów during the period of the school's activity.

Lucjan Emil Böttcher (1872–1937) is considered one of the founders of complex dynamics, the article [2] is devoted to his work. Numerous applications of complex dynamics to physics, biology, and finance are shown in [12].

Miron Zarycki (1889-1961) was engaged in research along the lines of some of results of Kazimierz Kuratowski, who spent six years in Lwów. Zarytsky's results include, in particular, an axiomatization of the concept of the boundary of a set in a topological space, which is close to the axioms of the Kuratowski closure operator.

The scientific biography of Zarytskyi and an overview of his results are given in [14]. Since the concept of limit is universal, the range of applications of Zarytskyi's axiomatization is quite wide and covers formal ontology [13].

Summarizing, we come to the conclusion that, although the subject of the activity of the Lwów School of Mathematics was mainly theoretical and, moreover, related to very abstract sections of mathematics, the further development of mathematical science showed the importance of these results also from the point of view of applications not only in mathematics itself, but also beyond its borders. This is another evidence in favor of the unity of pure and applied mathematics

REFERENCES

[1] Stanisław Domoradzki, Uwagi do historii i zastosowań twierdzenia Hahna-Banacha (Notes on the history and applications of the Hahn–Banach theorem), Studia Matematyczne Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego Jana Kochanowskiego. - 2009, t. 11, p. 69–78. (in Polish)

[2] Stanisław Domoradzki and Małgorzata Stawiska: Lucjan Emil Böttcher and his mathematical legacy. In Mathematics without boundaries. Surveys in pure mathematics. Edited by Themistocles M. Rassias and Panos M. Pardalos. Springer, New York, 2014, S. 127–161.

[3] S. Domoradzki, M. Stawiska-Friedland, M. Zarichnyi, Formation and Activity of the Lwów School of Mathematics [In:] The Development of Mathematics Between the World Wars: Case Studies, Examples, red. M. Bečvářová, London 2021.

[4] Stanisław Domoradzki, Olena Hryniv, Michael Zarichnyi, Tradycje i dziedzictwo naukowe lwowskiej szkoły matematycznej we Lwowie po II wojnie światowej (Traditions and scientific heritage of the Lwów School of Mathematics in Lviv since World War II), in: Polskie dokonania modernizacyjne w oczach zagranicy, redakcja naukowa Paweł Grata, Rzeszów, Uniwersytet Rzeszowski, 2024, s. 131–153.

[5] P. Erdős, A. Rényi, On Random Graphs. I. Publicationes Mathematicae. 6 (3–4) (1959), 290–297. doi:10.5486/PMD.1959.6.3-4.12

[6] John E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, Indiana University Mathematics Journal, 30(1981), 713–747.

[7] B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für *n*-dimensionale Simplexe, Fundamenta Mathematicae (in German), 14 (1) (1929), 132–137, doi:10.4064/fm-14-1-132-137

[8] Jean Mawhin, Leray-Schauder degree: a half century of extensions and applications. Topological Methods in Nonlinear Analysis. 14 (1999), 195–228.

[9] S. Park, From the KKM principle to the Nash equilibria, International Journal of Mathematics and Statistics, vol. 6, no. S10, pp. 77–88, 2010.

[10] Christiane Rousseau, How Google works, preprint, 2010, https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4145/2015h/google_pagerank.pdf

[11] Yuncong Sun, Zongshun Hu, Improvement of Image Matching Method based on Gray Value and Contracting Mapping Principle, Advances in Computer Science Research, volume 71, 4th International Conference on Machinery, Materials and Information Technology Applications (ICMMITA 2016), 778-782.

[12] José Tenreiro Machado & Dumitru Baleanu, Nonlinear and Complex Dynamics: Applications in Physical, Biological, and Financial Systems, Springer (2011). 10.1007/978-1-4614-0231-2.

[13] Achille C. Varzi, Boundaries, continuity, and contact, Noûs, 31(1), 1997, 26–58, doi: 10.1111/0029-4624.00034.

[14] M. Zarichnyi, B. Ptashnyk, Outstanding Ukrainian mathematician and teacher Myron Zarytskyi (to the 120th anniversary), Visn. Lviv University. Ser. mech.-mat. 2009. - V. 70. - P. 191-207.

Stanisław Domoradzki und Mykhailo Zarichnyi

Navigation, astronomy, and calendrics --- Application of mathematics in the 15th and 16th century

Harald Gropp, VIGN Heidelberg,

d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

These 5 pages are meant to be a short introduction for the Mönichkirchen participants in order to be able to better follow my talk. The title and the contents of my talk and of my final publication and even the language are still under discussion.

This talk is dedicated to **Ersin Sümer** who died on March 12, 2023. Without him we would not have founded the VIGN (Virtuelles Institut für die Geschichte der Naturwissenschaften on February 9, 2017, the 150th birthday of Julius Ruska. Ersin was a physicist and very much interested in and engaged for the history of mathematics and sciences. After his death also the future of the VIGN is not clear.

Starting from the map of Urbano Monte (1587) we shall mainly discuss two maps, a world map of Albertin diVirga (1411 or 1415) and a celestial map of Conradus de Dyffenbach (1426). At the end there will be two appendices, the first one on Vespucci and his voyages, and the second one on the introduction of the Gregorian calendar in different countries. Both topics are badly treated even in good lexica and handbooks.

Let us start with **Conradus de Dyffenbach**, a rather unknown scholar who, however, draw an exeptional star map in 1426. Better known is Joannes de Wachenheim who became a priest in Neuhausen (today in Worms). There is a certain connection to the socalled Wiener Mathematische Schule, quite discussed scholarly, e.g. also by Christa Binder [bi] nearly 30 years ago in the first Annaberg Kolloquium of 1996.

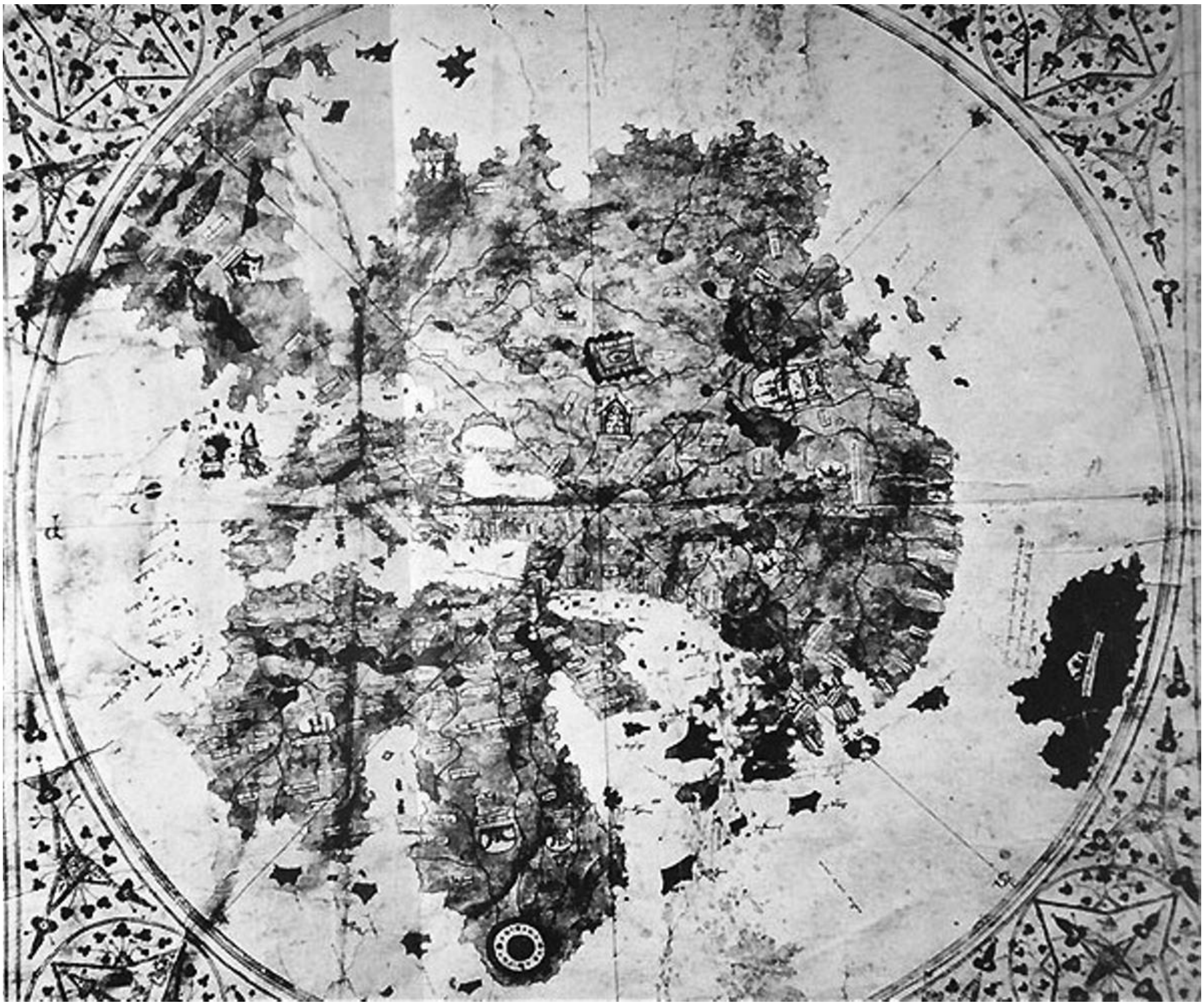
The main part of this talk will discuss a world map of the beginning of the 15th century, a few years earlier than the works of Conradus and Joannes.

„A. 141. Albertin diuirga me fecit in uinexia“ is written on the map itself.

What can we learn from a map which is lost and only documented by bad photographs? The diVirga map was drawn by **Albertin diVirga** in 1411 or 1415, at least this is written on the map (see above). DiVirga lived in Venezia. 500 years later the map was bought by Albert Figdor in Šibenik.

There is a first evaluation of the map by the Austrian geographer Wieser [w2], however without detailed photos. By the way, this is the same Wieser who 30 years earlier as a young scholar had postulated a Schöner globe [w1] which was really found a few years later.

After Figdor’s death in 1927 the map came into possession of his niece Margarete Becker- Walz, the wife of the Lord Mayor of Heidelberg, ErnstWalz. Ernst Walz was Lord Mayor from 1913 till 1928. The map was offered in an auction in Luzern in June 1932 but withdrawn before the auction. A photo in the auction catalogue is the last witness which we have. A lot could have happened since then. Margarete Becker-Walz died half a year later in December of 1932. In January 1933 the Nazis came into power in Germany which might be important because Margarete Becker-Walz was Jewish. However, Ernst Walz was not. He died in 1941. Apart from a more detailed discussion of the map’s biography a further focus will be to consider what we can learn from the photos of the map, of a remarkable and outstanding map of the beginning of the 15th century. It is difficult to say how big the chance is to find it again in the near future. In contrast to other authors I would claim that maybe the map was still in Austria in December 1932. Whether this is true is not sure, and whether it can help to find the map again is either not clear. For one of the more recent papers, see [du].



DiVirga map

Appendix 1: It should be clearly stated here that it was **Amerigo Vespucci** who visited big parts of the American coastline from Tierra del Fuego in the South to at least Mexico, maybe even to what is now the US coast. He saw the „Tierra firme“ earlier than Columbus, and he was in Mesoamerica many years before Columbus. This can be seen in a great scholarly contribution by Omodeo [om] who just exploited all the sources which exist. In my Miesenbach paper of 2016 [g1] this was already discussed. It was my first paper on the topic of history of cartography and socalled discoveries. For further discussion on this topic, see [g2].

Appendix 2: The calendar reform of 1582 of Pope Gregory XIII was announced in February of 1582. The days between October 5 and October 14 should be cancelled. Usually, in lexica it is described as such. The calendar reform took place in Spain, Portugal, Poland, and parts of Italy.

First of all, Portugal was part of Spain in 1582. In the non-European parts of this Iberian Empire nothing happened in 1582. Concerning Poland I am very sceptical. Maybe most surprising for many Central Europeans in the socalled Holy Roman Empire, the reform took place only in 1583 and, of course, only in Catholic territories.

References:

[bi] C. Binder, Die erste Wiener Mathematische Schule (Johannes von Gmunden, Georg von Peuerbach) in: R. Gebhardt (ed.), Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit, Annaberg-Buchholz (1996), 3-18.

[du] A. Dürst, Die Weltkarte von Albertin de Virga von 1411 oder 1415, Cartographica Helvetica 13 (1996), 18-21.

[g1] H. Gropp, „Quarta pars terrae“ und „Novus mundus“ --- Wer erfand Amerika und wer entdeckte die Projektion, in: C. Binder (ed.) Beiträge zum XIII. Österreichischen Symposium zur Geschichte der Mathematik 2016, 190 – 194.

[g2] H. Gropp, Phantastische Inseln und imaginäre Himmelswelten – Kosmovision auf dem Okeanos, in G. Wolfschmidt (hrsg.) Himmelswelten und Kosmovisionen –Imaginationen, Modelle, Weltanschauungen (2020), 264-278.

[om] P.Omodeo, Amerigo Vespucci: The historical context of his explorations and scientific contribution, Venezia (2020).

[w1] F. Wieser, Magalhâes-Strasse und Austral-Continent auf den Globen des Johannes Schöner, Innsbruck (1881).

[w2] F. von Wieser, Die Weltkarte des Albertin de Virga. Aus dem Anfange des XV. Jahrhunderts in der Sammlung Figdor in Wien, Innsbruck (1912).

Urbano Monte (1587)

The earliest printed arithmetic textbooks in each of seven West and South Slavic languages

Alfred Holl

This paper presents the earliest printed West and South Slavic arithmetic textbooks. It is an extract of my systematic catalog *The earliest printed arithmetic book in each of 35 European languages – supplemented with all vernacular arithmetic incunabula and post-incunabula until 1515* (version 3.1, July 2023), free download:
stromstadakademi.se/wp2/publikationer-2/fri-skriftserie
All of the references in the following text can be found there.

1 Motivation

It is an interesting issue to investigate the temporal process of spreading mathematical knowledge with school education in various cultural, linguistic and geographic regions in early modern times. The invention of book printing with moveable type (instead of manuscripts) and the introduction of vernacular languages (instead of Latin) were the requirements to address larger parts of the population. The earliest years of publication of arithmetic textbooks in every language allow tracking this process. Therefore, my catalog focuses on the earliest printed arithmetic in every language.

Studying early arithmetics in-depth, also provides – among others – information about
– the word problems and types of word problems discussed
– the applications considered as important and profitable
– the relationship of commercial and recreational problems
– the teaching methods used
– the possibility of autodidactic learning
– the spread of different problems and problem types in various regions
– the differences of teaching focuses and teaching methods in various regions

2 Methods to find early printed arithmetics

One searches the following bibliographic sources:
– *Karlsruher Virtueller Katalog*
– *WorldCat*
– *CERL* (Consortium of European Research Libraries) *Thesaurus*
– National library catalogs
– Catalogs of early printed books in certain languages, countries and regions
– *Ars mercatoria* (by Hoock, J.; Jeannin, P.; Paderborn 1991, 1993; period 1470–1700)
– *arxiv.org* (open-access archive for scholarly articles in physics, mathematics etc.)
– Publications on the history of mathematics in certain languages, countries and regions

In addition, one consults librarians in national libraries and foreign researchers.

3 Methods to understand the contents of early printed arithmetics

In order to understand title and table of contents (section headings) in detail, one has to translate them with the help of online and printed dictionaries and grammar books, machine translation systems (such as Google translate – only for today's language states) and even friendly and competent native speakers (librarians and researchers).

This task is challenging as:

– Many vernaculars underwent considerable changes in the period since the print of the earliest arithmetic book.
– At the time of the print of an early arithmetic book, a language standard or norm was possibly not yet established and several dialects were competing.
– Mathematical terminology was often not yet established either at the time of the print. Especially in agricultural societies and farming cultures, authors of mathematical treatises had to coin mathematical terms from scratch on their own. Different authors could use different expressions, some of which later completely disappeared and became extinct. They cannot be found in dictionaries. The meaning of such a term has to be reconstructed by examining the mathematical content of the arithmetic book where it occurs and by comparing this book with other books of the same time.

4 Linguistic particularities of the West and South Slavic language families

The West Slavic languages from Czech to Polish and the South Slavic languages from Slovene to Bulgarian are dialect continua, as well as Romance from Portuguese to Italian, North Germanic from Icelandic to Danish, West Germanic from English to German. A dialect continuum is defined as a regionally continuous group of language varieties. Neighboring varieties are mutually well understandable, but the larger the distances, the less understandable the varieties get. This particular situation suggests the use of dictionaries of neighboring languages to translate strange or extinct words in a language belonging to a continuum.

5 Comparison of temporal facts

West Slavic languages: The first arithmetics in Czech and Polish were already printed in the 1530s, certainly due to the early universities in Praha (1348), Kraków (1364) and Bratislava (1467). The first arithmetic in Slovak, however, was probably not printed before 1800 or even 1850 – perhaps it is Gustáv Kordoš, Uherská Skalica 1884. Although the Slovak and Czech languages developed similarly, Czech was the predominant language of literature and administration. Even in the 19th century, the so-called biblical Czech (language with elements of Slovak and Czech) was used in Slovakia. Slovak – with its simpler morphological system – was not standardized before 1851. A Sorbian arithmetic (the first one?) was published in 1951. I did not find any evidence of a Kashubian arithmetic.

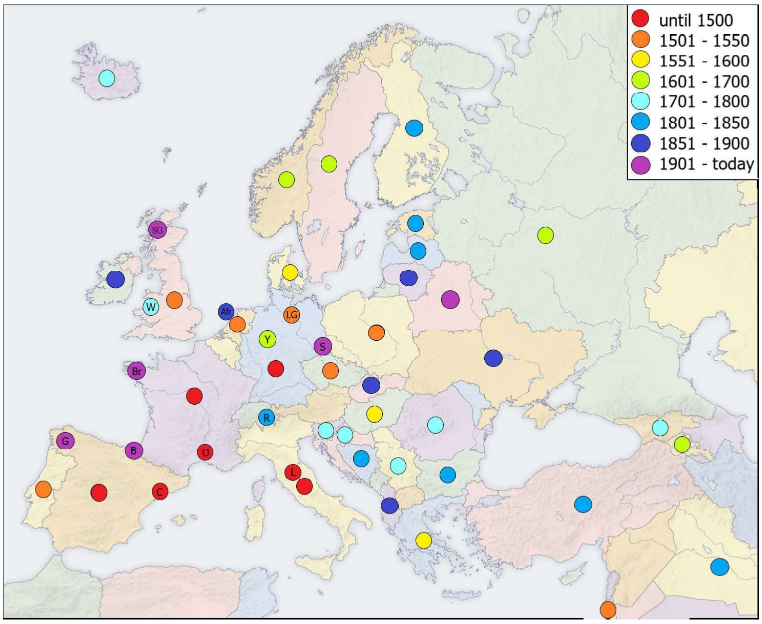
South Slavic languages: Arithmetics were not printed before the national awakening in the second half of the 18th century with the descent of the Ottoman empire, the ascent of the tsarist Russian empire and under the influence of the Austrian-Hungarian empire where empress Maria Theresia introduced compulsory schooling in 1774. Croatian started with a vernacular arithmetic in 1758, followed by Serbian in 1767 (printed in Cyrillic script in Venezia), Slovene in 1781 and Bosnian in 1827; Bulgarian was last in 1833 (printed in Beograd) after leaving the Greek predominance.

6 Comparison of the contents

See the following two tables.

Arithmetic Language	Coun-ters	Pen	(Comp.) deno-minate num-bers	Arith. pro-gres-sions	Geom. pro-gres-sions	Roots	Com-mon frac-tions	Regula de tri	Regula de tri inversa (loaf of penny)	Regula quin-que (crafts-men)	Regula falsi (1, 2 pos.)	Arith. signs, alge-bra	Pro-por-tions (Boeth)	Geo-metry
Klatovský Nürnberg 1530 Czech	2	1	1	1			3	1		4		–		
Kłos Kraków 1538 Polish	1	1						2				–		
Pohlin Ljubljana 1781 Slovene		1	2					3	3			sporadic		
Šilobod-Bolšić Zagreb 1758 Croatian		1		4.3	4.4		2	3.1	3.3	3.2 3.4	4.1 4.2	–		
Matić Osijek 1827 Bosnian		1	2.7				2.8 2.9 2.10					not con-sequent-ly		
Damjanović Venezia 1767 Serbian		1.1 1.3					1.5	1.4 1.6 2.1	2.3	2.4	2.7	–		
Pavlovič G. Beograd 1833 Bulgarian		1.1 1.2	1.3				2	3	3		3	–		

Arithmetic Language	Pur-chase, sales, profit, loss	Units: conver-sion, reduc-tion	Barter	Tare, tret (fusti), tax, discnt	Inter-est, loan	Com-pany, prop. parti-tion	Subcon tractor (factor)	Mix-ture, alloy, gold, silver	Find length: spear in the water	Shared work: cisterne, mills, sails	Motion: pursuit, encoun-ter, to/fro	Addit. parti-tion: tw.test. r.caecis	Nesting (1st from last): journey, heritage	Num-ber gues-sing
Klatovský Nürnberg 1530 Czech	4	1 4	4	4	4	4		4			4	4		
Kłos Kraków 1538 Polish						3								
Pohlin Ljubljana 1781 Slovene		2												
Šilobod-Bolšić Zagreb 1758 Croatian	3.7		3.9	3.8		3.5	3.6	3.10						
Matić Osijek 1827 Bosnian		2.7												
Damjanović Venezia 1767 Serbian	2.2 2.5	1.2 2.5	2.5			2.5	2.5	2.6						
Pavlovič G. Beograd 1833 Bulgarian		1.3				3		3						



The earliest publications of arithmetic books in European and Levantine languages (Afr Afrikaans, B Basque, Br Breton, C Catalan, G Galician, L Latin, LG Low German, O Occitan, R Romansh, S Sorbian, SG Scottish Gaelic, W Welsh, Y Yiddish).
The temporal intervals are oriented towards entire or half centuries.

West Germanic	German	1475
	Dutch	1508
	English	1526
	Low German	1527
	Yiddish	1699
	Afrikaans	1882
Romance	Italian	1478
	Catalan	1482
	Latin	1483
	Spanish	1486
	Occitan	1492
	French	1496
	Portuguese	1519
	Romanian	1777
	Romansh	1808
	Galician	1979
West Slavic	Czech	1530
	Polish	1538
	Slovak	1884
	Sorbian	1951
Afro-Asiatic	Hebrew	1533
	Arabic	1812
North Germanic	Danish	1552
	Swedish	1614
	Norwegian	1645
	Icelandic	1746

Hellenic	Greek	1569
Finno-Ugric	Hungarian	1577
	Estonian	1806
	Finnish	1835
Armenic	Armenian	1675
East Slavic	Russian	1699
	Ukrainian	1863
	Belarusian	1916
Kartvelian	Georgian	1731
South Slavic	Croatian	1758
	Serbian	1767
	Slovene	1781
	Bosnian	1827
	Bulgarian	1833
Celtic	Welsh	1768
	Irish	1900
	Breton	1943
	Scottish Gaelic	2006
Baltic	Latvian	1806
	Lithuanian	1885
Turkic	Turkish	1831
Albanic	Albanian	1886
Basque	Basque	1913

The earliest arithmetic books in European and Levantine languages arranged by language families

Czech

Ondřej Šimkovic Klatovský

b. ca. 1504 Klatovy/Klattau
d. ca. 1551 Prostějov (SW Olomouc)
1524 Baccalaureate Univ. Praha
1533 Citizen of Praha old town
1540 Czech German language textbook
1544 Title of nobility: von Dalmanhorst (z Dalmanhorstu)
1547 Moved to Olomouc/Olmütz

Nowé knížky wo pocztech na Cifry a na lyny. Nürnberg: Friedrich Peypus [1]1530-02-10
Praha: Jan Kantor [2]1558

220 p.
C/V: Hoock I/K5
D: 1558 [≈ 1530] aleph.nkp.cz, EBSCO, manuscriptorium.com
L: Praha NL, National Museum, Strahov
S: Škvorová, J: Ries-Kolloquium 2002


Nowe knižky.wo
pocztech na Cifry / a nalyny / przy-
tom niektere welmi vžyteczne re-
gule / a exempla mincze rozlyczne /
podle biehu kupeczkeho / Kratze
a vžyteczne sebrana.
Wnorberze.tlaczena / Letha panie
1.5 3 0. Miesicze Ledna.

Czech

Ondřej Šimkovic Klatovský

Nowé knížky wo pocztech
Nürnberg: Friedrich Peypus 1530

Translation of the title page, of the next to the last page and of the colophon

New booklets
on calculating with the pen and with the counters,
at the same time several very useful rules
and examples, various coins
according to the commercial business activities,
briefly and usefully compiled

Printed in Nürnberg in the year of our lord
1530 in the month of January

The completion of the booklet
took place on the 10th day of the month of February
by the work and the expense
of Ondřej Klatovský

Printed in Nürnberg
by Friedrich Peypus
1530

S: Folta, Jaroslav. In: Science and technology in Rudolfinian Time (= Prague studies in the history of science and technology 1). Praha 1997, 168–194 [contains further references]

Polish

Tomasz Kłos

Roman-Catholic priest
No other biographical data known
(Polish Wikipedia)

Algoritmus:
To iesth nauka liczby
Kraków/Krakau: Ungler 1538

64 p.
C/V: Hoock I/K6
D: jbc.bj.uj.edu.pl/dlibra
L: Kraków U (copy incomplete),
Göttingen SUB
E: Biblioteka Pisarzów Polskich, Kraków
6(1889), ed. Baraniecki, Maryjan
Alexander (München BSB)
S: Biniewicz, Jerzy: Szesnastowieczne
podręczniki matematyki. Wrocław 2021

Algoritmus: To
iesth nauka Liczby: Polska
rzeczą wydana: Przez Kxiedza Tomasza
Kłosa. Na trzy sie częsci dzieli, Pierwsza bę-
dzie o osobach Liczby, wtora o Regule
detri, Trzecia o rozmaitych rachun-
koch y o spolkach Kupieczkich.
Craconię ex Officina Ungleriana. 1538.

Polish

Tomasz Kłos

Algoritmus:
To iesth nauka liczby
Kraków: Ungler 1538

Translation of the title page
with content overview

Algorism:
That is the science of the number:
edited in the Polish language:
by the priest Tomasz Kłos.
Divided into three parts,
the first one will be about the forms of the number,
the second one about the rule of three,
the third one about various calculations and
companies of merchants.

In Kraków from the printing house Ungler 1538

[under the text the coat of arms of the city of Kraków]

Slovene

Marko Pohlin/Pochlin

Born as Anton Pohlin; OSA name: Marcus a Sancto Antonio Paduano
b. 1735 Ljubljana/Laibach
d. 1801 Monastery Mariabrunn, Vienna
Order of Saint Augustine OSA
Author of a Slovene grammar, dictionary, theologic and religious literature
(Wurzbach, Constantin von: Biograph. Lexikon des Kaiserthums Oesterreich)

Bukuvze sa rajtengo
Ljubljana: Johann Friedrich Eger 1781

56 p.
D: Digitalna knjižnica Slovenije dlib.si
L: Ljubljana Narodna in univerzitetna knjižnica
V: slovenska-biografia.si

BUKUVZE
SA
RAJTENGO,
ALI
KRATKU PODUZHENJE
V' RAJTENGI
SA FANTIZHE, INU DEKLETA
GMAJN KRAYNSKEH LUDY, KATIRI
SE OTHE RAJTATI NAUZHITI
SKUPSPISSANE
OD
N. A. O. L.

V' LUBLANI,
STISKANE, INU SE NAJDEJO PER JOAN
FRIDERIKU EGERJU, 1781.

Slovene

Marko Pohlin

Bukuvze sa rajtengo
Ljubljana: Eger 1781

Translation of the title page

S: Hladnik, Milan: Prvi slovenski matematični učbeniki. In: Solska kronika 2017, p. 291–323

The pen name *N. A. O. L.* could mean *Novus Augustiniani ordinis Laibacensis* (id.loc.gov/authorities)

Translated using fran.si/iskanje; Slovarji Inštituta za slovenski jezik Frana Ramovša and Pohlin's trilingual dictionary *Tu malu besedishe treh jesikov* (Slovene, German, Latin) Ljubljana: Eger 1781 (https://www.dlib.si)

Booklet
for
arithmetic
or
short instruction
in arithmetic
for boys and girls
of those of the Carniolan people who
want to learn to calculate
compiled
by
Marko Pohlin

In Ljubljana,
printed by, and can be found with Johann Friedrich Eger, 1781

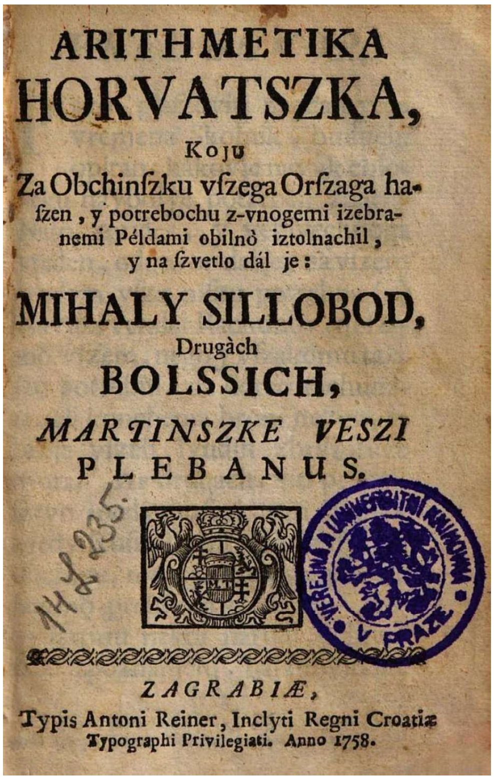
Croatian (Kajkavian)

Mihael Šilobod-Bolšić

b. 1724
d. 1787
Studied philosophy in Vienna and theology in Bologna
Pastor in Martinska Ves and Sveta Nedelja
Author of religious literature, a small encyclopedia and Latin songs
His name became proverbial for math. knowledge

Arithmetika horvatszka
Zagreb: Anton Reiner 1758

384 p.
D: aleph.nkp.cz, EBSCO; Google
L: Praha NL
S/V: Ptičar, Adela: Prvi hrvatski računski priručnici. In: Rasprave, časopis instituta za hrvatski jezik i jesikoslovlje 30 (2004) 173–179 (hrcak.srce.hr/9473)


ARITHMETIKA
HORVATSZKA,
Koju
Za Obchinſzku vſzega Orſzaga ha-
ſzen, y potrebochu z-vnogemi izebra-
nemi Példami obilnò iztolnachil,
y na ſzvetlo dál je:
MIHALY SILLOBOD,
Drugàch
BOLSSICH,
MARTINSZKE VESZI
PLEBANUS.
14 L 235
ZAGRABIÆ,
Typis Antoni Reiner, Inclyti Regni Croatiæ
Typographi Privilegiati. Anno 1758.

Croatian

Mihael Šilobod-Bolšić

Arithmetika horvatszka
Zagreb: Anton Reiner 1758

Translation of the title page

Translated using fran.si/iskanje; Slovarji Inštituta za slovenski jezik Frana Ramovša

Croatian
arithmetic
which [he],
for the benefit related to the municipalities
of the entire country and for the demand,
with many selected examples
abundantly commented
and [which he] *made see the light* [of the world]*:*
Mihael Šilobod,
otherwise
Bolšić,
pastor
of Martinska Ves.

In Zagreb,
at the printing house of Anton Reiner, privileged
typographer of the famous Kingdom of Croatia.
In the year 1758.

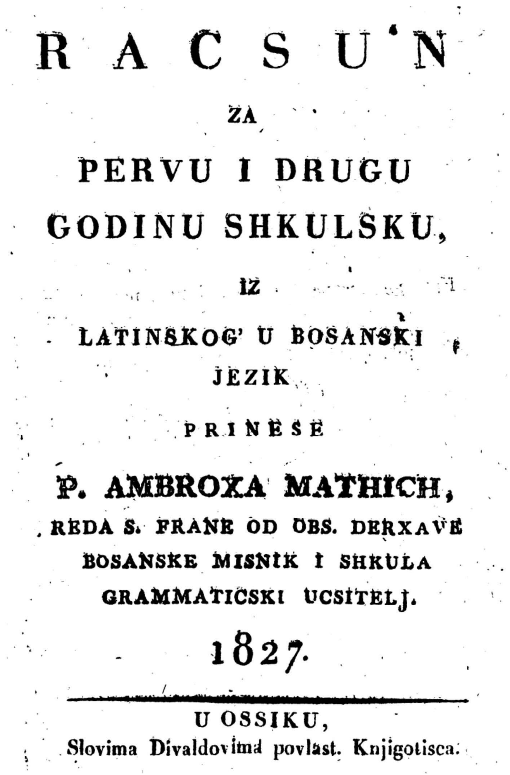
Bosnian (Štokavian)

Ambrož Matić

b. 1795 Blaževac, Pelagićevo
d. 1849 Garevac, Modriča
Author, poet, teacher in Kraljeva Sutjeska,
Franciscan friar
Studies in philosophy and theology
in Slavonska Požega
Latin textbook: Knjižica ručna 1832
(Croatian Wikipedia)

Račun
Osijek: Divald 1827
Preface dated 1827-01-04

120 p.
D: data.onb.ac.at/rec/AC10106032
D/L: Wien ÖNB
S/V: Ptičar, Adela: Prvi hrvatski računski priručnici. In: Rasprave, časopis instituta za hrvatski jezik i jesikoslovlje 30 (2004) 173–179 (hrcak.srce.hr/9473)


RACSUN
ZA
PERVU I DRUGU
GODINU SHKULSKU,
IZ
LATINSKOG' U BOSANSKI
JEZIK
PRINESE
P. AMBROXA MATHICH,
REDA S. FRANE OD OBS. DERXAVE
BOSANSKE MISNIK I SHKULA
GRAMMATICSKI UCSITELJ.
1827.
U OSSIKU,
Slovima Divaldovima povlast. Knjigotisca.

Bosnian

Ambrož Matić

Račun
Osijek: Divald 1827

Translation of the title page

Arithmetic
for
the first and second
school year,
from
the Latin into the Bosnian
language
translated it
friar Ambrož Matić,
order of St. Francis of the observant branch
Bosnian missionary and
grammar school teacher

1827
In Osijek,
printed by [literally: *with the types of*]
Divald's privileged printing house.

Ivan Martin Divald (1743–1806)
since 1775 privileged printer in Osijek

Serbian (Štokavian)

Vasilije Damjanović

b. 1734 Sombor (Serbia, prov. Vojvodina, at the Hungarian border)
d. 1792 Sombor
Prot. high school Bratislava
Student in Venezia
Senator in Sombor

Novaja serbskaja Arifmetika
Venezia 1767

368 p.
D: elibrary.matf.bg.ac.rs
L: Novi Sad, L of Matica Srpska
S/V: Pejović, Nadežda: Digitization of math. textbooks. In: Pregled Nacionalni centar za digitalizaciju (Overview NCD) 12 (2008) 55–64, ncd.org.rs;
Karp/Schubring: Handbook on the history of mathematics education. 2014, p. 149


Новаѧ
Сербскаѧ
Аріѳметіка
или
Простое наставленіе къ Хесапу
Изъ разныхъ Книгъ собрано, новыми примѣры кратчайшимъ образомъ изяснено, и къ употребленію Сербскіѧ учащіѧсѧ юности издано
отъ
Василіѧ Дамѧновича.
Въ Млеткахъ 1767.

Serbian

Vasilije Damjanović

Novaja serbskaja Arifmetika
Venezia 1767

Translation of the title page

New
Serbian
arithmetic
or
simple introduction into calculating
compiled from various books,
with new examples
briefly explained for teaching,
and for the use
of the participating Serbian young people
published
by
Vasilije Damjanović

In Venezia 1767

hesap (from Turkish *hesap*, Arabic *ḥisāb*) ‘arithmetic, calculation’

No information about the printer

Bulgarian

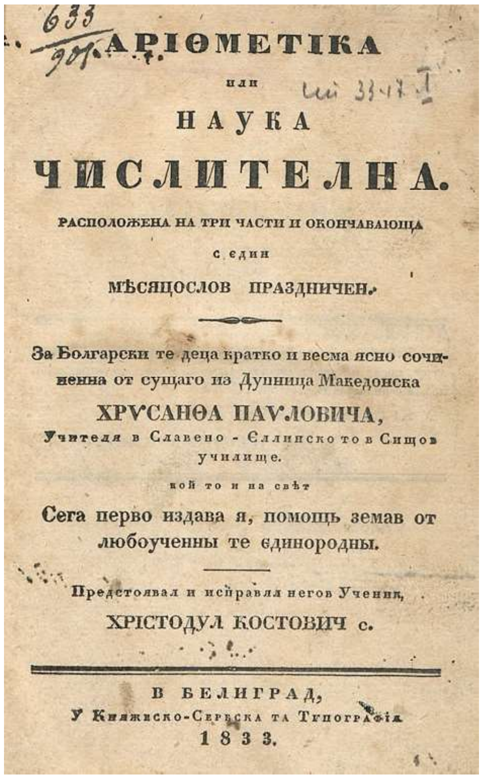
Ḥristaki Pavlovič Georgiev

b. ca. 1804 Dupnica (S Sofia)
d. 1848 (cholera) Svištov (on the Danube)
Teacher and author of school books
Education: Rila Monastery, Melnik, Ser
1834–1848 Teacher in Svištov

Arifmetika ili nauka čislitelna
Beograd: Princely Serbian
Printing House 1833

72 p. arithmetic, 46 p. calendar
D: digilib.nationallibrary.bg:8082/show-sk?id=19; dl.wdl.org/12879/service/12879.pdf
L: Bulgaria NL, Bulg. Acad. of Sciences
S/V: Ganĉev, Ivan: Matematičeskite znaniâ u nas do 1878 g. In: Bulgarski matematici. Sofia 1987, 5–15, esp. 8–9
Institute of Mathematics and Informatics (Muzei matematikata i informatikata v bulgaria) mmib.math.bas.bg/?page_id=378


Христаки Павлович


АРIѲМЕТІКА
или
НАУКА
ЧИСЛИТЕЛНА.
РАСПОЛОЖЕНА НА ТРИ ЧАСТИ И ОКОНЧАВАЮЩА
С ЕДИН
МѢСЯЦОСЛОВ ПРАЗДНИЧЕН.
За Болгарски те деца кратко и весма ясно сочинена от сущаго из Дупница Македонска
ХРУСАНѲА ПАУЛОВИЧА,
Учителя в Славено - Еллинско то в Сищов училище.
кой то и на свѣт
Сега перво издава я, помощь земав от любоученны те единородны.
Предстоявал и исправял негов Ученик,
ХРІСТОДУЛ КОСТОВИЧ с.
В БЕЛИГРАД,
У Княжеско-Србска та Типографіа
1833.

Bulgarian

Ḥristaki Pavlovič Georgiev

Arifmetika ili nauka čislitelna
Beograd: Princely Serbian
Printing House 1833

Translation of the title page

Ḥristodul Kostovič Sičan-Nikolov
b. 1808 Samokov; d. 1889 Samokov
Teacher and author of textbooks, e.g.
Bolgarska Aritmetika, Bucureşti 1845
(dl.wdl.org/4123/service/4123.pdf)

Arithmetic
or
the science of numbers.
Arranged in three parts and ending
with a
monthly calendar of the holidays.

For the Bulgarian children, briefly and very clearly composed by a true native from Dupnica
Ḥristaki Pavlović,
teacher at the Slavic-Greek school
in Svištov
who is in the world
now the first to publish it taking help
from benevolent compatriots.

His student Ḥristodul Kostović
represented him and corrected it.

In Beograd,
at the Princely Serbian Printing House
1833

Elijah Mizrahi and his "Book of Number", Constantinople, the beginning of the 16th century

Stela Segev

Herzog College, Jerusalem, Israel; stela.segev@gmail.com

Abstract

Most arithmetic books written in Europe between the 13th and 16th centuries were textbooks for the so-called "Abbacus schools[1]". They were written in the local (vernacular) languages (not Latin), and their orientation was practical and intended to train merchants. Mizrahi's book is a different one. It can be placed on the border between the mathematics of the Abbacus schools and the mathematics taught in Europe at the universities. Its content is broader, includes chapters not usually found in practical books, and the material is presented differently.

This paper focuses on Mizrahi's work, highlighting its distinctive features and discussing his approach to reasoning and proof through selected examples.

Introduction

The Jewish community in Constantinople at the end of the 15th century and the beginning of the 16th century was large and diverse. After the Turkish occupation in 1453 and after the expulsion of the Jews from Spain in 1492, Constantinople became a melting pot of diverse Jewish identities.

Romaniote Jews (originating from the Byzantine Empire), Karaites[2], exiled Jews from the Iberian Peninsula, and Jews of European origin coexisted, contributing to a rich mosaic of cultural and religious practices. (Härtel, 2024)

This is the environment in which Elijah Mizrahi (c. 1450-1526) grew up and achieved significant achievements in several fields: He was, first of all, the leading rabbi and a halakhic authority not only for the Jews of Constantinople/ Istanbul but for all the Jews in the Ottoman Empire. He also held public positions and represented the Jewish community before the Ottoman Empire authorities. Furthermore, Mizrahi's intellectual pursuits were broad and diverse. In addition to his mastery of religious texts, he engaged deeply with secular subjects such as mathematics, astronomy, and music.

[1] Abbacus schools taught how to perform calculation on paper and with the abacus – reckoning board.

[2] Karaite Judaism is a Jewish religious movement characterized by the recognition of the written Tanakh alone as its supreme authority (without need for any additional Oral Law or explanation).

Jewish mathematicians in Constantinople

In the late 15th century, the Jewish community of Constantinople boasted a notable group of scholars with a strong interest in mathematics. Among them, Mordecai ben Eliezer Comtino (1402-1482) stood out as one of the most prominent figures. Comtino was renowned not only for his expertise in the Bible and Talmud but also for his extensive knowledge of sciences. He was dedicated to disseminating knowledge to a broad audience, including Jews from diverse communities and Christians. As part of his scholarly pursuits, Comtino authored several scientific works, including a mathematical treatise titled "The Book of Calculation and Measurement." (Eisenmann, 2016)

Another significant scholar of this period was Caleb Afendopolo (1464-1523), a Karaite Jew who studied under Comtino's tutelage. He wrote an extensive commentary on Nicomachus' "Introduction to Arithmetic." (Langermann, 2011)

Elijah Mizrahi was also a disciple of Comtino. He wrote several works in mathematics and astronomy. Unlike Comtino and Afendopolo, Mizrahi not only provided commentary on earlier works but also wrote in-depth texts that included explanations and proofs for all the theorems presented. Mizrahi wrote two works on mathematical subjects: a commentary on the Elements of Euclid (lost) and "The Book of Number," which is the topic of this article.

"Sefer ha-Mispar" (The Book of Number)


ספר המספר
להחכם האלהי מוהר״ר
אליה המזרחי ז״ל
בקוסטנטינא
שולטאן שולימאן

"Sefer ha-Mispar" -The Book of Number is a vast arithmetic treatise (200 pages approx.). It was published in Constantinople in 1534 posthumously by Mizrahi's son. Some years later, an abridged edition with Latin annotations was printed in Basel[1]. The book continued to generate interest into the 19th century, with the abridged version reprinted and scholars engaging with and writing about it[2].

The topics covered in the book are not very different from those of other arithmetic books of the period. It consists of three "articles" (parts) dealing with arithmetic operations on integer numbers (written in the positional decimal system), fractions, and sexagesimal fractions. It also includes a chapter on square and cubic roots and proportions and a chapter containing 99 arithmetic and geometric problems.

[1] Mizrahi, E.; Münster, S.; Schreckenfuchs, E. O. (1546).

[2] Wertheim, G. (1896), Steinschneider, M. (1866).

The book's uniqueness is revealed in the many algorithms presented, especially how they are explained. He also accords special attention to verification techniques.

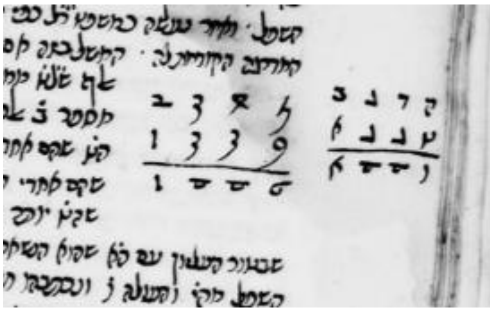
Many of the algorithms presented in his work were known by earlier Hebrew mathematicians, such as Ibn Ezra's "Book of Number" and Comtino's "Book of Calculation and Measurement," but these authors presented them without justification. Unlike his predecessors, Mizrahi gives proof for each method presented.

Mizrahi often uses Euclidean-style proof methods. In these cases, the proof includes two steps:

a. In the first step, Mizrahi presents lemmas and justifies them. He often indicates their sources, such as Euclid’s Elements or Nicomachus’ Arithmetic.
b. In the second step, Mizrahi proves the main argument relying on the previous lemmas.
c. Proofs in this style appear in almost all chapters (except the chapter on word problems).

A note on Mizrahi's way of writing the numbers

Beginning in the 12th century, Jewish mathematicians wrote numbers using the positional decimal system. Ibn Ezra was the first to use this method, but he used Hebrew letters (the first nine letters of the Hebrew alphabet and zero) and not Hindu-Arabic numerals.



Mizrahi (1515) f.24b

In the 15th-16th century, numbers were still written using both the Hebrew alphabet and Hindu-Arabic numerals, and Elijah Mizrahi also practiced this.

Example 1 – "The thirds Method"

In the chapter on the multiplication of integers, Mizrahi adds a considerable section on oral multiplication methods after the algorithms that require writing. "The thirds method" is one of them. It is an oral method to calculate the square of an integer. This is not Mizrahi's original method. It can be found in several other Hebrew treatises dealing with arithmetic operations[1]. The fact that he presents proof is remarkable (mainly because such proof has not been found until now in other documents).

The method is presented verbally as it was customary at that time. It includes two cases:

a. Calculating the square of a number that is a multiple of 3.
b. Calculating the square of a number that is not a multiple of 3.

[1] See for example: Ibn Ezra, Book of the Number; M. Comtino, The Book of Calculation and Measurement; and more.

Below is the general formulation of the method for the first case, together with a numerical example (Mizrahi, 1534, p. 25):

> Another way to multiply a [two-digit] number by itself: if it has a third, take the third, multiply it by itself, and raise it one rank higher than its rank. Then subtract from it the third's square, and the remainder is the product of this number by itself [the square of the number].
> For example, if we want to multiply 24 by itself, we take one-third of it: 8. Multiply it by itself: 64. We raise it one rank higher: 640. Then subtract 64 from it, and what remains is 576. This is the square of 24.

The calculation would be written like this in today's algebraic writing:

$$x^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x\right)^2$$

If you want to calculate, for example, 24 squared:

$$24^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 24\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot 24\right)^2 = 10 \cdot 8^2 - 8^2 = 640 - 64 = 576$$

After the "Thirds' Method," Mizrahi presents similar methods like the "Fifths' Method," "Sevenths' Method," and more:

- Thirds method $x^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x\right)^2$
- Fourths' method $x^2 = 10 \cdot \left(\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2\right) + \left(\frac{x}{4}\right)^2$
- Fifths' method $x^2 = \frac{5}{2} \cdot 10 \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^2$
- Sevens' method $x^2 = 10 \cdot 5 \cdot \left(\frac{x}{7}\right)^2 - \left(\frac{x}{7}\right)^2$

x is a multiple of 3, 4, 5, 7

Mizrahi's proof of the "Thirds method" consists of three steps.

Step 1: First, he mentions the equality $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ as a theorem from Euclid, book VIII (theorem 11), and uses it to deduce the following: $\frac{\left(x/_3\right)^2}{x^2} = \left(\frac{x/_3}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Step 2: From the last equality, he gets: $x^2 = 9 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2$.

Step 3: which is the same as $x^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x\right)^2$.

The second case of the Thirds' method presents ways to calculate the square of numbers that are not multiples of 3. Mizrahi presents two methods: for numbers greater by one than a multiple of 3 and for numbers smaller by one than a multiple of 3. Here are the methods in today's algebraic notation (x is a multiple of 3):

$$(x+1)^2 = x^2 + \big(x + (x+1)\big)$$
$$(x-1)^2 = x^2 - \big(x + (x-1)\big)$$

Instead of proving these identities, Mizrahi sets himself up for a much more ambitious task. He will prove the following identity, which can be applied in calculations using the Thirds method and other similar methods, such as the Fifths or the Sevenths method.

In the following, x+y is the number we want to calculate its square, and y represents the remainder of dividing x by some integer k (k=3 in the Thirds method, k=5 in the Fifth method, and so on).

$(x + y)^2 = x^2 + y(x + (x + y))$

If we want to calculate 25^2 using the Thirds method, we will put in the formula above x=24 and y=1. To calculate 24^2, we will use the previous formula for numbers that are a multiple of three.

Mizrahi's proof of the general formula above is the following sequence of identities, each based on Euclid's Book II proposition. He quotes Euclid, indicating precisely the book and proposition he refers to.

1. $(x + y)^2 - x^2 = ((x + y) + x) \cdot y = (2x + y) \cdot y$ Euclid II, 5
2. $(x + y) \cdot x = x^2 + yx$ Euclid II, 3
3. $(x + y)^2 = (x + y)x + y(x + y)$ Euclid II, 3
4. $(x + y)^2 = x^2 + yx + y(x + y) = x^2 + y(x + (x + y))$ Euclid II, 6

Example 2 – Multiplication of simple fractions

In the chapter on simple fractions, the multiplication operation is discussed first. Mizrahi presents the algorithm for multiplying fractions that is still used today: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$, and right after that, he gives examples.

The proof for this algorithm, at the end of the chapter, is based on five lemmas:

1. Expanding/simplifying fractions. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, $\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$
2. Multiplying a fraction by another is the same as calculating a fraction of the other. (Calculating, for example, two-thirds of a number is like multiplying the number by two-thirds.)
3. If ab = c, then $b = \frac{1}{a} \cdot c$.
4. calculating a fraction from another is equivalent to $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}\cdot c}{d}$.
5. Multiplying an integer by a fraction $a \times \frac{b}{c} = \frac{a\times b}{c}$

Mizrahi himself writes that the first lemma is proposition 15 from Euclid's Elements, Book V, while the third is based on Nicomachus[1]. He also explains and clarifies all lemmas with numerical examples.

[1] Nicomachus (of Gerasa). (2nd century C.E.). Introduction to Arithmetic

After these preparations, he proves the algorithm for multiplying fractions. The proof is not general; it is explained using a numerical example. On the other hand, the considerations are general, and one can easily convert them to a general proof. The idea for the multiplication of fraction algorithm is: To calculate a fraction $\frac{a}{b}$ from the quantity K, two steps must be performed:

a. Divide the quantity K into b parts.
b. Multiply the result by a.

Below, we can see Mizrahi's steps in the proof of the algorithm for multiplying fractions. Each step relies on one of the lemmas presented earlier:

Mizrahi's proof for $\frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{3\times2}{4\times9}$

i.	Multiplying $\frac{3}{4} \times \frac{2}{9}$ is the same as calculating $\frac{3}{4}$ from $\frac{2}{9}$.	lemma 2
ii.	Calculate a quarter from $\frac{2}{9}$, this is $\frac{2:4}{9}$.	lemma 4
	2:4 is not integer, so we'll expand the fraction by 4,	
	and get $\frac{2}{9\times4}$	lemma 1
iii.	We multiply by 3 (to get 3 quarters) $3 \times \frac{2}{9\times4} = \frac{3\times2}{9\times4}$	lemma 5
		q.e.d.

Summary and conclusions

In this short article, an arithmetic book from the beginning of the 16th century that is less known but contains many interesting contents, some of them unique, was presented.

We have seen examples of Euclidean-style proofs of arithmetical propositions. Additional articles should address other important topics in the book, such as progressions, proportions, or word problems.

References

Eisenmann, E. (2016). Scientific Aspects in Comtino's Interpretation of "The Guide for the Perplexed." Peamim 148, 95-113 (Hebrew).

Härtel, S. (2024). A Question of Competition? How to Deal with Inner-Jewish Diversity in Cities of the Ottoman Empire at the Turn of the 16th Century, Hamsa [Online], p. 8 | 2022, Online since 14 September 2022, connection on 24 January 2024. URL: http://journals.openedition.org/hamsa/2775; DOI: https://doi.org/10.4000/hamsa.2775

Langermann, Y. T. (2011). Science in the Jewish communities of the Byzantine cultural orbit: new perspectives. In Science in Medieval Jewish Cultures (pp. 438-453).

Mizrahi, E. (1515). *Sefer ha-Mispar*, The National Library of Israel. "Ktiv" Project, The National Library of Israel (manuscript).

Mizrahi, E. (1534). *Sefer ha-Mispar le-ha-Ḥaḵam ha-Elohi Eliya ha-Mizraḥi*:
ספר המספר להחכם האלהי מוהר״ר אליה המזרחי, קוסטנטינא : דפוס שונצין ב׳א׳ר׳ץ׳ [רצ״ג].

Mizrahi, E.; Münster, S.; Schreckenfuchs, E. O. (1546). Ḳitsur ha-melekhet ha-mispar: Compendium arithmetices: decerptum ex libro Arithmeticarum institutionum magistri Eliae Orientalis, Basileae (repr. 1971, Jerusalem).

Segev, S. (2010). *The Book of the Number by Elijah Mizrahi: A Textbook from the 15th Century*. Ph.D. thesis. the Hebrew University of Jerusalem, (Hebrew).

Segev, S. (2023). Simple fractions – not so simple! Insights from a study of Hebrew mathematical texts of the 12th-16th centuries. Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13), Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest, Jul 2023, Budapest, Hungary. hal-04422642

Steinschneider, M. (1866). Brani dell' Aritmetica d' Elia Misrachi, Lettera IV a Don B. Boncompani, Roma, 43-67.

Wertheim, G. (1896). Die Arithmetik des Elia Misrachi. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn.

Stela Segev

Über die Anfänge der Dezimalbruchrechnung in Europa[1]

von Stefan Deschauer

1 Einleitung

Bereits die Sumerer (3. Jahrtausend v. Chr.) verfügten über ein Positionssystem (Stellenwertsystem)[2]. Es handelte sich um ein Sexagesimalsystem (Sechzigersystem), das sich nicht nur auf die ganzen Zahlen, sondern auch auf die Brüche erstreckte. Das Rechnen im Sexagesimalsystem, insbesondere auch mit Sexagesimalbrüchen, war vor allem für die Astronomie bedeutsam, später auch bei den Griechen, Muslimen und bei den Westeuropäern bis zur frühen Neuzeit. Bis heute haben sich deutliche Spuren des Sechzigersystems in unserer Zeit- und Winkelmessung erhalten.
In der frühen Neuzeit gelangten allmählich Kenntnisse über das dekadische Positionssystem nach Europa. Das aus Indien stammende System wurde meist mit arabischen Ziffern überliefert, im byzantinischen Raum aber mit Buchstabenziffern. Eigentlich lag es nun nahe, in Analogie zu den Sexagesimalbrüchen im Sechzigersystem Dezimalbrüche im Dezimalsystem zu entwickeln. Dieser Weg verlief aber nicht geradlinig – ein fertiges Konzept geriet in Vergessenheit oder wurde überhaupt nicht bekannt (s. Abschnitt **3**).
Ein weiterer Anstoß für eine Beschäftigung mit Dezimalen (Ziffern, die die Anzahl der Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. angeben) war die Skalierung von Visierruten (s. Abschnitt **6**). Auch hier lag das Dezimalbruchkonzept ganz nahe.
Das Thema des hier vorgelegten Aufsatzes, der sich aus Gründen des Umfangs auf die wichtigsten Stationen beschränken muss, liegt dem Verfasser auch insofern am Herzen, als er selbst einen kleinen Beitrag zur Erforschung der Geschichte der Dezimalbrüche leisten konnte.

2 al-Kāshī

Die Chinesen verwendeten bereits im 2. Jahrhundert und im 3. Jahrhundert v. Chr. spezielle Dezimalbrüche als Maßzahlen für Längen bzw. Gewichte. Ein allgemeines Dezimalkonzept, das sie hätten weitergeben können, haben sie aber nicht erreicht.[3] Anders verlief es, allerdings wesentlich später, im islamischen Raum.

---

[1] Aktualisierte Fassung mit veränderter Schwerpunktsetzung gegenüber
Deschauer, Stefan: Ein Beitrag zur Geschichte der Dezimalbrüche in Europa. In: Jahrbuch des Adam-Ries-Bundes Band 11 (hrsg. v. Vorstand des Adam-Ries-Bundes e. V.). Annaberg-Buchholz 2020, S. 33–45

[2] Ein Positionssystem bedarf eines positionellen Leerzeichens – vgl. unsere Null. Dieses Leerzeichen wurde durch einen kleinen Abstand, später durch ein eigenes Symbol gekennzeichnet.

[3] Vgl. Juschkewitsch, Adolf Pawlowitsch: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig 1964, S. 21–23

Im Jahre 1427 schrieb Jamshīd al-Kāshī[4], Direktor der Sternwarte in Samarkand[5], ein bemerkenswertes Werk, zu Deutsch *Der Schlüssel zur Arithmetik*[6]. Darin erklärt er, dass er analog zur auf- und absteigenden Kette der Sechzigerreihe auch eine absteigende Kette zu den Zahlen im dekadischen Stellenwertsystem, d. h. die Dezimalbrüche, entwickelt habe. Rechnungen mit diesen Dezimalbrüchen führt er gelegentlich vor, wobei sein Zeichen zur Trennung von ganzen Zahlen und Dezimalen variiert. (Unter anderem verwendet er den Trennungsstrich.) Die neuen Brüche verbreiteten sich offenbar rasch in der Türkei, teilweise auch in den an die Osmanen gefallenen Gebieten des byzantinischen Reichs, aber auch in Konstantinopel vor seiner Eroberung.

3 Saloniki und Konstantinopel

In einer byzantinischen Handschrift, die zu einem Zeitpunkt in Saloniki geschrieben wurde, als diese Stadt bereits unter osmanischer Herrschaft stand (ab 1430), heißt es:
„Die Türken führen die Multiplikationen und Divisionen mit Brüchen nach einem besonderen Rechenverfahren durch. Sie führten (ihre) Brüche ein, seit sie hier in unserem Land regieren.“[7]
Das erste Beispiel zur Multiplikation ist folgendes:
$153\frac{1}{2}$ Maß Salz zu $16\frac{1}{4}$ Aspra das Maß (1 Aspron = 8 Toresia)[8].
Der Autor schreibt, dass man 153|5 anstelle von $153\frac{1}{2}$ und 16|25 anstelle von $16\frac{1}{4}$ setzen soll. Vom Produkt seien dann drei Stellen abzustreichen. Der Salzpreis betrage nun 2494 Aspra – auf den Bruchteil $\frac{3}{8}$ Aspra = 3 Turesia geht der Autor nur in einem (hier nicht dargestellten) Diagramm ein. Außerdem fehlt im Text eine Begründung für das Verfahren.

Schreiber A hat den weitaus größten Teil des Kodex verfasst, und zwar im Jahr 1436 in Konstantinopel, ca. 17 Jahre vor der türkischen Eroberung.
Bei ihm findet man folgende eindrucksvolle Beispiele[9]:

---

[4] Er wurde ca. 1380 Kāšān geboren und lebte bis 1429 in Samarkand.
[5] damals ein geistig-kultureller Mittelpunkt des islamischen Ostens, gehört heute zu Usbekistan
[6] Es gibt leider keine Edition in einer westlichen Sprache.
[7] Hunger, Herbert / Vogel, Kurt: Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts. 100 Aufgaben aus dem Codex Vindobonensis phil. gr. 65. Text, Übersetzung, Kommentar. Wien 1963 [fol. 130^{v}, Kap.136]. Der Kodex wurde von zwei anonymen Schreibern verfasst, Schreiber A und Schreiber B genannt. Das Werk von Hunger / Vogel betrifft nur den Teil von Schreiber B.
[8] Beides sind byzantinische Silbermünzen. Sie entsprechen wohl den Kukkia und Turnesia im Text von Schreiber A, auf den wir im Folgenden noch eingehen werden.
[9] Vgl. Deschauer, Stefan: Die große Arithmetik aus dem Codex Vindobonensis phil. gr. 65. Eine anonyme Algorismusschrift aus der Endzeit des Byzantinischen Reiches. Wien 2014

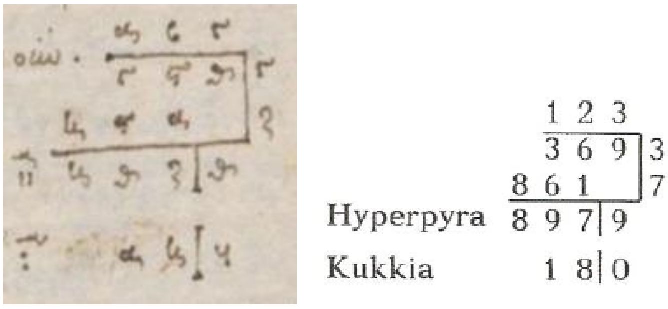


Abb. 1: Byzantinische Dezimalbruchrechnung (Cod. Vind. phil. gr. 65, fol. 41^r, Kap. 72).

Hier wird ein alphanumerisches dekadisches Positionssystem verwendet: α = 1, β = 2, Γ = 3, δ = 4, ε = 5, ς = 6, ζ = 7, η = 8, ϑ = 9, ɥ = 0

Wie viel ergeben 123 Florin (Gulden), wenn
(1) 1 Florin = 7 Hyperpyra 6 Kukkia und 1 Hyperpyron = 20 Kukkia
sind? (Hyperpyron und Kukki sind byzantinische Silbermünzen. Im Diagramm werden Hyperpyra und Kukkia mit || bzw. mit : bezeichnet.
Der Autor hätte folgendermaßen rechnen können:
1 Florin = 146 Kukkia, 123 Florin = 17958 Kukkia = 897 Hyperpyra 18 Kukkia oder
123 Florin = 861 Hyperpyra 738 Kukkia = 897 Hyperpyra 18 Kukkia oder
1 Florin = $7\frac{3}{10}$ Hyperpyra, 123 Florin = $897\frac{9}{10}$ Hyperpyra = 897 Hyperpyra 18 Kukkia
Aber er nutzt für seine Rechnung Dezimalbrüche, und zwar geht er von 10 Florin aus:
10 Florin = 70 Hyperpyra 60 Kukkia = 73 Hyperpyra. Nun multipliziert er 123 mit 73 Hyperpyra[10] und erhält 8979 Hyperpyra. Da er aber mit Zehnern von Florinen multipliziert hat, streicht er eine Stelle ab, hier 9 Hyperpyra, die er in 180 Kukkia umwandelt. Erneutes Abstreichen der letzten Stelle führt zum Ergebnis 897 Hyperpyra 18 Kukkia.

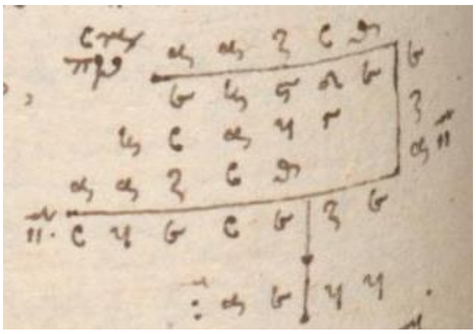


Abb. 2: Byzantinische Dezimalbruchrechnung (Cod. Vind. phil. gr. 65, fol. 42^v, Kap. 76).

[10] Hier wird der seitliche Faktor in umgekehrter Ziffernreihenfolge geschrieben – eine Variante zu unserer heutigen schriftlichen Multiplikation.

1 Stück Kleinvieh (oder 1 Schaf: πρόβατον) kostet 1 Hyperpyron 15 Kukkia. Was kosten 11729 Stück? (Es gilt wieder: 1 Hyperpyron = 20 Kukkia)
Der Autor erläutert, dass ein Ansatz mit 10 Stück Kleinvieh nicht geeignet sei, denn der Preis dafür betrage 17 Hyperpyra 10 Kukkia, lasse sich also nicht in Hyperpyra allein ausdrücken. Daher setzt er mit 100 Stück Kleinvieh an, die 175 Hyperpyra kosten.
Die nachfolgende Rechnung ist dem Diagramm zu entnehmen:
$11729 \cdot 175 = 2052575 \;\rightarrow\; 20525 | 75$, 75 Hyperpyra = 1500 Kukkia → 15|00 Kukkia.
Ergebnis: 11729 Stück Kleinvieh kosten 20525 Hyperpyra 15 Kukkia.

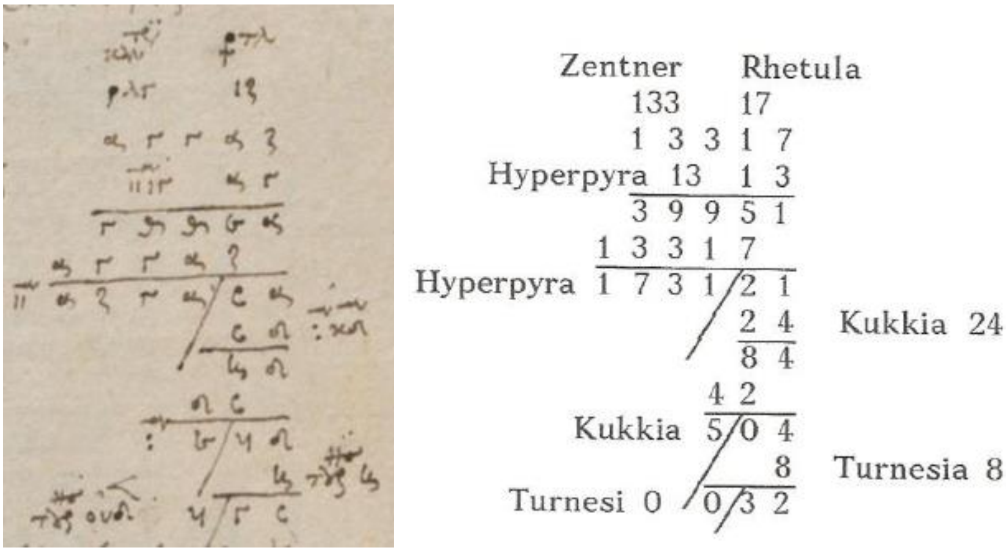


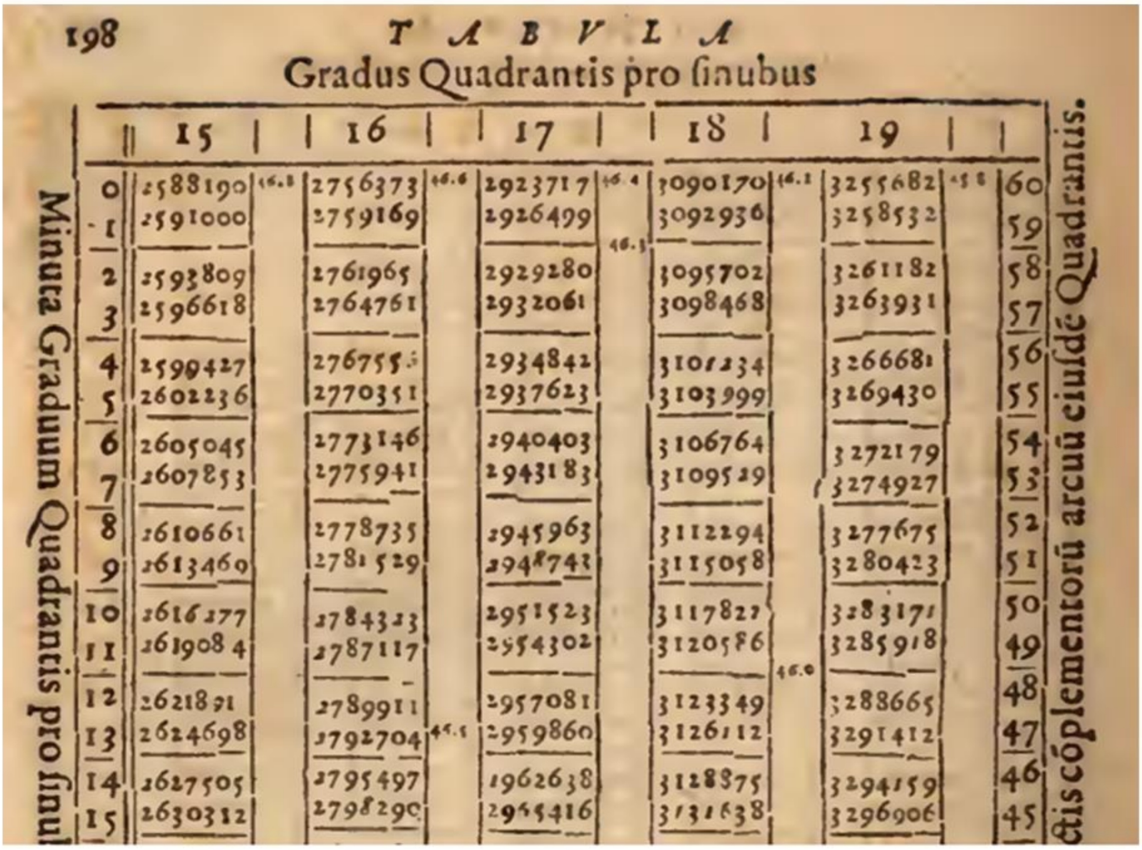
Abb. 3: Byzantinische Dezimalbruchrechnung (Cod. Vind. phil. gr. 65, fol. 43^{r}, Kap. 78).

Eine Ware wiegt 133 Zentner 17 Rhetula (1 Zentner = 100 Rhetula). Der Zentner kostete 13 große Hyperpyra (oder Goldhyperpyra), wobei 1 großes Hyperpyron = 24 Kukkia und 1 Kukki = 8 Turnesia (eine Kupfermünze) gilt.
Wie viele große Hyperpyra kostet die Ware?
Zur Lösung dieser Aufgabe vergleiche man das Diagramm.
In der 1. und 2. Zeile stehen Zentner und Rhetula, darunter das nur in Rhetula (13317) ausgedrückte Gewicht. In der 4. Zeile findet sich der Preis für 1 Zentner (13 Hyperpyra) und gesondert noch einmal die Zahl 13, mit der nun 13317 multipliziert wird.[11] Das Ergebnis 173121 (7. Zeile) ist die Maßzahl für den 100-fachen Preis in Goldhyperpyra von 133 Zentnern 17 Rhetula. Deshalb müssen zwei Stellen, 21, abgestrichen werden. Diese 21 werden nun mit 24 Kukkia

[11] Hier verwendet der Autor eine andere Multiplikationsmethode, die in der frühen Neuzeit, z. B. bei Ries, üblich war und heute noch in romanischen Ländern verbreitet ist.

multipliziert, dem Wert eines Goldhyperpyrons. Es ergeben sich 504 Kukkia (11. Zeile). Wiederum müssen 2 Stellen abgestrichen werden. Es verbleibt 4, was mit 8 Turnesia zu multiplizieren ist. Das Abstreichen von zwei Stellen bei 32 (13. Zeile) führt allerdings nur zu einem Bruchteil eines Turnesi, doch der Autor bemüht sich, diesen Bruchteil näher zu bestimmen, was hier nicht weiterverfolgt werden soll.
Mit unserer heutigen Dezimalbruchschreibweise hätten wir insgesamt so gerechnet: $133{,}17 \cdot 13$ Goldhyperpyra = 1731,21 Goldhyperpyra; 0,21 Goldhyperpyra = 5,04 Kukkia; 0,04 Kukkia = 0,32 Turnesi; 133 Zentner 17 Rhetula kosten also 1731 Goldhyperpyra 5 Kukkia 0,32 Turnesi.
Die drei letzten Beispiele zeigen einen eleganten, geradezu virtuosen Umgang mit Dezimalbrüchen – auch auf Größen bezogen, die nicht dezimal strukturiert sind. Das Dezimalbruchkonzept war also damals (ca. 1430 bzw. 1436) schon vollständig erarbeitet. Leider geriet es in Vergessenheit oder wurde überhaupt nicht bekannt.

4 Bianchini[12] und Clavius[13]



198 TABVLA

Gradus Quadrantis pro sinubus

Minuta Graduum Quadrantis pro sinu[illegible]

	15	16	17	18	19	
0	2588190	2756373	2923717	3090170	3255682	60
1	2591000	2759169	2926499	3092936	3258532	59
2	2593809	2761965	2929280	3095702	3261182	58
3	2596618	2764761	2932061	3098468	3263931	57
4	2599427	276755[illegible]	2934842	3101234	3266681	56
5	2602236	2770351	2937623	3103999	3269430	55
6	2605045	2773146	2940403	3106764	3272179	54
7	2607853	2775941	2943183	3109529	3274927	53
8	2610661	2778735	2945963	3112294	3277675	52
9	2613460	2781529	2948743	3115058	3280423	51
10	2616277	2784323	2951523	3117821	3283171	50
11	2619084	2787117	2954302	3120586	3285918	49
12	2621891	2789911	2957081	3123349	3288665	48
13	2624698	2792704	2959860	3126112	3291412	47
14	2627505	2795497	1962638	3128875	3294159	46
15	2630312	2798290	29[illegible]5416	3131638	3296906	45

[illegible]ctis cōplementorū arcuū eiusdē Quadrantis.

Abb. 4: Clavius, Astrolabium, Rom 1593, S. 198 (z. B. in der BSB, 4 Math.a.69)

[12] Giovanni Bianchini (* 1410; † nach 1469), Astronom in Ferrara
[13] Christophorus Clavius SJ (* 25. März 1538, möglicherweise als *Christoph Clau* oder *Schlüssel* in oder bei Bamberg; † 6. Februar 1612 in Rom)

Auf dieser Seite der Tafel werden die Sinus von 15^0 bis 19^0 zusammen mit $0^{/}$ bis $15^{/}$ betrachtet. Es soll der Wert von sin $16^0 12^{/} 40^{//}$ bestimmt werden. Es gelten laut Tabelle sin $16^0 12^{/} \approx 2789911$ und sin $16^0 13^{/} \approx 2792704$. Daher ist $1^{/} \approx 2793$, $40^{//} \approx 1862$, sin $16^0 12^{/} 40^{//} \approx 2789911 + 1862 = 2701773$. Rechts von den beiden Tabellenwerten für sin $16^0 12^{/}$ und sin $16^0 13^{/}$ steht der Dezimalbruch 46.5, der den Sinuswert von $16^0 12^{/} s^{//}$ für einen geeignet kleinen Bereich mit akzeptabler Näherung linear interpoliert – vgl. in unserem Fall $s = 40$: $40 \cdot 46.5 = 1860$ (nahe bei obigem 1862).

Der kanadische Mathematikhistoriker Glen van Brummelen hat in den Interpolationsspalten einer astronomischen Tabelle[14] von Bianchini aus den 40-er Jahren des 15. Jahrhunderts einen Dezimalpunkt entdeckt.[15] Bisher galt die oben abgebildete Sinus-Tafel des Clavius (1593) als frühester Nachweis für einen solchen Dezimalpunkt. Der Aufsatz von van Brummelen, in dem die (früheren) Dezimalbrüche von Saloniki und Konstantinopel nicht erwähnt werden, führte in der Wissenschaftspublizistik teilweise zu übertrieben sensationsnahen und auch falschen Meldungen. Hier soll ein kleiner Überblick gegeben werden.

Nature, 19.02.2024[16]
Eine Information über die Entdeckung von Glen van Brummelen – sachlich bezogen auf den Dezimalpunkt

Meldung der Trinity Western University (Kanada), 20.02.2024[17]
TWU math professor’s discovery on the origin and history of the decimal system reveals medieval mathematical genius
Danach ist aber korrekterweise nur vom Dezimalpunkt die Rede.

Klaus Taschwer, in: Der Standard, Wien 25.2.2024[18]
Mathe–Überraschung aus 1440
Das Dezimalkomma tauchte früher auf als bisher gedacht
Ohne Dezimaltrennzeichen gäbe es keine moderne Wissenschaft. Nun wurde es in einem italienischen Werk aus der Zeit um 1440 entdeckt. Es dürfte aber noch

---

[14] Biblioteka Jagiellońska Kraków, BJ 556, f. 52^v
[15] Vgl. van Brummelen, Glen: Decimal fractional numeration and the decimal point in 15th-century Italy. Historia Mathematica Vol. 66 (March 2024), pp. 1–13
[16] https://www.nature.com/articles/d41586-024-00473-2
[17] https://www.twu.ca/news-events/news/twu-math-professors-discovery-origin-and-history-decimal-system-reveals-medieval
[18] https://www.derstandard.de/story/3000000208580/das-dezimalkomma-tauchte-viel-frueher-auf-als-bisher-gedacht

ältere geben … (*Die ursprüngliche Version dieses Texts wurde aufgrund der Zuschrift eines Mathematikhistorikers am 29. Februar leicht aktualisiert: Zwei Forscher hatten bereits in den 1960er-Jahren eine Schrift publiziert, die auf eine noch ältere Verwendung schließen lässt, siehe unten. Die Redaktion*)

Manon Bischoff, in: Spektrum der Wissenschaft, 8.3.2024[19]
Die fabelhafte Welt der Mathematik: Die Erfindung der Nachkommastellen ist 150 Jahre älter als gedacht
»Ich weiß noch, wie ich mit meinem Laptop aufgeregt durch die Gänge des Wohnheims rannte und versuchte, jemanden zu finden, der noch wach war«, erzählte der Mathematikhistoriker Glen van Brummelen kürzlich dem Wissenschaftsmagazin »Nature«. »Ich rief: ›Seht euch das an, der Typ rechnet in den 1440ern mit Dezimaltrennzeichen!‹« Mit dieser Entdeckung, die er im Februar 2024 im Fachjournal »Historia Mathematica« veröffentlicht hat, schrieb van Brummelen die Geschichte der Mathematik neu …
Bisher waren Mathematikhistoriker davon ausgegangen, dass der deutsche Mathematiker Christopher Clavius im Jahr 1593 erstmals Nachkommastellen nutzte. Er hatte mit dieser Schreibweise Werte einer Sinusfunktion für verschiedene Winkel angegeben.
Die Passage, die van Brummelen „Nature“ erzählt haben soll, habe ich nicht gefunden. Meinen Hinweis auf die byzantinischen Dezimalbrüche hat die Autorin einfach nachträglich eingefügt, ohne die Widersprüche in ihrem Text zu beseitigen.

Wikipedia–Eintrag „Dezimaltrennzeichen“,
1 Entwicklung
Der frühere Text legte nahe, dass van Brummelen bei Bianchini den ersten Dezimalbruch in Europa entdeckt hätte. Mit einigen Mühen gelang es mir, den Text mit dem Hinweis auf die Dezimalbrüche von 1436 zu ergänzen.

Zu meiner Korrespondenz mit Glen van Brummelen
Meinen ersten Hinweis auf die byzantinischen Dezimalbrüche und ihre Verwendung im kaufmännischen Bereich beantwortete er nicht zufriedenstellend. Ich stieß noch einmal nach und legte ihm dar, dass bisher vor dem Jahr 1436 noch kein vergleichsweise voll ausgebildetes Dezimalbruchkonzept in Europa nachgewiesen ist.
Daraufhin eröffnete mir van Brummelen, dass er einen Enzyklopädie-Beitrag zum Thema „Dezimalbrüche“ verfassen wolle und dabei auch die byzantinischen berücksichtigen wolle. Den betreffenden Passus wolle er mir vorab zur Kommentierung vorlegen.
Damit kann ich mich zufriedengeben.

[19] https://www.spektrum.de/kolumne/das-dezimaltrennzeichen-ist-150-jahre-aelter-als-gedacht/2208417

5 Rudolff

Christoff Rudolffs *Künstliche rechnung mit der ziffer vnd mit den zalpfenningen* ... enthält auf den Seiten X 5/5v[20] eine Aufgabe zur Zinseszinsrechnung, die der Autor mithilfe von Dezimalbrüchen löst. Er schreibt:
Wenn man vom hundert zu järlichem zins geben soll 5 fl. Wieuil zins vnd zins zins ertragen 375 fl 10 Jarlang / Facit 235 fl 6 ß 20 d. mit nachlassung des aller letzten vbrigen pfennings bruchs.
*Ann[21]: * Der erst theiler ist 100. Der ander 10000 etc. Wechst eins jeden Jars per zwo nulla. Jn der Regel/100.105.375*

375	
1875	
fl. 393|75	*hauptgut vn̄ gewin deß erstn jars*
<u>196875</u>	
413|4375	*Andern*

Und so setzt der Autor fort bis zum zehnten Jahr. Hier soll nur seine Rechnung bis zum Ablauf des zweiten Jahres nachvollzogen werden.
Er rechnet schrittweise mit dem Dreisatz: 100 Gulden erbringen nach einem Jahr 5 Gulden Zinsen. Wie viel Zinsen erbringen nach einem Jahr 375 Gulden? Es sind $18\frac{3}{4}$ Gulden, aber Rudolff schreibt 1875, also unsere Dezimalzahl ohne Trennungszeichen. Das Schema 100. 105. 375 dient dazu, direkt das verzinste Kapital nach einem Jahr zu berechnen. Es ergeben sich 393,75 Gulden, wobei Rudolff die Zahl mit einem senkrechten Trennungsstrich schreibt.
Für die Berechnungen nach Ablauf des zweiten Jahrs übergeht er die Dreisatzschemata 100. 5. 393|75 und 100. 105. 393|75. Im ersten Fall erhält man 19,6875 (Gulden Zinsen, wieder ohne Trennungszeichen geschrieben), im zweiten 413,4375 (Gulden, das verzinste Kapital, mit senkrechtem Trennungsstrich). Bei den fortlaufenden Dreisatzschritten ist jeweils erneut durch 100 zu dividieren, worauf der Autor in seiner Annotation hinweist.

6 Apian

Peter Apian stellt in seinem Rechenbuch (Erstausgabe 1527[22]) auf den Seiten Q vij^r–Q viij^r eine Division „auff eyne andere art“ vor – es geht um die Aufgabe 11664 geteilt durch 48. Zunächst halbiert Apian den Teiler 48 fortgesetzt bis zur 3 und weist dem Teiler, seiner Hälfte, seinem Viertel, seinem Achtel und seinem Sechzehntel die Werte 1, 05, 025, 0125 bzw. 00625 zu. Man erkennt sofort, dass hier Dezimalbrüche ohne Kommaschreibweise vorliegen – und zwar rund 60

[20] Hier zitiert nach der Ausgabe Wien 1561. Die Erstausgabe Wien 1526, die vermutlich dieselbe Aufgabe enthält, war mir nicht zugänglich. Auch in Rudolffs *Exempelbüchlein*, z. B. in den Auflagen von 1530 (Augsburg) und 1540 (Nürnberg), findet sich die Aufgabe, allerdings in einer kryptisch verkürzten Form.
[21] Annotation (Zusatzbemerkung)
[22] Apian, Petrus: Eyn Newe vnnd wolgegründte vnderweysung aller Kaufmanß Rechnung ... Ingolstadt 1527. Nachdruck Buxheim 1995 – mit einer Einführung von W. Kaunzner

Jahre, bevor der holländische Finanzverwalter und Ingenieur Simon Stevin[23] diese Form der Brüche in West- und Mitteleuropa allgemein bekannt gemacht hat.

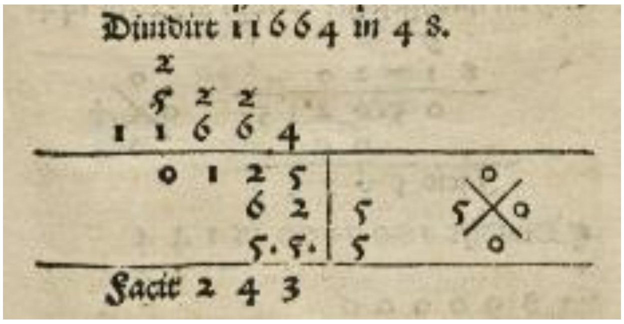


Abb. 5: Dezimalbruchschreibweise bei Apian.

Apian betrachtet die Division (mit Rest) als fortgesetzte Subtraktion mit demselben Subtrahenden. Insofern ist der Dividend der Minuend, und der Quotient gibt an, wie oft die Subtraktion durchgeführt werden kann.
Das eigentliche Divisionsschema – vgl. Abb. 5 – lässt sich folgendermaßen erklären: Von 11, der Zahl an den höchsten Stellenwerten des Dividenden, lassen sich Produkte aus den oben aufgeführten Dezimalbrüchen mit 48 subtrahieren. Man wählt jeweils das größtmögliche Produkt, also: $11-0{,}125\cdot 48=5$; $5-0{,}0625\cdot 48=2$ (Tausenderstelle); zusammen mit der Hunderterstelle des Dividenden erhält man 26: $26-0{,}5\cdot 48=2$ (Hunderterstelle); zusammen mit der Zehnerstelle des Dividenden ergibt sich 26: $26-0{,}5\cdot 48=2$ (Zehnerstelle); zusammen mit der Einerstelle des Dividenden erhält man 24: $24-0{,}5\cdot 48=0$ (Einerstelle); die unterstrichenen Dezimalzahlen werden ihrem Stellenwert entsprechend untereinandergeschrieben und addiert: 125 + 62,5 + 50 + 5 + 0,5 = 243. Ein senkrechter Strich im Diagramm spielt dabei die Rolle der Trennungsmarkierung, des heutigen Dezimalkommas.[24]

[23] Stevin, Simon: De Thiende. Leiden 1585 (übersetzt und erläutert von Helmuth Gericke und Kurt Vogel. Frankfurt a. M. 1965). Vgl. insbesondere S. 114–118.

[24] Apian führt noch weitere Beispiele zu diesem Verfahren an (Q viij^{v}, R): Es geht um Divisionen durch 144, 108 und 456. Damit erweckt er den Eindruck, das Verfahren sei nur bei „teilerreichen" Divisoren anwendbar. Das ist jedoch nicht der Fall, und natürlich ist auch die Verwendung von Dezimalbrüchen nicht zwingend. Als Beispiel soll hier einmal 18109 : 37 (= 487) nach dem Apianschen Verfahren berechnet werden. Dabei muss der gemeine Bruch, dessen Produkt mit 37 wieder größtmöglich zu wählen ist, im Zähler eine Zweierpotenz haben und im Nenner den Teiler 37. T, H, Z, E stehen für Tausender, Hunderter, Zehner bzw. Einer:
$18-\frac{16}{37}\cdot 37=2$ (T), $20-\frac{16}{37}\cdot 37=4$ (H), $41-\frac{32}{37}\cdot 37=9$ (Z), $9-\frac{8}{37}\cdot 37=1$ (Z),
$19-\frac{16}{37}\cdot 37=3$ (E), $3-\frac{3}{37}\cdot 37=0$ (E)
Die Summe aus den Produkten der Dezimalbrüche mit den zugehörigen Stellenwerten, d. h.
$\frac{16}{37}\cdot 1000+\frac{16}{37}\cdot 100+\frac{32}{37}\cdot 10+\frac{8}{37}\cdot 10+\frac{16}{37}+\frac{3}{37}$, ergibt 487.

7 Helm

Erhart Helm, Mathematiker (Geometer, Visierer) in Frankfurt a. M., ist uns im Wesentlichen nur als Autor der „Zugabe“ zum zweiten Rechenbuch von Adam Ries bekannt.[25] In seinem Teil behandelt er die Fassmessung mittels quadratischer Visierruten, die mit Quadratwurzeln zu skalieren waren.[26] Wenn der Radikand keine Quadratzahl ist, fand man beliebig gute Näherungslösungen auf folgende Weise, hier am Beispiel $\sqrt{2}$:

$\sqrt{2} = \frac{1}{10}\sqrt{200}$ mit $14 < \sqrt{200} < 15$. Damit gilt $\sqrt{2} = 1,4...$

$\sqrt{2} = \frac{1}{100}\sqrt{20000}$ mit $141 < \sqrt{20000} < 142$. Damit gilt $\sqrt{2} = 1,41...$

$\sqrt{2} = \frac{1}{1000}\sqrt{2000000}$ mit $1414 < \sqrt{2000000} < 1415$. Damit gilt $\sqrt{2} = 1,414...$

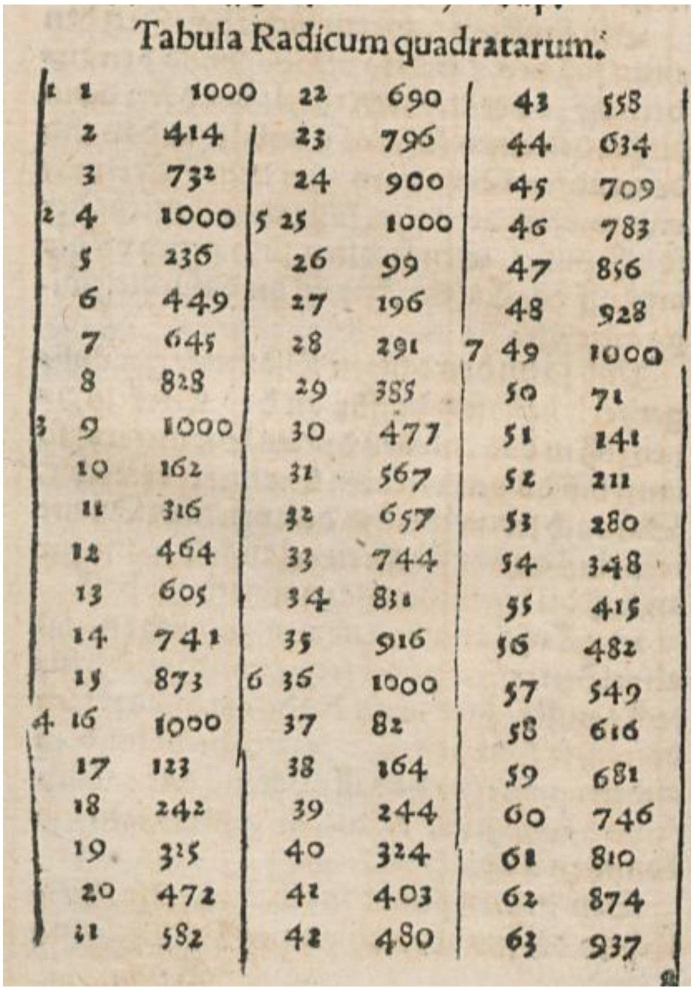
usw. Dieses Verfahren wird spätestens ab dem 10. Jahrhundert von arabischen Mathematikern angewendet.

In seiner Quadratwurzeltabelle beschränkt sich Helm auf drei Dezimalen (Berechnung nach der Formel $\sqrt{n} = \frac{1}{1000}\sqrt{1000000n}$). Die zugehörige Ganzzahl ist bei der vorher stehenden Quadratzahl abzulesen. (Rechts von den Quadratzahlen steht jeweils 1000, die zu den vorher aufgetretenen 1000 in der zweiten Spalte zu addieren sind, um die Wurzel der Quadratzahlen zu erhalten.[27])

[25] Diese sinnvolle Ergänzung des rein arithmetischen Ries-Textes haben die Verleger Christian Egenolff und seine Erben (Frankfurt a. M. 1533, 1535, 1544, 1551, 1558, 1565, 1570, 1574, 1578, 1581, 1585, 1610) vorgenommen, und Jacob Geßner (Zürich 1559, 1567) sowie Katharina Gerlach (Nürnberg 1592) haben das „Konzept“ übernommen. (Vgl. hierzu Gebhardt, Rainer: Die gedruckten Bücher von Adam und Isaak Ries. Quellen zum Leben und Wirken Adam Ries´ und seiner Söhne, Band 5. Annaberg-Buchholz 2017.) Helm trat auch als eigenständiger Autor mit drei verschiedenen Werken auf, die bisher noch nicht näher untersucht worden sind.

[26] Zu dieser Thematik informiert wohl am besten: Folkerts, Menso: Die Faßmessung (Visierkunst) im späten Mittelalter und in der frühen Neuzeit. In: Visier- und Rechenbücher der frühen Neuzeit. Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz, Band 19. Freiberg 2008, S. 1–36

[27] Hinweis von Rainer Gebhardt, Chemnitz



Tabula Radicum quadratarum.

1	1	1000		22	690		43	558
	2	414		23	796		44	634
	3	732		24	900		45	709
2	4	1000	5	25	1000		46	783
	5	236		26	99		47	856
	6	449		27	196		48	928
	7	645		28	291	7	49	1000
	8	828		29	385		50	71
3	9	1000		30	477		51	141
	10	162		31	567		52	211
	11	316		32	657		53	280
	12	464		33	744		54	348
	13	605		34	831		55	415
	14	741		35	916		56	482
	15	873	6	36	1000		57	549
4	16	1000		37	82		58	616
	17	123		38	164		59	681
	18	242		39	244		60	746
	19	325		40	324		61	810
	20	472		41	403		62	874
	21	582		42	480		63	937

Abb. 6: Auszug aus Helms Quadratwurzeltabelle in Ries / Helm 1558, K iij^{v}.

8 Stevin

Simon Stevin gebührt das Verdienst, als erster Europäer eine systematische und relativ gut verständliche Darstellung der Dezimalbrüche und der Dezimalbruchrechnung verfasst zu haben: *De Thiende* (Leiden 1585). Allerdings ist seine Notation umständlich und geradezu rückschrittlich im Vergleich zu den Byzantinern, Rudolff und Apian: Es fehlt das Trennungszeichen.

Es soll hier eine dem Text des Titelblatts stringent folgende Übersetzung versucht werden:

Das Zehntel [Die Zehntelrechnung], *lehrend, durch unerhörte* [ungemeine] *Leichtigkeit alle Rechnungen, die unter den Menschen nötig fallen, abzufertigen* [zu erledigen] *durch heile* [ganze] *Zahlen ohne gebrochene* [gemeint ist: ohne gemeine Brüche]

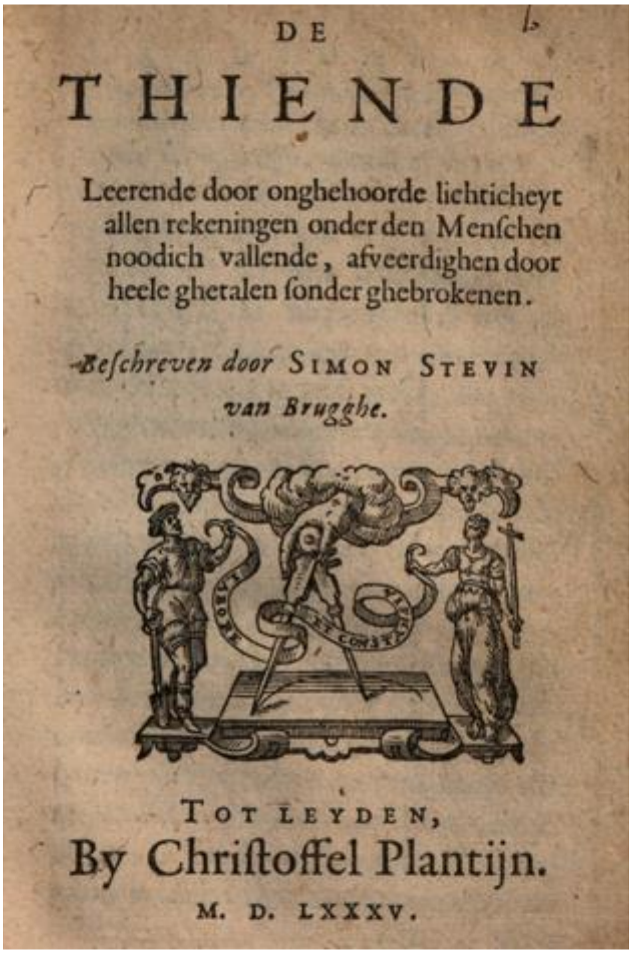


Abb. 7: Stevins *De Thiende*, Titelblatt (A bzw. S. 1).

Stevin schreibt[28]: *Jede vorgelegte ganze Zahl nennen wir Anfang, ihr Zeichen ist dann ⓪. ... Und jeden zehnten Teil der Einheit des Anfangs nennen wir Erstes, sein Zeichen ist ①; und jeden Teil der Einheit des Ersten nennen wir Zweites; sein Zeichen ist ②; und so fort jeden zehnten Teil der Einheit seines vorhergehenden Zeichens immer der Ordnung um eins mehr.*[29]

Im folgenden Beispiel sollen die drei Zahlen 27,847, 37,675 und 875,782 addiert werden: Die Zeichen stehen hier oberhalb des ersten Summanden und gelten für die beiden anderen sowie für die Summe, sodass sich 941,304 ergibt.

[28] Vgl. De Thiende von Simon Stevin – übersetzt und erläutert von Helmuth Gericke und Kurt Vogel. Frankfurt a. M. 1965
[29] ebda., S. 13 f.

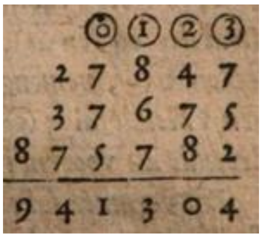


Abb. 8: Addition von Dezimalbrüchen in Stevins De Thiende (S. 13).

Als Beispiel für eine Multiplikation wählt er – in unserer Schreibweise wiedergegeben – die Faktoren 32,57 und 89,46, die bei ihm übereinanderstehen. Über dem oberen Faktor steht dementsprechend das Zeichen 0 über der 2, das Zeichen 1 über der 5 und das Zeichen 2 über der 7. Dieselbe Zuweisung gilt für den zweiten Faktor. Als Produkt erhält er die Zahlenkombination 29137122, die noch strukturiert werden muss. *Um zu wissen, was das ist, wird man die beiden letzten gegebenen Zeichen zusammenzählen, von denen das eine 2 und das andere auch 2 ist, macht zusammen 4, woraus man schließen wird, daß das Zeichen der letzten Ziffer des Produkts 4 ist ...*[30] Im Hinblick auf die absteigende Folge der Zeichen kommt er zum Ergebnis

2 9 1 3 7 1 2 2
0 1 2 3 4 (Schreibweise im Diagramm) oder

2913 0 7 1 1 2 2 3 2 4 (Schreibweise im Text)

Anschließend beweist Stevin diese Vorgehensweise mithilfe von gemeinen Brüchen.[31] Auch stellt er Überlegungen an, wie man Dezimalbrüche als Maßzahlen von Größen verschiedener Bereiche (z. B. Längen, Hohlmaße, Geldwerte) einsetzen kann. Näheres zu Stevins mathematischem Werk findet man bei Stevin nach Gericke / Vogel, a. a. O., und bei Schneider[32].

9 Kepler

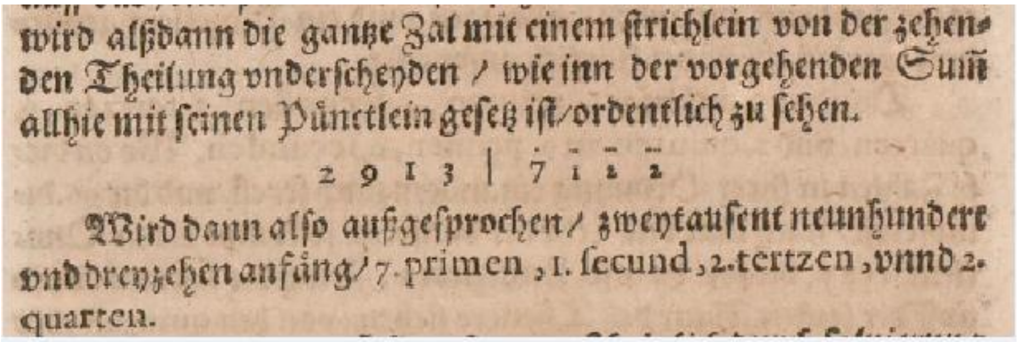
Auch Johannes Kepler verwendet in seinem Wein-Visier-Büchlein gelegentlich Dezimalbrüche, und zwar in der Form 3(65, also mit Trennungszeichen.[33] An dieser Stelle bezeichnet er Jost Bürgi als den Erfinder dieser „neuen" Bruchdarstellung und verweist auf dessen *Canon sinuum* von 1598, der heute als verloren

[30] Stevin nach Gericke / Vogel, a. a. O., S. 17.
[31] ebda., S. 17 f.
[32] Schneider, Ivo: Simon Stevins mathematisches Werk, speziell seine Beiträge zur Arithmetik und Algebra. In: Visier- und Rechenbücher der frühen Neuzeit. Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz, Band 19. Freiberg 2008, S. 63–74
[33] Kepler, Johannes: Außzug auß der Uralten MesseKunst Archimedis und deroselben newlich in Latein außgangener Ergentzung, betreffend Rechnung der Cörperlichen Figuren, holen Gefessen und Weinfässer, sonderlich deß Oesterreichischen … Linz 1616, S. 48

gilt.[34] Aber auch in der Coss von Jost Bürgi[35] finden sich Dezimalbrüche (fol. 134^{r} f.), wenn auch ohne Trennungszeichen.

10 Graffenried

Der Schweizer Johan Rudolff von Graffenried hat uns ein sehr umfangreiches und zugleich bedeutendes Werk hinterlassen, die *Arithmeticae Logisticae Popularis Libri IIII* (Erstausgabe 1618). Schärlig hat seinerzeit auf diese Publikation aufmerksam gemacht und einen ersten Überblick gegeben[36], aber eine weitere analytische Beschäftigung mit diesem Werk wäre sicher wünschens- und lohnenswert. Im zweiten Kapitel des vierten Buchs geht Graffenried eingehend auf Stevin und seine *Thiende* ein. Beim Aufbau der Dezimalbrüche bezeichnet er wie Stevin den ganzzahligen Anteil als *Anfang*, die dann folgenden vier Dezimalen aber als *primen*, *secunden*, *tertzen* bzw. *quarten*. Diese Dezimalen versieht er nur mit einem, zwei, drei bzw. vier Pünktchen oberhalb, verzichtet also auf die Zeichen ① bis ④. Und schließlich kehrt er wieder zum Trennungsstrich zurück, wie wir ihn bereits bei Rudolff und Apian vorgefunden haben, jetzt aber nach vollständiger Ausbildung und Klärung des Dezimalbruchmodells.


wird alßdann die gantze Zal mit einem strichlein von der zehenden Theilung vnderscheyden / wie inn der vorgehenden Sum allhie mit seinen Pünctlein gesetz ist/ordentlich zu sehen.

2 9 1 3 | 7 1 2 2

Wird dann also außgesprochen / zweytausent neunhundert vnd dreyzehen anfäng / 7. primen, 1. secund, 2. tertzen, vnnd 2. quarten.

Abb. 9: Dezimalbruch mit Trennungsstrich bei Graffenried.

11 Zur weiteren Verbreitung der Dezimalbrüche

Zwar hatten die Dezimalbrüche spätestens dank Stevin die Gelehrtenstuben verlassen und standen für die Verwendung im Alltag bereit. Doch ihre Verbreitung, über die bisher erst wenig geforscht worden ist, erfolgte wohl eher zögerlich und in den europäischen Ländern ganz unterschiedlich. Ein wichtiger Impuls für die tatsächliche Verwendung im täglichen Leben und für die Aufnahme in den

[34] Kepler kannte demnach das Werk von Stevin noch nicht, obwohl dieses schon deutlich früher erschienen war.

[35] Die Coss von Jost Bürgi in der Redaktion von Johannes Kepler Ein Beitrag zur frühen Algebra. Bearbeitet von Martha List und Volker Bialas. München 1973, S. 72. Die keplersche Redaktion ist nicht genau zu datieren, aber noch Ende des 16. Jahrhunderts entstanden.

[36] Schärlig, Alain: Johan Rudolff von Graffenried und seine Arithmeticae Logisticae Popularis Libri IIII von 1619. In: Visier- und Rechenbücher der frühen Neuzeit. Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz, Band 19. Freiberg 2008, S. 275–288

Stoffkanon des schulischen Mathematikunterrichts dürfte aber mit großer Sicherheit die Einführung einer dezimalen Strukturierung der jeweiligen Landeswährung gewesen sein. Diese erfolgte beispielsweise in Frankreich im Rahmen der Französischen Revolution[37], in Deutschland mit der Reichsgründung (1871).
Hierzu soll aber bewusst ein etwas „abseitiges", weniger bekanntes Beispiel vorgestellt werden.
Riga gehörte bis 1621 zu Polen, wurde danach schwedisch und gelangte schließlich ab 1710 unter russische Oberhoheit. Bis ins 19. Jahrhundert hinein konnte die Stadt ihre Münzhoheit erhalten. Die Leitwährung war: 1 Reichstaler = 90 Groschen, 1 Groschen = 3 Weißpfennige, 1 Weißpfennig = 2 Schwarzpfennige. Das Gewichtssystem bestand aus Schiffspfund, Lispfund, Pfund, Last und Tonne: 1 Schiffspfund = 20 Lispfund, 1 Lispfund = 20 Pfund, 1 Pfund = 32 Lot, 1 Last = 12 Tonnen oder 16 Tonnen, 1 Tonne = 18 Lispfund
In der Vorrede zu seinem Rigaschen Rechenbuch von 1819, dem letzten in einer bemerkenswerten Traditionsreihe[38], schreibt Gizycki alias Gisevius: *Der Allerhöchste Ukas, welcher, der verderblichen Agiotage*[39] *Einhalt zu thun, die Circulation einer fremden Münze mit ihrem Scheidegelde in Liv- und Kurland untersagte, war dem Verleger bewegender Grund, die Ueberarbeitung des Rigaschen Rechenbuchs zu veranstalten ... Die Rechenkunst verlor durch die Ueberarbeitung die schönen Proportionen, welche die ehemalige Münze zu den bleibenden Maaßen und Gewichten bot; gewann gegentheils durch das, der Landesmünze zum Grunde liegende, decadische Zahlengesetz. – Den Species in Brüchen fügte ich eine Anleitung zum Gebrauche der Decimalbrüche bey.* (XI)
Hier schlagen sich zweifellos restaurative Tendenzen in der Folge des Wiener Kongresses (1814/15) nieder: Riga hat seine Münzhoheit verloren, der Reichstaler wurde durch die Landesmünze *Rubel* ersetzt: 1 Rubel = 10 Griwen = 100 Kopeken. Die neue Währung ist nun Anlass, auch Dezimalbrüche zu berücksichtigen und das Rechnen mit ihnen zu lehren. Ansonsten folgt der Autor sehr weitgehend den Rechenbüchern seines Vorgängers Johann Heinrich Flor (erschienen 1769, 1792, 1808), auch in dessen ausschließlicher Verwendung von gemeinen Brüchen. Der Abschnitt über Dezimalbrüche (übrigens mit Trennungskomma) bleibt im gesamten Kontext isoliert.

---

[37] In Frankreich wurden damals auch die Längen (vgl. das Urmeter in Paris), Flächeninhalte, Volumina und Gewichte strikt dezimal strukturiert.
[38] Das Rigasche Rechenbuch, darin die Rechenkunst … in theoretischer und praktischer Abhandlung … entworfen von Johann Heinrich Flor … Umgearbeitet und mit einer Anleitung zur Rechnung mit Decimalbrüchen vermehrt von B. J. von Gizycki, genannt Gisevius, Inspektor des Mitauschen Schulkreises. Riga 1819, S. X. Bernhard Johann von Gisevius war zunächst Privatlehrer, dann Lehrer an Schulen und Schulinspektor in verschiedenen Städten Livlands und Semgallens, u. a. in Mitau (heute Jelgava / Lettland). Vgl. Deschauer, Stefan: Die Rigischen Rechenbücher – Spiegel einer lokalen mathematischen Tradition im Ostseeraum. Algorismus, Heft 73. Augsburg 2010, S. 20–22
[39] erhöhtes Aufgeld beim Umtausch von heimischen Münzen in fremde (und umgekehrt) unter Ausnutzung von Kursdifferenzen

Die Lösung einer von Adam Ries 1509 in Zwickau gerechneten Aufgabe.

Rainer Gebhardt

Im 3. Rechenbuch von Adam Ries „Rechenung nach der lenge, auff den Linihen und Feder“, der „Practica“, aus dem Jahre 1550[1] sind unter der Überschrift „zweifache Mischung“ zwei Aufgaben abgedruckt. Über die umfangreiche Lösung der ersten Aufgabe, bei der Ries neben dem Ergebnis einen unverständlichen Lösungshinweis angibt, werde ich auf dem Annaberger Kolloquium 2025 berichten. Eine zweite Aufgabe befindet sich auf Bl. 162[v] und Bl. 163 (Abb. 1). Ries gibt dafür keinen Lösungsweg an, sondern nur das Ergebnis. Er bemerkt weiter, dass er die Aufgabe von Thomas Meiner[2] erhalten habe und diese 1509 in Zwickau gerechnet hat. Ries schreibt noch, dass ihm Andreas Goßner[3] berichtet habe, die Aufgabe komme vom alten Herrn Heinrich von Bunau[4].

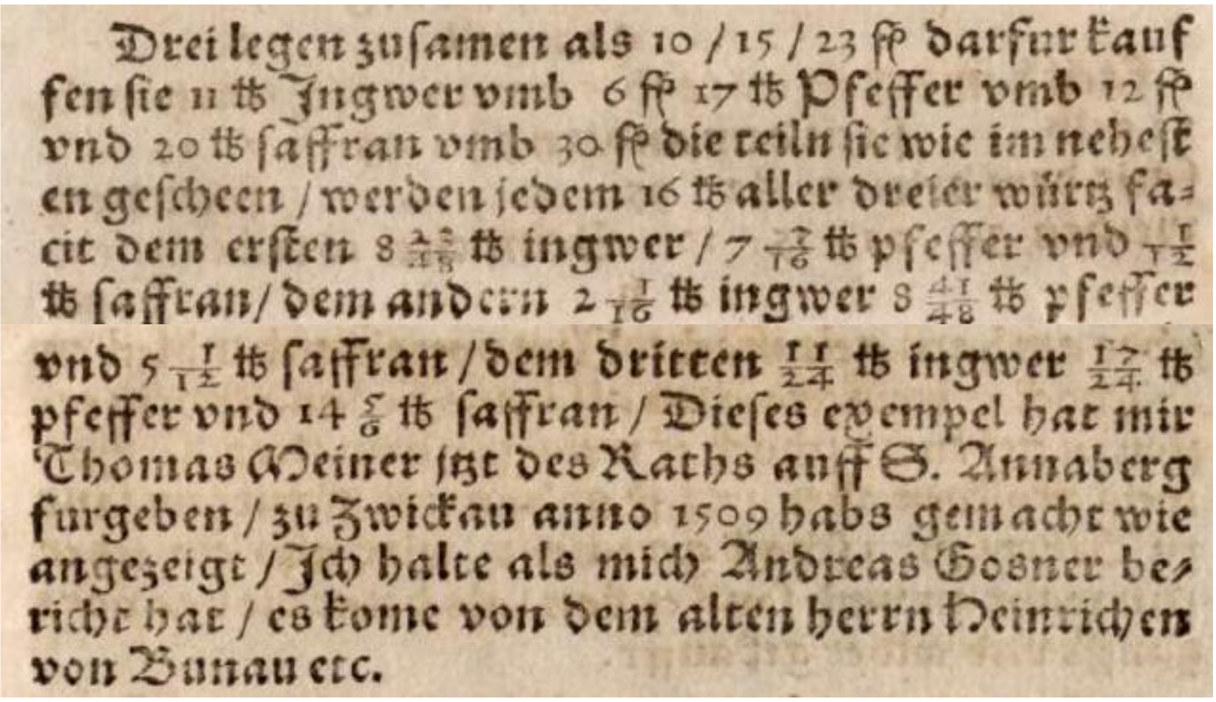

Drei legen zusamen als 10 / 15 / 23 fl darfur kauf fen sie 11 ℔ Jngwer vmb 6 fl 17 ℔ Pfeffer vmb 12 fl vnd 20 ℔ saffran vmb 30 fl die teiln sie wie im nehest en gescheen / werden jedem 16 ℔ aller dreier würtz fa- cit dem ersten 8 23/48 ℔ ingwer / 7 7/16 ℔ pfeffer vnd 1/12 ℔ saffran / dem andern 2 1/16 ℔ ingwer 8 41/48 ℔ pfeffer vnd 5 1/12 ℔ saffran / dem dritten 11/24 ℔ ingwer 17/24 ℔ pfeffer vnd 14 5/6 ℔ saffran / Dieses exempel hat mir Thomas Meiner jtzt des Raths auff S. Annaberg furgeben / zu Zwickau anno 1509 habs gemacht wie angezeigt / Jch halte als mich Andreas Gosner be- richt hat / es kome von dem alten herrn Heinrichen von Bunau etc.

Abbildung 1: Text der Aufgabe und des Ergebnisses.

---

1 Siehe dazu Rainer Gebhardt: Das große Rechenbuch von Adam Ries, Practica genannt. In: Rainer Gebhardt (Hrsg.): Zur Wirkungsgeschichte der Brotordnung von Adam Ries. (Schriften des Adam-Ries-Bundes, Bd. 18) Adam-Ries-Bund, Annaberg-Buchholz 2006, S. 159–179.

2 Thomas Meiner war 1548–1552 Ratsmitglied in Annaberg. Diese Mitteilung bedeutet auch, dass Ries das Manuskript zum dritten Rechenbuch nach 1548 fertig gestellt oder wenigstens überarbeitet hat.

3 Andreas Gößner war Fundgrübner und 1519–1532 Ratsmitglied in Annaberg. Er war 1510 Besitzer des Grubenfeldes auf dem sich heute das Besucherbergwerk „Zum Gößner“ im Erzgebirgsmuseum in Annaberg-Buchholz befindet.

4 Nach Willy Roch handelt es sich um den Berghauptmann Heinrich von Bünau.

Die Aufgabe:
Drei Gesellen legen 10, 15 und 23 Gulden an.
Für dieses Geld werden drei verschiedene Gewürze gekauft: 11 Pfund Ingwer für 6 Gulden, 17 Pfund Pfeffer für 12 Gulden und 20 Pfund Safran für 30 Gulden.
Die Gewürze sollen so aufgeteilt werden, dass jeder Geselle genau 16 Pfund und von allen drei Gewürzen bekommt.
Das Ergebnis von Ries:

	Ingwer	Pfeffer	Saffran
1. Geselle	$8\frac{23}{48}$ Pfund	$7\frac{7}{16}$ Pfund	$\frac{1}{12}$ Pfund
2. Geselle	$2\frac{1}{16}$ Pfund	$8\frac{41}{48}$ Pfund	$5\frac{1}{12}$ Pfund
3. Geselle	$\frac{11}{24}$ Pfund	$\frac{17}{24}$ Pfund	$14\frac{5}{6}$ Pfund

Es handelt sich um eine Aufgabe mit 9 Unbekannten.

Versuch einer Lösung nach Adam Ries:[5]
Die Gesellen legen zusammen 48 Gulden an und kaufen dafür 48 Pfund Gewürze. Berechnen wir zuerst, wieviel jedem Gesellen gemäß seinem eingesetzten Geld von dem jeweiligen Gewürz zustehen würde.
Da der erste Geselle $\frac{10}{48}$ des Geldes gegeben hat, sollten ihm ebenso viele Anteile der jeweiligen Gewürze zustehen. Das gilt auch für die anderen Gesellen, also jeweils $\frac{15}{48}$ und $\frac{23}{48}$ Anteile.
Damit kann man folgende Übersicht erstellen, wobei die Bezeichnung Pfund der Einfachheit halber in den Tabellen hier und im Weiteren weggelassen wird.

	Ingwer	Pfeffer	Safran	Summe
1. Geselle	$\frac{10}{48}\cdot 11=\frac{110}{48}$	$\frac{10}{48}\cdot 17=\frac{170}{48}$	$\frac{10}{48}\cdot 20=\frac{200}{48}$	$\frac{480}{48}$
2. Geselle	$\frac{15}{48}\cdot 11=\frac{165}{48}$	$\frac{15}{48}\cdot 17=\frac{255}{48}$	$\frac{15}{48}\cdot 20=\frac{300}{48}$	$\frac{720}{48}$
3. Geselle	$\frac{23}{48}\cdot 11=\frac{253}{48}$	$\frac{23}{48}\cdot 17=\frac{391}{48}$	$\frac{23}{48}\cdot 20=\frac{460}{48}$	$\frac{1104}{48}$
Summe	$\frac{528}{48}$	$\frac{816}{48}$	$\frac{960}{48}$	$\frac{2304}{48}$

Wenn man die Anteile der Gewürze und die jeweiligen Summen mit 48 multipliziert, ergibt sich:

[5] Dank gilt Stefan Deschauer für seine kritische Durchsicht und wertvollen Hinweise.

2

	Ingwer	Pfeffer	Safran	Summe
1. Geselle	110	170	200	480
2. Geselle	165	255	300	720
3. Geselle	253	391	460	1104
Summe	528	816	960	2304

Es sind also insgesamt 2304 Anteile an Gewürzen, die auf die 3 Gesellen aufgeteilt werden sollen. Jeder soll 16 Pfund, also 768 (768 : 48 = 16) Anteile der Gewürze erhalten.
Da im Ergebnis der wertmäßigen Berechnung der 1. und 2. Geselle weniger als 768 Anteile und der 3. Geselle mehr erhalten, müssen die Anteile der Gewürze mit unterschiedlichen Preisen gegeneinander ausgetauscht werden, ohne den Gesamtrahmen zu verändern.
Die Anteile der jeweiligen Gewürze sind dabei konstant:
11 Pfund Ingwer zu 528 (= 11 · 48) Anteilen,
17 Pfund Pfeffer zu 816 (= 17 · 48) Anteilen und
20 Pfund Safran zu 960 (= 20 · 48) Anteilen.
Es kosten 11 Pfund Ingwer 6 Gulden, 17 Pfund Pfeffer 12 Gulden und 20 Pfund Safran 30 Gulden.
Somit verhalten sich die Kosten von Ingwer zu Safran wie $\frac{6}{11}$ zu $\frac{3}{2}$ oder $\frac{12}{22}$ zu $\frac{33}{22}$.
Das bedeutet, dass 33 Anteile Ingwer wertmäßig in 12 Anteile Safran gewandelt werden können und umgekehrt. Dementsprechend können auch 11 Anteile Ingwer wertmäßig in 4 Anteile Safran gewandelt werden.
Die Kosten von Pfeffer zu Safran verhalten sich wie $\frac{12}{17}$ zu $\frac{3}{2}$ oder $\frac{24}{34}$ zu $\frac{51}{34}$.
Das bedeutet, dass 51 Anteile Pfeffer in 24 Anteile Safran gewandelt werden können und umgekehrt. Dementsprechend können auch 17 Anteile Pfeffer wertmäßig in 8 Anteile Safran gewandelt werden.
Die Kosten von Ingwer zu Pfeffer verhalten sich wie $\frac{6}{11}$ zu $\frac{12}{17}$ oder $\frac{102}{187}$ zu $\frac{132}{187}$.
Das bedeutet, dass 132 Anteile Ingwer in 102 Anteile Pfeffer gewandelt werden können und umgekehrt. Dementsprechend können auch 22 Anteile Ingwer wertmäßig in 17 Anteile Pfeffer gewandelt werden.
Es ergeben sich folgende Umwandlungsregeln:
IS: 11 Anteile Ingwer entsprechen wertmäßig 4 Anteilen Safran.
PS: 17 Anteile Pfeffer entsprechen wertmäßig 8 Anteilen Safran.
IP: 22 Anteile Ingwer entsprechen wertmäßig 17 Anteilen Pfeffer.
Um die Anteile des 3. Gesellen zu verringern, muss man geringerwertige Anteile von Gewürzen in höherwertige wandeln.
Es sollen für den 3. Gesellen so viel wie möglich Anteile Ingwer in Safran gewandelt werden (IS). Es können maximal 22-mal 11 Anteile Ingwer gewandelt werden. Um jedoch die Gesamtanteile von Ingwer und von Safran konstant zu halten, werden im Gegenzug beim 1. Gesellen die entsprechenden Anteile umgekehrt gewandelt.

	Ingwer	Pfeffer	Saffran	Summe
1.	110+22·11=352	170	200–22· 4=112	480+242–88=634
2.	165	255	300	720
3.	253–22·11=11	391	460+22·4=548	1104–242+88=950
Summe	528	816	960	2304
Soll	528	816	960	2304

Danach können beim 3. Gesellen nur noch je 17 Anteile Pfeffer in 8 Anteile Safran gewandelt werden (PS). Der Ausgleich soll dabei beim 2. Gesellen erfolgen.
Die Verringerung bei einer Umwandlung beträgt 17 – 8 = 9 Anteile.
Die Differenz von 950 Anteilen an Gewürzen zu den geforderten 768 beträgt 182. Da Ingwer nicht mehr in Safran gewandelt werden kann, muss die Umwandlung von Pfeffer in Safran die Anteile des 3. Gesellen auf 768 oder darunter bringen. Also müssen 21-mal 17 Anteile Pfeffer in 8 Anteile Safran gewandelt werden (PS).

	Ingwer	Pfeffer	Safran	Summe
1.	352	170	112	634
2.	165	255+21·17=612	300–21·8=132	720+357–168=909
3.	11	391–21·17=34	548+21·8=716	950–357+168=761
Summe	528	816	960	2304
Soll	528	816	960	2304

Um nun die Anteile des 3. Gesellen von den 761 auf 768 zu erhöhen kann man nur 4 Anteile Safran in 11 Anteile Ingwer (IS) wandeln. Der Ausgleich erfolgt hier beim 1. Gesellen.

	Ingwer	Pfeffer	Safran	Summe
1.	352–11=341	170	112+4=116	634–11+4=627
2.	165	612	132	909
3.	11+11=22	34	716–4=712	761+11–4=768
Summe	528	816	960	2304
Soll	528	816	960	2304

Damit hat der 3. Geselle die richtige Anzahl Anteile, nämlich 768.
Im Weiteren muss ein Austausch zwischen dem 1. und 2. Gesellen erfolgen.

4

Es sollen beim 2. Gesellen je 17 Anteile Pfeffer in 8 Anteile Safran gewandelt werden (PS). Das kann maximal 14-mal erfolgen, da es beim 1. Gesellen nur 116 Anteile Safran gibt.

	Ingwer	Pfeffer	Safran	Summe
1.	341	170+14·17=408	116–14·8=4	627+238–112=753
2.	165	612–14·17=374	132+14·8=244	909–238+112=783
3.	22	34	712	768
Summe	528	816	960	2304
Soll	528	816	960	2304

Der 1. Geselle hat immer noch 15 Anteile zu wenig und der 2. Geselle 15 Anteile zu viel. Deshalb müssen die Anteile des 2. Gesellen weiter reduziert werden.
Das ist durch 3-mal Wandeln von 22 Anteilen Ingwer in 17 Anteilen Pfeffer (IP) möglich, da die Differenz 22 – 17 = 5 und 15 durch 5 gleich 3 ist.

	Ingwer	Pfeffer	Safran	Summe
1.	341+3·22=407	408–3·17=357	4	753+66–51=768
2.	165–3·22=99	374+3·17=425	244	783–66+51=768
3.	22	34	712	768
Summe	528	816	960	2304
Soll	528	816	960	2304

Dividiert man das Ergebnis jeweils durch 48, erhält man:

	Ingwer	Pfeffer	Safran
1. Geselle	$\frac{407}{48} = 8\,\frac{23}{48}$	$\frac{357}{48} = 7\,\frac{21}{48} = 7\,\frac{7}{16}$	$\frac{4}{48} = \frac{1}{12}$
2. Geselle	$\frac{99}{48} = 2\,\frac{3}{48} = 2\,\frac{1}{16}$	$\frac{425}{48} = 8\,\frac{41}{48}$	$\frac{244}{48} = 5\,\frac{4}{48} = 5\,\frac{1}{12}$
3. Geselle	$\frac{22}{48} = \frac{11}{24}$	$\frac{34}{48} = \frac{17}{24}$	$\frac{712}{48} = 14\,\frac{40}{48} = 14\,\frac{5}{6}$

Das ist die Lösung von Adam Ries.

Allgemeiner heutiger Lösungsansatz:
Drei Gesellen legen an Geld 10, 15 und 23 Gulden an.
Es werden 11 Pfund Ingwer für 6 Gulden, 17 Pfund Pfeffer für 12 Gulden und 20 Pfund Safran für 30 Gulden gekauft. Jeder soll 16 Pfund Gewürze bekommen.
Es sei a_i der Anteil Ingwer, b_i der Anteil Pfeffer und c_i der Anteil Safran für den i-ten Gesellen, i = 1, 2, 3.
Da jeder 16 Pfund bekommen soll, gilt:
(1) $a_1 + b_1 + c_1 = 16$,
(2) $a_2 + b_2 + c_2 = 16$ und
(3) $a_3 + b_3 + c_3 = 16$.
Folgende Mengen an Gewürzen wurden gekauft:
(4) $a_1 + a_2 + a_3 = 11$,
(5) $b_1 + b_2 + b_3 = 17$ und
(6) $c_1 + c_2 + c_3 = 20$.
Nach der Menge des eingelegten Geldes gilt:
(7) $\frac{6}{11} a_1 + \frac{12}{17} b_1 + \frac{3}{2} c_1 = 10$,
(8) $\frac{6}{11} a_2 + \frac{12}{17} b_2 + \frac{3}{2} c_2 = 15$ und
(9) $\frac{6}{11} a_3 + \frac{12}{17} b_3 + \frac{3}{2} c_3 = 23$.
Das Gleichungssystem mit 9 Unbekannten hat keine eindeutige Lösung, da die Gleichungen (1) bis (3) und (4) bis (6) linear abhängig sind.
Multipliziert man die Gleichungen (1) bis (9) mit 48, und ersetzt $48a_i$ durch x_i, $48b_i$ durch y_i und $48c_i$ durch z_i (i = 1, 2, 3),
so ergeben sich folgende Gleichungen:
(1a) $x_1 + y_1 + z_1 = 16 \cdot 48 = 768$,
(2a) $x_2 + y_2 + z_2 = 16 \cdot 48 = 768$,
(3a) $x_3 + y_3 + z_3 = 16 \cdot 48 = 768$,
(4a) $x_1 + x_2 + x_3 = 11 \cdot 48 = 528$,
(5a) $y_1 + y_2 + y_3 = 17 \cdot 48 = 816$,
(6a) $z_1 + z_2 + z_3 = 20 \cdot 48 = 960$,
(7a) $\frac{6}{11} x_1 + \frac{12}{17} y_1 + \frac{3}{2} z_1 = 10 \cdot 48 = 480$,
(8a) $\frac{6}{11} x_2 + \frac{12}{17} y_2 + \frac{3}{2} z_2 = 15 \cdot 48 = 720$,
(9a) $\frac{6}{11} x_3 + \frac{12}{17} y_3 + \frac{3}{2} z_3 = 23 \cdot 48 = 1104$.
Es werden ganzzahlige Lösungen der x_i, y_i und z_i für i = 1, 2, 3 gesucht.
Betrachten wir zunächst den 3. Gesellen und ersetzen z_3 in (9a) mit (3a).
Aus $\frac{6}{11} x_3 + \frac{12}{17} y_3 + \frac{3}{2} (768 - x_3 - y_3) = 1104$ folgt
$\frac{33-12}{22} x_3 + \frac{51-24}{34} y_3 = 1152 - 1104$ und
(10) $\frac{21}{22} x_3 + \frac{27}{34} y_3 = 48$.
Diese Gleichung hat nur eine ganzzahlige Lösung: $x_3 = 22$ und $y_3 = 34$.
Aus (3a) folgt dann $z_3 = 768 - 22 - 34 = 712$.
Betrachten wir nun den 2. Gesellen und ersetzen z_2 in (8a) durch (2a).

6

Aus $\frac{6}{11}x_2 + \frac{12}{17}y_2 + \frac{3}{2}(768 - x_2 - y_2) = 720$ folgt
$\frac{33-12}{22}x_2 + \frac{51-24}{34}y_2 = 1152 - 720$, $\frac{21}{22}x_2 + \frac{27}{34}y_2 = 432$ und
(11) $\frac{21}{11}x_2 + \frac{27}{17}y_2 = 864$.
Für eine (ganzzahlige) Lösung muss x_2 durch 11 und y_2 durch 17 teilbar sein.
Setzen wir $x = \frac{1}{11}x_2$ und $y = \frac{1}{17}y_2$, so erhalten wir
$21x + 27y = 864$ und $7x + 9y = 288$. Damit ist
(12) $7x = 9(32- y)$ zu lösen.
Es existieren 4 Lösungen:

	x	y
A	9	25
B	18	18
C	27	11
D	36	4

Multipliziert man x mit 11, y mit 17 und berechnet z_2 nach (2a), so geben sich 4 ganzzahlige Lösungen:

	x_2	y_2	z_2
A	99	425	244
B	198	306	264
C	297	187	284
D	396	68	304

Nach der Lösung für den 3. Gesellen ist aber für Safran nur einen Rest von 960 – 712 = 248 Anteilen übrig. Daher ist nur die Lösung A gültig.
Aus (4a), (5a) und (6a) folgt für den 1. Gesellen:
$x_1 = 528 - x_2 - x_3 = 528 - 99 - 22 = 407$,
$y_1 = 816 - y_2 - y_3 = 816 - 425 - 34 = 357$,
$z_1 = 960 - z_2 - z_3 = 960 - 244 - 712 = 4$.
Diese Lösung erfüllt die Gleichungen (1a) – (9a).

	Ingwer	Pfeffer	Safran	Summe
1. Geselle	407	357	4	768
2. Geselle	99	425	244	768
3. Geselle	22	34	712	768
Summe	528	816	960	2304

Es ist die einzige Lösung.
Wie oben bereits gezeigt, erhält man mit Division durch 48 die von Ries angegeben Lösung.

Erlebnis Mathematik

Rückblicke und Ausblicke

Gerlinde Faustmann, Wiener Neustadt

Die Teilnehmer des XIV. Österreichischen Symposions zur Geschichte der Mathematik konnten im Jahr 2018 bei einem Besuch im „Erlebnis Mathematik“ in Wiener Neustadt Einblicke in die ausgestellten historischen Rechengeräte, Instrumente und Darstellungen einiger historischer Probleme gewinnen.

In dem vorliegenden Beitrag wird ein Überblick über diesen privat geführten und frei zugänglichen, offenen Raum gegeben. Ferner werden einige Exponate in deren historischen Kontexten vorgestellt. Schließlich wird ein Bericht über bisherige Veranstaltungen an diesem Ort der Mathematik gegeben.

In einem „work in progress – Abschnitt“ werden die Teilnehmer um kritische Bemerkungen und Anregungen gebeten.

Vortragssaal: (vorne) Gerlinde Faustmann, Christa Binder, Jasna Fempl Madjarević, Harald Gropp

Felix Kleins Seminar zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, SS 1904

Hans Fischer

Felix Klein hat in seinen Seminaren besonders auch Gebiete der angewandten Mathematik berücksichtigt (Scans der Seminarprotokolle von SS 1872 bis SS 1912 finden sich bei `https://www.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/` sowie `https://firsching.ch/klein/`). Drei der Seminare (SS 1893, SS 1904, SS 1911, alle bereits in Göttingen) waren der Wahrscheinlichkeitsrechnung inklusive mathematischer Statistik, Fehlerrechnung, Versicherungsmathematik und statistischer Physik gewidmet. Von diesen drei Seminaren ist besonders das aus SS 1904 interessant – wegen seiner thematischen Vielfalt und der Personen, die teilnahmen.

Dieses Seminar veranstaltete Klein zusammen mit den Göttinger Kollegen Karl Schwarzschild und Martin Brendel, beides Astronomen, wobei der zweitgenannte damals auch für Versicherungsmathematik zuständig war. Das SS 1904 dauerte offiziell vom 16.4.–15.8.1904, das Seminar selbst begann laut den Protokollen mit einer Einführung von Klein am 4.5., der letzte Vortrag war am 27.8.

Die im Seminar behandelten Themen erstreckten sich von elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung bis hin zur Stellarstatistik. Sie spiegeln den Stand der Disziplin um die Jahrhundertwende wider, als einer Wissenschaft mit vielfältigen Anwendungsgebieten, deren eigentlich mathematischer Kern aber relativ mager und nur diffus erkennbar war und – bis auf damals kaum beachtete Ausnahmen – kein eingehenderes Interesse erfuhr. Dieses Bild wurde auch in den einschlägigen Kapiteln im Band 1-2 der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* vermittelt. Klein selbst verwies in seiner Einführung auf „die Schriften von Czuber“. Emanuel Czuber (1851–1925) wirkte an der TH Wien und war der damals führende Experte für Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendungen im deutschsprachigen Raum (z.B. DMV-Bericht 1899, Lehrbuch 1903, Encyklopädie-Artikel).

Neben Kleins Einführung – eine weitere erfolgte später noch zur Anpassung von Wahrscheinlichkeitskurven an Daten – waren es ingesamt 18 Vorträge aus den folgenden Themengebieten (Vortragende in Klammern):
– Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung: Satz von Bayes (Jerimias Grossmann), Skatspiel (Johannes Holzhüter, nach dem damals populären Büchlein von Hermann Schubert, 1886), Experimente des Astronomen Rudolf Wolf zu „Erfahrungswahrscheinlichkeiten“ (Gustav Gersting), Apparate zur Darstellung von Häufigkeitsverteilungen, Galton-Brett etc. (Sigfrid Berliner)
– Versicherungsmathematik: elementare Risikotheorie (Johannes Klien), Anpassung theoretischer Sterblichkeitsfunktionen an Daten (Ferdinand Möller)
– Verteilungsstatistik: Überblick über Arten der Verteilungen, bes. aus der Anthropometrie (Norbert Pinkus), Fechners zweiseitiges Fehlergesetz (Emil Rottgardt), Anpassung der Mixtur aus zwei Normalverteilungen an Daten gem. Karl Pearson (Hans Duncker), Anpassung von Normalverteilungen an Häufigkeiten in Reiz-Reaktions-Experimenten (Alexandru Myller)
– Statistische Physik: Boltzmanns H-Theorem (Heinrich Laubert)
– Analytische Hilfsmittel: Differenzengleichungen nach de Moivre und Laplace (Vera Lebedeva, Aleksei Vlasov, Emil Hilb), Stirlingsche Formel (Constantin Carathéodory) – Asymptotische Zahlentheorie: Ansatz von Dirichlet und Erweiterungen (Aleksander Axer, eigentlich nicht wirklich ein Teilgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung)

– Stellarstatistik: Statistik der „Eigenbewegungen“ (Anton Aloys Timpe), Verteilung von Leuchtklassen (Albert von Brunn).

Eine erhebliche Anzahl von Teilnehmern am Seminar erreichte später mehr oder weniger große Prominenz, allerdings kaum in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihren Anwendungen:
Constantin Carathéodory (1873–1950, Prom. 1904 in Gött.) zu dem man nichts weiter erwähnen muß; Vera Lebedeva, nachmalige Myller (1880–1870, Prom. 1906 Gött., erste Universitätsprofessorin in Rumänien); Alexandru Myller, Ehemann von Vera, Prom. 1906 in Gött., später Prof. mit Schwerpunkt Differentialgeometrie in Rumänien; Aleksei Konstatinovich Vlasov (1868–1922), Dozent für Geometrie an der Universität in Moskau, war zur Fortbildung in Gött.; Emil Hilb (1882–1929) hatte in München 1903 promoviert, trug zur *Encyklopädie* mit “Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet“ bei, später Prof. in Würzburg; Anton Aloys Timpe (1882–1959, Prom. 1905 in Gött.), Referat zur Elastizitätstheorie in Bd. 4-4 der *Encyklopädie*, später Prof. für Wirtschaftsmathematik an der TH Berlin; Albert von Brunn (1880–1942, Prom. 1904 in Göttingen), Astronom; Sigfrid Berliner (1884–1961, Prom. 1905 in Experimentalphysik in Gött.), später Prof. für Betriebswirtschaftslehre an der Univ. Tokyo, Direktor einer Lebensversicherung; Hans Duncker (1881–1961, Prom. 1905 Zoologie in Gött.), Eugeniker, Ornithologe (aber ohne universitäre Position); Norbert Pinkus (1879–1938, Prom. 1905 in Nationalökonomie in Gött.), beteiligt an der Gründung der „freien polnischen Universität“ in Warschau, später in der Privatwirtschaft; Aleksander Axer (1880–1946, Prom. 1902 in Wien), zur Fortbildung in Gött., beteiligt an Minkowskis „Geometrie der Zahlen“, aufstrebender Zahlentheoretiker, später Lehrer in Zürich.

Interessant ist, welche Themen im Seminar keine Rolle spielten. Zwar waren mehrere Vorträge den analytischen Hilfsmitteln gewidmet, und Hilb gab sogar einen Einblick in neuere Entwicklungen der einschlägigen Approximationsmethoden, die freilich keine stochastischen Anwendungen erfuhren. Über den Einsatz dieser Hilfsmittel im Rahmen der nicht explizit berücksichtigten stochastischen Grenzwertsätze wurde nicht referiert. Auch die damit zusammenhängenden allgemeineren Ansätze zu Zufallsgrößen und deren Momenten, wie sie bereits bei Poisson auftreten und von Chebyshev sowie Markov weiterentwickelt wurden (Markovs Lehrbuch wurde freilich erst 1911 von Heinrich Liebmann ins Deutsche übersetzt) findet man nicht in den Seminarvorträgen. Tatsächlich hat Czuber in seinen bis dato erschienenen Monographien all diese Themen, die Kernbestandteile der sich im 20. Jahrhundert herausbildenden Wahrscheinlichkeitstheorie wurden, nur in Spezialfällen bzw. am Rande angesprochen.

In Kleins Einleitung zur Verteilungsstatistik am 6. Juli (auf die er sich bei seinem Überblick über die „mathematische Statistik“ ohne weitere Erläuterungen beschränkte) fehlen einige neuere Entwicklungen, etwa Karl Persons Kurvensystem von 1896 oder auch die Reihenentwicklungen nach Ableitungen der Verteilungsfunktion der Normalverteilung, obwohl hier auch Deutsche (Heinrich Bruns, Friedrich Lipps) beteiligt waren. Einschlägige Monographien zu diesem Thema erschienen allerdings erst nach 1900. Die Dispersionstheorie von Kleins Göttinger Kollege Wilhelm Lexis taucht nur in einem Vortragstitel (von Pinkus) in einem sehr unspezifischen Zusammenhang auf. Weitere wichtige statistische Themen der Zeit, wie Regression und Korrelation, werden von Klein gar nicht erwähnt.

Wesentliche Themen, die die mathematischen Aspekte der modernen Stochastik nach der Jahrhundertwende voranbringen sollten, blieben also im Seminar von 1904 unerwähnt. Von allen Personen, die an den drei Seminaren von Klein teilnahmen, hat tatsächlich nur ein Mathematiker, nämlich Stefan Mazurkiewcz, der im Seminar von 1911 (das vorrangig der Versicherungsmathematik gewidmet war) eine sehr schöne Vortragsausarbeitung zur Dispersionstheorie lieferte, später nennenswerte Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsheorie geliefert.

Kleins Seminar von 1904 zeigt somit den Stand der Disziplin um die Jahrhundertwende, zumindest aus deutscher Sicht: Die mathematische Theorie beginnt sich noch nicht im modernen Sinne zu entwickeln, und später als fruchtbar erachtete Ansatzpunkte werden nicht berücksichtigt oder in ihrer Bedeutung unterschätzt. Was die mathematische Statistik betrifft, war Kleins Informationslage – auch mangels geeigneter Monographien zu dieser Zeit – offenbar eingeschränkt. Andererseits florieren die Anwendungsgebiete, etwa Anthropometrie, statistische Physik, Stellarstatistik, wie auch die engagierten Präsentationen im Seminar zu solchen Themengebieten zeigen. Es ist somit nicht überraschend, daß die Teilnehmer an den Seminaren, so sie nicht im Schuldienst oder Versicherungswesen verschwanden, sich, was die Mathematik betrifft, aus der damaligen Sicht erfolgsversprechenderen Gebieten zuwandten.

Andererseits bieten viele der Protokolle aus dem Seminar von 1904 ausgezeichnete Einführungen gerade in diese Anwendungsgebiete und verdienen auch vom jetzigen Standpunkt aus noch Interesse.

Rainer Gebhardt und Franz Pichler

Eine „Pflanzschule für Privatdozenten" – ein Ziel Felix Kleins

Zum 175. Geburtstag des Mathematikers

Renate Tobies (Jena)

Im August 1880 schrieb Felix Klein aus München an Wilhelm Fiedler (1832-1912), der durch die von ihm bearbeitete Übersetzung der Lehrbücher der Analytischen, Projektiven und Algebraischen Geometrie des Iren George Salmon (1819-1904) bekannt wurde. Darin integrierte er die neuesten Ergebnisse von Clebsch, Cremona, Klein u.a. und pflegte eine lebhafte Korrespondenz.[1] Klein informierte Fiedler, dass er nach Leipzig wechseln wird und dass er Leipzig gern zu einer „Pflanzschule" für Privatdozenten machen möchte.

Im Beitrag wird gezeigt, wie Klein diesen Drang, junge Mathematiker auf den Weg zu bringen, nicht nur in Leipzig realisierte, wo er acht Personen zu habilitationsreifen Ergebnissen lenkte. Klein setzte das in Göttingen fort. Seine Fähigkeit, Begabungen schnell zu erkennen, führte dazu, dass er kreative Forscher zur Habilitation aufforderte, darunter Heinrich Burkhardt, Ernst Ritter, Georg Bohlmann, Arnold Sommerfeld, Constantin Carathéodory, Paul Koebe, Theodor Kármán, Conrad Heinrich Müller, Rudolf Schimmack. Auch Emmy Noether gehört in diese Reihe. Das wird im Überblick erläutert. Einige Beispiele werden anhand neuer Akteneinsicht näher erörtert.

Aurel Voß verfasste seine Habilitationsschrift bei Klein in Erlangen

Aurel Voß (1845-1931), fast vier Jahre älter als Klein, weilte im WS 1872/73 bei Klein in Erlangen und war ihm lebenslang dankbar für den geebneten Weg zur Habilitation. Voß zeichnete ein eindringliches Bild des jungen Klein, des „jugendlichen Dozenten", im Alter von 23 als ordentlicher Professor an die Universität Erlangen berufen. Voss betonte Kleins „ungewöhnliche Vielseitigkeit seiner Begabung, sein *divinatorisches* wissenschaftliches Taktgefühl, die Originalität seiner Konzeptionen" und bezeichnete es als Glück, vier Monate lang fast täglich mit Klein verkehren und an seinem Beispiel lernen zu dürfen. Er überlieferte Kleins „[…] merkwürdige Fähigkeit, überall in den Untersuchungen anderer gerade *den* Punkt zu entdecken, der mit seinen eigenen Gedanken in Verbindung stand" sowie dessen „[…] Gabe, jeden seiner Schüler auf das Thema hinzuweisen, das dessen besonderer Begabung und Entwicklung entsprach."[2] So erarbeitete Voß im Austausch mit Klein seine Habilitationsschrift „Zur Theorie der windschiefen Flächen"[3], die an Ergebnisse Plückers und Kleins im Gebiet der Liniengeometrie anknüpfte. Klein gewann Moritz Abraham Stern (1807-1894) dafür, dass sich Voss 1873 in Göttingen habilitieren konnte.[4]

Von den sechs Schülern, die Klein in Erlangen zur Doktorwürde führte, erreichten vier eine Hochschullaufbahn, darunter der Schweizer Adolf Weiler in Zürich. Drei (F. Lindemann, A. Harnack, L. Wedekind) kamen zunächst mit zu Klein nach München.

Von Klein angeregte Habilitationen während seiner Zeit in München

Da am Münchener Polytechnikum sowie auch an der Universität eine Habilitation für einen Klein-Schüler nicht möglich war, ebnete Klein die Wege an andere Orten: für *Axel Harnack* (1851-1888) 1876 an der Universität Leipzig, wohin Klein durch seine Tätigkeit für die *Math. Ann.* sehr gute Beziehungen besaß. Den älteren *Ludwig Wedekind* (1843-1908) empfahl Klein nach Carlsruhe, wo der Clebsch-Schüler Jacob Lüroth (1844-1910) unterstützte. Wedekind

1 Vgl. die Korrespondenz in CONFALIONIERI et. al 2019.
2 VOSS 1919: 286. (divinatorisch = vorahnend, seherisch).
3 Publiziert in *Math.Ann*. 8 (1874) 1: 54–135.
4 Klein bedankte sich bei Moritz A. Stern, dass er seine Bitte betr. Habilitation von Aurel Voss in Göttingen erfüllt habe. [UBG] Cod. Ms. F. Klein 11: 1160A (Klein an Stern, 26.7.1874).

habilitierte sich 1876 dort am Polytechnikum mit der Arbeit *Studien im binären Werthgebiet.*[5] *Ferdinand Lindemann* (1852-1939) habilitierte sich 1877 an der Universität Würzburg, wo Klein guten Kontakt zu Friedrich Prym (1841-1915) besaß, der noch selbst bei Bernhard Riemann (1826-1866) gehört hatte.

Kleins Schüler *Karl Rohn* (1855-1920) erwarb 1878 mit einer von Klein betreuten Arbeit den Doktortitel an der Universität München[6] (das Polytechnikum,TH seit 1877, erhielt erst 1901 das Promotionsrecht) und verfasste kurz darauf auch seine Habilitationsschrift, das Themenfeld der Dissertation fortsetzend.[7] Aus Kleins Korrespondenz mit Adolph Mayer (1839-1908) geht hervor, dass Klein schon seit Juli 1878 vorbereitete (bevor die Habilitationsschrift fertig ausgearbeitet war), dass Rohn in Leipzig Privatdozent werden kann (1879).[8]

Kleins Ziel: Eine „Pflanzschule für Privatdocenten" an der Universität Leipzig

Kleins Ziel, junge Leute zu fördern, sie zu eigener kreativer Arbeit zu bringen, bezog sich nicht nur auf seine eigenen Schüler. Er wollte bewusst auch andere mathematisch begabte Personen nach der Promotion weiter lenken. Das entnehmen wir Kleins eingangs erwähntem Brief vom 17. August 1880 an Wilhelm Fiedler, der – aus Chemnitz in Sachsen stammend – seit 1867 Professor am Polytechnikum in Zürich war:

> Bereits seit 1 ½ Jahren ist ein Schüler von mir, Hr. Dr. Rohn, in Leipzig als Geometer habilitiert. Ich höre jetzt, dass auch Hr. Dr. Schur[9] [synth. Geom., R.To] an eine Habilitation in Leipzig denkt. Sollten Sie jemand haben, der Kraft und Energie genug besitzt, um sich an einem Orte niederzulassen, an welchem er nicht vorwärts kommen, sondern von welchem er weggerufen sein will, so schicken Sie ihn mir auch zu. Ich möchte, wenn es angeht, Leipzig zu einer Art von Pflanzschule für Privatdocenten machen: zum Nutzen der jungen Leute und vielleicht der Wissenschaft […].[10]

Wie Klein die Habilitationsschriften folgender Personen förderte bzw. beurteilte, ist hinreichend beschrieben (vgl. Tobies 2019: 206–17; Tobies 2021: 232–43). Einige mussten aus formalen Gründen das Verfahren an anderen Orten realisierten (die Philosophische Fakultät der Universität Leipzig setzte altsprachliche Ausbildung, erworben mit dem Abitur an einem Humanistischen Gymnasium, voraus), wohin Klein auch die Wege ebnete.

Friedrich Schur (Leipzig)
Walther Dyck (Leipzig)
Adolf Hurwitz (→Göttingen)
Otto Staude (→Breslau)
Adolf Krazer (→Würzburg)
Otto Hölder (→Göttingen)
Hermann Wiener (→Halle)
Friedrich Engel (Leipzig)
Eduard Study (Leipzig)

Für Kleins Leipziger Zeit sind zudem *Georg Pick* (1859–1942) und *David Hilbert* (1862-1943) notwendig zu nennen.

Pick kam als Prager Privatdozenten im Herbst 1883 für zwei Semester zu Klein, wo ihm erst *über die Mathematik die Augen aufgegangen seien*, wie er selbst urteilte. Klein bezog

---

5 https://digital.blb-karlsruhe.de/blbihd/content/structure/7126348 (51 S. plus Illustrationen). Wedekind führte in seiner Habilitationbsschrift fort, was er mit der Dissertation („Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen". *Math.Ann.* 9 (1875) 209–17) begonnen hatte: er nutzte Kleins Übertragungsprinzip, die geometrische Interpretration von x+iy auf der Kugelfläche (Riemannsche Zahlenkugel) für die Theorie der binären Formen; seine Arbeiten halfen, Kleins Ikosaedertheorie vorzubereiten.

6 https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=7410&lang=en

7 Rohn, K. (1879). „Transformation der hyperelliptischen Functionen p=2 und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche" (Habilitationsschrift). *Math.Ann.* 15: 315–54 (datiert Leipzig, Mai 1879). – Klein knüpfte daran später noch eigene Arbeiten an, wie er selbst angab, vgl. Klein 1921 (GMA I): 52.

8 Tobies/Rowe 1990: 100–02, 104–05.

9 Friedrich Schur (1856-1932) hatte in Breslau studiert und bei E.E. Kummer in Berlin promoviert, bevor er sich 1881 in Leipzig habilitierte. Klein verfasste das Gutachten zu Schurs Arbeit, förderte ihn und wählte ihn auch als seinen Assistenten (in der Nachfolge von W. Dyck).

10 Confalionieri et. al 2019: 112.

Pick in seine Forschungen zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen ein, inspirierte ihn zu neuen Ergebnissen und förderte seine Karriere bis zur Professur in Prag.[11]

Auch das spätere Verhältnis von *Hilbert* und Klein kann nur richtig verstanden werden, wenn uns bewusst ist, dass Hilbert wissenschaftlicher Enkel Kleins war. Er kam im Herbst 1885 zu Klein, nach Promotion beim Klein-Schüler Lindemann an der Universität Königsberg.[12] Dort hatte Hilbert insbesondere im Austausch mit Extraordinarius Hurwitz (Kleins Schüler) ein breites Wissen erlangt. Dies umfasste die Kenntnisse der „einander sich so vortrefflich ergänzenden Schulen, der geometrischen Schule von Klein und der algebraisch-analytischen Berliner Schule", wie Hilbert es selbst ausdrückte.[13] Von Hurwitz erfuhr Klein über Hilbert, nachdem sein Ikosaederbuch (1884) in Königsberg eingetroffen war:

> Nehmen Sie meinen herzlichsten Dank für Ihr Buch, welches mich auf meinen Reisen begleitet und dessen Studium mir den größten Genuß bereitet. Hier sind zwei unserer besten Studenten aus Königsberg, welche ich gleich mit Ihrem Buch bekannt gemacht habe. Der eine von ihnen, Herr Hilbert, hat gerade seine Dissertation „Über Kugelfunctionen vom Standpuncte der Invariantentheorie betrachtet" vollendet; derselbe ist ein ganz wüthender Invarianten-Mensch, er hat die Absicht nach dem Doctorexamen auf ein Jahr nach Leipzig zu gehen um Ihre Anregung zu genießen; er ist ein hitziger, speculativer Kopf und wird Ihnen als solcher gewiß gut gefallen.[14]

Klein veranlasste Hilbert zunächst, die Resultate seiner Dissertation für einen Artikel zusammenzufassen.[15] Kurz darauf fand Hilbert neue Ergebnisse zum Gebiet der binären Invariantentheorie, die Klein in der Sitzung vom 7. Dezember 1885 bei der *Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* vorlegte.[16] Diese Arbeit wird als vorläufige Präsentation von Ergebnissen seiner Habilitationsschrift bewertet, die er im Juni 1886 in Königsberg einreichte.[17] Klein sah hier u.a. eines seiner Ziele fortgesetzt – mit dem *Erlanger Programm* proklamiert – Invarianten und Kovarianten bekannter Gruppen systematisch zu untersuchen.

Klein lud Pick und Hilbert zur Silvesterfeier am 31.12.1885 nach Hause ein, stimmte mit Pick die weitere Kooperation zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen ab und empfahl Hilbert, eine Studienreise nach Paris anzuschließen.

Hilbert trug zweimal in Kleins Seminar vor, am 11. Januar 1886 „Ueber die Integrale erster Gattung auf algebraischen Flächen", ein Referat über eine Arbeit von Picard aus dem *Journal de Mathematiques pures et appliquées* 1885 ([Protokolle] Bd. 7: 218–25), was die Paris-Reise vorbereiten konnte. Im zweiten Vortrag analysierte Hilbert Arbeiten von Riemann, Weierstraß, Poincaré, Picard und Frobenius unter dem Titel „Ueber periodische Funktionen zweier Variabler" (am 15.2.1886, [Protokolle] Bd. 7: 274–83). Mit Kleins Empfehlungsschreiben reiste Hilbert im März 1886 nach Paris. Seitdem existiert eine regelmäßige Korrespondenz, die ediert vorliegt.[18] Hilbert folgte Kleins Angebot, ihm seine neuen Ergeb-

---

11 Vgl. detailliert TOBIES 2023.

12 Hilbert, David (1885). *Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen* (Dissertation, 33 S.). Königsberg.

13 Hilbert, D. (1921). „Adolf Hurwitz". *Math.Ann*. 83: 161–72, Zitat 162.

14 [UBG] Cod. Ms. F. Klein 9: 968 (Hurwitz an Klein, 4.8.1884).

15 Hilbert, D. (1886). „Ueber die notwendigen und hinreichenden kovarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz" (datiert Nov. 1885). *Math.Ann*. 27: 158–61. (Hilbert 1933 GMA II).

16 Hilbert, David (1885). „Ueber eine allgemeine Gattung irrationaler Invarianten und Covarianten für eine binäre Grundform geraden Grades". *Berichte der math.-phys. Classe der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften* 37: 427–38.

17 Hilbert, David (1887). „Ueber einen allgemeinen Gesichtspunt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete". *Math.Ann*. 28 (3): 381–446.

18 FREI 1985 ist eine gute Quelle. Nur die biographischen Angaben sind leider z.T. fehlerhaft: so kam Klein z.B. nicht auf Betreiben von H.A. Schwarz nach Göttingen (S. 5, Fußnote 1), sondern *gegen* Schwarz' Wunsch. H.A. Schwarz und auch der zweite Mathematik-Ordinarius Schering verfassten ein Separatvoten gegen die Liste der Fakultätsmehrheit, die Klein an erste Stelle gesetzt hatte. (Vgl. TOBIES 2019: 500–504)

nisse für die *Math.Ann.* zu senden. Klein erkannte in Hilbert „the raising man“[19] und konnte ihn schließlich zum 1. April 1895 als Professor neben sich gewinnen (nach erstem, nicht erfolgreichen Anlauf 1892).

Weitere Förderung von Privatdozenten an der Universität Göttingen

Als Klein zum 1. April 1886 nach Göttingen kam, traf er dort auf zwei Privatdozenten, Otto Hölder, den er bereits in Leipzig inspiriert hatte, sowie *Arthur Schoenflies* (1853-1928), der Klein einen maßgeblichen Hinweis verdankt, um die Symmetrien von Kristallstrukturen mittels Gruppentheorie zu erfassen.[20] Klein kämpfte um ein Extraordinariat für den (aus jüdischem Elternhaus stammenden) Schoenflies. Klein war damit erst erfolgreich, nachdem er 1892 einen Ruf an die Universität München abgelehnt hatte (vgl. TOBIES 2019: 317; 338–39).

Heinrich Burkhardt (1861-1914) war erneut ein wissenschaftlicher Klein-Enkel. Er hatte seine Dissertation „Beziehungen zwischen der Invariantentheorie und der Theorie algebraischer Integrale und ihrer Umkehrungen“ an der TH München erarbeitet, angeregt durch Aurel Voß. Bei Voß bedankte sich Burkhardt eingangs in seiner Dissertation, die er im Juli 1886 an der Universität einreichte.[21] Voß und Walther Dyck empfahlen Burkhardt, seine Karriere bei Klein fortzusetzen.[22] Klein bezog Burkhardt sofort in seine aktuellen Forschungen zu hyperelliptischen Modulfunktionen ein, sodass sich dieser bereits 1889 habilitieren konnte.[23]

Ernst Ritter (1867-1895) ist der einzige Schüler Kleins, dem er selbst einen Nachruf widmete. In Waltershausen (heute Thüringen) geboren, hatte Ritter zwei Jahre in Jena studiert und danach in Göttingen, wo er im Herbst 1890 das Lehramtsexamen und im Frühjahr 1891 das Doktorexamen (bei Klein) absolvierte.[24] Klein hatte Ritter in seine Forschungen zu automorphen Funktionen integriert, wozu dieser auch während der folgenden Zeit im Referendar- und Probejahr in Kontakt mit Klein fortsetzte. Klein gewann ihn für seine Assistentenstelle; und im Sommer 1894 erfolgte die Habilitation.[25] Zum Oktober 1894 wurde Ritter – gemäß Kleins Antrag – ein Privatdozentenstipendium erteilt. John Henry Tanner (1861–1940), 1894 an der Cornell University (Ithaca, USA) zum Assistant Professor ernannt, kam im Herbst 1894 zu Studien nach Göttingen und veranlasste, dass Ritter 1895 ein Assistant Professorship an seiner Universität erhielt.[26] Leider erkrankte Ritter bei der Überfahrt mit dem Schiff an Typhus und verstarb in einem New Yorker Krankenhaus.

Klein bescheinigte Ritter „eine functionentheoretische Grundlegung“ der Theorie der automorphen Funktionen und betonte

---

19 Klein in einem Brief an Friedrich Althoff (preuß. Kultusministerium), zuerst zitiert in TOBIES 1987: 49.

20 Schoenflies, A. (1891). *Krystallsysteme und Krystallstruktur*. Leipzig: B.G. Teubner, bes. S. 622.

21 Publiziert München: Akademische Buchdruckerei F. Straub, 1887.

22 Liebmann, H. (1915). „Zur Erinnerung an H. Burkhardt“. *Jahresbericht DMV* 15: 185–95.

23 [UAG] Kur. 6238 (Personalakte Burkhardt). – Burkhardt führte Arbeiten Kleins zum Thema wesentlich fort, erbrachte Beweise für Kleins postulierte Eigenschaften der Sigmafunktionen. Burkhardt, H. (1888). „Beiträge zur Theorie der hyperellitischen Sigmafunctionen“. *Math.Ann.* 32: 381–442; Burkhardt, H. (1889). „Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung (Nach Volesungen von F. Klein) “. *Math.Ann.* 35 (2): 198–296. Fußnote Kleins (S. 199), Burkhardt habe manches, was er selbst in seiner Vorlesung (1887/88) nur angedeutet hatte, tiefer ergründet und selbständig dargelegt.

24 Ritters Dissertation „Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null, eine Revision und Erweiterung der Poincaré’schen Sätze“. *Math.Ann.* 41 (1893) pp. 1–82.

25 Ritter, E. (1894). „Die multiplicativen Formen auf algebraischen Gebilden beliebigen Geschlechtes mit Anwendung auf die Theorie der automorphen Formen“. *Math.Ann.* 44: 261–374; „Die Stetigkeit der automorphen Functionen bei stetiger Abänderung des Fundamentalbereiches“. *Ebd.* 45: 473–544; 46 (95): 200–48.

26 Tanner war seit 1894/95 im Amtlichen Verzeichnis der Studenten an der Universität Göttingen eingetragen, nahm 1995, 1895/96 und 1896 an Lehrveranstaltungen von Klein teil. Es bleibt unklar, ob Ritter die Überfahrt nach Amerika ohne seine Begleitung bewältigen musste. Vgl. auch Snyder, Virgil (1940). “John Henry Tanner – in Memorian.” *Bulletin of the American Mathematical Society* (New Series) 46 (5): 374.

> Kein Zweifel, dass vermöge seiner überaus zuverlässigen Darstellung die allgemeine Theorie der auf einer Riemann'schen Fläche existirenden Functionen eine bleibende Förderung erfahren hat. Ich nenne hier nur den durchgängigen Gebrauch der homogenen Variablen, die multiplicativen Formen, die Stetigkeit der Functionen bei stetiger Abänderung der Riemann'schen Fäche, und aus seiner noch ungedruckten Arbeit die allgemeinen Sätze über die zu einer Riemann'schen Fläche gehörigen linearen Differentialgleichungen.[27]

Ritters Ergebnisse flossen in FRICKE/KLEIN (1897, 1912) ein.

Klein veranlasste 1894 auch *Georg Bohlmann* (1869-1928) zur Habilitation in Göttingen. Klein estimierte Bohlmanns Anknüpfen an Lies Gruppentheorie,[28] förderte dessen Arbeiten und lenkte ihn in das in Göttingen neu ertablierte Gebiet Versicherungsmathematik, wo Bohlmann herausragende Ergebnisse zur axiomatischen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie erzielte.[29] Klein plante weiter mit Bohlmann, erreichte eine n.b.ao. Professur für ihn, aber Bohlmann wählte die sichere Position in einer Versicherungsgesellschaft.

Als nächster Habilitationskandidat folgte im März 1895 *Arnold Sommerfeld* (1868-1951), wiederum ein wissenschaftlicher Felix-Klein Enkel. Er hatte 1891 bei Lindemann in Königsberg promoviert und fand durch Klein ein geeignetes Habilitationsgebiet (die mathematische Theorie der Diffraktion), wie Sommerfeld begeistert an seine Mutter berichtete. Die Kooperation zwischen Klein und Sommerfeld ist inzwischen hinreichend analysiert worden (vgl. ECKERT 2013; auch TOBIES 2021: 388–90).

Über *Constantin Carathéodory* (1873-1950) ist sehr viel publiziert worden. Akten in Göttingen harren jedoch noch einer exakten Analyse. Carathéodory hatte das Abitur in Brüssel absolviert, ein Ingenieurstudium sowie eine (internationale) Tätigkeit als Bauingenieur angeschlosen, sich weiter Mathematik im Selbststudium angeeignet und dies ab 1900 mit Studien in Berlin und ab 1902 in Göttingen vertieft.[30] Am 23. Juni 1904 reichte er die Arbeit „Untersuchungen aus der Variationsrechnung" als Dissertationsschrift ein. In der Akte steht: „Kand. wünscht Termin [für die mündliche Prüfung] möglichst bald nach dem 15. Juli. Die Arbeit erhält ein besonderes Prädikat."[31] Für das Rigorosum wurde der 13. Juli festgesetzt. Minkowskis Gutachten – auch sprachlich ein Genuss –, verfasst am 25. Juni 1904, lautet:

> Die Variationsrechnung, eine der reichsten Adern in den Tiefen der Analysis, ist erst in den der Oberfläche nächstgelegenen Gängen aufgeschlossen. Eine seitliche Verästelung, welche eigenartige Schätze birgt, an denen frühere Sucher vorübertasteten, deckt Carathéodory auf.
> Er befreit die Grundaufgabe über das Extremum eines einfachen Integrals von der oft unbrauchbaren Beschränkung auf lösende Curven mit durchweg stetig sich ändernder Fortschreitungsrichtung, Denn unter sehr allgemeinen Umständen kommt ein verlangter extremer Charakter für eine Curve nur so zu Stande, dass dabei die Curve Ecken aufweist.
> Mit Gewandtheit handhabt C. die für das Gebiet von Weierstrass geschaffenen Arbeitsmethoden, und zugleich weiss er bei jedem Schritte und in abwechslungsreicher Manier den Resultaten eine anschauliche geometrische Interpretation zu leihen wie überhaupt die Darstellungsweise eine lebendige ist. Das Verständniss der entwickelten Theorien wird verstärkt durch mehrere ausgedehnte Beispiel, die so geschickt gewählt sind, dass sie eine Durchführung und Discussion bis in alle Einzelheiten gestatten und zugleich an sich ein Interesse bieten. Zu bemerken ist noch, dass C. sich den Stoff selständig gewählt hat.
> Die Arbeit gehört zu den besten mathematischen Dissertationen, die in den letzten Jahren der Fakultät eingereicht [worden] sind, und beantrage ich die Zulassung des Kandidaten zur mündlcihen Prüfung.
> H. Minkowski

27 Klein, F. (1897). „Ernst Ritter † " (datiert 25.9.1895). *Jahresbericht der DMV* 4: 52–54, Zitat S. 53.

28 Er hatte in Berlin studiert, aber seine Dissertation *Über eine gewisse Klasse continuierlicher Gruppen und ihren Zusammenhang mit den Additionstheoremen* (1892) in Halle eingereicht: https://archive.org/details/bereinegewissek00bohlgoog/page/n5/mode/2up

29 Krengel, Ullrich (2011). "On the Contributions of Georg Bohlmann to Probability Theory." *Electronic Journal for History of Probability and Statistics* 7 (1) : 1–13.

30 Zu Carathéodorys Entscheidung, von Berlin nach Göttingen zu wechseln, vgl. Christine Phili's Artikel http://www.24grammata.com/wp-content/uploads/2011/12/Caratheodori-24grammata.com_.pdf

31 Vgl. hier und im Folgenden [UAG] Phil. Fak. 190 b1, Nr. 29.

Carathéodory hatte als Prüfungsfächer gewählt: Hauptfach Mathematik (Minkowski); Angewandte Mathematik (Klein) und Astronomie (Schwarzschild). Alle prüften breit in ihren Gebieten, im Hauptfach eine Stunde, in den Nebenfächern je eine halbe Stunde. Sie kamen zum gemeinsamen Urteil *magna cum laude*. Hier sei mitgeteilt, was Klein – der Carathéodory aus zwei Seminarvorträgen kannte[32] – handschriftlich in die Akte eintrug:

> Angewandte Mathematik: Kräftepläne und reciproke Polyeder der graphischen Statik. Spannungen in elastischen Systemen. Airy'sche Function. – Centralprojection als Collineationen von verschwindender Determinante. Elemente der Photogrammetrie. – Pothenot'sches Problem. Clairaut'sche Gradmessung. Eratosthenes. – Methode der kleinsten Quadrate. Gauß' Fehlergesetz. Der Candidat hat vielseitige und zuverlässige Kenntnisse.

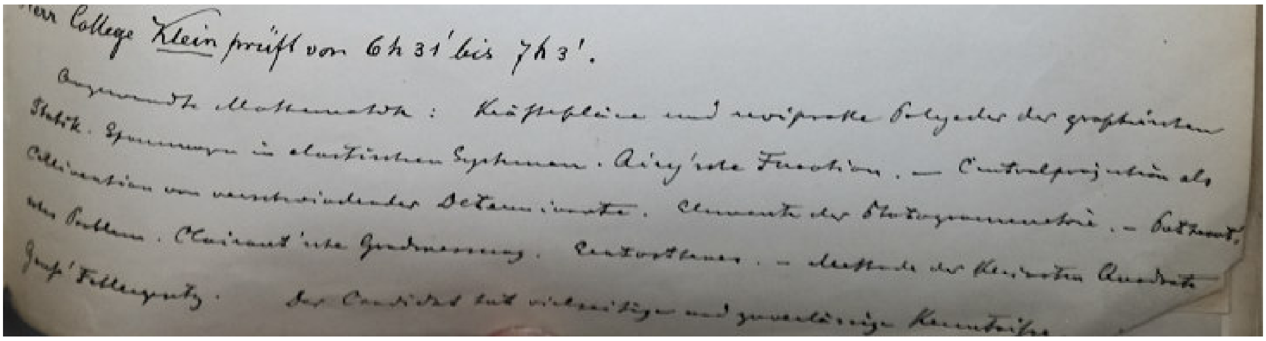

…r College Klein prüft von 6h 31' bis 7h 3'.

Abb.: Kleins handschriftlicher Eintrag der Prüfungsgegenstände bei Carathéodorys Rigorosum

Es war Felix Klein, der Carathéodory sofort aufforderte, sich in Göttingen zu habilitieren. So reichte Carathéodory bereits am 26. Januar 1905 sein Gesuch zur Habilitation ein, was die Mathematiker gegen philologische Bedenkenträger (aufgrund der kurzen Frist) durchsetzten.[33] Es wurde eine Habilkommission gebildet, bestehend aus (in alphabetischer Reihenfolge in der Akte): Hilbert, Minkowski, Klein, Runge. Schwarzschild, Voigt, Wiechert. Das Verfassen des Gutachtens zur Habilschrift *Über die starken maxima und minima bei einfachen Integralen* wurde Hilbert übertragen. Er schrieb u.a.: „Es gelingt nun […] dem Candidaten, mit einer alle Erwartung übertreffenden Vollständigkeit, die Frage nach den Kurven, für die ein einfaches Integral den absolut grössten oder kleinsten Wert annimmt, zu beantworten […]. Die Arbeit […] repräsentiert […] den wichtigsten Fortschritt, der in der besonderen Theorie der Maxima und Minima einfacher Integrale seit Weierstrass gemacht worden ist. Die Persönlichkeit des Kandidaten ist die eines ausgereiften und durchgebildeten Mathematikers, der die moderne Analysis beherrscht und die vielseitigen Verzweigungen und Anwendungen der funktionentheoretischen Disciplinen aufs gründlichste kennt." Es folgen Urteile von Minkowski, Klein, und der weiteren Kommissionsmitglieder. Klein trug in die Akte ein:

> Auch ich kenne Hrn. Carathéodory als einen Mann von vielen Kenntnissen und gereiftem mathematischen Urteil. Was die von ihm eingereichten Arbeiten angeht, so hebe ich in Ergänzung der vorstehenden Voten gern noch hervor, dass die in den math. Annalen abgedruckte Notiz[34] den Verfasser als geschickten Geometer erkennen lässt. Für Zulassung zum Colloquium. 10. Febr. 05 Klein

Im Colloquium am 27. Februar 1905 prüften Hilbert, Minkowski und Klein. Der Probevortrag über „Länge und Oberfläche" folgte am 4. März 1905, womit ihm die venia legendi für Mathematik erteilt wurde. Diese Urteile bildeten die Basis, dass Carathéodory einstimmig als

32 Vorträge am 23.7.1902 und am 18.5.1904,
vgl. https://firsching.ch/klein/#id-844; https://firsching.ch/klein/#id-912

33 Vgl. hier und im Folgenden [UAG] Phil. Fak. 190a, V, 31–43.

34 Damit meinte Klein die Arbeit: Carathéodory, C. (1904). „Zur geometrischen Deutung der Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen". *Math.Ann*. 59: 377–82 (datiert Febr. 1904). [UAG] Phil. Fak. Kur 6275. Bl. 8.

Nachfolger Kleins bestimmt wurde (vgl. TOBIES 2021: 522–23). Der Minister ernannte ihn zum 1. April 1913 mit Jahresgehalt von 7.200 Mark plus 720 Mark Wohnungsgeldzuschuss.

Paul Koebe (1882-1945) erzielte Ergebnisse in Kleins wichtigstem Gebiet. Er hatte seine Grundausbildung – wie Carathéodory – bei H.A. Schwarz in Berlin erworben und auch bei diesem promoviert, kam aber danach nach Göttingen, wo er, angeregt durch Klein, sich mit dem Thema *Die Uniformisierung algebraischer Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe* (1907) habilitierte und zu weiteren Arbeiten (insbes. maßgeblichen Beweisen der Uniformisierungstheoreme) inspiriert wurde (vgl. TOBIES 2021a). Koebes Forschungsfeld blieb auf dieses Gebiet beschränkt; auch seine Persönlichkeit war weniger ausgereift, sodass er als Kleins Nachfolger unberücksichtigt blieb.

Mit *Conrad Heinrich Müller* (1878-1953) und *Rudolf Schimmack* (1881-1912) etablierte Klein Geschichte der Mathematik (1908) und Didaktik der mathematischen Wissenschaften (1911) als neue Habilitationsgebiete in Göttingen (vgl. bes. TOBIES 2019: 411–13; 433–35).

Auch *Theodor* [Theodore von] *Kármán* (1881-1963) erfuhr durch Klein eine besondere Förderung. Er hatte 1902 ein Maschineningenieurdiplom an der Technischen Hochschule Budapest erworben, der berühmten Josephs-Universität der technischen Wissenschaften, bekannt durch ihre führende Rolle in der Mathematik und die Bezeichnung „das Göttingen der [österreich-ungarischen] Monarchie“. Kármáns Hochschullehrer waren u.a. Julius [Gyula] König (1849-1913), mit dem Klein seit 1873 in gutem Kontakt stand, und Gusztáv Rados (Raussnitz) (1862-1942), der zwei Semester bei Klein in Leipzig studiert hatte. Nach dem Studium war Kármán ein und ein halbes Jahr im Konstruktionsbüro einer Maschinenfabrik (Cranz & Co.) und drei Jahre als Assistent an der Budapester TH tätig. In Göttingen wollte er seine Studien in theoretischer Richtung ergänzen, besuchte Veranstaltungen von Abraham, Carathéodory, Hilbert, Klein, Prandtl, Runge und Voigt – wie er in seiner Vita zur Dissertation angab.[35] Er kam im Herbst 1906, verbrachte ein Semester an der Versuchsanstalt der TH Charlottenburg und reichte am 12. Juli 1908 sein Gesuch zur Promotion in Göttingen ein.

Seine Dissertationsschrift „Untersuchungen über die Knickfestigkeit gerader Stäbe“ beurteilte Ludwig Prandtl mit Bestnote „Opus eximium“.[36] Das Doktorexamen fand am Mittwoch, den 28.10.1908, von 18.00 bis 20.00 Uhr statt. Prandtl prüfte eine Stunde im Hauptfach Angewandte Physik; Klein (Mathematik) und Woldemar Voigt (Physik) hatten für die Nebenfächer je eine halbe Stunde. Das Gesamturteil des Examens lautete *magna cum laude*. Klein trug folgende Prüfungsgegenstände in die Akte ein:

> Partielle Differentialgleichungen vom elliptischen und hyperelliptischen Typus. Rolle der Charakteristiken im letzteren Falle. Analytischer Charakter der Lösungen, je nach der Art der Randwerte.
> Arten der Flächen 2. Grades. Kreisschnitte eines Ellipsoids, allgemeine Schnitte mit parallelen Ebenen.
> Grundeigenschaften der Zentralprojektion. Das anharmonische Verhältnis von 4 Punkten.
> Der Fundamentalsatz der Algebra und sein Beweis.
> Der Kand. hat gute mathematische Auffassung, aber nicht überall präsente mathematische Kenntnisse.“

Die Habilitation sollte ein Jahr später erfolgen. Klein kannte Kármán näher, denn dieser hatte sich seit WS 1906/07 in seine Vorlesungen eingeschrieben und einen Vortrag über „Unstetige Potentialbewegungen“ im Seminar zur Hydrodynamik 1907/08 gehalten,[37] das Klein gemeinsam mit Runge, Prandtl und Wiechert leitete.[38] Im Sommer 1909 beteiligte sich Kármán am Seminar, in dem Klein „weitere Fragen der Festigkeitslehre unter besonderer Berücksichtigung der experimentellen Grundlagen“ zu behandeln gedachte (das Seminar war wiederum gemeinsam mit Prandtl und Runge angekündigt).[39] Kármáns Beitrag (27. Juni 1909) lautete

35 [UAG] Phil. Fak. 141, Nr. 15 (Prom.-Akte Th. Kármán).
36 [UAG] Phil. Fak. 141, Nr. 15 (Prom.-Akte Th. Kármán).
37 [Protokolle] Bd. 27: 11–17 (Vortrag Kármáns am 27.11.1907).
38 Vgl. Zur Analyse des Seminars ECKERT 2019.
39 [Protokolle] Bd. 27: 296 (Kleins einführende Disposition am 5. Mai 1909)

„Bemerkungen über den Begriff der Deformationsarbeit und die Anwendung des Castiglians'schen Princips für Temperaturänderungen".[40]

Prandtl beantragte im Juli 1909 eine Assistentenstelle für Kármán, der sich für Mechanik und Wärmelehre habilitieren konnte. Die Habilitationsschrift lautete *Untersuchungen über die Bedingungen des Bruches und der plastischen Deformation, insbesondere bei quasi-isotropen Körpern* (Göttingen 1910).

Kármán setzte die in Kleins Seminaren angeregten Forschungen fort, wobei seine durch Klein inspirierten Ergebnisse hervorgehoben seien, die zur *Kármánschen Wirbelstraße* führten. Klein hatte in seiner Hydrodynamischen Vorlesung 1899/1900, die ausgearbeitet im Lesezimmer zur Verfügung stand, und in Seminaren grundlegende Themen anschaulich behandelt, auf die wichtigste Literatur verwiesen und Forschungsfragen aufgeworfen. Dazu gehörte auch das Thema „Wirbel und Wirbelkörper", wozu Klein am 6. November 1907 eingangs in seinem Seminar sprach und ins Protokollbuch eintrug:

> 4. Wirbel und Wirbelkörper (siehe Maxwell, sowie Riecke in den Göttinger Nachrichten von 1888). Schilderung der Wirbelkörper (d.h. der mitgeführten, um die Wirbelfäden zirkulierenden Wassermassen) im Falle zweier paralleler geradliniger entgegengesetzter Wirbelfäden und im Falle von Helmholtzzwiebeln verschiedene Querschnitte. Wie weit sind diese spezifischen Beispiele für die bei beliebigen Wirbeln stattfindenden Verhältnisse demonstrativ? Klein.[41]

Am 20. August 1909 notierte Klein im Urlaub auf Langeroog selbst noch eine kleine Arbeit zum Thema „Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten".[42] Als Kármán die entscheidenden Resultate erzielte, d.h. die regelmäßige Anordnung von alternierenden Wirbelfäden hinter einem Hindernis berechnete, reichte Klein dessen Arbeit am 14. September 1911 bei der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften ein.[43] Kármáns Form der Wirbelanordnung ging als *Kármánsche Wirbelstraße* in die Geschichte ein. Klein prophezeite dem Ungarn, dass ihm die nächste Professur im Gebiet gewiss wäre; bereits 1912 erhielt er einen Ruf an die TH Aachen (vgl. TOBIES 2019: 404), und emigrierte schließlich in die USA.

Die Reihe der von Klein bis zur Habilitation Geförderten ist nicht abgeschlossen. Hier sei noch *Emmy Noether* (1882-1935) besonders hervorgehoben, die in engem Austausch mit Klein zur Arbeit „Invariante Variationsprobleme" (Juli 1918) gelangte. Diese Arbeit, welche die für die Physik wichtigen Noether-Theoreme enthält, widmete die Klein zum 50-jährigen Doktorjubiläum.[44] Diese Schrift wurde ihre Habilitationsschrift. Nach zwei vergeblichen Anläufen zur Habilitation (1915 und 1917) konnte sie – dank Kleins Anstoß – ihr Habilitationsverfahren im Mai 1919 als erste Mathematikerin deutschlandweit realisieren. Kleins Brief vom 5. Januar 1919 an Ministerialdirektor Otto Naumann (1852-1925) im preußischen Kultusministerium zeugt vom diplomatisch geschicktem Engagement:

> Ew. Exzellenz
>
> Erinnern sich ja sicher des s.Z. bei der hiesigen Fakultät eingereichten Gesuches der Frl. Noether, sich für Mathematik habilitieren zu dürfen. Von den Vertretern der Math.[ematik] lebhaft befürwortet, wurde dieses Gesuch s.Z. aus allgemeinen Gründen abgewiesen, aber ein Modus vivendi gestattet, durch den Frl. Noether immerhin eine gewisse Wirksamkeit ermöglicht ist. Ich verstand damals die so umschriebene Entscheidung des Ministeriums natürlich sehr wohl, aber möchte fragen, ob diese auch fernerhin auf alle Fälle aufrecht erhalten werden soll. Wenn nicht, so möchte ich die hiesige Fakultät veranlassen, sich erneut mit der Angelegenheit zu beschäftigen.

---

40 Ebd. Bd. 27: 333–37 (Kármáns Vortrag, den Klein mit „Ausführungen [zur Deformationsarbeit bei Temperaturänderungen] vom Standpukte der Thermodynamik aus" bezeichnete, S. 388)

41 [Protokolle] Bd. 27: 5–6 (F. Klein).

42 Publiziert in *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 58 (1910), KLEIN 1922 (GMA Bd. II): 710–13.

43 Kármán, Th.v. (1911). „Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt". *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-physikalische Klasse* 1911: 509–17.

44 Vgl. TOBIES 2004; TOLLMIEN 2023 dokumentiert die Kooperation zwischen Klein und E.Noether minutiös.

Bei den heutigen Zeitumständen kann es in der Tat nicht fehlen, dass die jetzige Stellung von Frl. Noether von vielen Seiten als eine unbillige Einengung empfunden wird, zumal die wiss.[enschaftliche] Leistung von Frl. Noether alle von uns gehegte Voraussicht weit übersteigt. Sie hat im letzten Jahre eine Reihe theoretischer Untersuchungen abgeschlossen, die oberhalb aller im Zeitraum von Anderen hierorts realisierten Leistungen liegen (die Arbeiten der Ordinarien mit eingeschlossen), sie hat auch auf die Zusammenarbeit der gleichstrebenden Mathematiker durch Besprechungen und Vorträge in der math.[ematischen] Ges.[ellschaft] den günstigsten Einfluß geübt. Die Voraussetzungen für eine Ausnahmebehandlung des Falles sind also in vollstem Maasse gegeben. Aber vielleicht ist es nach der inzwischen eingetretenen Zulassung von Frauen zu den verschiedensten Staatsämtern überhaupt jetzt nicht mehr nötig, auf Ausnahmeleistung zu argumentieren.

Eine ganz kurze Antwort ist Alles, was ich hier erbitte.

Ew. Exzellenz

ganz erbenster Kln[45]

Kultusminister Konrad Haenisch (1876-1925) informierte den Göttinger Universitätskurator am 8. Mai 1919, dass gegen Emmy Noethers Habilitation keine Einwände erhoben werden und verfügte am 21. Februar 1920 generell, „[…] dass in der Zugehörigkeit zum weiblichen Geschlecht kein Hindernis gegen die Habilitation erblickt werden darf […].“[46]

Wir finden auch in diesem Kontext bestätigt, dass Klein mathematisch begabte Personen unabhängig von Geschlecht, Nationalität und Religionszugehörigkeit förderte. Als der ungarisch-amerikanische Physiker Eugene P. Wigner (1902-1995), Nobelpreis 1962, in einem Einstein gewidmeten Vortrag von 1949 das Thema Invarianz und Physik behandelte, verwies er auf *Kleins Schule* in diesem Kontext,[47] übersah aber noch Emmy Noethers Ergebnisse.[48]

Im Unterschied zu Physikern, die Emmy Noethers Arbeit lange Zeit ignorierten bzw. nicht verstanden, setzte Felix Klein noch wenige Wochen vor seinem Tode, am 13. April 1925, Emmy Noethers herausragenden Beitrag in einem Brief an Max Planck in das Licht:

Wenn ich die Sache richtig beurteile, besteht zwischen Ihnen und mir jetzt Übereinstimmung, aber nicht mit Kollegen von Laue. Ganz klar ist das Sachverhältnis bei Fraulein Noether in den Göttinger Nachrichten von 1918 auseinander gesetzt [...] Da steht S. 255 unter Angabe klarer mathematischer Gründe, warum in der speziellen Relativitätstheorie eigentliche Erhaltungssätze gelten, in der allgemeinen Relativitätstheorie aber nicht. Leider ist die Arbeit von Fraulein Noether sehr knapp geschrieben und auch noch durch die Allgemeinheit der Darstellung in ihrer Tragweite schwer aufzufassen. Damit mag zusammenhängen, das die Physiker die Arbeit nicht gelesen haben. – Übrigens ist Kollege von Laue dem Sachverhalt auf S. 175-177 des Bandes II seiner Relativitätstheorie von 1921 ganz nahe; er unterbricht nur die conklusive mathematische Entwicklung durch ein Beispiel, in welchem er Vorstellungen der traditionellen Physik heranzieht. Ob man die allgemeine Relativitätstheorie annehmen will oder nicht, ist eine Frage für sich, hinsichtlich derer ich keine feste Meinung zu vertreten habe. Wenn man sie aber annimmt, ist die mathematische Entwicklung zwangsläufig; nur in diesem Sinne bin ich „Purist“.[49]

---

45 Zuerst zitiert in TOBIES 1991/92: 172 (Anhang Nr. 13); vgl. auch TOBIES 2019: 461.

46 TOBIES 1991/92: 160.

47 “Let me first stress the points of similarity between the role of invariance in classical and quantum theories. The principles of invariance have a dual function in both theories. On the one hand, they give a necessary condition which all fundamental equations must satisfy: the irrelevant initial conditions must not enter in a relevant fashion into the results of the theory. Second, once the fundamental equations are given, the principles of invariance furnish, in the form of conservation laws for linear momentum and energy, for angular momentum and the motion of the center of mass, can be derived both in classical theory and in quantum mechanics from the invariance of the equations with respect to infinitesimal displacements and rotations in space-time.” Dazu merkte Wigner an: “In classical theory, this observation is due to F. Klein’s school. Cf. also F. Engel, ‘Über die zehn allgemeinen Integrale der klassischen Mechanik,’ *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen*, p. 270 (1916); also G. Hamel, ‘Die Langrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik,’ *Z.Math. Phys*., 50, 1 (1904), and E. Bessel-Hagen, ‘Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik,’ *Math.Ann*., 84, 258 (1921).” (WIGNER 1995: 287–88; Anmerkung p. 288).

48 Darauf verwies dezidiert Cordula Tollmien, die die Quellen detailliert analysierte, TOLLMIEN 2023: 468–69.

49 Klein an Max Planck, Brief v. 13.4.1925 (in der Handschrift seiner Tochter Elisabeth Staiger, geb. Klein). Die Autorin dankt Dieter Hoffmann (Berlin) für die Quelle, publiziert (in engl. Übers.) in TOBIES 2021:541.

Bibliographie

[UAG] Universitätsarchiv Göttingen, Philosophische Fakultät. Berufungs-, Promotions-, Habilitationsakten.

[UBG] Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. F. Klein (Nachlass Felix Kleins).

CONFALONIERI, Sara; SCHMIDT, Peter-Maximilian; VOLKERT, Klaus eds. (2019). *Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern* (Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, 12, hg. v. Ralf Krömer und Gregor Nickel). Siegen: Universitätsverlag.

ECKERT, Michael (2013). *Arnold Sommerfeld: Science, Life and Turbulent Times 1868–1951*. Berlin: Springer (German original: Göttingen: Wallstein, 2013).

— (2019). *Strömungsmechanik zwischen Mathematik und Ingenieurwissenschaft: Felix Kleins Hydrodynamikseminar 1907–08*. Hamburg: University Press.

FREI, Günther (1985). *Der Briefwechsel David Hilbert – Felix Klein (1886–1918).* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

FRICKE/KLEIN (1897). Fricke, Robert; Klein, Felix. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen.* Vol. I: *Die Gruppentheoretischen Grundlagen*. Leipzig: B.G. Teubner. Trans. Arthur M. DuPre, *Lectures on the Theory of Automorphic Functions* (Classical Topics in Mathematics, 3). Beijing: Higher Education Press, 2017.

FRICKE/KLEIN (1912). Fricke, Robert; Klein, Felix. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen.* Vol. II: *Die functionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen.* Leipzig: B.G. Teubner. Trans. A.M. DuPre, *Lectures on the Theory of Automorphic Functions* (Classical Topics in Mathematics, 4). Beijing: Higher Education Press, 2017.

KLEIN, Felix (1921/1922/1923). *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bd. I, II, III (GMA I, II, III). Berlin: Julius Springer.

TOBIES, Renate (1987). „Zur Berufungspolitik Felix Kleins“. *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin* 24 (2): 43–52.

— (1991/92). „Zum Beginn des mathematischen Frauenstudiums in Preußen“. *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin* 28 (2): 151–72.

— (2004). „Die Noether-Theoreme“. In Tyradellis, D.; Friedlander, M.S. eds., *10 + 5 = Gott: Die Macht der Zeichen* (Jüdisches Museum Berlin). Köln: 283–84.

— (2019). *Felix Klein: Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*. Berlin: Springer Spektrum.

— (2021). *Felix Klein: Visions for Mathematics, Applications, and Education.* Cham: Birkhäuser.

— (2021a). „Felix Klein und Paul Koebe: *Durchführung eines im Grunde doch Kleinen Programms*.” In Fischer, H.; Sauer, T.; Weiss, Y. eds., *Exkursionen in die Geschichte der Mathematik und ihres Unterrichts*. Münster: WTM-Verlag: 274–91.

— (2023). *Felix Klein und Georg Pick. Mathematische Talente fordern und fördern*. SpringerSpektrum: Berlin

TOBIES, Renate, ROWE, David E. (Hg.) (1990). *Korrespondenz Felix Klein – Adolph Mayer. Auswahl aus den Jahren 1871 – 1907.* Leipzig: B.G. Teubner.

TOLLMIEN, Cordula (2021, 2023). *Die Lebens- und Familiengeschichte der Mathematikerin Emmy Noether in Einzelaspekten* 2, 3. Ahrensburg: tredition.

VOSS, Aurel (1919). „Felix Klein als junger Doktor“. *Die Naturwissenschaften* 7: 280–87.

Kunstkrimigeschichte

Herwig Säckl

Lesung des Beginns einer Kriminalgeschichte aus dem Künstlermilieu

Autorenlesung

Philonsche Gerade

Marko Razpet

Pädagogische Fakultät

Universität in Ljubljana

Zusammenfassung

Die Philonsche Gerade durch einen ausgewählten Punkt innerhalb eines gegebenen Winkels schneidet ihre Schenkel so, dass der Abstand zwischen den Schnittpunkten am kürzesten ist. Im Allgemeinen ist die geometrische Konstruktion einer Philonschen Geraden nur mit einem unmarkierten Lineal und einem Zirkel nicht möglich. Das Problem führt zu einer kubischen Gleichung, deren einzige positive Wurzel die Philonsche Gerade exakt bestimmt. Wir werden ihre wichtigsten Eigenschaften erläutern. Die Philonsche Gerade erhält man auch durch die Schnittpunkte eines Kreises und einer Hyperbel.

Einleitung

Die Philonsche Gerade wurde nach dem antiken Mechaniker, Mathematiker und Schriftsteller Philon von Byzanz benannt. Er ist auch bekannt als Philon der Mechaniker, der im 3. Jahrhundert vor Christus lebte. Über Philon selbst ist es nur wenig bekannt. Er arbeitete hauptsächlich in Alexandria, wahrscheinlich am berühmten Museion, und auf Rhodos. Er schrieb *Handbuch der Mechanik*, das aus 9 Büchern bestand, in denen er auch einige mathematische Probleme behandelte, aber am ausführlichsten widmete er dem Hafenbau, der Mechanik, den Katapulten, den Belagerungsmaschinen, den Verteidigungsanstalten und angeblich sogar der Geheimschriftstellerei (siehe [1]). Es ist vollständig erhalten auf Griechisch nur Buch 4 und einige Bücher in arabischer Übersetzung. In der Mathematik löste er das Problem der Würfelverdoppelung und gab einige alternative Beweise von Sätzen aus Euklids Elementen (einer davon ist in [4] veröffentlicht).

Philonsche Gerade

Ein Winkel $\vartheta = \angle XOY$ mit Scheitelpunkt O und zwei Schenkel OX und OY (Abb. 1) is gegeben. Dabei ist $0 < \vartheta < \pi$. Innerhalb des Winkels sei P ein Punkt, der von den Schenkeln OX und OY um a und b entfernt ist. Wir zeichnen eine Gerade durch P, die den OX-Schenkel im Punkt A schneidet, und den OY-Schenkel im Punkt B. Es ist eine solche Gerade zu finden, dass der Abstand $|AB|$ am kleinsten ist. Diese Gerade wird die Philonsche Gerade durch den Punkt P im Winkel ϑ genannt. Die Philonsche Gerade ist vom Winkel und vom Punkt in diesem Winkel abhängig.

Wenn nämlich A weit genug von O entfernt ist, kann der Abstand $|AB|$ beliebig große Werte erreichen, aber wenn wir es näher an O heranbringen, entfernt sich B von O und wieder nimmt $|AB|$ einen beliebig großen Wert an. Dazwischen erreicht $|AB|$ einen Mindestwert. Später werden wir dies mit der Infinitesimalrechnung bestätigen.

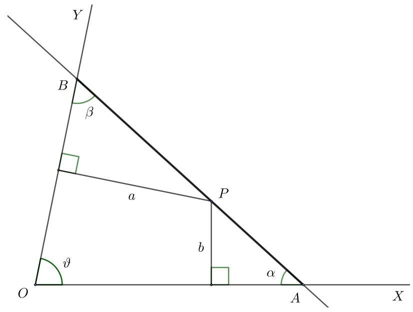


Abb. 1: Die Sekante des Winkels durch einen gegebenen Punkt.

Im Dreieck OAB bezeichnen wir die Winkel an den Eckpunkten A und B mit α und β. Natürlich gelten die Beziehungen $\alpha+\beta+\vartheta=\pi$, $0<\alpha<\pi-\vartheta$ und $0<\beta<\pi-\vartheta$. Der Abstand $\ell(\alpha)=|AB|=|AP|+|PB|$ wird durch den Winkel α in folgender Form ausgedrückt:

$$\ell(\alpha)=\frac{b}{\sin\alpha}+\frac{a}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin\alpha}+\frac{a}{\sin(\pi-\vartheta-\alpha)}=\frac{b}{\sin\alpha}+\frac{a}{\sin(\alpha+\vartheta)}.$$

Damit wird eine positive Funktion $\ell:\alpha\mapsto\ell(\alpha)$ auf dem Intervall $(0,\pi-\vartheta)$ definiert. Ihre ersten zwei Ableitungen sind

$$\ell'(\alpha)=-\frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{a\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin^2(\alpha+\vartheta)}=\frac{a\cos\beta}{\sin^2\beta}-\frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

$$\ell''(\alpha)=\frac{b(1+\cos^2\alpha)}{\sin^3\alpha}+\frac{a(1+\cos^2\beta)}{\sin^3\beta}.$$

Die Gleichung $\ell'(\alpha)=0$ hat eine Lösung α_0 auf dem Intervall $(0,\pi-\vartheta)$, wo offensichtlich das lokale Minimum der Funktion ℓ ist. Mit dem Winkel α_0 ist die Philonsche Gerade genau definiert. Der Winkel β ist damit $\beta_0=\pi-\vartheta-\alpha_0$.

Koordinatenberechnung

Die Funktion ℓ kann verwendet werden, um die Eigenschaften der Philonschen Geraden abzuleiten. Das Problem ergibt sich bei der Lösung der trigonometrischen Gleichung $\ell'(\alpha)=0$. Die gesamte Behandlung der Philonschen Gerade erfolgt jedoch mit Hilfe von Koordinaten. Wir beschreiben den Punkt P im Winkel ϑ mit schiefwinkligen Koordinaten (Abb. 2). Wir projizieren den Punkt P parallel zu den OY- und OX-Schenkeln zu Punkten P' und P''. Bezeichnen wir $e=|P''P|$ und $f=|P'P|$, die wir die *schiefwinkligen Koordinaten* des Punktes P im Winkel ϑ nennen.

Dann führen wir $u=|P'A|$ und $v=|P''B|$ ein, die wir als Variablen betrachten werden. Wie wir sehen werden, sind sie voneinander abhängig. Hier gelten natürlich die Beziehungen $a=e\sin\vartheta$ und $b=f\sin\vartheta$.

Die Dreiecke $P'AP$ und $P''PB$ sind einander ähnlich, was bedeutet, dass die Beziehung $f/u=v/e$ gilt. Daraus erhalten wir $uv=ef$.

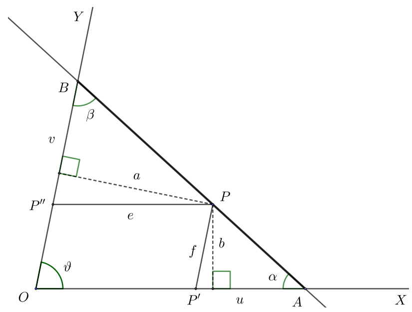


Abb. 2: Schiefwinklige Koordinaten eines Punktes.

Das Quadrat der Länge der Strecke $|AB|$ wird durch den Kosinussatz ausgedrückt:

$$|AB|^2 = (e+u)^2 + (f+v)^2 - 2(e+u)(f+v)\cos\vartheta.$$

Wegen der Beziehung $uv = ef$ können wir v eliminieren und erhalten zunächst

$$z(u) = |AB|^2 = (e+u)^2 + (f+ef/u)^2 - 2(e+u)(f+ef/u)\cos\vartheta$$

und dann durch Vereinfachung noch

$$z(u) = \frac{(e+u)^2}{u^2}(u^2 + f^2 - 2fu\cos\vartheta).$$

Die Funktion $z : u \mapsto z(u)$ ist definiert, stetig und ableitbar auf dem Strahl $(0,\infty)$, ihre Ableitung ist

$$z'(u) = \frac{2(e+u)}{u^3}(u^3 - fu^2\cos\vartheta + efu\cos\vartheta - ef^2).$$

Die notwendige Bedingung für das Extremum der Funktion z ist die Gleichung

$$u^3 - (f\cos\vartheta)u^2 + (ef\cos\vartheta)u - ef^2 = 0, \tag{$\star$}$$

die mindestens eine positive Wurzel hat, denn für $u = 0$ ist der Term auf der linken Seite negativ, und für ein genügend großes positives u ist er positiv. Die Existenz eines Minimums der Funktion z ist durch die Existenz eines Minimums der Funktion ℓ garantiert.

Wenn u_1, u_2, u_3 die Wurzeln der Gleichung ($\star$) sind, dann gilt für sie der Satz von Vieta:

$$u_1 + u_2 + u_3 = f\cos\vartheta, \quad u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = ef\cos\vartheta, \quad u_1u_2u_3 = ef^2.$$

Die letzte Formel erlaubt es, dass alle drei Wurzeln positiv sind oder zwei negative und eine positive oder zwei konjugiert komplexe und eine positive. Wir wollen zeigen, dass die erste Möglichkeit nicht zutrifft. Aus dem Satz von Vieta erhalten wir

$$\frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3)\cdot\frac{1}{3}(1/u_1 + 1/u_2 + 1/u_3) = \frac{1}{9}\cos^2\vartheta.$$

Wenn alle Wurzeln positiv wären, dann wäre der erste Faktor in dieser Beziehung ihr arithmetischer Wert, der zweite Faktor wäre der Kehrwert ihres harmonischen Mittels. Da das harmonische Mittel nicht das arithmetische Mittel übersteigt, ist die linke Seite größer oder gleich 1, was bedeuten würde, dass $\cos^2\vartheta \geq 9$ ist, was ein Widerspruch ist. Das bedeutet, dass die Gleichung ($\star$) genau eine positive Wurzel ξ hat. Für die Philonsche Gerade gilt also: $|P'A| = \xi$ und $|P''B| = \eta = ef/\xi$. Es kann schnell gezeigt werden, dass η die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$v^3 - (e\cos\vartheta)v^2 + (ef\cos\vartheta)v - e^2f = 0 \tag{$\star\star$}$$

ist. Für den Abstand $|AB|$ erhalten wir die Ausdrücke

$$|AB| = \frac{e+\xi}{\xi}\sqrt{f^2+\xi^2-2f\xi\cos\vartheta} = \frac{f+\eta}{\eta}\sqrt{e^2+\eta^2-2e\eta\cos\vartheta}. \qquad (\star\star\star)$$

Einen ähnlichen Ausdruck erhält man, wenn man anstelle von e und f einfach $a = e\sin\vartheta$ und $b = f\sin\vartheta$ ersetzt:

$$|AB| = \frac{a+\zeta}{\zeta\sin\vartheta}\sqrt{b^2+\zeta^2-2b\zeta\cos\vartheta}, \qquad (\star\star\star')$$

wobei ist ζ die positive Wurzel der Gleichung

$$w^3-(b\cos\vartheta)w^2+(ab\cos\vartheta)w-ab^2 = 0, \qquad (\star')$$

Für den Sonderfall, dass der Punkt P auf der Symmetrale des Winkels ϑ liegt, ist $e = f = \xi = \theta$ und damit $|AB| = 4e\sin(\vartheta/2)$. Dann ist die Philonsche Gerade einfach eine Senkrechte in P zur Winkelsymmetrale.

Sobald wir die Philonsche Gerade haben, verschieben wir das Dreieck $P'AP$ parallel, so dass P in B fällt, A in Q und P' in Q'' (Abb. 3). Der Punkt Q'' liegt natürlich auf der Linie OB. Aus den Ausdrücken $|OB| = f+\eta = f+|OQ''|$ folgt $|OQ''| = \eta$. Da $|Q''Q| = \xi$, sind ξ und η die schiefwinklige Koordinaten des Punktes Q für den Winkel ϑ.

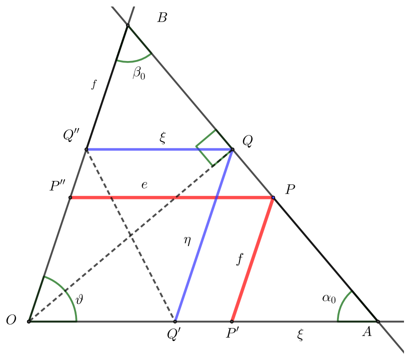


Abb. 3: Philonsche Gerade durch den Punkt P und seinen zugeteilten Punkt Q.

In diesem Artikel verwenden wir mehrmals die Parallelogrammidentität, die besagt, dass in einem Parallelogramm die Summe der Quadrate der Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen ist.

Eigenschaften der Philonschen Geraden

Der Punkt Q liegt auf der Philonschen Geraden und hat, je nachdem wir ihn gefunden haben, die Eigenschaft $|AP| = |QB|$. Wir werden beweisen, dass Q eine orthogonale Projektion des Scheitelpunkts O des Winkels ϑ auf die Philonsche Gerade ist. Dazu schreiben wir die Parallelogrammidentität für das Parallelogramm $OQ'QQ''$:

$$2\xi^2+2\eta^2 = |OQ|^2+|Q'Q''|^2.$$

Dann benutzen wir den Kosinussatz für die Dreiecke $Q''Q'Q$ und $Q''QB$:

$$|Q'Q''|^2 = \xi^2+\eta^2-2\xi\eta\cos\vartheta, \quad |QB|^2 = \xi^2+f^2-2\xi f\cos\vartheta.$$

Schließlich berechnen wir:

$$|OQ|^2+|QB|^2-|OB|^2 = 2(\xi^2+\eta^2)-(\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\cos\vartheta)+$$

$$+(\xi^2+f^2-2\xi f\cos\vartheta)-(f+\eta)^2=\frac{2}{\xi}(\xi^3-(f\cos\vartheta)\xi^2+(ef\cos\vartheta)\xi-ef^2)=0.$$

Wir haben die Beziehung $\xi\eta = ef$ und die Gleichung $(\star)$ betrachtet, die von ξ erfüllt wird. Es gilt also die Beziehung $|OQ|^2+|QB|^2=|OB|^2$ und nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras ist das Dreieck OQB rechtwinklig mit rechtem Winkel am Eckpunkte Q.

Sei S der Mittelpunkt der Strecke OP. Geht die Philonsche Gerade durch P und schneidet die Schenkel des Winkels ϑ in den Punkten A und B, so sind die Abstände $|SA|$ und $|SB|$ gleich (Abb. 4). Diese beiden Abstände sind die Längen der Schwerelinien in den Dreiecken OAP und OPB auf der gemeinsamen Seite von OP. Als Folge der Parallelogrammidentität erhalten wir

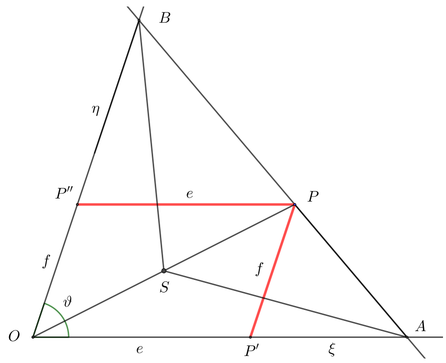


Abb. 4: Zum Beweise der Gleichung $|SA| = |SB|$.

$$(2|SA|)^2+|OP|^2=2|OA|^2+2|AP|^2,\quad (2|SB|)^2+|OP|^2=2|OB|^2+2|BP|^2.$$

Wir werden die Gleichheit $|SA| = |SB|$ beweisen, sobald wir beweisen, dass

$$\delta=(|OA|^2+|AP|^2)-(|OB|^2+|BP|^2)=0.$$

Wenden wir den Kosinussatz zweimal an, so erhalten wir:

$$\delta=(e+\xi)^2+\xi^2+f^2-2\xi f\cos\vartheta-(f+\eta)^2-\eta^2-e^2+2\eta e\cos\vartheta.$$

Der resultierende Ausdruck wird umgewandelt in

$$\delta=\frac{2}{\xi}(\xi^3-(f\cos\vartheta)\xi^2+(e\cos\vartheta)\xi-ef^2)-\frac{2}{\eta}(\eta^3-(e\cos\vartheta)\eta^2+(ef\cos\vartheta)\eta-e^2f),$$

wobei zu beachten ist, dass $\xi\eta = ef$. Da ξ die Gleichung $(\star)$ erfüllt, η und $(\star)$ die Gleichung $(\star\star)$, so ist $\delta = 0$ und $|SA| = |SB|$.

Eigenschaften der Philonschen Geraden

$$|AP|=|QB|,\quad OQ\perp AB,\quad |SA|=|SB|$$

waren schon den antiken Mathematikern Philon von Byzanz, Apollonius von Perge und Heron von Alexandria bekannt. Sie benutzten sie für $\vartheta = \pi/2$, um das Problem der Würfelverdoppelung zu lösen.

Philonsche Gerade, Kreislinie und Hyperbel

Der Punkt Q auf der Philonschen Geraden des Punktes P im Winkel $\vartheta = \angle XOY$ liegt nach dem Satz von Thales auf der Kreislinie $\mathcal{K}$, die als Durchmesser die Strecke OP hat. Wir führen das orthogonale kartesische Koordinatensystem Oxy ein, wobei der OX-Schenkel der positive Teil der

Abszissenachse x ist und die y-Achse senkrecht zu ihr in O steht und in der üblichen Weise orientiert ist. Damit hat $\mathcal{K}$ seinen Mittelpunkt in dem Punkt $S((e+f\cos\vartheta)/2, (f\sin\vartheta)/2)$ und die Gleichung

$$x^2+y^2-(e+f\cos\vartheta)x-(f\sin\vartheta)y=0. \tag{$\mathcal{K}$}$$

Die Schenkel des Winkels ϑ, die in einer Linie mit den Gleichungen $y=0$ und $x\sin\vartheta-y\cos\vartheta=0$ verlängert werden, sind Asymptoten der Hyperbel

$$y(x\sin\vartheta-y\cos\vartheta)=c,$$

wobei $c\neq 0$ eine beliebige Konstante ist. Durch den Punkt $P(e+f\cos\vartheta, f\sin\vartheta)$ geht ein Zweig der Hyperbel $\mathcal{H}$, die die folgende Gleichung hat:

$$y(x\sin\vartheta-y\cos\vartheta)=ef\sin^2\vartheta. \tag{$\mathcal{H}$}$$

Der Scheitelpunkt T dieses Zweiges liegt auf der Symmetrale s des Winkels ϑ und ist von O um $2\sqrt{ef}\cos(\vartheta/2)$ entfernt.

Der Brennpunkt F ist um $2\sqrt{ef}$ von O entfernt (Abb. 5).
Berechnen wir den zweiten Schnittpunkt der Kreislinie $\mathcal{K}$ und der Hyperbel $\mathcal{H}$. Drücken wir x aus der Gleichung $(\mathcal{H})$ aus und setzen wir es in die Gleichung $(\mathcal{K})$ ein. Durch Vereinfachung erhalten wir die Gleichung für y:

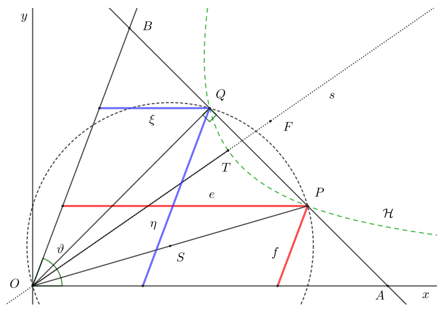


Abb. 5: Bestimmung der Philonschen Geraden durch Kreislinie und Hyperbel.

$$\frac{y-f\sin\vartheta}{y\sin^2\vartheta}(y^3-(e\sin\vartheta\cos\vartheta)y^2+(ef\sin^2\vartheta\cos\vartheta)y-e^2f\sin^3\vartheta)=0.$$

Die Wurzel $y_1=f\sin\vartheta$ ist die Ordinate des Punktes P, die entsprechende Abszisse ist $x_1=e+f\cos\vartheta$. Die zweite Wurzel ist die Nullstelle des zweiten Faktors. Wir setzen $y=\lambda\sin\vartheta$ ein und durch Vereinfachung erhalten die Gleichung

$$\lambda^3-(e\cos\vartheta)\lambda^2+(ef\cos\vartheta)\lambda-e^2f=0.$$

Vergleichen wir sie mit der Gleichung $(\star\star)$ und schreiben wir die einzige positive Wurzel $\lambda=\eta$. Die zweite Wurzel ist also $y_2=\eta\sin\vartheta$. Für die entsprechende Abszisse erhalten wir $x_2=\xi+\eta\cos\vartheta$. Ein Punkt mit den Koordinaten x_2 und y_2 ist genau der Punkt Q auf der Philonschen Gerade. Das bedeutet, dass sich die Kreislinie $\mathcal{K}$ und die Hyperbel $\mathcal{H}$ im Fall $e\neq f$ in den Punkten P und Q schneiden und im Fall $e=f$ in P berühren (Abb. 5).

Man nehme einen beliebigen Punkt auf dem Ast der betrachteten Hyperbel $\mathcal{H}$ mit schiefwinkligen Koordinaten u und v für den Winkel ϑ. Ihre rechtwinkligen Koordinaten sind $x=v\cos\vartheta+u$ und $y=v\sin\vartheta$. Wir berücksichtigen dies in der Gleichung $(\mathcal{H})$ und erhalten: $uv=ef$.

An dieser Stelle sei eine weitere Eigenschaft der Hyperbel erwähnt, die schon Apollonius von Perge bekannt war. Schneidet eine Gerade die Hyperbel in den Punkten P und Q und ihre Asymptoten in den Punkten A und B, so haben die Strecken PQ und AB einen gemeinsamen Mittelpunkt, was zu der Beziehung $|AP| = |QB|$ führt.

Der Punkt P definiert genau die Kreislinie $\mathcal{K}$ und die Hyperbel $\mathcal{H}$ sowie deren Schnittpunkte P und Q. Die schiefwinklige Koordinate η des Punktes Q ist auch die Wurzel der Gleichung $(\star\star)$, so dass die Koordinate $\xi = ef/\eta$ die Wurzel aus der Gleichung $(\star)$, was wiederum bedeutet, dass $z'(\xi) = 0$ und die Gerade durch die entsprechenden Punkte A und B ist Philonsche Gerade.

Philonsche Gerade für den rechten Winkel

Für den rechten Winkel, das heißt $\vartheta = \pi/2$, wird die Rechnung vereinfacht. In diesem Fall ist $a = e$ und $b = f$, die Gleichungen $(\star)$ und $(\star\star)$ werden für ξ und η zu $u^3 = ab^2,\ \ v^3 = a^2b$ umgewandelt und die Wurzeln sind $\xi = \sqrt[3]{ab^2}$ und $\eta = \sqrt[3]{a^2b}$. Für den Abstand zwischen den Punkten A und B erhalten wir

$$|AB| = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}.$$

Die Gleichungen der Kreislinie $\mathcal{K}$ und der Hyperbel $\mathcal{H}$ werden vereinfacht zu

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0,\ \ xy = ab.$$

Die relevanten Punkte mit Koordinaten sind:

$$A(a+\xi, 0),\ \ B(0, b+\eta),\ \ P(a,b),\ \ Q(\xi,\eta),\ \ S(a/2, b/2).$$

Nach dem Höhensatz gilt für ein rechtwinkliges Dreieck OAQ die Beziehung $\eta^2 = \xi a$ oder $a/\eta = \eta/\xi$.

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $P'AP$ und $P''PB$ erhalten wir auch die Beziehung $\xi/b = a/\eta$. Dies kann auch durch die Ausdrücke für ξ und η bestätigt werden. Wir haben die folgenden Beziehung gefunden:

$$\frac{a}{\eta} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\xi}{b}.$$

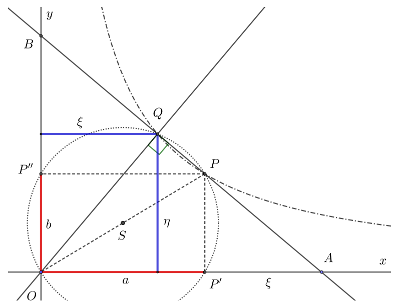


Abb. 6: Ein Beispiel der Philonschen Geraden für den rechten Winkel.

Wir sagen, dass ξ und η *mittlere geometrische Proportionen* der Längen a und b sind. Da ξ und η die Gleichungen $y^2 = ax$ und $x^2 = by$ erfüllen, kann man die geometrischen mittleren Proportionen auch durch Schneiden der Parabeln $y^2 = ax$ und $x^2 = by$ ermitteln. Eine solche Methode war bereits einigen antiken griechischen Mathematikern bekannt (z. B. [3]).

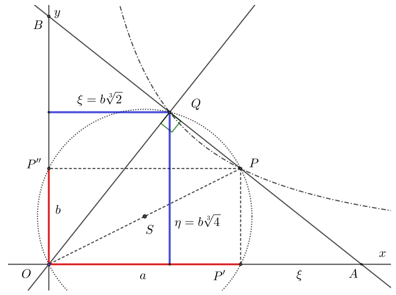


Abb. 7: Würfelverdoppelung.

Für $a = 2b$ ist $\xi = b\sqrt[3]{2}$, was bedeutet, dass ein Würfel mit der Kante ξ das doppelte Volumen des Würfels mit der Kante b hat. Damit ist für $Q \neq P$ die Abszisse des Schnittpunkts des Kreises $x^2 + y^2 - 2bx - by = 0$ und der Hyperbel $xy = 2b^2$ das alte antike Problem der Würfelverdoppelung gelöst.

Philon von Byzanz, der noch keine analytische Geometrie kannte, löste das Problem auf diese Weise, indem er ein Rechteck $OP'PP''$ konstruierte, zeichnete eine Kreislinie um ihn und die Seiten von $OP'PP''$ verlängerte. OP' und OP'' durch P' und P'' (wie in Abb. 7), dann hat er die Gerade um P ein wenig in die eine und ein wenig in die andere Richtung gedreht, um nah genug $|AP| = |QB|$ zu erreichen. Dabei sind A und B die Schnittpunkte der Verlängerungen mit dieser Geraden, und Q ist ihr Schnittpunkt mit der Kreislinie. Wenn $|P'P|$ eine Kante des Würfels ist, dann ist $|P'A|$ eine Kante des verdoppelten Würfels (auf Griechisch und Deutsch, allerdings mit unterschiedlichen Bezeichnungen, wird dies in [2] erklärt).

Zum Abschluss

Das Problem der Philonschen Geraden ist auch unter anderen Namen bekannt, z. B. das Problem des längsten Rohrs, das von einem Korridor zum anderen getragen werden kann, oder das Problem der kürzesten Leiter, die an eine Wand gelehnt werden kann, vor der sich ein Hindernis, z. B. ein Schrank, befindet.

Literatur

[1] I. Asimov, *Biografska enciklopedija znanosti in tehnike*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1978.

[2] H. Diels, E. Schramm, *Philons Belopoiika: viertes Buch der Mechanik*, Verlag der Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1919.

[3] T. Heath, *A history of Greek mathematics*, Vol. I, Dover Publications, New York, 1981.

[4] A. Ostermann, G. Wanner, *Geometry by its history*, Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2012.

Conics in physics

Nada Razpet, University of Ljubljana, Faculty of Education

In pre-Euclidean times, mathematicians dealt with three famous problems of Greek geometry:

1. The squaring of the circle.
2. The duplication of the cube.
3. The trisection of any angle.

Where does the cube duplication problem come from? In ancient sources we find two versions of the origin of this problem.

One document begins with the story that ancient tragic poets represented Minos us putting up a tomb to Glaucus but being dissatisfied with its being only 100 feet each way; Minos was then represented as saying that it must be made double the size, by increasing each of dimensions in that ratio. ... ([1])

According to the other source, the oracle of Delos ordered the altar to be doubled in order to stop a plague epidemic. When the people went to Plato asking for help with the solution, he replied that the oracle did not mean that the actual doubling of the altar would heal people, but the advances in mathematics required for the construction would do so. ([2])

The plague appeared around 430 BC and if there is any truth to this story, we can at least approximate the date of the problem. However, the inclusion of Plato in this story is problematic, since he was not born until 427 BC. Of course, there is no doubt that the problem was studied at the Academy.

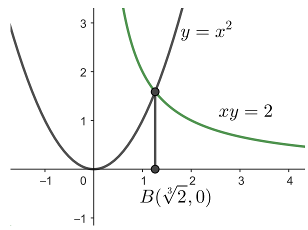
We will mention just two mathematicians in connection with solving this problem.

Hippocrates of Chios (Ἱπποκράτης ὁ Χῖος) (c. 470 - c. 410 BC) reduced the problem of doubling a cube to finding two mean proportionals.

He found that, if

$$a : x = x : y = y : b, \quad \Rightarrow \quad a^3 : x^3 = a : b$$

If x, y are two mean proportionals between straight lines a and b, then it is clear that $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, and $xy = ab$.



Menaechmus (Μέναιχμος) (380 BC - c. 320 BC) found that two curves defined by these equations are generated by the intersection of a plane with a cone.

The theory of conics was born ([2]).

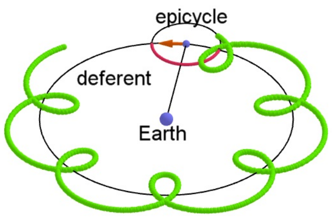
Later, Archimedes, Apollonius, Proclus, Kepler, Newton, Poncelet, Steiner, Dandelin, Dupin, Gergonne, Brianchon, Chasles ... dealt with conics.

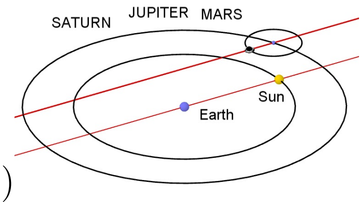
Apollonius of Perga (Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος)

We will be interested only in those works of Apollonius that are related to physics. Many of Apollonius' works are lost, but some are referred to by ancient writers. One of them is "On the Burning Mirror" (Περὶ τοῦ πυρίου). In it Apollonius shows that parallel rays incident on a concave spherical mirror do not intersect at the center of the sphere, as was thought at the time. He also discussed parabolic mirrors, with special emphasis on the focus.

Ptolemy wrote that Apollonius and Hipparchus of Nicaea (190-120 BC) presented a new planetary system consisting of eccentric and epicyclic motion to explain the apparent retrograde motion of the planets across the sky. This is not entirely true, as the theory of epicycles was certainly known before Apollonius ([3]).

The Appolonian planetary system is geocentric. The planet moves uniformly along a small circle - the epicycle. Its center moves uniformly along a larger circle - the deferent. Earth is at the center of the deferent. (Fig. 1a).

a) 

b) 

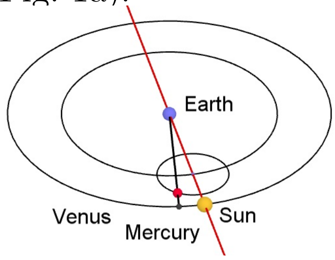
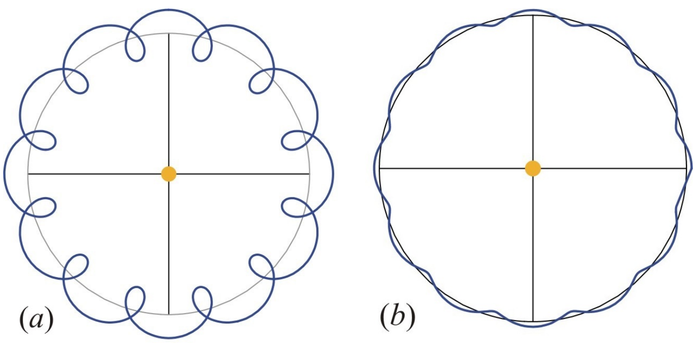
c) 

Figure 1: a): The path of a planet is a combination of the motion of the planet along the epicycle and the motion of the epicycle's center around the Earth. b) For the outer planets, Saturn, Mars, Jupiter, the line joining the Earth and the Sun is parallel to the line joining the planet and the epicycle's center. c) For the inner planets (Venus and Mercury), the Earth, the Sun and the epicycle's center are on the same line.

When a planet is at the upper part of the epicycle, it is moving in the same direction as the center of the epicycle, so the velocities are added together. When a planet is at the lower part of the epicycle, it is moving in the opposite direction to the center of the epicycle, so the velocities are subtracted. Therefore, a planet in the upper part of the epicycle appears to be moving faster than one in the lower part.

The Moon orbits the Earth and the Sun at the same time. What the trajectory of the Moon's orbit around the Sun looks like ([4])?



Looking from above at the plane of the ecliptic. What does the path of the Moon's orbit around the Sun look like? We have approximated the Earth's orbit with a circle.

Figure 2: a) The common misconception about the Moon's orbit around the Sun. b) The Moon's true orbit around the Sun. We cannot draw the sketch in the correct proportions.

The sundial

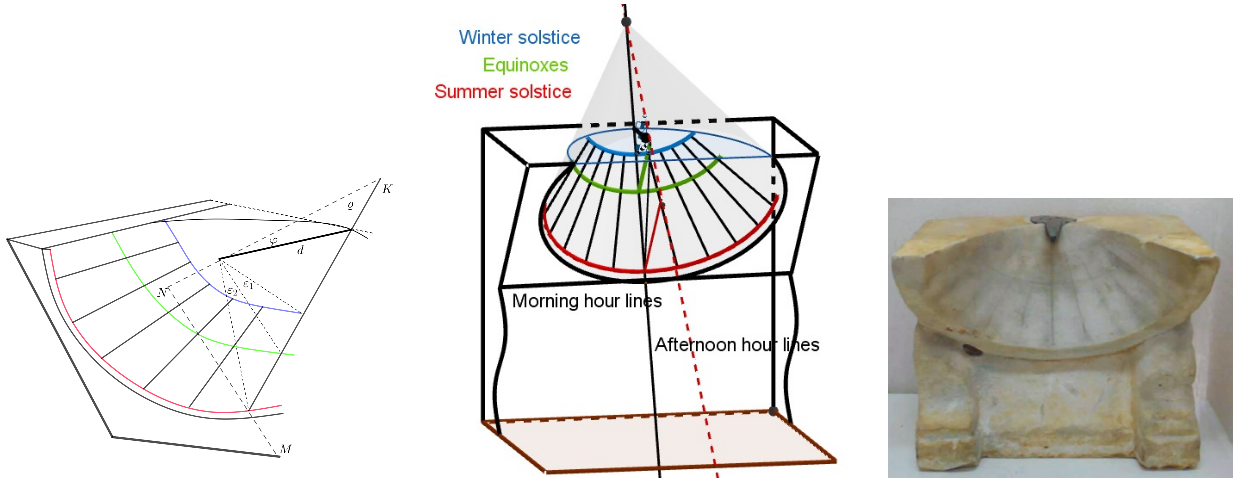


Figure 3: Left and center: schematic representation of a sundial. Right: The conical sundial from the National Archaeological Museum of Athens (No 3158).

Apollonius used his knowledge of conics to solve practical problems. He developed the hemicycle, a sundial, which is also mentioned by Vitruvius in *The Ten Books on Architecture*, Chapter VIII, Sundials and Water Clocks.

The most common sundials in the Hellenistic period (323-31 BC) were conical sundials (Fig. 3).

These sundials have three lines marked by the tip of the gnomon at the equinoxes, summer and winter solstices. In addition to these, 11 hour lines are drawn. ([5]).

The accuracy of a conical sundial depends on four characteristic parameters: ([5]):

1. the angle ϱ formed between the cone-axis (coincide with the Earth's axis) and the generatrix (coincide with the meridian hour line),
2. geographical latitude (φ) of the place where the clock is to be placed (angle formed by the axis of the cone and the gnomon),
3. to determine the positions of the two solstices, we need the inclination angle of the Earth's axis to the ecliptic (ε), and
4. the length d of the gnomon.

The angle by which the Earth's axis is inclined to the ecliptic (ε) is equal to the angle formed by the three rays emanating from the tip of the gnomon and terminating at the intersections of the summer and winter solstice arcs and the equinox with the meridian, i.e. the noon hour line. The sundial is accurately constructed if the angles $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ and close to the angle ε.

The gnomon was usually a three-sided pyramid with a base edge of about 1.4 cm. The height of the pyramid, or length of the gnomon, was usually about 6 cm.

Johannes Kepler (December 27, 1571 - November 15, 1630)

Kepler made an important contribution to the ultimate victory of the heliocentric system over the geocentric ([6]). Kepler did not have the data we find on web today, but he did have precise measurements of the positions of Mars, which had been made for many years by Tycho Brahe (1546-1601). From his measurements, he extracted two laws that are now known as Kepler's laws..

1. The law of orbits: All planets move in elliptical orbits, with the Sun at one focus.

2. The law of areas: A line that connects a planet to the Sun sweeps out equal areas in equal times. ([8])

Kepler's analyses of the measurements are given in 900 pages, so we cannot follow them in full, but we can describe the path that led to the laws in a few steps.

Kepler first used the data to determine the orbit in which the Earth orbits the Sun. He chose a favorable position for Mars and placed it at an arbitrary distance from the Sun. Because Tycho Brache had measured the angles of the triangle formed by the Sun, the Earth and the Mars, Kepler was able to determine the position of the Earth relative to the chosen position of Mars (Fig. 4 left).

He then determined the position of Earth exactly one Mars' year later. He repeated the process several times until he had four positions of the Earth (Fig. 4 right). These positions determined an orbit that was very close to a circle, although its center did not exactly coincide with the position of the Sun. Today we know that the Earth's orbit is not perfectly circular: we are further from the Sun in summer than in winter, and summer and autumn are also four days longer than winter and spring. But a circular orbit was a good enough approximation for Kepler's needs.

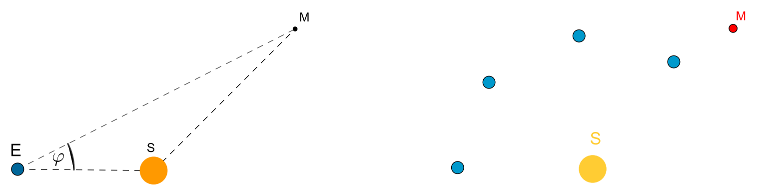


Figure 4: Left: The Earth, Sun and Mars at the moment of the chosen Mars' position. Right: Earth's position at a time interval of one Mars year.

He then determined Mars' orbit. He found the times when the Sun, Earth and Mars are on the same line, when they are at opposition (Figure 5a). He chose the radius of Earth's orbit and then used it to find the position of Mars exactly one Mars' year after opposition (Figure 5b). The opposition repeats about every two years, so he was able to determine enough Mars positions, ten in total, and then try again to draw a circle through the resulting points (Figure 5c)). In this case, the center of the circle was even further away from the Sun's position than in Earth's orbit, and in particular the circle did not fit the points exactly. The difference of eight minutes was too great for Kepler, who knew that Tycho Brache measured to the minute (arc measure). The apparent angle of Mars as seen from Earth is always less than half a minute (angular measure). The ellipse fitted the points perfectly and even the Sun was within its focus.

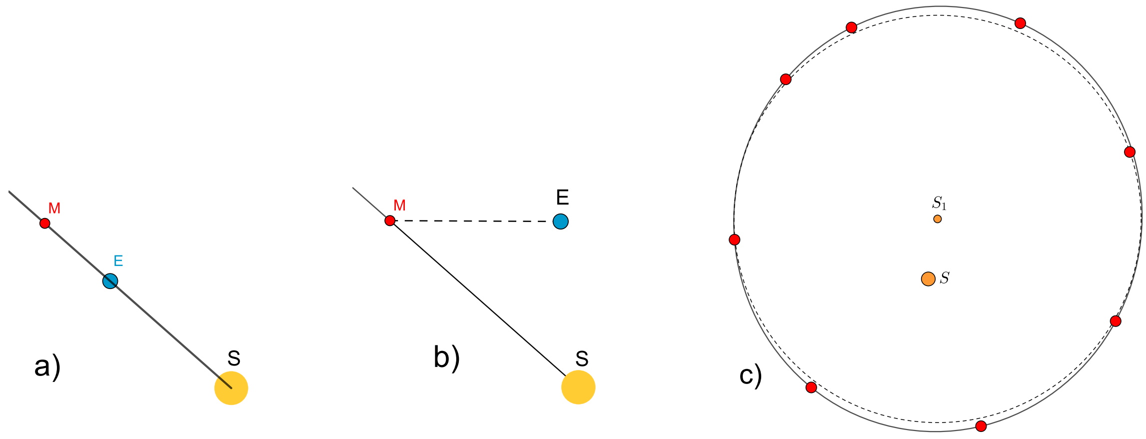


Figure 5: a) The Sun, Earth and Mars are in opposition. b) Exactly one Mars' year later. c) In the sketch, the elliptical orbit of Mars is too eccentric for clarity. S_1 is the center of the circle and S is the focus of the ellipse.

Mars did not move uniformly along its path - it moved faster near the Sun and slower further away. In 1609, Kepler published both results in *New Astronomy on the Motion of the Star Mars* and generalized them to the motion of all the planets. In 1618, he published his third law, relating the distance of a planet from the Sun to its orbital period, in *The Harmony of the World*.

Kepler did something that rarely happens in physics – he deduced three important laws of nature from measurements alone, without theoretical help, which gave the development of mechanics a huge boost. The laws are still valid today, if we ignore the relativistic corrections that are only noticeable in the motion of Mercury.

Isaac Newton (January 4, 1643 - March 31, 1727)

At first, Newton was not very interested in the motion of the planets. It was inspired by Robert Hook. Hooke and others thought that the motion of the planets, as Kepler had found, was due to a force (gravity, as they said at the time) inversely proportional to the square of the distance from the Sun to the planet. Hooke, in a letter to Newton, revealed his view of planetary motion: it was to consist of falling towards the Sun and moving in a perpendicular direction ([6]).

The decisive moment that forced Newton to start studying planetary motion was when he told Edmond Halley that he had mathematically proved that if the force acting on a planet is inversely proportional to the square of the planet's distance from the Sun, then the planet moves in an elliptical orbit, but he couldn't show it because he had **misplaced it**. He was now under severe pressure because in all likelihood he had not done this calculation, as evidenced by his writing in *De Motu (On Motion)*, written three months after this interview.

How did Newton solve this problem? Since the force acting on a planet is not constant, Galileo's result of a parabolic trajectory is not correct. But in a very short time the force does not change much; in the limit, when the observation time

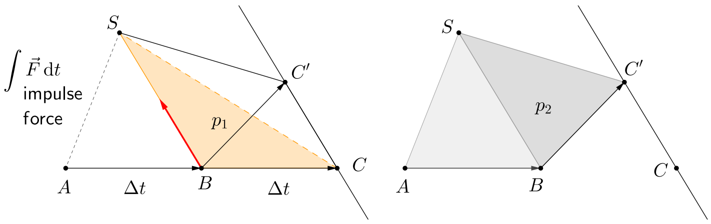


Figure 6: Equality of the area of the triangle SAB, SCB and SBC' in Newton's proof of Kepler's second law. The particle is moving under the influence of the central force, which tending towards the point S.

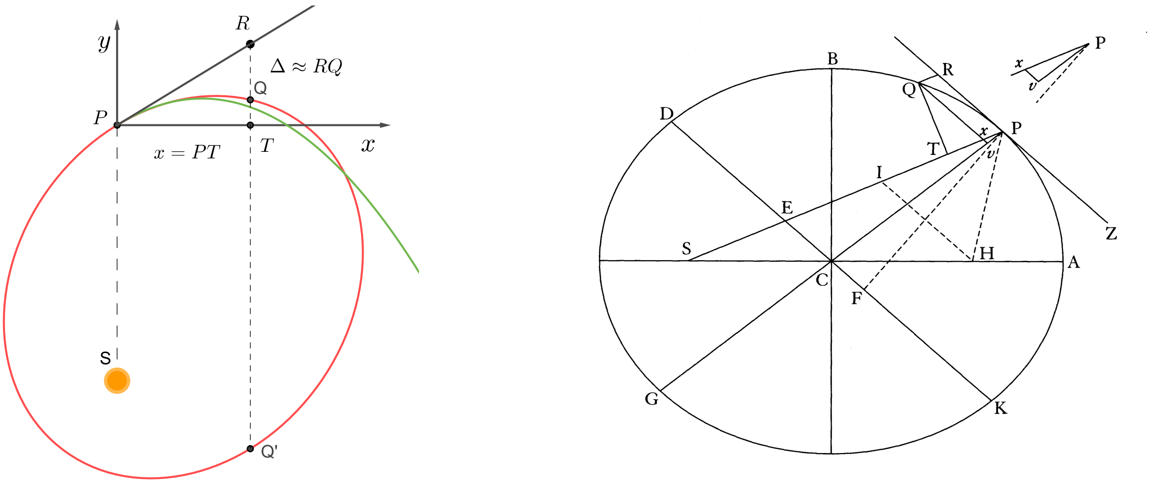


Figure 7: Left: Newton's parabola (green trace), which best fits the ellipse. Right: Newton's ellipse from Principia, p. 108.

approaches zero, we can assume that the force is constant and that the path of motion is parabolic. We will just list the basic steps of Newton's thinking.

First, he had to prove Kepler's second law, which states that a line drawn from the Sun to a planet sweeps out the equal areas in equal times.

The body travels at a constant speed for some time from point A to point B (Fig. 6). If there was no impulse force at point B, the body would move in a straight line and reach point C in the same time. If a impulse force acts at point B towards point S, the body is redirected there and reaches point C' at the same time. We can say that after the impulse force, the body still has the old speed that would take it to point C. Now the triangles BCS and $BC'S$ have the same base SB and the same height to the base, so they are equal in area. The points C and C' lie on a line parallel to the distance BS. The areas of the triangles ABS and $BC'S$ are the same, so the "area's velocity" is conserved.

He then analyzed the planet's motion along the ellipse. This is the opposite of the usual approach, where we first assume a force, then derive the planet's motion and find that the planet follows an elliptical path. Newton assumes motion along the ellipse and then derives the magnitude of the force, in fact the acceleration, which is directed towards the focus of the ellipse, where Kepler placed the Sun.

Newton placed the planet in an elliptical orbit and the Sun at its focus. In the figure 7 on the left, we have positioned the ellipse so that the Sun is below the planet and the planet is moving to the right from point P. This immediately reminds us of the projectile motion. The planet would be moving along a parabola under the influence of a constant force, but in reality it is moving in an ellipse. But near the point P, the parabola and the ellipse are exactly alike, and in the limit, as Q approaches P, they merge into one. The acceleration of a body falling towards the Sun is easy to obtain, Galileo did it. The acceleration is denoted by a_F to distinguish it from the semi-major axis of an ellipse.

If there were no force on the planet, it would move along the line defined by the points P and R. It follows from Galileo's equation:

$$\Delta = \frac{a_F t^2}{2}\,, \qquad \Delta = QR\,, \quad a_F = \frac{2\Delta}{t^2}.$$

A line that connects a planet to the Sun sweeps out equal areas A in equal times, so we can calculate

$$t \propto \delta A\,, \quad \delta A = \frac{SP \cdot QT}{2}\,, \quad a_F \propto \frac{QR}{SP^2 \cdot QT^2}\,.$$

$$F \propto a_F \propto \frac{QR}{SP^2 \cdot QT^2}$$

Newton had to show that if $\frac{QR}{QT^2}$ is independent of the choice of point P, then the force acting on a body moving along an ellipse is inversely proportional to the square of the distance of the planet to the Sun, so $F \propto \frac{1}{SP^2}$.

To do this, he considered the situation in Figure 7 right. Here, the planet is moving from point P in a counterclockwise direction, i.e. towards point Q.

For the distance EP, we get the following due to the obvious connections:

$$EP = a = CA\,, \qquad SE = EI\,, \qquad 2EI + 2IP = PS + IP\,,$$

$$EI + IP = EP\,, \qquad EP = \frac{PS + IP}{2}\,.$$

Because $IP = PH$ and $\sphericalangle SPR = \sphericalangle HPZ \quad \Rightarrow \quad EP = \frac{PS+PH}{2} = a$, which is obviously true, since that is how the ellipse is defined.

Already Apollonius of Perga knew a theorem, a kind of "power of the ellipse", which is completely forgotten today:

$$\frac{Gv \cdot Pv}{Qv^2} = \frac{CP^2}{CD^2}\,.$$

But Newton has not forgotten it. In his time, the properties of conics were discussed in detail.

The lengths of the distances Gv, Pv and Qv can be seen in the figure. The similarity of the triangles makes the following connections obvious:

$$\frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PC}\,, \quad Px = QR\,, \quad \frac{QR}{Pv} = \frac{PE}{PC}\,.$$

$$\frac{Qx}{QT} = \frac{PE}{PF}\,.$$

Now let's use another forgotten property of the ellipse:

$$\frac{BC \cdot CA}{2} = \frac{CD \cdot PF}{2}\,,$$

which in Newton's time read: "the areas of the figures of conjugate radii are equal."

The previous equation now can be written as

$$\frac{Qx}{QT} = \frac{a}{PF} = \frac{CD}{b}\,, \qquad \lim_{R\to P}\frac{Qv^2}{Qx^2} = 1\,, \qquad \lim_{R\to P}\frac{PC}{Gv} = \frac{1}{2}\,,$$

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{Px}{QT^2} = Px \cdot \frac{1}{QT^2} = \frac{PC^2}{CD^2}\cdot\frac{Qv^2}{Gv}\cdot\frac{a}{PC}\cdot\frac{CD^2}{b^2}\cdot\frac{1}{Qx^2}\,,$$

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{PC}{Gv}\cdot\frac{a}{b^2}\,.$$

So finally, taking into account the limits of $\lim_{R\to P}\frac{PC}{Gv} = \frac{1}{2,}$ we get

$$\lim_{R\to P}\frac{QR}{QT^2} = \frac{a}{2b^2}\,,$$

where a and b are the semi-major and semi-minor axes of an ellipse.

The expression $\frac{QR}{QT^2}$ is therefore independent of the choice of point P, and the force acting on a body moving along the ellipse is inversely proportional to the square of the distance of the planet from the Sun.

Such a proof is called a geometric proof. This should not be taken literally, as the properties of an ellipse are expressed algebraically, albeit in a slightly different way than we are used to in analytical geometry.

Of course, Newton doesn't stop there. He shows that if the force is directed towards the focus, the same law applies to motion along a parabola or hyperbola. He shows how we can determine the orbit of a planet if we know its velocity at a point and the force acting on it. He also solves the problem of the position of a planet as a function of time. Newton used surfaces of specially constructed curves to solve this problem, since the problem cannot be solved in closed form. Today, this is done by integration with variable bounds.

Conclusions

We've mentioned the interactions between maths and physics, and more specifically between mathematics and astronomy. If Apollonius used the theory of proportions, for which Eudoxus is credited, to find the connections between quantities in conics, this was not enough for Newton. In order to show that planets move around the Sun in an elliptical orbit if the force on them is inversely proportional to the square of the planet's distance from the Sun, he had to choose a different way of doing it. Since in this case the force acting on the planet is not constant, Galileo's result of parabolic motion is wrong. But in the limit, when the observation time approaches zero, we can assume that the force is constant, and then the body moves in a parabolic motion. There is no doubt, especially if we follow Newton's mathematical implementation of this problem, that he was the first to develop and apply the infinitesimal calculus.

References

[1] T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, Dover Publications, inc, New York, 2002, pp. 244-246.

[2] A. Ostermann, G. Wanner, *Geometry by Its History*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012, p. 62.

[3] B. L. Van der Waerden, *The earliest from the epicycle Theory*, JHA 1974, pp. 175-185.

[4] N. Razpet, T. Kranjc, *Po kakšnem tiru se giblje Luna?*, Presek, **37**, 3, 2009/2010, pp. 22-25.

[5] E. Panou, X. Moussas and P. Preka-Papadema, *Conical sundials from the hellenistic and roman period at museums of Athens: novel time measurements concerning operation and accuracy*, Mediterranean Archaeology and Archaeometry, Vol. 20, No 2, (2020), pp. 131-141.

[6] A. Likar, *Prelomi v razvoju fizike*, DMFA - Založništvo, Ljubljana 2018, pp. 15-34.

[7] I. Newton, The Principia, The Authoritative Translation: Mathematical Principles of Natural Philosophy First Edition, I. Bernard Cohen (Translator), Anne Whitman (Translator), Julia Budenz (Translator), 1999, University of California press.

[8] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fundamentals of Physics*, John Wiley & Sons, Inc., 1997, NY. pp. 332-333.

Mileva Marić, Albert Einstein – Ein Stein

FROM INTELLECTUAL FRIENDSHIP, TRUE LOVE, TOGETHER LIFE, TO HATRED (1896-1914) + 17 officially married

„Veniet tempust, quo posteri nostri tam apertura nos nescisse mirentur“

(The time will come when our descendants will wonder that we did not know such clear things - Seneca: Quaestional Naturalia 7.25)

Serbian mathematician and physicist, Mileva Marić (born in 1875 in Titel, then Austria-Hungary, died in 1948 in Zurich, Switzerland), was hardly known in the world of science and intellectuals for a long time as the first wife and mother of two sons of one from the greatest physicist of the 20th century, Albert Einstein (born in 1879 in Berlin, died in 1955 in the USA). Only at the end of the 20th century, when the love letters of Einstein and his first wife, Mileva (54 in total), were found and "disclosed", who kept them for more than 45 years, and after her death in Zurich in 1948, the wife of the first of Albert and Mileva's son, Hans Albert Frieda Einstein, took them with her to America, along with other books, records and "works" of her late mother-in-law Mileva. 1986. Evelyn Einstein, Albert's and Mileva's granddaughter, found photocopies of the letters and handed them over to the project director - Einstein's documents (at that time, Frieda, Evelyn's mother had already died) so, soon after the "discovery of the letters", Hans Albert Einstein's second wife handed them next to some more discovered documents, books and photographs - Albert Einstein Archives to the "Hebrew" University! In 1968, Michelle Zeckheim, Einstein's biographer and his historian, discovered from the extensive archive that Einstein had a daughter, but information about "Lieserl", the first and only daughter of Mileva and Einstein, born in Novi Sad, suffering from scarlet fever, disappeared early, adopted, or shortly after birth, who died in the part of Serbia, then Austria-Hungary, all of this is shrouded in secrecy (namely, in his extensive records and interviews, Einstein never mentioned his first and only daughter, and he parted ways with her mother, Mileva Marić in 1919. Immediately, that year, he married again, with Elsa Einstein, his "close" cousin, the mother of two daughters with her first husband - Löwenthal, whose surname, in addition to her maiden name, Einstein added and kept even after marrying her cousin Albert! Michelle Zeckheim is, in fact, a "Greenwich Village painter", so one might rightly imagine that she was an "amateur" study of Albert's life, but that is not true! On the contrary, it can be considered, based on intensive study and travel to most of the places of Einstein's life, due to watchfulness, she travelled for 20 years to Berkeley, USA, Boston, London, Zurich, Bern, Budapest, Berlin, where she spent hours and hours in archives, libraries, studying everything she could get her hands on, about the "creator" of the theory of relativity and the famous equation, so important, yet so magnificently beautiful and simple, E=mc2.

But she still lacked something - then, in her knowledge and research of Einstein's life, she came to the "Copernican twist" so that we can feel and understand it as best as possible, everything that follows that genius theory and Albert's life and scientific work starts from the study and acquaintance with the life of his first wife, Mileva Marić, also a genius from the then small Austro-Hungarian province, her life and, viewed cosmologically, we can rightly ask ourselves - is the meeting and the time of Mileva Marić's Einstein life, their acquaintance, great love, togetherness, separation , distance, psychic and physical, or vice versa, physical and psychic viewed today in a modern way, is this all cosmologically correct and was their meeting cosmologically inevitable? Despite all the happy and unhappy conditions, did their original, mutual love bring a "greater" benefit to humanity than if they had not "cosmically" met and been physical - from love to intolerance, misfortune and, finally, to a complete physical and spiritual separation. The author of these lines firmly believes that now, when almost three quarters of a century have passed since their death (Mileva died in 1948, 76 years have passed since then, Einstein died in 1955, 69 years have passed) of their " departure" from this three-dimensional space (didn't Mileva and Albert "introduce" 4-dimensional space, and today in mathematics and physics, astronomy, we talk about n-dimensional spaces. All of that sounds complicated to us, but if you start from Mileva's life, knowing her "school" and life, original path - much more is known about it now, because, starting from the end of the 20th century and beyond, many scientists, artists, joined the study of Mileva Marić and confirmed that saying, which Mileva uttered a long time ago when asked by "some" scientists, why her name is not on the works they wrote together, why her name is not there, she would answer: “Wir sind Ein Stein“ (We are one stone, one rock). Is this just a word game, or something much deeper? Well, let's go with the trace of Mileva's life before meeting and marrying the German physicist of Jewish Origin - today considered "World Intellectual Property", Albert Einstein! Where is "Sine ira et studio" (without inclination and hate) the place of Mileva Marić, Serbian mathematics and physicians?

Mileva Marić was born on December 19, 1875. In Titel, today Serbia, in the sign of the Sagittarius*, in a rich family, as the oldest of the three children of Miloš Marić and Marija Ružić Marić. As a child, she showed a gift for mathematics, languages, painting and music. She liked nature very much and she liked to watch the stars, the moon, the sun. But she was born with a dislocation of the hip joint, so she had a left leg shorter and it was quite determined by the behaviour and inclination to "watching" the sky, "she was very careful and withdrawn in the game with children, although she was a happy and a loved child in the family. She entered the female high school in Novi Sad (today the capital of Vojvodina, Serbia) in 1886. In 1888, she went to high school in Sremska Mitrovica (Vojvodina) where, in the then school program, she graduated 1890. As the best in class from mathematics and physics (teachers said that she was the real "gem" in mathematics, pretty rarely said for a female child from that time, because women were educated to be "fine young ladies to be married" primarily, not for education).

Due to his father's service, in 1890 she attended the royal Serbian school in Šabac, and when the family moved to Zagreb in 1891 (today the capital of Croatia), her father, Miloš Marić, sent her to a private school where only the boys were allowed.

She continued her education in Zurich. In 1896, she enrolled, in her father's wish, medicine. At that time, you could count the cities with the faculties that received women! Due to her greater "affection" than medicine, after one semester Mileva transferred to a high state polytechnic school in mathematics and physics studies. She was just a "fifth" woman who was admitted to that school, and in mathematics and physics, she was the only girl. There, her professors had prejudice about her as a woman and as a Serbian, but she soon reassured them in their understandings, because in many ways she was far better than her colleagues who soon accepted her as equal. She was also very sociable, she organized the student gatherings where she used to play music herself. Her colleague was Albert Einstein, almost 4 years younger than her. She quickly became friends with him. They felt that they had a lot to talk about topics from physics.

The first two years of study for Mileva were very successful so that she spent one semester in Heidelberg. During that time, she corresponded with Albert, who wrote to her that "he was missing her", they had so much to discuss!

*Each zodiac sign has its own characteristics and form a person born in that sign, he considered the famous astronomer, Johannes Kepler.

She returned to Zurich, in 1899 and their connection became more serious. Albert and she were falling in love with all more and more, he gave her a nickname Dolly, their relationship was getting stronger. They become increasingly inseparable, despite opposition to Albert's parents, because Mileva was not a Jew, and because it she was almost 4 years older than him (he was born on March 14, 1879, and she on December 19, 1875). Mileva and Albert would exchange books, they did tasks together, she played the piano, he would play the violin, and during that time there happened great scientific discoveries in the world that he and his Dolly would follow. Röntgen reveals X rays, Mihajlo Pupin made a hand shot in America using secondary X rays in 1896. Many thoughts, imagination, images, remembering how, in her birth place, she would scroll twinkle in the night and those memories were cited to ask how to convert matters into energy.

The idea of converting matter into energy, interested and more and more occupied Albert's imagination at the same time. They both felt that "there was something" when he saw how Mileva knowingly converts himself in the mathematical model. He knew he was dealing with a genius, with a great student.

But something unexpected happens. Mileva did not pass final exams at the Faculty of 1900. And Einstein did! That is why it remains in Zurich, as a laboratory assistant, preparing to re-lay the exams. Albert Einstein graduated and went home to break. They met again and spent three unforgettable days on Lake Como in Italy, near the Swiss border. Young, in love, inexperienced, surrender completely selfless, spiritually and bodily each other, mutually happy, endlessly happy! They return after those unforgettable days on the lake, intoxicated by love and giving themselves to each other. And then, return to reality.

After the divorce, Mileva had a very hard life. Her sister, with whom she was very close and who came to Zurich to be "of help to her", had nervous breakdown and was legally declared "incompetent." Her father, Miloš, who was very attached to her (thanks to his support and by large sums of money for schooling and financing her bank account afterwards; Einstein did not want Mileva’s dowry, it was under his honour), he died is of a stroke in 1922.

Albert received the Nobel Award in 1921, for the photoelectric effect and the entire sum gave to Mileva, as previously promised, if he ever received Nobel, any year! In the same 1921 Albert began a love relationship with a close friend's nephew.

The money received, Mileva invests for the purchase of 3 apartments in Zurich and gives care of the younger son, Eduard, the patient from schizophrenia. Her mother died in 1935, and the nerve sickened sister died in 1938, so Mileva remained completely alone with siblings, brother - nothing was known about him, but that “he disappeared in Russia" before the end of the first World War I, as an Austro-Hungarian soldier, as it was recorded at that time (resident of the then part of the great emperor). Due to debts, caused by Eduard's disease, Mileva sold two houses, but it was not enough, so she was forced to seek help from the former husband. Then Albert took over ownership of one of the houses, he sold it, and buyer's 85,000 Swiss francs "accidentally" ended at Mileva. Albert requires Mileva to return his money and threaten her that the sick Eduard will get out of the testament.

Mileva, in fact, did not manage in such a situation, her burden was too heavy, and for a woman who was preparing for a completely different life in the early youth. Unfortunately, in this dimension, we would say, she had no support from the closest, which would be completely normal in such a situation, it would be said - she was not lucky!

Her life trajectory went decreasing, she alone was not healthy, although still fighting like a lion, holding maths classes, along with keeping household work. All this is insufficient and in such circumstances slowly sinks and more and more and stronger becomes depressed.

During one of the violent Eduard's attacks, Mileva got sick, fainted and was severely injured. Three months later he dies in the hospital in Zurich, alone, abandoned, broken, on August 4, 1948. She was buried on Zurich cemetery.

Since 1994 the University of Novi Sad has established the award "Mileva Marić" for the best math students. One street in the capital of Vojvodina, Novi Sad, and in Belgrade, carry her name.

And nowadays, the subject of contributing to Relativity Theory is very current, what is Albert Einstein contribution, and what Mileva Marić contribution is. Quite a number of researchers deals with these issues, we can only assume and sense, because despite all research, there is no exact evidence in physics "this woman of the brilliant mind, but very awkward" time for such a woman, scientists, artists, initially, she wanted to achieve everything in life, and most of all to satisfy her beloved husband, for whom she firmly believed, at the very beginning and for a long time, that he was a genius. But their relationship was not blessed in this dimension - the boat of love, imagination, knowledge, stranded to rock reality! What a pity!

Belgrade, Serbia Jasna Fempl Mađarević –
MISANU

Ul. Knez Mihajlova 36 Vidikovački venac 27, 11000
Beograd, Srbija

Email: tanjamadjarevic@gmail.com

References

Serbia

MISANU, Knez Mihajlova 36, Beograd

Dr hab. Wiesław Wójcik, assoc. prof.
Department of Philosophy
Jan Długosz University in Częstochowa

The works of Andrzej Grzegorczyk (1922-2014) on the foundations of mathematics

Andrzej Grzegorczyk (1922-2014) was an outstanding logician, mathematician and philosopher, one of the most outstanding successors of the Warsaw School of Logic and the Lvov-Warsaw School of Philosophy. His greatest achievements concerned mathematical logic, and his works on the foundations of mathematics, philosophy and ethics are also significant. He is the author of over 200 scientific publications in the field of logic and foundations of mathematics, including several monographs. He also popularised logic, showed its connection with life, and believed that formal issues cannot be separated from philosophy. Throughout his life, he built a rationalist system of philosophy combined with logic. A strong community of logicians and rationalist philosophers was formed around him, people fascinated by his attitude as a man and scientist.

Grzegorczyk was active in international areas and maintained numerous contacts with scientists from various countries. He lectured in many countries, including: in the Netherlands and Italy. From 1967 he was a member of the Logic Section of the International Union of the History and Philosophy of Science. He was also involved in national and social affairs. During the occupation (Second World War), he took part in conspiratorial activities, participated in the Warsaw Uprising, and after the war, he was active in the Catholic Intelligentsia Club. He was involved in ecumenical dialogue and the non-violence movement and maintained close contacts with the community in Taize. He promoted universal solidarity and proposed that the UN establish the human right to help anyone who is in a worse situation (regardless of their views, origins, activities). His apartment was a meeting place for independent Russian and Polish intellectuals, and at the turn of the 1970s and 1980s he organised lectures (together with the Scientific Courses Society) of the Flying University.

The most important works in the topic of foundations research that interest us include: *Zagadnienia rozstrzygalności* (Decidability Issues), *Zarys arytmetyki teoretycznej* (Outline of Theoretical Arithmetic) , *Outline of Mathematical Logic*, *Basic notes in foundations*, *Logic - a Human Affair*.

Grzegorczyk had significant achievements in the field of research on computability and decidability, and his research on the theory of computational complexity is of key importance for computer sciences. These were pioneering studies. One of the most important categories introduced by him is Grzegorczyk's hierarchy (some Classes of Recursive Functions). It shows the structure of complexity classes in a set of primarily recursive functions. This theory is widely used, among others: by S. Shelah to obtain a better estimate of the cost of calculating van Waerden numbers and by S. Muchnick to study Grzegorczyk's vector hierarchies. When examining Heyting's intuitionistic axiomatics, added the formula $\Delta(\Delta(A \to \Delta A) \to A) \to A$, where Δ stands for the operator of necessity (or more precisely, the forced recognition of sentences within cognitive procedures).

Contrary to the anti-psychologistic position of the Lvov-Warsaw school, he defended psychologism in the interpretation of the foundations of logic. He used classical logic, but also set theory to study the foundations of geometry, and also analysed non-classical logics. The result of this work was the adoption of a strong anthropological thesis that the relations of meaning and denoting depend on humans and refer to human behavior. As part of this thesis, he reinterpreted the liar antinomy and other semantic antinomies. He showed that appropriate and correct formulation of them removes their edge. One of the most interesting results is the demonstration that Leśniewski's ontology and mereology (after removing zero) are equivalent to Boolean algebra.

Grzegorczyk also showed that to demonstrate undecidability, a simpler theory than the arithmetic of natural numbers with addition and multiplication can be adopted (as did K. Gödel). This theory is a text concatenation theory with one text appending action and two characters.

By examining the attitudes of mathematics, Grzegorczyk showed the possibilities of creating new mathematical theories in a general way (those mentioned above are examples). According to Grzgorczyk, the foundations of mathematics consist of two basic theories, the logical caIculus and set theory. Of course, the introduction of logical and set-theoretic concepts is carried out through methodological research and the use of other basic mathematical theories (e.g. geometry, number theory or topology and function theory). As Grzegorczyk notes, „beginning in antiquity numbers and geometrical figures were the subject matter of mathematics, but in modem times the emphasis was more on numerical functions than on the numbers themselves. Recently this abstraction has gone still further. Mathematicians have begun to investigate arbitrary functions defined on sets of arbitrary objects and limited only by very general conditions central to each given branch of mathematics." In order to describe this process, he introduces the general concept of mathematical domain (metamathematical). He understands it as a general set of objects connected by some relations, which he then equips with further mathematical properties.

Bibliography:

Grzegorczyk A., *Some classes of recursive functions*, "Rozprawy matematyczne" (1953), 43–45.

Grzegorczyk A., *Undecidability without arithmetization*, „Studia Logica" (2005), 79(2), 163–230.

Grzegorczyk A., *Undecidability of some topological theories*, „Fundamenta Mathematicae"38/1951, 137–152.

Grzegorczyk A. (with Kazimierz Kuratowski), *On Janiszewski's property of topological spaces*, „Annales de la Société Polonaise de Mathématique" 25/1952, 69–82.

Grzegorczyk A., *The systems of Leśniewski in relation to contemporary logical research*, „Studia Logica" 3/1955, 77–97.

Grzegorczyk A., *Uwagi o rozumieniu praw logiki*, „Myśl Filozoficzna", 1(1955).

Grzegorczyk A., (with Konrad Zdanowski) Undecidability and Concatenation, Andrzej Mostowski and Foundational Studies, ed. by Andrzej Ehrenfeucht, V. Wiktor Marek, Marian Srebrny, IOS Press 2008, 72–91.

Grzegorczyk A., *Logic - a human affair,* Wydawnictwo Naukowe „Scholar", Warszawa 1997.

Grzegorczyk A., *Zagadnienia rozstrzygalności* ((Decidability Issues), PWN, Warszawa 1957.

Grzegorczyk A., *Zarys arytmetyki teoretycznej* (Outline of Theoretical Arithmetic), PWN, Warszawa 1971.

Grzegorczyk A., *Zarys logiki matematycznej* (An outline of mathematical logic), Warszawa 1961.

Krajewski S. , *Andrzej Grzegorczyk — logika i religia, samotność i solidarność*, „Wiad. Mat." (2008), s. 53-59.

Kartenspiel: Renate Tobies, Winfried Mahler, Carsten Müller, Britta Müller

Elemente der Geschichte der reinen Mengenlehre

Detlef D. Spalt

XVI. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

26. Mai bis 1. Juni 2024

Abstract. Nach POPPER lassen sich zwei Arten der Definition unterscheiden: „nominalistische“ und „essenzialistische“. CANTOR hat die reelle Zahl im ersteren Sinne bestimmt, DEDEKIND im letzteren.

Für eine Grundtheorie, etwa eine Mengenlehre, kommt nur eine nominalistische Definitionsweise infrage. Die Mengentheorie heute nutzt bekanntlich CANTORs Mengenbegriff, und da dieser essenzialistisch ist, kann das nicht funktionieren. Deswegen kennt das Fach heute keine mathematische Mengenlehre und behilft sich mit einer logischen Krücke.

(*Ausblick:* Mit einem nominalistischen Mengenbegriff ist eine mathematische Mengenlehre möglich. Sie wurde auch entwickelt, doch davon will das Fach heutzutage nichts wissen.)

1 Methodologischer Vorspann: zwei Weisen der Definition

Im Jahr 1872 wurden zwei Begriffe der reellen Zahl publiziert:

- Zuerst kam GEORG CANTORs Idee[1], die wir heute kurz so fassen:

  > Eine *reelle Zahl* ist eine Äquivalenzklasse der Fundamentalfolgen, also konvergenter Folgen rationaler Zahlen.

  Den Begriff der Äquivalenzklasse hatte CANTOR im Jahr 1872 natürlich noch nicht, sondern statt seiner definierte er den Begriff gleich für die Fundamentalfolgen.

- Als RICHARD DEDEKIND das las[2], publizierte er umgehend seine eigene Idee:

  > Eine *reelle Zahl* ist ein *„Schnitt“* in den rationalen Zahlen. (Ein „Schnitt“ ist ein Etwas *außerhalb* der Theorie.)

Zu keiner Zeit wurde einer dieser Begriffe infrage gestellt. Nicht alle Mathematiker wollten sie als Definitionen des Begriffs reelle Zahl anerkennen, doch diese Skepsis betraf beide Begriffe gleichermaßen. Grundsätzlich gelten heute beide Definitionsweisen als legitim und korrekt.[3]

[1] Cantor 1872 [2] Dedekind 1872 S. 10 [3] vgl. Dieudonné 1960 S. 29

Im Jahr 1945 unterschied der Philosoph KARL RAIMUND POPPER methodologisch *zwei Weisen der Begriffsbestimmung (Definition):*[4]

1. die *essenzialistische* und

2. die *nominalistische* Bestimmung.

Das Ziel des methodologischen *„Essenzialismus"* (oder der *„Wesensschau"*), die Aufgabe der Wissenschaft ist die Entdeckung der wahren Natur der Dinge, die Beschreibung ihrer *„verborgenen* Realität oder Essenz"[5]. Diese Essenzen werden mit der „intellektuellen Intuition" erkannt.

PLATON und ARISTOTELES dachten so; heutzutage (1945), so POPPER, „die Sozialwissenschaften"[6].

Demgegenüber ist es das Ziel des methodologischen *„Nominalismus",* „das Verhalten eines Dinges unter verschiedenen Umständen zu beschreiben"[7]. Ziel ist die Beschreibung der Gegenstände mit Hilfe universeller Gesetze.[7] Als Beispiel nennt POPPER „die Naturwissenschaften"[7].

Die Frage des *Essenzialisten* lautet: „Was *ist* (die reelle Zahl)?" Die Frage des *Nominalisten* ist: *„Unter welchen Bedingungen* ist etwas Vorliegendes (eine reelle Zahl)?"

So treffen wir jetzt eine methodologische Unterscheidung zwischen
1. einem *essenzialistischen* (nennt den *Inhalt* des Begriffs) und
2. einem *nominalistischen* (nennt die *Bedeutung* des Begriffs) *Denkstil.*
(Der Name „Denkstil" stammt von LUDWIK FLECK.[8])

- Der *essenzialistische* Stil *beschreibt* den neuen Begriff, indem er ihn als einen *Gegenstand außerhalb* der Theorie bestimmt.
- Der *nominalistische* Stil *benennt* den neuen Begriff, indem er ihn mit anderen *Begriffen innerhalb* der Theorie verbindet.

Beachte: Die Dichotomie *essenzialistisch/nominalistisch* ist etwas anderes als die Dichotomie *explizit/implizit.* (Denn CANTORS wie DEDEKINDS Definition der reellen Zahl ist explizit!)

Demzufolge ist CANTORS Definition der reellen Zahl, methodologisch betrachtet, „nominalistisch" (und explizit), während die DEDEKIND'sche Bestimmung eine „essenzialistische" (und explizite) ist. (DEDEKIND ging es in der Tat um einen *Stufenaufbau* der Arithmetik bzw. der Mathematik.)

2 Der Begriff der Menge

Bekanntlich setzte GEORG CANTOR im Jahr 1895 fest:[9]

> **[Definition (Menge, Elemente).]** Unter einer „Menge" verstehen wir jede *Zusammenfassung* M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer An-

[4]vgl. Popper 1945 Bd. 1 S. 59–61 [5]aaO. S. 59 [6]aaO. S. 61 [7]aaO. S. 60 [8]Fleck 1935 [9]Cantor 1895–97 S. 282

> schauung oder unseres Denkens (welche „Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen. ($m \in M$)

Feststellung 1: Dieser Denkstil ist der *essenzialistische. Was* eine „Menge" sei, wird nicht gesagt, sondern bloß „Zusammenfassung" *genannt.* Ein *Dummy.*

Doch in einer Grundtheorie von allem gibt es kein Außerhalb der Theorie. Das heißt: In einer *Grundtheorie* von allem funktioniert eine essenzialistische Definition nicht. Also *taugt* CANTORs *Mengenbegriff nicht für eine Mengenlehre als einer Grundtheorie.*

Feststellung 2: CANTORS Mengendefinition ist *explizit.* Doch in einer Grundtheorie *muss* der Grundbegriff *implizit* definiert werden. Konsequenz: Auch aus diesem zweiten Grund ist CANTORS Mengendefinition *für eine reine Mengenlehre* ungeeignet.

Folgerung aus 1 & 2: Will man CANTORS Mengenbegriff in einer Grundtheorie nutzen, muss er *angepasst* werden. Formen wir also CANTORS Mengenbegriff so um, dass er (1.) nominalistisch und (2.) implizit wird:

> **[Definition (Menge, Elemente).]** Eine „Menge" M ist dann bestimmt, wenn die wohlbestimmten Mengen m, die „Elemente" von M, alle bestimmt sind. ($m \in M$)

Eine ähnliche Definition kennen wir! Im Jahr 1888 gab RICHARD DEDEKIND in *Was sind und was sollen die Zahlen?* folgende[10]

> **[Definition (System, Elemente).]** Ein solches System S (oder ein Inbegriff, eine Mannigfaltigkeit, eine Gesamtheit) ist als Gegenstand unseres Denkens ebenfalls ein Ding ([siehe Nr.] 1); es ist vollständig bestimmt, wenn von jedem Ding bestimmt ist, ob es Element von S ist oder nicht.

DEDEKINDS Mengendefinition ist *(1) nominalistisch* und *(2) implizit* und daher als Definition eines *Grundbegriffs einer Theorie für alles* geeignet. – Somit haben wir als *Definition der* Menge *für eine Grundtheorie von allem* erhalten:

> **[Definition (Menge, Elemente).]** Die *Mengen* sind dann bestimmt, wenn für je zwei *Mengen* M und N bestimmt ist, ob $M \in N$ gilt oder nicht gilt. (Die M mit $M \in N$ werden die „Elemente" von N genannt.)

Resultat: *Als Begriff der Menge* für eine Grundtheorie von allem *ist* DEDEKINDs *Mengenbegriff* in beiderlei Hinsicht (nominalistisch; implizit) *geeignet.* Er ist spezifischer als der angepasste CANTOR'sche – *und geeignet, wenn man die Mengenlehre als eine Grundtheorie will* (was CANTOR nicht anstrebte).

Historiografische Bemerkung. DEDEKINDS Mengen- (bzw. System-)Begriff ist heute gänzlich unbekannt – sowohl im Fach wie in der Geschichte des Faches[11], die einzige Ausnahme identifiziert sie umgehend mit CANTORS Definition[12], ein Fehler.

[10] Dedekind 1888 S. 2
[11] *pars pro toto:* Guillaume 1978; Purkert und Ilgauds 1987; Moore 1980; Medwedew 1984; Rowe 2023
[12] Ferreirós 2007 S. 226

3

Wie das Eingangsbeispiel des Begriffs der reellen Zahl zeigt, sind beide *Denkstile* mathematisch anerkannt. Es muss also einen *bestimmten anderen* Grund haben, warum DEDEKINDs Mengenbegriff heutzutage *unbekannt* ist. Dieser Grund liegt nahe: *Das Fach* will *heutzutage keine reine Mengenlehre als eine mathematische Theorie.*

Sehen wir, wie das seinen Anfang nahm!

3 Mathematik ist nicht Logik – die logizistische Suggestion der mathematischen Mengenlehre

Heute kennen alle RUSSELLs Antinomie. Aus RUSSELLs Sicht betrifft sie die Mathematik. Doch RUSSELL war Logiker (Logizist) und wollte die Mathematik als Logik. Das sei ihm unbenommen, doch die Mathematiker müssen ihm nicht folgen. (Dennoch tun sie es hier, bis heute! Bis *heute sind alle Mengentheoretiker Logizisten.*)

In der populären Version[13] besagt RUSSELLs Antinomie: Der Begriff Dorfbarbier ist widerspruchsvoll – und also existieren Dorfbarbiere nicht. *Sachlich* ist das Unsinn, *offenkundig!* (Und in der Tat unterschlägt RUSSELL diese Schlussfolgerung in der populären Fassung, nur in der wissenschaftlichen Sphäre zieht er sie!) Demgemäß ist es auch *mathematisch* Unsinn, zu behaupten: „RUSSELLs Antinomie beweist, dass der Begriff Menge unmöglich (weil *widerspruchsvoll*) ist.“ Erweist sich ein Begriff *unter bestimmten Umständen* als widerspruchsvoll, sobedeutet das *keinesfalls,* dass er *generell* widerspruchsvoll ist.

Ein mathematischer Begriff ist beides: (1) *mathematischer* Gehalt und (2) *logischer* Gegenstand (Begriff). *Für Nicht-Logizisten ist Mathematik von Logik verschieden.*

Mathematik verträgt keinen Widerspruch. Jahrhundertelang war der Begriff $\sqrt{-1}$ sinnlos. Ist der *Wurzelbegriff* also unmöglich, weil *widerspruchsvoll?* – Aber nein! $\sqrt{4}$ war jahrtausendelang sinnvoll, $\sqrt{2}$ schließlich auch! Ein unter *gewissen* Umständen widerspruchsvoller mathematischer Begriff kann bei *anderen* Umständen widerspruchsfrei sein – die Aufgabe der Mathematik ist es, solche *anderen* Umstände zu formulieren (oder zu zeigen, dass solche *ganz unmöglich* sind).

Warum die mathematische Mengenlehre bis heute nicht so verfährt, sondern *logizistisch ist,* bedarf einer Erklärung. Merke: Man soll das Kind nicht mit dem Bade ausschütten! *Eine einzige* widerspruchsvolle Mengendefinition beweist nicht *die allgemeine* Unmöglichkeit des Mengenbegriffs. *Es gibt keinen sachlichen (mathematischen) Grund, der es verbietet, eine* mathematische („naive“) *Mengenlehre zu entwickeln.* Wer das nicht sieht, unterliegt der *logizistischen Suggestion.* Das Einzige, was die RUSSELL/ZERMELO'sche Antinomie lehrt, ist: *Eine widerspruchsvolle Mengenbestimmung definiert keine Menge.* Das allerdings ist keine große Erkenntnis. *Kein* Widerspruch hat Platz in der Mathematik. Wir können sie aber etwas freundlicher formulieren: *Sie zeigt, dass sich nicht* alles Beliebige *als eine* „Menge“ *bestimmen lässt.* Manche „Zusammenfassung“ ist *keine Menge.* – Viel besser ist aber auch das nicht.

Nur, wer mit CANTORs *essenzialistischer* Mengenbestimmung in uneingeschränkter Weise operiert, kann das verblüffend finden. Aber wer mit einer *essenzialistischen* Definition eine *Grundtheorie für alles* entwickeln will, arbeitet a priori mit dem *falschen Begriff!*

---
[13] vgl. Russell 1918

Er oder sie hat nicht *philosophisch* nachgedacht.[14]

Literatur

Georg Cantor 1872, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*, 5: S. 123–132, zitiert nach Zermelo 1932, S. 92–102.

Georg Cantor 1895–97, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 46: S. 481–512; 49: S. 207–246, zitiert nach Zermelo 1932, S. 282–351.

Richard Dedekind 1872, *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig), siehe auch: Fricke *et. al*, Bd. 3, S. 315–334.

Richard Dedekind 1888, *Was sind und was sollen die Zahlen?* In: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (elfte Auflage) und *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (achte Auflage) (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (Ost), 1967), siehe auch: Fricke *et. al*, Bd. 3, S. 355–391.

Jean Dieudonné 1960, *Grundzüge der modernen Analysis.* Bd. 1 (Friedr. Vieweg + Sohn, Braunschweig, [3]1985).

Ulrich Felgner 2020, *Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit.* (Birkhäuser, Cham).

José Ferreirós 2007, *Labyrinth of Thought – A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics.* (Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin), 1. Aufl. 1999.

Paul Finsler 1926, Über die Grundlegung der Mengenlehre. Erster Teil – Die Mengen und ihre Axiome. *Mathematische Zeitschrift*, 25: S. 683–713, siehe auch Finsler 1975, S. 19–49.

Paul Finsler 1975 (Hrsg.: Georg Unger), *Aufsätze zur Mengenlehre.* (Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt).

Ludwik Fleck 1935, *Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache.*, Bd. 312 der Reihe *Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft* (Suhrkamp-Verlag, 1980).

Robert Fricke, Emmy Noether und Øystein Ore 1930–32, *Richard Dedekind. Gesammelte mathematische Werke,* 3 Bde. (Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig).

Marcel Guillaume 1978, Axiomatik und Logik. In: Jean Dieudonné (Hg.), *Geschichte der Mathematik 1700–1900,* S. 748–881 (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985).

Fydor A. Medwedew 1984, Über die abstrakten Mengenlehren von Cantor und Dedekind. *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte*, 7: S. 195–200.

[14] Oder er hat es wohl versucht, jedoch ohne Erfolg. Prof. ULRICH FELGNER analysiert die CANTOR'sche Mengendefinition korrekt als *„explizite Essential-Definition (Wesens-Definition)"*, doch sie ist wegen ihren „deutlichen Hinweisen auf den intendierten Inhalt" ungeeignet. Daher sieht Prof. FELGNER als alleinigen Ausweg: „Aber es ist immer noch möglich, den Mengenbegriff auf axiomatischem Wege [und also mittels einer *impliziten* Definition] einzuführen." (Felgner 2020 S. 212). – Das wohl; doch es gibt, *direkter und bestimmter,* auch die *traditionelle* Möglichkeit, DEDEKINDS Mengenbegriff zugrunde zu legen und auf diesem *nominalistisch* (und *implizit) definierten* Mengenbegriff eine naive Mengenlehre zu errichten: Finsler 1926. – Ja, Prof. FELGNER weiß sogar:

> Bei einer Vielheit A, die als ein *Ganzes* betrachtet werden kann, muß (im Prinzip) feststehen, was ihre Elemente sind und was nicht: es darf nicht unentschieden bleiben, ob beispielsweise $A \in A$ oder $A \notin A$ gilt.

(aaO.) – Mit der Ersetzung von „$A \in A$ oder $A \notin A$" durch „$B \in A$ oder $B \notin A$ für beliebiges B" ist dies genau DEDEKINDS Mengendefinition der beliebigen Menge A (und von FINSLER als Mengenbegriff für seine Theorie genutzt) – doch offenkundig ist das diesem Autor nicht bewusst (und nicht bekannt).

Gregory H. Moore 1980, Beyond First-order Logic: The Historical Interplay between Mathematical Logic and Axiomatic Set Theory. *History and Philosophy of Logic*, 1: S. 95–137.

Karl Popper 1945, *Die offene Gesellschaft und ihre Feinde*. 2 Bände, übersetzt von Paul K. Feyerabend (A. Francke AG Verlag, Bern, 1957, ²1970).

Walter Purkert und Hans Joachim Ilgauds 1987, *Georg Cantor*. (Birkhäuser Verlag, Basel usw.).

David Rowe 2023, On the origins of Cantor's paradox: what Hilbert left unsaid at the 1900 ICM in Paris. *The Mathematical Intelligencer* online, URL `https://doi.org/10.1007/s00283-022-10259-x`.

Bertrand Russell 1903, *The Principles of Mathematics*. (George Allan & Unwin, London usw., ¹¹1985).

Bertrand Russell 1918, The Philosophy of Logical Atomism and Other Essays 1914–1919. In: John G. Slater (Hg.), *The Collected Papers of Bertrand Russell*, Bd. 8, S. 157–306 (George Allan & Unwin Ltd, London, 1986).

Detlef D. Spalt 2024*a*, Russell's Hypnosis of Mathematics by Self-Hypnosis. (Ms., *eingereicht*).

Detlef D. Spalt 2024*b*, Shall Set Theory Stay an Empirical Science? (Ms., *eingereicht*).

Ernst Zermelo 1932 (Hg.), *Georg Cantor. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. (Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, Reprint, 1966).

Detlef G. Spalt

6

Waltraud Voss, TU Dresden:

Vom höheren Schulamt zur angewandt-mathematischen Forschung: Promovenden der TH Dresden in Luftfahrtforschung, in Meteorologie und Klimatologie

Alle heute von mir besprochenen Alumni und frühen Promovenden (1900-1945) der TU Dresden haben vor der Promotion die Prüfung für das höhere Schulamt an der TH Dresden abgelegt und die Lehrbefähigung für Mathematik erworben. Sie waren zunächst auf den Schuldienst und nicht auf einen Einsatz ihres Fachwissens in anderen Berufsfeldern orientiert. Dieser ergab sich – zeitweilig oder dauerhaft – aus den gesellschaftlichen Umständen heraus, die geprägt waren von Kriegsvorbereitung, Krieg und Nachkriegszeit.

Forschung für Flugzeuge und Luftfahrt: Friedrich Keune, Rudolf Ludwig, Manfred Schäfer

In früheren Vorträgen – von Renate Tobies, Annette Vogt und auch von mir – kamen schon Alumni, Promovenden und Mitarbeiter der TH Dresden vor, die in der Luftfahrtforschung eine Rolle gespielt haben. Die Drei, um die es heute geht, wurden 1908, 1910 und 1912 in Sachsen geboren; mit Ähnlichkeiten in ihren Lebensläufen der Jugendjahre ist wegen der zeitlichen und räumlichen Nähe zu rechnen, aber die Drei zeigen auch später Gemeinsamkeiten in ihrem Leben und Wirken auf: Alle strebten, sobald das seit Mitte der 1950er Jahre wieder möglich war, zurück in die deutsche Luftfahrtforschung, alle haben im Nebenamt Vorlesungen gehalten, haben sich habilitiert und wurden zum außerplanmäßigen Professor oder zum Honorarprofessor ernannt.

Friedrich Keune (1908-1982)

Friedrich (Wilhelm Johannes) Keune wurde am 26. Oktober 1908 in Zwickau geboren, seine Eltern besaßen dort eine Fabrik.
Vorbildung und Studium: Nach Grund- und Realschule in Zwickau besuchte er die Oberrealschule in Werdau, an der er Ostern 1928 das Abitur ablegte; ein kurzes Volontariat in einer Zwickauer Maschinenfabrik folgte. Von 1928 bis 1933 studierte er Physik und Mathematik an der TH Dresden und legte im Juni 1933 die Prüfung für das höhere Schulamt ab; den Vorbereitungsdienst trat er am Realgymnasium in Reichenbach (Vogtland) an.
Berufstätigkeit bis Sept. 1939: Zunächst war Keune Lehrer in Reichenbach. Durch Vermittlung von Erich Trefftz, als dessen Schüler er sich sah, begann er ab März 1935 als wiss. Mitarbeiter an der Aerodynamischen Versuchsanstalt (AVA) in Göttingen, wo er erst unter Anleitung von Irmgard Lotz (der späteren Flügge-Lotz), dann direkt unter Prof. Albert Betz, dem Nachfolger von Ludwig Prandtl, arbeitete. Sein Haupttätigkeitsfeld wurde (und blieb) die Vervollkommnung und Vereinfachung der theoretischen Methoden zur

Bestimmung der aerodynamischen Eigenschaften von Flügelprofilen. Im Nov. 1938 wurde er von der TH Dresden promoviert („sehr gut“; Dr.rer.nat.). Das Thema der Dissertation hatte er von Erich Trefftz bekommen, es war in Absprache mit diesem gemäß der Tätigkeit an der AVA verändert worden und lautete schließlich: „Die ebene Potentialströmung um allgemeine dicke Tragflügelprofile“ (Referent / Korreferent: Erich Trefftz (+1937) und Walter Tollmien / Max Lagally). (Sie erschien 1938 auch im „Jahrbuch der Luftfahrtforschung“.)
<u>Berufstätigkeit von Okt. 1939 bis Kriegsende</u>: Keune war Mitarbeiter im Entwurfsbüro der Ernst-Heinkel-Flugzeugwerke in Rostock-Marienehe. Im Auftrag des Luftfahrtministeriums arbeitete er zunächst weiter an Problemen ähnlich denen in der AVA, später wurde er Leiter der Theoretischen Abteilung des Entwurfsbüros in Rostock und in der Niederlassung der Heinkel-Werke in Wien.
<u>Tätigkeit nach Kriegsende bis März 1955</u>: 1945 kam Keune als Laborant in einem Zwickauer Fotoatelier unter, aber bereits 1946 finden wir ihn als Aerodynamiker in Berlin. Hier arbeitete er unter sowjetischer Leitung im „Automobiltechnischen Büro“ in Berlin-Adlershof, seit August 1947 mit einer Leitungsfunktion betraut. Im Nov. 1947 floh er in die Westzonen, wo er – wie er in seinem Lebenslauf schrieb – drei Jahre in einem englischen sogenannten „Transit-Hotel“ untergebracht war. Von Ende 1950 bis März 1955 forschte er – teilweise in Zusammenarbeit mit dem österreichischen Physiker Klaus Oswatitsch – im Flugtechnischen Institut der TH Stockholm, seine Aufgaben umfassten Themen aus den Gebieten der Unterschall- und Überschallströmung und der Schallnähe.
<u>Tätigkeit seit 1. April 1955 bis zum Ende des Berufslebens</u>: Keune war an der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (DVL) in Aachen (NRW) tätig, er begann als wiss. Mitarbeiter im Institut für Angewandte Gasdynamik und war später Leiter der Abteilung für Angewandte Theorie dieses Institutes.
<u>Nebenberuflich</u> hielt er seit 1958 Vorlesungen an der Rheinisch-Westfälischen TH Aachen und habilitierte sich dort 1965. Im selben Jahr (1965) ernannte ihn das Kultusministerium von Baden-Württemberg zum Honorarprofessor. Er lehrte nun sowohl an der RWTH als auch an TH / Universität Karlsruhe, beschränkte sich aber ab 1969 auf Karlsruhe. (Ein Grund dafür war die Verlegung seines DVL-Institutes aus Aachen heraus und der damit verbundene Umzug seiner Familie.)

Keune hat mehr als 50 Bücher und Schriften veröffentlicht. Genannt sei „Zur Berechnung des rotationssymmetrischen Strömungsfeldes vorn spitzer Rotationskörper nach der linearisierten Überschall- und Unterschalltheorie“ (1962, mit Gert Altmann).
Am 22. Nov. 1982 starb Friedrich Keune. Er hinterließ die (2.) Ehefrau und vier Kinder. (Zwei weitere Kinder, geboren in Göttingen und Rostock, waren bei seiner 1. Ehefrau in der DDR aufgewachsen.)

Rudolf Ludwig (1910-1969) und Manfred Schäfer (1912-1996)
Beide sind gebürtige Dresdner, Ludwig geboren am 1. Mai 1910, Schäfer am 30. April 1912. Ludwig legte Ostern 1930 das Abitur ab, Schäfer im Jahr darauf. Auf das Lehramtsstudium an der TH und das Probejahr folgte die sehr gute Promotion (1937 Ludwig, 1938 Schäfer). Beide hatten ihre Dissertation bei Paul Eugen Böhmer geschrieben, Professor für Versicherungsmathematik und Direktor des Versicherungsseminars der TH, Ludwig zum Thema „Theorie der monotonen Streckenzüge und ihre Anwendung auf komplexe Reihen" (Referent / Korreferent: Paul Eugen Böhmer / Walter Ludwig), Schäfer über: „Zeitgleichung und Keplersches Problem" (Ref. / Korref.: Böhmer / Max Lagally). Beide waren als Assistenten an der TH Dresden tätig: Ludwig am Mathematischen Seminar, Schäfer am Institut für Technische Mechanik bei Walter Tollmien, dem Nachfolger von Erich Trefftz. Ab Herbst 1939 waren sie „zum Kriegseinsatz beurlaubt", sie überlebten beide den Krieg – aber unter sehr unterschiedlichen Bedingungen.

Rudolf Ludwig war im Heeresdienst eingesetzt, vorwiegend an der Ostfront, bis er im Herbst 1944 für (andere) kriegswichtige Arbeiten freigestellt wurde; er kam zur Luftfahrtforschungsanstalt „Hermann Göring" nach Braunschweig-Völkenrode ins Institut für Gasdynamik.
Berufstätigkeit nach dem Krieg in Braunschweig: 1946/47 arbeitete Ludwig für das Ministry of Supply. Von 1947 bis 1953 war er Assistent am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik der TH Braunschweig, 1952 habilitierte er sich hier mit der Arbeit „Über Iterationsverfahren für Gleichungen und Gleichungssysteme" (Gutachter: Rehbock und Collatz). 1953 trat er als wiss. Mitarbeiter in die Deutsche Forschungsanstalt für Luftfahrt (DFL) ein und wurde später Abteilungsleiter im Institut für Flugmechanik. Die DFL war zur wiss.-technischen Unterstützung der für die Prüfung von Luftfahrtgerät zuständigen Stellen verpflichtet. Dabei waren Ludwig speziell die Flugleistungen zur Bearbeitung zugewiesen worden. Gern stellte er funktionale Zusammenhänge in Nomogrammen dar, die sich bequem handhaben ließen, aussagekräftig waren – und sehr nützlich in der Zeit vor den elektronischen Rechenanlagen. Deren Bedeutung hat er früh erkannt. Er wurde mit dem Aufbau des Rechenzentrums der DFL beauftragt und dann mit dessen Leitung.
Einige Veröffentlichungen von Rudolf Ludwig:
(1956) Nomogramme zur Leistungsberechnung von Strahltriebwerken, in: DFL-Bericht 45;
(1965) Elektronische Rechenanlagen in der Luft- und Raumfahrt, in: Luftfahrttechnik – Raumfahrttechnik 11;
(1967) Berechnung von Schleudersitzbahnen, in: Deutsche Luft- und Raumfahrt, Forschungsbericht 67-90.
Nebenamtlich las er an der TH Braunschweig, seit 1959 als aplm. Professor.

Rudolf Ludwig hatte 1942 in Dresden Gudrun Harder (* 1918), die Tochter eines Oberlehrers, geheiratet und war Vater von zwei Töchtern.
Er starb am 10. September 1969 in Merano.

Manfred Schäfer arbeitete bis zum Ende des Krieges bei Walter Tollmien; seine Assistententätigkeit war für zwei Jahre vorgesehen, - aus denen letztlich 20 Jahre gemeinsamer Arbeit wurden. Tollmiens Lehrstuhl war mit kriegswichtigen Arbeiten befasst, in die Manfred Schäfer eingebunden war. Nach der Zerstörung der Stadt Dresden, seiner Arbeitsstätte und seiner Wohnung hatte Tollmien seine Tätigkeit im März 1945 nach Göttingen verlagert. So finden wir auch Manfred Schäfer am Ende des Krieges in Göttingen, - an der Aerodynamischen Versuchsanstalt (AVA).
Schäfers Tätigkeit nach dem Krieg: Von 1948 bis 1962 war er am Max-Planck-Institut für Strömungsforschung Göttingen beschäftigt, dessen Leitung 1957 Walter Tollmien übernommen hatte; seit 1957 stand er an der Spitze der Abteilung Gasdynamik. Nebenamtlich lehrte er an der Universität Göttingen, an der er sich 1951 habilitierte und die Venia legend für Angewandte Mathematik und Mechanik erwarb; seit 1957 war er aplm. Professor.
1962 folgte Manfred Schäfer einem Ruf an die Bergakademie Clausthal (seit 1968 TU); er war Direktor des Instituts für Technische Mechanik.
Zwei seiner vielen Schriften seien genannt:
(1941) (mit W. Tollmien): Zur Theorie der Windkanalturbulenz;
(1962) Schäfer gab die Festschrift zum 60. Geburtstag von Walter Tollmien heraus und versah sie mit einem langen Vorwort. In ihm ließ er auch die Entwicklung seiner Beziehung zu Tollmien Revue passieren: Vom Schüler-Lehrer-Verhältnis seiner Dresdner Assistentenzeit bis zu einer Freundschaft zwischen Kollegen nach 20 Jahren gemeinsamer Tätigkeit.

Schäfer war schon in Dresden ein passionierter Schachspieler und in fortgeschrittenem Alter Internationaler Meister im Fernschach.
Manfred Schäfer starb am 11. März 1996 in Göttingen.

Meteorologie und Klimatologie im Observatorium Wahnsdorf bei Dresden: Paul Schreiber, Eugen Alt, Johannes Goldschmidt, Friedrich Teichert, Helmut Mrose, Wolfgang Warmbt
Nur drei der Genannten wurden von der TH Dresden promoviert, die anderen sind aus Gründen der Systematik dabei, stehen aber auch in Beziehung zur TU Dresden und ihren Vorgängereinrichtungen. Der Älteste, Paul Schreiber, wurde 1848 geboren, der Jüngste, Wolfgang Warmbt, 1916. Dazwischen liegt fast ein Dreivierteljahrhundert, in dem sich die gesellschaftlichen Verhältnisse in Deutschland stark gewandelt haben – eingeschlossen das Bildungssystem und die Zugänge zu ihm.

Das Observatorium Wahnsdorf

Paul Schreiber (1848-1924)
(Carl Adolph) Paul Schreiber wurde am 26. August 1848 in der sächsischen Kleinstadt Strehla als Sohn des dortigen Bürgermeisters geboren.
Ausbildung: Schreiber lernte am Gymnasium Strehla bis zum Alter von 16 Jahren, wechselte dann an die Kgl. Gewerbeschule Chemnitz, die er 1867 als einer der Jahrgangsbesten abschloss, und trat danach in die von Oskar Schlömilch geleitete Lehrerabteilung der Polytechnischen Schule Dresden ein. Deren erfolgreicher Abschluss war (seit 1848!) ein Sprungbrett an die Universität Leipzig ohne Abitur, allerdings nur für die Studien der Mathematik und Physik (später auch weiterer Naturwissenschaften). An der Universität Leipzig ergänzte Schreiber seine Dresdner Fachstudien und wurde bereits 1872 zum Dr.phil. promoviert – aufgrund der Dissertation „Untersuchungen über Theorie und Praxis des Waagebarometers".
Berufstätigkeit:
1872 bis 1884 unterrichtete er Physik an der Baugewerken- und Werkmeisterschule in Chemnitz. Von Jugend an galt sein Interesse der Meteorologie, und so nahm er gern die Möglichkeit der nebenamtlichen Tätigkeit am Kgl. Sächs. Meteorologischen Institut in Chemnitz wahr, die sich ihm 1882 bot. Von 1885 bis 1921 war er (nun im Hauptamt) Direktor dieses Instituts, erst 20 Jahre in Chemnitz, dann seit 1905 in Dresden (Name seit 1907: „Kgl. Sächs. Landeswetterwarte"). 1884 bereits war er zum Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina gewählt worden; er wurde Oberregierungsrat und erhielt den Professorentitel. Paul Schreiber trat am 1. April 1921 in den Ruhestand; er starb am 29. Dez. 1924 in Dresden.
Besondere Leistungen und Veröffentlichungen:
Bereits 1882 hatte Schreiber tägliche Wetterberichte für Sachsen eingeführt. Seine bedeutsamsten Schöpfungen sind die Wetterwarten auf dem Fichtelberg und auf der Wahnsdorfer Kuppe, die beide 1916 ihre Arbeit aufnahmen. Er hat mehrere meteorologische Registrierapparate erfunden, die in zahlreichen Wetterwarten eingeführt worden sind. Schreiber war stets bemüht, die Tätigkeit

der Sächsischen Landeswetterwarte einer breiteren interessierten Öffentlichkeit nahe zu bringen. Dazu dienten seine aktive Mitarbeit und seine Vortragstätigkeit in der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden. Dazu dienten auch die Präsentationen zu bedeutenden Ereignissen wie etwa der Sächsischen Industrie- und Gewerbeausstellung 1897 in Leipzig oder der Internationalen Hygieneausstellung 1911 in Dresden.
Genannt seien von Schreibers Schriften:
„Klimatische Grundwerte für das Königreich Sachsen (1864-1900)“, Chemnitz 1903, und „Die Niederschlagsverhältnisse der Jahre 1864 – 1890 nach den aus Beobachtungen von circa 20 Stationen gewonnenen täglichen Durchschnittswerthen des Niederschlags“, Heft 1, Chemnitz 1892. (Beide erschienen im Selbstverlag des Kgl. Sächs. Meteorologischen Instituts.)

Eugen Alt (1921 bis 1936)
Eugen (Johann) Alt wurde am 4. August 1878 in Augsburg als Sohn des dortigen Postoberkondukteurs Georg Alt und dessen Ehefrau Anna geb. Schilling geboren. Nach dem Besuch des Realgymnasiums in Augsburg studierte er Mathematik und Physik auf das höhere Schulamt an der TH München. Es folgte eine kurzzeitige Tätigkeit als Lehrer.
Im meteorologischen Dienst in Bayern und Sachsen: Von 1902 bis 1921 war Alt Hilfsassistent, Kustos und Konservator an der Bayerischen Meteorologischen Zentralstation in München. 1909 wurde er von der Universität München auf Grund der Dissertation „Die Doppeloszillation des Barometers, insbesondere im arktischen Gebiet“ zum Dr.phil. promoviert. Von 1921 bis 1936 war er – in der Nachfolge von Paul Schreiber – Direktor der Sächsischen Landeswetterwarte.
Nebenamtlich hielt er seit 1921 Vorlesungen über Meteorologie und Witterungskunde an der Forstlichen Hochschule Tharandt und an der TH Dresden (zu der erstere seit 1929 als Abteilung gehörte). 1935 wurde er Oberregierungsrat und einer der Luftkreismeteorologen in Dresden.
Eugen Alts Wirkungsfelder:
Alt widmete sich insbesondere der atmosphärischen Strahlung, der Optik, der Luftelektrizität und später auch militär-meteorologischen Problemen. Für die Aerologie (Höhenwetterkunde) bestand seit 1926 eine Arbeitsgemeinschaft mit der Universität Leipzig, innerhalb derer die ersten Registrierballonaufstiege stattfanden. Hervorzuheben ist, dass Alt durch seine Vorlesungen in Tharandt und Dresden und durch diese Arbeitsgemeinschaft erstmals eine dauerhafte Verbindung des Sächs. Meteorologischen Instituts mit wissenschaftlichen Einrichtungen herstellte. Er vergab auch Themen für Dissertationen, so an Erich Göhlert, der 1928 von der TH Dresden zum Dr.rer.techn. promoviert wurde.
Einige von Eugen Alts Schriften:

- Der Krieg im Zeitalter der Naturwissenschaft und der Technik, Leipzig 1915
- Meteorologie für Flieger, Berlin 1917

- Die Wettervorhersage, ihre Geschichte, ihr gegenwärtiger Stand und die Richtung ihrer Fortentwicklung, München 1919
- Klimakunde von Mittel- und Südeuropa, Berlin, 1932
- (mit anderen Autoren): Die Hochwasserkatastrophe im östlichen Erzgebirge am 8. und 9. Juli 1927, Berlin 1936.

Eugen Alt starb am 25. Sept. 1936 in Dresden.

Johannes Goldschmidt (1894-1952)
Johannes (Emil August) Goldschmidt wurde am 24. August 1894 in Dresden als Sohn des Ratsbotenmeisters August Goldschmidt und dessen Ehefrau Minna geb. Schiller geboren. Er wuchs mit zwei Schwestern auf.
Vorbildung, erste Berufstätigkeit, Kriegseinsatz: An ein Hochschul- oder Universitätsstudium war nicht zu denken, aber der Weg zum Volksschullehrer lag für ihn im Bereich des finanziell Möglichen. Er absolvierte das Freiherrlich von Fletschersche Lehrerseminar in Dresden im August 1914 und war als Volksschullehrer tätig, bis er zum 4. Oktober 1915 zum Heeresdienst einberufen wurde. Er war an der Westfront eingesetzt, überlebte den Krieg und wurde im Dez. 1918 aus dem Heer entlassen.
Nach dem Krieg: Wieder im Volksschuldienst, legte er die Wahlfähigkeitsprüfung ab und studierte seit WS 1919/20 Mathematik und Physik an der TH Dresden, bestand im Dez. 1924 die Prüfung für das höhere Schulamt, nahm den Probedienst auf und wurde bereits im August 1925 von der TH Dresden zum Dr.rer.techn. promoviet. (Die Dissertation „Über den Absorptionskoeffizienten des Lichtes und Lichtelektronen bei Platin“ hatte er bei dem Physikordinarius Harry Dember geschrieben.)
Zweite Berufstätigkeit: Er war nun höherer Lehrer, trat aber noch 1925 in den Sächs. Landeswetterdienst ein. Nach dem Tod von Eugen Alt im Jahre 1936 wurde Johannes Goldschmidt Leiter der Sächsischen Landeswetterwarte (Meteorologisches Observatorium Wahnsdorf). Er legte einen neuen Schwerpunkt auf das Erschließen klimatologischer Zusammenhänge. Dazu fokussierte er sich auf luftchemische Forschungen. 1941 wurde er zum Kriegsdienst einberufen, kam diesmal aber nicht an die Front, sondern war als Meteorologe kriegswichtig tätig.
Nach dem 2. Weltkrieg: Wahnsdorf war eine der unzerstörten wetterdienstlichen Einrichtungen in Sachsen. Auf Befehl der sowjetischen Militäradministration wurde hier die Sächsische Landeswetterwarte neu begründet – mit der Maßgabe, das meteorologische Messnetz und den Wetterdienst in Sachsen wieder aufzunehmen (, der übrigens nie ganz zum Erliegen gekommen war). Goldschmidt widmete sich in seinen letzten Jahren verstärkt dem Problem der Messung des Ozons. Weltweit sind die vom Observatorium Wahnsdorf organisierten Ozonmessungen historisch einmalig. „Ozon“ hat vorher auch an der TH Dresden schon eine Rolle gespielt, so hatte am 17. und 18. April 1944 an der TH die „Sondertagung Ozon“ stattgefunden, organisiert von Otto Hoelper,

der auch den Übersichtsbeitrag verfasste. Dieser wurde erst 1949, fünf Jahre nach Hoelpers Tod, veröffentlicht. (Otto Hoelper (1893-1944) leitete nacheinander die Meteorologischen Observatorien Aachen, Potsdam und – nach dem Kriegseinsatz von Goldschmidt – Wahnsdorf.)
Nebenamtlich: Seit 1939 hatte Goldschmidt einen Lehrauftrag für Meteorologie an der TH Dresden inne, im Sommer 1945 habilitierte er sich zum Dr.rer.techn.habil. – „auf den letzten Poeng" nach altem Recht.
1951 wurde von der TH Dresden eine Dozentur für Meteorologie neu begründet und Goldschmidt darauf berufen; er blieb aber hauptamtlich Leiter des Meteorologischen Observatoriums Wahnsdorf.
Drei von Goldschmidts Schriften (alle im Akademie-Verlag Berlin erschienen):

- Das Klima von Sachsen, 1950
- Die Singularitäten im jährlichen Witterungsverlauf von Wahnsdorf, 1950
- Die 25jährige Beobachtungsreihe von Wahnsdorf 1917-1941, 1953.

Johannes Goldschmidt starb am 1. Nov. 1952 in Dresden; er hinterließ seine Frau, die er 1925 in Meißen geheiratet hatte, und zwei Töchter.

Friedrich Teichert (1905-1986)
(Ernst) Friedrich Teichert wurde am 2. Sept. 1905 in Bautzen als Sohn des Papiermachers Ernst Teichert geboren.
Vorbildung und erste Berufstätigkeit: Ein Studium war nicht vorgesehen. Nach der Bürgerschule besuchte Teichert die Oberrealschule bis zur Reife für Obersekunda und trat danach im April 1922 eine kaufmännische Lehre in Bautzen an. Nach deren Abschluss blieb er noch einige Monate im Lehrbetrieb, war dann kaufmännischer Angestellter der Lithographischen Kunstanstalt Bautzen und seit 1926 Kanzleiangestellter im Wohlfahrtsamt der Amtshauptmannschaft Bautzen. Mit einigen finanziellen Rücklagen kündigte er diese recht sichere Arbeitsstelle 1927, um zu studieren; er wollte Lehrer werden.
Zweite Schulzeit, Studium, Promotion: Im Januar 1928 ging er zurück an die Bautzner Oberrealschule. An deren Spitze stand derzeit Oberstudiendirektor Dr. Arno Kleber, Absolvent der Dresdner Lehrerabteilung und eng mit der TH verbunden. Teichert trat in die Unterprima ein, schrieb die Prüfungsarbeiten nach Oberprima mit, wurde bereits Michaelis 1928 Klassenprimus und legte am 2. März 1929 das Abitur ab. Seit dem SS 1929 studierte er Mathematik und Physik an der TH Dresden, bestand im April 1933 die Prüfung für das höhere Schulamt „mit ausgezeichnetem Erfolg" und nahm den Vorbereitungsdienst auf. Bereits im April 1934 wurde er von der TH Dresden zum Dr.rer.techn. promoviert („Sehr gut"). Die Dissertation „Kurven und Flächen konstanter Krümmung" hatte er bei William Threlfall geschrieben.
Zweite Berufstätigkeit: Er war höherer Lehrer an der Oberrealschule Dresden, 1941 wurde er Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
Zu Teicherts Tätigkeit nach dem 2. Weltkrieg: Teichert war Mitarbeiter am Meteorologischen Observatorium Wahnsdorf und wurde nach dem plötzlichen

Tod von Johannes Goldschmidt im Jahre 1952 dessen Leiter. Er setzte die von Goldschmidt initiierten Langzeitbeobachtungen der Luftbestandteile, insbesondere auch des Ozons, fort. 1956 verließ er die DDR Richtung BRD – und ließ ein Kollektiv von 18 Mitarbeitern zurück, das ihm vertraut hatte und ihn schätzte.
Die Stellenangebote in der BRD entsprachen wohl nicht ganz seinen Erwartungen. Erst 1960 fand er eine ihn befriedigende Beschäftigung als Dozent für Physik und Mathematik am „Oskar-von-Miller-Polytechnikum“ in München. Es heißt in jüngeren Publikationen gelegentlich, Teichert sei in der DDR nach seiner Republikflucht totgeschwiegen worden, - aber was sollten DDR-Meteorologen, was sollten seine ehemaligen Wahnsdorfer Kollegen auch über ihn sagen oder schreiben?
Friedrich Teicherts Publikationen befassten sich u. a. mit der Ozonmessung, darunter sind 1955 „Ozonuntersuchungen am Meteorologischen Observatorium Wahnsdorf“ (Akademie-Verlag; Reihe Abhandlungen des Meteorologischen und Hydrologischen Dienstes der DDR) und 1956 „Ozonmessungen Dresden-Wahnsdorf und Fichtelberg“, in: Zeitschrift für Meteorologie 10, H. 9, 264 – 277 (beide mit Wolfgang Warmbt als Koautor).

Helmut Mrose (1910-1999)
Helmut Mrose wurde am 19. Mai 1910 in Schneeberg (Sachsen) geboren. Der Vater war Studiendirektor des dortigen Staatlichen Realgymnasiums.
<u>Vorbildung, Studium, Promotion</u>: Hier erwarb Mrose am 24. Februar 1930 das Abitur. Seit dem SS 1930 oblag er dem Schulamtsstudium an den Universitäten Jena, Rostock, München und an der TH Dresden, an der er im Juni 1935 die Prüfung für das höhere Schulamt ablegte. 1936 wurde er von der TH Dresden aufgrund der Dissertation „Verdunstungsmessungen auf freien Wasserflächen mit einem Anhang über Taumessung“ (auch als Beilage zum Jahrbuch des Sächsischen Amtes für Gewässerkunde, 1936) zum Dr.rer.techn. promoviert. Das Thema dürfte noch von dem verstorbenen Eugen Alt stammen. Als Referenten finden wir den Meteorologen Willi König (1884-1955) und als Korreferenten Rudolf Tomaschek (1895-1966), zu jener Zeit Physikordinarius an der TH Dresden in der Nachfolge von Harry Dember, der 1933 aus rassischen Gründen entlassen worden war. (Mit Willi König hatten nach dem 2. Weltkrieg wohl alle DDR-Meteorologen punktuell zu tun, denn er war nicht nur Professor an der Berliner Universität und seit 1950 Leiter des Zentralobservatoriums in Potsdam, sondern auch stellvertretender Leiter des Meteorologischen Dienstes der DDR und einige Jahre Chefredakteur der „Zeitschrift für Meteorologie“, in der natürlich auch die Wahnsdorfer publizierten.)
<u>Berufstätigkeit von Helmut Mrose nach der Promotion</u>:
<u>Bis Kriegsende</u>: Mrose war meteorologischer Beobachter erst auf der Station Collmberg bei Oschatz (zum Geophysikalischen Institut der Universität Leipzig gehörend), dann von 1939 bis 1945 am Hygienischen Institut der Universität Jena.

<u>Nach dem Krieg</u>: Zunächst arbeitete er wieder auf dem Collmberg, danach von 1950 bis 1958 an der Bioklimatischen Forschungsanstalt Friedrichroda (Thüringen) und seit Mai 1958 am Observatorium Wahnsdorf, wo (unter Wolfgang Warmbt) auch bioklimatisch geforscht wurde. Mrose war einer der Pioniere der Luftchemie schon in Friedrichroda und blieb es in Wahnsdorf. Kaum in Wahnsdorf angekommen, entwickelte er ein Gerät zur Messung des Rußgehaltes der Luft.
Überhaupt wurden Mess- und Registriergeräte von Wissenschaftlern wie Mrose und Warmbt erdacht und in der hauseigenen Wahnsdorfer Werkstatt von hervorragenden Handwerkern und Tüftlern hergestellt.
<u>Einige der Schriften von Helmut Mrose</u>:
Aus der Friedrichrodaer Zeit stammt: „Klima und Wetter in ihrer Wirkung auf den Menschen“, Wittenberg 1955 (A. Ziemsen Verlag).
Spätere Schriften befassen sich u. a. mit der Ozonmessung und mit dafür entwickelten Geräten, wie etwa:

- 1974 (mit W. Warmbt und G. Philipp): Vorläufige Messergebnisse des bodennahen Ozons unter Verwendung von Chromtryoxidfiltern, in: Geod. Geophys. Veröff. des Nationalkomitees für Geodäsie und Geophysik (NKGG) der DDR, R. II, 18, 67–80;
- 1974 (mit W. Warmbt): Zwei einfache Registriergeräte zur Bestimmung des bodennahen Ozons auf der Grundlage der amperometrischen Titration und des coulometrischen Messprinzips nach Novak, in: ebenda, 58–66.

<u>Noch einige Bemerkungen zu Kontakten zur BRD</u>:
Mrose und andere Meteorologen aus Wahnsdorf und der DDR überhaupt hatten gute Kontakte auch zu westdeutschen Wissenschaftlern, die teilweise in die Vorkriegszeit zurückreichten, wie etwa zu Hans Cauer. Man kannte sich, schätzte sich, tauschte wissenschaftliche Gedanken aus, traf sich gelegentlich auf Tagungen. So fuhr Mrose 1956 – noch von Friedrichroda aus – nach Mainz. Warmbt und Cauer trafen sich 1959 auf der „Clean Air Conference“ in London. Mrose und ein Wahnsdorfer Kollege wollten an der 4. Deutschen Aerosolkonferenz im April 1961 in Bad Lippspringe teilnehmen, verzichteten letztlich jedoch, da in der Einladung ganz unsensibel noch immer der Begriff „Zone“ verwendet worden war.

Bereits im Ruhestand, wurde Helmut Mrose 1980 mit der Reinhard-Süring-Plakette der Meteorologischen Gesellschaft der DDR in Silber geehrt.
<u>Zur Freizeit</u>: Mrose hatte ausgeprägtes Interesse an der heimischen Vogelwelt, von 1970 bis 1980 war er Leiter der Fachgruppe Ornithologie Radebeul im Deutschen Kulturbund. - Helmut Mrose starb am 19. Juni 1999 in Oschatz.

Wolfgang Warmbt (1916-2008)
Wolfgang Warmbt wurde am 27. Juni 1916 in Döbeln (Sachsen) als Sohn des Oberingenieurs Conrad Warmbt und seiner Ehefrau Käthe geb. Reibetanz geboren. Er wuchs mit einem Bruder auf.

Vorbildung, Studium, Promotion: Er besuchte Realgymnasien in Döbeln und Leipzig und legte 1936 das Abitur in Leipzig ab. 1936 bis 1941 studierte er Geophysik und Meteorologie in Leipzig und Hamburg. 1942 wurde er von der Universität Leipzig aufgrund der bei Ludwig Weickmann angefertigten Dissertation „Beiträge zur Häufigkeitsklimatologie des Ostseeraumes" zum Dr.phil. promoviert.
Kriegseinsatz seit 1941: Zur Zeit der Promotion war Warmbt bereits im Kriegsdienst. Er arbeitete im Reichswetterdienst für die Luftwaffe. Nachdem er 1943 die Eignungsprüfung als Meteorologe für den höheren Reichswetterdienst abgelegt hatte, wurde er Mitarbeiter in der Zentralstelle für Funkberatung der Erprobungsstelle der Luftwaffe in Rechlin (Mecklenburg).
Tätigkeit nach dem Krieg: Seit 1946 arbeitete Warmbt am Meteorologischen Observatorium Wahnsdorf, er war an den durch Goldschmidt 1950/51 initiierten und von Teichert aufgenommenen Messungen des bodennahen Ozons beteiligt, setzte sie fort und sorgte für den Aufbau des weltweit ersten Netzes zur Ozonmessung. Dieses befand sich in der DDR. Die Station „Arkona" war seit 1956 in Betrieb, sie lieferte die erste Messreihe, die einen deutlichen Anstieg des bodennahen Ozons zeigte.
Die Wahnsdorfer Arbeiten zum Studium des bodennahen Ozons fanden weltweit Beachtung, so bereits anlässlich des Internationalen Geophysikalischen Jahres 1957/58. Unter Warmbts Leitung wurden Ozonmessungen auch in der Hohen Tatra, im Nordatlantik und in der Antarktis durchgeführt. Den beobachteten Anstieg des bodennahen Ozons deutete Warmbt richtig, und er hat früh erkannt, dass es sich dabei nicht um lokale Probleme handelte.
Warmbt hatte ein weit gefasstes Verständnis von Bioklimatologie:

- Sein Kollektiv arbeitete experimentell und theoretisch und bezog regional-klimatische Aspekte ein. So wurde 1953 erstmals das für Sachsen wichtige Phänomen des „böhmischen Windes" beschrieben.
- Der Einfluss meteorologischer Faktoren auf Krankheiten – Scharlach, Diabetes, … – wurde untersucht.
- Der Wärmehaushalt des Menschen wurde erforscht, - auf der Grundlage von Wärmestrommessungen an der Hautoberfläche.
- Medizinische Einrichtungen in Sachsen konnten zur Mitarbeit an bioklimatischen Fragestellungen gewonnen werden, so das Institut für Rheumatologie in Dresden-Klotzsche.

Nebenamtliche Tätigkeit: Warmbt las lange Zeit über Meteorologie, Bioklimatologie und meteorologische Aspekte der Spurenstoffausbreitung am Geophysikalischen Institut der Universität Leipzig, mit dem er durch Studium und Promotion verbunden war. Er habilitierte sich 1962 an der Technischen Universität Dresden aufgrund der Schrift „Luftchemische Untersuchungen des bodennahen Ozons 1952-1961".
Leiteinrichtung: Im Rahmen des Meteorologischen Dienstes der DDR wurden die Forschungsfelder 1964 neu profiliert. Das Meteorologische Observatorium Wahnsdorf wurde wegen seiner bisherigen einschlägigen erfolgreichen Arbeit

wissenschaftliche Leiteinrichtung für die meteorologischen Aspekte der Luftreinhalltung.
Schriften von Wolfgang Warmbt: Von seinen etwa 70 Publikationen seien nur einige aufgelistet, die sämtlich um die Ozonmessung kreisen.
1964: Luftchemische Untersuchungen des bodennahen Ozons 1952 – 1961. Methoden und Ergebnisse, in: Abh. d. Meteorol. Dienstes d. DDR, 72, Band X;
1965: Ozonmessungen über der Meeresoberfläche im Nordatlantik und im Seegebiet von Westgrönland, in: Z. Meteor. 18, 151 – 156;
1966: Surface ozone and artificial beta-activity in Dresden-Wahnsdorf, in: Tellus 18 (2), 441 – 450;
1979: Ergebnisse langjähriger Messungen des bodennahen Ozons in der DDR, in: Z. Meteor. 29, 24- 31;
1887 (mit U. Feister): Long-term measurements of surface ozone in the German Democratic Republic, in: J. Atmosph. Chemistry 5, 1-21.
Ehrungen der letzten Jahre:
1980 wurde Wolfgang Warmbt mit der Reinhard-Süring-Plakette (in Silber) der Meteorologischen Gesellschaft der DDR geehrt. Zu seinem 80. Geburtstag im Jahre 1996 richtete der Zweigverein Leipzig der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft ein Ehrenkolloquium für ihn aus.

Wolfgang Warmbt war verheiratet und hatte drei Kinder; er starb am 24. September 2008 in Radebeul.

Quellen: Alle Promovenden der TH Dresden sind mit kurzen Einträgen (und Quellenverzeichnis) zu finden in: Waltraud Voss und Anja Musiol: Biographisches Lexikon der frühen Promovenden der TU Dresden (1900-1945), Dresden/Merseburg 2019 (2 Bände, auch online). Das betrifft: Keune, Ludwig, Schäfer, Goldschmidt, Teichert, Mrose. Alle Mathematikpromovenden der TH Dresden sind mit biographischen Einträgen und Quellenverzeichnis enthalten in: Renate Tobies: Biographisches Lexikon in Mathematik promovierter Personen, Augsburg 2006. Das betrifft: Ludwig, Schäfer, Teichert.
Weitere Quellen: zu Friedrich Keune: Archiv der RWTH Aachen: PA Friedrich Keune, Personal- und Vorlesungsverzeichnisse; Archiv der Universität Karlsruhe – KIT: „Zum 65. Geburtstag“, Traueranzeige, Danksagung; http://aerocomlab.stanford.edu/Papers/jameson_DGLR_81-242_1983.pdf (Sterbedatum); zu Rudolf Ludwig: Schulz, Werner, "Ludwig, Rudolf" in: Neue Deutsche Biographie 15 (1987), S. 436-437; zu Manfred Schäfer: Manfred Schäfer (Hrg.:): Miszellaneen der angewandten Mechanik. Festschrift Walter Tollmien zum 60. Geburtstag am 13. Oktober 1960 von seinen Freunden und Schülern, Berlin 1962 (Akademie-Verlag), hieraus insbesondere: Manfred Schäfer: Vorwort.
Zu den Wahnsdorfer Meteorologen insgesamt: Detlev Möller: Leibniz Online, Nr. 49, 2023: „Geschichte der atmosphärischen Chemie des Sauerstoffs“; Peter Hupfer and Klaus Dethloff (Ed.): „Selected Contributions on Results of Climate Research in East Germany (the former GDR)“ (Ber. Polarforsch. Meeresforsch. 588), 2009; Gerhard Scheibe und Eberhard Freydank: „Nachruf auf Dr. habil. Wolfgang Warmbt“, in: Mitteilungen der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft 01/2009, S. 27/28; Landesamt für Umwelt und Geologie Sachsen (Hrg.): „1919–1991: Von der Wetterwarte zum Landesamt für Umwelt und Geologie – 75 Jahre Meteorologisches Observatorium Wahnsdorf“, 1991 (mit umfangreicher Liste von Publikationen).

Zu Eugen Alt: Johannes Goldschmidt: „Alt, Eugen“, in: Neue Deutsche Biographie 1 (1953), S. 207 (Onlinefassung: http://www.deutsche-biographie.de/.html); zu Johannes Goldschmidt: Sächsische Zeitung, Nr. 257 vom 5.11.52 (Todesanzeige); Erhard Schuster: Chronik der Tharandter forstlichen Lehr- und Forschungsstätte 1811-2000, Tharandt 2001; zu Helmut Mrose: online: NABU Sachsen-Fachgruppe Ornithologie und Naturschutz Radebeul: Zur Geschichte der Fachgruppe.
Zu Paul Schreiber, Eugen Alt, Johannes Goldschmidt, Willi König (Gast): „Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft ISIS in Dresden“ für die Jahre 1888 bis 1938/39, hierin sind (öffentliche!) Hauptversammlungsvorträge aufgeführt, gehalten von Paul Schreiber (1888, 1906, 1908 („Wiss. Aufgaben der Luftballonfahrten“), Eugen Alt (1933/34), Willi König (1936/37), Johannes Goldschmidt (1938/39).

bei einem Vortrag (Karl Kleine)

Adolf Hurwitz (1859 - 1919) between pure and applied mathematics – influenced and influencer

Rita Meyer-Spasche,
Max Planck Institute for Plasma Physics, Boltzmannstr. 2
85748 Garching, Germany; rita.meyer-spasche@ipp.mpg.de

Adolf Hurwitz was born in Hildesheim in 1859 as the fourth child of Salomon Hurwitz and his wife Elise, née Wertheimer. Already as a child and adolescent he received many inspirations: As Hurwitz's fellow student, ETHZ colleague and friend *Ferdinand Rudio (1856-1929)* reported in his obituary in 1919, he was a guest in the Hurwitz home for 2 weeks at Easter 1879. It was a very hospitable house where a lot of music was played and where he met many interesting people.

During his time at the Lutheran *Gymnasium*, Adolf Hurwitz received piano lessons from *Winand Nick (1831-1910)*, the organist of the Catholic cathedral in Hildesheim. He became an excellent piano player and later on he played together with many non-mathematical university colleagues. During his time in Göttingen, for example, he took part in chamber music performances at the home of the anatomist *Jakob Henle*, in musical evenings of the Germanist *Moritz Heyne* and he played regularly four-handed with the jurist *Rudolf von Ihering.* During his time in Königsberg, he was a regular guest in the family of the pathologist *Simon Samuel (1833-1899).* There he often played music with the eldest daughter *Ida (1864-1951).* The two got married in 1892.

During his time at the Hildesheim *Gymnasium*, Hurwitz also received additional lessons from his teacher, the mathematician *Hermann Caesar Hannibal Schubert (1848-1911).* They wrote a joint publication in 1876. Schubert was friends with *Felix Klein (1849-1925)*, and so Adolf Hurwitz began his mathematics studies with Klein at the TH Munich and maintained close contact (by letter) with Klein and Schubert later on. He studied in Munich, Berlin (Weierstrass, Kronecker) and again in Munich from 1877 to 1881 and obtained his doctorate under Klein in Leipzig in 1881. In 1882 he habilitated in Göttingen and was appointed associate (a.o.) professor in Königsberg in 1884 at Lindemann's suggestion. There he was in close contact with *Hermann Minkowski (1864-1909)* and *David Hilbert (1862-1943).* As already mentioned he also met there his wife Ida, née Samuel. They had three children. In 1892, Hurwitz was appointed to a full professorship at ETH Zurich, as successor of *Ferdinand Georg Frobenius (1849- 1917).* During *Albert Einstein's (1879 - 1955)* time in Zurich, the Hurwitz and Einstein families met regularly for playing music.

Hurwitz is described by several people as an excellent teacher and a very pleasant person. He was one of the leading mathematicians of his time. He wrote many clear, elegant papers in virtually all areas of *pure mathematics*, although some of these papers were *actually motivated by applications* or were discovered later on to be *very useful to scientists who apply mathematics.*

At the suggestion of *Aurel Boreslav Stodola (1859 in Liptovský Svatý Mikuláš, 1942 in Zurich)*, ETH professor of mechanical engineering since 1892, Hurwitz studied indicators for the signs of the real parts of the zeros of polynomials with real coefficients. His result, published in 1895, was applied by Stodola to the *stability of turbines* and was used 'with brilliant success' in the construction of *the turbine plant at the Davos resort.* The results of this work were later on known to practically every engineer and physicist as the *Routh-Hurwitz criterion for stability.* In 1995, the publication of this work was celebrated with a *'Hurwitz Centenary Conference - Stability Theory'.*

In 1897, the *First International Congress of Mathematicians* took place at Zurich. Hurwitz played a major role in its preparation and realization. Among other things, he gave a plenary lecture there: *On the development of the general theory of analytic functions in recent times.* In this lecture, Hurwitz showed how the then new (and still controversial) concepts of set theory could be put to good use. These insights were important to the career of mathematician *Felix Hausdorff (1868-1942)*, according to *Egbert Brieskorn (1936-2013).* From then on, Hausdorff worked intensively in the field of set theory.

To find further applications of Hurwitz's work, we turn to the *World of Science (WoS) citation database.* So far, however, it only goes back to the year 1900. This means that it only covers 26 of Hurwitz's ca 100 journal articles. The most cited (149 citations) article on 4.4.2024 was the work published posthumously from the estate:
On the composition of quadratic forms. Math. Annalen 88 (1922), pp. 1-25
Most of the citing articles appeared in mathematical and physical journals, some of them quite recent. In the years 2018/19 there are 12 entries. Particularly striking:
Warren D. TenHouten (2019): Anger, social power, and cognitive appraisal: application of octonionic sociocognitive emotion theory, Journal of Political Power, 12:1, 40-65
Next most frequently cited article (85 times in total, 35 times in 2017-2023) is
On the number of Riemann surfaces with given branch points, Math Annalen 55 (1901), pp. 53-66

Adolf Hurwitz (1859-1919) zwischen reiner und angewandter Mathematik – Angeregter und Anreger
Adolf Hurwitz wurde 1859 als 4. Kind von Salomon Hurwitz und seiner Ehefrau Elise, geb. Wertheimer, in Hildesheim geboren. Schon als Kind und Jugendlicher bekam er viele Anregungen: Wie Hurwitz's Mitstudent, ETHZ-Kollege und Freund *Ferdinand Rudio (1856-1929)* 1919 in seinem Nachruf berichtete, war er Ostern 1879 für 2 Wochen Gast im Hause Hurwitz, in einem sehr gastfreundlichen Hause, in dem viel musiziert wurde und wo er viele interessante Leute kennenlernte.

Während seiner Zeit auf dem Gymnasium erhielt Adolf Hurwitz Klavierunterricht, u.a. bei *Winand Nick (1831-1910)*, dem Organisten des katholischen Hildesheimer Doms. Er wurde ein ausgezeichneter Klavierspieler und hat später mit vielen nichtmathematischen Universitätskollegen gemeinsam musiziert. In seiner Göttinger Zeit z.B., hat er im Hause des Anatomen *Jakob Henle* in Kammermusik-Aufführungen mitgewirkt, beteiligte sich an den musikalischen Abenden des Germanisten *Moritz Heyne* und spielte regelmäßig vierhändig mit dem Juristen *Rudolf von Ihering.* In seiner Königsberger Zeit war er regelmäßig in der Familie des Pathologen *Simon Samuel (1833-1899)* zu Gast, wo er bevorzugt mit der ältesten Tochter *Ida (1864-1951)* musizierte. 1892 haben die zwei dann geheiratet.

Während seiner Zeit am Hildesheimer Gymnasium erhielt Hurwitz außerdem sonntags von seinem Lehrer, dem Mathematiker *Hermann Cäsar Hannibal Schubert (1848-1911)* zusätzlichen Unterricht. Sie schrieben 1876 auch eine gemeinsame Veröffentlichung. Schubert war mit *Felix Klein (1849-1925)* befreundet, und so begann Adolf Hurwitz sein Mathematikstudium bei Klein an der TH München und hielt auch später engen (brieflichen) Kontakt mit Klein und Schubert. Er studierte 1877-1881 in München, Berlin (Weierstrass, Kronecker) und wieder München und promovierte 1881 bei Klein in Leipzig. 1882 habilitierte er sich in Göttingen und wurde 1884 auf Vorschlag Lindemanns zum ao. Professor in Königsberg ernannt. Dort hatte er engen Kontakt mit *Hermann Minkowski (1864-1909)* und *David Hilbert (1862-1943).* Wie schon gesagt, lernte er dort auch seine Frau Ida geb. Samuel kennen. Sie hatten drei Kinder. 1892 wurde Hurwitz als Nachfolger von Frobenius auf eine o. Professur an die ETH Zürich berufen. Während der Zeit von Einstein in Zürich trafen sich die Familien Hurwitz und Einstein regelmässig zum Musizieren.

Hurwitz wird als ein hervorragender Lehrer und ein sehr angenehmer Mensch geschildert. Er war einer der führenden Mathematiker seiner Zeit. Er schrieb viele klare, elegante Veröffentlichungen auf praktisch allen Gebieten der *reinen* Mathematik, obwohl manche dieser Arbeiten tatsächlich durch *Anwendungen* motiviert waren bzw. später *von Anwendern als sehr hilfreich entdeckt wurden.*

Auf Anregung von *Aurel Boreslav Stodola (1859 in Liptovský Svatý Mikuláš, 1942 in Zürich)*, ab 1892 ETH-Professor für Maschinenbau, befasste sich Hurwitz mit den Vorzeichen der Realteile der Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten. Sein 1895 veröffentlichtes Resultat wurde von Stodola auf die *Stabilität von Turbinen* angewendet und beim Bau der *Turbinenanlage des Badeortes Davos* 'mit glänzendem Erfolg' benutzt. Die Ergebnisse dieser Arbeit waren später praktisch jedem Ingenieur und Physiker als *Routh-Hurwitz Stabilitäts-Kriterium* bekannt. 1995 wurde das Erscheinen dieser Arbeit mit einer *'Hurwitz Centenary Conference - Stability Theory'* gefeiert.

Im Jahre 1897 fand in Zürich der *Erste Internationale Mathematikerkongress* statt. An der Vorbereitung und Durchführung war Hurwitz wesentlich beteiligt. Unter anderem hielt er dort einen Plenarvortrag *,,Ueber die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Functionen in neuerer Zeit"* . In diesem Vortrag zeigte Hurwitz, wie man die damals neuen (und noch umstrittenen) mengentheoretischen Begriffe nutzbringend einsetzen kann. Diese Erkenntnissse waren im Werdegang des Mathematikers *Felix Hausdorff (1868-1942)* laut Brieskorn ein entscheidender Einschnitt. Hausdorff arbeitete von da an intensiv in dem dadurch vorgezeichneten Gebiet Mengentheorie. Sein Buch *Grundzüge der Mengenlehre (1914)* wurde zur Standardreferenz.

Um weitere Anwendungen Hurwitz'scher Arbeiten zu finden, wenden wir uns der Zitationen-Datenbank *World of Science (WoS)* zu. Die geht bisher allerdings nur bis zum Jahr 1900 zurück. Dadurch erfaßt sie nur 26 der etwa 100 Zeitschriftenartikel von Hurwitz. Meistzitiert (149 Zitierungen) war am 4.4.2024 die aus dem Nachlaß posthum veröffentliche Arbeit
Über die Komposition der quadratischen Formen. Math. Annalen **88** (1922), pp. 1-25
Die meisten zitierenden Artikel sind in mathematischen und physikalischen Zeitschriften erschienen, allein 12 mal in den Jahren 2018/19. Besonders auffallend:
Warren D. TenHouten (2019): Anger, social power, and cognitive appraisal: application of octonionic sociocognitive emotion theory, Journal of Political Power, 12:1, 40-65
Nächsthäufig (85 mal insgesamt, 13 mal in 2017/19; 22 mal in 2020-2023)
Über die Anzahl der Riemann'schen Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, Math Annalen **55** (1901), pp. 53-66

Karl Kleine, Rita Meyer-Spasche, Nada Razpet, Christa Binder, Peter Ullrich

Philipp Furtwängler (1869–1940): Von Elze nach Wien und von der Geodäsie zur algebraischen Zahlentheorie

Peter Ullrich

Universität Koblenz, Fachbereich 3, Mathematisches Institut,
Universitätsstraße 1, 56070 Koblenz, Deutschland

Bereits im 19. Jahrhundert wurden in Preußen geborene Mathematiker auf Lehrkanzeln die Universität Wien berufen, so 1877 Leo Koenigsberger (1837–1921) und 1894 Franz Mertens (1840–1927). Beide legten jedoch auf dem Weg von Preußen nach Wien Zwischenstationen ein, Koenigsberger in Heidelberg und Dresden, Mertens in Krakau / Kraków und Graz. Philipp Furtwängler, der Nachfolger von Mertens, war der erste Mathematiker, der direkt von einer Professur in Preußen berufen wurde, im Jahr 1912.

Auch in anderer Hinsicht steht das wissenschaftliche Leben Furtwänglers für Flexibilität: Heutzutage ist er bekannt aufgrund seiner Arbeiten zur algebraischen Zahlentheorie und seiner Doktorandinnen und Doktoranden aus diesem Teilgebiet der Mathematik. Nach seiner Promotion im Jahre 1895 hatte er allerdings fast anderthalb Jahrzehnte lang auf dem Gebiet der Geodäsie geforscht und auch einige Jahre als Professor gelehrt.

1 Furtwänglers Vita bis zur Promotion

1.1 Familiärer Hintergrund und Schulzeit

Der Familienname rührt in der Tat von Furtwangen im Schwarzwald her. Bartholomäus F. (1772–1845) war Bauer und Frachtfuhrmann in Gütenbach, einem Nachbarort von Furtwangen. Ein jüngerer seiner Söhne war Wilhelm F. (1809–1875), Klassischer Philologe, Gymnasiallehrer und -direktor. Von dessen Sohn Adolf F. (1853–1907) stammen der Chefdirigent der Berliner Philharmoniker Wilhelm F. (1886–1954) und die Schauspielerin Maria F. (*1966) ab.

Ein älterer Sohn von Bartholomäus F. hingegen, ebenfalls mit Namen Philipp F. (1800–1867), zog 1822 von Gütenbach nach Elze, knapp 20 Kilometer von Hildesheim bzw. gut 30 Kilometer von Hannover entfernt. Dieses Gebiet gehörte bis 1866 zum Königreich Hannover, welches in jenem Jahr vom Königreich Preußen annektiert wurde, heutzutage zum Bundesland Niedersachsen. Dieser Philipp F. wirkte dort zuerst als Uhrmacher und später als Orgelbauer und konvertierte 1828 vom katholischen zum evangelischen Glauben. Dessen Sohn Wilhelm F. (1829–1883) war ebenfalls Orgelbauer und heiratete die Bauerntochter Mathilde Sander (1843–circa 1882) aus Klein-Freden. Ihr ältestes Kind, geboren am 21. April 1869 in Elze, war der spätere Mathematiker Friedrich Pius Philipp Furtwängler.

Als dieser im Jahr 1883 konfirmiert wurde und seine Volksschulzeit in Elze abschloss, war er bereits Vollwaise. In diesem Jahr zog er nach Hildesheim, wo er sich als Hauslehrer betätigte, vor allen Dingen aber das dortige Gymnasium Andreanum besuchte, an dem er Ostern 1889 sein Reifezeugnis erwarb. (Das gleiche Gymnasium hatten circa 10 Jahre zuvor die Brüder Julius (1857–1919) und Adolf Hurwitz (1859–1919) besucht, Furtwängler kam aber nicht mehr wie diese in den Genuss eines Mathematikunterrichts bei Hermann Schubert (1848–1911).)

1.2 Studienzeit und Promotion über ternäre kubische Formen

Von Sommersemester 1889 bis Wintersemester 1893/94 studierte Furtwängler an der Universität Göttingen die Fächer Mathematik, Physik und Chemie und besuchte dabei Veranstaltungen von „Burkhardt, Fricke, Hölder, Klein, Schönflies, Riecke, Schering und Voigt“ [21, S. 168]. Er war vom Sommersemester 1892 ab im Seminar von Felix Klein (1849–1925) aktiv, wo er ausschließlich über Themen aus der Zahlentheorie vortrug [22, Bd. 11]; aufgrund fehlender Daten können die Zeitpunkte der Vorträge nur erschlossen werden:

- Anfang Sommer 1892: *Referat über „die Primzahlen“*,
- Ende Sommer 1892: *Anwendung der Theorie der Idealzahlen auf die Theorie der binären quadr[atischen] Formen* (2 Vorträge),
- Anfang Winter 1892/93: *Über die Reduktion der binären quadratischen Formen*,
- Anfang Winter 1892/93: *Nähere Erläuterungen zur [Eduard] Selling'schen Reduktionsmethode der indefiniten Formen*,

- Ende Winter 1892/93 / Anfang Sommer 1893: *Über zerlegbare Formen mit 3 Variabelen*,
- Anfang Winter 1893/94: *Die Reduktion der ganzzahligen, zerlegbaren ternären cubischen Formen.*

Seit Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), vor allen Dingen aber seit Carl Friedrich Gauß (1777–1855) werden ganzzahlige binäre quadratische Formen

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

mit a_{11}, a_{12}, a_{22} ganze Zahlen systematisch in der Zahlentheorie untersucht, etwa daraufhin, welche ganzen Zahlen sie als Werte annehmen, wenn man ganzzahlige Argumente x_1, x_2 zulässt, oder auch, ob sich zwei gegebene derartige Formen mittels einer invertierbaren ganzzahligen linearen Transformation in einander überführen lassen.

Ganzzahlige ternäre kubische Formen verallgemeinern diese Situation dahingehend, dass drei Variablen betrachtet werden („ternär") und die aufsummierten Terme den Totalgrad drei in diesen Variablen haben („kubisch"). Furtwängler beschränkte sich bei seinen analogen Untersuchungen dieser Formen auf den Fall, dass sie „zerlegbar" sind, d. h., als Produkt dreier Linearformen in den drei Variablen geschrieben werden können.

Bereits im Jahr 1895 veröffentlichte er eine kurze Arbeit [3], die sich mit der Komposition zerlegbarer ganzzahliger Formen beliebig vieler Variablen und deren Interpretation als Produktbildung von Idealen beschäftigte. Seine Dissertation *Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren, ganzzahligen ternären kubischen Formen* [4] schloss dann diese schon in seinen Seminarvorträgen vorgezeichneten Linie innerhalb der klassischen algebraischen Zahlentheorie ab. Von Klein übernahm er dabei die geometrische Veranschaulichung der Formen als Punkte eines geeigneten Raumes.

Die wissenschaftliche Entwicklung Furtwänglers wird bisweilen verkürzt so dargestellt, als habe er sich in die algebraische Zahlentheorie erst spät und unabhängig von Klein eingearbeitet, was durch die obigen Angaben korrigiert wird. Allerdings wurde Kleins Einfluss bald von dem David Hilberts (1862–1943) abgelöst.

Zwischenzeitlich, im Sommersemester 1894 und Wintersemester 1894/95, arbeitete Furtwängler bereits als Assistent am Physikalischen Institut der Technischen Hochschule zu Darmstadt und absolvierte gleichzeitig in Göttingen sein Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern

Mathematik, Physik, Chemie und Mineralogie. Zur Promotion bei Klein am 1. März 1895 kehrte er vollständig nach Göttingen zurück. Weiterhin arbeitete er im Wintersemester 1895/96 gemeinsam mit Arnold Sommerfeld (1868–1951) Kleins Vorlesung „Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie“ aus.

In den direkt auf seine Promotion folgenden Jahren richtete Furtwängler sich allerdings erst einmal weg von der algebraischen Zahlentheorie aus: Zunächst absolvierte er seinen Einjährig-Freiwilligen Militärdienst und dann sein Probejahr für das Lehramt an Gymnasien am Lyzeum I in Hannover, an das sich noch weiterer Schuldienst an Gymnasien in Norden und Celle anschloss; insgesamt erwarb er damit die Befähigung zum Oberlehrer, d. h., des Unterrichtens unter Einschluss der Oberstufe.

2 Furtwänglers Tätigkeit als Geodät

2.1 Wirken in Potsdam, Poppelsdorf und Aachen

Im Jahr 1898 kehrte Furtwängler zur Wissenschaft zurück: Er wurde zunächst Assistent und danach wissenschaftliche Hilfskraft am Königlich Preußischen Geodätischen Institut in Potsdam. Hier unterstützte er Friedrich Kühnen (1858–1940) bei der Bestimmung der absoluten Größe der Schwerkraft mittels Messung der Schwingungsdauern von Pendeln. Die Messergebnisse dienten zur Festlegung des von 1909 bis 1971 weltweit als Referenzsystem für hochgenaue Schweremessungen verwendeten Potsdamer gravimetrischen Systems. Weiterhin unternahm Furtwängler Schwerkraftmessungen in Schlesien und im Harz sowie Präzisionshöhenmessungen an der Ostseeküste zur Kontrolle der dortigen Pegel.

Seine erste Position als Lehrender an einer Hochschule erhielt Furtwängler 1904: Er unterrichtete Landvermesser an der, damals noch von der Universität Bonn unabhängigen, Königlich Preußischen Landwirtschaftlichen Akademie Poppelsdorf, zu jener Zeit noch ein Nachbarort und kein Stadtteil von Bonn. Ohne habilitiert worden zu sein, erhielt er 1907 einen Ruf als Professor für Mathematik an die Technischen Hochschule in Aachen, den er auch annahm, aber bereits 1910 als Professor an die Akademie in Poppelsdorf zurückkehrte, wobei er zusätzlich einen Lehrauftrag für angewandte Mathematik an der Universität Bonn erhielt.

Bereits 1903 hatte Furtwängler Ella Buchwald geheiratet, die jedoch bald nach der Geburt ihres einzigen Kindes, einer Tochter, verstarb. Erst 1929 ging er eine neue Ehe ein, mit Emilie Schön, die sich in seinen letzten Lebensjahren um ihn kümmerte.

2.2 Arbeiten zur Geodäsie

Die Bestimmung der ortsabhängigen Gravitation g aus der Schwingungsdauer T eines Pendels der (reduzierten) Länge ℓ basiert auf der Gleichung

$$g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2} f(\vartheta_0)$$

mit einem nur von der maximalen Pendelauslenkung ϑ_0 abhängenden und explizit angebaren Faktor $f(\vartheta_0)$, der für ϑ_0 gegen 0 gegen 1 geht.

Bei hochgenauen Messungen von g sind zum einen Fehler zu berücksichtigen, wie sie durch den Luftwiderstand, die Reibung an der Aufhängung und die interne Viskosität des Pendelmaterials entstehen. Zum anderen aber kann der Pendelkörper nicht mehr als punktförmig angenommen werden. Um die aufwändige Bestimmung des Trägheitsmomentes des Pendels zu vermeiden, verwendet man häufig – insbesondere bei der Messreihe, an der Furtwängler beteiligt war – „Reversionspendel“: Bei diesen sind zwei Pendel miteinander verbunden, wobei die beiden Aufhängungspunkte oder die beiden Pendelmassen verschiebbar sind. Hat man diese so positioniert, dass die Schwingungsdauern bezüglich beider Aufhängungspunkte gleich sind, so stimmt der Abstand der Aufhängungspunkte mit der Größe ℓ aus der obigen Formel überein.

Allerdings bedeutet dies, dass man es nicht länger mit der Schwingung eines einzigen Pendels zu tun hat, sondern mit den „Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage“, wie verkürzt der Titel von Furtwänglers erster, 1902 erschienener Veröffentlichung zur Geodäsie lautet [6], in der er das durch das Mitschwingen der Halterung entstehende System zweier linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mittels der Verwendung komplexer Größen behandelt.

Seine Beteiligung an den Schwerkraftbestimmungen ging jedoch deutlich über diesen einen Beitrag hinaus, so dass er für den 1906 erschienenen Abschlussbericht über die Potsdamer Messungen [23] als Zweitautor nach Kühnen genannt wurde.

Die Tätigkeit in dieser wissenschaftlichen Teildisziplin führte dazu, dass Klein Furtwängler mit der Herausgabe des Teils 1 „Geodäsie und Geophysik“ [9] des Bandes VI der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* beauftragte als Nachfolger von Emil

Wiechert (1861–1928). Diese Aufgabe beschäftigte Furtwängler von 1906 bis 1925, wobei er 1909, also während seiner Aachener Zeit, auch gemeinsam mit Joseph Émile Robert Bourgeois (1857–1945) den Artikel über „Kartographie“ [1] verfasste. Bereits 1904 hatte er als Alleinautor den Artikel „Die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen“ für den Band IV der *Encyklopädie* abgeschlossen.

Hingegen wurde Furtwänglers Artikel zur „Allgemeinen Theorie der algebraischen Zahlen“ nicht in der Erstauflage der *Encyklopädie* abgedruckt, sondern erst 1953 in der Neuauflage in einer von Helmut Hasse (1898–1979) und Wolfram Jehne (1926–2018) überarbeiteten Version.

3 Furtwänglers Wirken in Wien

3.1 Berufung und Lehrtätigkeit

Neben seiner beruflichen Tätigkeit in der Geodäsie beschäftigte sich Furtwängler weiterhin mit algebraischer Zahlentheorie, wobei er sich ab der Jahrhundertwende an Hilberts Zugang orientierte: Zwar wurde dieser erst 1895 nach Göttingen berufen, so dass Furtwängler keine Vorlesungen bei ihm hörte, Hilberts 1897 veröffentlichter „Zahlbericht“ [16] und das neunte von dessen Pariser Problemen aus dem Jahr 1900 bildeten aber im Folgenden die Leitlinie für Furtwänglers diesbezügliche Forschungen. (Diese Wendung von Klein zu Hilbert schlägt sich auch in deren Briefnachlässen nieder: Gibt es im Klein-Nachlass nur einen einzigen Brief, vom 28.10.1895, unter dem Stichwort „Furtwängler“, so finden sich im Hilbert-Nachlass 11 Briefe und 1 Postkarte, von 1901 bis 1911.)

Das neunte von Hilberts Problemen aus dem Jahre 1900 lautete dabei wie folgt [17, S. 276]:

> „*Für einen beliebigen Zahlkörper soll das Reciprocitätsgesetz der l ten Potenzreste bewiesen werden*, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet und ferner, wenn l eine Potenz von 2 oder eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist.“

An dieser Stelle gab Hilbert auch zwei seiner Arbeiten an, die man seines Erachtens für die Lösung des Problems verwenden konnte.

Furtwänglers Arbeit „Über das Reziprozitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet“ [5] aus dem Jahr 1902 bzw. deren für die *Mathematischen Annalen* überarbeitete

Fassung [7] belegen die inhaltliche Nähe nicht nur durch ihren Titel, sondern auch durch ihre Einleitung und ihre Literaturzitate, die insbesondere auf die beiden von Hilbert genannten Schriften Bezug nehmen.

Umgekehrt hatte Hilbert Furtwänglers Schrift [5] auf der Sitzung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 8. Februar 1902 vorgelegt und wohl auch dafür Sorge getragen, dass diese mit einem Preis der Gesellschaft für das Jahr 1901 ausgezeichnet wurde. (Das Thema für den Preis der Beneke-Stiftung für jenes Jahr hingegen hatte Klein festgelegt.)

Im Gefolge dieser und weiterer Arbeiten zur algebraischen Zahlentheorie erhielt Furtwängler 1912 einen Ruf auf eine Lehrkanzel der Universität Wien als Nachfolger des Zahlentheoretikers Mertens und Kollege Wilhelm Wirtingers (1865–1945).

Die dortige Situation war für Furtwängler, insbesondere nach dem Ende des Ersten Weltkriegs, durch eine hohe Arbeitsbelastung gekennzeichnet, wie in den unmittelbar nach seinem Tod erschienenen Nachrufen von Anton Huber (1897–1975) [21, S. 169–170] und Nicolaus Hofreiter (1904–1990) [20, S. 220] geschildert wird: Furtwängler hielt seinen Anteil an den Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung und zudem Spezialvorlesungen und Seminare über Zahlentheorie und Algebra. Für seine Vorlesungen „wurden Platzkarten für gerade und ungerade Tage ausgegeben“, und dennoch waren „300–400“ Studierende „in seinem Hörsaal zusammengedrängt“. Da er auch „Mitglied der Prüfungskommission für das Lehramt an Mittelschulen“ war, hatte er eine hohe Belastung durch Staatsprüfungen zu tragen.

Seine Vorlesungen waren von strukturierter Effizienz gekennzeichnet, so dass Kurt Gödel (1906–1978) sie als die besten bezeichnete, die er je gehört hätte. Edmund Hlawka (1916–2009) und Leopold Schmetterer (1919–2004) hingegen äußerten in ihren Erinnerungen an ihre Studentenzeit deutliche Zweifel, ob diese Strukturiertheit für alle ihre Kommilitoninnen und Kommilitonen didaktisch vorteilhaft gewesen wäre.

Was die Betreuung von Doktorandinnen und Doktoranden betrifft, so zeichnet Olga Taußky, später Taussky-Todd, (1906–1995) in ihrer Autobiographie das Bild einer „big Ph. D. school“ [25, p. 12] mit fast fabrikmäßigen Zügen, in der sie sich auch deshalb verloren vorkam, weil niemand außer ihr auf dem Gebiet der Klassenkörpertheorie arbeitete. Allerdings beurteilte sie selbst aus der Distanz des Jahres 1980 das damalige Thema als „prestige subject“ und die Auswahl als „very beneficial“ für ihre Karriere [25, p. 12]. – Möglicherweise hatte Furtwängler früh das Potential seiner Doktorandin erkannt; immerhin war sie eine der wenigen Personen, mit denen gemeinsam er eine Arbeit publizierte [15].

Überdies sind die obigen Darstellungen unter dem Umstand zu sehen, dass Furtwängler 1916 schwer erkrankte: Zunächt konnte er sich noch mit Hilfe eines Stockes und eines Helfers bewegen, in späteren Jahren brauchte er einen Rollstuhl und zwei Helfer und musste in den Hörsaal getragen werden. Ab dem Wintersemester 1937/38 konnte er aus gesundheitlichen Gründen überhaupt keine Vorlesungen mehr halten; im September 1938 trat er endgültig in den Ruhestand. Er starb am 19. Mai 1940 in Wien infolge zweier Schlaganfälle.

3.2 Doktorandinnen und Doktoranden

Huber, Doktorand und Nachfolger Furtwänglers, schreibt in seinem Nachruf auf diesen von „unter seiner Leitung entstandenen etwa 60 Doktorarbeiten“ [21, S. 170], eine Zahlenangabe, der sich Hofreiter anschließt [20, S. 220]. Dies passt auch zu der oben erwähnten Schilderung eines Massenbetriebs von Taussky-Todd [25, S. 12]. Allerdings ist diese Zahl mit Vorsicht zu betrachten, vgl. auch [24, S. 224]:

Einerseits war Furtwängler bei mehreren Dissertationen nur Zweitgutachter. So weisen bereits die Themen der Doktorarbeiten von Gábor Szegö (1895–1985) und Karl Strubecker (1904–1991) auf den Doktorvater Wirtinger hin, obschon das Mathematics Genealogy Project beide (auch) unter Furtwängler auflistet.

Andererseits durften nur Ordinarien Dissertationen begutachten. Um nur ein, allerdings sehr prominentes, Beispiel zu nennen: Die Anregung zu Hlawkas Dissertation stammte zwar von Hofreiter, dieser war aber 1938 nur Privatdozent und Lehrbeauftragter. Daher fungierte Furtwängler als formaler Erstgutachter für Hlawka, der zudem bei ihm den größten Teil seiner Vorlesungen gehört hatte [18, S. 42].

Selbst Taussky-Todd trägt etwas zu dieser Verwirrung bei, indem sie schreibt: „I suppose that his best students were O. Schreier, E. Hlawka, W. Groebner, H. Mann, and A. Scholz.“ [25, p. 12] Zwar hat sie selbst in den 1930er Jahren mit Arnold Scholz (1904–1942) zusammengearbeitet, dieser war aber nur das Sommersemester 1927 bei Furtwängler in Wien und promovierte 1928 in Berlin bei Issai Schur (1875–1941).

Auf der Basis der Einträge im Mathematics Genealogy Project mit einer Ergänzung aus [24, S. 224] ergibt sich eine angesichts der oben zitierten Zahl von „60“ überraschend kurze Liste von Doktorandinnen und Doktoranden, die Furtwängler als Erstgutachter hatten:

1913 Anton („Tonio“) Rella (1888–1945): *Studien über relativ abelsche Zahlkörper*, [Betreuer ursprünglich Mertens],

1923 Otto Schreier (1901–1929): *Über die Erweiterung von Gruppen*,

1924 Anton Huber (1897–1975): *Bestimmung des größtmöglichen Konvergenzintervalles für das Newtonsche Näherungsverfahren*,

1927 Nikolaus Hofreiter (1904–1990): *Eine neue Reduktionstheorie für definite quaternäre quadratische Formen*,

1930 Olga Taußky (später: Taussky-Todd) (1906–1995): *Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes*,

1932 Wolfgang Gröbner (1899–1980): *Ein Beitrag zum Problem der Minimalbasen*,

1933 Fritz Hohenberg (1907–1987): *Kreise und bizirkulare Kurven 4. Ordnung in der nichteuklidischen Geometrie*, [gemeinsam mit Hans Hahn (1879–1934)],

1934 Gertrud Obermayr: *Untersuchungen über Körper 8. Grades, die durch Quadratwurzeln lösbar sind*,

1935 Heinrich (später: Henry) Berthold Mann (1905–2000): *Darstellung der Gruppe der relativprimen Restklassen nach Primidealmoduln durch eine unabhängige Basis*,

1936 Margarete Dostalik (1912–2012, seit 1939: Hofreiter): *Über den casus irreducibilis*,

1938 Edmund Hlawka (1916–2009): *Über die Approximation von zwei komplexen inhomogenen Linearformen*,

1938 Friedrich Thromballa.

3.3 Ehrungen

Wie bereits erwähnt, erhielt Furtwängler 1901 für seine Arbeit [5] einen Preis der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen.

Im Jahr 1916 wurde er korrespondierendes Mitglied der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien und 1927 wirkliches Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften als deren Nachfolgeinstitution.

Korrespondierendes Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften wurde er 1931 und 1939 zum Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina in Halle gewählt.

Bereits 1930 hatte er den Ernst Abbe-Gedächtnispreis erhalten, wobei er, nach Klein 1924, erst der zweite Preisträger aus dem Bereich der reinen Mathematik war. (Zu dem Preis schlechthin vergleiche man [26].)

Weiterhin wurde ihm 1939 zu seinem 70. Geburtstag der 48. Band der *Monatshefte für Mathematik und Physik* gewidmet, die er lange Jahre gemeinsam mit Wirtinger herausgegeben hatte.

3.4 Politische Haltung und Verhältnis zu Kolleginnen und Kollegen

Furtwängler wird in der Literatur bisweilen als deutschnational bis -nationalistisch dargestellt. Im März 1938, zum Zeitpunkt des „Anschlusses" Österreichs an das nationalsozialistische Deutsche Reich, war er allerdings bereits so krank, dass zu diesem Ereignis keine explizite Reaktion – welcher Ausrichtung auch immer – von ihm zu erwarten gewesen wäre. Als Beleg seiner politischen Haltung wird jedoch, etwa in [24, S. 220–221], eine Passage über Furtwängler aus dem Nachruf Hubers herangezogen [21, S. 169]:

> „Obwohl er niemals irgendwie demonstrierte, war er uns ostmärkischen [= Bezeichnung für „österreichisch" in den Jahren 1938 bis 1945] Studenten mit jedem Worte, das er zu uns sprach, stets eine lebendige Mahnung an die völkische und kulturelle Verbundenheit unserer Heimat mit dem großen deutschen Vaterland."

Jedoch muss man bei dieser Formulierung bedenken, dass Huber ein überzeugter Nationalsozialist war, der bereits 1935 in der Schweiz der NSDAP beigetreten war und an dieser Stelle möglicherweise seinen Doktorvater im Lichte der damals neuen Zeit positiv darstellen wollte. Außerdem war das ganze 19. Jahrhundert über die Schaffung eines Deutschlands unter Einschluss der deutschsprachigen Teile des Habsburgerreiches in der politischen Diskussion gewesen.

Die Formulierung im Nachruf von Hofreiter [20, S. 219] über Furtwänlger:

> „Er war rein deutscher Abstammung und Protestant.",

wäre da schon deutlich kritischer zu sehen, wenn sie denn wirklich, wie vermutet [24, S. 221], so von diesem selbst stammte, wobei man zudem den Zusammenhang nicht kennen würde, in dem sie gewählt wurde.

Bei der Besetzung der Nachfolge Wirtingers in den Jahren 1935 und 1936 gab es allerdings in der Tat eine scharfe Auseinandersetzung zwischen Moritz Schlick (1882–1936), der sich für Karl Menger (1902–1985) (und auch Emil Artin (1898–1962)) einsetzte, und Furtwängler, der stattdessen Karl Mayrhofer (1899–1969) bevorzugte, der damals schon der nationalsozialistischen Ideologie nahestand und bereits mit Datum vom 01.01.1937, also noch vor dem „Anschluss“, als Mitglied der NSDAP geführt wurde, siehe [2, Abschn. 3.2.2], auch [24, Abschn. 2.2.2]. Ruppert und Michor interpretieren dieses Vorkommnis aber als [24, S. 224]

> „persönliche Antipathien [Furtwänglers] gegenüber Menger (und umgekehrt) [. . .]. Vielleicht sagten ihm einfach Mengers dynamisches Auftreten, Mengers „moderne Auffassung von der Mathematik“ und Themenwahl nicht zu.“

An der Besetzung seiner eigenen Nachfolge 1939 durch den ausgewiesenen Nationalsozialisten Huber nahm Furtwängler zwar, allein schon aus Gesundheitsgründen, nicht teil, aber die Promotion Hubers bei ihm als Doktorvater wirkt allein schon deshalb seltsam, weil das Dissertationsthema, die Konvergenz des Newtonverfahrens, nicht zu den üblichen Themen Furtwänglers passte; zudem war die Benotung außerordentlich positiv [24, S. 278].

Eine mögliche Erklärung für das Verhalten Furtwänglers mag sein, dass Huber und Mayrhofer Lehrveranstaltungen übernommen und ihn damit von seinen Verpflichtungen entlastet hatten, wenn auch teilweise als bezahlte Vertretung.

Die Bewertung von Furtwänglers Haltung bei der Nachfolge Wirtingers ist umso schwieriger, als er in mathematischer Hinsicht keinesfalls konservativ war: In ihrer Dissertation [19] weist Marianne Hörlesberger anhand der Mitschrift eines Gruppentheorie-Seminars bei Furtwängler aus dem Wintersemester 1934/35 und dem Sommersemester 1935 nach, dass dieser zu jener Zeit „Moderne Algebra“ im Sinne von Artin und Emmy Noether (1882–1935) bzw. Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996) betrieb. So zitierten sich Furtwängler und Noether auch mehrfach gegenseitig [19, S. 64–65].

Weitherhin dankte Artin am 26. Mai 1921 in seinem Lebenslauf anlässlich seiner Meldung zur Promotion Furtwängler für die bei ihm in Wien gehörten Anfängervorlesungen. Furtwängler hingegen rezipierte in seiner Arbeit [14] nicht nur Vorarbeiten Artins, sondern gab diesem auch explizit Kredit [14, S. 14]:

> „Der Inhalt von § 2 ist vollständig Eigentum von E. Artin; er bildet eine wesentliche Grundlage für den Beweis.“

Zudem ist diese Arbeit in den *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* erschienen, in dem damals die Avantgarde der Mathematik publizierte.

4 Furtwänglers Arbeiten zur modernen algebraischen Zahlentheorie

Wie bereits erwähnt, beschäftigte sich Furtwängler ab circa 1900 mit Themen, die Hilbert in seinem „Zahlbericht“ [16] in den Vordergrund gestellt hatte. Furtwänglers Arbeiten sind dabei häufig dadurch gekennzeichnet, dass er wichtige Spezialfälle behandelte, die Jahre später die Basis für die Lösung des allgemeinen Problems durch Mathematiker der ihm folgenden Generation ermöglichten.

Zum einen wurden Reziprozitätsgesetze für beliebige algebraische Zahlkörper gesucht: Das von Gauß bewiesene quadratische Reziprozitätsgesetz, also eine Aussage über die Lösbarkeit von Kongruenzen des Typs

$$x^2 \equiv a \bmod m,$$

sollte auf höhere Potenzen als 2 verallgemeinert werden. Im Anschluss an seine bereits erwähnte Preisschrift „Über das Reziprozitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet“ [5] publizierte Furtwängler mehrere, auch mehrteilige Artikel [11], [12], [13], die weitere Ergebnisse zu diesem Themenkreis lieferten. Die abstrakte Formulierung und der allgemeine Beweis jedoch gelangen erst in den 1920er Jahren Artin und Hasse, die beide fast 30 Jahre jünger waren als Furtwängler.

Zum anderen, aber mit dem ersten Problemkreis verwandt, ging es um den Nachweis der Existenz von (absoluten) Klassenkörpern: Zu einem gegebenen algebraischen Zahlkörper ist eine unverzweigte Galoiserweiterung zu konstruieren, deren Galoisgruppe mit der Idealklassengruppe (des Ganzheitsrings) des Zahlkörpers übereinstimmt. Auch hier behandelte Furtwängler zwar erfolgreich wichtige Spezialfälle, der Durchbruch gelang allerdings anderen, in diesem Teilgebiet speziell Takagi Teiji (1875–1960).

Die Entwicklung verlief aber manchmal auch anders: Hilbert hatte bereits den sogenannten Hauptidealsatz der Klassenkörpertheorie vermutet, dass nämlich für jeden algebraischen Zahlkörper alle Ideale (des Ganzheitsrings) im absoluten Klassenkörper Hauptideale werden. Furtwängler setzte sich auch mit dieser Vermutung auseinander, konnte sie jedoch zunächst nur im Fall einer zyklischen Klassengruppe lösen [10]. Danach nahm sich Artin des allgemeinen Problems an, löste es zwar auch nicht, übersetzte es aber in eine Aussage über Gruppen mit abelscher Kommutatorgruppe. In dieser Version wiederum konnte Furtwängler den „Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper“ führen in seiner Arbeit [14]. Hierzu merkt Hofreiter an [20, S. 222]:

> „Diese vielleicht beste Arbeit schrieb Furtwängler im Alter von 60 Jahren.“

Schriftenverzeichnisse Furtwänglers finden sich in [21, S. 177–178] und [20, S. 225–227].

Literatur

[1] Joseph Émile Robert Bourgeois, Philipp Furtwängler: Kartographie. In [9, Art. 4, S. 245–296], 1909.

[2] Robert Frühstückl: *„Mitten in den Problemen der Wirklichkeit“ – Der Diskurs über die Angewandte Mathematik 1900–1945 und Transformationen der Disziplin am Beispiel Wien 1930–1945*. Dissertation: Universität Wien 2018. `https://utheses.univie.ac.at/detail/50378#`

[3] Philipp Furtwängler: Zur Begründung der Idealtheorie. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse* 1895, 381–384.

[4] —: *Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren, ganzzahligen ternären kubischen Formen*. Dissertation Georg-August-Universität Göttingen 1896.

[5] —: Über das Reziprozitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Neue Folge* **II**, 3 (1902), 3–82.

[6] —: Über die Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1902, 245–253.

[7] —: Über die Reziprozitätsgesetze zwischen l^{ten} Potenzresten in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. *Mathematische Annalen* **58** (1903), 1–50.

[8] —: Die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen. In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Band IV, Teil 2, Art. 7, S. 1–61. Teubner: Leipzig 1904.

[9] — (Hrsg.): Geodäsie und Geophysik. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Band VI, Teil 1. Teubner: Leipzig 1906-1925.

[10] —: Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers. *Mathematische Annalen* **63** (1907), 1–37.

[11] —: Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste und Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern, *Mathematische Annalen* **67** (1909), 1–31; **72** (1912), 346–386; **74** (1913), 413–429.

[12] —: Über die Reziprozitätsgesetze für Primzahlpotenzexponenten, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **157** (1926), 15–26.

[13] —: Über die Reziprozitätsgesetze für ungerade Primzahlexponenten, *Mathematische Annalen* **98** (1927), 539–543.

[14] —: Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **7** (1930), 14–36.

[15] —, Olga Taußky: Über Schiefringe. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse II a* **145** (1936), 525.

[16] David Hilbert: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **4** (1895), I–XVIII, 175–546.

[17] —: Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse* 1900, 253–297.

[18] Edmund Hlawka: Mathematik bekommt man nicht gratis. Interview mit Edmund Hlawka. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1999, Heft 2, 42–47.

[19] Marianne Hörlesberger: *Zur Rezeption der Modernen Algebra in Österreich, Abstrakte Algebra im österreichischen Wissenschaftssystem der 1930er Jahre*. Dissertation Universität Wien 2008. Auch Südwestdeutscher Verlag für Hochschulschriften: Saarbrücken 2009.

[20] Nikolaus Hofreiter: Nachruf auf Philipp Furtwängler. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **49** (1941), 219–227.

[21] Anton Huber: Philipp Furtwängler †. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **50** (1940), Abt. 1, 167–178.

[22] Felix Klein: Seminarprotokolle, digitalisiert unter `https://firsching.ch/klein/`.

[23] Friedrich Kühnen, Philipp Furtwängler: *Bestimmung der absoluten Größe der Schwerkraft zu Potsdam mit Reversionspendeln*. Veröffentlichungen des Geodätischen Instituts in Potsdam N. F. **27**. Stankiewicz: Berlin 1906.

[24] Wolfgang A. F. Ruppert, Peter W. Michor: *Mathematik in Österreich und die NS-Zeit*. Springer Spektrum: Berlin 2023.

[25] Olga Taussky-Todd: *Autobiography*. Oral History Project des California Institute of Technology 1980. 47 pp. `https://resolver.caltech.edu/CaltechOH:OH_Todd_O`. Auch in D. J. Albers und G. L. Alexanderson: *Mathematical People: Profiles and Interviews*. Birkhäuser: Boston 1985.

[26] Renate Tobies: Zum 100-jährigen Jubiläum des Ernst Abbe-Gedächtnispreises. *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik* **16** (2022), 211–231.

1944--2024, Tribute and review.
Essai on 80 years of mathematical modelling of the geosphere, biosphere and anthroposphere

Bernhelm Booß-Bavnbek, assisted by Jens Høyrup,
both Roskilde University, Denmark

Summary. I recall three bloody love stories between mathematics and war that matured and reached their applicability at the end of the Second World War: the triad of *nuclear energy*, *jet propulsion* and *digitalization*. Against the background of earlier experiences and methods and the lack of crucial importance of earlier applications of mathematical concepts in other fields, I try to characterize the technical novelty of this triad of mathematics-based technologies; to show the traces of their warlike origins and their formative influence on the later development of mathematics, science, technology, society and public perception.

Foreword. Hello folks: Companieros and companieras! Muchachos and muchachas! Dear Christa, dear colleagues and friends! Please forgive me if I disturb your cozy and nice get-together. I am not a math historian. But I'm always happy to be with you. It warms my old heart, better than whisky, to listen to your ever new discoveries on the arduous path of math history and about the meaning and significance of it all.

Where I come from, up there, it's pretty cold and uncomfortable: I'm one of the last of the Mohicans, the nearly extinct ethnic group of mathematicians who work in pure mathematics and have extensive professional experience in applying mathematical concepts and methods in the real world. We were forced into our segregation because we could not stand the *complacency of pure mathematicians*, i.e. the deconstruction of mathematics through marginal generalizations and, at best, promises about the *ultimate* human applicability of our results. In the words of D. MUMFORD: "The thing that leaps to mind is something about the suicidal tendency in math to get more and more technical and never to think about explaining one's ideas to mathematicians in other fields of math (let alone other scientists or even the general public). The field has a strange psychology linked to the fear of being thought dumb if you don't know everything." And N. WIENER: "There has been a tendency, visible here and there, to give up the search for a great stroke or a great aperçu and to be content with a sort of mathematical embroidery... This reinforces the tendency toward the thin and the bodiless change, which is one of the besetting sins of the pure mathematics of the present time and often burgeons into mountains of triteness and bad taste." No better is the double complacency of mathematicians involved in applications, who only see the *immediate* positive fruits of their work and taboo the downsides in the long term.

We, the last of the Mohicans, have unfortunately lost the warmth of the nest, the comfort of mutual recognition, of patting each other on the back and of belonging to a mainstream. We learned the hard way the difference between the credibility of mathematics and mathematicians, i.e. between the eternal truth of mathematical arguments and the constant spread of lies, illusions and sales slogans among mathematicians about their subject.

That may sound sad to some of you. But believe me, it's not that bad on the reserve. We have the whisky, most of us have a decent pension, and every evening we have the bonfire to burn new garbage, to talk of old bloody times, of our triumphs, of the miserable state of the world and of departed friends, like

- For years, and even more so after our meeting in 2014, when I listened to him for the last time, Ivor Grattan-Guinness (1941-2014) became a role model for a multifaceted view of the struggle and pain with the intricacies of the world and mathematics, as Ivor had also learned, for example, from J.-L. Lagrange, one of the most brilliant, ingenious and self-critical mathematicians in history.
- My mentor for decades, the polymath, mathematician and science writer Philip J. Davis (1923-2018), was a frequent participant in this *Austrian Math History Series*. He told me: "You will find a very special, sympathetic and productive ramification of people there. In contrast to the usual advertising style at other conferences, the speakers make an effort to be modest in their claims. In contrast to the hurried and sometimes somewhat shallow chit-chat in the conference breaks elsewhere, at Christa Binder the breaks are generously spread throughout the day, and the spirit of the conference, the leisurely walks in the surrounding area and the open-mindedness of the participants encourage challenging conversations about the meaning of our work and about our life goals, after all the two central questions of a life as a mathematician."
- Our stepson, the mathematical geographer and software developer Daniel Holmboe Bang (1972-2020), who was loved by all who knew him for his confident laugh coupled with his serious sobriety, such as when he contributed to the brilliant advances of geographic modelling in actuarial practice with ever new ideas, while also being alert to the outrageous side of *profiling* really everyone.
- My wife of forty years, the military historian Sussi Booss-Bavnbek (1949-2020). She accompanied me to our meeting in 2014. She kept asking me about life in a mathematized world, and she kissed me and loved me for the honesty of my answer, which was always the same: "Lots of darkness and lots of light!"

I dedicate my report[1] to the memory of these four wonderful people.

[1] Together with Jens Høyrup, this lecture was *planned* as the opening lecture for the **16th Östr. Symposion on the History of Mathematics**, *Mönichkirchen, May 27-31, 2024*, but was cancelled due to a traffic accident.

1. A balance sheet of the WW2 triad

1.1 Nuclear energy - more than TNT. The most spectacular achievement of the Second World War was the discovery of a new type of technologically available energy, nuclear energy, which is millions of times more powerful in terms of energy/weight than sugar, fat and TNT, initially through the *nuclear fission* of uranium-235 or plutonium-239, which was demonstrated by transportable fission bombs that destroyed the Japanese cities of Hiroshima and Nagasaki with just a single explosion each. After the war years, these weapons of mass destruction were supplemented by hydrogen bombs, also transportable and thousands of times more powerful, based on fusion reactions between hydrogen isotopes (deuterium and tritium). The moderated and slowed down, mostly non-explosive variant of the fission bomb was used worldwide to generate electricity.

The impact of the atomic and hydrogen bombs on the social sciences and communication was enormous and can best be characterized by the lack of seriousness and honesty, which M. MACLUHAN ironized in 1964 with the phrase "The medium is the message". Most notable was the deceptive packaging of how H. TRUMAN'S *Killing to save lives!* (his rationale for dropping the two bombs was probably to intimidate the allied USSR, while supposing solely to end the Second World War in the East, which was later rejected by war historians), the insane promises of military superiority through technological superiority, and the speculative concepts of the *nuclear umbrella* and *mutually assured destruction - MAD*.

N. BOHR'S *Atoms for peace!* sounds more appealing. But even his promise of practically infinite, cheap and clean energy production seems insane in view of the permanent radioactive waste and other risks for the civilian population.

Admittedly, there are a few *mathematical triumphs* to celebrate: Firstly, atomic physics was made to work. It was a long way from the intuitive concept of a neutron-induced chain reaction by L. SZILARD in 1933 to R. PEIERLS' and O.R. FRISCH'S rather precise estimate of the critical mass of uranium-235 in 1939 to sustain the chain reaction with exponentially growing excess energy, which fortunately was not mastered by W. HEISENBERG working for Nazi Germany. There were other mathematical challenges that were addressed and solved for the implosion model of the atomic bomb. However, in contrast to HEISENBERG'S arrogant and narrowly physics-oriented thinking, the main challenges to building the fission bomb were technological, namely the production of sufficiently large quantities of U-235 by large rows of centrifuges and of Pu-239 by rapidly built nuclear power plants.

S. ULAM and J. VON NEUMANN'S ingenious *Monte Carlo simulation* of shock waves for the hydrogen bomb had a lasting influence on mathematics, demonstrating the numerical advantage of a stochastic approach for huge deterministic systems. Similar considerations were developed by A.N KOLMOGOROV. Indirectly, the atomic bombs have led to breakthroughs in *atmospheric physics* and *earth wave acoustics* for the controlled test ban, as well as in *radiology* and *genetics* through the abundant medical samples from Japan and other countries.

Little is known about the mathematical and physical advances in the testing of nuclear devices in the laboratory and by numerical simulation. However, I assume that some advances in *metrology* and the *chemical purification* of basic materials were supported by experience in nuclear technology. We can also consider lasers, LEDs and NR/MRI as (late) offshoots of the Second World War. In December 2022, for example, the US Energy Commission's *Lawrence Livermore Laboratory* announced that it had achieved *plasma confinement* for a small sample using laser technology like that used in laboratory tests of old and new hydrogen bombs. Plasma confinement is crucial for the realization of a slowed-down fusion reactor, so LLL had actually developed an alternative to the usual work (with a magnetic tokamak confinement, as in the European ITER).

Rumour has it that *EUV lithography (Extreme UltraViolet Lithography)*, developed by a nuclear physics group at Phillips and used by the Dutch multinational *ASML (Advanced Semiconductor Materials Lithography)* for photolithography machines needed to make the most advanced chips, is a late spin-off of the atomic bomb.

The prodigious mind of J. NASH and other game theorists shocked nuclear strategists around the world by devising the *Prisoner's Dilemma*, a behavioural non-zero-sum game that showed by logical-formal reasoning and in experimental behavioural tests that the functioning of MAD depends on the human mind deviating from formal logic when a commander in deep despair prefers a retaliatory strike even when the material outcome is predictably less favourable than surrender.

In summary, I must admit that the scientific impact of the atomic bombs and the mathematical side effects were largely confined to the fields of radiation and nuclear physics. The transfer to other fields was small, perhaps apart from the following more general effects on scientific organization, funding and public perception:

(1) The secular invention of *Big Science* in the Manhattan Project has proven to be a successful operational scheme and is now being applied in other areas of physics and in many other fields such as computer science, medicine and biology. The enormous scale led to a new holism, namely the simultaneous consideration of a multitude of processes. This led to the development of a *new modelling paradigm* that stands in contrast to the old modelling ideal of simplification, abstraction and idealization. Obviously, this new paradigm is ambiguous and leads partly to speculative barbarism but partly also to new worlds of discovery. (2) The atomic bomb, with its political ramifications, was the first example of the blatant *politicization of science* and the dual *scientification of politics*. Not surprisingly, these two processes were associated with an inflation of clever *lies*, worshipping *experts* chosen by the media, unfounded *promises*, irrational *scepticism*, *disregard for consequences*, and a stunted and often quite elitist *kind of responsibility* [cases e.g. Covid-19, fishing quotas, estimates of agricultural environmental risks]. (3) Most pronounced for mathematics is the new breed of *AMiNOs - Applied Mathematicians in Name Only* - i.e. mathematicians who drop euphonious names of superficially related scientific or social problems when soliciting research funding, without substance or demonstrably successful applications of their own purely mathematical achievements in the real world.

1.2 Jet propulsion - beyond the wheel. While the Treaty of Versailles had banned German aircraft research and production, rocket technology was not mentioned in the treaty. As a result, German science and industry gained a head start in this field, which culminated in the Second World War with the introduction of the Messerschmitt Me *262 turbojet fighter*, a *supersonic rocket-powered arrow plane* and the *V2 ballistic missile* on the battlefield. Rocket technology had been well understood in theory since the work of K. TSIOLKOVSKY at the beginning of the 20th[th] century. What was new about the Me 262 was the continuous control of the propulsion, the high achievable speed and the simplicity of the robust jet propulsion compared to an internal combustion engine as a drive. However, the Me 262 had no influence on the outcome of the Second World War, as it came onto the market too late and in too small numbers and was never able to compensate for the immense superiority of the combined Soviet, British and US forces on the ground. As for the *Blitz on London,* neither the German V1 cruise missiles nor the V2 ballistic missiles had any significant military impact on the Second World War.

Nevertheless, rocket and jet propulsion had a much greater impact on science, technology, military, politics and civilian life *in the post-war period* than the development of nuclear energy (discussed in our section 1.1): (1) it enabled reckless, cheap, *long-range mass tourism*, one of the main contributors to accelerated climate change; (2) for decades, Soviet superiority in intercontinental ballistic missiles maintained a *nuclear balance* with US superiority in strategic bombers and lavish deployment; (3) *computational fluid dynamics* made fluid dynamics work beyond classical hydrodynamics, i.e., also for gases, for combustion processes and for thin layers, as for example in J.D. BUCKMASTER's and G.S.S. Ludford's classic *Theory of Laminar Flows*, Cambridge University Press 1982; (4) the underlying mathematical advances quickly found wide application in soft materials, numerical weather prediction, climate change modelling, optimal design of wind turbines, car design, cardiovascular modelling, economics, finance; (5) the accompanying huge software and hardware demand was slowly but effectively satisfied (albeit, it is said, with never-ending surprises, e.g. with the (i) magical realism of vortices appearing in numerical simulations of Bernoulli's equations, which mathematically result in pure laminar flows - due to *virtual, numerically generated friction,* (ii) with surprises with each implementation of the same software on a new platform, and (iii) with each new simulation and tunnel test, e.g. of ship engines or of the engine of a ship; (6) lack of proof of existence, uniqueness and regularity of all the solutions of the Navier-Stokes equation (one of the seven *Clay Mathematics Institute* Millennium Prize problems); (7) failure of the Navier-Stokes equation for nano hydrology, as shown by J. SCHMIDT HANSEN in his monograph *Nanoscale Hydrodynamics of Simple Systems*, CUP 2022; (8) dichotomy of determinism and stochasticity (see above).

To summarize, from an ecological perspective, I share the *negative assessment* of the technological progress triggered by the groundbreaking advances in fluid dynamics of World War II, both in terms of accelerating climate change and the progressive loss of biodiversity through cheap mass tourism and the unsustainable expansion of tourism and sports resorts in the most precious parts of the Earth's ecology - all these negative developments are sustained and accelerated by jet propulsion.

On a positive note, some of the mathematical developments in understanding change and equilibrium in complex systems are closely linked to military research in gas dynamics and have since shown enormous potential for discovering new aspects of ecology and life, comparable only to the intriguing promises of the mysterious 2/3 of life on planet Earth hidden in the depths of the oceans or the promises of unknown life on the billions of billions of other possibly habitable exoplanets in the universe (where, according to new fluid dynamics calculations of the formation of planets in the early stages of a star, there is a good chance that water can remain on the planet). In mathematics, we refer to the new possibilities of mathematical modelling and numerical simulation with the term *mechanical modelling*, i.e. mathematical models in which the form of the equations and the coefficients should have a broader meaning and - in principle - with values that are testable in experiments, in contrast to the taught forms of mathematical modelling in which a correct reproduction of data is the most important, but purely phenomenological quality criterion.

1.3 Digitization - makes people work. According to the fundamental research on the prehistory of number systems by P. DAMEROW and R.K. ENGLUND, *Die Zahlzeichen-systeme der Archaischen Texte aus Uruk*, Berlin 1985, there have been forms of digitization for 5000 years to cope with the volume of work in construction, the quantity of goods in trade, manpower in war and celestial and divine observations. Since then, over the centuries and millennia, it has developed to ever new heights, numerical description of colours, pitches, volumes, concentrations.

Immediately, mere digitization is not a gain, but a loss for people: We can easily retain images, faces, locations, melodies, incidents in our memory along with a bouquet of meanings. Retaining sequences of numbers is much more difficult for most people, at least if they do not have a photographic memory (it is said that J. v. NEUMANN was able to memorize all the numbers on a page of the Chicago telephone directory after one concentrated look). They need a conscious choice of a *mnemonic* / *cog-*

nate from their own daily world of experience (birthdays, anniversaries, melodies, shelves). For example, MARK AARØE NISSEN, Denmark's best *memoriser*. He can remember the first 22,544 digits of π, using the locus method, where we visualize what we want to remember. NISSEN, for example, walks through his home and places the digits one by one on windowsills, tables, chairs and bookshelves.

All methods of representing numbers, i.e. long sequences of digits, are interesting and significant for storage, retrieval and processing of large amounts of data, whether in a sexagesimal, decimal, binary system or by prime number factorization, etc. The novelty of TURING'S team at the headquarters of the British *Code and Cypher School* at Bletchley Park in wartime was not the digital archiving of all received German signals in his digital computers *Colossi*, but the possibility of searching in this data with machine help and transforming it again and again and systematically. As the US cryptologist A.W. SMALL, who had been "loaned" to Bletchley Park, reported to Arlington in December 1944, "Daily solutions ... reflect a background of British mathematical genius, superb engineering ability, and solid common sense. Each of these has been a necessary factor. Each could have been overemphasized or underemphasized to the detriment of the solutions; a remarkable fact is that the fusion of the elements has been apparently in perfect proportion. The result is an outstanding contribution to cryptanalytic science." [A.W. SMALL, *The Special Fish Report*, The American National Archive (NARA), College Campus Washington] In this way, the British succeeded in efficiently mastering the decryption of the German *Enigma*, which German logicians had previously considered unbreakable. As with the atomic bomb and jet propulsion, I must add that the third pillar of the World War II math-based triad, digitization with its associated new computer methods, ultimately did not have much impact on the outcome of World War II: it could have saved the lives of thousands upon thousands of sailors and soldiers by rerouting convoys, but that would have shown that the Enigma had been cracked.

From an epidemiological perspective, the rapid, widespread and efficient spread of digitization qualifies it as the most contagious mathematical achievement of the Second World War. I explain the contagiousness of digitization by its lack of preconditions in contrast to the contextual embedding of classical mathematical modelling. Whether we are dealing with decoding (A. TURING 1942) or public-key cryptography (R.L. RIVEST, A. SHAMIR and L.M. ADLEMAN 1977), error-correcting codes (R. HAMMING 1947) or compression (D.A. HUFFMAN 1952, A. LEMPEL, J. ZIV 1978), searching (H.P. LUHN 1953) or sorting (T. HOARE 1959), describing (D. E. KNUTH 1978) or recognizing patterns (D. MUMFORD 2002), simulating the ritualized communication of a British lordship or an American psychotherapist (J. WEIZENBAUM 1966) or a chess player (C. SHANNON 1949), designing the architecture of a computer (J. V. NEUMANN 1945) or a programming language (J. BACKUS and P. NAUR 1960), analysing (A.A. MARKOV 1913) or predicting (N. WIENER 1942) time series in nature, language and economics, in most cases it is clear from the task which entities are to be encoded in digits, and the ingenuity usually consists in finding clever ways of encoding and handling the codes.

In my *hall of fame*, these mathematicians occupy privileged places, as they have had the greatest impact on life in our time with their contribution to digitization and computational methods - in directing attention to a rich variety of viewpoints, in automating tedious and repetitive work, in unhindered banking, in the free dissemination of knowledge, insight into technical details and other education, carefree entertainment, broad access to foreign languages and meaningful travel, genetic identification, universally accessible public health, advanced scientific research, seemingly limitless social communication, spline approximation, and powerful telecommunications. These are the areas where I have seen the greatest positive impact of digitalization on our society, making our lives more rewarding. Now I come to the downsides.

(1) Most digitization processes involve a sharp separation between the user and the provider of an application. E.g., in the application of the asymmetric public RSA key, when I wish transfer money from my account at Bank A to my plumber's account at Bank B, I request a large integer from my bank, which is the product of two prime numbers that are kept secret to me (and possible listeners). Then I use the digits of the received product to encode my bank order, and for now only my bank

knows the two prime numbers and can use them to decrypt my message. In this process, the data formats used and the details of the various ways in which they are processed are locked in a *black box*, the contents of which are known only to the provider of the service and hidden from the user. To quote B. LATOUR 1999, *Pandora's hope: essays on the reality of science studies*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. p. 304, *Blackboxing* is "the way in which scientific and technical work is made invisible by its own success. When a machine runs efficiently, when an issue is resolved, one need only focus on its inputs and outputs and not on its internal complexity. Paradoxically, the more successful science and technology are, the opaquer and more inscrutable they become.“ Personally, I consider the black-boxing in many computer methods to be a user-friendly advantage rather than a distinct minus. In part it is democratic and frees us users from tedious and demanding work, but in part it is autocratic, patronizing, and increases inequality in society, facilitates the surveillance of people and makes the control and prevention of unlawful surveillance almost impossible.

(2) I am concerned about the *loss of insights and competencies* induced by digitalization and automation, e.g. when easy access and manipulation of huge data stores support ad hoc modelling, and the associated formatting of behaviour, i.e. when plausible output makes a model trustworthy even if equations and coefficients remain hidden or unexplained, in contrast to the mechanistic, i.e. theory-based modelling mentioned above in section 1.2.

(3) Another negative aspect of digitization and effective computing methods is that, like the old church clocks and factory whistle signals, now only much more tyrannical and effective, they *make people and society conform to a computer* and its software, rather than providing computers and software that fit people. This is where the military provenance of digitization is most clearly disciplinary, even though the speed and power of digitization was a predominantly civilian phenomenon *after* the end of the Second World War.

(4) The *MIMAC - The Military Industrial Media Academic Complex* (as spelled by J. ØBERG) claims that AI and digitization are causing a secular and, they assert, benign disruption of our capacities to develop industrial and agricultural production, the administration of society, the social organization of education, scientific research and health care, and, not to forget, the military and entertainment: *Mickey flies stealth* (P.J. DAVIS' Sarcasm 2003)! As if by magic, the traditional and sensible curiosity about the underlying assumptions, the methods used and the credibility of models, calculations and supposedly consequent necessary requirements has disappeared and been replaced by admiration, almost worship, of the impressive achievements (and ignoring of the sometimes spooky, sometimes quite amusing failures) of vehicle autopilots and large language models such as ChatGPT and Microsoft’s Copilot.

Some time ago, I visited the math task force in the science department of a large chemical company. After touring some of the reactors, I had many questions for my colleagues. Here are two: (A) I was surprised that control and monitoring were not fully automated. (B) Does the application of advanced mathematical and computational methods allow the introduction of processes that operate closer to critical values, e.g. for pressure and temperature? To (A) the answer was hesitant: "Yes, you are right. We could do without visual monitoring and manual control. But we need to have a skeleton crew close to the process, so they are there to intervene if something unexpected happens. We need to keep them on their toes - and qualified. We checked the quality of their manual control: when we calculated an optimum, they were already very close to it!" The answer to (B) came immediately: "Yes, the constant changes in demand on the world market require changes in the use of existing reactors. This is where we mathematicians are called upon to propose new processes - and this is where our greatest frustration lies: time and again, our mathematically and economically well-developed proposals fail because of the board's safety considerations. We are located near a city with over a million inhabitants, and the Board of Directors does not want to jeopardize the reputation of our company under any circumstances, i.e. sophisticated and therefore risky procedures are not permitted.

I admire the seriousness of the colleagues' reflections, in contrast to the lack of seriousness and the superficial and despicable ongoing AI hype in politics, universities and the media. A similar lack of seriousness and a corresponding will to self-extinction has been described by H. KISSINGER in a joint paper with E. SCHMIDT and D. HUTTENLOCHER regarding the ongoing implementation of AI systems for the rapid activation of nuclear bombs in their book *The Age of AI: And Our Human Future*, 2021, Little, Brown and Company.

2. Metaphysical exaggerations about mathematics and the real world

Mathematicians and philosophers have always wondered to what extent abstract mathematical concepts and methods are inspired by concrete experiences of the world and, conversely, to what extent they have an inspiring effect on our dealings with nature and society. I believe that, given the facts presented above about the triad of the Second World War, we should be cautious or at least vigilant against metaphysical exaggerations in the answers often given.

2.1 Promises vs. misalignments of *War Keynesianism*. From my previous work in business research, econometrics and macroeconomic planning, I am familiar with four models of stimulus for full employment and rapid technological innovation: (1) The *helicopter model*, which proposes throwing money down the throats of consumers and giving lavish tax cuts to investors. (2) The *mercantilist model*, which proposes harsh, downright punitive tariffs on imports. (3) The *socialist model*, in which a small body, e.g. a communist party, ultimately decides on priorities and paths for social, regional, technological and economic development. (4) *War Keynesianism*, which proposes a drastic shake-up and rapid growth of all branches of production through autonomous investment, in its pure form by letting people dig holes in the ground, and in its applied form through huge subsidies and direct investment in the development and production of weapons. Now let's take a closer look at the four models and what our knowledge of the triad can contribute to a judgment:

To me, not being a US citizen, it appears that this November 2024 will be the first time in the history of economics that a country will let the voters vote on whether they prefer either (1), as proposed by Ms. HARRIS in direct continuation of President BIDEN's fiscal policy, or (2), as proposed by Mr. TRUMP. Both (1) and (2) seem workable to me. In model (1), hyperinflation could and can indeed be avoided for a huge currency market like the US dollar; the model is closely linked to globalization, increased imports, and job creation in the software industry, although unlike model (2), it does nothing for the desired creation of other decent jobs, reindustrialization, and technological innovation in the US. For model (2), the US is large enough and rich enough in enterprising, innovative talent to be self-sufficient (i.e. economically self-sustaining) after a while. In this way, the state and the economy are forced to undertake huge projects, possibly with a scientific and technological innovation potential similar to that of the Manhattan Project. However, this is also subject to the limitations described above, because innovations linked to technology and production -- in contrast to algorithmic, purely mathematical innovations -- do not in principle spill over to other branches of production without further ado. Moreover, the constituents of (2) must reckon with a substantial increase in the general cost of living, an ecologically salutary scarcity of raw materials, and a considerable time lag to reshape and recuperate the necessary skilled and disciplined army of labour, to reallocate capacity from industrial renewal to civilian needs, and to build all facilities from scratch.

Since 1917, model (3) has been the preferred model for many developing countries, which have achieved impressive success with it, e.g. the USSR through its victory in the Second World War and China with its new economic policy. The disadvantage of model (3) is that it seems to require a certain degree of autocratic structures; that it relies heavily on the wisdom of the leading body; and that monitoring and correcting mistakes in the evaluation of markets can be cumbersome and slow, as the Chinese bubble in construction has recently proven.

As J.M. KEYNES correctly recognized, only model (4) is free of most of the weaknesses of models (1-3). It is therefore not surprising that the re-elected President of the European Commission, U. V.D. LEYEN, and the new British Prime Minister, K. STARMER, seem to favour model (4) for Europe in the current economic downturn and the persistent lag in cutting-edge technologies. On March 5, 2024, the Commission proposed *EDIP - The European Defence Industry Programme* - against the opposition of individual EU member states. This is intended to become a European set of rules to start implementing concrete measures from the *European Defence Industry Strategy* (*EDIS*), including *FAST - a fund to accelerate the transformation of defence supply chains. FAST is* initially endowed with €1.5 billion and is to be increased to €100 billion after 2027 [*VDI Nachr*. and *Fncl. Times* 05.07.2024]. In contrast to VON DER LEYEN, who initially tried to hide the intended war Keynesianism behind bellicose rhetoric and rather general claims of "better jobs", J. HEALEY, STARMER'S defence minister, was blunt. He announced that the new Labour administration would examine how to make the Ministry of Defence an "economic department" that drives growth, wealth creation and prosperity in Britain. The defence sector will form one of the cornerstones of the government's new industrial strategy, he pledged, highlighting data showing that the wider economic impact of defence jobs "are greater than many other sectors", while the average wage was 40 per cent higher than other manufacturing industries. ... "So for a government that wants to drive growth, improve productivity, and spread wealth creation, defence is one of the cornerstones of a new industrial strategy." [Quoted from *Fncl. Times* 16.07.2024]

In contrast to European leaders, Catholic Republican vice-presidential candidate J.D. VANCE in the U.S. expressed his distaste for resorting to war Keynesianism for a country that is not under military attack: "Proponents of American aid to Ukraine have argued that our approach has been a boon to our own economy, creating jobs here in the factories that manufacture weapons. But our national security interests can be - and often are - separate from our economic interests. The notion that we should prolong a bloody and gruesome war because it's been good for American business is grotesque. We can and should rebuild our industrial base without shipping its products to a foreign conflict." [Quoted from *New York Times* 12.04.2024].

Similarly, 72 years earlier, in the post-World War II doldrums in the U.S., none other than General MACARTHUR taught economists, "It is part of the general pattern of misguided policy that our country is now geared to an arms economy which was bred in an artificially induced psychosis of war hysteria and nurtured upon an incessant propaganda of fear. [This economic orientation] renders among our political leaders almost a greater fear of peace than is their fear of war." [Speech to the Michigan Legislature, in Lansing, Michigan, May 15, 1952, published in: Imparato, Edward T., *General MacArthur Speeches and Reports 1908-1964*, Nashville, Turner, 2000 (p. 206), Quoted in A.B. Abrams, *Immovable Object -- North Korea's 70 Years at War with American Power*, Clarity Press 2020, chapter 2, note 46].

What do the facts presented above tell us about the non-military impact of the World War II triad in this debate? It is clear that the war effort, with its concentration of resources, its time pressure to achieve set goals, its general admiration for machines, and its tendency to have no regard for people's lives and time, was instrumental in bringing nuclear physics, gas dynamics, and digitization to practical application. However, there is a time factor in the invention and transfer of math-based science and technology to civil society.
(A) We can't know, but I suspect that these groundbreaking developments in science and math would have taken much longer without war. This is an argument in favour of War Keynesianism.
(B) On the other hand, for the triad, I have shown that only purely mathematical innovations such as new computational methods can diffuse quickly into new areas of application, while the civilian diffusion of other arms-induced technological-scientific-mathematical advances can take a very long time, if at all. The reason for this is that this type of innovation is closely linked to the conditions of a specific background. It is these *conditions* that preclude rapid transfer to a new field. It is therefore not

only morally reprehensible but also short-sighted to rely on War Keynesianism for mathematical, scientific and technological innovation. (
C) Finally, the triad shows that great achievements can indeed be accomplished in armaments and war that go far beyond commanded actions, but hardly on command: the new quality of high-tech armaments and warfare requires a new character of consensus. Without agreement, not all the technology transfer dreams of war Keynesianism will come true. B. BRECHT vividly celebrated renitence in the face of insufficient consensus in his Svendborg poem *Dismantling the Ship Oskawa by the Crew* [Collected Poems, vol. 2, pp. 670-673]. See also K.M. BAVNBEK & B. ROTH, *Krigens nye kvalitet – offentlighedens nye karakter*, Roskilde 1983, 126 pages. We therefore conclude from our findings on the WW2 triad that HERACLITUS' *War is the father of all and the king of all; some he has made gods and some he has made men, some he has made slaves and some he has made free*, contains much that is true and important, but is a metaphysical exaggeration.

2.2 The new modelling paradigm of *multiple time scales* vs. *simplicity*. Another metaphysical exaggeration is the widespread assertion, especially among physicists, that simplicity is one of the quality criteria for good mathematical modelling. The triad tells a different story: breakthroughs in the complex systems dealt with in World War II did not result from abstraction and simplification, but on the contrary from the clarity and transparency of detailed numerical modelling and the introduction of meaningful new model constructs that had not been considered before but were observable or epistemologically meaningful. As the engineering wisdom has always said, "The difference between theory and practice is the condensate." In two recent volumes [BBB et al. (eds.), *Multiplicity of Times Scales in Complex Systems I, II*, Springer 2024] is shown, how the consideration of a multiplicity of characteristic times of the various constituent processes in a complex system has become a success story in all recent modelling of the geosphere, biosphere and anthroposphere.

See also F.W. TAYLOR'S somewhat related distinction between standardization and simplification of work: "*Standardization* refers to the process of setting standards for every business activity. It can be standardization of process, raw material, time, product, machinery, methods or working conditions. These standards are the benchmarks which must be adhered to during production." In scientific research, I may add, this is the hard and creative part, namely, to elect or construct equations and coefficients in relation to theory. He continues: "*Simplification* aims at eliminating superfluous varieties, sizes and dimensions while standardization implies devising new varieties instead of the existing ones." [in: *The Principles of Scientific Management*, Harper & Brothers 1911]. Similarly, in mathematical modelling without constructive and creative standardization, even the most ingenious simplifications can prove misleading.

As early as 1854-68, during the laying of the Atlantic cable, the physicist W. THOMSON (later LORD KELVIN) gave the chief electrical engineer W. WHITEHOUSE of the *Atlantic Telegraph Company* and the whole world an impressive lesson in how complex systems become transparent and controllable precisely when, in the above expression, all "condensate" is considered. For Thomsen, this meant slowing down the transmission of signals with the square of the distance; the importance of the chemical purity of the copper used; the diameter of the cable and the cross-section of the insulation; the use of suitable transmitting and receiving equipment; and limiting the voltage so as not to jeopardize the insulation. Only this brought the investors the prospect of profit and THOMSEN the distinction.

To this day, the mathematization of biology and other sciences such as economics is characterized by a shyness towards holistic approaches to complex problems and the idea that success and professional recognition can be found in abstraction, i.e. in the isolation of phenomena. To give an example, most studies on the regulated exocytosis of insulin from pancreatic beta-cells are limited either to purely local membrane phenomena, such as the opening of ion channels when stimulated by glycose; or changes in the oscillation pattern at the cell membrane; or Ca exchange between mitochondria and other internal organelles; or folding and stretching of actin structures. None of these can explain the movement of the thousands insulin-filled vesicles to the cell membrane by a pooling of isolated approaches. Perhaps once again only the "condensation water" is missing. In this case, it makes sense to introduce a low-frequency pulsating alternating current field with an accompanying magnetic field and the formation of small protrusions on the cell membrane into the model universe and as a concrete task for novel measurements [BBB, *Is mathematics invading human cells? Impressions from a collaboration with diabetes doctors*, Mathematical Intelligencer, Vol. 35, No. 1, pp. 6-15].

2.3 Data-based vs. theory-based *(mechanistic)* modelling. Since I. KANT, we in the sciences and in humanities and economics research have been aware that a meaningful collection of data requires an explicit or unconscious idea or theory of what we observe. Consequently, YU. I. MANIN in his *Mathematics and Physics*, Birkhäuser 1981, and, independently, J.H. JENSEN et al. in *Innermathematical vs. extramathematical obstructions to model credibility* in: X. AVULA (ed.), *Mathematical Modelling in Science and Technology*, Pergamon Press 1984, New York, pp. 62-65, elaborated on the epistemological difference between theory-driven mathematical models (today also called *mechanistic*) and purely data-driven ad hoc models such as the ancient *Ptolemaic planetary model* (PPM) and today's *standard model of particle physics* (SM). From a pragmatic point of view, the main difference is that mechanistic modelling gives more insight into the underlying dynamics than data-based modelling.

However, it would be another metaphysical exaggeration to attribute more *credibility* to mechanistic modelling than to data-based modelling: For nautical purposes, for example, the PPM was more reliable than KEPLER'S model for a while, and the prediction of the HIGGS particle by the SM was confirmed by the *Large Hadron Collider* in 2011-2013. Moreover, as shown above, the highly reliable and variable computer methods that have their origins in the digitization of the Second World War are among the means that can make a purely technical and statistical analysis of data more relevant than mechanistic modelling. This insight surprised N. WIENER in 1942 when he was able to develop applicable purely statistical methods for air combat based solely on rapid calculations of autocorrelations and without any reference to Newtonian mechanics [*Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. A war-time classified report, 1942. published postwar 1949, Technology Press and Wiley, New York]. When analysing the *ups* and *downs* of the economy (stock prices, employment, prices of durable consumer goods), *technical* analysis (i.e. the statistical analysis of time series) also seems to provide much more reliable predictions than *substantive* analyses of the underlying macroeconomic dynamics in differential equations. However, statistical analysis alone has so far not been very successful in earthquake warning and weather forecasting.

Note that in medicine, economics, traffic planning and other fields, *data collection* is the most expensive part of mathematical modelling. Often the modeler is not asked before the data is collected but has to make do with the available data. In general, the dependence on large data packages is also a *democratic* problem: Theory-based models can, in principle, be checked by any trained colleague. Data-based models, however, are generally not subject to such independent scrutiny.

In the history of *meteorology*, we can see the back and forth between data-driven and theory-based modelling: After the simple reading of the values of a barometer for weather forecasting came the synoptic method, which selects one of the archived weather maps that fits the current measurement data precisely and derives a new weather forecast from it - in historical repetition. This did not work very well, especially not for 5–7-day forecasts. Since V. BJERKNES work before the First World War and then L.F. RICHARDSON's numerical schemes, it was clear how reliable numerical weather forecasts could be made. However, the necessary computer capacity was not achieved until the 1970s. A special feature of the meteorological equations is that they can predict temperature, wind direction and wind force accurately over 5-7 days, but not the amount of precipitation. Rain is a critical, unstable phenomenon at the boundary transition between vapor and crystals, which is not covered by the atmospheric equations. So, meteorologists are trying again with synoptics, now computer-aided after digitizing all archived weather maps. Such AI-supported weather forecasts have long been introduced in the USA and Russia and seem to have proven their worth there. Unlike in the prairies and steppes, however, in

Europe we are dealing with relatively large water masses in the Atlantic, Baltic and Mediterranean, which can be described well in the equations but are apparently difficult to capture by synoptics. A typical case of *AI induced neo-barbarism*.

2.4 *Real*, natural and anthropogenic vs. *epistemological concepts*? In mathematical applications, we can find the ultimate truth in three different directions: Empiricists in a convincing *description*, rationalists in a falsifiable *prediction*, and "pragmatists", such as G. VICO, C.S. PEIRCE and myself, in the *prescription* of a working effect. For me, therefore, the secular meaning of the triad lay in the *prescription of a working design*, *Verum esse ipsum factum* (somewhat ambiguously: "Truth is the self-made"), a word coined by VICO [*De Antiquissima Italorum Sapientia ex Linguae Originibus Eruenda Libri Tres* (On the Most Ancient Wisdom of the Italians Unearthed from the Origins of the Latin Language) 1710, Palmer, L. M., trans. Ithaca: Cornell UP, 1988]. My preferred reading is the assertion that we can only fully understand things that we have made ourselves. It seems to me that of VICO'S views, only his scientific scepticism holds water, while his industrialism is outdated in the face of anthropogenic man-made climate change and the equally man-made nuclear bomb with greatly reduced reaction time (due to the ongoing deployment of American nuclear delivery systems and Russian development of hypersonic ballistic missiles): clearly, we understand these artifacts poorly and therefore do not control them.

Back to mathematics: here, too, we can see differences in the origin and character of the concepts and methods used: With VICO and PEIRCE, I believe that our listening to *common sense*, matured over hundreds of thousands of years of human development, is the most important approach. This is true for the triad, especially for digitization (see also above in section 1.3 A.W. SMALL'S 1944 report), but not completely. The fundamental ideas of atomic and particle physics, neutron radiation, and nuclear fission and fusion could not be grasped by common sense, and it required a controlled use of the extended, not entirely natural and not entirely anthropomorphic sign system of mathematics and physics. The same applies to the virtuosity of digitization: without developed group and body theory, number theory and probability theory, public-key cryptography, error-correcting codes, compression and the numerical recognition of faces and other patterns would have been difficult to imagine. In this sense, the triad marks a new step in the mathematization of the real world.

Disclaimer. It took 450 years, from the algebraic calculations of BOMBELLI through EULER, D'ALEMBERT and GAUSS to the complex dynamics of MANDELBROT and MILNOR, to fully understand the concepts, methods and meaning of complex numbers. It took 70 years for the discovery of DNA to find widespread social application in historical demography, criminology and, with mRNA vaccines, public health. It took 20 years for the transistor to move from esoteric space exploration to the ubiquity of cell phones. When H. KISSINGER asked CHU ENLAI for his assessment of the *Great French Revolution* in 1972, CHU ENLAI is said to have replied: "Isn't it too early for a fair and comprehensive assessment?"

Similarly, one may doubt whether the 80 years since World War II are sufficient to prove the role of the triad as the *carrier* of "deep" modern mathematical modelling with its multiple levels, as I claim? To what extent is it true that the traditional professional elegance of mathematical modelling has already been partially replaced by the brute force of search engines and "artificial *inelegance* (AI)"? Or should we better and more modestly perceive the role of the triad as a *cab driver*, i.e. as an actor that merely brought together an immense variety of valuable earlier achievements in a computerized productive way? Time will tell.

Acknowledgments. Most of this report was written in conversation with the Danish historian of mathematics and science JENS HØYRUP.

Episodes from the history of space-filling curves and information about its amazing application

Danuta Ciesielska

Institute for the History of Science of Polish Academy of Sciences,
ul. Nowy Świat 72, 00–330 Warszawa, smciesie@cyfronet.krakow.pl

The history of space-filling curves started in 1890 with suprising result by Giuseppe Peano. In the four pages paper [7] he presented a continuous real function on the unit interval which image is a plane square. A year later David Hilbert showed a geometrical procedure of the generation of a space-filling curve [4] and in 1900 E. H. Moore improved that procedure [6]. That fascinating story has a Polish-Hungarian plot. In 1912 a Polish mathematician, then professor at Lwów, Wacław Sierpiński took the stage. In June 3, 1912 Stanisław Zaremba from the Jagiellonian University presented to the Kraków Academy paper by Sierpiński *O pewnej nowej krzywej ciągłej, wypełniającej kwadrat. – Sur une novelle courbe continue qui remplit toute une aire plane*. Exactly a year later Józef Puzyna from Lwów (Lvov, Lemberg) presented to the Kraków Academy the paper *O pewnej krzywej p. Peano. – Über eine Peanosche Kurve* by George Pòlya. Both Sierpiński and Pòlya were then very young. Sierpiński in 1906 received Ph.D. from the Jagiellonian University, in 1908 became a Privatdocent and in 1910 a professor at the Lvov University. Pòlya in 1912 just received a doctorate degree in mathematics from the Budapest University. The paper [12] in the second volume of Sierpiński's *Œuvres choisies* is listed on the fifth position and the paper [8] in *George Pólya 1887–1985. A Biographical Memoir* [1] is listed as the first Pólya's publication.

In the paper [12] Sierpiński showed that

> There is a bounded, continuous, and even function of a real variable t which satisfies the functional equations:
>
> $$f(t) + f\left(t + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{for all real } t$$
>
> and
>
> $$2f\left(\frac{1}{4}t\right) + f\left(t + \frac{1}{8}\right) = 1 \quad \text{for all } t \in [0,1]$$
>
> and that
>
> $$\left.\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = f\left(t - \frac{1}{4}\right) \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

1

passes through every point of the square $[0,1]^2$.

In the paper [8] Pólya presented a generalization of Sierpiński's construction. To the best of my knowledge Pólya was the first mathematician who changed the direction of a construction of a space-filling Curve. He began his consideration with the geometrical presentation of the problem and his idea was quite clear: cutting the square to produce a segment.

Moreover, in the above mentioned paper Pólya showed that for the curve for which the ratio of the shorter side of the basic triangle to the hypotenuse is a transcendental number, then Hilbert's conjecture on triple points holds. The mathematical part of the story of space-filling curves continues in 1970s. It is commonly known that the Peano, Hilbert and Sierpiński curves are nowhere differentiable (for a proof see for example: [6], [10], [11]). In 1973 Peter D. Lax claimed on nowhere differentiability of the Pólya curve if the smaller angle of the basic triangle is between 30° and 45°. But it turned out that for an angle between 15° and 30° Pólya curve has derivative zero on non-numerable set, and for an angle less than than 15° on the set of complete Lebesgue measure the derivative is zero (for the detailed study of the problem see [5] and [9]).

For the general audience far more interesting is amazing application in celluar phones of mentioned constructions. In the late 1980s a revolutionary concept of fractal antennas was introduced by an American mathematician and engineer Nathan Cohen. Since then many different shapes of fractals have been used by electric companies. It is said that antennas based on Peano, Hilbert and Sierpiński constructions are one the most effecient. I will try to tell about it.

The paper is partially based on my research presented in [2] and [3].

Bibliography

[1] Boas, R.P., *George Pòlya 1887–1985. A Biographical Memoir*, National Academy of Sciences in Washington, Washington D.C. 1990,

[2] Ciesielska, D., *Sierpiński's and Pólya's Space-Filling Curves in "Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie"*, [in:]: Bečvář, J., Bečvářova, M. (eds), 32. mezinarodne konference "Historie Matematiky", Univerzita Karlovy v Praze, Praha 2011, 169–172,

[3] Ciesielska, D., *On the 100 anniversary of the Sierpiński space-filling curve*, Wiad. Mat. 48(2012), no2, 69–74,

[4] Hilbert, D., *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*, Math. Annaln 38(1891), 459–460,

[5] Lax, P.D.,*The Differetiablility of Pólya's Function*, Adv. in Math. 10(1973), 456–464,

[6] Moore, E. H., *On certain crinkly curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 1(1900), 79–90,

[7] Peano, G., *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Math. Annaln. 36(1890), 157–160,

[8] Pólya, G., *Über eine Peanosche Kurve*, Bull. Inter. Acad. Polon. Sci. Lett. (Cl. Sci. Math. Nat. Ser. A.) 9(1913), 305–313,

[9] Prachar, K., Sagan, H., *On the Differentiability of the Coordinate Functions of Póyla's Space-Filling Curve*, Monatsh. Math. 121(1996), 125–138,

[10] Sagan, H., *Nowhere Differentiabiblity of Sierpiński's Space-filling Curve*, Bull. Acad. Sc. Polon. 40(1992), 217–220,

[11] Sagan, H., *Space-Filling Curves*, Springer Verlag, New York Berlin 1994,

[12] Sierpiński, W., *Sur une novelle courbe continue qui remplit toute une aire plane*, Bull. Inter. Acad. Polon. Sci. Lett. (Cl. Sci. Math. Nat. Ser. A.) 8(1912), 462–478,

Gespräche: Herwig Säckl, Rita Meyer-Spasche, Hans Fischer

verkehrt: Karl-Heinz Schlote, Christa Binder, Peter Ullrich

von links nach rechts nd von hinten nach vorne:
Karl-Heinz Schlote   Mykhailo Zarichnyi
Rainer Gebhardt   Carsten und Britta Müller
Alfred Holl   Stela Segev   Monika Gebhardt   Renate Tobies   Nada Razpet
Jasna Fempl Madjarević   Christa Binder

Ziel des Ausflugs: das Stift Vorau in der Steiermark

von links nach rechts und von hinten nach vorne:
Stanisław Domoradzki Wiesław Wójcik Hans Fischer
Peter Ullrich Gerlinde Faustmann
Detlef Gronau Harald Gropp
Rita Meyer-Spasche Marko Razpet

in der Bibliothek des Stiftes: ein interessanter Globus

CHRISTA BINDER
Adolf-Gstöttner-Gasse 6/37, A 1200 Wien, Österreich
christa.binder@tuwien.ac.at

BOOSS-BAVNBEK (137 , 157)
Roskilde University DSE/IMFUFA, Building 27.2 Postboks 260, DK-4000 Roskilde, Denmark
booss@ruc.dk

DANUTA CIESIELSKA (149)
Institute for the History of Science of Polish Academy of Sciences,
ul. Nowy Świat 72, PL 00-330 Warszawa, Polen
smciesie@cyfronet.krakow.pl

∗ STEFAN DESCHAUER (38)
Hübnerstraße 15, D 01069 Dresden, Deutschland
Stefan.Deschauer@tu-dresden.de

∗ STANISŁAW DOMORADZKI (9)
Institute of History, University of Rzeszów, Aleja Rejstna 16 C, 35-310 Rzeszów, Poland
stanislawdomoradzki@gmail.com

∗ GERLINDE FAUSTMANN (60)
Kaisersteingasse 6, A 2700 Wiener Neustadt, Österreich
gerlinde.faustmann@aon.at

∗ JASNA FEMPL MADJAREVIĆ (92)
MISANU, 36 Knez Mihajlova Street, 11000 Belgrade, Serbia
Vidikovački venac 27, apt. 10, 11000 Belgrad, Serbien
tanjamadjarevic@gmail.com

∗ HANS FISCHER (61)
Am Wald 32, D 85072 Eichstätt, Deutschland
hans.fischer@ku.de

∗ RAINER GEBHARDT (53)
Untere Bergstraße 2a, D 09224 Chemnitz/Grüna, Deutschland
rainer.gebhardt@kabelmail.de

MONIKA GEBHARDT

DETLEF GRONAU
Riglergasse 6/5, A 1180 Wien, Österreich
detlef.gronau@chello.at

∗ HARALD GROPP (15)
Henkel-Teroson-Straße 20, D 69123 Heidelberg, Deutschland
d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

JULIANE HORN *(siehe Detlef Spalt)*

∗ ALFRED HOLL (20)
Deiningerstraße 4, D 93049 Regensburg, Deutschland
alfred.holl@th-nuernberg.de

∗ KARL KLEINE
Grete-Unrein-Straße 3, D 07745 Jena, Deutschland
karl@kkleine.de

WINFRIED MAHLER
Pestalozzistraße 11, D-07749 Jena, Deutschland
winfried.mahler@web.de

∗ Rita Meyer-Spasche (119)
Römerstr 10, D 80801 München, Deutschland
schapsreyem@t-online.de

Britta Müller

Carsten Müller
Humboldtstraße 15, D 07743 Jena, Deutschland
dr.mueller.c.jena@t-online.de

∗ Franz Pichler (6)
telegraph.pichler@aon.at

∗ Marko Razpet (75)
Levstikova 6, SI 1230 Domžale, Slovenija
Marko.Razpet@guest.arnes.si

∗ Nada Razpet (83)
Levstikova 6, SI 1230 Domžale, Slovenija
nada.razpet@guest.arnes.si

∗ Herwig Säckl (74)
Traberweg 1, D-93049 Regensburg, Deutschland
herwsaeckl@aol.com

Karl-Heinz Schlote
Elie-Wiesel-Straße 55, D 04600 Altenburg, Deutschland
schlote49@yahoo.de

Peter Schmitt
Adolf-Gstöttner-Gasse 6/37, A 1200 Wien, Österreich
peter.schmitt@univie.ac.at

∗ Stela Segev (31)
Herzog College, Jerusalem, Israel
stela.segev@gmail.com

∗ Detlef Spalt (100)
spalt@mathematik.tu-darmstadt.de

∗ Renate Tobies (64)
Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Haeckel-Haus,
Institut Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin
Berggasse 7, D 07745 Jena
renate.tobies@uni-jena.de

∗ Peter Ullrich (123)
Herforder Straße 103, D 32257 Bünde, Deutschland
ullrich@uni-koblenz.de

∗ Waltraud Voss (106)
Hauptstraße 3, D 01097 Dresden, Deutschland
waltraud.voss@web.de

∗ Wiesław Wójcik (96)
Institute of Philosophy, Jan Długosz University of Częstochowa, Poland
w.wojcik@ujd.edu.pl, wwoj100@gmail.com

∗ Mykhailo Zarichnyi (9)
Institute of Mathematics, University of Rzeszów
1 Prof. St. Pigonia Str., 35-310 Rzeszów, Poland
Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str., 79000 Lviv, Ukraine
zarichnyi@yahoo.com

Stift Vorau, Sakristei: Johann Cyriak Hackhofer, Höllensturz (1715-16)

*Wikipedia: Niki.L https://commons.wikimedia.org/wiki/
File:Sakristei*Vorau*Deckengemälde*u*Höllensturz.jpg)*

1944--2024, Würdigung und Rückblick. Ein *Essai* über 80 Jahre mathematische Modellierung von Geosphäre, Biosphäre und Anthroposphäre

Bernhelm Booß-Bavnbek, unterstützt von Jens Høyrup, beide Universität Roskilde, Dänemark

Zusammenfassung. Ich erinnere an drei blutige Liebesgeschichten zwischen Mathematik und Krieg, die am Ende des Zweiten Weltkriegs heranreiften und ihre Anwendbarkeit erreichten: die Triade aus *Kernenergie*, *Düsenantrieb* und *Digitalisierung*. Vor dem Hintergrund früherer Erfahrungen und Methoden und dem Fehlen von entscheidender Bedeutung früherer Anwendungen mathematischer Konzepte in anderen Bereichen versuche ich, die technische Neuartigkeit dieser Triade mathematikbasierter Technologien zu charakterisieren; die Spuren ihrer kriegerischen Ursprünge aufzuzeigen und ihren prägenden Einfluss auf die spätere Entwicklung von Mathematik, Wissenschaften, Technologie, Gesellschaft und die öffentliche Wahrnehmung.

Vorwort. Hallo Leute: Companieros und companieras! Muchachos und muchachas! Liebe Christa, liebe Kollegen und Freunde! Bitte verzeiht mir, wenn ich euer gemütliches und nettes Beisammensein störe. Ich bin kein Mathehistoriker. Aber ich freue mich immer, mit euch zusammen zu sein. Es wärmt mein altes Herz, besser als Whisky, euren immer neuen Entdeckungen auf dem mühsamen Weg der Mathematikgeschichte und über den Sinn und die Bedeutung von all dem zuzuhören.

Wo ich herkomme, in der Gegend da oben, ist es ziemlich kalt und ungemütlich: Ich bin einer der letzten Mohikaner, der fast ausgestorbenen Ethnie der Mathematiker, die in der reinen Mathematik tätig sind und über umfangreiche Berufserfahrung in der Anwendung mathematischer Konzepte und Methoden in der realen Welt verfügen. Wir waren zu unserer Absonderung gezwungen, weil wir die *Selbstgefälligkeit der reinen Mathematiker* nicht ertragen konnten, d. h. die Dekonstruktion der Mathematik durch marginale Verallgemeinerungen und im besten Fall Versprechungen über die *ultimative* menschliche Anwendbarkeit unserer Ergebnisse. Um es mit den Worten von D. MUMFORD zu sagen: "The thing that leaps to mind is something about the suicidal tendency in math to get more and more technical and never to think about explaining one's ideas to mathematicians in other fields of math (let alone other scientists or even the general public). The field has a strange psychology linked to the fear of being thought dumb if you don't know everything." Und N. WIENER: "There has been a tendency, visible here and there, to give up the search for a great stroke or a great aperçu and to be content with a sort of mathematical embroidery... This reinforces the tendency toward the thin and the bodiless change, which is one of the besetting sins of the pure mathematics of the present time and often burgeons into mountains of triteness and bad taste." Nicht besser ist die doppelte Selbstgefälligkeit der mit Anwendungen befassten Mathematiker, die nur die *unmittelbaren* positiven Früchte ihrer Arbeit sehen und die Schattenseiten auf lange Sicht tabuisieren.

Wir, die letzten Mohikaner, haben leider die Nestwärme verloren, den Komfort der gegenseitigen Anerkennung, des Schulterklopfens und der Zugehörigkeit zu einem Mainstream. Auf harte Weise lernten wir den Unterschied zwischen der Glaubwürdigkeit der Mathematik und der Mathematiker, d. h. zwischen der ewigen Wahrheit der mathematischen Argumente und der ständigen Verbreitung von Lügen, Illusionen und Verkaufsparolen unter Mathematikern über ihr Fach.

Das mag für einige von Ihnen traurig klingen. Aber glauben Sie mir, im Reservat ist es gar nicht so schlimm. Wir haben den Whisky, die meisten von uns haben eine ordentliche Pension, und jeden Abend haben wir das Lagerfeuer, um neuen Unrat zu verbrennen, um von alten blutigen Zeiten zu sprechen, von unseren Triumphen, vom miserablen Zustand der Welt und von den verstorbenen Freunden, wie

1. Meine Ehefrau in vierzig Jahren, die Militärhistorikerin SUSSI BOOSS-BAVNBEK (1949-2020). Sie begleitete mich zu unserem Treffen 2014. Sie fragte mich immer wieder nach dem Leben in einer mathematisierten Welt, und sie küsste mich und liebte mich für die Ehrlichkeit meiner immer gleichen Antwort "Viel Dunkelheit und viel Licht!"
2. Unser Sohn, der mathematische Geograph und Softwareentwickler DANIEL HOLMBOE BANG (1972-2020), der von allen, die ihn kannten, für sein zuversichtliches Lachen, gepaart mit seiner ernsten Nüchternheit, geliebt wurde, z. B. wenn er mit immer neuen Ideen zu den glänzenden Fortschritten der geographischen Modellierung in der versicherungsmathematischen Praxis beitrug und gleichzeitig auch auf die empörende Seite der *Profilierung* wirklich eines jeden aufmerksam war.
3. Mein jahrzehntelanger Mentor, der Universalgelehrte, Mathematiker und Wissenschaftsautor PHILIP J. DAVIS (1923-2018), war ein häufiger Teilnehmer dieser *Austrian Math History Series*. Er sagte mir: "Du wirst dort eine ganz besondere, sympathische und produktive Verästelung von Menschen finden. Im Gegensatz zum üblichen Reklamestil bei anderen Fachtagungen bemühen sich die Referenten in den Vorträgen, Bescheidenheit bei ihren Behauptungen zu üben. Im Gegensatz zu dem eiligen und manchmal etwas seichten Plausch in den Tagungspausen andernorts werden bei CHRISTA BINDER die Pausen großzügig über den Tag verteilt, und der Geist der Tagung, die gemütlichen Spaziergänge in der Umgebung und die Aufgeschlossenheit der Teilnehmer fördern anspruchsvolle Gespräche über den Sinn unserer Arbeit und über unsere Lebensziele, immerhin die beiden zentralen Fragen eines Lebens als Mathematiker."
4. Jahrelang, und noch mehr nach unserem Treffen 2014, als ich ihm zum letzten Mal zuhörte, wurde IVOR GRATTAN-GUINNESS (1941-2014) zu einem Vorbild für eine facettenreiche Sicht auf den Kampf und den Schmerz mit den Feinheiten der Welt und der Mathematik, wie sie IVOR z. B. auch von J.-L. LAGRANGE, einem der brillantesten, genialsten und selbstkritischsten Mathematiker der Geschichte, erfahren hatte.

Ich widme meinen Bericht[1] dem Andenken an diese vier wunderbaren Menschen.

1. Eine Bilanz der WW2-Triade

1.1 Kernenergie - mehr als TNT. Die spektakulärste Errungenschaft des Zweiten Weltkriegs war die Entdeckung einer neuen Art von technologisch verfügbarer Energie, der Kernenergie, die in Bezug auf Energie/Gewicht millionenfach stärker ist als Zucker, Fett und TNT, zunächst durch *Kernspaltung* von Uran-235 oder Plutonium-239, was durch transportable Spaltbomben demonstriert wurde, die die japanischen Großstädte Hiroshima und Nagasaki mit jeweils nur einer einzigen Explosion zerstörten. Nach den Kriegsjahren wurden diese Massenvernichtungswaffen durch ebenfalls transportable und tausendmal stärkere Wasserstoffbomben ergänzt, die auf Fusionsreaktionen zwischen Wasserstoffisotopen (Deuterium und Tritium) basieren. Für die Spaltbombe erlangte deren moderierte und verlangsamte, meist nicht explosive Variante zur Stromerzeugung weltweite Verbreitung.

[1] Gemeinsam mit JENS HØYRUP wurde dieser Vortrag als Eröffnungsvortrag für die **16. Östr. Symposion zur Geschichte der Mathematik**, *Mönichkirchen, 27.-31. Mai 2024 geplant*, aber wegen eines Verkehrsunfalls abgesagt.

Die Auswirkungen der Atom- und Wasserstoffbombe auf die Sozialwissenschaften und die Kommunikation waren enorm und lassen sich am besten durch den Mangel an Ernsthaftigkeit und Ehrlichkeit charakterisieren, den M. MACLUHAN 1964 mit dem Satz "The medium is the message" ironisierte. Am bemerkenswertesten war die trügerische Verpackung, wie H. TRUMANS *Killing to save lives!* (seine Begründung für den Abwurf der beiden Bomben war nicht ehrlich, also die verbündete UdSSR einzuschüchtern, sondern angeblich den Zweiten Weltkrieg im Osten zu beenden, was später von den Kriegshistorikern zurückgewiesen wurde), die irrsinnigen Versprechungen militärischer Überlegenheit durch technologische Überlegenheit und die spekulativen Konzepte des *nuklearen Regenschirms* und der *gegenseitig zugesicherten Zerstörung - MAD*. N. BOHRS *Atoms for peace!* klingt sympathischer. Doch auch sein Versprechen einer praktisch unendlichen, billigen und sauberen Energieerzeugung erscheint angesichts des dauerhaften radioaktiven Mülls und anderer Risiken für die Zivilbevölkerung irrsinnig.

Zugegeben, es gibt ein paar *mathematische Triumphe* zu feiern: Erstens: Die Atomphysik wurde zum Laufen gebracht. Es war ein langer Weg vom intuitiven Konzept einer neutroneninduzierten Kettenreaktion von L. SZILARD im Jahr 1933 bis zu R. PEIERLS‛ und O.R. FRISCHS recht präziser Schätzung der kritischen Masse von Uran-235 im Jahr 1939, um die Kettenreaktion mit exponentiell wachsender Überschussenergie aufrechtzuerhalten, die glücklicherweise von W. HEISENBERG, der für Nazi-Deutschland arbeitete, nicht gemeistert wurde. Es gab weitere mathematische Herausforderungen, die für das Implosionsmodell der Atombombe angegangen und gelöst wurden. Im Gegensatz zu HEISENBERGS arrogantem und eng an der Physik orientiertem Denken waren die wichtigsten Herausforderungen für den Bau der Spaltbombe jedoch technologischer Natur, nämlich die Produktion ausreichend großer Mengen von U-235 durch große Zentrifugenreihen und von Pu-239 durch schnell gebaute Kernkraftwerke.

Einen nachhaltigen Einfluss auf die Mathematik hatte S. ULAMS und J. VON NEUMANNS geniale Monte-Carlo-Stoßwellensimulation für die Wasserstoffbombe, die den numerischen Vorteil eines stochastischen Ansatzes für riesige deterministische Systeme zeigte. Ähnliche Überlegungen wurden von A.N KOLMOGOROW entwickelt. Indirekt haben die Atombomben zu Durchbrüchen in der *Atmosphärenphysik* und der *Erdwellenakustik* für ein kontrolliertes Testverbot sowie in der *Radiologie* und *Genetik* durch die reichhaltigen medizinischen Proben aus Japan und anderen Ländern geführt.

Über die mathematischen und physikalischen Fortschritte bei der Prüfung von Kerngeräten im Labor und durch numerische Simulation ist nur wenig bekannt. Ich gehe aber davon aus, dass manche Fortschritte in der Metrologie und der chemischen Reinigung von Grundstoffen von Erfahrungen in der Kerntechnik gestützt wurden. Auch können wir Laser, LED und NR/MRI als (späte) Ableger des Zweiten Weltkriegs betrachten. Im Dezember 2022 gab das *Lawrence Livermore Laboratory* der US-Energiekommission z.B. bekannt, dass es die Plasmaeindämmung für eine kleine Probe mit Hilfe der Lasertechnologie, ähnlich wie bei Laboratorium-Tests alter und neuer Wasserstoffbomben, erreicht hat. Der Plasmaeinschluss ist für die Realisierung eines gebremsten Fusionsreaktors von entscheidender Bedeutung, so dass das LLL tatsächlich eine Alternative zu den üblichen

Arbeiten (mit einem magnetischen Tokamak-Einschluss, so auch im europäischen ITER) entwickelt hatte.

Gerüchten zufolge handelt es sich bei der *EUV-Lithografie (Extreme UltraViolet Lithography)*, die von einer Kernphysikgruppe bei Phillips entwickelt und von dem niederländischen multinationalen Unternehmen *ASML (Advanced Semiconductor Materials Lithography)* für Fotolithografie-Maschinen eingesetzt wird, die für die Herstellung der modernsten Chips benötigt werden, um einen späten Spin-off der Atombombe.

Der wunderbare Verstand von J. NASH und anderen Spieltheoretikern schockierte Nuklearstrategen auf der ganzen Welt, indem sie das *Gefangenendilemma* entwarfen, ein verhaltensorientiertes Nicht-Nullsummenspiel, das durch logisch-formale Argumentation und in experimentellen Verhaltenstests zeigte, dass das Funktionieren von MAD davon abhängt, dass der menschliche Verstand von der formalen Logik abweicht, wenn ein Kommandeur in tiefer Verzweiflung einen Vergeltungsschlag vorzieht, selbst wenn das materielle Ergebnis vorhersehbar weniger günstig ist als sich zu ergeben.

Zusammenfassend muss ich zugeben, dass sich die wissenschaftlichen Auswirkungen der Atombomben und die mathematischen Nebeneffekte größtenteils auf die Bereiche der Strahlen- und Kernphysik beschränken. Der Transfer in andere Bereiche war gering, vielleicht abgesehen von den folgenden allgemeineren Auswirkungen auf die Wissenschaftsorganisation, die Finanzierung und die öffentliche Wahrnehmung:

(1) Die säkulare Erfindung der *Big Science* im Rahmen des Manhattan-Projekts hat sich als erfolgreiches operationelles Schema erwiesen und wird nun auch in anderen Bereichen der Physik und in vielen anderen Bereichen wie den Computerwissenschaften, der Medizin und der Biologie angewendet. Das enorme Ausmaß führte zu einem neuen Holismus, nämlich der gleichzeitigen Betrachtung einer Vielzahl von Prozessen. Daraus entwickelte sich ein *neues Modellierungsparadigma*, das im Gegensatz zum alten Modellierungsideal der Vereinfachung, Abstraktion und Idealisierung steht. Offensichtlich ist dieses neue Paradigma zweideutig und führt teils zu spekulativer Barbarei, teils zu neuen Welten der Entdeckung. (2) Die Atombombe mit ihren politischen Verästelungen war das erste Beispiel für eine unverhohlene *Politisierung der Wissenschaften* und für die duale *Verwissenschaftlichung der Politik*. Es überrascht nicht, dass mit diesen beiden Prozessen eine Inflation von schlauen *Lügen*, die Anbetung der von den Medien auserwählten *Experten*, unbegründete *Versprechungen*, irrationale *Skepsis*, die *Missachtung der Folgen* und ein verkümmertes und oft ganz elitäres *Verantwortungsgefühl* verbunden waren [Fälle z.B. Covid-19, Fischereiquoten, Schätzungen von landwirtschaftlich bedingten Umweltrisiken]. (3) Am ausgeprägtesten für die Mathematik ist die neue Züchtung von *AMiNOs - Applied Mathematicians in Name Only* -, d.h. Mathematiker, die bei der Einwerbung von Forschungsmitteln wohlklingende Namen fallen lassen von oberflächlich verwandten wissenschaftlichen oder gesellschaftlichen Problemen, ohne Substanz oder nachweislich erfolgreiche Anwendungen der eigenen rein mathematischen Errungenschaften in der realen Welt.

1.2 Strahlantrieb - jenseits des Rades. Während der Versailler Vertrag die deutsche Flugzeugforschung und -produktion verboten hatte, wurde die Raketentechnik im Vertrag nicht erwähnt. Infolgedessen erlangte die deutsche Wissenschaft und Industrie einen

Vorsprung auf diesem Gebiet, der im Zweiten Weltkrieg mit der Einführung des Messerschmitt Me *262-Turbinenjagdflugzeugs*, eines *raketengetriebenen Überschallpfeilflugzeugs* und der *ballistischen V2-Rakete* auf dem Schlachtfeld seinen Höhepunkt fand. Seit den Arbeiten von K. ZIOLKOWSKI zu Beginn des 20^{th} Jahrhunderts war die Raketentechnik theoretisch gut verstanden. Das Neue an der Me 262 war die kontinuierliche Steuerung des Antriebs, die hohe erreichbare Geschwindigkeit und die Einfachheit des robusten Strahlantriebs im Vergleich zu einem Verbrennungsmotor als Antrieb. Die Me 262 hatte jedoch keinen Einfluss auf den Ausgang des Zweiten Weltkriegs, da sie zu spät und in zu geringer Zahl auf den Markt kam und die immense Überlegenheit der alliierten Streitkräfte am Boden nie ausgleichen konnte. Was den *Blitz auf London* betrifft*, so* hatten weder die deutschen V1-Marschflugkörper noch die ballistischen V2-Raketen eine nennenswerte militärische Bedeutung für den Zweiten Weltkrieg.

Dennoch hatten Raketen- und Düsenantriebe einen viel größeren Einfluss auf Wissenschaft, Technik, Militär, Politik und ziviles Leben *in der Nachkriegszeit* als die Entwicklung der Kernenergie (die in unserem Abschnitt 1.1 behandelt wird): (1) Es wurde ein rücksichtsloser, billiger *Langstrecken-Massentourismus* ermöglicht, einer der Hauptverursacher des beschleunigten Klimawandels; (2) jahrzehntelang hielt die sowjetische Überlegenheit bei Interkontinentalraketen ein *nukleares Gleichgewicht* mit der US-amerikanischen Überlegenheit bei strategischen Bombenflugzeugen;(3) die *numerische Strömungsdynamik* machte die Strömungsdynamik über die klassische Hydrodynamik hinaus funktionsfähig, d.h. auch für Gase, für Verbrennungsprozesse und für dünne Schichten, wie z.B. in in J.D. Buckmasters und G.S.S. Ludfords klassischer *Theory of Laminar Flows*, Cambridge University Press 1982; (4) die zugrundeliegenden mathematischen Fortschritte fanden schnell breite Anwendung in weichen Materialien, numerischer Wettervorhersage, Modellierung des Klimawandels, optimalem Design von Windturbinen, Autodesign, Herz-Kreislauf-Modellierung, Wirtschaft, Finanzen; (5) die damit einhergehende riesige Soft- und Hardware-Nachfrage konnte langsam, aber effektiv befriedigt werden (wenn auch, wie man sagt, mit nicht enden wollenden Überraschungen, z.B., mit dem (i) magischen Realismus von Schlangen, die in numerischen Simulationen der Bernoulli-Gleichungen auftreten, die mathematisch gesehen reine laminare Strömungen ergeben - aufgrund *virtueller, numerisch erzeugter Reibung,* (ii) mit Überraschungen bei jeder Implementierung derselben Software auf einer neuen Plattform und (iii) mit jeder neuen Simulation und jedem neuen Tunneltest, z. B, von Schiffsmotoren oder Offshore-Windenergieanlagen); (6) fehlender Nachweis der Existenz, Einzigartigkeit und Regelmäßigkeit der Lösungen aller Navier-Stokes-Gleichungen (eines der sieben Millenium-Preis-Probleme des *Clay Mathematics Institute*); (7) Versagen der Navier-Stokes-Gleichung für die Nanohydrologie, wie von J. SCHMIDT HANSEN in seiner Monographie *Nanoscale Hydrodynamics of Simple Systems*, CUP 2022, gezeigt; (8) Dichotomie von Determinismus und Stochastik (siehe oben).

Zusammenfassend kann ich sagen, dass ich aus ökologischer Sicht die *negative Bewertung* des technologischen Fortschritts teile, der durch die bahnbrechenden Fortschritte in der Strömungsdynamik des Zweiten Weltkriegs ausgelöst wurde, und zwar sowohl im Hinblick auf die Beschleunigung des Klimawandels als auch auf den fortschreitenden Verlust der biologischen Vielfalt durch den billigen Massentourismus und die nicht nachhaltige Ausbreitung von Tourismus- und Sportgebieten in den wertvollsten Teilen der Ökologie der Erde - die alle auf dem Düsenantrieb beruhen, aufrechterhalten und beschleunigt werden.

Positiv zu vermerken ist, dass einige der mathematischen Entwicklungen zum Verständnis von Veränderungen und Gleichgewichten in komplexen Systemen seit dem Jahr 262 eng mit der militärischen Forschung im Bereich der Gasdynamik verbunden sind und seitdem ein enormes Potenzial zur Entdeckung neuer Aspekte der Ökologie und des Lebens aufweisen, vergleichbar nur mit den faszinierenden Verheißungen der geheimnisvollen 2/3 des Lebens auf dem Planeten Erde in der Tiefe der Ozeane oder den Verheißungen des unbekannten Lebens auf den Milliarden von Milliarden anderer möglicherweise bewohnbarer Exoplaneten im Universum (wo nach neuen fluiddynamischen Berechnungen der Entstehung von Planeten im Frühstadium eines Sterns gute Chancen bestehen, dass Wasser auf dem Planeten bleiben kann). In der Mathematik bezeichnen wir die neuen Möglichkeiten der mathematischen Modellierung und der numerischen Simulation mit dem Begriff *mechanische Modellierung*, d.h. mathematische Modelle, bei denen die Form der Gleichungen und die Koeffizienten eine breitere Bedeutung haben sollen und - im Prinzip - mit Werten, die in Experimenten überprüfbar sind, im Gegensatz zu den traditionellen Formen der mathematischen Modellierung, bei denen eine korrekte Wiedergabe von Daten das wichtigste, rein phänomenologische Qualitätskriterium war.

1.3 Digitalisierung - lässt Menschen arbeiten. Nach den grundlegenden Forschungen zur Vorgeschichte der Zahlensysteme von P. DAMEROW und R.K. ENGLUND, *Die Zahlzeichensysteme der Archaischen Texte aus Uruk*, Berlin 1985, gibt es seit 5000 Jahren Formen der Digitalisierung zur Bewältigung des Arbeitsaufkommens im Bauwesen, der Warenmenge im Handel, der Arbeitskraft im Krieg und der himmlischen und göttlichen Beobachtungen. Seitdem hat sie sich im Laufe der Jahrhunderte und Jahrtausende zu immer neuen Höhenflügen entwickelt, numerische Beschreibung von Farben, Tonhöhen, Lautstärken, Konzentrationen. Die Neuigkeit von Turings Team im Hauptquartier der britischen *Code and Cypher School* in Bletchley Park zu Kriegszeiten war, dass ihre digitalen Computer *Colossi* die Entschlüsselung der deutschen *Enigma*, die deutsche Logiker zuvor für unknackbar gehalten hatten, effizient meisterten. Wie bei der Atombombe und dem Düsenantrieb muss ich hinzufügen, dass auch die dritte Säule der auf Mathematik basierenden Triade des Zweiten Weltkriegs, die Digitalisierung mit den damit verbundenen neuen Computermethoden, keinen Einfluss auf den Ausgang des Zweiten Weltkriegs hatte: Sie hätte das Leben von Tausenden und Abertausenden von Matrosen und Soldaten durch die Umleitung von Konvois retten können, aber das hätte gezeigt, dass die Enigma geknackt war.

Aus epidemiologischer Sicht qualifiziert die schnelle, weite und effiziente Verbreitung der Digitalisierung diese als die ansteckendste mathematische Errungenschaft des Zweiten Weltkriegs. Ich erkläre die Ansteckungskraft der Digitalisierung durch ihre Voraussetzungslosigkeit im Gegensatz zur Kontext-Einbettung der klassischen mathematischen Modellierung. Ob wir uns mit Dekodierung (A. TURING 1942) oder Public-Key-Kryptographie (R.L. RIVEST, A. SHAMIR und L.M. ADLEMAN 1977), fehlerkorrigierenden Codes (R. HAMMING 1947) oder Kompression (D.A. HUFFMAN 1952, A. LEMPEL, J. ZIV 1978), Suche (H.P. LUHN 1953) oder Sortieren (T. HOARE 1959), Beschreiben (D. E. KNUTH 1978) oder Erkennen von Mustern (D. MUMFORD 2002), Simulieren der ritualisierten Kommunikation einer britischen Lordschaft oder eines amerikanischen Psychotherapeuten (J. WEIZENBAUM 1966) oder eines Schachspielers (C. SHANNON 1949), das Entwerfen der Architektur eines Computers (J. V. NEUMANN 1945) oder einer Programmiersprache (J. BACKUS und P. NAUR 1960), das Analysieren (A.A. MARKOV 1833) oder Vorhersagen (N. WIENER 1942) von Zeitreihen in Natur, Sprache und Wirtschaft, in den meisten Fällen geht aus der Aufgabenstellung hervor, welche Entitäten in Ziffern zu kodieren sind, und der Einfallsreichtum besteht meist darin, clevere Wege für die Kodierung und den Umgang mit den Codes zu finden.

In meiner *Ruhmeshalle* nehmen diese Mathematiker privilegierte Plätze ein, da sie mit ihrem Beitrag zur Digitalisierung und zu Computermethoden den größten Einfluss auf das Leben in unserer Zeit hatten - bei der Lenkung der Aufmerksamkeit auf eine reiche Vielfalt von Gesichtspunkten, bei der Automatisierung ermüdender und sich wiederholender Arbeit, beim ungehinderten Bankverkehr, bei der freien Verbreitung von Wissen, bei der Einsicht in technische Details und bei der sonstigen Bildung, bei der sorgenfreien Unterhaltung, beim breiten Zugang zu Fremdsprachen und beim sinnvollen Reisen, bei der Genidentifizierung, bei der allgemein zugänglichen öffentlichen Gesundheit, bei der fortgeschrittenen wissenschaftlichen Forschung, bei der scheinbar grenzenlosen sozialen Kommunikation, bei der Spline-Approximation und bei der praktischen Telekommunikation. Dies sind, in alphabetischer Reihenfolge, die Bereiche, in denen ich die größten positiven Auswirkungen der Digitalisierung auf unsere Gesellschaft festgestellt habe und die unser Leben lohnender machen. Nun komme ich zu den Schattenseiten.

(1) Die meisten Digitalisierungsvorgänge gehen mit einer scharfen Trennung zwischen dem Nutzer und dem Anbieter einer Anwendung einher. Um Geld von meinem Konto bei Bank A auf das Konto meines Klempners bei Bank B zu überweisen, was in etwa die Anwendung eines öffentlichen RSA-Schlüssels beschreibt, fordere ich von meiner Bank eine große ganze Zahl an, die das Produkt aus zwei Primzahlen ist, die auch für mich geheim gehalten werden. Dann benutze ich die Ziffern des Produkts, um meinen Bankauftrag zu kodieren, und vorerst kennt nur meine Bank die beiden Primzahlen und kann sie zur Entschlüsselung meiner Nachricht verwenden. In diesem Prozess sind die angewandten Datenformate und die Einzelheiten der verschiedenen Arten ihrer Verarbeitung in einer Blackbox eingeschlossen, deren Inhalt nur dem Anbieter der Dienstleistung bekannt und für den Nutzer verborgen ist. Zu zitieren ist B. LATOUR 1999, *Pandora's hope: essays on the reality of science studies*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. S. 304, *Blackboxing* ist "die Art und Weise, wie wissenschaftliche und technische Arbeit durch ihren eigenen Erfolg unsichtbar gemacht wird. Wenn eine Maschine effizient läuft, wenn ein Sachverhalt geklärt ist, braucht man sich nur auf ihre Inputs und Outputs zu konzentrieren und nicht auf ihre interne Komplexität. Je erfolgreicher Wissenschaft und Technik sind, desto undurchsichtiger und undurchschaubarer werden sie paradoxerweise. Persönlich halte ich das Blackboxing in vielen Computermethoden für einen benutzerfreundlichen Vorteil und nicht für ein deutliches Minus. Zum Teil ist sie demokratisch und befreit uns Nutzer von lästiger und anspruchsvoller Arbeit, zum Teil ist sie aber auch autokratisch, bevormundend, vergrößert die Ungleichheit in der Gesellschaft, erleichtert die Überwachung von Menschen und macht die Kontrolle und Unterbindung unrechtmäßiger Überwachung fast unmöglich.

(2) Sorge bereitet mir der durch Digitalisierung und Automatisierung induzierte *Verlust von Einsichten und Kompetenzen*, wenn z.B. der einfache Zugriff und die Manipulation riesiger Datenspeicher die Ad-hoc-Modellierung unterstützen, und die damit einhergehende Formatierung von Verhalten, d.h. wenn plausibler Output ein Modell vertrauenswürdig macht, auch wenn Gleichungen und Koeffizienten verborgen oder unerklärt bleiben, im Gegensatz zu den oben in Abschnitt 1.2 erwähnten Mechanismen, der theoriegestützten Modellierung.

(3) Ein weiterer negativer Aspekt der Digitalisierung und effektiver Computermethoden ist, dass sie, wie die alten Kirchturmuhren und Fabrikpfeifensignale, jetzt nur noch viel tyrannischer und effektiver, *den Menschen und die Gesellschaft dazu bringen, sich einem Computer* und seiner Software *anzupassen*, anstatt Computer und Software bereitzustellen, die zum Menschen passen. Hier zeigt sich die militärische Provenienz der Digitalisierung am deutlichsten disziplinierend, auch wenn Geschwindigkeit und Macht der Digitalisierung *nach dem* Ende des Zweiten Weltkriegs ein überwiegend ziviles Phänomen waren.

(4) Der *MIMAC - The Military Industrial Media Academic Complex* (in der Schreibweise von J. ØBERG) behauptet, dass KI und die Digitalisierung eine säkulare und, so ihre Behauptung, gutartige Störung unserer Kapazitäten zur Entwicklung der industriellen und landwirtschaftlichen Produktion, der Verwaltung der Gesellschaft, der sozialen Organisation

des Bildungswesens, der wissenschaftlichen Forschung und des Gesundheitswesens und, nicht zu vergessen, des Militärs und der Unterhaltung bewirken: *Mickey fliegt den Stealth* (P.J. DAVIS' Sarkasmus 2003)! Wie von Zauberhand ist die traditionelle und vernünftige Neugier auf die zugrundeliegenden Annahmen, die verwendeten Methoden und die Glaubwürdigkeit von Modellen, Berechnungen und angeblich dsraus folgenden notwendigen Anforderungen verschwunden und durch Bewunderung, ja fast Anbetung der beeindruckenden Leistungen (und Ignorierung der teils gespenstischen, teils recht amüsanten Fehlleistungen) von Fahrzeug-Autopiloten und großen Sprachmodellen wie ChatGPT und Microsoft Copilot ersetzt worden. Vor einiger Zeit besuchte ich die Mathematik-Taskforce in der Wissenschaftsabteilung eines großen Chemiekonzerns. Nachdem ich einige der Reaktoren besichtigt hatte, hatte ich viele Fragen an die Kollegen. Hier sind zwei: (A) Ich war überrascht, dass Steuerung und Kontrolle nicht vollständig automatisiert waren. (B) Ermöglicht die Anwendung fortschrittlicher mathematischer und rechnerischer Methoden die Einführung von Prozessen, die näher an kritischen Werten, z. B. für Druck und Temperatur, arbeiten? Auf (A) war die Antwort zögernd: "Ja, Sie haben Recht. Wir könnten auf die optische Überwachung und manuelle Kontrolle verzichten. Aber wir müssen eine Notbesetzung in der Nähe des Prozesses haben, damit sie da sind und eingreifen können, wenn etwas Unvorhergesehenes passiert. Wir müssen sie auf Trab halten - und qualifiziert. Wir haben die Qualität ihrer manuellen Steuerung überprüft: als wir ein Optimum berechnet haben, waren sie schon sehr nah dran!" Auf (B) kam die Antwort sofort: "Ja, die ständigen Veränderungen der Nachfrage auf dem Weltmarkt erfordern Veränderungen bei der Nutzung der bestehenden Reaktoren. Hier sind wir Mathematiker gefragt, neue Verfahren vorzuschlagen - und hier liegt unsere größte Frustration: Immer wieder scheitern unsere mathematisch und wirtschaftlich gut ausgearbeiteten Vorschläge an den Sicherheitsüberlegungen des Vorstandes. Wir befinden uns in der Nähe einer Millionenstadt, und der Verwaltungsrat will den Ruf unseres Unternehmens auf keinen Fall gefährden, d.h. anspruchsvolle und damit riskante Verfahren sind nicht erlaubt.

Ich bewundere die Ernsthaftigkeit der Überlegungen der Kollegen, im Gegensatz zu der mangelnden Ernsthaftigkeit und dem oberflächlichen und verachtenswerten anhaltenden KI-Hype in der Politik, an den Universitäten und in den Medien. Ein ähnlicher Mangel an Ernsthaftigkeit und ein entsprechender Wille zur Selbstauslöschung wurde von H. KISSINGER in einer gemeinsamen Arbeit mit E. SCHMIDT und D. HUTTENLOCHER bezüglich der laufenden Implementierung von KI-Systemen zur schnellen Aktivierung von Atombomben in ihrem Buch *The Age of AI: And Our Human Future*, 2021, Little, Brown and Company festgestellt.

2. Metaphysische Übertreibungen über Mathematik und die reale Welt

Mathematiker und Philosophen haben sich schon immer gefragt, inwieweit abstrakte mathematische Konzepte und Methoden von konkreten Welterfahrungen inspiriert sind und umgekehrt, inwieweit sie eine inspirierende Wirkung auf unseren Umgang mit Natur und Gesellschaft haben. Ich glaube, dass wir angesichts der oben dargelegten Fakten über die Triade des Zweiten Weltkriegs vorsichtig oder zumindest wachsam gegenüber metaphysischen Übertreibungen in den oft gegebenen Antworten sein sollten.

2.1 Versprechungen vs. Fehlorientierungen des *Kriegskeynesianismus*. Aus meiner früheren Arbeit in den Bereichen Unternehmensforschung, Ökonometrie und makroökonomische Planung kenne ich vier Modelle von Impulsen für Vollbeschäftigung und rasche technologische Innovation: (1) Das *Hubschraubermodell*, das vorschlägt, den Verbrauchern Geld nach unten zu werfen und den Investoren üppige Steuersenkungen zu gewähren. (2) Das *merkantilistische Modell*, das harte, geradezu strafende Zölle auf Importe vorschlägt. (3) Das *sozialistische Modell*, bei dem ein kleines Gremium, z. B. eine kommunistische Partei, letztlich über Prioritäten und Wege für die gesellschaftliche, regionale, technologische und wirtschaftliche Entwicklung entscheidet. (4) Der *Kriegskeynesianismus*, der eine drastisches Durchschütteln und ein schnelles Wachstum aller Produktionszweige durch autonome Investitionen vorschlägt, in seiner reinen Form, indem man die Menschen Löcher in die Erde graben lässt, und in seiner angewandten Form durch riesige Subventionen und direkte Investitionen in die Entwicklung und Produktion von Waffen. Sehen wir uns nun die vier Modelle etwas näher an, und was unser Wissen über die Triade zu einem Urteil beitragen kann:

Für mich, der ich kein US-Bürger bin, scheint es, dass dieser November 2024 das erste Mal in der Geschichte der Wirtschaft ist, dass ein Land die Wähler darüber abstimmen lässt, ob sie entweder (1), wie von Frau HARRIS in direkter Fortsetzung der Finanzpolitik von Präsident BIDEN vorgeschlagen, oder (2), wie von Herrn TRUMP vorgeschlagen, bevorzugen. Mir erscheinen sowohl (1) als auch (2) praktikabel. In Modell (1) konnte und kann eine Hyperinflation für einen riesigen Währungsmarkt wie den US-Dollar tatsächlich vermieden werden; das Modell ist eng mit der Globalisierung, den zunehmenden Importen und der Schaffung von Arbeitsplätzen in der Software-Industrie verbunden, obwohl es im Gegensatz zu Modell (2) nichts zur gewünschten Schaffung von menschenwürdigen Arbeitsplätzen, zur Reindustrialisierung und zur technologischen Innovation in den USA beiträgt. Für Modell (2) sind die USA groß genug und reich genug an unternehmungslustigen, innovativen Talenten, um nach einer Weile autark zu sein (d.h. wirtschaftlich selbstversorgend). Staat und Wirtschaft werden auf diese Weise zu riesigen gemeinsamen Vorhaben gezwungen, möglicherweise mit einem wissenschaftlichen und technologischen Innovationspotential wie es das Manhattan Projekt hatte. Allerdings auch mit den oben beschriebenen Begrenzungen, weil an Technik und Produktion gebundene Erneuerungen -- im Unterschied zu algorithmischen, rein mathematischen Erneuerungen -- grundsätzlich nicht ohne weiteres auf andere Produktionszweige ausstrahlen. Zudem müssen die Wähler von (2) mit einem erheblichen Anstieg der allgemeinen Lebenshaltungskosten, einer ökologisch heilsamen Verknappung von Rohstoffen und einer beträchtlichen Zeitverzögerung rechnen, um das erforderliche qualifizierte und disziplinierte Heer von Arbeitskräften neu zu formen und wiederzugewinnen, um Kapazitäten von der industriellen Erneuerung auf zivile Bedürfnisse umzuverteilen und um alle Einrichtungen von Grund auf neu zu errichten.

Seit 1917 ist Modell (3) das bevorzugte Modell für viele Entwicklungsländer, die damit beeindruckende Erfolge erzielt haben, z. B. die UdSSR durch den Sieg im Zweiten Weltkrieg und China mit seiner neuen Wirtschaftspolitik. Der Nachteil des Modells (3) besteht darin, dass es ein gewisses Maß an autokratischen Strukturen zu erfordern scheint, dass es stark von der Weisheit des führenden Gremiums abhängt und dass die Überwachung und Korrektur von Fehlern bei der Bewertung der Märkte mühsam und langsam sein kann, wie die chinesische Blase im Bauwesen kürzlich bewiesen hat.

Wie J.M. KEYNES richtig erkannt hat, ist nur Modell (4) frei von den meisten Schwächen der Modelle (1-3). Daher ist es nicht verwunderlich, dass die wiedergewählte Präsidentin der Europäischen Kommission, U. V.D. LEYEN, und der neue britische Premierminister K. STARMER das Modell (4) für Europa in der gegenwärtigen Wirtschaftsflaute und dem anhaltenden Rückstand bei den Spitzentechnologien zu favorisieren scheinen. Am 5. März 2024 schlug die Kommission gegen den Widerstand einzelner EU-Mitgliedsstaaten *EDIP - The European Defence Industry Programme* – vor. Das soll ein europäisches Regelwerk werden, um mit der Umsetzung konkreter Maßnahmen aus der *Europäischen Strategie für die Verteidigungsindustrie* (*EDIS*) zu beginnen, darunter *FAST - ein Fonds zur Beschleunigung der Transformation von Lieferketten im Verteidigungsbereich. FAST ist* vorerst mit 1,5 Mrd. €

ausgestattet und soll nach 2027 auf 100 Mrd. € aufgestockt werden [*VDI Nachr*. und *Fncl. Times* 05.07.2024]. Im Gegensatz zu VON DER LEYEN, die anfangs versuchte, den beabsichtigten Kriegskeynesianismus hinter einer kriegerischen Rhetorik und eher allgemeinen Behauptungen von "besseren Arbeitsplätzen" zu verbergen, war J. HEALEY, STARMERS Verteidigungsminister, unverblümt. Er kündigte an, die neue Labour-Regierung werde prüfen, wie das Verteidigungsministerium zu einem "Wirtschaftsministerium" gemacht werden könne, das Wachstum, Wohlstand und Prosperität in Großbritannien fördert. Der Verteidigungssektor werde einer der Eckpfeiler der neuen Industriestrategie der Regierung sein, versprach er und verwies auf Daten, die zeigten, dass die wirtschaftlichen Auswirkungen von Arbeitsplätzen im Verteidigungssektor "größer sind als in vielen anderen Sektoren", während der Durchschnittslohn 40 Prozent höher sei als in anderen verarbeitenden Branchen. ... "Für eine Regierung, die das Wachstum ankurbeln, die Produktivität verbessern und die Schaffung von Wohlstand verbreiten will, ist die Verteidigung also einer der Eckpfeiler einer neuen Industriestrategie." [«STARMER announced that the new Labour administration would examine how to make the Ministry of Defence an "economic department" that drives growth, wealth creation and prosperity in Britain. The defence sector will form one of the cornerstones of the government's new industrial strategy, he pledged, highlighting data showing that the wider economic impact of defence jobs "are greater than many other sectors", while the average wage was 40 per cent higher than other manufacturing industries. … "So for a government that wants to drive growth, improve productivity, and spread wealth creation, defence is one of the cornerstones of a new industrial strategy."» Zitiert aus *Fncl. Times* 16.07.2024]

Im Gegensatz zu den europäischen Staats- und Regierungschefs äußerte der katholische republikanische Vizepräsidentschaftskandidat J.D. VANCE in den USA seine Abneigung gegen den Rückgriff auf den Kriegskeynesianismus für ein Land, das nicht militärisch angegriffen wird: "Die Befürworter der amerikanischen Hilfe für die Ukraine haben argumentiert, dass unser Ansatz ein Segen für unsere eigene Wirtschaft gewesen sei, da dieser Ansatz hier in den Fabriken, die Waffen herstellen, Arbeitsplätze geschaffen habe. Aber unsere nationalen Sicherheitsinteressen können - und sind oft - von unseren wirtschaftlichen Interessen getrennt. Der Gedanke, dass wir einen blutigen und grausamen Krieg verlängern sollten, weil er gut für die amerikanische Wirtschaft war, ist grotesk. Wir können und sollten unsere industrielle Basis wieder aufbauen, ohne ihre Produkte in einen ausländischen Konflikt zu verfrachten." [«Proponents of American aid to Ukraine have argued that our approach has been a boon to our own economy, creating jobs here in the factories that manufacture weapons. But our national security interests can be - and often are - separate from our economic interests. The notion that we should prolong a bloody and gruesome war because it's been good for American business is grotesque. We can and should rebuild our industrial base without shipping its products to a foreign conflict.» Zitiert aus *New York Times* 12.04.2024].

In ähnlicher Weise lehrte 72 Jahre zuvor, in der Flaute nach dem Zweiten Weltkrieg in den USA, kein Geringerer als General MacArthur die Ökonomen: "Es ist Teil des allgemeinen Musters einer fehlgeleiteten Politik, dass unser Land jetzt auf eine Rüstungswirtschaft ausgerichtet ist, die in einer künstlich herbeigeführten Psychose der Kriegshysterie gezüchtet und durch eine unaufhörliche Propaganda der Angst genährt wurde." [Diese wirtschaftliche Ausrichtung] "führt bei unseren politischen Führern zu einer fast noch größeren Angst vor dem Frieden als vor dem Krieg." [«It is part of the general pattern of misguided policy that our country is now geared to an arms economy which was bred in an artificially induced psychosis of war hysteria and nurtured upon an incessant propaganda of fear." [This economic orientation] "renders among our political leaders almost a greater fear of peace than is their fear of war.» Rede vor der Legislative von Michigan, in Lansing, Michigan, 15.05.1952, veröffentlicht in: Imparato, Edward T., *General MacArthur Speeches and Reports 1908-1964*, Nashville, Turner, 2000 (S. 206), Zitiert nach A.B. Abrams, *Immovable Object -- North Korea's 70 Years at War with American Power*, Clarity Press 2020, chapter 2, note 46.]

Was sagen uns die oben dargestellten Fakten über die nichtmilitärischen Auswirkungen der Triade des Zweiten Weltkriegs in dieser Debatte? Es ist klar, dass die Kriegsanstrengungen mit ihrer Ressourcenkonzentration, ihrem Zeitdruck zur Erreichung der gesetzten Ziele, ihrer allgemeinen Bewunderung für Maschinen und ihrer Tendenz, auf das Leben und die Zeit der Menschen keine Rücksicht zu nehmen, ausschlaggebend dafür waren, dass die Kernphysik, die Gasdynamik und die Digitalisierung zur praktischen Anwendung kamen. Es gibt jedoch einen Zeitfaktor bei der Erfindung und dem Transfer von auf Mathematik basierender Wissenschaft und Technologie in die Zivilgesellschaft. (A) Wir können es nicht wissen, aber ich vermute, dass diese bahnbrechenden Entwicklungen in Wissenschaft und Mathematik ohne Krieg viel länger gedauert hätten. Dies ist ein Argument für den Kriegskeynesianismus. (B) Auf der anderen Seite habe ich für die Triade gezeigt, dass nur rein mathematische Innovationen wie neue Computermethoden schnell in neue Anwendungsbereiche diffundieren können, während die zivile Verbreitung anderer rüstungsinduzierter technologisch-wissenschaftlich-mathematischer Fortschritte sehr lange dauern kann, wenn überhaupt. Der Grund dafür ist, dass diese Art von Innovation eng mit den besonderen Bedingungen eines spezifischen Hintergrunds verbunden ist. Es sind diese *besonderen Bedingungen*, die eine schnelle Übertragung auf ein neues Gebiet ausschließen. Es ist daher nicht nur moralisch verwerflich, sondern auch kurzsichtig, sich bei mathematischen, wissenschaftlichen und technischen Innovationen auf den Kriegskeynesianismus zu verlassen. (C) Schließlich zeigt die Triade, dass tatsächlich auch in Rüstung und Krieg große Leistungen vollbracht werden können, die weit über befohlene Taten reichen, aber kaum auf Kommando: Die neue Qualität hochtechnologischer Rüstung und Kriegsführung erfordert nämlich eine neuen Charakter der Übereinstimmung. Ohne Übereinstimmung werden bestimmt nicht alle Technologie-Transfer-Träume des Kriegskeynesianismus aufgehen. B. BRECHT hat die Renitenz bei unzureichender Übereinstimmung in seinem Svendborger Gedicht *Abbau des Schiffes Oskawa durch die Mannschaft* [Gesammelte Gedichte, Band 2, S. 670-673] eindringlich gefeiert. Siehe auch K.M. BAVNBEK & B. ROTH, *Krigens nye kvalitet – offentlighedens nye karakter*, Roskilde 1983, 126 Seiten. Wir schließen daher aus unseren Erkenntnissen über die WW2-Triade, dass HERAKLITS' *Krieg ist der Vater aller und der König aller; einige hat er zu Göttern und einige zu Menschen bestimmt, einige hat er zu Sklaven und einige zu Freien gemacht* zwar viel Richtiges und Wichtiges enthält, aber eine metaphysische Übertreibung darstellt.

2.2 Das neue Modellierungsparadigma der *Vielzahl von Zeitskalen* vs. *Ziele der Einfachheit*. Eine weitere metaphysische Übertreibung ist die vor allem unter Physikern verbreitete Behauptung, dass Einfachheit eines der Qualitätskriterien für eine gute mathematische Modellierung ist. Die Triade erzählt eine andere Geschichte: Durchbrüche bei den im 2. Weltkrieg behandelten komplexen Systemen ergaben sich nicht durch Abstraktion und Vereinfachung, sondern im Gegenteil durch die Anschaulichkeit und Transparenz der numerischen Detailmodellierung und die Einführung sinnvoller neuer Modell-Konstrukte, die zuvor nicht betrachtet wurden, aber beobachtbar oder erkenntnistheoretisch sinnvoll waren. Wie das in allen neueren Modellierungen der Geosphäre, der Biosphäre und der Anthroposphäre tatsächlich zu einer Erfolgsgeschichte wurde, ist in den jüngsten Bänden [dieser Autor et al. (eds.), *Multiplicity of Times Scales in Complex Systems I, II*, Springer 2024] dokumentiert. Siehe auch F.W. TAYLORS verwandte Unterscheidung zwischen Standardisierung und Vereinfachung der Arbeit: "*Standardisierung* bezieht sich auf den

Prozess der Festlegung von Standards für jede geschäftliche Tätigkeit. Dabei kann es sich um die Standardisierung von Verfahren, Rohstoffen, Zeit, Produkten, Maschinen, Methoden oder Arbeitsbedingungen handeln. Diese Standards sind die Maßstäbe, die bei der Produktion eingehalten werden müssen." In der wissenschaftlichen Forschung, so möchte ich hinzufügen, ist dies der schwierige und kreative Teil, nämlich Gleichungen und Koeffizienten in Bezug auf die Theorie zu wählen oder zu konstruieren. Er fährt fort: "Die *Vereinfachung* zielt darauf ab, überflüssige Sorten, Größen und Dimensionen zu eliminieren, während die Standardisierung bedeutet, neue Sorten anstelle der bestehenden zu entwickeln." [«*Standardization* refers to the process of setting standards for every business activity. It can be standardization of process, raw material, time, product, machinery, methods or working conditions. These standards are the benchmarks which must be adhered to during production." In scientific research, I may add, this is the hard and creative part, namely, to elect or construct equations and coefficients in relation to theory. He continues: "*Simplification* aims at eliminating superfluous varieties, sizes and dimensions while standardization implies devising new varieties instead of the existing ones.» in: *The Principles of Scientific Management*, Harper & Brothers 1911]. In ähnlicher Weise können sich, grob gesagt, bei der mathematischen Modellierung ohne konstruktive und kreative Standardisierung auch die raffiniertesten Vereinfachungen als irreführend erweisen.

2.3 Datengestützte vs. theoriebasierte *(Mechanismen)* Modellierung. Seit I. KANT sind wir uns in den Wissenschaften und in der geistes- und wirtschaftswissenschaftlichen Forschung bewusst, dass eine sinnvolle Sammlung von Daten eine explizite oder unbewusste Vorstellung oder Theorie von dem, was wir beobachten, voraussetzt. Folglich hat YU. I. MANIN in seiner *Mathematik und Physik*, Birkhäuser 1981, und, unabhängig davon, J.H. JENSEN et al. in *Innermathematical vs. extramathematical obstructions to model credibility* in: X. Avula (Hrsg.), *Mathematical Modelling in Science and Technology*, Pergamon Press 1984, New York, S. 62-65, den erkenntnistheoretischen Unterschied zwischen theoriegeleiteten mathematischen Modellen (heute auch *mechanismusbasiert* genannt) und rein datengetriebenen Ad-hoc-Modellen wie dem alten *ptolemäischen Planetenmodell* (PPM) und dem heutigen *Standardmodell der Teilchenphysik* (SM) herausgearbeitet. Aus pragmatischer Sicht besteht der Hauptunterschied darin, dass die mechanismusbasierte Modellierung mehr Einblick in die zugrunde liegende Dynamik gibt als die datenbasierte Modellierung. Es wäre jedoch eine weitere metaphysische Übertreibung, der mechanismusbasierten Modellierung eine höhere *Glaubwürdigkeit* als der datenbasierten Modellierung zuzusprechen: Für nautische Zwecke war z. B. das PPM eine Zeit lang zuverlässiger als das KEPLERSCHE Modell, und die Vorhersage des HIGGS-Teilchens durch das SM wurde 2011-2013 durch den *Large Hadron Collider* bestätigt. Darüber hinaus gehören, wie oben gezeigt, die äußerst zuverlässigen und variablen Computermethoden, die ihren Ursprung in der Digitalisierung des Zweiten Weltkriegs haben, zu den Mitteln, die eine rein technische und statistische Analyse von Daten relevanter machen können als eine auf Mechanismen basierende Modellierung. Diese Einsicht überraschte N. WIENER 1942, als er anwendbare rein statistische Methoden für den Luftkampf entwickeln konnte, die allein auf schnellen Berechnungen von Autokorrelationen und ohne jeden Bezug zur Newtonschen Mechanik beruhten. Man beachte, dass in Medizin, Ökonomie, Verkehrsplanung und in anderen Bereichen die *Datenerhebung* der teuerste Teil der mathematischen Modellierung ist. Oft wird der Modellierer vor der Erhebung nicht gefragt, sondern muss sich mit den vorhandenen Daten begnügen.

2.4 *Reale*, natürliche und anthropogene vs. *erkenntnistheoretische Konzepte*? Bei mathematischen Anwendungen können wir die ultimative Wahrheit in drei verschiedenen

Richtungen finden: Empiriker in einer überzeugenden *Beschreibung*, Rationalisten in einer falsifizierbaren *Vorhersage* und "Pragmatiker", wie G. VICO, C.S. PEIRCE und ich, in der *Vorschrift* eines funktionierenden Wirkens. Für mich lag deshalb die säkulare Bedeutung der Triade in der *Vorgabe eines funktionierenden Designs*, *Verum esse ipsum factum* (etwas mehrdeutig: "Wahrheit ist das selbst Gemachte"), das von VICO geprägt wurde [*De Antiquissima Italorum Sapientia ex Linguae Originibus Eruenda Libri Tres* (On the Most Ancient Wisdom of the Italians Unearthed from the Origins of the Latin Language) 1710, Palmer, L. M., trans. Ithaca: Cornell UP, 1988]. Meine bevorzugte Lesart ist die Behauptung, dass wir nur Dinge vollständig verstehen können, die wir selbst gemacht haben. Mir scheint, dass von VICOS Ansichten nur seine Wissenschaftsskepsis Bestand hat, während seine Industriefreundlichkeit angesichts des anthropogenen, von Menschenhand geschaffenen Klimawandels und der ebenso von Menschenhand geschaffenen Atombombe mit stark verkürzter Reaktionszeit (aufgrund der fortschreitenden Stationierung amerikanischer nuklearer Trägersysteme und der russischen Entwicklung hypersonischer ballistischer Raketen) überholt ist: Ganz offensichtlich verstehen wir diese Artefakte nur unzureichend und beherrschen sie deshalb nicht.

Zurück zur Mathematik: Auch hier können wir Unterschiede im Ursprung und Charakter der verwendeten Konzepte und Methoden feststellen: Mit VICO und PEIRCE bin ich der Meinung, dass unser Hören auf den *gesunden Menschenverstand*, der in Hunderttausenden von Jahren menschlicher Entwicklung gereift ist, der wichtigste Ansatz ist. Das gilt für die Triade, aber nicht vollständig. Die grundlegenden Ideen der Atom- und Teilchenphysik, der Neutronenstrahlung sowie der Kernspaltung und -fusion waren nicht mit dem gesunden Menschenverstand zu erfassen, und es bedurfte eines kontrollierten Einsatzes des erweiterten, nicht ganz natürlichen und nicht ganz anthropomorphen Zeichensystems der Mathematik und der Physik. Das Gleiche gilt für die Virtuosität der Digitalisierung: Ohne entwickelte Gruppen- und Körpertheorie, Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie wären Public-Key-Kryptographie, fehlerkorrigierenden Codes, Kompression und das numerische Erkennen von Angesichten und anderen Mustern schwer vorstellbar gewesen.

In diesem Sinne markiert die Triade einen neuen Schritt in der Mathematisierung der realen Welt.

Haftungsausschluss. Es hat 250 Jahre gedauert, von den algebraischen Berechnungen von BOMBELLI über EULER, D'ALEMBERT und GAUSS bis zur komplexen Dynamik von MANDELBROT und MILNOR, um die Konzepte, Methoden und die Bedeutung der komplexen Zahlen vollständig zu verstehen. Es dauerte 70 Jahre, bis die Entdeckung der DNA in der historischen Demografie, der Kriminologie und mit den mRNA-Impfstoffen in der öffentlichen Gesundheit breite gesellschaftliche Anwendung fand. Es dauerte 20 Jahre, bis der Transistor von der esoterischen Weltraumforschung zur Allgegenwart von Mobiltelefonen gelangte. Als H. KISSINGER 1972 CHU ENLAI nach seiner Einschätzung der *Großen Französischen Revolution* fragte, soll CHU ENLAI geantwortet haben: "Ist es nicht zu früh für eine faire und umfassende Bewertung?"

In ähnlicher Weise kann man bezweifeln, ob die 80 Jahre seit dem Zweiten Weltkrieg ausreichen, um die Rolle der Triade als *Trägerin* der "tiefen" modernen mathematischen Modellierung mit ihren vielfachen Ebenen zu beweisen, wie ich behaupte? Wie weit stimmt es, dass die traditionelle professionelle Eleganz mathematischer Modellierung teilweise schon durch die rohe Gewalt von Suchmaschinen und "künstlicher *Eleganz* (KI)" ersetzt wurde? Oder sollten wir die Rolle der Triade besser und bescheidener als *Taxifahrer* wahrnehmen, d.h. als einen Akteur, der eine immense Vielfalt wertvoller früherer Errungenschaften auf eine computergestützte produktive Weise bloß zusammenbrachte? Die Zeit wird es zeigen.

Danksagung. Der größte Teil dieses Berichts wurde im Gespräch mit dem dänischen Mathematik- und Wissenschaftshistoriker Jens Høyrup verfasst.