Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte

xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv

xv xv

XV. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

xv xv

xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv--xv

Längs- und Querschnitte

Vertical and horizontal cross sections

Tagung, 12. Juni bis 18. Juni 2018, Miesenbach (Niederösterreich)

Kurzfassungen der Vorträge

Herausgeber:
Dr. Christa Binder *e-mail:* `christa.binder@tuwien.ac.at`

Institut für Analyis und Scientific Computing
Technische Universität Wien

Danksagung:
Ohne die großzügige Hilfe der folgenden Institutionen
wäre die Durchführung der Tagung nicht möglich gewesen.
Dafür herzlichen Dank.

International Commission on the History of Mathematics (ICHM)
Amt der Niederösterreichischen Landesregierung, Abteilung Kultur und Wissenschaft

Photos, Layout und Druckvorlage: Peter Schmitt

KULTUR NIEDERÖSTERREICH

Gefördert durch das Land Niederösterreich.

von links nach rechts (↑ weist auf die hintere Reihe):

Alexander Odefey, Thomas Krohn
Herwig Säckl, ↑Nada Razpet, Lea Dasenbrock, Winfried Mahler, Michael Zarichnyi
Waltraud Voss, Silvia Schöneburg-Lehnert, Martina Bečvářová
Christa Binder, Renate Tobies, ↑Annette Vogt, Evi Fischer
Stefan Deschauer, Rita Meyer-Spasche, Jasna Fempl Madjarević, Hans Fischer

von links nach rechts (↑ weist auf die hintere Reihe):

Wiesław Wójcik, Karl-Heinz Schlote, Stanisław Domoradski
Gerlinde Faustmann, Danuta Ciesielska, Gabriela Besler
Peter Ullrich
Harald Gropp, Karl Kleine
Katica Hedrih, Alfred Holl, Marko Razpet

Inhalt

Gruppenbild 2 / Programm 5 / Beiträge 7 / Teilnehmer 213

Korrigierter Beitrag von Stefan Deschauer (Band XIV, 224–230): 207

Zum ersten Mal dabei:

Gabriela Besler 190 / Katica Hedrih 177 / Wolfgang Herfort 92

Weitere Bilder:

Winfried Mahler 206 / Alexander Odefey 145 / Reinhard Siegmund-Schultze 74

bei Vorträgen: 216 / am Abend: 59 und 4

Das schon für 2020 geplante Symposion mußte wegen der Corona-Pandemie abgesagt werden und konnte auch 2021 wegen der anhaltenden Unsicherheiten (Reisemöglichkeiten) nicht nachgeholt werden.

Auf `https://www.mat.univie.ac.at/~schmitt/OeSGdM/` steht der vorliegende Band sowohl in der Printversion als auch in einer erweiterten Version (mit internen Links, mehr Farbe, und einem Anhang mit Langfassungen) ebenso zur Verfügung wie pdf-Dateien aller bisherigen Symposien.

am Abend: Christa Binder und Annette Vogt

P R O G R A M M

Montag, 13. Juni 2022, vormittag *(Christa Binder)*

Reinhard Siegmund-Schultze (Kristiansand) 7
Ein neuer Blick auf die beiden Pyramidevolumenformeln 1850 v.u.Z.

Marko Razpet (Ljubljana) 15
Die Kampyle des Eudoxos

Nada Razpet (Ljubljana) 23
the arbelos

Montag, 13. Juni 2022, nachmittag *(Gerlinde Faustmann)*

Jacques Sesiano (Lausanne) 31
Erste Erscheinung magischer Kuben (Khazini, 13. Jhdt).

Karl Kleine (Jena) 41
Robert Nelting

Harald Gropp (Heidelberg) 52
Back to the roots of graph theory

Dienstag, 14. Juni 2022, vormittag *(Karl-Heinz Schlote)*

Lea Dasenbrock (Leipzig) 60
Die Algebra des Johannes Volmars im Vergleich zu zeitgenössischen Quellen

Stefan Deschauer (Dresden) 68
Die Regula Inventionis bei Johannes Widmann von Eger (1489)

Alfred Holl (Nürnberg) 75
Überblick zur Regensburger Mathematiker-Familie Kaukol
und ihren Werken im 17. Jahrhundert

Dienstag, 14. Juni 2022, nachmittag

Ausflug:
Gutenstein: Waldbauernmuseum
Mariahilfberg: Wallfahrtskirche

Mittwoch, 15. Juni 2022, vormittag *(Herwig Säckl)*

Hans Fischer (Eichstätt) 85
Dirichlets "Lehre von den Reihen" aus dem WS 1840/41

Wolfgang Herfort (Wien) 92
Die eingespannte Saite, Euler – Hilbert – Soboleff

Wiesław Wójcik (Polen)
From Bernard Riemann to the Chicago school of mathematical analysis

Mittwoch, 15. Juni 2022, nachmittag *(Herwig Säckl)*

Thomas Krohn (Leipzig) & Silvia Schöneburg-Lehnert (Leipzig) 93
Mathematikunterricht in Mitteldeutschland
von der Weimarer Republik bis zur Entstehung der DDR

Annette Vogt (Berlin) 100
Female plenary speakers on the International Mathematical Congresses (1897-2018)
– a long-durée investigation

Mittwoch, 15. Juni 2022, abend

Renate Tobies & Winfried Mahler (Jena)
kulturell-historischer Beitrag über Krakau und Warschau

Donnerstag, 16. Juni 2022, vormittag *(Karl-Heinz Schlote)*

DANUTA CIESIELSKA (CRACOW) 107
Polish students of Felix Klein

MARTINA BEČVÁŘOVÁ (PRAG) 111
Seligmann Kantor from Sobědruhy

PETER ULLRICH (KOBLENZ) 121
Die Mathematik WILHELM WIRTINGER's (1865-1945)
– nicht nur ein Differentialkalkül für Funktionen komplexer Veränderlicher

Donnerstag, 16. Juni 2022, nachmittag *(Silvia Schöneburg-Lehnert)*

ALEXANDER ODEFEY (HAMBURG) 131
Einige neue Erkenntnisse zur Biographie Emil Artins

RITA MEYER-SPASCHE (MÜNCHEN) 136
Zur Bedeutung von Eberhard Hopf (1902-1983) für Astronomie und Astrophysik
– On the Importance of Eberhard Hopf (1902-1983) for Astronomy and Astrophysics

STANISŁAW DOMORADZKI (RZESZÓW) & MICHAEL ZARICHNYI (RZESZÓW) 146
Lwów School of Mathematics in the period of Second World War

Donnerstag, 16. Juni 2022, abend

DISKUSSION

Freitag, 17. Juni 2022, vormittag *(Peter Schmitt)*

RENATE TOBIES (JENA) 150
Zur Position des mathematischen Assistenten in Deutschland
– längs und quer beleuchtet

KATICA HEDRIH (BELGRAD) 160
Running with Nonlinear Dynamics
– The memory of scientist Hans Troger (March 11, 1943 – February 22, 2010)

JASNA FEMPL MADJAREVIĆ (BELGRAD) 172
Science through Love – Love through Science

Freitag, 17. Juni 2022, nachmittag *(Christa Binder)*

WALTRAUD VOSS (DRESDEN) 178
Drei Dresdner Höhere Lehrer: Johann Vieth von Golzenau (1856-1938),
Martin Gebhardt (1868-1946), Erich Günther (1886-1951)

GABRIELA BESLER (KATOWICE) 185
Collaboration of Polish Logicians with Heinrich Scholz in the years 1928-1956

Freitag, 17. Juni 2022, abend

HERWIG SÄCKL (REGENSBURG)
Der Besuch – eine autobiographisch-fiktionale Skizze mit gemischter Österreichverehrung

Schriftliche Beiträge

PHILIPPE SÉGUIN (NANCY) 191
1948 – Das Denken in Strukturen in Lyrik und Mathematik:
Kurt Reidemeisters Mallarmé-Übersetzung und Nicolas Bourbakis Architektur

CHRISTINA PHILI (ATHEN) 196
Cyparissos Stephanos' unsuccessful attempt to translate Erlanger Programm

STEFAN DESCHAUER (= Band XIV, 224–230, korr.Druck) 207
Originelle und kuriose Aufgaben der Unterhaltungsmathematik aus dem 16. Jahrhundert

Weitere Teilnehmer:

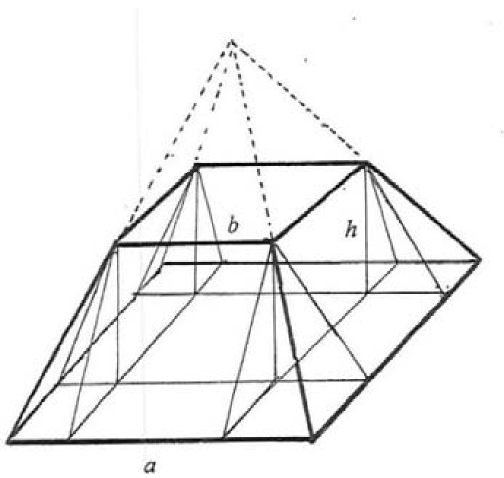
Bernhard Beham (Wien), Gerlinde Faustmann (Wiener Neustadt), Evi Fischer (Eichstätt), Karl-Heinz Schlote (Altenburg), Peter Schmitt (Wien), Franz Vrabec (Wien)

Ein neuer Blick auf die beiden ägyptischen Pyramidevolumenformeln 1850 v.u.Z.

Reinhard Siegmund-Schultze (Universitetet i Agder, Kristiansand, Norwegen)

Ägyptologen und Mathematikhistoriker (Struve, Gunn, Peet, Neugebauer, Vogel u.a.) haben um 1930 überzeugend gezeigt, dass das im Moskauer Papyrus als Problem 14 angegebene Zahlenbeispiel als Formel für das Volumen eines symmetrischen oder unsymmetrischen Pyramidenstumpfes angesehen werden kann (ST steht für „Stumpf“).

$$(F_{\mathrm{ST}}) \qquad V_{\mathrm{ST}} = \frac{h}{3}\,(a^2 + ab + b^2)$$



Einige dieser Historiker haben Vermutungen darüber angestellt, welche Überlegungen die Ägypter zu dieser völlig exakten Formel geführt haben könnten. Aus nicht ganz geklärten, aber im folgenden andiskutierten Gründen hat keiner von ihnen die Möglichkeit erörtert, dass die Ägypter drei identische Exemplare eines symmetrischen Pyramidenstumpfes zerschnitten und daraus drei von parallelen

Rechtecken begrenzte „Boxen“ (Parallelepipede) zusammengesetzt haben könnten, deren Volumen einfach zu berechnen ist (s. nächstes Bild unten). Diese Interpretation wird eigentlich durch die Formel nahegelegt. Die einzige Schwierigkeit besteht darin, die 12 unsymmetrischen Eckpyramiden der 3 Stümpfe als volumengleich mit 4 kleineren Eckboxen zu erkennen, die die größte der drei in der Formel stehenden Boxen, nämlich ha^2 vervollständigen würden.

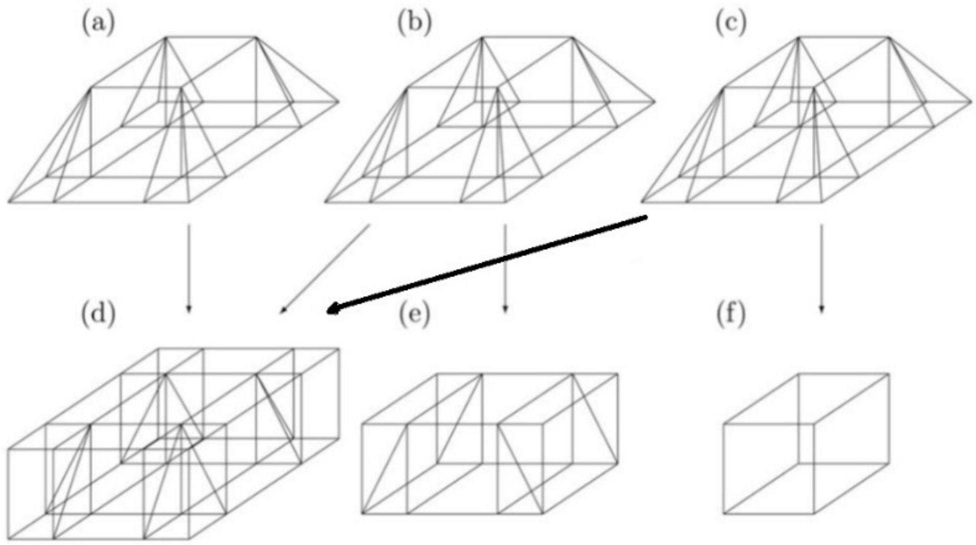
Etwa 2000 Jahre nach den Ägyptern hat der Chinese Liu Hui fast genau dies getan, nur dass er in seinem Beweis derselben, in den „Neun Kapiteln“ stehenden Formel gewisse „Blöcke“ benutzte, die einfache Teile von Würfeln sind. Da er aber zusätzlich eine Methode hatte (die den Ägyptern vermutlich zu kompliziert gewesen wäre), das Volumen der Eckpyramiden auch dann zu bestimmen, wenn sie nicht in Würfeln einbeschrieben sind [$(a$-$b)/2\neq h$] kann man seinen Beweis als allgemeingültig ansehen.

Meine Arbeit ist wesentlich stimuliert worden durch einen Artikel des singapurisch-amerikanischen Mathematikdidaktikers Paul Shutler (2009). Dieser schlägt dort einen vermutlich auch den Ägyptern zugänglichen intuitiven, doch relativ elementar mathematisch begründbaren Beweis dafür vor, dass das Volumen einer *vollständigen* ägyptischen Pyramide ein Drittel des Volumens des auf demselben Quadrat mit der derselben Höhe errichteten Kuboids, insbesondere also der oben erwähnten kleineren Eckbox, beträgt. Dies ist natürlich ein Spezialfall der Formel für den Pyramidenstumpf mit der Seitenlänge $b = 0$ für das Deckquadrat. Ich meine diese, allerdings implizite Formel, wenn ich im Titel meines Beitrages von mehreren ägyptischen Pyramidevolumenformeln spreche. Ihr Beweis erfordert im weitesten Sinne „infinitesimale Methoden”, wie sie, wie oben angedeutet, in relativ expliziter Form auch Liu Hui benützt hat. Diese Formel könnte aber auch als erfahrungsbasiertes Axiom – als Folge der praktischen Ingenieurarbeit an den

Pyramiden oder durch Wiegen von Modellen – angesehen und ohne Beweis angenommen werden.

In der folgenden Kurzfassung meines Vortrages möchte ich eine gewisse Vorstellung von beiden vorgeschlagenen hypothetischen ägyptischen Beweisen geben, dem speziellen für die vollständige Pyramide, der von Shutler angeregt wurde, und dem allgemeinen für den Pyramidenstumpf in der Art von Liu Hui, den Shutler ebenfalls nachahmt. Eine Langfassung von 38 Seiten habe ich auf <Arxiv.org> gespeichert. Eine englische Version der Kurzfassung erscheint demnächst in *British Journal for the History of Mathematics.*

Ich beginne mit einem Diagramm aus Shutler (2009, S. 349), das die hypothetische ägyptische und zugleich wirkliche chinesische Beweismethode, basierend auf der Umgruppierung der Teile von drei identischen symmetrischen Pyramidenstümpfen, gut visualisiert:



Ich habe dem Diagramm den stark gezogenen Pfeil von Pyramidenstumpf (c) hin zur größten Box (d) mit Volumen ha^2 hinzugefügt, der einen irrtümlichen Pfeil bei Shutler von (c) zu (e), d.h. der mittleren Box mit Volumen abh, ersetzt.

Wie die eingangs genannten „Historiker um 1930" einheitlich annehmen, lässt sich ein einzelner Pyramidenstumpf (bzw. ein Modell desselben) leicht und anschaulich in *eine* zentrale Box, die im letzten Bild mit (f) bezeichnet wird, in *vier* identische Prismen (Rampen) und in *vier* schiefe Eckpyramiden zerlegen. Dies entspricht in algebraischer Schreibweise (die wir den Ägyptern natürlich nicht unterstellen wollen) der folgenden Formel:

$$(F_{\mathrm{STA}}) \qquad V_{\mathrm{STA}} = h\,b^2 + 4\,b\,\frac{(a-b)}{2}\,\frac{h}{2} + 4\,\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\left(\frac{h}{3}\right) = hab + \frac{h}{3}\,(a\text{-}b)^2$$

Dies stimmt zunächst mit der Zerlegung der drei Stümpfe überein, die in Shutlers Diagram unterstellt wird. Nun lässt sich aber aus diesen 9 Teilfiguren ebenfalls rein intuitiv, also ohne Algebra, zunächst die zentrale Box mit den 4 Prismen zu einer Box mit dem Volumen *abh* zusammensetzen, was im letzten Bild mit dem Pfeil von (b) zu (e) bezeichnet worden ist. Ferner lassen sich die vier schiefen Eckpyramiden mit Grundquadrat $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ anschaulich elementar zu einer symmetrischen Pyramide mit Basisquadrat $(a\text{-}b)^2$ zusammenschieben, was insgesamt die rechte Seite der Gleichung ergibt. Damit ist aber der Weg zu den drei Boxen in Shutlers Bild verbaut. Ich bezeichne dies daher als „alternative Volumenformel F_{STA}", da sie nicht zum Beweis der Formel im Moskauer Papyrus führt. Sie ist aber nicht „ägyptisch" sondern, nur eine einleuchtende, von Historikern angenommene Formel.

Offen bleibt bei der geometrischen Herleitung beider Formeln, der historischen und der alternativen, ob man das Volumen der symmetrischen Pyramide wirklich als ein Drittel der Box $h\,(a\text{-}b)^2$ ansehen darf und wie die Ägypter dies möglicherweise theoretisch (also nicht nur durch Manipulierung mit Modellen) eingesehen haben könnten.

Hier kommt nun die brillante Idee von Paul Shutler ins Spiel. Er sieht, dass im ursprünglichen Zahlenbeispiel des Moskauer Papyrus das Deckquadrat im Pyramidenstumpf die halbe Seitenlänge des Grundquadrates (a=4, b=2) hat. Damit wird aber elementar anschaulich die im Stumpf fehlende Toppyramide (s. erstes Bild) kongruent zu der aus den vier schiefen Eckpyramiden zusammengesetzten. Zugleich hat aber wegen $a = 2b$ die vervollständigte Pyramide mit der Höhe $2h$ das achtfache Volumen der ihr geometrisch ähnlichen Toppyramide, was aus einfachen anschaulichen Argumenten (Ausfüllung beider Pyramiden mit der gleichen Anzahl immer kleiner werdenden identischen Würfeln im Volumenverhältnis 1:8) folgt. Somit hat man zwei „Gleichungen“ gewonnen, verstanden als reine geometrische Identitäten, aus denen man die allgemeine Volumenformel für die volle Pyramide ableiten kann, was ich im Titel die „zweite Pyramidenvolumenformel“ genannt habe. Shutler meint nun, dass die Wahl des Zahlenbeispiels im Moskauer Papyrus darauf hindeutet, dass die Ägypter genau diesen Gedanken gehabt haben. Wenn dies auch vielleicht nur Spekulation – allerdings eine fruchtbare – ist, so scheint mir dies unabhängig von seiner Wahrheit ein pädagogisch sehr nützlicher Gedanke zu sein, der auch zur Verwendung von Geschichte im Mathematikunterricht beitragen könnte. Man könnte auch noch darüber spekulieren, wie die Ägypter auf ihre klassische Formel gekommen sind und warum sie sich nicht mit der einfacheren ”alternativen Volumenformel” F_{STA} begnügt und diese in den Papyrus geschrieben haben. Meine Vermutung würde in die Richtung einer ästhetischen und mathematischen Denkweise gehen, die man vielleicht schon bei diesen Vorfahren unserer Mathematik voraussetzen kann.

Ich will hier (anders als im vollständigen Manuskript) nicht erneut auf Liu Huis Beweis eingehen; dieser ist zuletzt 2004 in der französischen Edition von Karine Chemla und Guo Shuchun ausführlich dargestellt und kommentiert worden.

Allerdings ist Liu Huis Vorgehen für eine informierte Spekulation über einen möglichen ägyptischen Beweis lehrreich. Dies gilt ganz besonders in Hinblick auf die „alternative Volumenformel“ (F_{STA}). Liu Hui leitet diese Formel *zusätzlich* ab, aber er begnügt sich damit und benützt diese keineswegs dazu, die klassische Formel (F_{ST}) noch einmal abzuleiten.

Dies führt uns direkt zurück zu den „Historikern um 1930“, die im ersten Schritt zu dieser alternativen Formel F_{STA} gelangt waren, die sich wohlgemerkt nur auf *einen* Pyramidenstumpf bezieht. Sie haben nämlich anschließend darüber gegrübelt, wie man aus dieser Formel den Weg zur allgemeinen Volumenformel (F_{ST}) für den Pyramidenstumpf finden könnte, die im Moskauer Papyrus steht. Natürlich ist keiner dieser Historiker so naiv gewesen, in der Formel F_{STA} einfach $(a-b)^2$ durch $a^2 - 2ab + b^2$ zu ersetzen, was unmittelbar zu (F_{ST}) führen würde. Stattdessen sind jene Historiker nun im Wesentlichen darauf verfallen, unabhängig von der dreidimensionalen Intuition nach einer aus (F_{STA}) ableitbaren Grundfläche zu suchen, die mit der Höhe h multipliziert genau die erwünschte Formel (F_{ST}) erzeugen würde. Diese Historiker sind dabei m.E. ihrer von Euklid erworbenen Gewohnheit erlegen, geometrische Probleme zunächst als auf ebener Geometrie basierende anzusehen, wodurch der ursprüngliche und intuitive, pädagogisch sinnvolle Zugang zuweilen verstellt werden kann. Diese wäre dann eine Art „geometrische Algebra“ in einem gegenüber der bekannten Diskussion leicht verallgemeinerten Sinne, nämlich als unanschauliche Manipulierung mit ebenen Figuren. Jedenfalls geht die mögliche intuitive Deutung der Formel (F_{ST}) als Umwandlung von drei identischen Stümpfen dabei verloren.

Abschließend ein Wort zu unseren modernen, methologisch so umsichtigen Historikern der ägyptischen Mathematik. Diese scheinen nicht erwogen zu haben, die erst in den 1970er Jahren von Donald Wagner entdeckte chinesische

Beweismethode als potentielle ägyptische Methode anzuerkennen oder wenigstens diese Möglichkeit zu diskutieren. In modernen Büchern über ägyptische Mathematik wird die chinesische Mathematik überhaupt nicht erwähnt, allerdings auch keine anderen Kulturen (Imhausen 2016). Shutler, der kein Mathematikhistoriker ist, erwähnt die chinesische Methode wohl aus diesem Grunde ebenfalls nicht, obwohl ich annehme, dass er sie im Unterbewusstsein gekannt hat und sie so wiedererfunden hat. Die Ursache für die Zurückhaltung moderner Ägyptologen scheint mir gerade in der geschilderten methodologischen Unbekümmertheit jener Historiker um 1930 zu liegen. Deren Versuche hypothetischer Rekonstruktion eines ägyptischen Beweises können ja in gewisser Weise als „präsentistisch" bezeichnet werden, nämlich als wenigstens von Euklid, teilweise auch von modernem, algebraischem Denken inspiriert. Da eine solche „präsentistische" Sicht auf die Geschichte, die unter anderem von Van der Waerden (1983) später auf die Spitze getrieben wurde, mittlerweile diskreditiert ist, ist wohl bei einigen modernen Historikern übertriebene methodologische Vorsicht eingezogen. Dadurch ist aber meiner Meinung nach eine Chance verpasst worden, das große intuitive und pädagogische Potential der ägyptischen (und chinesischen) Formel des Pyramidenstumpfvolumens auszunutzen. Bei aller gebotenen methodologischen Vorsicht bin ich der Ansicht, dass eine Diskussion eines hypothetischen ägyptischen Beweises durchaus sinnvoll ist, zumal sie sich auf eine solche prominente historische Vergleichsinstanz wie Liu Hui stützen kann, dem ebenso wie den Ägyptern keine eigentlichen algebraischen Methoden zur Verfügung standen. Natürlich muss dabei betont werden, dass man mit einer solchen Diskussion nicht das Problem lösen kann, was das wirkliche Vorgehen der alten Ägypter gewesen ist.

Referierte Literatur:

Chemla, Karine und Guo Shuchun (eds. 2004): *Les neuf chapitres: Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires. Édition critique bilingue traduite, présentée et annotée*, Paris: Dunod.

Imhausen, A. (2016): *Egyptian Mathematics. A Contextual History*, Princeton University Press.

Neugebauer, O. (1933): Pyramidenstumpf-Volumen in der vorgriechischen Mathematik, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Astronomie und Physik. Abteilung B. Studien, Vol. 2. Berlin: Springer, 347–51.

Shutler, P. (2009): The problem of the pyramid or Egyptian mathematics from a postmodern perspective, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 40, 341-352.

Waerden, B.L.v.d. (1983): *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer.

Wagner, D. B. (1979): An Ancient Chinese Derivation of the Volume of a Pyramid: Liu Hui, Third Century A.D., *Historia Mathematica* 6, 164-188.

Die Kampyle des Eudoxos

Marko Razpet

Pädagogische Fakultät

Universität in Ljubljana

Zusammenfassung

Die ebene Kurve Kampyle des Eudoxos ist bei der Lösung des alten Problems der Würfelverdoppelung (Delisches Problem) hilfreich. Wir werden zeigen, wie man die einzelnen Punkte der Kampyle mit Hilfe eines unmarkierten Lineals und eines Zirkels konstruiert. Es werden einige Eigenschaften der Kampyle nachgewiesen und eine approximative Methode der Würfelverdoppelung wird ganz genau begründet.

Einleitung

Eudoxos von Knidos (408-355 v. Chr.) war ein antiker griechischer Mathematiker und Astronom. Er war Schüler von Archytas in Tarent und von Platon an der Akademie in Athen (mehr davon z. B. in [1]). Er besuchte auch Sizilien und Ägypten. Später gründete er seine eigene Schule in Kyzikos am Marmarameer. Sein Beitrag zur Theorie der Verhältnisse von inkommensurablen Größen, die Euklid in seinen Elementen verwendete, ist wichtig.

In der Astronomie vertrat Eudoxos ein geozentrisches Weltsystem und führte ein System von ineinander drehenden konzentrischen Sphären ein. In diesem Zusammenhang führte er eine weitere Kurve ein, die wir als "Hippopede des Eudoxos" (die Pferdefessel) kennen.

Das Problem der Würfelverdoppelung wurde einzigartig mit einem Torus, einem Zylinder und einem Kegel von dem Pythagoräer, Wissenschaftler, Staatsmann und Strategos Archytas von Tarent in Süditalien (geboren zwischen 435 und 410, gestorben zwischen 360 und 350 v. Chr.) gelöst. Mit der Anlehnung an Archytas und mit der Verwendung der heutigen Methoden und

Notationen suchen wir in dem räumlichen kartesischen Koordinatensystem $Oxyz$ einen Schnittpunkt des Horntorus $(x^2+y^2+z^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$ (mit äußerem Äquatorradius $2a > 0$ und innerem Äquatorradius 0), des Zylinders $x^2+y^2 = 2ax$ und des Kegels $x^2 = y^2+z^2$. Wenn wir die Gleichung des Kegels in der Form $2x^2 = x^2+y^2+z^2$ schreiben und diese in der Gleichung des Torus berücksichtigen, so erhalten wir die Gleichung $a^2(x^2+y^2) = x^4$. Wir benützen noch die Gleichung des Zylinders und erhalten eine Gleichung mit einer Unbekannten: $x^4 = 2a^3x$. Ihre reellen Lösungen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = a\sqrt[3]{2}$. Die positive Lösung ist die Kante des Würfels, die das doppelte Volumen hat als der Würfel mit der Kante a. Damit ist das Problem der Würfelverdoppelung gelöst.

Platon war mit einer solchen Lösung natürlich nicht zufrieden: sie wurde nicht euklidisch, d. h. mit unmarkiertem Lineal und Zirkel, und nicht in einer Ebene ausgeführt.

Vielleicht hat Eudoxos die räumliche Lösung des Archytas für das Problem der Würfelverdoppelung zu einer Lösung in der Ebene vereinfacht, so dass er, wieder mit Verwendung unserer Notation, den Schnittpunkt der Kurve $a^2(x^2+y^2) = x^4$ mit dem Kreis $x^2+y^2 = 2ax$ im planaren kartesischen Koordinatensystem Oxy gefunden hat. Die Kurven schneiden sich im Koordinatenursprung O und noch in zwei zur x-Achse symmetrisch angeordneten Punkten, deren Abszisse gleich $a\sqrt[3]{2}$ ist. Diesmal gelang ihm die Lösung zumindest in einer Ebene zu finden, aber Platon war damit natürlich nicht begeistert.

Die Kurve mit der impliziten Gleichung $a^2(x^2+y^2) = x^4$ wurde als "Kampyle des Eudoxos" benannt. Der Koordinatenursprung $O(0,0)$ ist ihr isolierter Punkt, der in der Regel ignoriert wird. Die Kurve ist symmetrisch zu beiden Koordinatenachsen.

In der Tat gibt es keine Beweise dafür, dass Eudoxos die oben beschriebene Kurve tatsächlich verwendet hat. Wir wissen nur, dass es ihm gelang, die Würfelverdoppelung mit einer Kurve zu finden. Das Wort "Kampyle" stammt aus dem Griechischen: "kampýle" bedeutet "krumm", "gekrümmt" oder "gebogen".

Das Problem der Würfelverdoppelung oder das Delische Problem, benannt nach der griechischen Insel Delos im Ägäischen Meer, wurde von mehreren griechischen Geometern gelöst, die versuchten, spezielle Werkzeuge für diesen Zweck zu entwickeln. Platon wies den Schülern von Eudoxos, Archytas und Menaichmos zurecht, weil sie mit ihren Bemühungen alles verderben würden, was in Geometrie gut ist.

Konstruktion der Punkte der Kampyle des Eudoxos

Betrachten wir nun die folgende Konstruktion der Punkte einer Kurve. Im Punkt $D(a, 0)$, wobei $a > 0$, legen wir die senkrechte Gerade p auf die Abszissenachse. Auf p wählen wir einen Punkt A, den wir später entlang dieser Linie bewegen. Durch O und A ziehen wir eine Gerade q und durch A einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung O ist. Der Kreis schneidet die Abszissenachse in den Punkten B und B', die zum Punkt O symmetrisch sind. Durch B und B' konstruieren wir zur Abszissenachse senkrechte Geraden r und r', die q in den Punkten T und T' schneiden, die ebenfalls symmetrisch zu O sind. Wenn sich der Punkt A entlang der Linie p bewegt, so beschreiben T und T' eine zweiteilige Kurve, die sich als die Kampyle des Eudoxos auszeigt. Der Punkt T beschreibt ihren rechten und T' ihren linken Ast. Die Kurve ist offensichtlich symmetrisch zu beiden Koordinatenachsen (Abbildung 1).

In den Systemen der dynamischen Geometrie ist die Kampyle des Eudoxos die Ortslinie aller Punkte T und T' beim Verschieben des Punktes A entlang der Linie p in der oben beschriebenen euklidischen Konstruktion.

Die Gleichung des rechten Astes der resultierenden Kurve lässt sich am besten in Polarkoordinaten und danach implizit in orthogonalen kartesischen Koordinaten ausdrücken. Für den Polarwinkel φ nehmen wir den Steigungswinkel der Geraden q, und für den Polarradius ϱ den Abstand $|OT|$ (Abbil-

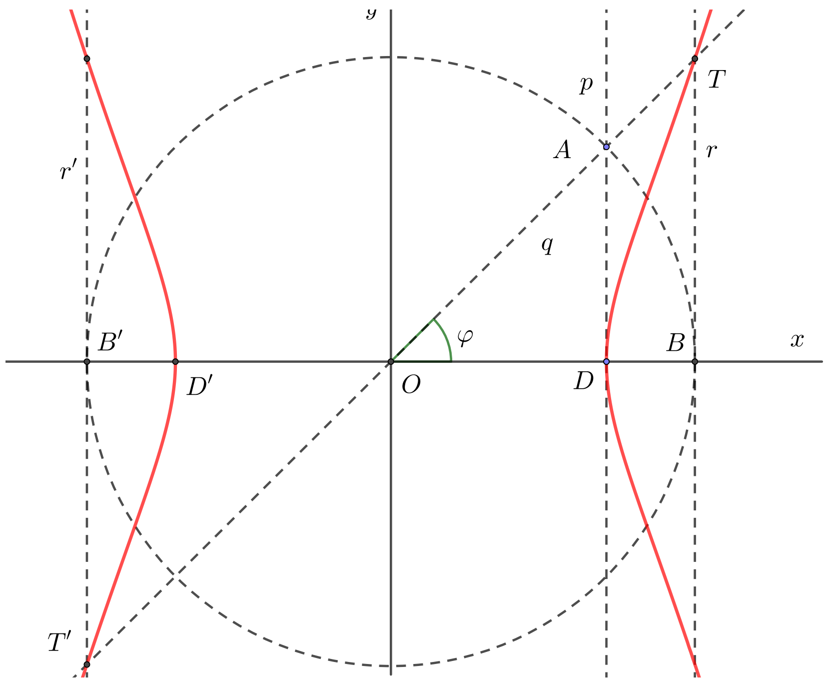


Abbildung 1: Konstruktion eines Punktes der Kampyle.

dung 1). Natürlich gelten die Beziehungen $|OA| = |OD|/\cos\varphi = a/\cos\varphi$ und $\varrho = |OT| = |OB|/\cos\varphi = |OA|/\cos\varphi$, von denen erhalten wir $\varrho = a/\cos^2\varphi$. Daher gilt unter der Bedingung $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ die folgende polare Gleichung des rechten Astes der Kurve:

$$\varrho(\varphi) = \frac{a}{\cos^2\varphi}. \tag{1}$$

Beide Äste der Kurve haben die implizite Form

$$a^2(x^2 + y^2) = x^4, \tag{2}$$

die sich aus der Polarform ergibt, wenn man die Ausdrücke $\varrho^2 = x^2 + y^2$ und $\cos\varphi = x/\varrho$ nimmt. Die Kurve (2) ist die Kampyle des Eudoxos. Sie hat einen isolierten Punkt $O(0,0)$, auf Grund der Division durch ϱ, was auch gleich 0 sein kann. Die Kurve ist algebraisch vierten Grades.

Würfelverdoppelung mit der Kampyle des Eudoxos

Wie wir bereits gesehen haben, kann die Kampyle des Eudoxos zur Würfelverdoppelung verwendet werden. Wir zeichnen einen Kreis mit dem Mittel-

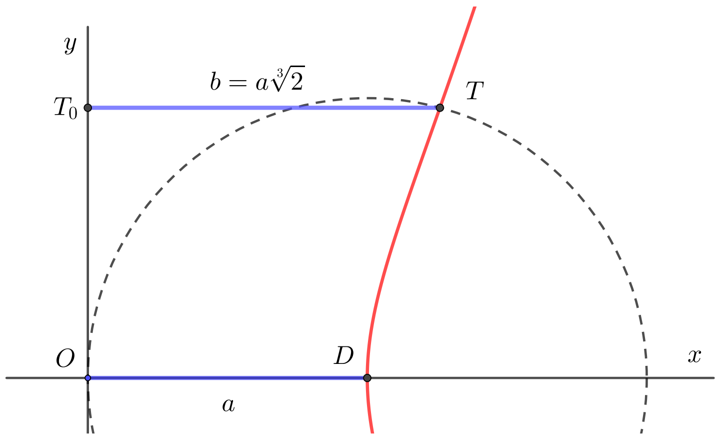


Abbildung 2: Würfelverdoppelung mit der Kampyle des Eudoxos.

punkt D und Radius a. Seine Gleichung lautet $x^2+y^2 = 2ax$. Das System von Gleichungen

$$x^2 + y^2 = 2ax, \quad a^2(x^2 + y^2) = x^4$$

hat eine triviale Lösung $(x, y) = (0, 0)$ und zwei nicht-triviale Lösungen

$$(x, y) = (a\sqrt[3]{2}, \pm a\sqrt{2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}).$$

Im ersten Quadranten kreuzen sich der Kreis und die Kampyle im Punkt T, der die Abszisse $|T_0T| = b = a\sqrt[3]{2}$ hat (Abbildung 2). Der Würfel mit der Kante b hat das Volumen $b^3 = 2a^3$, also das Volumen des Würfels mit der Kante b ist doppelt so groß wie das Volumen des Würfels mit der Kante a.

Damit ist das Problem der Würfelverdoppelung gelöst, wenn wir die Kampyle des Eudoxos als ein Konstruktionselement akzeptieren. Die Kante des verdoppelten Würfels wird durch die Abszisse des Schnittpunkts des Kreises, der nach Platon ein Konstruktionselement ist, und die Kampyle als die Ortslinie aller Punkte in der oben beschriebenen Konstruktion. Es ist jedoch bekannt, dass das Problem der Würfelverdoppelung mit einem unmarkierten Lineal und Zirkel nicht lösbar ist. Deshalb, genau so wie im Falle der Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks oder des Umfangs eines Kreises, versuchen wir hinreichend eine Annäherungsmethode der Winkelverdoppelung zu finden.

Eine Möglichkeit für die Konstruktion einer Strecke, deren Länge ziemlich genau $a\sqrt[3]{2}$ ist, bietet die kleine Krümmung der Kampyle des Eudoxos um den Punkt T, der der Schnittpunkt der Kampyle (2) und des Kreises $x^2+y^2 = 2ax$ ist. Wählen wir auf der Kampyle einen Punkt T^*, der sehr nahe an T liegt, so passt die Tangente auf der Kampyle in T^* dieser sehr gut. Daher ist der Schnittpunkt P des Kreises $x^2 + y^2 = 2ax$ mit der Tangente ebenfalls sehr nahe an T und die Abszissen der Punkte T und P unterscheiden sich sehr wenig. Für eine ungefähre Konstruktion muss der Punkt T^* jedoch so gewählt werden, dass es mit einem unmarkierten Lineal und einem Zirkel bestimmt werden kann.

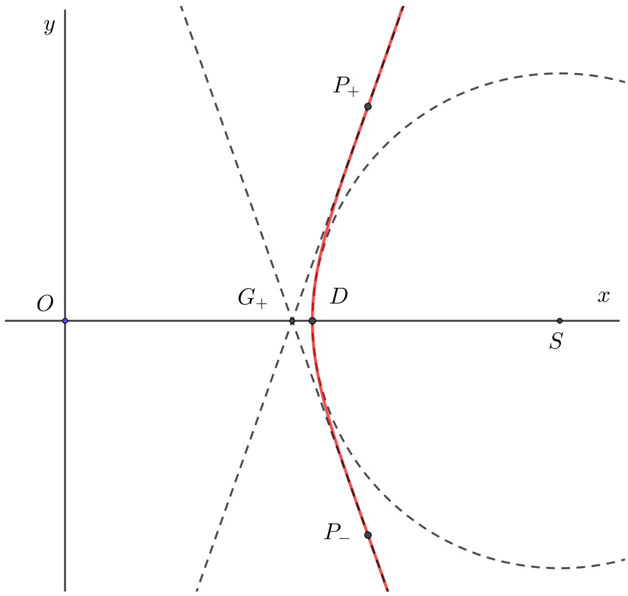


Abbildung 3: Rechter Ast der Kampyle des Eudoxos, Wendepunkte und Krümmungskreis.

Die Kampyle des Eudoxos wird durch den Polarwinkel parametrisiert:

$$x(\varphi) = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y(\varphi) = \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Für die ersten zwei Ableitungen im Punkt, der dem Winkel φ entspricht, erhalten wir die Ausdrücke

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3\sin^2\varphi - 1}{a\sin^3\varphi}.$$

Die zweite Ableitung wechselt ihr Vorzeichen bei Winkeln φ, für welche $3\sin^2\varphi - 1 = 0$. Die entsprechenden Lösungen ergeben die Wendepunkte der Kampyle. Diese Punkte sind $(\pm a\sqrt{6}/2, \pm a\sqrt{3}/2)$. Die Tangenten in diesen Punkten haben Steigungen $\pm 2\sqrt{2}$, die sich aus dem obigen Ableitungsausdruck ergeben, und schneiden die Abszissenachse in $G_\pm(\pm 3a\sqrt{6}/8, 0)$. Es stellt sich heraus, dass der Radius der Krümmungskreise, die in D und D' der Kampyle am besten passen, gleich a ist. Der Mittelpunkt eines solchen Kreises ist für D in $S(2a,0)$ und für D' in $S'(-2a,0)$. Die Übereinstimmung der Kampyle, der Tangenten in Wendepunkten $P_\pm$ und des Krümmungskreises im Scheitelpunkt D ist in Abbildung 3 dargestellt.

Nun wollen wir zeigen, dass es sehr günstig ist, für den Punkt T^* den Wendepunkt P_+ der Kampyle auszuwählen. In P_+ hat die Tangente mit ihr eine gute Übereinstimmung. Wenn wir anstatt der Kampyle einfach ihre Tangente $y = 2\sqrt{2}(x - a\sqrt{6}/2) + a\sqrt{3}/2$ im Wendepunkt P_+ nehmen und konstruieren die Abszisse ξ des Schnittpunktes mit dem Kreis $x^2 + y^2 = 2ax$, erhalten wir mit

$$\frac{\xi}{a} = \frac{1}{18}\sqrt{24\sqrt{6} - 23} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{9} \doteq 1{,}259956951$$

einen etwas größeren Wert als der genauere Wert

$$\sqrt[3]{2} \doteq 1{,}259921049$$

ist.

Die oben beschriebene Annäherung kann für eine ziemlich genaue euklidische Konstruktion der Kante b des verdoppelten Würfels verwendet werden. Bezeichnen wir mit α den Polarwinkel des Punktes P_+ im ersten Quadranten (Abbildung 4). Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Der Polarradius des Wendepunktes P_+ ist

$$\varrho_{P_+} = \frac{a}{\cos^2\alpha} = \frac{3a}{2}.$$

Das folgende Ergebnis ist für die Konstruktion interessant und nutzbar:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2\sqrt{2}.$$

Darum halbiert die Gerade durch O und P_+ den Steigungswinkel der Geraden $y = 2x\sqrt{2}$, die parallel zur Tangente im Wendepunkt P_+ der Kampyle verläuft.

Weil ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $3a/2$ die Gerade $x = a/2$ im Punkt $C(a/2, a\sqrt{2})$ schneidet, verläuft durch O und C die Gerade $y = 2x\sqrt{2}$, die mit der Abszissenachse den Winkel 2α bildet. Auf der Symmetrale s des Winkels DOC, $y = x\sqrt{2}/2$, befindet sich im Abstand $\varrho_{P_+} = 3a/2$ der Wendepunkt P_+ der Kampyle. Durch P_+ konstruiert man eine Parallele zur Geraden durch O und C, die den Kreis mit dem Mittelpunkt $D(a, 0)$ und Radius a im Punkt P schneidet. Die Abszisse $b = |P_0P|$ des Punktes P ist eine gute Annäherung von $a\sqrt[3]{2}$. Einzelheiten sind in Abbildung 4 zu sehen.

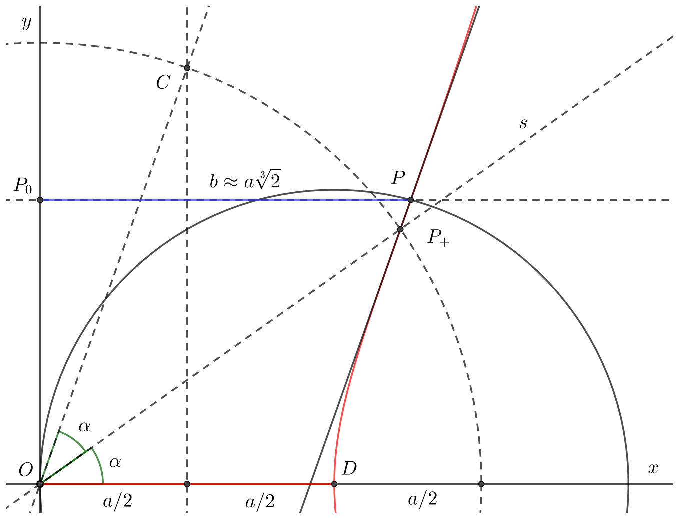


Abbildung 4: Approximative Würfelverdoppelung.

Der relative Fehler beim Volumen des verdoppelten Würfels nach oben beschriebener approximativer Konstruktion ist gering: nur etwa $8,5 \cdot 10^{-5}$.

Literatur

[1] B. von Pape, *Von Eudoxus zu Uhlhorn*, Books on Demand, Norderstedt, 2019.

The Arbelos

Nada Razpet, University of Ljubljana, Faculty of Education

One of the earliest records of the arbelos is in an Arabic manuscript by Thābita ibn Qurra, who attributes the work to Archimedes, which was translated into Latin in 1661 as Liber Assumptorum. Thomas Little Heath published an English translation of the Latin version as the Book of Lemmas and it forms part of his book The Works of Archimedes. The original authorship of the Book of Lemmas has been in question. T. L. Heat wrote [1]:

The Lemmas cannot, however, have been written by Archimedes in their present form, because his name is quoted in them more than once. The probability is that they were propositions collected by some Greek writer of a later date for purpose of elucidating some ancient work, though it is quite likely that some of the propositions were of Archimedean origin, e.g. those concerning the geometrical figures called respectively αρβηλος (literally shoemaker's knife) ....[1]

Harold P. Boas thinks that the shoemaker's knife is not the right name and in [2] wrote: I suggest renaming the arbelos as "the claw."

The Book of Lemmas

Archimedes described the properties of arbelos in propositions 4, 5, and 6.

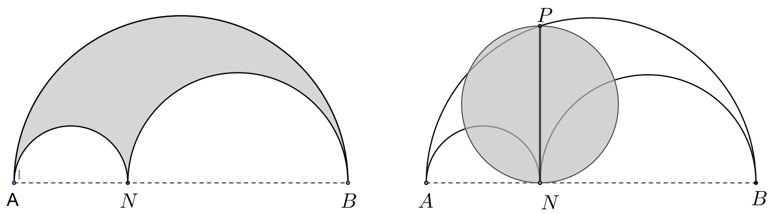


Figure 1: The arbelos (left); The area of the circle with diameter PN is equal to the area of the arbelos (right).

Proposition 4

If AB be the diameter of a semicircle and N any point on AB, and if semicircles be described within the first semicircle and having AN, BN as diameters respectively, the figure included between the circumferences of the three semicircles is "what Archimedes called αρβηλος "; and its area is equal to the circle on PN as diameter, where PN is perpendicular to AB and meets the original semicircle in P.

Proposition 5

Let AB be the diameter of a semicircle, C any point on AB, and CD perpendicular to it, and let semicircles be described within the first semicircle and having AC, CB as diameters. Then, if two circles be drawn touching CD on different sides and each touching two of the semicircles, the circles so drawn will be equal.

Archimedes proved this with the relations between the sides in similar triangles.

[1] T. L. Heath, The Works of Archimedes, xxxii- xxxiii

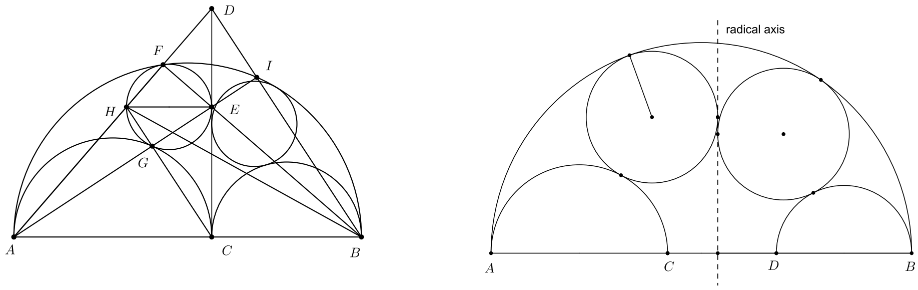


Figure 2: Archimedes' proof of Proposition 5 (left); Our sketch belongs to the generalized version of Proposition 5 (right)

The two circles are now known as **the Archimedes' twin circles**. Let $AC = 2a$ and $CB = 2b$, then the radii of the twins are $r = \frac{ab}{a+b}$ or $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$.
An Archimedean circle is any circle constructed from an arbelos that has the same radius as each of Archimedes' twin circles.

There is a note in the book [1] on page 307:
As pointed out by an Arabian Scholiast Al-Kashi[2], *this proposition may be stated more generally. If instead of one point C on AB, we have two points C, D, and semicircles be described on AC and BD as diameters, and if, instead of the perpendicular to AB through C, we take the radical axis of the two semicircles, then the circles described on the different sides of the radical axis and each touching it as well as two of the semicircles are equal. The proof is similar and presents no difficulty.*
Note: There is no corresponding sketch in the book.

Proposition 6
Let AB, the diameter of a semicircle, be divided at C so that $AC = \frac{3}{2}CB$ [or in any ration]. Describe semicircles within the first semicircle and on AC, CB as diameters, and suppose a circle drawn touching all three semicircles. If GH be the diameter of this circle, to find the relation between GH and AB.

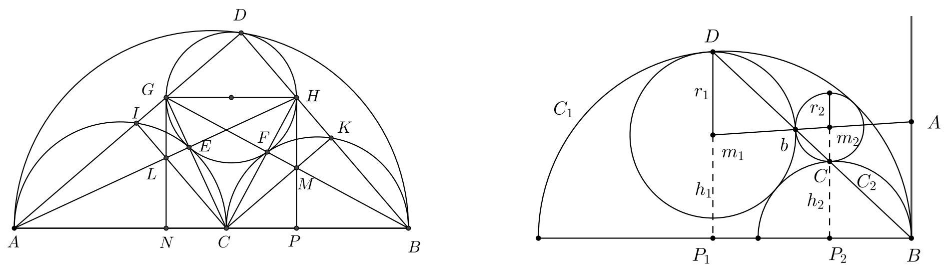


Figure 3: Archimedes' proof of Proposition 6; $GH = NP = \frac{6}{19}AB$ (left); The " ancient theorem " of Pappus, Pappus' Prop. 15, (right).

[2]In the book, the surname is misspelled as Alkauhi

Pappus of Alexandria

About half a millennium after Archimedes' death, Pappus of Alexandria wrote a collection of eight books, not all of which have survived. His treatise on arbelos in Book IV does not mention Archimedes, but it is true that Pappus does not mention anyone by name.
Three propositions are relevant for us: ancient theorem, Propositions 16 and 18.

The **ancient theorem** of Pappus (Fig. 3 right). Let two semicircles C_1 and C_2 be tangent at B and two circles with centers m_i and radii r_i be tangent to C_1 and C_2 and tangent to each other. Then

$$\frac{h_2}{r_2} = \frac{h_1}{r_1} + 2,$$

where h_i is the distance of m_i from the common diameter P_1P_2B [3].

Pappus' Prop. 16 (Fig. 4 left): If we fill the space between C_1 and C_2 with an infinity of circles m_1, m_2, m_4, ... with m_1 on the common diameter, we have

$$\frac{h_1}{r_1} = 0, \quad \frac{h_2}{r_2} = 2, \quad \frac{h_3}{r_3} = 4, \quad \frac{h_4}{r_4} = 6, \ \ldots$$

Pappus' Prop. 18 (Fig. 4 right): If the initial circle is tangent to the common diameter then the corresponding sequences of ratios is 1, 3, 5, 7 . . . .

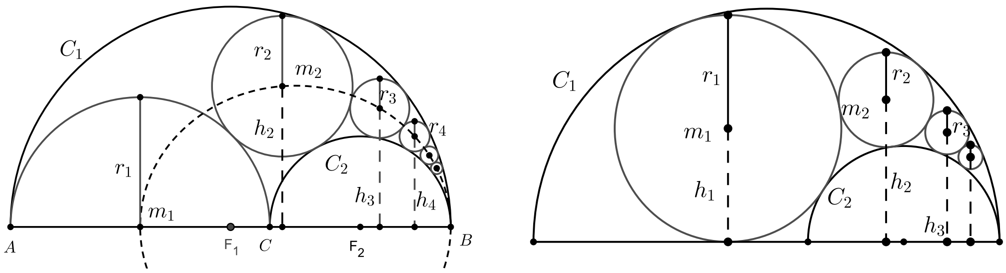


Figure 4: Pappus' Props. 16 (left); Pappus' Props. 18 (right).

Interest in arbelos then dried up for a while, until Jacob Steiner's paper appeared in the first volume of Crelle's journal in 1826. The massive interest in arbelos was the result of Martin Gardner's column in Scientific American.
The research has mainly gone in two directions: one looking for Archimedean twins and a chain of circles in inscribes in the arbelos and the other for the different arbelos suits and their properties.

Some of Archimedes' twin circles finders

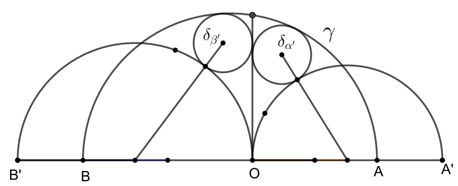
- *Leon Bankoff* constructed in 1974 Bankoff's triplet circle and Bankoff's quadruplet circle.
- *Thomas Schoch* in 1978 found 12 Archimedean circles and published them in 1998. He also constructed a line, named Schoch's line.

- *Peter Y. Woo* found that he could construct infinitely many Archimedean circles using Schoch's line.
- *Frank Power* introduced Archimedes' quadruplets in 1998. Archimedes' quadruplets are four congruent circles associated with an arbelos.
- *Dodge*, *Dearing*, *Yiu*, ...
- *F. M. van Lamoen* published online a catalogue of 62 examples of Archimedean circles [5].The catalogue also contains descriptions for the construction of these Archimedean circles.

The collinear arbelos

In a classic arbelos, the inner two semicircles touch each other. Hiroshi Okumura ([6], [7]), on the other hand, looked for Archimedean twins in arbelos where the position of the inner circles is different from that of the classical arbelos. Let's take a look.

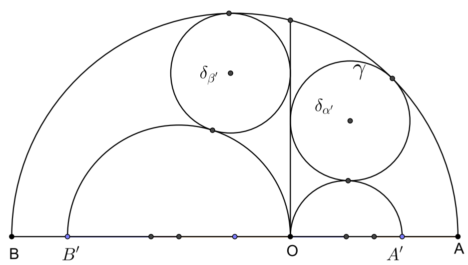
The overhanging arbelos



$|OA| = 2a$, $|OB| = 2b$,
$|OA'| = 2a'$, $|OB'| = 2b'$.
The two circles $\delta_{\alpha'}$ and $\delta_{\beta'}$ are congruent if and only if
$a' - a = b' - b$.

$$r_A = \frac{ab}{a'+b} = \frac{ab}{a+b'}$$

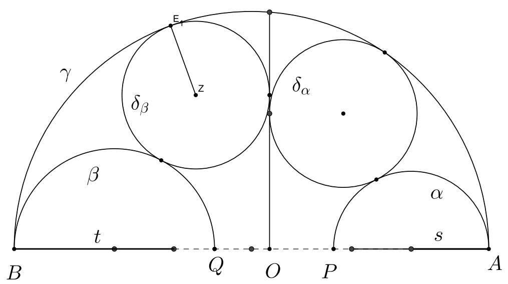
The squeezed arbelos



$|OA| = 2a$, $|OB| = 2b$, $|OA'| = 2a'$, $|OB'| = 2b'$.
$a - a' = b - b'$.

$$r_A = \frac{ab}{a'+b} = \frac{ab}{a+b'}$$

The extended arbelos

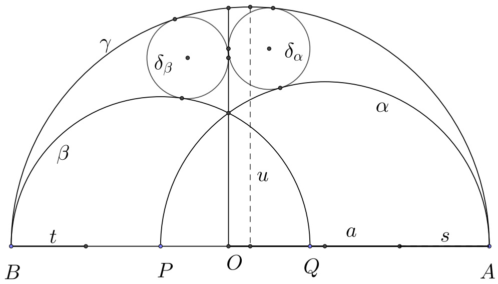


$$\frac{AQ}{2} = s, \qquad \frac{BP}{2} = t$$

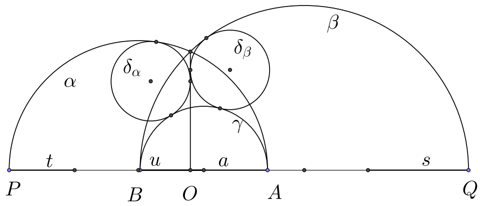
$$r_\delta = \frac{st}{s+t}$$

(See note to Proposition 5 in Book of Lemmas.)

The intersection arbelos

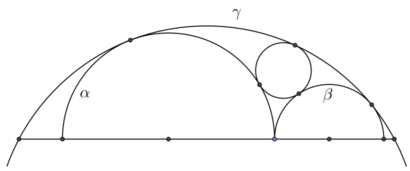


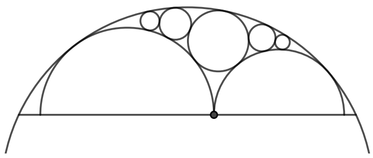
$$\frac{AQ}{2} = s, \qquad \frac{BP}{2} = t$$
$$r_\delta = \frac{st}{s+t}$$



$$\frac{AQ}{2} = s, \qquad \frac{BP}{2} = t$$
$$r_\delta = \frac{st}{s+t}$$

The arbelos, whose semicircular centres are not collinear





Non-classical forms of arbelos

The parbelos

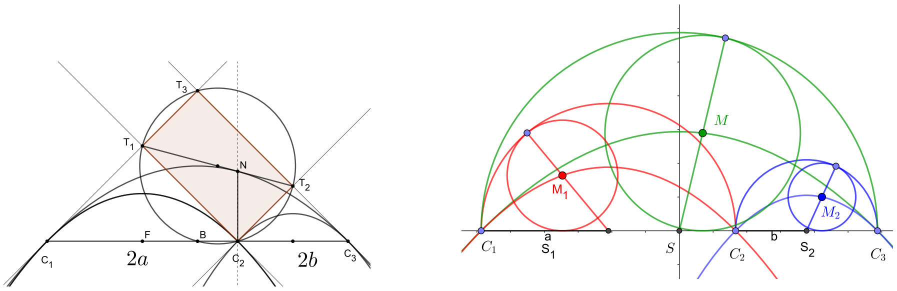
In May 2013, Jonathan Sondow published an article on "The parbelos, a parabolic analogue of the arbelos" [8]. The classical arbelos is bounded by three semicircles, while the parbelos is bounded by three parabolas.

Figure 5: The parbelos (left); Three similar parbeloses (right).

Let's write down four of the seven characteristic features of the parbelos he found.

- The upper and lower boundaries of the parbelos have the same length.
- Under each lower arc of the parbelos, construct a new parbelos similar to the original. Of the four new lower arcs, the middle two are congruent, and their common length equals one half of the harmonic mean of the lengths of the original lower arcs (Fig. 5).

- The four tangents to the parbelos at its three cusps enclose a rectangle, the tangent rectangle. The parbelos has two thirds the area of its tangent rectangle.



- The locus of the centers of circles inscribed in a semicircle of the arbelos is the boundary of a parbelos with its cusps deleted. The arbelos and parbelos share the same cusps.

The f-belos

In 2013 Antonio M. Oller-Marcén went one step further to generalize the arbelos and bounded figure with arbitrary similar curves, and named it f-belos [9].

$$g(x) = pf(x/p) \qquad h(x) = (1-p)f\left(\frac{x-p}{1-p}\right)$$

Since the other two curves are reductions of the one above for lengths, the following

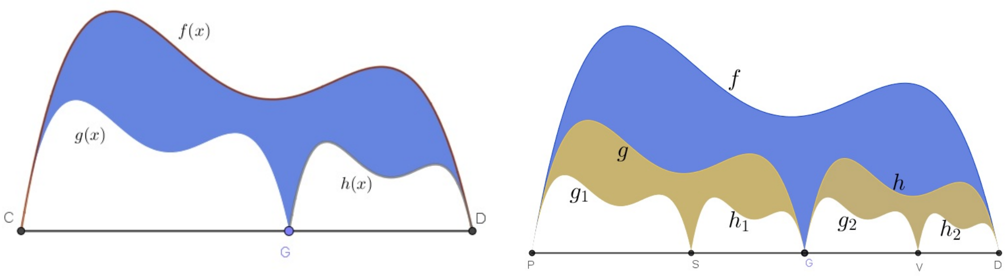


Figure 6: The f-belos(left), two more f-belos (right).

applies

$$L_g = pL_f \qquad L_h = (1-p)L_f \quad \Rightarrow \quad L_f = L_g + L_h$$

To the original f-belos we add two more f-belos similar to the previous one. For arc lengths we have:

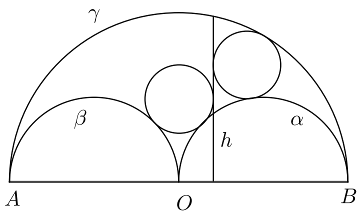
$$L_{h_1} = L_{g_2} = \frac{L_g \cdot L_h}{L_g + L_h}$$

In the article he proved some properties of the f-belos, analog to arbelos and parbelos.

Arbelos in Japanese geometry

Tamura's problem

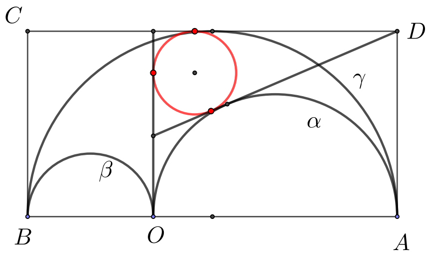
The sangaku hangs in Saitama (1898) proposed by Tamura [10].



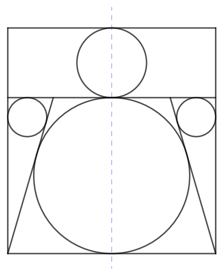
Let h be a perpendicular to AB intersecting α. If α and β are congruent and the circle touching h and α and β externally and the incircle of the curvilinear triangle made by α, γ and h have common radius r, show $|AB| = 10r$.

Ootoba's problems

From 1853, the sangaku hangs at Takenobu Inari Shrine in Kyoto.

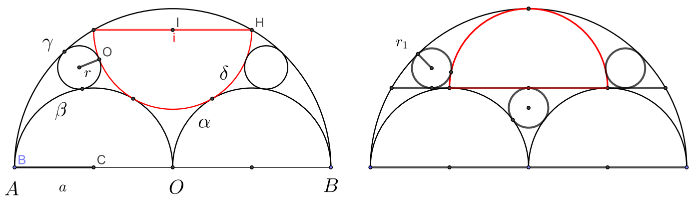


Let CD be the tangent of γ parallel to AB such that DA and BC are the tangents of γ at the points A and B, respectively. Show that the incircle of the curvilinear triangle made by CD, the remaining tangent of α from D and the axis is Archimedean.



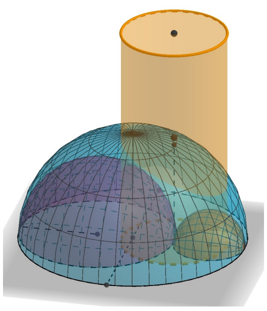
The original figure of the problem does not explicitly describe an arbelos as shown in figure on the right.

The arbelos in Wasan geometry



Assume $a = b$ and δ is an inscribed semicircle in the arbelos with diameter parallel to AB. Show that the radius of inscribed circles in the curvilinear triangle made by α, γ and δ (left figure) is equal to $3a/11$, (right figure $r_1 = a/4$).

The 3-D arbelos



The volume of the 3-dimensional arbelos is equal to the volume of a cylinder whose base has diameter $h = 2\sqrt{R_1R_2}$ and whose height is the diameter of the outer equatorial circle of the arbelos. $V = 2\pi R_1R_2(R_1 + R_2)$.

Conclusions

We have listed just a few of the main forms of arbelos. It seems that the interest in the arbelos and its generalized versions was purely a geometrical problem. People have looked for different shapes of the arbelos and drawn circles into it, whether Archimedean circles or chains of circles. But more recently, more examples of applications in physics and engineering have been found. Mohr's arbelos [12] and Lamé's ellipsoids are two representations of the stress state at any point of a continuum. These give a geometric interpretation of the stress vector as a function of the direction of the normal to the infinitesimal facet across which this stress is exchanged.

Arbelos shape have the same shape like lines of magnetic field distribution - in ideal form - for two parallel wires [13].

And last but not least, parts of the arbelos can also be found in Gothic windows.

References

[1] T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, Dover Publications, inc, New York, 2002, 304 -308.

[2] H. P. Boas, *Reflection on the Arbelos*, American Mathematical Monthly **113**, no. 3 (March 2006), 236-249.

[3] A. Ostermann, G. Wanner, *Geometry by Its History*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2012, 102.

[4] C. W. Dodge, T. Schoch, P. Y. Woo and P. Yiu, *Those Ubiquitous Archimedean Circles*, Mathematics Magazine, Jun., 1999, **72**, 3 (Jun., 1999), 202-213.

[5] `http://home.wxs.nl/ lamoen/wiskunde/Arbelos/Catalogue.htm`

[6] H. Okumura, *The Arbelos with Overhang*, KoG•18-2014.

[7] H. Okumura, *Archimedean Circles of the Collinear Arbelos and the Skewed Arbelos*, *Sangaku Journal of Mathematics (SJM)*, 2534-9562, **4**, (2020), 31-35.

[8] J. Sondow, *The parbelos, a parabolic analog of the arbelos*, `arXiv:1210.2279v3 [math.HO] 4 May 2013`.

[9] A. M. Oller-Marcén, *The f-belos*, Forum Geometricorum, **13**, (2013), 103-111.

[10] H. Okumura, *The arbelos in Wasan geometry, Tamura's problem*, Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries ISSN: 2284-5569, **8**, 1, (2019), 33-36.

[11] A. M. Oller-Marcén, *Archimedes' Arbelos to the n-th Dimension*, Forum Geometricorum **16** (2016), 51–56.

[12] P. Bisegna and P. Podio-Guidugli, *Mohr's arbelos*, Meccanica, (1995), 417–424.

[13] M. Różański, A. Samulewicz, M. Szczygieł, R. Wituła, J. Wyszkowska, *Arbelos Theory in Electrical Engineering*, Przeglad Elektrotechniczny, ISSN 0033-2097, R. 95 NR 3/2019.

Erste Erscheinung der magischen Würfel

Jacques Sesiano

§ 1. Frühgeschichte der magischen Quadrate

Ein *magisches Quadrat* ist eine derartige Anordnung verschiedener natürlichen Zahlen, daß dieselbe Summe in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Hauptdiagonalen vorkommt. Die *Ordnung* eines magischen Quadrates ist die Anzahl der Felder auf seinen Seiten. Das Quadrat der Ordnung 3 ist das kleinstmögliche, mit einer einzigen Anordnung der Zahlen (s. Abb.). Für größere Ordungen sind Quadrate stets möglich, und zwar mit zunehmender Anzahl verschiedener Anordnungen der Zahlen im Quadrat.

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

5	*28*	*34*	**2**	*36*	
27	**14**	*25*	*20*	**15**	**1**
	24	**11**	**1**	*21*	*29*
7	**17**	*22*	*23*	**12**	*30*
33	*19*	**1**	**13**	*26*	**4**
31	**9**	**3**	*35*	**1**	*32*

26	*20*	*14*	**1**	*44*	*38*	*32*
34	*28*	**15**	**9**	**3**	*46*	*40*
42	**29**	**23**	**17**	**11**	**5**	*48*
43	**37**	**31**	**25**	**19**	**13**	**7**
2	**45**	**39**	**33**	**27**	**21**	*8*
10	*4*	**47**	**41**	**35**	*22*	*16*
18	*12*	*6*	**49**	*36*	*30*	*24*

Hier gibt es drei Beispiele magischer Quadrate. Das zweite ist der Ordnung 5, mit einer zusätzlichen Eigenschaft: wird der äußere Rahmen entfernt, so bleibt im Inneren ein magisches Quadrat; es ist ein *berandetes* magisches Quadrat (stets möglich für $n \geq 5$). Das dritte besitzt eine noch merkwürdigere Eigenschaft, indem die Zahlen nach Parität getrennt sind; dies ist aber nur bei Quadraten ungerader Ordnungen möglich, da es ja eine ungerade Zahl mehr geben muß.

Alle diese Quadrate sind hier mit den n ersten natürlichen Zahlen gefüllt. Da ihre Gesamtsumme $\frac{n^2\,(n^2+1)}{2}$ beträgt, läßt sich die magische Summe, welche in jeder Zeile, Spalte, und in den Hauptdiagonalen erscheinen muß, sofort ermitteln; das ist nämlich die durch die Ordnung des Quadrates geteilte Gesamtsumme: $M_n = \frac{n\,(n^2+1)}{2}$.

Man sagt üblich, das erste magische Quadrat sei in China aufgetaucht. Es ist aber bloß das Quadrat dritter Ordnung. Die Geschichte der magischen Quadrate wird man aber wohl erst dann beginnen lassen, wenn allgemeine Verfahren zu ihrer Bildung erscheinen: Quadrate kleinerer Ordnungen kann man zwar, etwas mühsam, durch Probieren herstellen, dies wird aber rasch seine Grenzen zeigen. Allgemeine Bildungsweisen erlauben dagegen, ein Quadrat beliebiger Größe unmittelbar zu füllen. Solche Bildungsverfahren sind aber an höchstens eine dreier Hauptgattungen anwendbar, nämlich an ungerade ($n = 2k + 1$), gerad-gerade ($n = 4k$) und gerad-ungerade Ordnungen ($n = 4k + 2$), wobei k eine natürliche Zahl ist. Damit sind aber alle natürliche Zahlen außer 2 erfaßt. Mit anderen Worten, magische Quadrate sind für jede Ordnung $n > 2$ möglich.

Erst neulich ergab es sich, daß die magischen Quadrate im alten Griechenland studiert wurden. Um 900 wurde nämlich ein anonymer griechischer Text von Mufaḍḍal ibn T͟hābit ibn Qurra (möglicherweise mit dem bekannten Übersetzer T͟hābit ibn Qurra verwandt) ins Arabische übersetzt.[1] In der Einleitung sagt uns der Übersetzer, er habe zwei Abschriften des Werkes in der Baghdader Hofbibliothek gefunden, die aber von Termiten stark beschädigt waren. Zum Glück entsprachen die zerstörten Teile der einen gerade den erhaltenen Teilen der anderen, auf daß er seine Übersetzung vollführen konnte.

Dieser Text war aber keine Abhandlung für Anfänger, sondern ein Lehrbuch, in vier Kapiteln, für fortgeschrittene Leser. Darin lernt man die Herstellungsweise berandeter Quadrate aller drei Hauptordnungen (Kap. 1 & 3), *aber ohne jegliche Erklärung der mathematischen Grundlagen*; die Bildungsweise der berandeten Quadrate war offensichtlich nur zur Erfrischung Grundkenntnisse gedacht, und bloß an Beispiele von Quadraten wachsender Ordnung gezeigt. Die beiden anderen Kapitel sind besonderen und schwierigeren Bildungsweisen mittels berandeter Quadrate gewidmet, die, in diesem Falle, mathematisch rechtfertigt werden. So lernt man im zweiten Kapitel die Herstellung berandeter Quadrate ungerader Ordnungen mit Trennung der Zahlen nach Parität (wie hier oben gesehen, aber im Falle berandeter Quadrate wesentlich schwieriger zu erreichen); im vierten und letzten Kapitel werden *zusammengesetzte* Quadrate gerader Ordnungen gebildet, das heißt magische Quadrate, die sich aus kleineren magischen Teilen zusammensetzen. Daraus entnehmen wir, daß das Studium der magischen Quadrate in Griechenland sicherlich weit vorgerückt war, obwohl sonst nichts davon überlebt hat.

Vom zehnten Jahrhundert her erscheinen arabische Schriften über die Bildungsweisen magischer Quadrate.[2] Die erste ist das Lehrbuch

---

[1] Herausgabe und Untersuchung dieser Schrift in *An ancient Greek treatise on magic squares*.

[2] Zur Frühgeschichte der magischen Quadrate, siehe *Les carrés magiques* oder

von Abū'l-Wafā' Būzjānī (940-997/8) über die “magische Anordnung der Zahlen in den Quadraten”, wie der Titel besagt.[3] Ziel des Verfassers war die Herstellung sowohl gewöhnlicher als berandeter Quadrate. Es gelang ihm aber nur teilweise. Für berandete Quadrate ungerader Ordnung stellt er ein allgemeines Verfahren dar, nicht aber für gerade Ordnungen, obwohl im letzteren Falle das übersetzte Werk bereits alle praktische Anweisungen enthielt. Aber, wie gesagt, eine Begründung gab es nicht, und Būzjānī konnte sie nicht finden, weil er keinen Unterschied zwischen den beiden Gattungen gerader Ordnungen machte: er suchte für gemeinsame Züge, die es nicht gab — und nicht geben konnte.

Neu bei ihm war die Untersuchung der gewöhnlichen magischen Quadrate der ersten Ordnungen — auf sie hatte der griechische Text nur flüchtig am Anfang hingewiesen aber auf ihre Bildung, ihrer “Schwierigkeit für den Anfänger” wegen, verzichtet. Būzjānī konnte sie für die ersten Ordnungen (bis $n = 8$) bilden, ohne jedoch eine allgemeine Herstellungsweise zu finden — dies zeigt erneut die Schranken der probeweisen Untersuchung. Būzjānīs Abhandlung erweist sich also eher als ein Kommentar zum griechischen Werk.

Mit seinem Nachfolger Ibn al-Hayṯham (gest. 1041) stehen wir auf festerem Boden: mit Hilfe seiner mathematischen Behandlung gelang es ihm, allgemeine Verfahren für gewöhnliche Quadrate ungerader und gerad-gerader Ordnungen zu finden.[4] Bei dem Ende des 11. Jahrhunderts wurde die Herstellung der Quadrate gerad-ungerader Ordnung ebenfalls erreicht, erneut mit Hilfe mathematischer Überlegungen. Die folgenden Jahrhunderte sahen die Erfindung weiterer Verfahren für jede der drei Gattungen, gewöhnlicher sowie berandeter Quadrate.

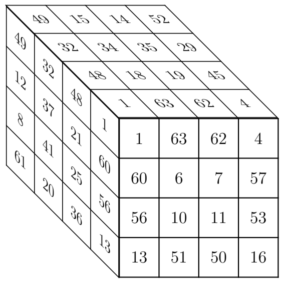
§ 2. Frühgeschichte der magischen Würfel

Das untenstehende Beispiel, samt seinen vorderen Schichten dargestellt, unterliegt der *heutigen* Definition des gewöhnlichen magischen Würfels. Man merke zuerst, daß ein magischer Würfel von seinen vorderen Schichten vollständig festgelegt wird: die waagerechten Schichten setzen sich nämlich aus den Zeilen der vorderen Schichten, die Seitenschichten ihrerseits aus ihren Spalten. Wir werden uns also im Folgenden mit der Angabe dieser vorderen Schichten begnügen.

die (z. T. erweiterten Ausgaben) *Magic squares, their history and construction* und *Маг. квадраты*.

[3] Text und frz. Übersetzung vorhanden, s. Schrifttum; Auszüge in *Magic squares in the tenth century*.

[4] Siehe *Les carrés magiques*, S. 25–27, 49–51; oder *Magic squares, their history and construction*, S. 24–27, 51–52; *Маг. квадраты*, S. 33–35, 58–61.



1	63	62	4
60	6	7	57
56	10	11	53
13	51	50	16

48	18	19	45
21	43	42	24
25	39	38	28
36	30	31	33

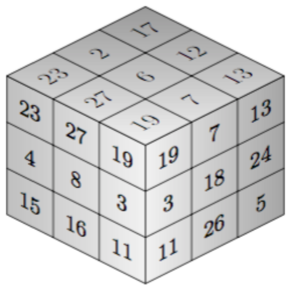
32	34	35	29
37	27	26	40
41	23	22	44
20	46	47	17

49	15	14	52
12	54	55	9
8	58	59	5
61	3	2	64

Wird, allgemein, ein Würfel n-ter Ordnung von den ersten n^3 natürlichen Zahlen gefüllt, deren Summe $\frac{n^3\,(n^3+1)}{2}$ beträgt, so muß die Summe in jeder seiner n Schichten $\frac{n^2\,(n^3+1)}{2}$ sein, bzw. in jeder ihrer n Zeilen $\frac{n\,(n^3+1)}{2}$ betragen. Letztere, die *magische Summe für den Würfel*, muß man also in jeder Reihe finden (waagerecht, senkrecht, von vorne nach hinten), dazu noch in den vier inneren Würfeldiagonalen (hier $1+43+22+64 = 4+42+23+61 = 13+39+26+52 = 16+38+27+49$). Die Summen in den Diagonalen der Schichten kommen also heute beim *gewöhnlichen* magischen Würfeln nicht in Betracht.

Vom 17. zum 19. Jahrhundert

Die obige Definition geht auf die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts zurück. Im 18. und anfänglichen 19. Jahrhundert, bei den Franzosen J. Sauveur und B. Violle, blieb die Zeilensumme unberücksichtigt: die konstante Summe war nur in den Schichten zu erreichen, wie das folgende (Violles) Beispiel zeigt. Dies läßt sich aus einer Analogie zum magischen Quadrat erklären: die konstante Summe ermittelte man weiterhin aus Teilung der Gesamtsumme der Zahlen durch die Ordnung.



Diese Festlegung war jedoch einigermaßen ein Rückgang, denn schon 1640 hatte Fermat in seinem Briefwechsel die Konstanz der Summe in den Reihen gefordert. Sein Beispiel (in diesem Fall durch die waagerechten Schichten dargestellt) ist das unten angegebene.

Nun behauptet Fermat, daß die erwünschte magische Summe, 130, in den 72 Reihen gefunden wird (*il y aura en tout 72. lignes differentes, desquelles chacune faira une méme somme, sçavoir 130*);[5] diese Summe erscheint zwar in den zu den Kanten gleichlaufenden Reihen und in den Hauptdiagonalen dieser (horizontalen) Quadrate sowie derjenigen der Seitenschichten, nicht aber in den vorderen Schichten.

4	62	63	1
41	23	22	44
21	43	42	24
64	2	3	61

53	11	10	56
32	34	35	29
36	30	31	33
9	55	54	12

60	6	7	57
17	47	46	20
45	19	18	48
8	58	59	5

13	51	50	16
40	26	27	37
28	38	39	25
49	15	14	52

Wesentlich verwirrender ist aber Fermats folgende, angeblich allgemeingültige Aussage: *Je passe bien plus outre en passant aux solides qui le sont effectivement, j'ay trouvé une regle generale pour ranger tous les cubes à l'infiny en telle façon que toutes les lignes de leurs quarrez tant diagonales, de largeur, de longueur, que de hauteur, fassent un méme nombre, & determiner outre cela en combien de façons differentes chaque cube doit étre rangé, ce qui est, ce me semble, une des plus belles choses de l'Arithmetique.* Mittels *einem* Verfahren könne also Fermat *alle* Würfel bilden, dazu wisse er, auf *wieviele* Weisen er das für *jede vorgegebene* Ordnung tun könne. Dies ist natürlich widersinnig, und solche ungereimte Behauptungen lassen sich nur durch Fermats stetig wachsenden Herausforderungen an seinen Konkurrenten Frénicle erklären.

Khāzinīs magische Würfel

In London befindet sich eine frühmoderne arabische Handschrift, deren Urvorlage aber auf dem ausgehenden 12. Jahrhundert zurückgehen müßte; sie enthält, unter dem Titel ديوان العدد الوفق, Auszüge aus verschiedenen Werken über die magischen Quadrate.[6] Das älteste dieser Stücke ist ein Teil der Übersetzung des oben erwähnten griechischen Werkes, nämlich seine (schwierigeren) Kapitel 2 und 4. Daneben gibt es Auszüge aus den Werken Būzjānīs, Ibn al-Haytham̱s und Abderraḥman al-Khāzinīs. Letztgenannter ist ein Mathematiker

[5] *Opera*, pp. 174, 177; *Oeuvres*, II, pp. 190–191, 197.

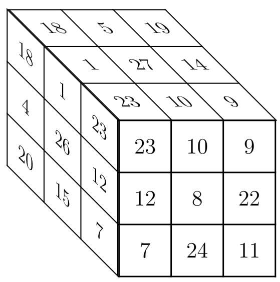
[6] London British Library Delhi Arabic 110, fol. 28^{ar} – 119^{v}.

und Physiker aus dem anfänglichen 12. Jahrhundert, dessen Hauptwerk die verschiedenen Arten von Waagen behandelt. Der Beginn seiner Laufbahn ist auch eigentümlich: er war ursprünglich ein junger byzantinischer Sklave; als sein Herr aber seine Begabungen bemerkte, ließ er ihm eine ausgezeichnete Bildung verleihen.

Das siebente Kapitel in der erwähnten Handschrift ist den magischen Würfeln gewidmet und, den einleitenden Worten gemäß, völlig aus Khāzinī entnommen (das Kapitel eröffnet sich mit قا از, "dies sind Khāzinīs Worte"). Darin erzählt uns Khāzinī selber, vor seiner Zeit habe man sich um solche Gebilde nicht gekümmert, wohl aber in seiner Zeit, aber ohne echte Begründung. Sein Werk werde diese Lücke füllen.[7]

Als gewöhnlichen magischen Würfel (فق ق) bezeichnet er einen mit den ersten n^3 natürlichen Zahlen gefüllten Würfel, dessen waagerechte, senkrechte und normale Reihen der $3n$ Schichten die magische Summe, also $M_n = \frac{n\,(n^3+1)}{2}$, ergeben. Erscheint dazu diese magische Summe in den Zeilen und Spalten der sechs schrägen Ebenen, welche diagonal gegenüberliegende Kanten verbinden, so ist der magische Würfel "vollkommen". In Khāzinīs Beispielen von Würfeln kommt aber eine solche "zusätzliche Magie" (فق ا) in höchstens zwei Paaren schräger Ebenen vor.

Möglicherweise deswegen finden bei ihm Würfel ungerader Ordnungen wenig Beachtung: der einfachste unter ihnen weist gar keine zusätzliche Magie auf. Also begnügt sich Khāzinī mit der Angabe dieses kleinsten Würfels, der Ordnung 3 mit der Reihensumme 42:



23	10	9
12	8	22
7	24	11

1	27	14
26	13	3
15	2	25

18	5	19
4	21	17
20	16	6

Eingehend untersucht er dagegen die Behandlung der Würfel gerad-gerader Ordnungen.[8] Er erklärt fünf Bildungsweisen, jede mit einem Beispiel der Ordnung 4, einmal dazu mit einem der Ordnung 8. Alle sind aber für die höheren gerad-geraden Ordnungen gültig, worauf er

[7] Eingehend untersucht in *The first appearance of magic cubes.*

[8] Das Vorhandensein bei ihm zweier Beispiele der ersten gerad-ungeraden Ordnung ($n = 6$) ist unbegreiflich: die vorderen Schichten sind zwar alle magisch, die Summe von vorne nach hinten nimmt aber verschiedene Werte an.

selber hinweist.

Offensichtlich muß jede der vier (etwa vorderen) Schichten des magischen Würfels der Ordnung 4 die gleiche Summe enthalten. Teilen wir also zuerst die Reihenfolge der ersten 64 natürlichen Zahlen in zweimal vier aufeinanderfolgende Reihen:

$$\begin{array}{cccc} 1,\ldots,8 & 9,\ldots,16 & 17,\ldots,24 & 25,\ldots,32 \\ 33,\ldots,40 & 41,\ldots,48 & 49,\ldots,56 & 57,\ldots,64. \end{array}$$

Jede Schicht wird die gleiche Summe, $4 \cdot 130 = 520$, enthalten, wenn wir die zweite Zeile einfach umkehren; damit sind nämlich entgegengesetzte Glieder der Reihenfolge vereinigt, deren jedes Paar 65 beträgt:

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1,\ldots,8 & 9,\ldots,16 & 17,\ldots,24 & 25,\ldots,32 \\ 57,\ldots,64 & 49,\ldots,56 & 41,\ldots,48 & 33,\ldots,40. \end{array}$$

Damit weiß also <u>Kh</u>āzinī, welches die Zahlen für jede Schicht sind; ihre Anordnung muß noch gefunden werden. Dazu wählt er ein Grundquadrat (اساس), das ein magisches Quadrat sein muß. Daraus wird er (in dem betreffenden Fall des Würfels 4. Ordnung) drei andere magische Quadrate ableiten, mit denselben Zahlen, aber derartig, daß die Summe entsprechender Felder in Tiefe dieselbe Summe wie die Reihen des Grundquadrates aufweist, in diesem Fall 34. Diese vier Quadrate sind das Vorbild (دستور) zur Bildung der vorderen Schichten des gesuchten magischen Würfels. Nun gibt es in jedem der Quadrate des Vorbildes kleinere Zahlen (in diesem Fall von 1 bis 8) und größere (von 9 bis 16). Die ersteren wird man dann einfach mit den kleineren Zahlen der betreffenden Schicht ersetzen, die anderen mit den größeren, natürlich unter strenger Bewahrung ihrer Anordnung im betreffenden Quadrat.

1	*12*	**7**	*14*
8	*13*	**2**	*11*
10	**3**	*16*	**5**
15	**6**	*9*	**4**

13	**8**	*11*	**2**
12	**1**	*14*	**7**
6	*15*	**4**	*9*
3	*10*	**5**	*16*

16	**5**	*10*	**3**
9	**4**	*15*	**6**
7	*14*	**1**	*12*
2	*11*	**8**	*13*

4	*9*	**6**	*15*
5	*16*	**3**	*10*
11	**2**	*13*	**8**
14	**7**	*12*	**1**

Betrachten wir beispielsweise die obigen 4×4 Quadrate. Das erste ist das Grundquadrat. Es ist pandiagonal, d.h. es besitzt die Eigenschaft, daß die Wiederholung seiner Zahlen in der Ebene und irgend welche Parallelverschiebung des 4×4 Rahmens stets ein magisches 4×4 Quadrat ergibt; so entsteht das dritte Quadrat. Genau dasselbe gilt, wenn man das Grundquadrat umkehrt; die beiden anderen Quadrate sind dadurch gebildet. Man beobachtet hier nebenbei, daß der Anfangspunkt, 1, eine Hauptdiagonale durchläuft. Wichtiger aber ist, daß jetzt die Summe entsprechender Felder in Tiefe, also von vorne nach hinten, ebenfalls 34 ergibt. Dies ist also ein benutzbares Vorbild.

Es bleibt uns nur noch, die kleinen und grossen Zahlen des Vorbildes durch die entsprechenden kleinen und grossen Zahlen der betreffenden Schichten zu ersetzen. Damit erhalten wir die vier vorderen Schichten des erwünschten magischen Würfels, und dadurch sind also auch alle andere Schichten bestimmt.

1	*60*	**7**	*62*
8	*61*	**2**	*59*
58	**3**	*64*	**5**
63	**6**	*57*	**4**

53	**16**	*51*	**10**
52	**9**	*54*	**15**
14	*55*	**12**	*49*
11	*50*	**13**	*56*

48	**21**	*42*	**19**
41	**20**	*47*	**22**
23	*46*	**17**	*44*
18	*43*	**24**	*45*

28	*33*	**30**	*39*
29	*40*	**27**	*34*
35	**26**	*37*	**32**
38	**31**	*36*	**25**

Der erzeugte Würfel besitzt eine zusätzliche Magie: da die Hauptdiagonalen der hier dargestellten Quadrate magisch sind, werden die beiden entsprechenden schrägen Ebenen die magische Summe in ihren waagerechten und senkrechten Reihen vorweisen.

Unser Vorbild darf aber auch aus nur zwei Quadraten bestehen, wie Khāzinī zeigt; da die Quersumme des ersten und des dritten Quadrates des obigen Vorbildes (beide hier unten nachgebildet) 17 beträgt, wird ihre Wiederholung uns erlauben, als Quersumme 34 zu erhalten.

1	*12*	**7**	*14*
8	*13*	**2**	*11*
10	**3**	*16*	**5**
15	**6**	*9*	**4**

16	**5**	*10*	**3**
9	**4**	*15*	**6**
7	*14*	**1**	*12*
2	*11*	**8**	*13*

Das erste Quadrat kann zur Bildung sowohl der äußeren wie der beiden ersten Schichten dienen. Man erhält dann die beiden folgenden magischen Würfel:[9]

1	*60*	**7**	*62*
8	*61*	**2**	*59*
58	**3**	*64*	**5**
63	**6**	*57*	**4**

56	**13**	*50*	**11**
49	**12**	*55*	**14**
15	*54*	**9**	*52*
10	*51*	**16**	*53*

48	**21**	*42*	**19**
41	**20**	*47*	**22**
23	*46*	**17**	*44*
18	*43*	**24**	*45*

25	*36*	**31**	*38*
32	*37*	**26**	*35*
34	**27**	*40*	**29**
39	**30**	*33*	**28**

[9] Nur der erste weist eine zusätzliche Magie auf, dieselbe wie im vorigen Fall.

Erste Erscheinung der magischen Würfel

1		*31*	**50**
32	**49**	**2**	*7*
6	**3**	**52**	*29*
51	*30*		**4**

5		*27*	**54**
28	**53**	**6**	*3*
2	**7**	**56**	*25*
55	*26*	*1*	**8**

60	*21*	*3*	**11**
37	**12**	**59**	*22*
23	**58**	**9**	*0*
10	*3*	*24*	**57**

64	*17*	*3*	**15**
33	**16**	**63**	*18*
19	**62**	**13**	*36*
14	*3*	*20*	**61**

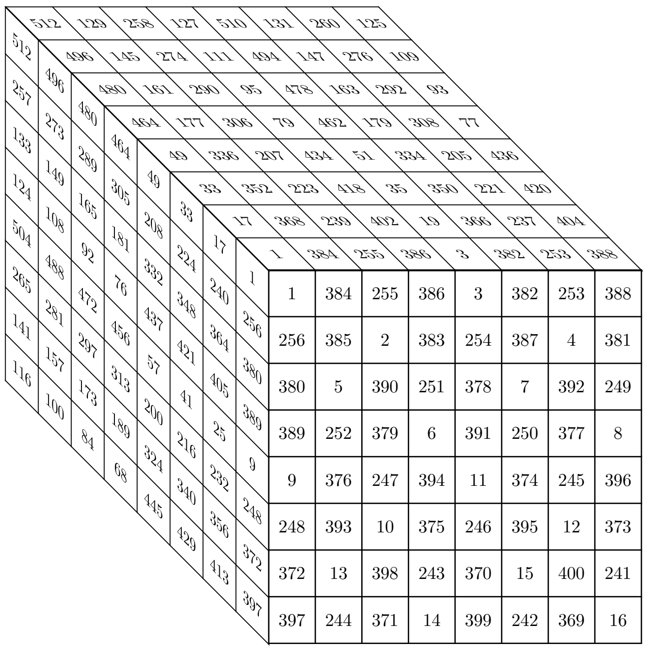
Die zweite Anordnung weist dazu eine Eigentümlichkeit auf: man hat zuerst die ersten 64 Zahlen in vier, statt zwei, Reihenfolgen geteilt:

$$\begin{array}{cccc}
1,\ldots,4 & 5,\ldots,8 & 9,\ldots,12 & 13,\ldots,16 \\
17,\ldots,20 & 21,\ldots,24 & 25,\ldots,28 & 29,\ldots,32 \\
33,\ldots,36 & 37,\ldots,40 & 41,\ldots,44 & 45,\ldots,48 \\
49,\ldots,52 & 53,\ldots,56 & 57,\ldots,60 & 61,\ldots,64.
\end{array}$$

Um diesmal auch dieselbe Summe in jeder Schicht zu erhalten, wurden einfach die mittleren Folgen umgekehrt:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
1,\ldots,4 & 5,\ldots,8 & 9,\ldots,12 & 13,\ldots,16 \\
29,\ldots,32 & 25,\ldots,28 & 21,\ldots,24 & 17,\ldots,20 \\
45,\ldots,48 & 41,\ldots,44 & 37,\ldots,40 & 33,\ldots,36 \\
49,\ldots,52 & 53,\ldots,56 & 57,\ldots,60 & 61,\ldots,64,
\end{array}$$

und dies ergibt die von Khāzinī benutzte Verteilung der kleinen und großen Zahlen im zweiten Beispiel oben.



Alle diese Verfahren sind an die nächsten gerad-geraden Ordnungen anwendbar. Besteht, im Falle des Quadrates 8. Ordnung, das Vorbild aus vier 8×8 Quadraten, so wird man Paare Schichten auf dieselbe Weise herleiten; besteht es aus zwei 8×8 Quadraten, so wird man das erste entweder für die erste Hälfte der Schichten oder für die beiden äußeren Paare benutzen. Im erhaltenen Text gibt es aber nur das obige (dort durch seine vorderen Schichten angegebene) Beispiel; es wurde nach dem Vorbild des letzten obigen 4×4 Quadrates gebildet, also mit vier getrennten Reihen je Schicht, nämlich

$1, \ldots, 16$	$17, \ldots, 32$	$33, \ldots, 48$	$49, \ldots, 64$	$65, \ldots, 80$	$81, \ldots, 96$	$97, \ldots, 112$	$113, \ldots, 128$
$241, \ldots, 256$	$225, \ldots, 240$	$209, \ldots, 224$	$193, \ldots, 208$	$177, \ldots, 192$	$161, \ldots, 176$	$145, \ldots, 160$	$129, \ldots, 144$
$369, \ldots, 384$	$353, \ldots, 368$	$337, \ldots, 352$	$321, \ldots, 336$	$305, \ldots, 320$	$289, \ldots, 304$	$273, \ldots, 288$	$257, \ldots, 272$
$385, \ldots, 400$	$401, \ldots, 416$	$417, \ldots, 432$	$433, \ldots, 448$	$449, \ldots, 464$	$465, \ldots, 480$	$481, \ldots, 496$	$497, \ldots, 512.$

Schrifttum

Fermat, P. 1679. *Varia opera mathematica* Toulouse: Pech.

——— 1891-1912 [-1922]. *Oeuvres*, ed. P. Tannery & Ch. Henry [C. de Waard] (4 [5: suppl.] vols). Paris: Gauthier-Villars.

Sauveur, J. 1710 [1712]. “Construction generale des Quarrés Magiques”, *Histoire de l’Academie royale des sciences, Année MDCCX*, 92–138.

Sesiano, J. 1998. “Le traité d’Abūl’-Wafā’ [Būzjānī] sur les carrés magiques”, *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften* 12: 121–244.

——— 2004. *Les carrés magiques dans les pays islamiques*. Lausanne: PPUR.

——— 2014. *Магические квадраты на средневековом Востоке*. Sankt Petersburg: Nestor-Istoriya.

——— 2017. *Magic squares in the tenth century, two Arabic treatises by Anṭākī and Būzjānī*. Cham: Springer.

——— 2019. *Magic squares, their history and construction from ancient times to AD 1600*. Cham: Springer.

——— 2020. *An ancient Greek treatise on magic squares*. Stuttgart: Steiner.

——— 2022-23. “The first appearance of magic cubes”, *Sciamvs* 22/23 (im Druck).

Violle, B. 1837-1838. *Traité complet des carrés magiques, simples et composés* (2 vols). Paris: Bachelier.

Robert Nelting,
sein Leben und seine Rechenschieber

Karl Kleine
www.kkleine.de

XV. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, Miesenbach 2022

Biographie, erster Teil 1876–1924

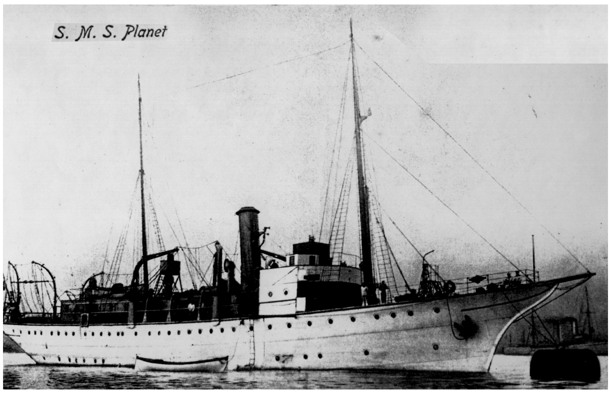


Abbildung 1: SMS Planet

Robert Nelting wurde am 19.8.1876 in Hohenwested als Kind von Schuhmachern und Färbern geboren. Seine Herkunft lies keine höhere Schulbildung zu, und mit 15 Jahren entkam er ihr durch den Eintritt in die Kaiserliche Marine. Hier qualifizierte er sich mit Erfolg und durchlief so alle Mannschafts-, Unteroffizier und Feldwebelränge bis zum maximal möglichen Dienstgrad mit seiner Volksschulbildung. Er spezialisierte sich auf Navigation und war zum Ende seiner Dienstzeit nach 16 Jahren Obervermessungssteuermann und Deckoffizier der Kaiserlichen Marine.

Der Höhepunkt seiner Marinekarriere war für Robert Nelting die Teilnahme an der Forschungsexpedition [4, 25] 1906/1907 des ersten speziell als Forschungsschiff gebauten Schiffes der Kaiserlichen Marine, der SMS Planet. Die Reise verlief von Hamburg um Afrika herum, durch den Indischen Ozean zu den deutschen Südseekolonien im Bismark-Archipel. Die Reise brachte ihn in Kontakt mit Admiralitätsrat Dr. Ernst Kohlschütter [7] im Reichs-Marine-Amt in Berlin und mit dem Kapitän Kurtz — zu beiden später mehr.

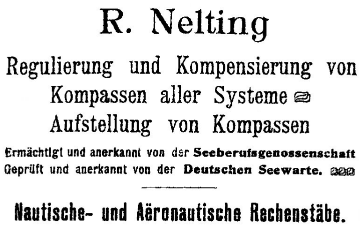

R. Nelting
Regulierung und Kompensierung von
Kompassen aller Systeme
Aufstellung von Kompassen
Ermächtigt und anerkannt von der Seeberufsgenossenschaft
Geprüft und anerkannt von der Deutschen Seewarte.
Nautische- und Äeronautische Rechenstäbe.

Abbildung 2: Briefkopf 1910

Nach seinem regulären Ausscheiden aus der Marine 1908 brauchte Nelting einen neuen Broterwerb, und das wurde die freiberufliche Tätigkeit als Consultant und Gutachter in Hamburg zu allen Fragen der maritimen Navigation sowie der Aufstellung und Justierung von Schiffskompassen. Es waren mehrere gleichzeitig verlaufende Umbrüche im Schiffsbau, der Übergang von hölzernen zu metallischen Schiffsrümpfen, von Seglern zu Schiffen mit kohlebefeuerten Dampfkesseln und Dampfmaschinen-getriebenen Schiffsschrauben, und um 1910 kam als weiterer Antrieb der Schiffsdiesel hinzu. Das bedeutete nicht nur andere Baumaterialien an Bord, sondern auch Veränderungen im Schiffsbetrieb und letztlich auch andere Möglichkeiten, diese moderneren Schiffe zu navigieren. All das begann schon Jahrzehnte zuvor, doch um/nach der Jahrhundertwende war die allgemeine Umstellung dann im vollen Gange. Das Problem der Kompasse war die magnetische Beeinflussung durch den stählernen Schiffsrumpf.

Abbildung 3: einzig bekanntes Photo von Robert Nelting, undatiert

Nicht nur die Schiffstechnik änderte sich, es ware auch viel mehr Schiffe, die auf die hohe See gingen, und es waren dementsprechende Navigationshilfen nötig. So kam es, daß Nelting sein geballtes Know-How der Astro-Navigation an Bord nutzte, drei Rechenschieber für diese Aufgabe zu entwickeln. Er lies diese in Kommission bei der bekannten und hochangesehenen Firma Dennert & Pape im nahen Altona fertigen.

Es gab aber noch eine neue Art von Schiffen — Luftschiffe, und nicht nur die des Grafen Zeppelin. Im Verständnis der Kaiserlichen Marine fiel alles was „Schiff" hieß selbstredend in ihren Bereich, und so ist es nicht verwunderlich, daß der bereits genannte Admiralitätsrat Kohlschütter angeregt durch seine Kontakte mit Nelting und in Kenntnis seiner drei obengenannten Rechenschieber die Idee zu einem Navigationsrechenschieber [10, 11] speziell für Luftschiffe hatte, und daß das konkrete Design von Nelting geleistet wurde.

1911 fand Nelting eine Anstellung als Beamter der Deutschen Seewarte, einer Behörde des Reichsmarineamtes. Sie bestand einseits aus der Zentrale in Hamburg mit dem wissenschaftlichen Dienst, technischen Diensten sowie einem Bereich für Prüfungen und Diplome. Daraus enstanden später das Deutsche Hydrographische Institut und letztlich das heutige Bundesamt für Seeschiffahrt und Hydrographie (BSH). Andererseits hatte die Seewarte in allen größeren

Seehafenstädten Büros für die Betreuung der Handelsmarine und der Kaiserlichen Marine und deren Überprüfung, eine Art Schiffs-TÜV. Nelting begann als Inspektor bei der Dienststelle der Seewarte im Hamburger Hafen. Dies schloß gut an seine freiberufliche Tätigkeit an, nur daß er diesmal nicht nur Berater, sondern auch amtlicher Prüfer war.

Sein Wechsel in ein Beamtenverhältnis an der Seewarte bedeutete für Nelting aber auch, daß er strikt keiner Nebentätigkeit nachgehen durfte, und das hieß, daß er seine sämtlichen Aktivitäten um die Entwicklung, Produktion und Verkauf von Rechenschiebern einstellen mußte. Er verkaufte daher alles an die Firma Dennert & Pape in Altona. Der im Nachlaß [18] erhaltene notarielle Vertrag nennt nicht nur den Kaufpreis von 3500 Mark[1] sondern aus eine komplette Liste aller übertragenen Rechenschiebermodelle, Entwurfsunterlagen, Schutzrechte, noch bei Nelting liegende Exemplare und Anleitungen.

Was Nelting im ersten Weltkrieg machte ist nicht bekannt. Er meldete sich zwar als Navigator bei der Luftschiffflotte, doch offensichtlich ohne Erfolg. Eine spätere Publikation läßt vermuten, daß er in der Kaiserlichen Marine zur Mienenräumung in der Nordsee eingesetzt war.

Der verlorene Weltkrieg und das Ende der Monarchie trafen Nelting schwer. Er verlor damit sein persönliches Koordinatensystem, und dies war der Beginn seines Niederganges. Zuvor war sein geordnetes Leben geprägt durch die langen Jahre seines Marinedienstes und sein Dienst bei der Seewarte. Der Kaiser stand für ihn für gesellschaftliche Stabilität und klare hierarchische Ordnung des Staates.

Der nächste Schock war seine Entlassung bei der Seewarte 1919. Das war zwar nur ein administratives Manöver, denn als Einrichtung des Reichsmarineamtes galten nach dem Versailler Vertrag alle Angestellten bzw. Beamten als Militär. Also wurden alle entlassen, die Seewarte formal geschlossen, um umgehend als zivile Einrichtung neu zu starten mit dem alten Personal. So bröckelte Schritt für Schritt die Neltingsche Weltordnung, obwohl er im Laufe der Jahre vom Inspektor zum Leiter des Hamburger Büros avancierte.

Zu seinem Ausscheiden aus dem Dienst der Seewarte 1924 im Alter von 48 Jahren fehlt uns leider jegliche Information.

Neltings vier bekannte Rechenschieber

$$1)\quad \sin\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{t}{2}\cos\varphi\cos\delta}{\sin^2 1/2\,(\varphi-\delta)} + 1}\,.\,\sin 1/2\,(\varphi-\delta)$$

$$2)\quad \sin\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{t}{2}\cos\varphi\cos h}{\sin^2 1/2\,(h-\varphi)} + 1}\,.\,\sin 1/2\,(h-\varphi)$$

$$3)\quad \sin\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{q}{2}\cos\delta\cos h}{\sin^2 1/2\,(\delta-h)} + 1}\,.\,\sin 1/2\,(\delta-h)$$

$$4)\quad \sin\frac{D}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\cos\varphi_1\,.\,\cos\varphi_2}{\sin^2 1/2\,(\varphi_1-\varphi_2)} + 1}\,.\,\sin 1/2\,(\varphi_1-\varphi_2)$$

$$5)\quad \sin^2\frac{t}{2} = \frac{\left(\frac{\sin\frac{z}{2}}{\sin 1/2\,(\varphi-\delta)}\right)^2 - 1}{\cos\varphi\,\cos\delta}\,.\,\sin^2 1/2\,(\varphi-\delta)$$

$$6)\quad \sin^2\frac{\mathrm{Az}}{2} = \frac{\left(\frac{\sin\frac{p}{2}}{\sin 1/2\,(h-\varphi)}\right)^2 - 1}{\cos h\,\cos\varphi}\,.\,\sin^2 1/2\,(h-\varphi)$$

$$7)\quad \sin^2\frac{q}{2} = \frac{\left(\frac{\sin\frac{b}{2}}{\sin 1/2\,(\delta-h)}\right)^2 - 1}{\cos\delta\,\cos h}\,.\,\sin^2 1/2\,(\delta-h)$$

Abbildung 4: Teil der Formelliste aus [21]

Neltings Leistung bei dem Design seiner Rechenschieber gründet sich auf drei Einsichten. Er war kein Mathematiker, aber er kannte die Formeln der Astronavigation wie man sagt von hinten bis vorn, wie an der Übersicht in der Anleitung [21] (Abbildung 4) sieht. Es ist erkennbar, daß sehr viele Multiplikationen und Divisionen von Werten trigonometrischer Funktionen benötigt werden. Übliche Rechenschieber der Zeit wie z.B. das System Rietz konnten aber nur Zahlwerte mit trigonometrischen Werten multiplizieren/dividieren; es fehlten ihnen beiderlei Skalen sowohl auf dem Stator als auch auf der Zunge, zudem hierzu passende Quadrat- / Wurzelskalen. Damit wären Rechenschieber ein hervorragendes Recheninstrument statt langer Rechnungen mit Logarithmentafeln.

[1] dies entspricht heute einer Summe von etwa 35000 bis 45000 Euro.

Seine zweite Einsicht kam aus der Praxis: Die mathematische Notation von Winkeln auf Basis von 360 Grad für den Vollkreis ist zu ergänzen durch Winkelangabe in Zeitangaben für sogenannte Stundenwinkel, die sich aus der Erdrotation ergeben. Es ist Unfug, Winkelwerte jedesmal umrechnen zu müssen, wenn man eine Skala hat, wo man sie direkt einstellen / ablesen kann. Zudem sollten die traditionellen Kompasspunkte direkt auf den Winkelskalen vorhanden sein (Strichskala). Dementsprechend finden sich solche Winkelskalen / Marken für die trigonometrischen Funktionen auf seinen Rechenschiebern.

Die dritte Einsicht / Überzeugung kann man am besten mit den Worten Praxisrelevanz und Praxistauglichkeit beschreiben. Als Konsequenz daraus entwickelte Nelting drei Designs, welche auf bestimmte Navigationsrechnungen zugeschnitten waren, und so z.B. Skalen nur für praktisch auftretende Bereiche hatten. Daneben schuf er einen großen universellen Rechenschieber, der aber auch die im letzten Absatz genannten Skalen hatte. Diese vier Modelle erscheinen in den Dennert & Pape-Katalogen [3] von 1914, 1919 und 1924 und werden i.a. immer mit den dortigen Katalognummern bezeichnet:

Nr.	Bezeichnung
28	Azimut-Stab
29	Nautisch-Astronomischer und Universalrechenstab
30	Gestirn-Höhen-Azimutstab
31	Aeronautischer Rechenstab nach Prof. Kohlschütter

Eine ausführliche Beschreibung und Diskussion dieser Rechenschieber ist im Rahmen dieses Aufsatzes und der Tagung in Miesenbach leider nicht möglich. Dies wurde bereits 2004 von Günter Kugel [16] geleistet, wenngleich damals keine Photos der Objekte verfügbar standen. Daher wird im folgenden eine Übersicht mit einigen Bildern nebst Erläuterungen und Bemerkungen gegeben und ansonsten auf Kugel [16] und eine Reihe von Besprechungen in der zeitgenössischen Literatur [1, 5, 8, 12, 13, 14, 17] verwiesen.

Zu Nr. 28–30 sind Anleitungen in deutscher, zu Nr. 29 auch in englischer Sprache erhalten [21, 19, 20]. Exemplare der Rechenschieber sind sehr selten (mir sind jeweils weniger als fünf Stück pro Modell bekannt) und besonders begehrt in Sammlerkreisen, insbesondere Nr. 29, der i.a. nur als *Der große Nelting* bezeichnet wird. Vor Nr. 31 ist mir kein Exemplar bekannt. Alle Rechenschieber bestehen aus Mahagoniholz mit Celluloid-Auflage für mittels Teilmaschine geritzten Skalen.

Nelting konnte im Zeitraum 1908–1910 ein Patent (DRP) und drei Gebrauchsmuster (DRGM) für seine Rechenschieber[2] erfolgreich anmelden. Hierfür sind nur die Registereinträge erhalten, keine weiteren Details, bis auf das gedruckte Patent DRP 207234 zum besonderen Aufbau des Nr. 29 sowie seinem speziellen Läufer.

Nelting versuchte um 1910, seine Rechenschieber aktiv zu vermarkten, und schickte unter anderem Probeexemplare an große Reedereien sowie an Marine-Dienststellen mehrerer Länder, doch ohne großen Erfolg. In den erhaltenen Antworten [18] zeigt sich wiederkehrend eine Zufriedenheit mit vorhandenen Verfahren und daher keine Notwendigkeit eines Umstiegs auf Neltings Instrumente. Zudem hatte man hatte Vorschriften und Referenzwerke wie das Lehrbuch der Navigation des Reichs-Marine-Amtes [27]. Zwischen den Zeilen liest den bekannten Satz „Das haben wir immer schon so gemacht“ als auch (zum Teil offen) Skepsis, daß Neltings Rechenschieber genau genug wären im Vergleich zu den gewohnten Rechnungen mit Logarithmentafeln. Die publizierten Besprechungen waren generell positiv mit etwas Detailkritik. Summa Summarum: Anerkennung, aber wenig Verkäufe, jedenfalls keine Mengenbestellungen.

[2] DRP 207234 *Rechenschieber, bestehend aus einem Schieberkörper mit zwei sowohl ihren Führungen umsteckbaren, als auch gegeneinander austauschbaren, doppelseitigen Zungen*, DRGM 356144 *Rechenschieber für mathematische, nautische und astronomische Berechnungen*, DRGM 403801 *Azimut-Rechenstab*, DRGM 405255 *Rechenstab für astronomische Ortsbestimmungen in der Luftschiffahrt*, sowie ein englisches Registered Design RD 501998 für Nr. 28

Nr. 28 — Azimut-Stab

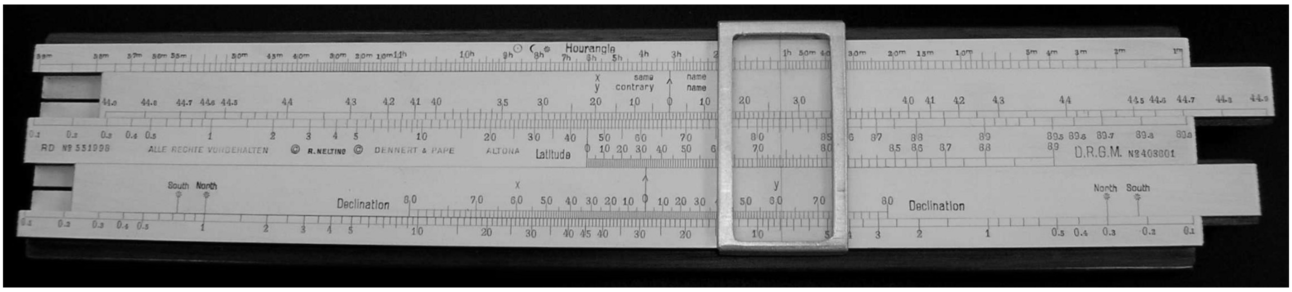


Abbildung 5: Nr. 28 – Azimutstab (englische Version)

Dieser sehr handliche Rechenschieber (Länge 28,4 cm, Breite 5,5 cm (Unterbau) / 4,5 cm (Skalenbereich), Dicke 1,0 cm) mit zwei Zungen erlaubt die bequeme Azimut-Berechnungen von Gestirnen, ohne daß der Benutzer über trigonometrische Formeln nachdenken muß. Er muß allein das allgemeine Modell und die einschlägigen Kenngrößen kennen. Neltings Azimut-Stab funktioniert auf allen Breiten von 89° Nord bis 89° Süd.

Erstaunlich ist, daß es von der Nr. 28 zwei Ausführungen gibt, eine deutsche und eine englische, unterschiedlich allein in den Texten zu den Skalen, und daß alle drei dem Autor bekannte Exemplare der englischen Version sind.

Nr. 29 — Nautisch-Astronomischer und Universal-Rechenstab

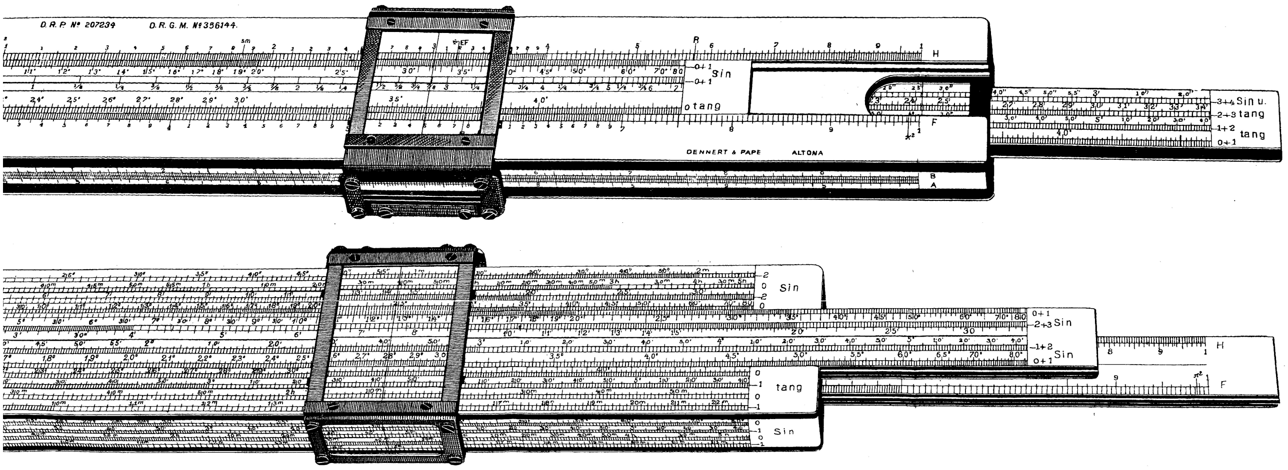


Abbildung 6: Nr. 29 – *der große Nelting*, Vorder- und Rückseite – Faltblatt aus Anleitung [19]

Der große Nelting (Nr. 29) ist in gewisser Weise das komplette Gegenstück zum Azimut-Stab. Das beginnt schon mit der Größe an sich, einer Korpuslänge von 53,6 cm, Breite 4,8 cm, Dicke 1,7 cm und setzt sich fort mit Skalen auf allen vier Seiten, sowie gegeneinander austauschbare doppelseitige Zungen auf beiden Seiten. Komplettiert wird dies durch einen Einstrich-Läufer, der den gesamten Stab mit allen Seiten umfaßt. Last not least gibt es an den Enden Aussparungen mit Fenstern und Indexstrich, so daß auch Werte auf der Rückseite der gegenüber liegenden Zunge abgelesen werden können. Die 28 Skalen sind im universal, nicht auf eine bestimmte Anwendung ausgerichtet wie bei den drei anderen Rechenschiebern (Nr. 28/30/31). Es ist ein Instrument von einem Experten für Experten, kann alles, braucht dazu aber das geballte Know-How der sphärischen Trigonomerie und deren Anwendung in der Astronavigation sowie längere Erfahrung im routinierten Umgang mit ihm. Für einen Außenstehenden oder jemanden, der nicht über beide Ohren in der Materie steckt, ist die Handhabung dieses Rechenschiebers schlichtweg sehr bzw. zu komplex, da er nicht nur die Formeln im Kopf haben muß, sondern dies mental mit der Lage aller Skalen und der Auswertungsreihenfolge koordinieren muß. Nicht umsonst hat die Anleitung einen Umfang von 65 Seiten.

Es bleibt aber nicht bei der für die üblichen Berechnuungen der Astronavigation optimierten Standardkonfiguration. Durch beliebiges Tauschen und Wenden der beiden Zungen läßt sich dieser Rechenschieber auf acht Arten für besondere Aufgaben konfigurieren (und wenn Sie auch die Zungen auch noch umgekehrt einstecken, was beim Arbeiten mit Kehrwerten handlich sein kann, sogar noch mehr). Dies lohnt sich i.a. allerdings nur, wenn Sie mehrere gleichartige Berechnungen hintereinander auszuführen haben. Dieser Rechenschieber braucht daher echte Meister zur vollen Entfaltung seiner Fähigkeiten.

In Abbildung 7 sieht man die oben erwähnte mehrfache Sinus- bzw. Tangens-Skalen auf dem Stator; von den je vier Skalen sind die beiden äußeren in Zeiteinheiten rot beziffert (Stundenwinkel bis 6 Stunden), die weiter innen liegenden schwarz in in Grad. Der Argumentbereich ist jeweils auf zwei Skalensegmente verteilt, so daß auch kleine Winkel gehandhabt werden können.

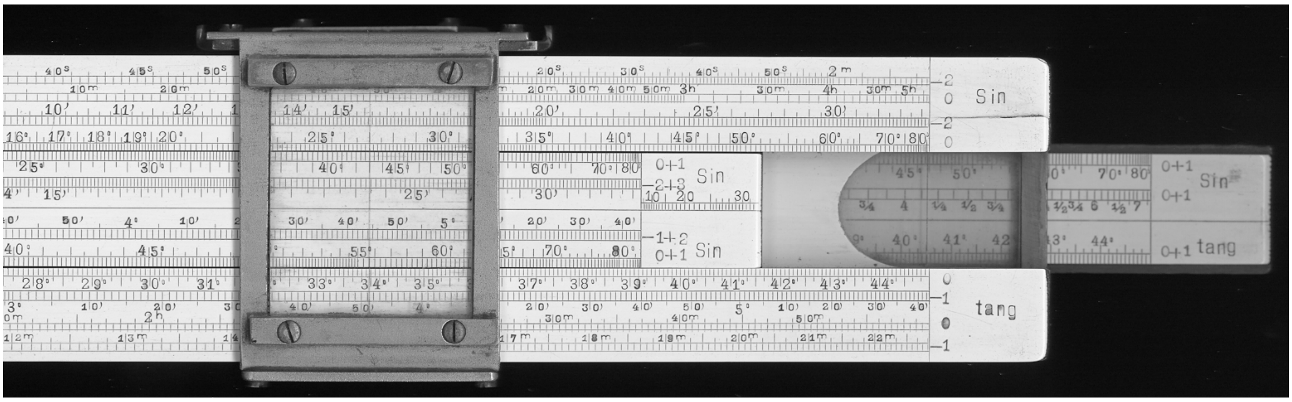


Abbildung 7: Nr. 29 – *der große Nelting*, Grad und Zeit-Skalen für sin und tan

Nelting verkaufte diesen Rechenschieber 1910 für 180 Mark, 1914 kostete er bei D & P 140 Mark, und 1919 inflationsbedingt 845 Mark. Das entspricht nach verschiedenen Kaufkraftindizes etwa 800 bis 1100 Euro heute. Damit ist er der teuerste Rechenschieber, der jemals in einem regulären Katalog eines Rechenschieberherstellers auftauchte (einige Sonderanfertigungen, insbesondere Militärrechenschieber, waren sicherlich noch teurer, aber eben keine regulären Handelsobjekte).

Nr. 30 — Gestirn-Höhen-Azimutstab

Dieser Rechenschieber stellt eine Mischform der beiden vorherigen Ansätze dar. Zum einen handelt es sich um trigonometrische Skalen, deren Sinn und Einsatz der Benutzer verstehen muß zusammen mit den einschlägigen Formeln für Azumut und Elevation, zum anderen eine passgenaue, auf die Anwendung zugeschnittete Auswahl von Skalen, bar jeder Allgemeinheit.

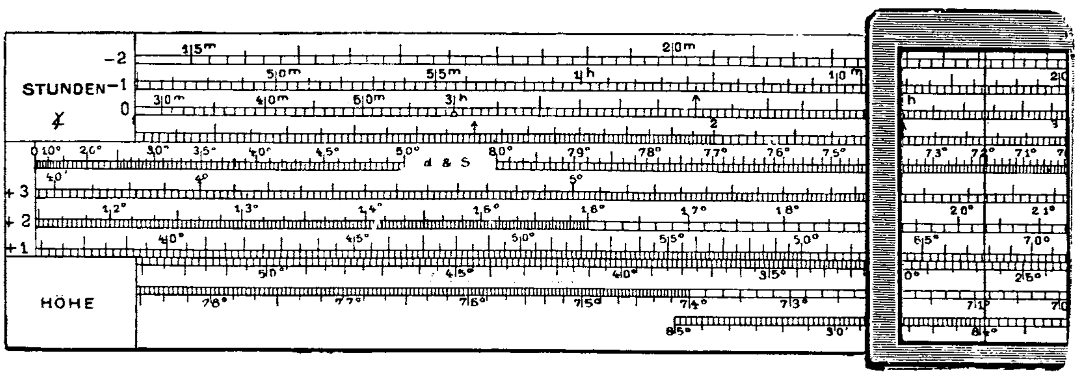


Abbildung 8: Nr. 30 – Skalenbild Gestirn-Höhen-Azimutstab – aus Katalog 1924 [3]

In Ermangelung eines guten Photos für diesen Rechenschieber (Länge 28,5 cm, Breite 2,0 cm, Skalenlänge auf Stator 25,0 cm) wird diesbezüglich auf den Aufsatz von Firneis [5] verwiesen, der zudem zeigt, daß solcherart seltene Exemplare typischer fast nur als Zufallsfunde an das Tageslicht kommen.

Nr. 31 — Aeronautischer Rechenstab nach Prof. Kohlschütter

Nr. 31 basiert auf den beiden Publikationen Kohlschütters [10, 11] zur Astronavigation von Luftschiffen. Nelting erledigte die Umsetzung in ein konkretes Stab- und Skalenlayout, einen breiten Rechenschieber mit zwei Zungen.

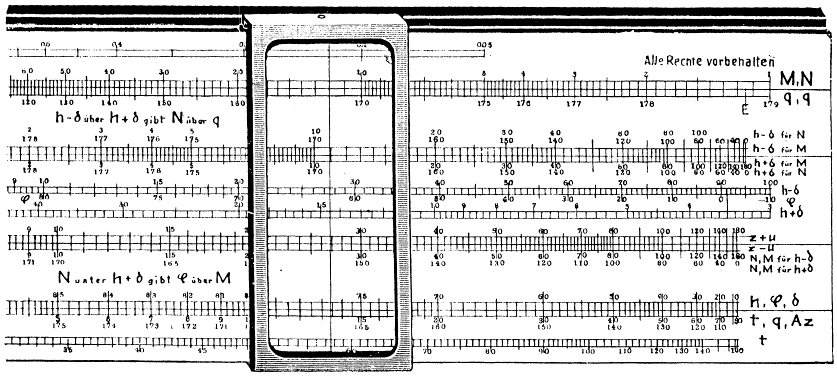


Abbildung 9: Skalenbild Nr. 31 (Katalog 1919 [3])

Eine Anleitung ist nicht erhalten, nur ein großformatiges Blatt (etwa A3) mit einer Kurzanleitung und dem Abbild der Skalen. Ein erhaltenes Exemplar des Rechenschiebers ist leider auch nicht bekannt. Es dürften nur ganz wenige gefertigt worden sein.

Biographie, zweiter Teil 1924–1947

Nach seiner Pensionierung 1924 zog Nelting von Hamburg-Elmsbüttel auf ein Anwesen im Dorf Eidelstedt nord-westlich vor den Toren von Hamburg, heute Teil von Hamburg, das er dort erworben hatte. Ein großer Garten und evtl. etwas Kleinlandwirtschaft machte ihn und seine Familie zu Selbstversorgern, was ihnen in den Krisen und ökonomischen Belastungen der zwanziger Jahre sowie im zweiten Weltkrieg und der Zeit danach über die Runden half.

1928 fiel Nelting auf, daß Dennert & Pape seinen Namen überhaupt nicht mehr nannte, weder in Katalogen und Werbeblättern, noch auf den Titelseiten der Anleitungen und auch nicht auf den Rechenschiebern selber. Erst brieflich, dann über eine Anwaltskanzlei pochte er auf sein Urheberrecht und Nennung seines Namens. Das Problem bestand darin, daß es durch Tod des Inhabers bei Dennert & Pape eine neue Geschäftsführung gab, die ihn nicht kannte, und seine Rechenschieber garnicht mehr im Produktionsprogramm waren. Der Streit schaukelte sich hoch, doch noch gerade bevor es zu Gericht ging kam es zu einer Einigung, die vor allem beinhaltete, daß sein Name auf allen noch existierenden Exemplaren per Stempel nachträglich aufgebracht wurde. Obwohl er sein Ziel im Grunde erreicht hatte, traf diese Auseinandersetzung Nelting heftig. Sein Selbstwertgefühl hatte durch die Nicht-Nennung und gefühlte Löschung seines Namens Schaden genommen.

Robert Nelting blieb nach seiner Pensionerung bei der Seewarte seinen alten Lieben treu, der Astronavigation mit der zugehörigen sphärischen Trigonometrie und Rechenschiebern. Dabei hatte es ihm insbesondere die Mercator-Funktion $\mathrm{f}\,(x) = \tan(45^\circ + \frac{x}{2})$ angetan. Er erarbeitete in den Jahren vor 1930 Grundzüge eines System, damit in der Astronavigation die klassischen trigonometrischen Funktionen abzulösen und publizierte dies 1930 [23, 24]. Er beantragte sogar bei der Nothilfe der Deutschen Wissenschaft Unterstützung für die weitere Ausarbeitung [18]. Diese wurde ihm aber versagt. Sein Aufsatz [23] wurde von Freiesleben [6] verrissen, zum einen wegen einiger Fehler in den Formeln, vor allem aber wegen früheren Arbeiten und Publikationen zur Merkator-Funktion, insbesondere Börgens Arbeit von 1898 [2]. Parallel zur Publikation entwickelte Nelting mehrere Rechenschieber auf Basis seines Systems, wofür er 1930 auch drei

DRGM[3] erfolgreich anmeldete. Zudem baute er Prototypen, einer davon heute im Nachlaß [18]. In Abbildung 10 sieht man die händisch erstellte Teilung der Skalen. Er holte sogar zwei Angebote für eine professionelle Fertigung ein, doch fand eine Produktion nicht statt.

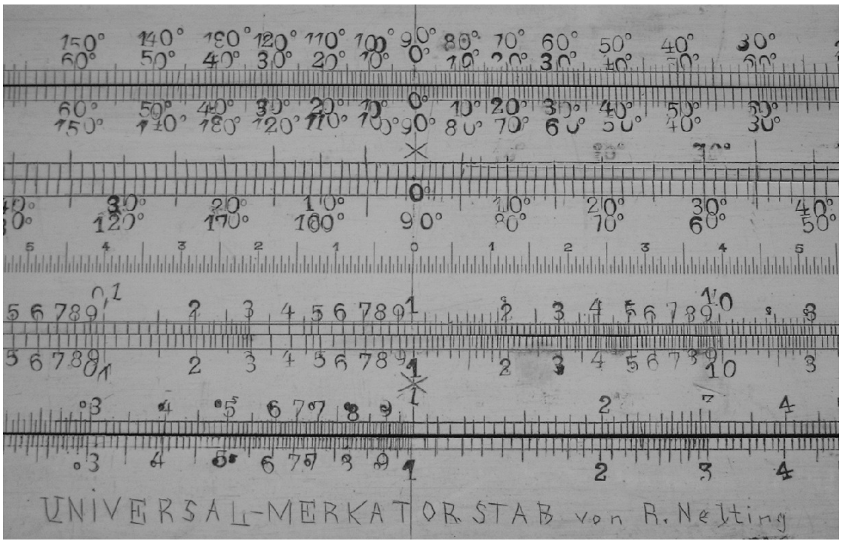


Abbildung 10: Händisch erstellte Skalen auf Neltings Prototyp für einen Mercatorrechenstab

Nach vielen vergeblichen Versuchen, mit seiner Arbeit zur 'Einfunktion f' bei einer Reihe von Personen, Zeitschriften und wissenschaftlichen Einrichtungen Beachtung und Wohlwollen zu erlangen, gab Nelting schließlich auf. Daß Rechenschieber auf dieser Basis ebenso kein Erfolg werden würden war ihm klar, und so blieb es bei Prototypen wie dem in Abbildung 10. Es war eine weitere Enttäuschung in seinem Leben, die wohl auch darauf beruhte, daß er mit seinem Bildungshintergrund ohne höhere Schulbildung geschweige akademischem Studium nicht in der gleichen Liga spielen konnte wie die von ihm angesprochenen Personen und Funktionsträger; Dr. H.-C. Freiesleben [6] von war letztlich nur ein Repräsentant dieser akademischen Kreise.

Diese Enttäuschung, die Affäre 1928 mit Dennert & Pape, sein frühes Dienstende bei der Seewarte, der offenbare geringe kommerzielle Erfolg seiner Rechenschieber um 1910, der verlorene Erste Weltkrieg mit seinen Folgen, insbesondere der Verlust der Monarchie, und sicher auch die Wirren und ökonomischen Probleme der zwanziger Jahre, all das raubte Nelting die Orientierung für sein Leben.

Statt Kaiser und Marine suchte Nelting eine neue Führung, und es ist mit diesem Hintergrund und der Zeit um 1930 nicht verwunderlich, daß dies die national-sozialistische Bewegung wurde. Ob er Parteimitglied wurde ist nicht bekannt[4]. Jedenfalls entwickelte sich Nelting zu einem überzeugten und wohl auch aktivem Nazi. Er schrieb für ein völkisches Magazin mindestens einen Artikel, welcher einen Marineeinsatz zur Mienenräumung in der Nordsee beschrieb. Darin enthalene Details legen die Vermutung nahe, daß Nelting im Ersten Weltkrieg dort seinen Kriegseinsatz hatte.

Der Kauf des Anwesens in Eiderstedt am Rande von Hamburg und die damit verbundene Versorgungsautarkie sicherte Neltings Familie ein Überleben im Zweiten Weltkrieg und der schwierigen Zeit danach, auch wenn es ihr nicht einfach war mit ihm als Familienoberhaupt, das seine Familie sehr streng führte, und mit seiner politischen Einstellung.

Robert Nelting verstarb am 14.12.1947 in Hamburg im Alter von 71 Jahren.

[3] DRGM 1130562 *Merkatoreinfunktionsrechenstab*; DRGM 1130671 *Merkatorrechenstab*; DRGM 1130672 *Zahlen- und Kubusmerkatorrechenstab*; von allen keine Details erhalten, nur Registerdaten

[4] Diesbezügliche Recherchen wurden bislang nicht durchgeführt, da dies als unwesentlich für seine Leistungen als Entwickler von Rechenschiebern angesehen wurde.

Und was bleibt unter dem Strich?

Betrachtet man die Geschichte der Rechenhilfsmittel zur Astronavigation zur See, so kann man folgende drei ‘Highlights’ ausmachen, siehe Abbildung 11:

1. Die Gunterscale [9, 26] von Edmund Gunter um 1625 erfunden, mit Skalen auf einem langen Holz, welche mit einem Marinezirkel abgegriffen und gegeneinander aufgegetragen wurden. Dies war ein spezieller Vorläufer des Rechenschiebers, der vor allem in in der Royal Navy mehrere Jahrhunderte lang zum Einsatz kam.

2. Neltings Rechenschieber, praktisch vor allem der Azimut-Rechenschieber (Nr. 28), doch herausragend in seiner Vielfältigkeit und Allgemeinheit *der große Nelting* (Nr. 29).

3. Der von Bygrave entwickelte und von Dennert & Pape perfektionierte Höhenrechenschieber [28] nutzen eine Helixform für besonders lange Rechenschieberskalen auf ineinander steckenden und zueinander verschieblichen und drehbaren Tuben. Daraus resultierte ein recht genaues und zugleich kompaktes Instrument für Berechnungen der Astronavigation in Flugzeugen und auf U-Booten.

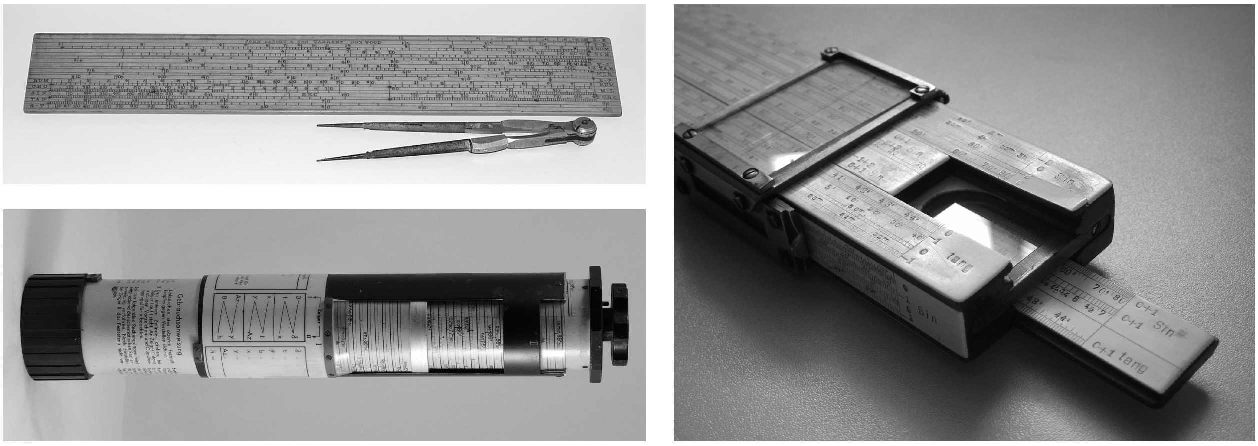


Abbildung 11: links: Gunterscale mit Zirkel, Dennert & Pape Höhenrechenschieber MHR1,
rechts: der große Nelting, Dennert & Pape Nr. 29

Robert Nelting war kein Mathematiker. Er war auch kein Ingenieur oder Wissenschaftler mit einer akademischen Ausbildung, hatte nie eine Hochschule von innen gesehen. Für die meisten seiner Zeitgenossen war er einfach ein Volksschüler, der in Lehrgängen der Kieler Marineschule vertiefte Nautik-Kenntnisse erworben hatte und sich zudem mit Rechenschiebern auskannte. Anders sah dies aus bei denen, die ihn und seine Expertise kannten und schätzten, namentlich Admiralitätsrat Kohlschütter in Berlin und Korvettenkapitän Kurtz, der nicht nur Kommandant auf der Planet, sondern auch Neltings Navigationslehrer an der Kieler Marineschule war. In den erhaltenen Briefen [18] herscht ein professionell respektvoller und freundlicher Ton, der aber auch nach Ausscheiden aus der Marine die Form wahrt, oder kurz gesagt: man traf sich auf Augenhöhe, aber kannte auch die Dienstränge.

Nelting war ein Meister in der Nutzung des mathematischen Werkzeugkastens und hatte ein tiefes Verständnis von den Möglichkeiten eines logarithmischen Rechenschiebers. Mit diesen Fähigkeiten schuf er neue Recheninstrumente für die Astronavigation, die über die seinerzeit gängigen Rechenmethoden und Rechengeräte hinausgingen bzw. diese ablösten, wie z.B. Logarithmentafeln. Dies waren z.B. die mehreren Zungen auf Nr. 28 und 31, die parallelen Skalen für verschiedene Argumenttypen einer trigonometrischen Funktion, oder die Möglichkeiten der freien Konfiguration von Zungen an Nr. 29. Technisch waren seine Rechenschieber aus der Zeit um 1910 Spitzenleistungen, inbesondere *der große Nelting* Nr. 29.

Neltings Pech bestand drin, daß er bis dahin in der Marine in einer anderen Welt lebte, einer Welt ohne den Markt, auf dem neue Objekte ankommen und bestehen müssen. Spezialrechenschieber sind Nischenprodukte, die sowieso immer nur einen kleinen Markt haben. Der für Astronavigation war damals aber extra klein, insbesondere dadurch, daß er stark national und militärisch geprägt war[5]. Zugespitzt: Die Royal Navy, und nicht nur sie, wird 1910 wohl kaum ein Navigationsinstrument aus Deutschland gekauft haben. Bezüglich der Nr. 29 muß man hinzufügen, daß dieser Rechenschieber für Nelting kein Problem gewesen sein wird, aber sein effektiver Gebrauch bedingt eine gewisse Meisterschaft. In gewisser Weise schuf Nelting Rechenschieber für sein Niveau von Expertise, weniger für das der potentiellen Kundschaft. Hinzu kam für alle seine Instrumente natürlich auch die Frage des Preises.

Für die Mathematikgeschichte muß man festhalten, daß es in der angewandten Mathematik und da insbesondere bei mathematischen Instrumenten sehr häufig Mathematikanwender wie Ingenieure oder Fachleute verschiedenster anderer Gebiete waren, die zu (Weiter-) Entwicklungen wesentliche Beiträge geliefert haben. Sie verdienen daher mehr Aufmerksamkeit als bislang üblich. In der Regel besitzen diese Leute durchaus einen gewissen mathematischen Hintergrund, typischerweise auf einem akademischen Niveau. Im Falle von Nelting war dies genau nicht gegeben, was ihn zum überdies zu einem ganz besonderen Fall macht. Aus diesen beiden Gründen, Außenseiter und Nicht-Akademiker, dieser Bericht auf einer Mathematikgeschichtstagung.

Literatur

[1] Ambronn, Leopold: *Der nautisch-astronomische Rechenstab von R. Nelting*, in: *Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie*, Hamburg: Deutsche Seewarte, Band 38 (1909) Oktober, S. 369–373.

[2] Börgen, Carl: *Über die Auflösung nautisch-astronomischer Aufgaben mit Hilfe der Tabellen der Meridionalteile (der "Merkator Funktion")*, in: *Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte und des Marineobservatoriums*, Hamburg: Deutsche Seewarte, Band 21, 1898.

[3] Dennert & Pape, Fabrik von geodätischen Instrumenten und Präzisions-Maßstäben: *Preisverzeichnis über Rechenstäbe etc.*, Altona, Ausgaben 1914, 1919 und 1924 (Kopien auf CDROM von [15]).

[4] Deutsche Seewarte (Hrsg.): *Die Forschungsreise S. M. S. „Planet"*, in: *Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie*, Hamburg: Deutsche Seewarte, Band 34 (1906), S. 145–147, 220–227, 259–265, 305–313, 353–365, 409–414, 457–464, 505–510, 556–562, Band 35 (1907), 1–5, 49–53, 145–149, 193–198, 345–248, 388-390, 441–446, Band 36 (1908), 63-66.

[5] Firneis, Maria: *Sphärische Astronomie vom Flohmarkt*, in: *Star Observer*, Wien: Star Observer Verlag, Heft July/August/September 1995, S. 46–51.

[6] Freiesleben, Hans Christian: *Das Merkator-Logarithmensystem*, in: *Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie*, Hamburg: Deutsche Seewarte, Band 58 (1930) September, S. 326–327.

[7] —: *Kohlschütter, Ernst*, in: *Neue Deutsche Biographie*, Band 12 (1979), S. 432 [Onlinefassung `https://www.deutsche-biographie.de/pnd11630801X.html`].

[8] Hammer, Ernst: *Nautisch-astronomischer Rechenschieber von R. Nelting*, in: *Zeitschrift für Vermessungswesen*, Stuttgart: Wittwer, Jahrgang 1908, Heft 24, S. 626–627.

[9] Jerrman, Ludwig: *Die Gunterscale: Vollständige Erklärung der Gunterlinien und Nachweis ihrer Entstehung nebst zahlreichen Beispielen für den praktischen Gebrauch*, Hamburg: Eckardt & Meßtorff, 1888.

[10] Kohlschütter, Ernst: *Einheitliche Methoden für die astronomische Ortsbestimmung im Ballon*, in: *Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie*, Hamburg: Deutsche Seewarte, Band 37 (1909) Oktober, S. 449–459.

[11] —: *Betrachtungen über Höhenstandlinien im allgemeinen und deren Anwendung auf die astronomische Ortsbestimmung im Ballon im besonderen*, in: *Annalen der Hydrographie und Maritimen*

[5] Bis zum ersten Weltkrieg gab es i.a. keine große Unterscheidung von Handels- und Kriegsmarine.

Meteorologie, Hamburg: Deutsche Seewarte, Band 38 (1910) Februar, S. 68–87, 2 Tafeln (Abbildungen Rechenschieberskalen).

[12] —: *Der Azimutstab von R. Nelting*, in: *Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie*, Hamburg: Deutsche Seewarte, Band 38 (1910) Oktober, S. 560–561.

[13] —: *Höhenazimut-Rechenstab*, in: *Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie*, Hamburg: Deutsche Seewarte, Band 39 (1911) November, S. 665–668.

[14] —: *Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn Korvettenkapitäms Kurtz*, in: *Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie*, Hamburg: Deutsche Seewarte, Band 40 (1912) Februar, S. 101.

[15] Kühn, Klaus; Kleine, Karl (Hrsg.): *Dennert & Pape ARISTO 1872 – 1978, Rechenschieber und mathematisch-geodätische Instrumente*, München: Zuckschwert-Verlag, 2004, isbn 3-88603-863-7, xviii+439 Seiten, 2 CDROM.

[16] Kugel, Günter: *The Nautical Slide Rules no. 28 – 31 in the D & P-catalogue of 1914*, in: [15], S. 245–263; erweiterte Version in: *Slide Rule Gazette*, issue 5, Herbst 2004, S. 63–80.

[17] Kurtz, E.: *Zeit- oder Höhen-Azimutstab?*, in: *Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie*, Hamburg: Deutsche Seewarte, Band 40 (1912) Februar, S. 97–100, mit Nachwort von Kohlschütter [14].

[18] Nelting, Robert: Nachlaß, im Besitz der Familie, Teilkopie beim Autor.

[19] —: *Der Nautisch-Astronomische und Universal-Rechenstab und seine Verwendung*, Hamburg: Selbstverlag, 1909, sowie: Altona: Dennert & Pape, 1912, 67 Seiten, Format $18,7 \times 25.6$ cm, ausfaltbares Beiblatt.

Dennert & Pape: *The Nautic-Astronomical and Universal Calculator*, 1912
[english version of the manual, no mention of Nelting on title page].

[20] —: *Azimut-Stab zur schnellen Bestimmung der wahren Richtungen aller Gestirne auf allen Breiten*, Selbstverlag, undatiert nach [19], 8 Seiten, Format $12,7 \times 20$ cm.

[21] —: *Der Gestirn-Höhen-Azimut-Stab, zur schnellen Bestimmung der Höhen und Azimute der Sonne, des Mondes, der Planeten und aller Sterne und zur Bestimmung der Namen beobachteter unbekannter Gestirne auf allen Breiten*, Altona: Dennert & Pape, 1912, 18 Seiten, Format $19,2 \times 26,3$ cm

Exemplare der Anleitungen [21, 19, 20] im Archiv des Deutschen Museums, Firmenarchiv Dennert & Pape, sowie auf der CDROM Nr. 2 von [15] und beim Autor.

[22] —: *Der Gestirns-Höhen-Azimut-Stab*, in: *Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie*, Hamburg: Deutsche Seewarte, Band 40 (1912) April, S. 194–200.

[23] —: *Das Merkator-Logarithmensystem mit der Basis 0.1263311 oder einer durch 10 teilbaren Zahl der Zahlenfolge 1263311*, in: *Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie*, Hamburg: Deutsche Seewarte, Band 58 (1930) April, S. 149–155, Mai, S. 172–183, Korrekturen Dezember, S. 444–445.

[24] —: *Das Merkator System: die neue trigonometrische Einfunktion 'f' und 'cf' zur Lösung aller Aufgaben der Arithmetik und der ebenen und sphärischen Trigonometrie nebst Merkator Logarithmen Tabellen*, Selbstverlag, 10+3 Seiten, 1930

Kurzbesprechung in: *Das Weltall*, Band 30 Heft 6, März 1931, S. 88.

[25] Reichs-Marine-Amt (Hrsg.): *Forschungsreise S.M.S. „Planet“ 1906/07*, 5 Bände: I. *Reisebeschreibung*, II. *Aerologie*, III. *Ozeanographie*, IV. *Biologie*, V. *Antropologie und Ethnographie*, Berlin: Verlag von Karl Siegismund, 1909.

[26] van Poelje, Otto: *Gunter Rules in Navigation*, in: *Journal of the Oughtred Society*, Band 13 Nr. 1, 2004, S.11-22.

[27] Reichs-Marine-Amt (Hrsg.): *Lehrbuch der Navigation*, Band 1: *Terristische Navigation*, Band 2: *Astronomische Navigation*, Berlin: Ernst Siegfried Mittler und Sohn, ^{1}1900, ^{2}1906.

[28] van Riet, Ronald: *Position Line Slide Rules: Bygrave and Höhenrechenschieber*, in: *Proceedings of the 14th International Meeting of Slide Rule Collectors (IM2008)*, Lemington Spa, 2008, S. 8–34.

Back to the roots of graph theory

Harald Gropp

d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

1. Introduction

This paper is dedicated to **Jürgen Schönbeck** and his wife **Charlotte Schönbeck** who have died during the last 4 years since Miesenbach 2018. Jürgen Schönbeck was a participant in **Neuhofen** in **1986 in the first Austrian symposium on the history of mathematics**.

The paper is also dedicated to **Ernst Steinitz** who was born on June 13, 1871, i.e. exactly 151 years ago. My talk in Miesenbach took place on June 13, 2022. In times of Covid-19, also such „not so round" jubilees have to be celebrated. Apropos jubilees, for the 300th anniversary of the University of Kiel in 1965, Charlotte Schmidt (Schönbeck) wrote her dissertation on the history of astronomy in Kiel [sc1] and Jürgen Schönbeck wrote a paper on the history of mathematics in Kiel [sc2] where he also discussed the work of Steinitz who died in Kiel in 1928. Steinitz worked in combinatorics and geometry (see below), and the two Schönbecks contrbuted a lot to the scientific atmosphere in Heidelberg in the last decades.

Charlotte Schönbeck worked on the history of physics, astronomy, and technology focussing on Lenard, Einstein, and Agricola.

Jürgen Schönbeck (1936-2021) worked on the history of mathematics, e.g. on Euclid and Thomas Clausen. In both cases this is not the place for a longer discussion of the life and work of Charlotte and Jürgen Schönbeck.

Instead the following lines from a short obituary in a newsletter of the Pädagogische Hochschule Heidelberg are cited here (February 2022)

Professor Jürgen Schönbeck ist gestorben

Als Wissenschaftler anerkannt und als Lehrender hoch geschätzt – auch in der Hochschulverwaltung engagiert

Professor Jürgen Schönbeck ist am 24. November 2021 im Alter von 85 Jahren verstorben. Jürgen Schönbeck war von 1970 bis zu seiner Pensionierung 2001 im Fach Mathematik tätig. Er hat mit großem Engagement seine Lehrtätigkeit wahrgenommen und bei seinen Studierenden Freude an der Mathematik und ihrer unterrichtlichen Vermittlung geweckt. In der hochschulischen Verwaltung hat er viele Aufgaben übernommen. Er war Mitglied im Senat, Fachbereichsleiter und leitete längere Zeit das akademische und das staatliche Prüfungsamt.

So far the PH Heidelberg. No single word on his engagement for and on his research on the history of mathematics, in the first short paragraph. Only after having clicked on *Mehr erfahren* you learn about his work in the history of mathematics. This tells a lot about the situation of the history of mathematics in the year 2022, not only in Heidelberg. It is quite remarkable how Jürgen Schönbeck and his wife turned the *Oberseminar über Didaktik der Mathematik* into also a seminar about the history of science.

2. **Back to the roots, what should this mean? Back to my roots** and **back to our roots**.

Back to my roots means back to combinatorics and to the **history of combinatorics and graph theory**. In my early symposia in **Neuhofen 1992** [gr1] and **1995** [gr2] I discussed two topics in the history of configurations. This paper will discuss the history of graph theory with a special focus on the early history, maybe the **prehistory of graph theory.**

Back to our roots means back to the roots of our Neuhofen-Miesenbach symposia where many of us have met regularly, some of us for 36 years now. It also means **back to early stages of our human culture** and its involvement in mathematics for the special case of graph theory. It may even lead us back to **our nearest neighbours** in the empire of **primates** in past and present. It could be that this will be postponed to a talk in **Miesenbach 2024.**

In this above described sense this paper tries to contribute to the topic of „Längsschnitte“ concerning the long development of graph theory and of „Querschnitte“ in the sense of relations of graph theory to many other cultural areas such as languages, script, religion etc. Of course, this terminology reminds me of excavations in archaeological fieldwork which is closely related to several parts of this talk.

Hence we shall discuss the relation between mathematics and cultures, in this case graphs in the sense of **graph theory** and several cultures back to at least the **8th century BC** in the **Mediterranean Sea area.**

3. A definition and more

A **graph** consists of **vertices** and **edges** which connect these vertices. Of course, two vertices may be also disconnected, i.e. not connected by an edge. Main parts of graph theory have been developed since the **19th** century, but prepared by Leonhard Euler in the **18th** century and by Athanasius Kircher even in the **17th** century.
In order to mention this shortly here configurations are linear r-regular k-uniform hypergraphs with v vertices and b hyperedges whereas a hypergraph is a graph where an edge may connect more than 2 vertices.
These configurations were defined by Theodor Reye in 1876 and further investigated by Ernst Steinitz in his dissertation in Breslau in 1894 [ste].

Athanasius Kircher worked in Roma as a professor of mathematics in the Jesuit Collegium Romanum and travelled to Sicily and Malta, islands in the Mediterranean Sea. **Leonhard Euler** and „his“ **bridges of Königsberg** belong to the best known mathematical exercises.

4. Graph theory hymn

Since the story of Euler and the Königsberg bridges seems to be well known among historians of mathematics, let us discuss here another aspect of graph theory which is a mathematical theory with a hymn of its own. The text and the music were composed by two Czech graph theorists. In the following, parts of the Czech text together with some translations are displayed.
HYMNA TEORIE GRAFU
Text by Bohdan Zelinka, music by Zdeněk Ryjáček
1. Přes Pregolu sedm mostů stálo,

na svou dobu nebylo to málo,
králověctí radní hrdi byli,
že si tyto mosty postavili.

Seven bridges spanned the River Pregel,
Many more than might have been expected :
Königsberg’s wise leaders were delighted
To have built such very splendid structures.

Ref. Eulerian graphs all have this restriction :
The degree of any point is even.
That’s the oldest graph result
That mankind has ever known.

7. Mit dem Kriege folgt dem Fluß Verderben,
Alle Pracht der Brücken schlug in Scherben.
Eulers Ruf und Name wird auf Zeiten
Die Geschichte Königsbergs begleiten.

7. War brought strife and ruin to the Pregel ;
Bombs destroyed those seven splendid bridges.
Euler’s name and fame will, notwithstanding,
Be recalled with Königsberg’s for ever.

Altogether this Czech text has been translated into Hungarian, English, Polish, German, Afrikaans, Esperanto, Ukrainian, Indonesian, French, Japanese, Chinese, Dutch, and Serbian.

5. Athanasius Kircher

Athanasius Kircher is less known than Euler. He was born, probably in Geisa in Thüringen in 1602 and died in Roma in 1680. He became a Jesuit but his typical Jesuit education was more and more disturbed by the Thirty Years’ War (1618-1648). After a long voyage to Malta and Sicily in, 1637/38 he spent the second half of his life as a professor of mathematics, physics, and oriental languages in the Jesuit Collegium Romanum. Moreover he founded the Museum Kircherianum, maybe the first museum in the modern sense. He was one of the last polymaths. A nice book title which well describes his life and work is [gla].

In his *Ars Magna* of 1669 he displays a bipartite graph, maybe the earliest „beautiful“ graph in history. In modern terminology it is a $K_{9,9}$, a bipartite graph with 18 vertices discussing the relation of vertices. More on Kircher and on Llull can be found in [gr3].

6. Ramon Llull

From now on this paper will discuss **even earlier graphs**, among others the work of **Ramon Llull**, a Catalan scholar of the **13th** and **14th** century who used connections in the Mediterranean Sea in order to develop his ideas. Llull was born in Mallorca in 1232, he died in 1316 (probably) or later. He was a „layman“ theologian, a mathematian, a philosopher, shortly, an earlier polymath.
He is sometimes described as the „father of computer science“. Certainly, he brought the Catalan language to a high level and inherited the close connection of mathematics and linguistics from North Africa and transported it into a European and a „Catalan-Latin“ context. His main languages were Arabic, catalan, and Latin. Also Llull investigated relations between virtues, and he displayed an „Arbor scientiae“.

7. A map as graph

A remarkable piece of art and an early graph is the **Tabula Peutingeriana**, a map manuscript of the maybe **15th** century which leads us back to medieval times and maybe even to the **Roman Empire** as far as its origin is concerned.

This tabula shows the region of the Mediterranean Sea but stretches even as far as the British Isles and South Asia as a graph where the vertices correspond to towns and the edges to streets between them. Here the ways of transmission throughout many centuries are still unknown. There is a lot of discussion. The interested reader may try find further details, but by purpose I cannot recommend some reference here.

8. The earliest Greek letters and a constellation as a graph ?

This part of my paper is dedicated to A. Bartoněk (1926-2016).
On the island of **Ischia** the oldest **Greek letters** known today were excavated in the second half of the 20th century. These inscriptions date

back to the **8th century BC**, together with Phoenician and Aramaic letters in a kindergarten like evolution of the Greek script. The investigation of these inscriptions is due to the Brno scholar A. **Bartoněk.** Among these inscriptions there is the so called „constellation of Bootes“, a graph which certainly does **not** describe this constellation but which maybe served as a street map or a similar object. In any case it is a graph of the 8th century BC. Further information can be found in [bar].

9. Trees of life and town maps

The origin of these Near Eastern scripts leads us to the region of **cuneiform** culture in **Mesopotamia** and neighbouring regions where those sculptures were built which can now be visited as **„trees of life“** in European museums, excavated e.g. in Assyria and Babylonia and produced in the first half of the first millennium BC.

They denote **graphs** in the sense of the much later works of **Llull** and **Kircher** and also of **Kabbalistic** ideas. The probably **oldest town maps** of the world are also from this region, another **1000 years older**. i.e. in the first half of the second millennium BC. There is the famous Nippur town map, excavated in the year 1900, on a clay tablet of 21 cm x 17 cm.

10. Prehistoric drawings

At last, it should be discussed whether these are the oldest known graphs of mankind or whether we should accept even older **„prehistoric“ drawings** as graphs or at least as **forerunners of graphs**.

This leads to the final discussion how important these particular objects in mathematics are for the understanding of the long past and for practical use in our times. Let me mention here the oldest building constructed by humans, not a graph in a strict sense, the **structure de la grotte de Bruniquel**, built 175000 years before present.

Altogether it is the Mediterranean Sea which enabled these cultural exchanges between East and West and South and North. As a result it lead to the travel of a **mathematical idea called graph.**

11. Graphs in school

Very last but not least, the discussion of graphs in a mathematical **education context** is very useful because of the long history and deep cultural embedding of graphs. These mathematical objects are useful in daily life and are much better suitable than traditional topics in the mathematical curriculum. Graphs belong to the basis of mathematical culture and as such are much closer to applications than most other subjects in mathematics.

A very last remark here is that the author did not include any pictures in order not to be involved in all kinds of copyright problems. Moreover, the rather short discussion of these aspects of the history of graph theory and in the above sense also of the cultural history of mankind is due to the somehow restricted page limit of such a paper but also to the very special situation of the author (compare some of my earlier Miesenbach papers) which has become even more difficult because of the development of the last years (the pandemics and other very difficult problems of our time). Let me and us hope that in the future these problems will not too much disturb the future work in the history of mathematics and the symposia in Miesenbach in 2024 etc.

References:

[bar] A. Bartoněk, Die ältesten griechischen Inschriften von Pithekoussai, Die Sprache 37 (1995), 129-231.
[gla] J. Glassie, Der letzte Mann, der alles wusste. Das Leben des exzentrischen Genies Athanasius Kircher (2012).
[gr1] H. Gropp, Die Geschichte der Konfigurationen (12_4, 16_3), in: C. Binder (hrsg.): III. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, Wien (1992), 67-72.
[gr2] H. Gropp, On the history of configurations II, in: C. Binder (hrsg.): IV. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, Wien (1995), 21-25.
[gr3] H. Gropp, Athanasius Kircher (1602-1680) , Kombinatoriker in der Lullschen Tradition, in: R. Gebhardt (hrsg.): Rechenbücher und mathematische Texte der frühen Neuzeit, Annaberg-Buchholz (1999), 249-256.

[sc1] Ch. Schmidt-Schönbeck, 300 Jahre Physik und Astronomie an der Kieler Universität, Dissertation Kiel (1965).

[sc2] J. Schönbeck, Mathematik, in: Geschichte der Christian-Albrecht-Universität Kiel, Bd. 6 (1968), 9-58.
[ste] E. Steinitz, Über die Construction der Configurationen n_3, Dissertation Breslau (1894).

am Abend: Jacques Sesiano, Rita Meyer-Spasche, Renate Tobies, Alexander Odefey, Stefan Deschauer, Reinhard Siegmund-Schultze

Dasenbrock, Lea

Die Algebraschrift des Johannes Volmars im Vergleich zu Algebraschriften des mitteldeutschen Raums

Einleitung

Eine Beschäftigung mit der Algebra erfolgt bereits seit mehr als 4000 Jahren. Während die Algebra seit dem 12. Jahrhundert im kaufmännischen Wesen Anwendung fand,[1] spielte sie in der mathematischen Lehre der Universitäten im ausgehenden Mittelalter kaum eine Rolle.[2] Dennoch finden sich einige frühe Zeugnisse, die eine Beschäftigung mit Algebra im universitären Kontext attestieren. So lassen sich in den Archiven der mitteldeutschen Universitäten einige Algebraschriften zum Ende des 15. und zu Beginn des 16. Jahrhunderts finden, u.a. an den Universitäten Leipzig und Wittenberg. Im folgenden Artikel sollen die Schriften des Wittenberger Mathematikers Johannes Volmar (um 1482-1536) und der Leipziger Mathematiker Johannes Widmann (1460-nach 1500), Andreas Alexander (um 1475-nach 1504) miteinander verglichen werden.

Algebraschriften der mitteldeutschen Universitäten Ende des 15. und zu Beginn des 16. Jahrhunderts

Im 15. und zu Beginn des 16. Jahrhunderts wurde eine Vielzahl von Universitäten gegründet, was gleichsam ein Ausdruck eines wirtschaftlichen Aufstiegs und des Reichtums der norddeutschen, rheinischen und süddeutschen Städte, der Abweichung von der Scholastik als mittelalterlichem Bildungsideal, sowie der bewussten Einordnung der Universitäten in den Dienst des einzelnen Territorialherrens war. In diese Zeit fielen im mitteldeutschen Raum die Gründungen der Universität Leipzig im Jahr 1409 und der Universität Wittenberg im Jahr 1502. Die mathematische Lehre an beiden Universitäten war zu dieser Zeit stark durch das Quadrivium geprägt, welches die Arithmetik, Musiktheorie, Geometrie und Astronomie umfasst.[3] Die Algebra wird erst im 17. Jahrhundert an der Universität Wittenberg thematisiert, wie die Quellenlage belegt.[4] Allerdings bezeugt die Vorlesung von Caspar Peucer (1525-1602) im Jahr 1557,[5] dass sich bereits vor der Einbeziehung in die Wittenberger Statuten im Jahr 1666 Spuren der Algebra finden lassen. Für Leipzig kann man feststellen, dass in den ersten 150 Jahren der Universität keine Algebra in ihren Statuten festgeschrieben wurde.[6] Die Vorlesungsankündigung des Johannes Widmanns im Jahr 1486 zeigt, dass die Algebra auch

---

[1] Vgl. Alten (2008), S. 217.
[2] Vgl. ebd., S. 226.
[3] Vgl. ebd., S. 55.
[4]Siehe: UAH, Rep. 1 Nr. 4944
[5] Vgl. Schöneburg (2010), S. 25.
[6] Siehe: Zarnke (1857)

in Leipzig bereits früher vorzufinden ist.[7] Neben den beiden Vorlesungsankündigungen bezeugen auch Handschriften Widmanns, Alexanders und Volmars, dass algebraische Themen am Ende des 15. und zu Beginn des 16. Jahrhunderts an den beiden Universitäten thematisiert wurden.

Während die Algebraschrift des Johannes Widmanns von Kurt Vogel (1981) untersucht wurde, die sich, wie ebenfalls der Text seiner Algebravorlesung, in der Dresdner Sammelhandschrift C 80 befindet, sind die Schriften des Andreas Alexanders bisher noch nicht untersucht worden. Über diesen als Person sind nur wenige Daten bekannt. Er, der aus Regensburg stammte, studierte in Köln sowie in Leipzig und hielt dort zwischen den Jahren 1502 und 1504 mathematische Vorlesungen, wie z.B. über die Bücher 1 und 3 von Euklid. Nach 1504 verliert sich seine Spur.[8]

Der Mathematiker Johannes Volmar ist eng mit der mathematischen Lehre zwischen den Jahren 1517-1536 an der Universität Wittenberg verknüpft. Nach seinem Studium in Krakau und Wittenberg wechselte er für das Sommersemester 1516 an die Universität Leipzig und kehrte danach nach Wittenberg zurück, wo er ab dem Jahr 1517 mathematische Vorlesungen hielt und ab dem Jahr 1520 die Professur für Mathematik übernahm. Nach der Aufteilung in die Professur der Höheren und Niederen Mathematik im Jahr 1525 hatte er die für Höhere Mathematik bis zu seinem Tod im Jahr 1536 inne.[9] Es sind eine Vielzahl von Büchern und verschiedener Sammelschriften von ihm erhalten. Die Bücher thematisieren vorrangig die Astronomie. Die Sammelschriften umfassen Inhalte der Astronomie, Astrologie, Medizin und Mathematik, wobei in den mathematischen Schriften ebenfalls algebraische Themen beschrieben wurden.

Der Fokus dieses Artikels bezieht sich auf die Schrift Volmars, im Rahmen dieses Artikels erfolgt ein Vergleich hinsichtlich der Inhalte und der Verwendung von Symbolen. Dies ist interessant, da alle drei Schriften im Zeitraum der *Deutschen Coß* entstanden sind, welche sich zum Ziel setzte, „die mathematischen Terminologie vom geschriebenen Wort zu lösen.“[10]

Vergleich der Algebraschriften des Johannes Widmanns, Andreas Alexanders und Johannes Volmars

Der Inhalt der Schriften

Um die Inhalte der Schriften besser vergleichen zu können, werden sie in einer Tabelle gegenübergestellt.

[7] Vgl. Alten (2008), S. 246.
[8] Vgl. ebd., S. 246.
[9] Vgl. Dasenbrock (2021), S. 84f..
[10] Kaunzner (1992), S. 159f.

Tabelle 1: Darstellung der Inhalte

Johannes Widmann[11] (1486)	**Andreas Alexander**[12] (um 1500)	**Johannes Volmar**[13] (um 1524)
Einführung von Symbolen der ersten fünf Potenzen	Einführung von Symbolen der ersten zehn Potenzen	Einführung von Symbole der ersten zehn Potenzen
24 Gleichungsfälle, wovon die ersten sechs Fälle als „vornehme“ Fälle bezeichnet werden. 1) $ax^2 = bx$; 2)$ax^2 + bx = c$ 3) $ax = c$ 4) $ax^2 + bx = c$ 5) $ax^2 + c = bx$ 6) $ax^2 = bx + c$ 7) $x^4 = ax^3$ 8) $x^4 = ax^2$ 9) $x^4 = bx$ 10) $x^4 = c$ 11) $x^3 = ax^2$ 12) $x^3 = bx$ 13) $x^3 = c$ 14) $x^3 + ax^2 = bx$ 15) $x^3 = ax^2 + bx$ 16) $x^3 + bx = ax^2$ 17) $x^4 + ax^3 = bx^2$ 18) $x^4 = ax^3 + bx^2$ 19) $x^4 + bx^2 = ax^3$ 20) $ax^2 = \sqrt{bx}$ 21) $x^2 = \sqrt{bx}$ 22) $x^4 + ax^2 = c$ 23) $x^4 + c = ax^2$ 24) $x^4 = ax^2 + c$	Rechnen mit Binomen: $(ax^n \pm bx^m) \pm (cx^p \pm dx^q)$ $(ax^n \pm bx^m) \cdot (cx^p \pm dx^q)$ $(ax^n \pm bx^m) : (cx^p \pm dx^q)$ Einführung der Potenzen von $x^{10} - x^{18}$ Wiedergabe einer Tabelle zum Vorzeichenwechsel beim Rechnen mit zu multiplizierenden Binomen	Rechnen mit Binomen: $(ax^n \pm bx^m) \pm (cx^p \pm dx^q)$ $(ax^n \pm bx^m) \cdot (cx^p \pm dx^q)$ $(ax^n \pm bx^m) : (cx^p \pm dx^q)$ Einführung der Potenzen von $x^{10} - x^{18}$ Wiedergabe einer Tabelle zum Vorzeichenwechsel beim Rechnen mit zu multiplizierenden Binomen
	Rechnen mit Bruchtermen: $\frac{ax^n \pm bx^m}{cx^p \pm dx^q} \pm \frac{ex^r \pm fx^s}{gx^t \pm hx^u}$ $\frac{ax^n \pm bx^m}{cx^p \pm dx^q} \cdot \frac{ex^r \pm fx^s}{gx^t \pm hx^u}$ $\frac{ax^n \pm bx^m}{cx^p \pm dx^q} : \frac{ex^r \pm fx^s}{gx^t \pm hx^u}$	Rechnen mit Bruchtermen: $\frac{ax^n \pm bx^m}{cx^p \pm dx^q} \pm \frac{ex^r \pm fx^s}{gx^t \pm hx^u}$ $\frac{ax^n \pm bx^m}{cx^p \pm dx^q} \cdot \frac{ex^r \pm fx^s}{gx^t \pm hx^u}$ $\frac{ax^n \pm bx^m}{cx^p \pm dx^q} : \frac{ex^r \pm fx^s}{gx^t \pm hx^u}$
Eingekleidete Aufgabe, die auf die 24 Gleichungsfälle führen	Einführung der Wurzel (inkl. Symbol) und Rechnen mit Binomen mit mind. 1 Wurzelmonom	Einführung der Wurzel (inkl. Symbol) und Rechnen mit Binomen mit mind. 1 Wurzelmonom
	8 Regeln von *almuchabole & gebre*	8 Regeln von *almuchabole & gebre*

11 Siehe dazu: Vogel (1981) und Dresden C 80.
12 Siehe dazu Ms. 1696.
13 Siehe dazu Ms. el. f. 74.

Wie man an der Tabelle erkennen kann, nehmen die 24 Gleichungsfälle eine wichtige Rolle in der Schrift Widmanns ein. Diese von al-Chwarizmi überlieferten Fälle wurden von Widmann in einem Fließtext beschrieben und in mind. einem Beispiel aufgegriffen.[14] Die Gleichungen werden zum Teil in eingekleideten Aufgaben zum Ende der Schrift aufgegriffen.

Im Vergleich dazu setzen Volmar und Alexander andere inhaltliche Schwerpunkte. Betrachtet man diese lässt sich festhalten, dass diese inhaltlich übereinstimmen. Aufgrund der zeitlichen Einordnung beider Schriften und des Aufenthalts Volmars in Leipzig kann stark angenommen werden, dass Volmar die Schrift Alexanders kopiert hat, sowie dieser handschriftliche Notizen angefügt hat.[15] Es kann davon ausgegangen werden, dass Volmar in seiner Leipziger Zeit mit der Schrift Alexanders in Kontakt kam und sogar nach einer handschriftlichen Notiz einst Besitzer der Leipziger Handschrift Ms. 1696 war.[16]

Deswegen werden die Schriften bzgl. ihres Inhalts gemeinsam analysiert. Beide Algebraschriften tragen den Titel „Prologus in Algebrae“ und thematisieren zuerst die Symbolik und die Namen der ersten zehn Potenzen. Diese werden in der Einführung der einzelnen Algorithmen in den Beispielen verwendet sowie die Rechenzeichen der Addition und Subtraktion. Im Anschluss an das Rechnen mit Binomen werden zwei Tabellen angefügt, wobei die erste Tabelle die Multiplikation von Potenzen thematisiert. Dabei werden die Symbole für die ersten zehn Potenzen bis zu x^{18} ergänzt. Die zweite Tabelle betrachtet den Wechsel der Vorzeichen bei der Multiplikation von zwei Binomen. Die Abkürzung *aff* steht für *affirmatum* und bezeichnet positive Vorzeichen, *ne* für *negativum,* was negative Vorzeichen angibt. Der Ausdruck *affne* gibt somit ein Binom der Form $ax^n - bx^m$ an. Wird dieses Binom mit einem Monom des Falls *ne* ($-cx^p$) multipliziert, ergibt sich der Fall:

$(ax^n - bx^m) \cdot (-cx^p) = -acx^{n+p} + bcx^{m+p}$, dies entspricht *neaff*.

Tabelle 2: Tabelle zum Vorzeichenwechsel

	aff	**ne**	**affne**	**nene**	**affaff**
aff	aff	ne	affne	nene	affaff
ne	ne	aff	neaff	affaff	nene
affne	affne	neaff	affaffne	neaffne	affneaff
nene	nene	affaff	affaffne	affaffaff	nenene
affaff	affaff	nene	affneaff	nenene	affaffaff

Nach der Thematisierung des Rechnens mit Binomen mit ganzzahligen Monomen bezieht sich die Schrift auf das Rechnen mit Quotienten von Binomen und anschließend auf die

[14] Vgl. ebd., S. 368v.
[15] Siehe dazu z.B.: Ms 1696, S. 42r.
[16] Diese Notiz ist leider verloren gegangen, aber die Existenz wurde von Hr. Prof. M. Folkerts bestätigt.

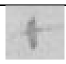
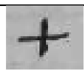
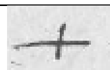
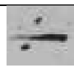
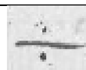
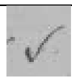
Berechnung der Wurzel sowie das Rechnen mit Binomen mit mind. einem Wurzelmonom. Hier greifen Alexander und Volmar stark auf die geometrische Interpretation dieser zurück, in dem der Bezug zum Flächeninhalt des Quadrats bzw. von Teilflächen hergestellt wird. Während bisher in der Algebraschrift das Rechnen mit Binomen im Vordergrund stand, werden zum Abschluss acht Regeln der „gebre et almuchabole" und dazugehörige Beispiele beschrieben. In diesen werden die Proportionen zwischen Gleichungen betrachtet, in moderner Schreibweise handelt es sich um u.a. folgende Gleichungen: $ax^n = bx^{n+1}; ax^n = bx^{n+2}$ usw.. Die Schriften sind somit gleich bzgl. ihrer Inhalte sowie der Anzahl und Art der Beispiele.

Vergleicht man die Inhalte der Schriften Widmanns und Alexanders / Volmars miteinander, kann man feststellen, dass Widmann sich vorrangig auf die Gleichungsfälle nach al-Chwarizmi konzentriert und diese mit Beispielen belegt und berechnen lässt. Bei Alexander / Volmar findet man diese erst zum Ende der Schrift. Ihre Schrift ist stark durch das Rechnen mit Binomen geprägt, wobei sie zur Verdeutlichung eine Vielzahl von Beispielen nutzen. In allen drei Schriften kann man das Einbeziehen der Potenzen feststellen sowie eine Verwendung der Rechenzeichen der Addition und Subtraktion.

Details der Schriften

In allen drei Schriften werden zu Beginn die Symbole der Potenzen eingeführt, womit der Einfluss der *Deutschen Coß* in besagten Schriften unverkennbar ist. Neben den Potenzen finden sich in allen drei Schriften Symbole der Addition und Subtraktion, wobei Widmann der erste Mathematiker war, in dessen Schrift man diese Symbole findet.[17]

Tabelle 3: Zeichen der Addition, Subtraktion und Wurzel

	Widman	Alexander	Volmar
Additionszeichen			
Subtraktionszeichen			
Wurzelsymbol	*radix*		

Das zeugt von der schnellen Durchsetzung des Additionszeichens in den (algebraischen) Schriften. Während die Schreibweisen der Rechenzeichen von Alexander und Volmar große Ähnlichkeiten aufweisen, unterscheiden sie sich in mehreren Punkten zu den Symbolen von Johannes Widmann. Am Auffälligsten ist dies bei dem Zeichen der Subtraktion, das bei Volmar und Alexander einen Punkt über sowie unter dem Strich aufweist. Es ähnelt vielmehr dem Zeichen, welches von J.H. Rahn als Divisionszeichen ab dem Jahr 1659 verbreitet wird.[18]

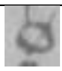
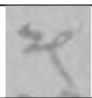
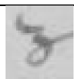
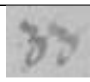
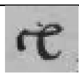
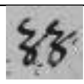
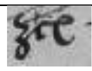
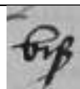
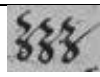
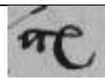
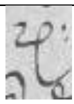
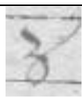
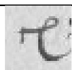
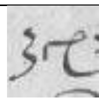
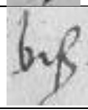
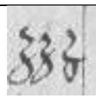
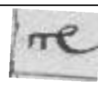
[17] Vgl. Alten (2014), S. 246.
[18] Vgl. Lehmann (1989), S. 112.

Interessanterweise findet man das Symbol Alexanders und Volmars ebenfalls in der *Coß* von Adam Ries.[19] Ries lag die Schrift Alexanders vor und er erstellte eine Abschrift dieser, wie er in seinem Vorwort schrieb.[20] Anhand des Subtraktionszeichen sieht man, dass sich im Gegensatz zum Additionszeichen ein einheitliches Subtraktionszeichen erst später durchsetzt.

An den Rechenzeichen lassen sich kleine Unterschiede in der Ausrichtung feststellen. Allerdings kann man hier von unterschiedlichen Schriftbildern sprechen, da es sich bei allen drei Quellen um Handschriften handelt. Für die Multiplikation und Division wird von keinem der drei Mathematiker ein Symbol verwendet. Obgleich der Multiplikationspunkt bereits im Jahr 1464 durch Johannes Regiomontanus (1436-1476) benutzt wurde, hat er sich vermutlich aber aufgrund des Drucks seiner Schrift „De triangulis omnimodis libri quinque" im Jahr 1533 erst viel später durchgesetzt.[21] Ein Symbol der Division entwickelte sich erst in der Mitte des 17. Jahrhunderts.[22] Auffällig ist zudem, dass es in Widmanns Schrift noch kein Symbol für die Wurzel gab. Im Gegensatz zu ihm verwendeten sowohl Volmar als auch Alexander ein Wurzelsymbol, welches dem Heutigen sehr ähnlich geschrieben wird. Das Symbol ist insbesondere durch die Schrift *Coß* (1525) von Christoph Rudolff (ca. 1500-1545) der Allgemeinheit bekannt geworden.[23] In diesen Zeitraum fällt ebenfalls die Schrift Volmars (um 1524). Die Schrift Alexanders wird früher erschienen sein, da seine Spur in Leipzig sich nach dem Jahr 1504 verliert. Seine Schrift lässt aber eine vorherige Verwendung des Symbols vermuten.

Auch bei der Darstellung der Potenzen lassen sich die Einflüsse der Coß wiederfinden.

Tabelle 4: Darstellung der ersten zehn Potenzen

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
Widmann										
Alexander										
Volmar										

Die Symbole aller drei Autoren weisen große Ähnlichkeiten auf und machen einmal mehr die Bestrebungen nach einer einheitlichen Symbolik deutlich. Es lässt sich aber eine unterschiedliche Anzahl der Angabe von den Symbolen feststellen. Im Gegensatz zur Schrift Widmanns, in der nur die Symbole für die ersten fünf Potenzen wiedergegeben werden, kann man in den Schriften Alexanders und Volmars die Symbolik für die Potenzen x^0 bis x^{18}

[19] Siehe dazu: Ries (1524), S. 68r.
[20] Vgl. Kaunzner (1998), S. 22.
[21] Vgl. Lehmann (1989), S. 112
[22] Vgl. Brückler (2017), S. 20.
[23] Vgl. ebd., S. 20.

finden.[24] Die Schreibweise der Potenzen weicht bei Volmar nur minimal von der Schreibweise Alexanders ab. Diese Feinheiten könnten durchaus der jeweiligen Handschrift des Autors geschuldet sein kann. Dahingegen unterscheidet sich das von Alexander verwendete Symbol für x^0 stärker von dem Volmars und Widmanns. In seiner Schrift wird dieses durch einen Kreis mit einem geraden Strich angegeben, während das Symbol der anderen beiden Mathematiker einen schrägen Strich von rechts oben nach links unten aufweist. Ebenso weist das Symbol für x^6 einen Unterschied zu dem Volmars auf, bei ihm wirkt das Symbol mehr wie die Zahl 3. Insgesamt werden die Symbole bei Alexander mit mehr Bögen geschrieben, wie man an dem Symbol für x^7 am deutlichsten erkennen kann. Dies könnte aber auf das Schriftbild Alexanders zurückzuführen sein, welches mehr Bögen als die von Volmar enthält.

Fazit

Man erkennt, dass die Schriften von Volmar und Alexander weitere sowie zum Teil andere Schwerpunkte und Inhalte besitzen als die Schrift Widmanns. Durch die teilweise Verwendung der Symbole Widmanns kann man davon ausgehen, dass den anderen beiden Mathematikern diese, wenn nicht sogar die gesamte Schrift, bekannt war. Möglich ist es, dass sie mit der Schrift während ihrer jeweiligen Aufenthalte in Leipzig in Kontakt kamen.[25] Der kurze Verbleib Volmars in Leipzig ist auch entscheidend für den Besitz der Schrift Alexanders.

Durch die Unterschiede der Inhalte sowie des Subtraktionszeichens und in der Anzahl der Potenzsymbole, lässt sich festhalten, dass die Schriften von Alexander bzw. Volmar entweder eine andere Quelle als Vorlage hatten oder es sich um eine eigene inhaltliche Betrachtung der Algebra handelt. Interessanterweise weisen auch andere Schriften des mitteldeutschen Raums sehr ähnliche Inhalte auf, wobei Unterschiede im Aufbau bzw. Anzahl der Beispiele festzustellen sind. Es handelt sich um die Schriften *Codex Gott. Philos. 30*, *Mspt. Dresd. C 405, Mspt. Dresd. C 349* und *Mspt. Dresd. C 8*. Nach Curtze (1902) sind das wohl Abschriften einer Arbeit eines deutschen Mathematikers des 16. Jahrhunderts,[26] die Göttinger Schrift ist nach Cajori (1993) Andreas Alexander zuzuordnen.[27] Inwieweit diese Schrift mit der Leipziger Schrift Ms. 1696 sowie der Handschrift Volmars übereinstimmt muss in weiteren Untersuchungen gezeigt werden.

Quellenverzeichnis

Universitätsarchiv Leipzig Handschrift Ms 1696.

Dresden: Sächsische Landesbibliothek Codex 80.

THULB: Thüringer Universitäts- und Landesbibliothekt Jena Ms. el. fol. 74.

[24] Siehe dazu u.a. Ms. el. f. 74, S. 22r.
[25] Vgl. dazu: Alten (2014), S. 246 und Erler (1895), S. 548.
[26] Vgl. Curtze (1902), S. 439.
[27] Vgl. Cajori (1993), S. 367.

UAH: Universitätsarchiv Halle: Rep. 1 Nr. 4944.

Literaturverzeichnis

Alten, H.-W. et al. (2014): *4000 Jahre Algebra. Geschichte Kulturen Menschen*, Berlin: Springer Verlag.

Brückler, F. (2017): *Geschichte der Mathematik kompakt.* Berlin: Springer Spektrum.

Cajori, F. (1993): *A history of mathematical notations. Two Volumes Bound as one.* New York : Dover Publications.

Curtze, M. (1902): *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance.* 2. Teil. In: Hrsg. Cantor, M.. *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Heft 13, Leipzig: B.G. Teubner.

Dasenbrock, L. (2021): *Frühe Algebralehre an der Universität Wittenberg.* In: Hrsg. Fischer, H. et al.: Exkursionen in die Geschichte der Mathematik und ihres Unterrichts. In: Hrsg. Ullrich, P.: Schriften zur Geschichte der Mathematik und ihrer Didaktik, Band 8, Münster: WTM Verlag:, S. 84-95.

Erler, G. (1895): *Die Matrikel der Universität Leipzig. Band XVI-XVIII.* Leipzig; Giesecke & Devrient.

Kaunzner, W.(1992): *Über das wissenschaftliche Umfeld und die mathematischen Handschriften von Adam Ries*. In: Adam Rieß vom Staffelstein. Rechenmeister und Cossist. Band 1. Staffelstein: Staffelsteiner Schriften. S. 157–279.

Kaunzner, W.(1998): *Adam Ries im Spiegel seiner algebraischen Handschriften*. In: Hrsg. Gebhardt, R.: *Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz*, Band 10, Annaberg-Buchholz: Adam-Ries-Bund.

Lehmann, I. (1989): *Schreibweisen und Bezeichnungen der Grundrechenoperationen im Wandel der Zeit.* In: Hrsg.: Hass, D.. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin. Reihe Mathematik Naturwissenschaft*, Nr. 38, S. 112-117.

Ries, A. (1524): *Coß*, Annaberg Bucholz.

Schöneburg, S. (2010): Mathematische Forschungen und Lehre an der Universität Wittenberg, Band 1. Frühe Mathematik und Kometenbeobachtung in Wittenberg, in: Richter, K. / Schöneburg, S.: Mathematische Forschung und Lehre im 16. und 17. Jahrhundert, Band 1, Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Vogel, K. (1981): *Die erste deutsche Algebra aus dem Jahre 1481*. In: Hrsg. Bayerische Akademie der Wissenschaften. *Abhandlungen*. München: Verlag der bayerischen Akademie der Wissenschaften.

Zarnke, F. (1857): *Die urkundlichen Quellen zur Geschichte der Universität Leipzig in den ersten 150 Jahren ihres Bestehens;* In: Hrsg. Kgl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften. *Abhandlungen der philogisch-historischen Classe der königlichen sächsischen Gesellschaft*, Band 2, Leipzig: S. Hirzel, S. 509-922.

Die Aufgaben zur *Regula Inventionis* im Rechenbuch des Johannes Widmann von Eger

Stefan Deschauer

Einführung

Regula Inventionis ist zunächst eine nichtssagende Bezeichnung („Regel des Findens"). Offenbar wurde der Begriff in der deutschsprachigen Rechenbuchliteratur von Johannes Widmann 1489[1] eingeführt. Ob er auch bereits in älteren italienischen Quellen verwendet worden ist, ist noch unbekannt.[2] Die *Regula Inventionis* hat aber eine spezielle Bedeutung: Es geht um die Umkehrung von „Standardaufgaben", die mit dem Dreisatz gelöst werden können, wobei jeweils eine üblicherweise gesuchte Größe vorgegeben und dafür nach einer Größe, die üblicherweise gegeben ist, gesucht wird. In solchen Umkehraufgaben wird meistens nach einer metrologischen Beziehung gefragt[3].
Als Beispiel soll zunächst eine sehr einfache Aufgabe vorgestellt werden:
Item wenn 1 Elle Leinwand 15 Pfennig kostet, so kommen 45 Ellen um 5 Florin 45 Pfennig. Ist die Frage, wie viel der Florin Pfennig hat.[4]
Aber es gibt auch durchaus reizvolle und anspruchsvolle Aufgaben, die bei Weitem nicht mit Dreisatz allein gelöst werden können, wie sich hier an den Beispielen zeigt, die Johannes Widmann vorgelegt hat. Insofern ist es erstaunlich, dass es bisher überhaupt keine Sekundärliteratur zu diesem interessanten Thema zu geben scheint.

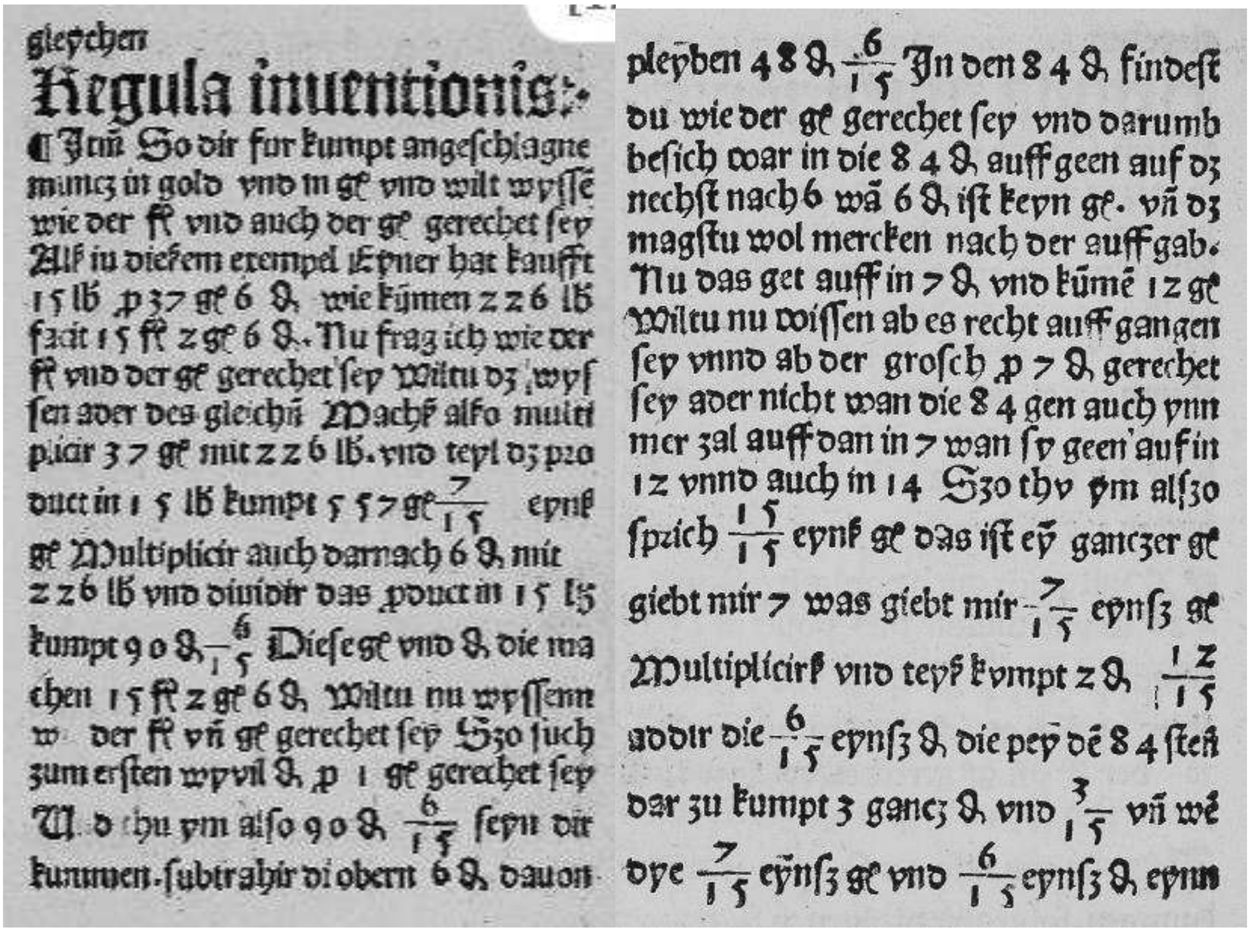
---

[1] Widmann, Johannes: Behēde vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft. Leipzig (Konrad Kacheloffen) 1489. Unter ähnlichen Titeln erschienen die weiteren Auflagen Pforzheim (Thomas Anshelm) 1500, Pforzheim (Thomas Anshelm) 1508, Hagenau (Thomas Anshelm) 1519, Augsburg (Heinrich Stainer) 1526.
[2] Bei Widmann fällt die Vielfalt von phantasiereichen Regelbezeichnungen in lateinischer Sprache auf, ähnlich wie im Algorismus Ratisbonensis (AR), der von 1457–1459 und 1461 vom Benediktinermönch Fridericus Amann verfasst wurde. Im AR fehlt allerdings *die Regula Inventionis*. Vgl. auch Vogel, Kurt: Die Practica des Algorismus Ratisbonensis. München 1954 und Gerl, Armin: Fridericus Amann. In: Rechenbücher und mathematische Texte der frühen Neuzeit (Schriften des Adam-Ries-Bundes, Band 11), Annaberg-Buchholz 1999, S. 1–12.
[3] Vgl. Schreckenberger, Johann: Ein New Rechenbüchlin Auff den Linien vnnd der Federn auff Pfaltzgräffische oder Heydelbergische wehrung gerechnet … Straßburg (Antonius Bertram) 1585, I iij. Hier und auch bei anderen Autoren ist treffender von der *Regula Resolutionis* die Rede (vom damals verbreiteten Begriff „Resolvierung" für die Umrechnung von Münzen und anderen Maßen). Viele Autoren haben diese Aufgaben auch ohne eigene Bezeichnung im Rahmen ihrer Dreisatzkapitel behandelt.
[4] Vgl. Hoeflin, Georg: Rechenbüchlin mit der Ziffer vnd Zalpfenningen von allerley gemeinen gebräuchlichen nützlichen Hauß vnd Kauffmanns Rechnungen … Straßburg (Antonius Bertram) 1596, S. 141, Nr. 304 (hier in modernisierter Fassung wiedergegeben)

Es handelt sich um zwei Aufgaben, von denen die erste in allen Auflagen des Widmannschen Rechenbuchs vorkommt, die zweite hingegen nur in der ersten und in der letzten.

Widmann – *Regula inuentionis* (1489)
Zur 1. Aufgabe (83r-84v)

Im Folgenden soll der erste (relevante) Teil der 1. Aufgabe im Original wiedergegeben, in moderneres Deutsch übertragen und begleitend kommentiert werden.



gleychen
Regula inuentionis:
Item So dir für kumpt angeschlagne müncz in gold vnd in gr vnd wilt wyssē wie der fl vnd auch der gr gerechet sey Als in diesem exempel Eyner hat kaufft 15 lb p 37 gr 6 d wie kümen 226 lb facit 15 fl 2 gr 6 d. Nu frag ich wie der fl vnd der gr gerechet sey Wiltu dz wyssen ader des gleichē Machs also multiplicir 37 gr mit 226 lb. vnd teyl dz product in 15 lb kumpt 557 gr $\frac{7}{15}$ eyns gr Multiplicir auch darnach 6 d mit 226 lb vnd diuidir das product in 15 lb kumpt 90 d $\frac{6}{15}$ Diese gr vnd d die machen 15 fl 2 gr 6 d Wiltu nu wyssenn wie der fl vñ gr gerechet sey Szo such zum ersten wyvil d p 1 gr gerechet sey Vnd thu ym also 90 d $\frac{6}{15}$ seyn dir kummen. subtrahir di obern 6 d dauon

pleyben 48 d $\frac{6}{15}$ In den 84 d findest du wie der gr gerechet sey vnd darumb besich dar in die 84 d auff geen auf dz nechst nach 6 wā 6 d ist keyn gr. vñ dz magstu wol mercken nach der auffgab. Nu das get auff in 7 d vnd kümē 12 gr Wiltu nu wissen ab es recht auff gangen sey vnnd ab der grosch p 7 d gerechet sey ader nicht wan die 84 gen auch ynn mer zal auff dan in 7 wan sy geen auf in 12 vnnd auch in 14 Szo thv ym alszo sprich $\frac{15}{15}$ eyns gr das ist eyn ganczer gr giebt mir 7 was giebt mir $\frac{7}{15}$ eynsz gr Multiplicirs vnd teyls kumpt 2 d $\frac{12}{15}$ addir die $\frac{6}{15}$ eynsz d die pey dē 84 stend dar zu kumpt 3 gancz d vnd $\frac{3}{15}$ vñ wē dye $\frac{7}{15}$ eynsz gr vnd $\frac{6}{15}$ eynsz d eynn

Abb. 1: 83r/83v

It(e)m so die vorkommt angeschlagene[5] Münze in Gold und in Groschen und willst du wissen, wie der Florin und auch der Groschen gerechnet sind wie in diesem Exempel.
Einer hat gekauft 15 Pfund zu 37 Groschen 6 Pfennig. Wie kommen 226 Pfund?
Facit 15 Florin 2 Groschen 6 Pfennig. Nun frage ich, wie der Florin und der Groschen gerechnet sind.
Willst du dies wissen oder desgleichen, machs also.
Multipliziere 37 Groschen mit 226 Pfund und teile das Produkt durch 15 Pfund.
Es kommen $557\frac{7}{15}$ *Groschen heraus. Multipliziere auch danach 6 Pfennig mit*

[5] wohl auf den Münzschlag bezogen

226 Pfund und dividiere das Produkt durch 15 Pfund. Es kommen $90\frac{6}{15}$ Pfennig heraus. Diese Groschen und Pfennige – die machen 15 Florin 2 Groschen 6 Pfennige.
Willst du nun wissen, wie der Florin und Groschen gerechnet sind, so suche zum Ersten, wie viel Pfennige für 1 Groschen gerechnet sind. Und mach es so: $90\frac{6}{15}$ Pfennige sind dir gekommen. Subtrahiere die oberen 6 Pfennige davon – es bleiben $84\frac{6}{15}$.[6]

Von der bisherigen Gleichung

(1) $557\frac{7}{15}$ Groschen $+ 90\frac{6}{15}$ Pfennig = 15 Florin 2 Groschen 6 Pfennige

sollen also auf beiden Seiten 6 Pfennig abgezogen werden:

(2) $557\frac{7}{15}$ Groschen $+ 84\frac{6}{15}$ Pfennig = 15 Florin 2 Groschen

Widmann geht aber nicht darauf ein, dass zur weiteren Vereinfachung auf beiden Seiten auch noch 2 Groschen abgezogen werden können:

(3) $555\frac{7}{15}$ Groschen $+ 84\frac{6}{15}$ Pfennig = 15 Florin

Nach Verwendung des Dreisatzes sind Widmann und wir zu einem unterbestimmten linearen Problem gekommen – nur eine Gleichung ist gegeben, aber zwei Münzrelationen sind gesucht.
Widmann schreibt weiter:
In den 84 Pfennigen findest du, wie der Groschen gerechnet sei, *und darum schaue, was (?) in die 84 Pfennige aufgeht auf das Nächste nach 6, weil (?) 6 Pfennig kein Groschen sind, und das kannst du wohl merken nach der Aufgabe ...*
Widmann liefert keine Begründung dafür, dass sich unter den Teilern der Zahl 84 (Pfennig) die Lösung finden lasse. Diese durchaus kühne Hypothese gilt es später zu überprüfen. Der Autor weist darauf hin, dass der Teiler 6 im Hinblick auf die Aufgabenstellung nicht infrage kommt. Dort wäre zum Beispiel sonst von *38 Groschen* statt von *37 Groschen 6 Pfennig* die Rede. (Ebenso scheiden die Teiler 3, 2, 1 aus.) Nun untersucht Widmann die nächsten Teiler 7 und 12. Der Text ist kaum verständlich und soll deshalb hier nicht näher betrachtet werden. Zumindest erkennt man, dass Widmann zu dem Schluss kommt, dass 7 nicht geeignet ist, hingegen 12 eine Lösung der Aufgabe liefert. Weitere Teiler von 84 betrachtet er nicht.
Wir wollen an der Gleichung (3) überprüfen, ob die metrologischen Relationen 1 Groschen = 7 Pfennig oder 1 Groschen = 12 Pfennig möglich sind.

1 Groschen = 7 Pfennig: $\frac{7}{15}$ Groschen $+ \frac{6}{15}$ Pfennig $= 3\frac{2}{3}$ Pfennig

Damit steht auf der linken Seite von (3) ein Pfennigbetrag mit gemischter Maßzahl. Das gilt natürlich auch, wenn man noch die rechte Seite von (3) durch 15

[6] Schreibfehler: Im Text steht $48\frac{6}{15}$. Der Fehler ist in den weiteren Auflagen korrigiert.

dividiert, um die Münzparität von 1 Florin zu bestimmen. Und dies widerspricht einer offensichtlichen metrologischen Regel:
(4) Die Einheiten der größeren Geldwerte (1 Florin, 1 Groschen) enthalten die Einheit des kleinsten (1 Pfennig) ganzzahlig oft.
1 Groschen = 7 Pfennig scheidet daher aus.
1 Groschen = 12 Pfennig: Wiederum nach (3) gilt nun
$\frac{7}{15}$ Groschen $+ \frac{6}{15}$ Pfennig = 6 Pfennig. Damit erhält man
555 Groschen + 90 Pfennig = 15 Florin bzw.
37 Groschen + 6 Pfennig = 1 Florin. Der Florin hat demnach 450 Pfennig, der Florin $37\frac{1}{2}$ Groschen und der Groschen 12 Pfennig.
Dies ist auch die Lösung von Widmann.

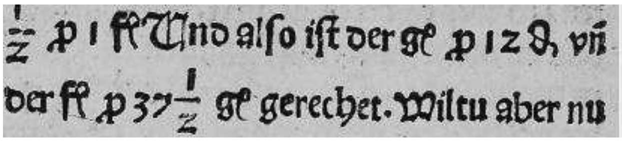

$\frac{1}{2}$ p 1 fl Vnd also ist der gr p 12 ₰ vn der fl p 37$\frac{1}{2}$ gr gerechet. Wiltu aber nu

Abb. 2: Widmanns Lösung (84v)

Wie aber sieht die allgemeine Lösung aus?
Wir dividieren (3) durch 15 und setzen 1 Groschen = *m* Pfennige $(m \in \mathbb{N})$ an:
(5) $37\frac{7}{225}$ Groschen $+ 5\frac{47}{75}$ Pfennig = 1 Florin
(6) $((37\frac{7}{225})m + 5\frac{47}{75})$ Pfennig = 1 Florin
Umformung von (6) ergibt
(7) $(37m + 5 + \frac{7m+141}{225})$ Pfennig = 1 Florin.
Wegen der metrologischen Regel (4) muss 225 ein Teiler von $7m + 141$ sein. 225 und 141 sind durch 3 teilbar, daher muss auch $7m$ durch 3 teilbar sein. Es folgt, dass *m* durch 3 teilbar ist, und wir schreiben $m = 3m'$. Die ganze Zahl in Bruchform reduziert sich dadurch auf $\frac{7m'+47}{75}$. Jetzt noch ein kleiner Trick: Wir subtrahieren im Zähler 75. Der neue Zähler $7(m'-4)$ ist ebenfalls durch 75 teilbar. Da 75 und 7 teilerfremd sind, ist $m'-4$ durch 75 teilbar. Damit gilt die Darstellung
$m' = 4 + 75m''$ $(m'' \in \mathbb{N})$, und es folgt $m = 12 + 225\,m''$. 1 Groschen muss somit $12 + 225\,m''$ Pfennig haben. 1 Florin hat nach (7) demnach
$(37(12 + 225m'') + 5 + \frac{84+1575m''+141}{225})$ Pfennig, was sich zu $(450 + 8332m'')$ Pfennig vereinfachen lässt. Damit haben wir gefunden, dass der Florin $\frac{450+8332m''}{12+225m''}$ Groschen hat.
Zahlentheoretisch betrachtet gibt es also unendlich viele Lösungen, doch zeigt bereits der Fall $m'' = 1$, dass das Ergebnis metrologisch betrachtet nicht

akzeptabel ist: 1 Groschen = 237 Pfennig, 1 Gulden = 8782 Pfennig, 1 Gulden = $37\frac{13}{237}$ Groschen. Umso mehr gilt dies für höhere Werte von *m´´*.

Bei dieser Aufgabe wird die rein mathematische Lösung durch die metrologische Realität so eingeschränkt, dass sich letztlich doch eine eindeutige Lösung ergibt, nämlich die von Widmann (mit *m´´* = 0). Dass in (2) und (3) eine Zahl (84) vorkommt, die Vielfaches der Lösungszahl 12 (*m* = 12) ist, ist natürlich Zufall.

Zur 2. Aufgabe (84v-85r)

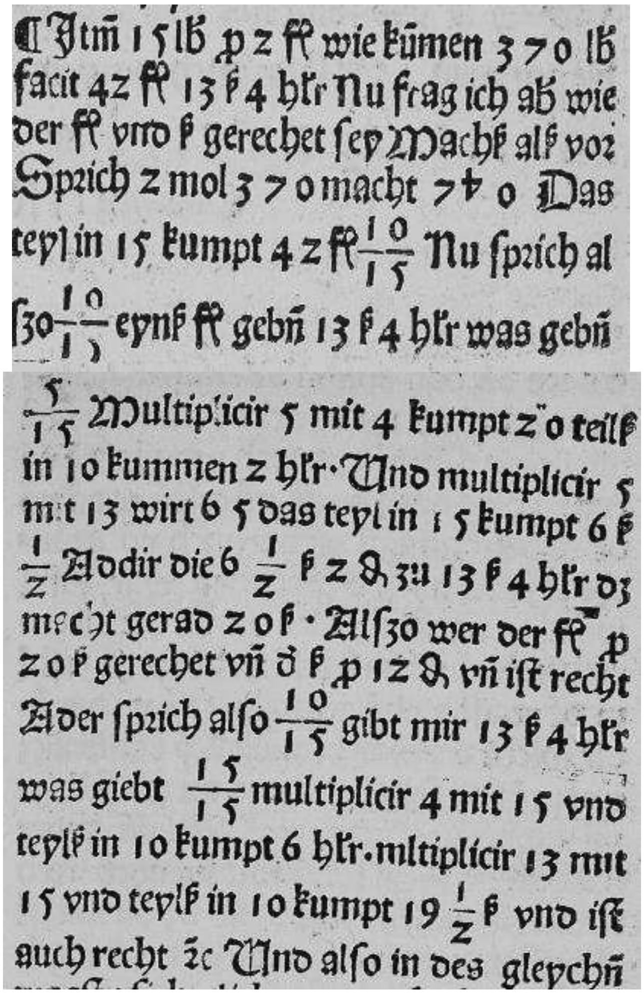

¶ Jtm̃ 15 lb ꝑ 2 fl wie kũmen 370 lb
facit 42 fl 13 ß 4 hlr Nu frag ich ab wie
der fl vnd ß gerechet sey Machß als voꝛ
Spꝛich 2 mol 370 macht 740 Das
teyl in 15 kumpt 42 fl $\frac{10}{15}$ Nu spꝛich al
so $\frac{10}{15}$ eynß fl gebñ 13 ß 4 hlr was gebñ
$\frac{5}{15}$ Multiplicir 5 mit 4 kumpt 20 teilß
in 10 kummen 2 hlr· Vnd multiplicir 5
mit 13 wirt 65 das teyl in 15 kumpt 6 ß
$\frac{1}{2}$ Addir die 6 $\frac{1}{2}$ ß 2 h zu 13 ß 4 hlr dz
macht gerad 20 ß · Alſo wer der fl ꝑ
20 ß gerechet vñ d ß ꝑ 12 h vñ ist recht
Ader spꝛich also $\frac{10}{15}$ gibt mir 13 ß 4 hlr
was giebt $\frac{15}{15}$ multiplicir 4 mit 15 vnd
teylß in 10 kumpt 6 hlr. mltiplicir 13 mit
15 vnd teylß in 10 kumpt 19 $\frac{1}{2}$ ß vnd ist
auch recht ꝛc Vnd also in des gleychñ

Abb. 3 (84v-85r)

Item 15 Pfund für 2 Florin, wie kommen 370 Pfund? Facit 42 Florin 13 Schilling 4 Heller. Nun frage ich aber, wie der Florin und der Schilling gerechnet sind. Mach´s wie zuvor (?). Sprich: 2 mal 370 macht 740. Das teile in 15 – kommt $42\frac{10}{15}$ [7] *Florin heraus. Nun sprich also:* $\frac{10}{15}$ *eines Florins ergeben 13*

[7] Der richtige Wert ist $49\frac{1}{3}$. Die weitere Rechnung des Autors beruht aber auf der Identität $42\frac{10}{15}$ Florin = 42 Florin 13 Schilling 4 Heller und führt zu einer richtigen Lösung, sodass es

Schilling 4 Heller. Was ergeben $\frac{5}{15}$? Multipliziere 5 mit 4 – kommt 20 heraus. Teils in 10 – kommen 2 Heller heraus. Und multipliziere 5 mit 13 – wird 65. Das teile in 15[8] *– kommen $6\frac{1}{2}$ Schillinge heraus. Addiere die $6\frac{1}{2}$ Schilling 2 Pfennig*[9] *zu 13 Schilling 4 Heller – das macht gerade 20 Schillinge. Also wird der Florin zu 20 Schillingen gerechnet und der Schilling zu 12 Pfennigen, und es ist richtig.*
Oder sprich also: $\frac{10}{15}$ gibt mir 13 Schilling 4 Heller – was gibt $\frac{15}{15}$? Multipliziere 4 mit 15 und teils in 10 – kommen 6 Heller heraus. Multipliziere 13 mit 15 und teils in 10 – kommen $19\frac{1}{2}$ Schillinge heraus[10]*, und es ist auch richtig.*

Mit 320 Pfund statt 370 Pfund lässt sich nachvollziehen, dass $\frac{10}{15}$ eines Florins mit 13 Schilling 4 Heller übereinstimmen. Widmann kürzt nicht, und seine weitere Rechnung ist umständlich. Zunächst berechnet er, statt direkt auf 1 Florin umzurechnen, $\frac{5}{15}$ eines Florins ($6\frac{1}{2}$ Schillinge 2 Heller), um dann die 13 Schilling 4 Heller aus dem Anteil $\frac{10}{15}$ Florin zu addieren: Für 1 Florin ergeben sich $19\frac{1}{2}$ Schilling 6 Heller, nach Widmann sind das gerade 20 Schillinge. Er setzt also voraus, dass 1 Schilling 12 Heller enthält. Wieso fragt er am Anfang der Aufgabe danach, wie der Schilling gerechnet wird?
Alternativ zu seinem vorherigen Vorgehen rechnet der Autor direkt von $\frac{10}{15}$ Florin auf $\frac{15}{15}$ Florin um: $19\frac{1}{2}$ Schilling (6 Heller)
Widmanns Lösung ist somit unbefriedigend.
Zur allgemeinen Lösung:
Wir setzen unter der Voraussetzung 1 Florin = $19\frac{1}{2}$ Schilling 6 Heller an:
1 Schilling = m Heller ($m \in \mathbb{N}$ gemäß (4))
Damit gilt: 1 Florin = $(\frac{39}{2}m+6)$ Heller und somit wegen $m = 2m'$ (nach (4) mit Heller als kleinstem Geldwert)
1 Florin = $(39m' + 6)$ Heller
Setzen wir außerdem voraus, dass die Anzahl der im Florin enthaltenen Schillinge ganzzahlig ist[11], etwa 1 Florin = n Schillinge, dann folgt
$(39m' + 6)$ Heller = $2m'n$ Heller und daraus $n = \frac{3(13m'+2)}{2m'}$.

naheliegt und am einfachsten ist, 370 Pfund passend durch 320 Pfund zu ersetzen. Der Fehler wurde auch in der Auflage von 1526 nicht korrigiert.
[8] Es muss 10 heißen.
[9] Es muss Heller heißen.
[10] Widmann hat die 6 Heller vergessen.
[11] Dies ist durch (4) nicht abgedeckt. In der ersten Aufgabe waren die größten Einheiten Florin und Groschen, wobei der Groschen, wie die Lösung zeigte, nicht ganzzahlig oft in den Florin aufging. Hier sind Florin und Schilling die größten Einheiten.

$13m' + 2$ muss gerade sein, also auch m'. Mit $m' = 2m''$ ergibt sich
$n = \frac{3(13m''+1)}{2m''}$.
Nun gibt es folgende Möglichkeiten:
$m'' = 1$, $m = 4$, $n = 21$:
(8) 1 Florin = 21 Schillinge, 1 Schilling = 4 Heller
$m'' > 1$: Dann sind m'' und $13m''+1$ teilerfremd, sodass m'' Teiler von 3 ist.
Demnach muss $m'' = 3$ sein: $m = 12$, $n = 20$:
(9) 1 Florin = 20 Schillinge, 1 Schilling = 12 Heller
(9) ist die Lösung Widmanns und gibt die damals allgemein übliche Relation zwischen der Goldwährung Florin und Schilling und dem Heller wieder.
Die Möglichkeit (8) hat Widmann nicht betrachtet. Metrologisch gesehen ist allerdings bedenklich, dass 1 Schilling nur 4 Heller wert sein soll.

Reinhard Siegmund-Schultze

Überblick zur Regensburger Mathematiker-Familie Kaukol und ihren Werken im 17. Jahrhundert

Alfred Holl

Dieser Beitrag ist eine stark gekürzte Zusammenfassung von zwei Aufsätzen, die ich 2017 und 2019 in regionalem Rahmen in den Verhandlungen des Historischen Vereins für Oberpfalz und Regensburg publiziert habe (siehe Literaturverzeichnis). Für Belegstellen und genaue Literaturangaben sei darauf verwiesen. Mit dem vorliegenden Überblick möchte ich die Kaukol nun kurz gefasst einem breiteren mathematikhistorischen Kreis vorstellen.

Neben den üblichen kaufmannsmathematischen Rechenbüchern gab es schon in der frühen Neuzeit außeruniversitär weitere volkssprachliche mathematische Werke, die sich auf spezielle Themen konzentrieren. Hierbei ist an Bücher gedacht, die mathematisch einen zumindest etwas höheren Anspruch als die reinen Rechenbücher erheben. In Regensburg wurden bis 1700 nur zwei derartige Werke gedruckt:[1] 1666 das *Compendium* über elementare Geometrie, Vermessungswesen (Feldmessung) und Eichwesen (Visierkunst, Doliometrie) des Nikolaus Kaukol und 1696 die *Unterweisung* im Bruchrechnen seines ältesten Sohnes David Carl. Das *Compendium* ließ Nikolaus' zweitältester Sohn Matthäus Carl 1667 in erweiterter Form als *Feld-Mässerei* in Lübeck wieder auflegen. Aus dem Jahr 1669 ist die Handschrift *Formalisches Püchsenmeisterey- vnd Fewer-Kunst-Buch* von Nikolaus' fünftem und jüngstem Sohn Johann Carl erhalten. Von Seiten der Mathematikgeschichte wurde bisher nur David Carls Lehrbuch wahrgenommen.[2]

Die wichtigsten Quellen für die Biografien der Kaukol sind Nikolaus' Grabstein[3] in der Friedhofskirche in Freising (Oberbayern) und ein autobiografischer Brief seines vierten Sohns vom 10.01.1703 (vgl. Abschnitt 5), daneben auch die Vorreden in ihren Werken.

---

1 Weil es sich nicht um Rechenbücher für Kaufleute handelt, sind sie im Standardwerk von Hoock / Jeannin, Ars mercatoria 1993, nicht verzeichnet.

2 Vgl. Tropfke, Elementarmathematik 1980, S. 120, 193, 253, 694, und Sterner, Rechenkunst 1891, S. 276, 281–286, 305, 324, 525.

3 Der 1,5 m hohe lithografierte Grabstein aus Solnhofer Schiefer wurde vom Sohn David Carl gestiftet und befindet sich noch heute in gutem Erhaltungszustand mit Resten einer Farbfassung an der südlichen Innenwand (vor dem Seitenaltar) der Friedhofskirche in Freising (Oberbayern). Der Grabstein thematisiert die späte Konversion des Nikolaus zum Katholizismus und setzt sie in Bezug zum biblischen Gleichnis von den Arbeitern im Weinberg. Man findet ein mit viel Liebe zum Detail gestaltetes, unschätzbares kunst-, kultur- und religionshistorisches Denkmal vor, das das Weinberggleichnis künstlerisch inszeniert und die für wesentlich gehaltenen biografischen Stationen des Nikolaus sowie die Geschichte seiner Familie im Spannungsfeld der beiden großen christlichen Konfessionen aufrollt.

1. Der Vater Nikolaus und sein *Compendium*

* 1600 Elschtin[4]/Lštění zwischen Taus/Domažlice und Kollautschen/Koloveč
† Anfang September 1691 Freising (Oberbayern)
∞ 22.09.1634 Memmingen: Maria Gsell, Tochter des prot. Predigers Carl Gsell

Ungefähr im Alter von 16 Jahren muss sich Nikolaus für kurze Zeit an einer nicht bekannten Universität eingeschrieben haben. Aus der Tatsache, dass er in seinem *Compendium* auch das Vermessungswesen behandelte, lässt sich schließen, dass er auch eine Militärschule besuchte. Schon 1618 im Alter von 18 Jahren wurde er Soldat im Dreißigjährigen Krieg. Im Rang eines Fähnrichs heiratete er 1634 in der Reichsstadt Memmingen. Die ersten fünf Kinder kamen dort zur Welt. 1644 zog die protestantische Familie nach Regensburg, wo weitere vier Kinder geboren wurden. Der Verbleib der fünf Söhne ist bekannt, der der einen die Kindheit überlebenden Tochter (lt. Grabstein) nicht. Nach Erwerb des Bürgerrechts 1646 machte Nikolaus in der Regensburger städtischen Verwaltung Karriere: Wachtschreiber, 1654 Almosenamtsbereiter, spätestens 1666 Kastner, also Verantwortlicher für den Getreidekasten (heute Leerer Beutel). Im hohen Alter von 89 Jahren konvertierte Nikolaus unter dem Einfluss seiner fünf Söhne und einer Tochter zum katholischen Glauben. Er starb nur kurze Zeit später Anfang September 1691 in Freising. Warum, wann und zu wem er in hohem Alter dorthin kam und wie lange er sich dort aufhielt, ist nicht rekonstruierbar. Ein Testament ist weder im Stadtarchiv Regensburg noch im Bayerischen Hauptstaatsarchiv erhalten.

Im Amt des Kastners brauchte Nikolaus grundlegende Kenntnisse in Buchführung. Aber auch darüber hinaus befasste er sich im Lehrberuf mit Mathematik und veröffentlichte mindestens zwei Werke. Beim ersten handelt es sich um eine heute verschollene gedruckte *Arithmetic*, für die er am 29.06.1663 aus der Stadtkasse 9 Gulden bekam. Grundsätzlich könnte er auch der Autor der 1658 von einem anonymen Regensburger geschriebenen und in Augsburg gedruckten *Clavis arithmetica* sein, was aber durch keine weiteren Indizien belegt werden kann.[5] 1666 erschien schließlich Nikolaus' Hauptwerk, sein *Compendium*, bei Christoph Fischer in Regensburg, der ein Jahr später auch die *Arithmetica practica* des Regensburger Rechenmeisters Georg Wendler (1619–1688) druckte.[6]

Nikolaus nimmt auf dem Titelblatt seines *Compendiums* die Berufsbezeichnung *Arithmeticae, Geometriae et Stereometriae Praeceptor zu Regenspurg* für sich in Anspruch. Er war also auch Gymnasiallehrer für Mathematik am reichsstädtischen evangelischen Gymnasium poeticum, an dem aber nur ganz wenige Wochenstunden Mathematik abgehalten wurden, von denen ein Lehrer nicht leben konnte. Dieser Nebenberuf steht daher nicht im Widerspruch zu seinem Hauptberuf als Stadtkastner.

In der Vorrede des *Compendiums* erläutert Nikolaus seine Aufbereitung des Stoffes von einfacheren bis zu schwierigeren geometrischen Konzepten – vom

---

[4] Ort in Böhmen; andere Schreibweisen: Elstin, Welstin (am Grabstein).

[5] Zur *Clavis arithmetica* vgl. HOLL in FEISTNER / HOLL, Erzählen und Rechnen 2016, S. 214–216.

[6] Zu Wendlers Leben und Werk vgl. FOLKERTS in ebd., S. 279–294.

(nulldimensionalen) Punkt bis zum (dreidimensionalen) Körper. Diese erfolge in drei Aspekten: Konstruktion (*notatio*, *fabrica*: *fabriciren* mit dem Zirkel *circinus*), Messung (*dimensio*: *dimetiren* mit einem Mess-*Stäblein*) und Inhaltsbestimmung (*geodaesia*: *continentiam ausrechnen*, d. h. Fläche und Volumen, *superficialischer* und *cörperlicher Inhalt*). Für Letzteres verwende er an Stelle der gemeinen Brüche die *zehentheiligen scrupul-Zahlen* (Dezimalbrüche). Der gesamte Stoff werde in einer in Kupfer gestochenen Tafel – der *Diatyposis Geometriae* – grafisch dargestellt.

Der erste Teil des Werks ist in neun Kapitel gegliedert, in denen die folgenden Aspekte behandelt werden: Definition und Instrumente, Linie, Winkel, Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs- und Siebeneck, Kreis, Sektor, Segment, Kegel(-stumpf), Zylinder, Pyramide(-nstumpf), Prisma, Wasserkasten, Gewölbe, die fünf platonischen Körper, Kugel, quadratische und kubische Rute. Der zweite Teil beschäftigt sich in zwei Abschnitten mit der Bestimmung der Höhe eines Turms mit einem Quadranten und mit der Bestimmung von Höhenunterschieden zur Verlegung einer Wasserleitung (dargestellt am nebenstehenden Titelblatt).

Titel in N. Kaukols *Compendium* 1666 mit Kupferstich zu einer Höhenunterschiedsbestimmung

Nikolaus bezieht sich in seinem Lehrbuch auf zwei Referenzautoren. Er verweist an vielen Stellen im Detail auf Euklid. Daneben beruft er sich mehrfach auf den Frankfurter Arzt und Bürgermeister Johann Hartmann Beyer (1563–1625).[7]

[7] BEYERs hier einschlägige Werke sind: *Logistica Decimalis: Das ist: Kunst-Rechnung der Zehentheyligen Brüchen*, Frankfurt 1603; *Eine newe und schöne Art der Vollkommenen Visierkunst*, Frankfurt 1603 (HOOCK / JEANNIN, Ars mercatoria 1993, II/B24.1); *Stereometriae nova et facilis ratio*, Frankfurt 1603 (ebd., II/B24.2).

2. Der älteste Sohn David Carl und seine *Unterweisung* im Bruchrechnen

* 20.10.1635 Memmingen
† 19.04.1717 Altenbuch (bei Landau a. d. Isar, Niederbayern)

Nach dem Besuch des Gymnasium poeticum in Regensburg und der Konversion zum katholischen Glauben schlug David Carl eine geistliche Laufbahn ein. 1666 zum Priester geweiht, war er zunächst auf Pfarrstellen im Bayerischen Wald tätig, bevor er 1692 auf die Pfarrei Altenbuch wechselte, wo er 25 Jahre lang blieb.

Spätestens 1696 wurde David Carl zudem Geistlicher Rat in Regensburg, *Consiliarius Ecclesiasticus Ratisbonensis*, so genannt 1717 in seinem Bestattungseintrag. Eine besondere politische Situation verhalf ihm zu einer weiteren Auszeichnung. Der Wittelsbacher Joseph Clemens (1671–1723), Herzog von Bayern, war 1685–1716 Bischof von Regensburg und in Personalunion 1688–1723 Kurfürst von Köln. Daher erwarb David Carl wohl mehr oder weniger automatisch auch den Titel Geistlicher Rat der Churfürstlichen Durchlaucht zu Cölln, *Serenissimi Electoris Coloniensis Consiliarius Ecclesiasticus*.[8] Möglicherweise hatte hierbei sein jüngerer Bruder Lukas Carl in der kurkölnischen Geheimen Kanzlei die Finger mit im Spiel (vgl. Abschnitt 5).

Von David Carl ist ein astronomiegeschichtliches Dokument erhalten, nämlich eine 30 cm große Kugelsonnenuhr, die er 1708 in Solnhofener Stein geätzt hat.[9] Ein solches Instrument hat einen markierten Nord- und Südpol. Die Achse wird parallel zur Erdachse eingestellt: Als Schattenzeiger dient ein von Pol zu Pol verlaufender, in den zwei Pollöchern drehbar aufgehängter halbkreisförmiger Metallbügel, der seinen Schatten auf eine äquatoriale Stundenskala wirft.

1696 erschien David Carls *Unterweisung* im Bruchrechnen. Er verwendet den bekannten griechischen Mythos von Ariadne, Theseus, Labyrinth und Minotaurus als Metapher für den wertvollen Inhalt seines Werks: Es will der Ariadne-Faden sein, der einen jeden *ohne Lehrmeister* aus dem Labyrinth der *kopffbrechenden Brüche* ans Licht des Eingangs führt.[10]

Im zweiten Kapitel findet sich erstmalig eine Typologie der Brüche mit sieben *Gattungen*:[11]

> *1. Rechte Brüch/ wo der Zehler kleiner ist/ als der Nenner.*
> *2. Brüche einem Gantzen gleich/ wo der Zehler so groß ist/ als der Nenner.*
> *3. Brüche/ wo der Zehler grösser ist/ als der Nenner.*

---

8 Die Kombination von kurkölnischem Geistlichem Rat und Pfarrer in Altenbuch verleitete manche Forscher dazu, die Pfarrei Altenbuch nicht in Niederbayern, sondern in der Nähe von Köln zu suchen (Tropfke, Elementarmathematik 1980, S. 694; CERL-Thesaurus). Dazu verführt auch ein auf den darüber genannten Ort Altenbuch Bezug nehmendes, aber in Verbindung mit dem kurkölnischen Titel irreführendes *Parochus ibidem* in seiner *Unterweisung* am Ende der lateinischen Widmung.

9 Sie war in den 1920er Jahren im Besitz des damaligen Regensburger Ulrichsmuseums, dessen Sammlung 1933 ins Historische Museum (damals Ostmarkmuseum) Regensburg überging (Inv.-Nr. HVE 61). Vgl. Zinner, Astronom. Instrumente 1956, S. 91 und S. 404.

10 D. C. Kaukol, *Unterweisung*, Titel und Vorrede fol.)(4^r,)(5^r.

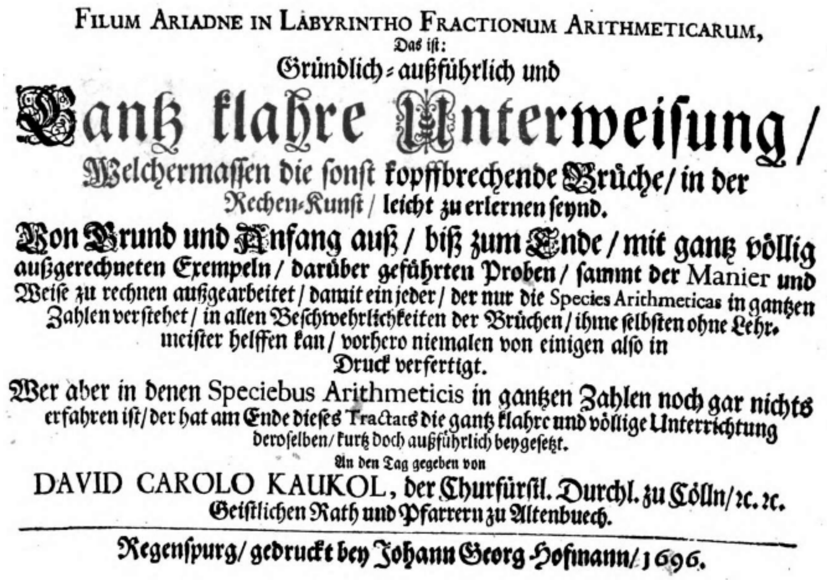
11 D. C. Kaukol, *Unterweisung*, S. 9f. Vgl. Tropfke, Elementarmathematik 1980, S. 120.

4. *Vermischte Brüch/ wo das Gantze mit dem Bruch vermischt ist.*
5. *Brüch von Brüchen.*
6. *Unordentliche Brüche: Als Ein halb Viertl.*
7. *Unordentlich vermischte Brüch/ als Anderthalb Viertl.*

Danach folgen: Kürzen, kleinster gemeinsamer Nenner, Umwandlung von Bruchtypen, Brüche von Brüchen, Grundrechenarten, Größenvergleich, Proportionen, Regula de tri.

Im Anhang diskutiert David Carl unter der Überschrift *Numeratio* eine Thematik, die in frühneuzeitlichen Rechenbüchern nur sehr selten angesprochen wird, nämlich die Nomenklatur großer Zahlen.[12] In Regensburg findet sich dafür sogar noch ein zweiter zwölf Jahre jüngerer – vielleicht auf den ersten zurückgehender – Beleg, nämlich in der *Neugemehrten Praxis Arithmetices* des Rechenmeisters Georg Heinrich Paritius (1675–1725).[13]

In beiden Darstellungen wird an der unhandlichen *gemeinen teutschen Manier* harsche Kritik geübt. Paritius gibt anhand der Zahl *30 517 578 125 000* ein drastisches Beispiel: *dreyssig tausend tausend tausend mal tausend/ fünffhundert und siebenzehen tausend tausend mal tausend/ fünffhundert acht und siebentzig tausend mal tausend/ ein hundert und fünff und zwantzig tausend*. Daran wird das zugrunde liegende Nomenklaturprinzip erkennbar, mit dem man David Carls ‚Berechnung' zur Zahl *1 234 500 673 089 567 897 000 506* nachvollziehen kann: *Du kanst dir leicht einbilden* [vorstellen]*/ wie du bey der Teutschen Manier/ das* […] *Exempel auszusprechen/ die tausend/ tausend etc. und mal repetirn müssest? Nemlich die tausend bey 36 mal: Das mal aber 7 mal/ so ja verdrießlich fällt*. Beide Autoren empfehlen stattdessen zwei andere Arten, die *engelländisch-ältere* (Kaukol) bzw. *englische* (Paritius) und die *engelländisch-neue* (Kaukol) bzw. *französische* (Paritius). Die erste benennt in Tausender-Schritten *Million, Milliott, Milliard, Legion, 1000 Legion, Million Legion, Milliott Legion, Milliard Legion, Bilegion, Trilegion* etc.; die zweite in Millionen-Schritten *Million, Bimillion, Trimillion, Quadrimillion* etc. Letztere hat sich mit den entsprechenden Kurzformen, die schon Paritius als Alternative kannte, und erweitert um die Milliarden-Billiarden-etc.-Sequenz im deutschen Sprachraum durchgesetzt.


FILUM ARIADNE IN LABYRINTHO FRACTIONUM ARITHMETICARUM,
Das ist:
Gründlich-außführlich und
Gantz klahre Unterweisung/
Welchermassen die sonst kopffbrechende Brüche/ in der
Rechen-Kunst/ leicht zu erlernen seynd.
Von Grund und Anfang auß/ biß zum Ende/ mit gantz völlig
außgerechneten Exempeln/ darüber geführten Proben/ sammt der Manier und
Weise zu rechnen außgearbeitet/ damit ein jeder/ der nur die Species Arithmeticas in gantzen
Zahlen verstehet/ in allen Beschwehrlichkeiten der Brüchen/ ihme selbsten ohne Lehr-
meister helffen kan/ vorhero niemalen von einigen also in
Druck verfertigt.
Wer aber in denen Speciebus Arithmeticis in gantzen Zahlen noch gar nichts
erfahren ist/ der hat am Ende dieses Tractats die gantz klahre und völlige Unterrichtung
deroselben/ kurtz doch außführlich beygesetzt.
An den Tag gegeben von
DAVID CAROLO KAUKOL, der Churfürstl. Durchl. zu Cölln/ rc. rc.
Geistlichen Rath und Pfarrern zu Altenbuech.
Regenspurg/ gedruckt bey Johann Georg Hofmann/ 1696.

Titel in David Carl Kaukols *Unterweisung* 1696

[12] D. C. KAUKOL, *Unterweisung*, S. 122–128. Zur Entwicklung der Nomenklatur großer Zahlen allgemein vgl. TROPFKE, Elementarmathematik 1980, S. 14–16.

[13] PARITIUS, *Neugemehrte Praxis* 1708, S. 19–40. Vgl. STERNER, Rechenkunst 1891, S. 324.

3. Der zweitälteste Sohn Matthäus Carl und seine *Feld-Mässerei*

* 21.09.1636 Memmingen
† ?

Aus der Widmung seiner *Feld-Mässerei* (s. u.), erfährt man, dass sich Matthäus Carl zwecks weiterer mathematischer Ausbildung in die Reichsstadt Lübeck begab, wo er zunächst einige Jahre in die Lehre ging und dann als Buchhalter *in Apologistica gedienet* hat.[14] Danach wollte er dort Schullehrer werden. Nach einer unbekannten Zeit in Lübeck tauchte er spätestens 1679 als außerordentlicher Lehrer am Gymnasium Stralsund auf und unterrichtete dort mindestens bis 1683.[15] Aus späterer Zeit sind keine weiteren Nachweise bekannt.

Während der Wartezeit auf eine freie Stelle in Lübeck schrieb er 1667 seine *Feld-Mässerei*, gewissermaßen als Ausweis für seine Fähigkeiten in Geometrie. Nach dem Karlsruher Virtuellen Katalog ist davon in öffentlichen Bibliotheken nur ein Exemplar erhalten, nämlich in der Staatlichen Bibliothek Neuburg/Donau. Es fehlt das Titelblatt, so dass man Verfasser und Titel aus den Angaben im Text rekonstruieren muss (Avii^{v}, Miiii^{v}, Mvii^{v}).

Das 164-seitige Buch ist kein selbstständiges Werk, sondern eine erweiterte Neuausgabe des *Compendiums* von Matthäus Carls Vater Nikolaus, die in Grobstruktur (Kapitel, Anhänge) und Feinstruktur (Abschnitte) weitgehend übereinstimmt, nur in den einzelnen Beschreibungen häufig ausführlicher argumentiert. Aus Nikolaus' Kapitel 1 wird der Teil über Dezimalbrüche (*scrupula decimalia*) als neues *Caput 1 De Geometria Arithmeticali* herausgezogen. Die Nummern der übrigen Kapitel erhöhen sich also um eins gegenüber Nikolaus. Zu Beginn des zweiten Anhangs (*Libration* – Höhenunterschiedsbestimmung) steht der gleiche Venussymbol-Verweis auf das Titelblatt wie bei Nikolaus, so dass es wahrscheinlich auch den gleichen Stich enthielt. Am Schluss befindet sich sogar die gleiche *Diatyposis*-Tafel mit den geometrischen Abbildungen, allerdings (jedenfalls im Neuburger Exemplar) ohne Autor- und Stecher-Namen.

In den geometrischen Abschnitten finden sich für ein frühneuzeitliches mathematisches Lehrbuch – zusätzlich zu den Verweisen seines Vaters auf Euklid, Johann Hartmann Beyer und Ludolph van Ceulen – ungewöhnlich viele weitere auf andere Autoren, von denen hier die wichtigsten genannt seien:

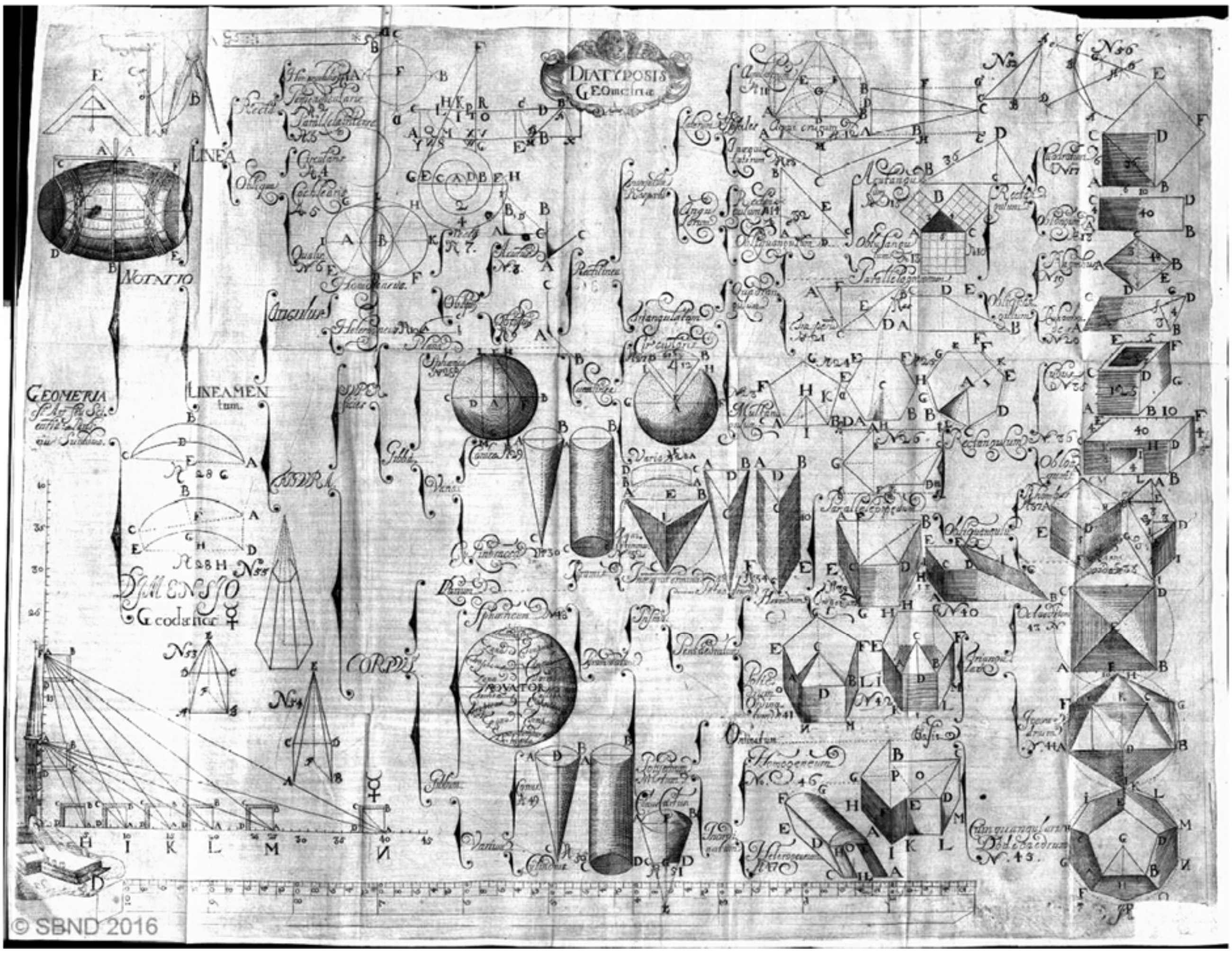
Tobias Beutel bzgl. platonischer Körper (Kap. 8, S. 117)
Bernhard Cantzler bzgl. Kreissegmenten (Kap. 7, S. 81)
Jan Pieterzoon Dou und Johann Sems bzgl. Kreissegmenten (Kap. 7, S. 81) und Kreisteilung in flächengleiche parallele Streifen (Kap. 7, S. 86f.)
Levinius Hulsius bzgl. Instrument zur Höhenbestimmung (Anhang 1, S. 152f.)
Adriaan Metius bzgl. platonischer Körper (Kap. 8, S. 117, 121)

---

[14] Bzgl. *Apologistica* in der Bedeutung ‚doppelte Buchführung' vgl. CANTOR, Vorlesungen, 2. Bd. 1900, S. 620, zu Simon STEVINS (1548–1620) *De Apologistica Principum Ratiocinio Italico* im 2. Band von dessen *Hypomnemata mathematica*.

[15] ZOBER, Stralsunder Gymnasium 1848, S. 43 (in anderer Zählung S. 24).

Bartholomäus Pitiscus bzgl. Divisionsverfahren (Kap. 1, S. 5)
Petrus Ramus bzgl. Pyramidenvolumen (Kap. 8, S. 96) und Halbkugel (Kap. 9, S. 129)
Daniel Schwenter bzgl. geometrischen Instrumenten (Kap. 2, S. 14f., 17) und einer Schneckenlinie (Kap. 3, S. 26f.).[16]



Diatyposis Geometriae in Matthäus Carl Kaukols *Feld-Mässerei* 1667,
übernommen aus Nikolaus Kaukols *Compendium* 1666

4. Der jüngste Sohn Johann Carl und sein *Püchsenmeisterey-Buch*

* 18.10.1650 Regensburg
† Juni bis September 1686 Budapest

Wir wissen nur sehr wenig über Johann Carls Leben. Sein Bruder Lukas Carl (vgl. Abschnitt 5) schrieb 1703: Johann Carl sei als *Stuck* [Geschütz] *Haubtman*, d. h. Artillerie-Hauptmann, in kurbayerischen und kaiserlichen Diensten gestanden. Er habe zweimal bei Ofen (Buda, Teil des heutigen Budapest) *seiner sondern experienz halber*

[16] Beutel (~1627–1690), *Geometrischer Lustgarten*, Leipzig 1660; Cantzler, *Vom Feldmässen*, Nürnberg 1622; Dou / Sems, *Practijck des lantmetens*, Leyden 1600; Hulsius (1546–1635), *Tractat der mechanischen Instrumente*, 1604; Metius (1571–1635), *Arithmeticae libri II et geometriae libri VI*, Franeker 1611; Pitiscus (1561–1613), *Trigonometriae libri V*, Frankfurt 1612; Ramus (1515–1572), *Scholarum mathematicarum libri XXXI*, Basel 1569; Schwenter (1585–1636), *Geometriae Practicae Novae et Auctae Tractatus*, Nürnberg 1622.

guete dienst gethan, bey einem außfall aber sein leben mit eingepüst vnd zu dienst Seiner Keyserlichen Majestät aufgeopfert. Lukas Carl meinte wahrscheinlich die beiden Belagerungen des türkisch besetzten Ofen durch die christliche Allianz 1684 und 1686 – die zweite erfolgreich – im Laufe der großen Türkenkriege 1683–1699. Somit wird Johann Carl bei der zweiten im Zeitraum von Juni bis September 1686 gefallen sein.

Johann Carls *Püchsenmeisterey- vnd Fewer-Kunst-Buch*, datiert Regensburg am 5. Juli 1669, ist ein reich bebildertes Autograph mit etwa 115 beschriebenen Blättern. In dem technikgeschichtlich und militärhistorisch interessanten Werk zeichnet sich schon Johann Carls weiterer beruflicher Weg ab: Es handelt nämlich von Sprengstoffkunde, Geschützwesen sowie Feuerwerkskunst in Krieg und Frieden. Johann Carl notiert in seiner Handschrift offenbar Lehrinhalte seiner Ausbilder, die sicher ihrerseits Vorlagen verwendeten.[17]

Darin ist aus Sicht der Mathematik- und Physikgeschichte ein Geschützaufsatz faszinierend: Ein etwa 25 cm hohes, aufwendig gebautes Multifunktionsgerät, das neben dem Höhenrichten (Einstellen des Schusswinkels) eines Geschützes mit den beiden folgend beschriebenen Verfahren auch für Vermessungsarbeiten geeignet war. In den einschlägigen Museen und Sammlungen ist von diesem komplexem Typ offenbar kein Exemplar erhalten. In der einschlägigen Literatur zeigt nur der Zeugmeister Georg Schreiber aus Brieg / Brzeg in Schlesien zwei ähnliche Instrumente, allerdings ohne jegliche Beschreibung.[18]

Zum Höhenrichten gab es zwei Verfahren und davon abhängige Typen von Geschützaufsätzen. Das erste ist die numerische Schusswinkeleinstellung mit Richtquadranten (Winkelmesser für einen Viertelkreis 0° bis 90°). Am Kreismittelpunkt eines sog. Pendelrichtquadranten war eine Schnur mit einem Senkblei befestigt, um den Schusswinkel daran auszurichten. Beim zweiten Verfahren wurden das Ziel und gleichzeitig der Schusswinkel mit Visiereinrichtungen, nämlich Loch- oder Rohrvisieren, eingestellt. Dafür musste eine Visiereinrichtung in ihrer Höhe verstellbar sein. Bei einer verfeinerten Konstruktion waren beide Visiereinrichtungen an einem frei verschieblichen Stab oder an Schraubenspindeln, die teils feine Präzisionsgewinde aufwiesen, stufenlos höhenverstellbar. Die Höhe des Visiers wurde durch am Geschützaufsatz angebrachte, vom Kugelgewicht abhängige lineare Schussweiten-Skalen oder eine Schießtabelle bestimmt.[19]

Derart ausgefeilte Höhenricht-Verfahren und die zugehörigen Präzisionsgeräte wirken paradox angesichts der Unwuchten der Kanonen, der mangelnden Passung der Kugeln, der unterschiedlichen Geschossmaterialien (Eisen, Blei, Stein) und der wechselnden Qualität des Pulvers und der Unkenntnis von Geschossbahnen.

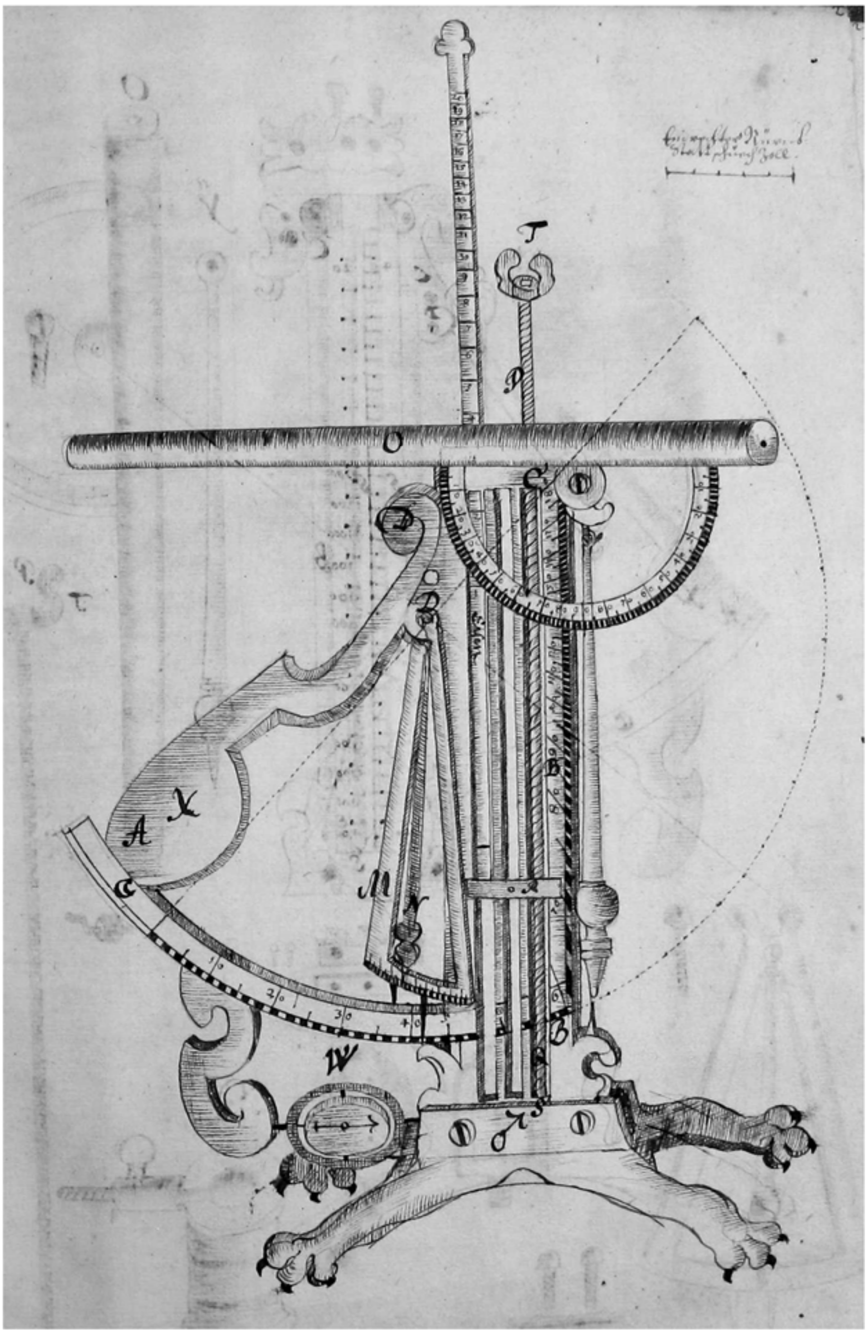
---

17 Es sind wenige Ähnlichkeiten mit FURTTENBACH, *Büchsenmeisterey-Schul* 1643, festzustellen, das auf FURTTENBACH, *Halinitro Pyrobolia* 1627, zurückgeht.

18 Vgl. SCHREIBER, *Büchsenmeister-Discurs* 1656/1671, Tafel 17 vor S. 13 und insbesondere Tafel 19 vor S. 14 mit Schussweitenskalen für Kugelgewichte 12, 25 und 50 Pfund. SCHREIBER bringt weitere Quadranten auf den Tafeln 49–52, allerdings auch nur mit einer ganz kurzen Beschreibung auf S. 105 f.

19 Zu den beiden Visierverfahren vgl. WUNDERLICH, Kursächsische Feldmeßkunst 1977, S. 174–177, der eine kompakte, verständliche Darstellung bietet.

Die Trajektorien stellte man sich zusammengesetzt aus drei Phasen vor, die in ein rechtwinkligen Dreieck eingebettet sind: längerer geradliniger Anstieg (Hypotenuse), ein kurzer Kreisbogen und ohne Knick ein senkrechter Absturz (Kathete) – so beschrieben etwa bei Walter Hermann Ryff (†1548 Würzburg).[20] Man nahm an, dass die Schussweite linear mit dem Schusswinkel bis zum bekannten Maximum bei 45° ansteigt. Erst der spanische Artilleriehauptmann Diego Ufano (†1613) gibt an, dass die Schussweitenzunahme bei linearem Anstieg des Schusswinkels immer geringer ausfällt.[21] Von Wurfparabeln und der sin(2φ)-Abhängigkeit war damals noch keine Rede.[22]



Geschützaufsatz in
J. C. Kaukol, *Püchsenmeisterey-Buch* 1669, fol. 28r

Warum finden sich dann aber besonders reich verzierte Geschützaufsätze in Kunstkammern (bspw. Dresden und Wien)? Diese Repräsentationsexemplare ohne nennenswerte Gebrauchsspuren sollten wohl eine abschreckende Wirkung auf mögliche Gegner entfalten. Man wollte bluffen und den – falschen – Eindruck erwecken, dass man in der ballistischen Theorie ein hohes Niveau erreicht hatte, die geometrischen Prinzipien der Ausrichtung von Geschützen beherrschte und deshalb eine große militärische Schlagkraft besaß.[23]

---

[20] RYFF, *Buexenmeisterey* 1547, fol. XVIIv. Details in SCHNEIDER, Wehrbau 2017, S. 345–350.
[21] UFANO, *Artillerie* 1621, Abb. zwischen S. 114 und 115.
[22] Die Bewegungsgleichungen beim schiefen Wurf lassen sich erst in der klassischen Mechanik nach Isaac NEWTON (1643–1727) aufstellen.
[23] Vgl. PLAßMEYER, Herrschaft verteidigen 2010, S. 65, 68, 72.

5. Der vierte Sohn Lukas Carl und dessen Sohn Maria Joseph Clemens

Lukas Carl (Regensburg 11.06.1649–1711 ?) führte seine Karriere zum Teil auf die vom Vater gelernten Mathematikkenntnisse zurück. Er stand zunächst im Dienst der kurbayerischen Hofkammer in München. Nach der Ernennung von Joseph Clemens (1671–1723), des jüngeren Bruders des bayerischen Kurfürsten Maximilian Emanuel (1662–1726), zum Kölner Kurfürsten 1688 arbeitete Lukas Carl bis 1699 in hoher Funktion in dessen Geheimer Kanzlei in Bonn (1692 verantwortlich für die *Hofcammer Ordnung*) und teilweise im Kameralwesen der kurkölnischen Fürstprobstei Berchtesgaden.

1702 geriet er zwischen die Fronten des Spanischen Erbfolgekriegs (1701–1714), in dem auch der Kölner Kurfürst 1704 nach Namur, Lille und Valenciennes ins Exil fliehen musste. Auf den 10.01.1703 datiert ein autobiografisches Rechtfertigungsschreiben (*Lebenswandl*), das Lukas Carl in der Gefangenschaft auf der Pfalz bei Kaub am Rhein schrieb (die Akten liegen heute im Staatsarchiv Wertheim), aus dem man einiges über die Familiengeschichte der Kaukols erfährt.

Lukas Carls Sohn Maria Joseph Clemens begleitete den Kölner Kurfürsten ins Exil und 1715 wieder zurück nach Bonn. 1729 erschien sein 250-seitiger *Christlicher Seelen-Schatz außerlesener Gebetter* in Bonn, den er dem 1723 nachfolgenden Kurfürsten Clemens August (1700–1761) widmete. Maria Joseph Clemens’ zweiter Sohn Claudius Joseph Maria (* 30.05.1714 in Valenciennes) war in dritter Generation in der kurkölnischen Geheimen Kanzlei tätig.

Literaturverzeichnis

Holl, Alfred: Die Regensburger Mathematiker-Familie Kaukol und ihre Werke im 17. Jahrhundert. Verhandlungen des Historischen Vereins für Regensburg und Oberpfalz VHVO 157 (2017), S. 109–138.

Holl, Alfred: Die Regensburger Mathematiker-Familie Kaukol und ihre Werke im 17. Jahrhundert – Ergänzung: Johann Carl Kaukol und die Büchsenmeisterei. Verhandlungen des Historischen Vereins für Regensburg und Oberpfalz VHVO 159 (2019), S. 297–312.

Kaukol, David Carl: *Filum Ariadne in Labyrintho Fractionum Arithmeticarum. Das ist: Gründlich-außführlich und Gantz klahre Unterweisung/ Welchermassen die sonst kopff-brechende Brüche/ in der Rechen-Kunst/ leicht zu erlernen seynd*. Regensburg: Johann Georg Hofmann 1666. 154 S.

Kaukol, Johann Carl: *Formalisches Püchsenmeisterey- vnd Fewer-Kunst-Buch*. Handschrift. Regensburg 5. Juli 1669 (Riksarkivet Stockholm, Krigsarkivet, Manuskriptsamlingen, XXVIII: 2; Geschenk 1874 von Major August Wilhelm Brunius (1836–1913)). Ca. 115 Bl.

Kaukol, Matthäus Carl: *Neulährende Feld-Mässerei und Visir-Kunst*. Lübeck: Valentin Schmalhertz 1667 (Staatl. Bibliothek Neuburg/Donau 01/8 Math.81). 164 S.

Kaukol, Nikolaus: *Compendium Geo- et Stereometriae Theoretico-Practicum Selbstlehrende Mathematico-Mechanische Veldtmesserey Vnd Uisierkunst*. Regensburg: Christoph Fischer 1666. 96 S.

Meine beiden oben genannten Aufsätze sind im Internet frei zugänglich. Die weiteren Angaben zu Quellen und Sekundärliteratur finden sich dort. Aus Platzgründen verzichte ich hier darauf.

Hans Fischer, Eichstätt

Dirichlets Vorlesung „Elemente der Lehre von den Reihen“, WS 1840/41

Karin Reich [2003] hat gründlich die Rezeption der Werke Cauchys in Deutschland, vor allem mit Bezug auf Besprechungen in den *Göttingischen Gelehrten Anzeigen* (GGA) untersucht. Sie ist zum Ergebnis gekommen, daß besonders die beiden grundlegenden analytischen Werke, *Cours d'analyse* (1821) und *Résumé sur le calcul infinitésimal* (1823) relativ viele „negative Reaktionen“ – freilich von aus heutiger Sicht eher zweitrangigen Mathematikern – hervorgerufen hätten. Erst durch Lehrbücher von Schlömilch und Grunert hätte sich Cauchys Analysis ab den 1840ern besser verbreiten können.

Johann Tobias Mayer (1752–1830) betonte etwa in seiner Rezension (GGA 1822) des *Cours*, daß das „französischen Mathematikern eigene Streben“, „bereits gut erwiesenen Lehren ein neues Gewand umzuhängen ... auch in dieser Schrift unverkennbar“ sei. Er könne „durch viele Beyspiele belegen“', daß dadurch nur bekannte Sätze ein „schwerfälliges Ansehen gewinnen“. Martin Ohm (1792–1872) lehnte (GGA 1929) die Brauchbarkeit des *Cours* als Lehrbuch wegen „des vielen darin vorkommenden Unklaren, Verworrenen und dazwischen auch Unrichtigen“ pauschal ab [Reich 2003, 445 f.].

Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) hat kein Lehrbuch zur elementaren Analysis verfaßt. Durch seine Vorlesungen hat er jedoch eine bedeutende Zahl von einflußreichen Mathematikern in der direkten Vor-Weierstraß-Zeit geprägt: Borchardt, Seidel, Heine, Lipschitz, Riemann, Dedekind. Und wie eine genauere Analyse von erhaltenen Vorlesungsmitschriften zeigt, hat hier Dirichlet ganz wesentlich Ergebnisse und Ansätze von Poisson und vor allem auch Cauchy verbreitet, obwohl die beiden während seiner Pariser Zeit (1822–26) offenbar nicht direkt zu seinen akademischen Lehrern gehörten (vgl. [Merzbach 2018, chapt. 2]). So dürfte Dirichlet etwa seinen vielgepriesenen Diskontinuitätsfaktor aus einer stochastischen Arbeit Poissons entnommen haben [Fischer 2011, 46]; er hat ihn dann freilich einer viel breiteren Anwendung zugeführt. Spalt [2015, 363–370] hat bereits auf die Beeinflussung Dirichlets durch Cauchy hingewiesen, besonders im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff, dem Integralbegriff und der Stetigkeit von Funktionen. Ich selbst habe diese Betrachtungen aufgrund vorhandener, bislang unedierter Vorlesungsmitschriften von Ludwig Seidel (1821–1896) aus den Jahren 1840–1842 weitergeführt [Fischer 2018] und bin im Detail zu etwas anderen Einschätzungen als Spalt gekommen. Insbesondere dürfte tatsächlich die öfters geäußerte, von Spalt jedoch bestrittene Ansicht zutreffen, daß Dirichlet dem modernen Zuordnungsbegriff bei Funktionen schon sehr nahe gekommen ist.

Dirichlet hat meist Vorlesungen für fortgeschrittene Studenten gehalten. Seine Auffassung über viele Grundbegriffe der Analysis kann trotzdem ganz gut aus den entsprechenden Vorlesungsmitschriften erschlossen werden. Die Vorlesung aus dem WS 40/41 über die „Elemente der Lehre von den Reihen“, die ebenfalls von dem bereits erwähnten Seidel (Nachlaß Seidel 003) mitgeschrieben wurde, war allerdings eher für Anfänger bestimmt, und sie gestattet weitere Aufschlüsse über Dirichlets Verständnis elementarer analytischer Begriffe. Tatsächlich hat sich Dirichlet hier sehr stark an den einschlägigen Kapiteln des *Cours d'Analyse* von Cauchy orientiert, freilich mit zwei signifikanten Abweichungen, wie wir gleich sehen werden. Auf jeden Fall erhärtet dieses Dokument weiter die Vermutung, daß es nicht (nur) Schlömilch und Grunert waren, die maßgeblich zur Verbreitung der Cauchyschen Lehre beigetragen haben, sondern vor allem der an Schülern reiche und einflußreiche Dirichlet.

Das hier näher zu besprechende Skript umfaßt 78 Textseiten im Quartformat und bezieht sich auf das einstündige Publicum, das Dirichlet gemäß dem Vorlesungsverzeichnis der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin immer am Samstag von 2 bis 3 Uhr nachmittags gehalten hat. Mit der Hörerzahl 38 erzielte Dirichlet, soweit das aus seinen persönlichen Aufzeichnungen hervorgeht [Biermann 1959, 34–39], einen persönlichen Rekord für seine Berliner Zeit 1829–1855. Normalerweise hatte er dort nicht viel mehr als ungefähr 10 Hörer. Entsprechend der nicht sehr spezialisierten Hörerschaft in dieser öffentlichen Vorlesung ist das Skript auch bezüglich einfacher Dinge sehr ausführlich gefaßt, ein besonderes Eingehen auf grundlegende Begrifflichkeiten war aber wohl auch, wie aus seinen anderen Mitschriften hervorgeht, eine Eigenart von Seidel. Marginalien aus späterer Zeit (mit Datumsvermerk) legen nahe, daß Seidel diese Mitschrift wie auch andere über Vorlesungen von Dirichlet später als Muster für seine eigenen Vorlesungen an der Universität München herangezogen hat.

In einer Hinsicht ist Seidels Skript eine Enttäuschung: Im Gegensatz zu Cauchy geht Dirichlet nicht auf Stetigkeitsfragen bei Reihen nach Funktionen, insbesondere Potenzreihen, ein. Damit geht aus dieser Vorlesung – wie auch wohl aus allen weiteren Dokumenten, die wir von Dirichlet kennen – nicht hervor, wie er nun zu „Cauchys Fehler", dem vielleicht berühmtesten Fehler der Mathematikgeschichte, stand. Andererseits fällt die absolute Enthaltung Dirichlets vom Stetigkeitsbegriff geradezu auf, wie wir noch an einem Beispiel sehen werden. Cauchy hatte ja in seinem *Cours* [1821, VI.1, théorème 1] behauptet, daß eine konvergente Reihe stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ergeben müsse. Dies mußte falsch sein, wie Cauchy selbst aus der Theorie der Fourierreihen durchaus wußte. Auch seine Richtigstellung [1853] des Theorems hat noch Restzweifel gelassen, was denn Cauchy genau gemeint haben könnte. Dirichlets Vorlesung bietet aber trotzdem – neben den Einsichten in seine Rezeption Cauchys – eine Besonderheit: Die Diskussion der absoluten und bedingten Konvergenz nebst dem Problem der Umordnung, worin sie deutlich über die entsprechenden Ausführungen von Cauchy hinausgeht.

Die Inhalte der Vorlesung

von 1840/41 sind im Vergleich zum *Cours*, abgekürzt mit C, kurz zusammengefaßt wie folgt:

§1 und §2: Klärung der Grundbegriffe, besonders Konvergenz, Divergenz, Cauchysches Konvergenzkriterium in epsilontischer Formulierung; Beispiel geometrische und harmonische Reihe (C VI.1)

§3: Majoranten- und Minorantenkriterium für Reihen mit Gliedern eines einheitlichen Vorzeichens, Quotientenkriterium (C VI.1, VI.2, théorème 2)

§4: Anwendungen des Majorantenkriteriums auf Reihen mit positiven Gliedern (C VI.2, th. 3)

§5: Umordnungssatz mit Beweis für Reihen mit positiven Gliedern (C –)

§6: Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz, Satz über die Konvergenz alternierender Reihen (C VI.3, th. 3)

§7: genauere Diskussion der Umordnung von Reihen bei uneinheitlichem Vorzeichen; „Reihen der ersten/zweiten Art“ (C VI.3 nur vage Andeutung nach th. 3)

§8: Addition, Subtraktion, Multiplikation von konvergenten Reihen (C VI.2, th. 5 & 6)

§9: binomische Reihe (C VI.4, problème 1 zusammen mit C V.1) und Wurzelberechnung (C –)

§10: mit denselben Methoden wie in 9 wird für die Exponentialreihe gezeigt, daß sie den Rechenregeln für die Exponentialfunktion folgt (C VI.4, corrolaire 1 nach prob. 1 verwendet andere Methode).

Bei Dirichlet in 9 und 10 kein Übergang zu irrationalen Variablen, da keine Stetigkeitsbetrachtungen!

§11: Satz über die Gleichheit der Koeffizienten, falls zwei „Potenzenreihen“ innerhalb eines Intervalls konvergieren und gleich sind (C VI.4, th. 6)

§12: Logarithmusreihe (C VI.4, corr. 2 nach prob. 1 mit anderer Methode) und Tricks bei der Tafelerstellung für Logarithmen (C –)

§13: Trigonometrische Reihen (vermutlich aufgrund Exponentialreihe in C IX.2) sind geplant, aber es werden nur die komplexen Zahlen (C VII.1) eingeführt. Dann bricht das Manuskript ab. Unter dem zugehörigen Stenogramm steht in lateinischer Schrift „Ende“.

Grundbegriffe bei Cauchy und bei Dirichlet

Zahlen: Cauchy versucht, wie er bereits in den *préliminaires* zu seinem *Cours* darlegt, zwischen *nombre*, *quantité réelle* und *valeur numérique* zu unterscheiden. Zahlen gehen aus Messungen hervor – Näheres findet man bei Cauchy auch in der der Arithmetik gewidmeten ersten *note* am Ende des *Cours* nicht – und sind als positiv aufzufassen, während reelle Größen das Zu- oder Abnehmen des Maßes versinnbildlichen, somit ein Vorzeichen besitzen oder gleich 0 sind. Der numerische Wert ist der jetzt so genannte Absolutbetrag. In Seidels Mitschrift findet man für reelle Zahlen allgemein die Bezeichnung „Größe“ oder „Werth“, die Absolutbeträge werden als „Zahlenwerth“ oder – selten – „absoluter Zahlenwerth“ benannt. Spezifische Symbole für Absolutbeträge finden sich bei Cauchy wie auch bei Dirichlet noch nicht (angeblich geht das $|\cdot|$ auf Weierstraß zurück). Seidel achtet oft nicht auf die nötige Unterscheidung, sodaß dann aus dem Kontext heraus erschlossen werden muß, ob es sich um eine reelle Zahl an sich oder ihren Absolutbetrag handelt. Wichtig ist: Weder Cauchy noch Dirichlet kümmern sich um eine genaue Festlegung, was eine reelle Zahl, genauer irrationale Zahl, denn ist.

Konvergenz: Cauchy beginnt bei Reihen fast immer mit dem Index 0, Dirichlet – vermutlich aus didaktischen Gründen – meist mit dem Index 1. Der Begriff der Konvergenz wird nun nicht auf den des Limes (der bei Cauchy eher im Sinne eines Häufungspunktes, also ggf. mehrdeutig ist) von Summen der n ersten Glieder zurückgeführt, sondern extra definiert. In der Version von Seidel:

> [Die Convergenz findet] dann statt, wenn die Summe der n ersten Glieder für ein immer wachsendes n einer gewissen Größe, welche die Summe der Reihe heißt, sich so nähert, daß ihr Unterschied von dieser Größe, wenn man n nur groß genug annimmt, kleiner als jede noch so klein angenommene Größe werden kann.

Diese Definition stimmt inhaltlich (abgesehen von Seidels unklarer Ausdrucksweise, die Absolutbeträge nicht berücksichtigt) mit der von Cauchy überein. Nicht-Konvergenz wird bei Cauchy wie bei Dirichlet mit „Divergenz" bezeichnet. Absolut (unbedingt) bzw. bedingt konvergierende Reihen (Weierstraßsche Terminologie?) werden bei Dirichlet „Reihen der ersten Art" bzw. „Reihen der zweiten Art" genannt, eine entsprechende Terminologie bei Cauchy fehlt.

Cauchy-Kriterium: In CVI.1 wird als notwendig und hinreichend dafür, daß die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ konvergiert, die folgende Bedingung für die Summen s_n der n ersten Glieder aufgestellt:

> ... pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes
>
> $$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \&c. \ldots$$
>
> diffèrent de la limite s, **et par conséquent entre elles**, de quantités infiniment petites.

Die Hervorhebung ist so nicht im Original, sie soll hier dazu dienen, das Auftreten des Cauchy-Kriteriums (das übrigens schon bei Euler und Bolzano zu finden ist [Laugwitz 1999, 187]) zu verdeutlichen. Im folgenden Text wird es von Cauchy dann noch näher erläutert und erst dadurch einigermaßen klar dargelegt.

Bei Dirichlet/Seidel findet sich folgende wesentlich klarere Version: Ausgehend von der vorgegebenen, beliebig kleinen positiven Größe ρ („ächter Bruch") wird formuliert:

> [Man wird] so weit gehen können, daß die weiteren Glieder in beliebiger Anzahl addiert, keine Summe geben können, die ρ erreicht.

Während Cauchy in den *préliminaires* die Sprechweisen mit unendlich großen und kleinen Größen im „epsilontischen" Sinne erklärt, aber im Text sehr oft eben daran nicht erinnert, so vermeidet Dirichlet diese Sprechweisen. Er weist allerdings seine Hörer an einer Stelle auf diese Ausdrucksmöglichkeit hin. Aus seinem Hinweis geht klar hervor, daß er Cauchys Sprechweise nicht im Sinne einer Argumentation mit unendlich kleinen Entitäten sieht.

Was vielleicht wichtiger ist: Weder Cauchy noch Dirichlet halten es im Rahmen des Cauchy-Kriteriums für nötig, darauf hinzuweisen, daß dieses (genauer, die Tatsache, daß es hinreichend ist) auf einer zu postulierenden Eigenschaft der reellen Zahlen beruht.

Finitäres Quotientenkriterium bei Dirichlet im Gegensatz zu Cauchy: Modern ausgedrückt verlangt Cauchy für Konvergenz, daß

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$$

mit einem eindeutigen Limes, während Dirichlet die allgemeinere Bedingung aufstellt, daß

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \rho < 1$$

ab einem gewissen Index n.

Keine Stetigkeitsbetrachtungen bei Dirichlet: Auffällig ist Dirichlets Enthaltsamkeit gegenüber der Stetigkeit bzw. damit zusammenhängenden Grenzwerten in der Reihen-Vorlesung, wie hier am Beispiel der Exponentialreihe erläutert wird (für die Logarithmusreihe gilt methodisch Ähnliches).

Cauchy geht von der Binomialreihe mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $x \in]-1;1[$ aus:

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n + \cdots$$

Mit der Substitution $x \leftarrow \alpha x$ und $\mu \leftarrow 1/\alpha$ ergibt sich

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2}(1-\alpha) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\alpha)(1-2\alpha) + \cdots$$

für $x \in]-1/\alpha; 1/\alpha[$. Beidseitiger Übergang zum $\lim_{\alpha\to 0}$ ergibt

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

für $x \in]-\infty;\infty[$. Die Berechtigung des Vertauschens des Limes mit der Reihenbildung folgt, ohne daß dies explizit gemacht wird, aus Cauchys im allgemeinen falschen Stetigkeitssatz.

Dirichlet startet dagegen mit dem Reihenausdruck

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und zeigt mit dem Quotientenkriterium, daß die Reihe konvergiert. Elementar läßt sich nun zeigen, daß $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y)$, woraus induktiv $\varphi(m) = \varphi(1)^m$ für natürliches m folgt. Allgemein ergibt sich daraus weiter $\varphi(x) = \varphi(1)^x$ für rationale x, mit denen sich Dirichlet begnügt. e wird schließlich über die Reihenentwicklung ($x = 1$) eingeführt.

Sowohl Cauchy wie auch Dirichlet wandeln natürlich auf bekannten Wegen. Interessant ist dennoch die bei beiden verschiedene Herangehensweise.

Umordnung von Reihen

Auch zu diesem Thema könnte Dirichlet durch Cauchy angeregt worden sein. In den *Résumés analytiques* [1833, 57 f.] wies Cauchy darauf hin, daß bei Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe Divergenz entstehen könne, und er gab ein Beispiel für eine solche Umordnung. Dirichlet [1837, 318] führte ein Beispiel (ohne weitere Erläuterung) auf, bei dem die alternierende harmonische Reihe nach Umordnung gegen einen anderen Grenzwert als log(2) konvergiert und bemerkte, daß nur bei Umordnung von absolut konvergenten Reihen die Summe eindeutig erhalten bliebe. In seiner Vorlesung erläutert nun Dirichlet ein sehr ähnliches Beispiel

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$$

und zeigt, daß der Unterschied zwischen der Summe der gewöhnlich alternierenden harmonischen und dieser Reihe größer als 1/4 ist. Außerdem beweist er den Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen – Pringsheim ordnet diesen Beweis in seinem Überblick [1898, 91–94] über die Entwicklung des Problems der bedingten gegenüber der absoluten Konvergenz dem Leipziger Professor Wilhelm Scheibner (1860) zu (der ebenfalls in Berlin Ende der 1840er Jahre studiert hat). Übrigens weist in diesem Beitrag Pringsheim auch auf das allgemeine Ergebnis von Schlömilch (1839) hin, in dem die Reihensumme derjenigen alternierenden harmonischen Reihe hergeleitet wird, bei der jeweils auf eine Gruppe von p positiven Gliedern q negative folgen.

Von Dirichlet kommen wir nun noch zu Riemann. Dieser hat nicht nur bei Dirichlet während seines Studiums in Berlin Vorlesungen besucht, sondern wurde von ihm auch bei der Literaturbeschaffung unterstützt [Neuenschwander 1981, 100]. Noch wichtiger dürfte freilich sein, daß Dirichlet 1852 zu einem Besuch in Göttingen weilte und dort Riemann mehrmals getroffen hat. Dabei hat er, wie Riemann in einem Brief an seinen Bruder berichtet [Neuenschwander 1981, 106–108], ihm vielfältige Hilfestellung bei der Abfassung seiner Habilitationsschrift über trigonometrische Reihen (1854, aber erst 1868 im Druck erschienen) geleistet (ein herzlicher Dank gilt Peter Ullrich für entsprechende Hinweise!). Es ist somit kein Zufall, daß in dieser Arbeit, beinahe beiläufig, der berühmte Riemannsche Umordnungssatz samt Beweisidee auftaucht:

> In der That, bezeichnet man in einer Reihe zweiter Klasse die positiven Glieder der Reihe nach durch
>
> $$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$
>
> die negativen durch
>
> $$-b_1, -b_2, -b_3, \ldots,$$
>
> so ist klar, dass sowohl $\sum a$, als $\sum b$ unendlich sein müssen; denn wären beide endlich, so würde die Reihe auch nach Gleichmachung der Zeichen convergiren; wäre aber eine unendlich, so würde die Reihe divergiren. Offenbar kann nun die Reihe durch geeignete Anordnung der Glieder einen beliebig gegebenen Werth C erhalten. Denn nimmt man abwechselnd so lange positive Glieder der Reihe, bis ihr Werth grösser als C wird, und so lange negative, bis ihr Werth kleiner als C wird, so wird die Abweichung von C nie mehr betragen, als der Werth des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes [Riemann 1868, 221].

Fazit

Dirichlet sucht sich aus dem *Cours* die für ihn besonders interessanten Themen bezüglich Reihenentwicklungen heraus. Die von ihm verwendeten Grundbegriffe stimmen im wesentlichen mit denen von Cauchy überein. An die Stelle von Cauchys verwickelter Darstellung aus Sätzen, Korollaren und Problemen setzt er aber einen didaktisch geschickten, geradlinigen Aufbau. Die sicher schon damals als besonders schwierig empfundenen Sprechweisen des unendlich Großen und Kleinen vermeidet er und argumentiert stets explizit epsilontisch. Zur näheren Illustration bringt er im Gegensatz zu Cauchy auch numerische Anwendungen (Wurzel- und Logarithmusberechnung). Auffällig ist, daß schon damals als problematisch empfundene Stetigkeitsbetrachtungen im Zusammenhang mit Reihenentwicklungen von ihm weggelassen werden. Besonders bemerkenswert ist schließlich Dirichlets Betonung von Umordnungsfragen.

Auch diese Mitschrift ist ein Beleg für Loreys Feststellung [1916, 71], daß Dirichlet mit seinen Vorlesungen „klassische Muster“ geschaffen habe.

Literatur

Biermann, K.-R. 1959. J.P.G. Dirichlet. Dokumente für sein Leben und Wirken. Berlin, Akademie-Verlag.

Cauchy, A.L. 1821. *Cours d'analyse.* Paris, Imprimerie Royale.

Cauchy, A.L. 1823. *Resumés analytiques*, Turin, Imprimerie Royale.

Cauchy, A.L. 1853. Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre deslimites données. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* **56**, 454–459.

Dirichlet, P.G. 1837. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. In *Werke*, 1. Band, Kronecker, L. (Hrsg.), S. 313–342, Berlin, Reimer, 1889.

Fischer, H. 2011. *A History of the Central Limit Theorem.* NY, Springer.

Fischer, H. 2018. Punktweise und gleichmäßige Stetigkeit bei Cauchy und Dirichlet. In *XIV. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik*, Binder, Ch. (Hrsg.), S. 6–12.

Laugwitz, D. 1999. *Bernhard Riemann 1826–1866, Turning Points in the Conception of Mathematics.* Basel, Birkhäuser.

Lorey, W. 1916. *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts.* Leipzig-Berlin, Teubner.

Merzbach, U. 2018. *Dirichlet. A Mathematical Biography.* Basel, Birkhäuser.

Neuenschwander, E. 1981. Lettres de Bernhard Riemann à sa famille. *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **2**, 85–131.

Pringsheim, A. 1898. Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse. In *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* I, 1 (Arithmetik und Algebra), S. 49–147. Leipzig, Teubner, 1898–1904.

Reich, K. 2003. Cauchy und Gauß. Cauchys Rezeption im Umfeld von Gauß. *Archive for History of Exact Sciences* **57**, 433–463.

Riemann, B. 1868. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. In *Gesammelte Mathematische Werke*, Weber, H. (Hrsg.), S. 213–251, Leipzig, Teubner, 1876.

Spalt, D. 2015. *Die Analysis im Wandel und im Widerstreit.* Freiburg-München, Karl Alber.

DIE EINGESPANNTE SAITE – EULER, HILBERT, SOBOLEFF, ...

WOLFGANG HERFORT

Abstract. Das sehr einfache Beispiel der Bestimmung der Form einer an beiden Enden fest eingespannten Saite mit einerm in deren Mitte eingehängten Gewicht, soll dazu dienen, die Entwicklung der folgenden Begriffe zu skizzieren:

- Forderungen an ein korrekt gestelltes Problem;
- Erste Variation und Eulersche Gleichung; (Bernoulli, Euler)
- Zulässige (Lösungs)funktionen;
- Schwache Ableitung und Distributionen (Soboleff, Schwartz);
- Normierter Vektorraum, Hilbertraum, Energienorm (Hahn, Hilbert);
- Quadratische Funktionale auf einem Hilbertraum und ihre Ableitung;
- Soboleff'sche Ungleichung und Soboleffraum für die Saite;
- Präsentation der Lösung und Abschlußdiskussion.

Technische Universität Wien, Institut für Analysis und Scientific Computation, Email: W.Herfort@tuwien.ac.at

Wolfgang Herfort

Zur Bruchrechnung im Mathematikunterricht der Volksschulen in Mitteldeutschland von der Weimarer Republik bis zur Entstehung der DDR.

Thomas Krohn & Silvia Schöneburg-Lehnert, Universität Leipzig

Der folgende Beitrag fokussiert auf eine erste Analyse der schulischen Behandlung der Bruchrechnung in Mitteldeutschland am Beispiel ausgewählter Lehrpläne und Lehrbücher der Jahre von etwa 1920 bis 1950. Es soll damit ein Blick auf einen zu allen Zeiten bedeutsamen Themenbereich innerhalb des Mathematikunterrichts gelegt werden, der nicht nur für ein Verständnis der gemeinen Brüche und Dezimalzahlen selbst, sondern auch als immanente Grundlage für (fast) alle folgenden Teile des Mathematikcurriculums von unbedingter Notwendigkeit ist.
Dabei wird sich für die Bruchrechnung an den Volksschulen zeigen, dass die dramatischen gesellschaftlichen Umbrüche dieser Jahre die Lehrpläne für den Mathematikunterricht zwar kaum veränderten, dennoch in der Ausgestaltung der Lehrbücher auffallende Besonderheiten und Unterschiede deutlich werden, von denen einige auch unter heutigem Maßstab für den Schulunterricht durchaus beachtenswert sind.

The following article focuses on an initial analysis of the treatment of fractions in schools in Central Germany using the example of selected curricula and textbooks of the years from about 1920 to 1950. The aim is to take a look at a subject area within mathematics education that has been important at all times and that is of absolute necessity not only for an understanding of common fractions and decimal fractions themselves, but also as an immanent basis for (almost) all subsequent parts of the mathematics curriculum.
In the case of fractions, it will be revealed that the dramatic social changes of these years hardly changed the curricula for mathematics teaching, but nevertheless, in the design of the textbooks, striking characteristics and differences become apparent, some of which are quite noteworthy for school teaching even by today's standards.

1. Bruchrechnung im Mathematikunterricht zwischen Politik und Pädagogik

Das zweite Viertel des 20. Jahrhunderts fällt historisch in eine Epoche, die in der Welt im Allgemeinen und in Deutschland im Speziellen von mächtigen Umwälzungen geprägt war: die Neuorientierung nach dem 1. Weltkrieg, der letztendlich erfolglose Versuch der Demokratisierung in der Weimarer Republik, der Übergang in die Diktatur des 3. Reiches bis hin zur Teilung Deutschlands nach dem 2. Weltkrieg. Eine Gesamtschau auf die Umsetzung der Bruchrechnung in Mathematik-Lehrbüchern dreier deutscher Staaten (Weimarer Republik, Drittes Reich, Sowjetische Besatzungszone) zwischen etwa 1920 und 1950 lässt sich im Rahmen dieser Untersuchung daher nicht umsetzen, zu unterschiedlich sind allein die durch die grundlegenden politischen Wechsel veranlassten Umbrüche in der Bildungslandschaft und damit zu grundlegenden Ideen wie gemeinsamen Lernen der Geschlechter, Schuldauer, Schulformen und generell dem föderalen Ansatz in der Hoheit über das Schulsystem und den damit verbundenen Bildungszielen.
Somit besitzen die folgenden Analysen zur Umsetzung der Bruchrechnung im Mathematikunterricht der Volksschulen einen Auswahlcharakter, der maßgeblich auf dem wirklichen Einsatz der beachteten Lehrwerke in Mitteldeutschland im Raum Leipzig fußt und damit vor allem für die „föderalen Epochen“ im Untersuchungszeitraum einen exemplarischen Charakter besitzt.

Gesellschafts- und Bildungspolitische Entwicklung

Die gesellschaftlichen Umbrüche nach Ende des Kaiserreiches in Deutschland in den frühen 1920er Jahren veranlassten im Bildungssystem zahlreiche Modifikationen, von denen es bei vielen jedoch beim Vorsatz blieb. Unter maßgeblicher Federführung der SPD waren schon 1919 zentrale Forderungen nach Trennung von Schule und Kirche, Aufbau der „Einheitsschule“, Unentgeltlichkeit des Unterrichts usw. Bestandteil der

Diskussionen.[1] Dennoch wurden nach langen Verhandlungen mit dem „Weimarer Schulkompromiss“ maßgebliche Bestandteile des früheren Reichs-Schulsystems wie der Föderalismus, die grundlegende Dreigliedrigkeit mit Geschlechtertrennung erhalten. Weitere Reformversuche Ende der 1920er Jahre scheiterten.[2]

Das nur wenige Jahre andauernde demokratische Experiment der Weimarer Republik fand 1933 mit der Machtübernahme der Nationalsozialisten sein Ende. Trotz der beginnenden zügigen Gleichschaltung der Länder blieben zunächst die Kompetenzverteilung von Reich und Ländern strittig und Länderregelungen weitgehend in Kraft,[3] erst 1937/1938 kam es zunächst für Volks- später für weiterführende Schulen zu reichsweit verbindlichen Richtlinien. Aus dem vorherigen föderalen Bildungssystem entstand ein reichsweites: die grundlegende Volksschule von 8 Jahren, sowie eine weiterführende 6-jährige Mittelschule und später nach österreichischem Vorbild 4-jährige Hauptschule, jeweils ab 5. Schuljahr.[4]

Nach Ende des 2. Weltkriegs endete die reichsweite Einheitlichkeit im Schulsystem abrupt mit der Entstehung der vier Besatzungszonen, wodurch territorial eigene Verantwortlichkeiten entstanden. In der sowjetischen Besatzungszone (SBZ) kam es bereits 1946 zu grundlegenden Änderungen: Unter dem Grundsatz der Gleichheit wurde die 8-jährige „demokratische Einheitsschule“ (ab 1951 10-jährig) ohne Geschlechtertrennung im gesamten Gebiet beschlossen, die historisch gefestigte Dreigliedrigkeit des Schulsystems aufgehoben.[5]

Lehrplaneinbettung und -hinweise zur Bruchrechnung

Die Entwicklung der Ziele und Inhalte nicht nur des Mathematikunterrichts als nicht zu vernachlässigendem Bestandteil der allgemeinen Schulbildung und –erziehung im jeweiligen Staat geschah zu allen Zeiten in einem Spannungsfeld zwischen Einwirkung der jeweiligen politischen Ideologie (inkl. der daraus abgeleiteten bildungsrelevanten Rahmenbedingungen) auf der einen, aber auch der pädagogisch-didaktischen Ansichten auf der anderen Seite.

Der in den 1920er Jahren politisch umstrittene zukünftige Weg der deutschen Schulen im Großen sorgte im Kleinen im untersuchten Gebiet dafür, dass es neue landesweite Lehrpläne in Sachsen erst 1928 gab.[6] Zuvor war ein Lehrplan für die 8-jährigen Volksschulen der Stadt Leipzig schon kurz nach dem Systemwechsel im Jahr 1921 (bearbeitet 1926) neu herausgegeben.[7] Die Bruchrechnung war hier eingebettet in die Jahrgänge 4 bis 6; konkretere Vorgaben gab der Lehrplan nur dahingehend, dass ein erster Zugang über die „dezimale Schreibweise der gebräuchlichen Münzen, Maße und Gewichte“ erfolgen soll (Klasse 4) und später dann die gemeinen Brüche mitsamt den vier Grundrechenarten ohne Beschränkung des Zahlenraums stattfinden.[8] Als genereller Hinweis an die Lehrkräfte findet sich die Behandlung der Inhalte „nach der Arbeitsschulmethode“, wodurch der Erkenntniserwerb der Lernenden durch eigenständige Arbeit und enaktives Herangehen gemeint ist, sowie die Orientierung an „Dingen der Um- und Sachwelt der Kinder“.[9]

---

1 Vgl. Schulz 1919, S. 47ff.
2 Vgl. Geißler 2011, S. 369ff.
3 Vgl. Buddrus 2003, Teilband 2, S. 853ff.
4 Vgl. Geißler 2011, S. 545 und S. 553f.
Ferner kam es zur prinzipiellen Beibehaltung, aber deutlichen Reduzierung der bestehenden Humanistischen Gymnasien sowie zusätzlich zur Entstehung von einer Vielzahl von Elite-Schulen.
5 Vgl. Günther/Uhlig 1970, S. 170, S. 207ff.
6 Diese sollten nun endlich die (anscheinend immer noch angewendeten) Lehrpläne des Kaiserreichs völlig ersetzen. Vgl. hierzu MfV 1928, S. 36.
7 Vgl. Stadt Leipzig 1926.
8 Vgl. Stadt Leipzig 1926, S. 3 und S. 6.
Die späteren Überarbeitungen gaben hinsichtlich der Behandlung der Bruchrechnung keine inhaltlichen Veränderungen (vgl. MfV 1928, S. 10 und S. 21). Für die mittleren und höheren weiterführenden Schulen finden sich für das Untersuchungsgebiet keine Lehrpläne.
9 Stadt Leipzig 1926, S. 1 und 21.

Der erste Lehrplan für Mathematik für die 8-jährige Volkschule im Nationalsozialismus wurde erst 1937/1939 herausgegeben.[10] Im Rahmen des Abschnitts „Rechnen und Raumlehre“ wird die Bruchrechnung zeitlich gestreckt in den Klassen 3 bis 7 behandelt: Beginnend mit der ersten Begegnung über Zehnerbrüche (schon Kl. 3 und 4) werden für die gemeinen Brüche Erweitern und Kürzen sowie Umwandeln von gemeinen Brüchen in Dezimalzahlen (Kl. 5) sowie final die vier Grundrechenarten (Kl. 6 und 7) verankert. Auch dieser Lehrplan enthält für den Mathematikunterricht weitere Hinweise für die Lehrkräfte: Betonung lebenswirklicher Beispiele, Beschränkung auf lebenswichtige Fälle, Vermeidung einer zu frühen Mechanisierung, Fähigkeit der Auswahl zweckmäßiger Lösungswege, großer Stellenwert des Sachrechnens im Sinne der NS-Erziehung.[11]

Nach dem 2. Weltkrieg wurde in der SBZ der erste Lehrplan für Mathematik für die (einzig verbliebene) Volksschule 1946 veröffentlicht.[12] Die Bruchrechnung findet sich in den Klassenstufen 5 („einfache Brüchen des täglichen Lebens“, Zehnerbrüche, Erweitern und Kürzen, gemischte Zahlen) und 6 (Fortführung der Umwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalzahlen, Grundrechenarten). Umsetzungshinweise finden sich dann derart, dass 1. der Arbeitsunterricht „nicht übertrieben“ erfolgen solle und auch Instruktion durch die Lehrkraft sinnvoll sei, 2. Querverbindungen der Themen nur da Beachtung finden, wo sie sich „zwanglos“ ergeben und 3. Praxisorientierung und Anschaulichkeit wichtige Gestaltungsprinzipien seien.[13]

Zusammenfassend finden sich damit in den Lehrplänen zeitlich und inhaltlich viele Gemeinsamkeiten im Curriculum: die Einführung von Brüchen über Zehnerbrüche, Begriff und Umwandeln von gemeinen Brüchen und Dezimalzahlen, Erweitern und Kürzen (meist in Klassenstufe 5) hin zu den vier Grundrechenarten (in Klassenstufe 6). Lebensweltbezug und alltagsnahe Beispiele werden betont, die Bedeutung der Eigenständigkeit in der Arbeitsschulmethode nimmt mit der Zeit ab, bleibt aber erwähnt.

Um nun die Einbettung im tatsächlichen Mathematikunterricht der Volksschulen begründet charakterisieren zu können sollen im Folgenden – eine Ebene tiefer – konkrete in Sachsen (Leipzig) verwendete Schulbücher der jeweiligen Klassenstufen in den Fokus der Betrachtungen gerückt werden.

2. Bruchrechnung im Wandel der Zeit – in ausgewählten Volksschul-Lehrbüchern

In der folgenden Tabelle werden für die Volksschulen der drei historischen deutschen Staaten Weimarer Republik, Deutsches Reich und SBZ als Vorstufe der späteren DDR einige Charakteristiken der Lehrbücher nebeneinander dargestellt,[14] wobei trotz vergleichbarer bildungspolitischer Vorgaben inhaltlich auffallende Unterschiede zutage treten werden.

Die Arbeitsschulmethode selbst geht auf Reformpädagogen wie Hugo Gaudig zurück. Es ist eine Methode, in der die Selbsttätigkeit der Kinder als unterrichtsdidaktisches Prinzip im Vordergrund steht. Wenngleich es nicht „die“ Arbeitsschulmethode, sondern ausdifferenzierte Ansätze gibt, lässt sich als Charakteristiken festhalten: 1. Bedeutsamkeit des Stoffs für das Kind im Hinblick auf die Bewältigung des Alltags; 2. Weniger ist Mehr; 3. Lebenswahre Aufgaben; 4. Gemeinsam mit Schülern aufgestelltes Unterrichtsziel; 5. Selbsttätigkeit des Kindes im Rahmen der Arbeitsgemeinschaft; 6. Eher leiten als lenken; 7. Die Lösungsansätze der Kinder ernst nehmen.
Vgl. hierzu Werth 2017, S. 22–29.

10 Vgl. Zentralverlag der NSDAP 1940.

11 Vgl. Zentralverlag der NSDAP 1940, S. 28–30.
Die Beschränkung auf die Lebenswirklichkeit heißt etwa: „Das Teilen eines Bruches durch einen Bruch fällt weg.“

12 Vgl. Deutsche Zentralverwaltung für Volksbildung 1946, Teilbereich Mathematik S. 3–12.
In der Neuausgabe der Lehrpläne von 1948 ändert im Bereich der Bruchrechnung nichts.

13 Vgl. Deutsche Zentralverwaltung für Volksbildung 1946, S. 4–5.
Interessant ist, dass die schon anfangs nicht allzu große Bedeutung der Arbeitsschulmethode bereits 1948 in keinem Lehrplan mehr erwähnt bzw. gefordert wird. Vgl. hierzu Geißler/Wiegmann 1995, S. 283–284.

14 Die Ausgaben liegen dem Schulmuseum Leipzig vor, über den tatsächlichen Schulgebrauch der Lehrwerke geben die jeweiligen Schulstempel sowie Eintragungen Auskunft. Vgl. hierzu Schulmuseum - Werkstatt für Schulgeschichte Leipzig; https://schulmuseum.leipzig.de.

	Weimarer Republik **„Thieme / Schlossers Rechenübungen für die Volksschule“** **(1926, 5.& 6. Schuljahr)**	**Drittes Reich** **„Heimat und Volk“** **(1941, Bände 5-7)**	**Sowj. Besatzungszone** **„Leben und Zahl“** **(1946, Bände 5-6)[15]**
Anteil der Bruchrechnung im Lehrwerk	ca. 33% aller Aufgaben	ca. 25% aller Aufgaben	ca. 33% aller Aufgaben
genereller Unterrichtsgang	1. Einführung eines neuen Inhalts (z. B. neuer Alltagsbruch) 2. kurze „inhaltlich-deutbare“ Berechnungen“ 3. vielfältige Sachsituationen	1. Einführung eines neuen Inhalts (z. B. neuer Alltagsbruch) 2. ausführliche formale Rechnungen 3. selten Sachsituation	1. Einführung verschiedener Inhalte (z. B. mehrere Alltagsbrüche) 2. ausführliche formale Rechnungen 3. vielfältige Sachsituationen
Charakteristik der Inhalte zur Bruchrechnung	• fast ausschließlich Brüche des Alltags • häufige Visualisierung • überwiegend in Sachsituationen, wenig formale Rechenaufgaben • häufige Reflexionsanregungen wie „Male“, „Zeichne“, „Erzähle“	• fast ausschließlich Brüche des Alltags • nur wenig Visualisierung • fast immer formale „Berechne“-Aufgaben • selten Reflexionsanregungen wie „Erkläre“, „Deute“	• zunächst Brüche des Alltags, später Erweiterung • häufige Visualisierung • Wechsel zwischen formalen und Sachsituationen • selten Reflexionsanregungen wie „Begründe“, „Erkläre“
Motivation und Einstieg in das Thema der gemeinen Brüche	Sichtweise auf Brüche: Bruch als Anteil einer/mehrere Ganzer • vielfältige Alltagsbeispiele zu $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$, auch $\frac{1}{10}$ • restliche alltagsnahe Stammbrüche später anhand von Kreissegmenten oder Lineal-Einteilung	Sichtweise auf Brüche: Bruch als Anteil eines Ganzen • markierte Anteile eines Kreises zu $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$ • restliche alltagsnahe Stammbrüche später anhand von Kreissegmenten oder Lineal-Einteilung	Sichtweise auf Brüche: Bruch als Anteil eines Ganzen • Stammbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ mittels Papierfalten • restlich alltagsnahe Stammbrüche durch erneutes Papierfalten
Systematisierung & formale Regelfindung	• keine Systematisierung • keine Regeln, sondern lösbar inhaltlich / mit visueller Unterstützung	• Systematisierung denkbar indirekt durch Vielzahl an Rechnungen • nur teilweise Regeln, v. a. lösbar inhaltlich / mit visueller Unterstützung	• Systematisierung denkbar indirekt durch Vielzahl an Rechnungen • meist ohne Regel und lösbar mit visueller Unterstützung (oder inhaltlich)
vorrangige Sachthemen	• Alltagsmaße • Wirtschaft, Haushalt, Lebensmittel, Tier- und Pflanzenwelt	• Alltagsmaße • Zeitpolitisches wie Wachstum der NSDAP, Kosten des Versailler Vertrags, Ressourcen Deutschlands, Militärisches aller Art	• Alltagsmaße • Haushalt, Land- und Viehwirtschaft

Tabelle 1: Übersicht über die Bruchrechnungs-Implementierung in 3 Lehrwerken hinsichtlich verschiedener Kriterien

---

15 Ab 1948 lautet der Titel der Überarbeitung „Zahl und Form“.

Insgesamt sind die Themenbereiche zur Bruchrechnung in den Lehrbüchern der relevanten Klassenstufen anteilig am Gesamtmathematikumfang durchaus in gutem Maße vergleichbar. Der „reine" Anteil der Bruchrechnung ist in „Heimat und Volk" zwar zunächst etwas geringer, jedoch zeigen sich in diesem Lehrwerk ausgegliedert eine Vielzahl von Sach-Themenbereichen wie z. B. „Kampf gegen Schädlinge in der Landwirtschaft", „Verlust von Rohstoffen durch Wegwerfen" oder „Ressourcen Deutschlands im Vergleich" in denen die Bruchrechnung ebenfalls thematisiert wird – die Umsetzung der im Lehrplan geforderten Erziehung im nationalpolitischen Sinn mithilfe des Sachrechnens.

„Thieme / Schlossers Rechenübungen für die Volksschule" in der Weimarer Republik lassen sich charakterisieren durch kaum vorhandene formale Automatisierungs-Übungen und sogar das völlige Fehlen von Regelfindung oder Systematisierungen. Dafür finden sich (fast) ausschließlich praktische Situationen aus dem Lebensalltag der Lernenden sowie der Umwelt zu Flora und Fauna – bereits bei der Einführung der gemeinen Brüche über das Verteilen von Äpfeln oder das Zerschneiden von Papier als auch beim späteren Üben. Die Aufgaben können auf diese Weise ohne formale Regelerarbeitung gelöst werden durch ihre Alltagsnähe und stetige Visualisierung. Dies hat zur Folge, dass die in ihrer „natürlichen Umwelt erscheinenden" Stammbrüche sequenziell thematisiert werden, zunächst $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ („ein halber Apfel") sowie $\frac{1}{10}$ („Linealeinteilung"), dann viel später erst etwas weniger gut alltags-intuitive Brüche wie $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$. Insgesamt werden auf diese Weise zentrale Forderungen der Arbeitsschul-Methode, die ein zentrales Charakteristikum des Lehrplans ist, in passender Weise umgesetzt.

Eine auffallende didaktische Besonderheit, die die anderen untersuchten Lehrwerke nicht auszeichnet, ist das sofortige Verständnis gleich zur Einführung, dass gemeine Brüche nicht nur Anteile eines Ganzen darstellen (das ist in den anderen Lehrwerken ebenso das zentrale Verständnismotiv), sondern – hier erneut der immanente Bezug zur Lebenswelt – auch Anteile mehrerer Ganzer sein können.

„Heimat und Volk" zur Zeit des Nationalsozialismus' strukturiert Inhalte zu gemeinen Brüchen grundlegend ähnlich: die Einführung eines neuen Stammbruchs und die sofortige Übung, beginnend mit aus der Erfahrungswelt stammenden $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$, bevor dann neue Stammbrüche wie $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ thematisiert werden. Die Art der unterrichtlichen Umsetzung unterscheidet sich jedoch auffällig zum vorherigen Lehrbuch: Da die Sachsituationen (zu vor allem zeitpolitischen und militärischen Themen) wie erwähnt vielfach ausgegliedert sind, bestehen die restlichen Übungen fast ausnahmslos aus mechanisch zu bearbeitenden formalen Aufgabenansammlungen mit der Aufforderung „Berechne!", Fragen zum tieferen Nachdenken werden nicht gestellt, alternative Lösungswege finden sich im Lehrbuch nicht – im Gegensatz zu den Forderungen des Lehrplans und auch zum vorherigen Lehrwerk.

Auch in diesem Lehrwerk finden sich mit wenigen Ausnahmen (Erweitern und Kürzen) keine formalen Regeln, sodass die Aufgaben etwa zu den vier Grundrechenarten auch hier zunächst durch inhaltlich-alltagsnahes Verständnis oder die vorhandenen Kreisanteil-Visualisierungen gelöst werden müssen. Später sind Systematisierungen innerhalb des Rechnens und ein etwaiges beginnendes Regelverständnis durch die sehr große Anzahl an formalen Aufgaben ähnlichen Typs immerhin denkbar – sofern durch die Lehrkraft gefördert.

Das 1946 erschiene „Leben und Zahl" lässt sich alles in Allem treffend beschreiben durch das Leitmotiv „Verstehen der Bruchrechnung durch Papierfalten und -zerschneiden", beginnend bei der Einführung der Bruchzahlen als Teil eines Blatt Papiers bis hin zu späteren Grundrechenarten. Stets wird das Blatt Papier visualisiert in den Erarbeitungsprozess miteingebunden und setzt damit die Lehrplan-Forderung nach Anschaulichkeit um. Die Zusammensetzung des Unterrichtsgangs aus formalen Aufgaben und praktischen Sachsituationen vereint beide vorherige Lehrwerke: ein deutliches Wiedererstarken von Sachaufgaben im Vergleich zu „Heimat und Volk" (allerdings gemäß Lehrplan gesellschaftlich adäquat thematisch nun zu Haushalt, Land-und Viehwirtschaft) und damit weniger formale Rechenaufgaben, aber trotzdem von letzteren deutlich mehr als noch in „Thieme / Schlossers Rechenübungen“; insgesamt also ein ausgewogenes Verhältnis.

Im Vergleich zu vorher finden sich explizite Regeln zum Umgang mit gemeinen Brüchen zwar immer noch eher sporadisch, allerdings schon häufiger vertreten; damit erfolgen Systematisierung und Regelfindung auch hier vorrangig – aber nicht ausschließlich – über die große Zahl an Übungsaufgaben, in denen alltagsnah-begreifbare Bruchzahlen und die Anschaulichkeit des Papier-Blatts im Verständnis und zur Lösung helfen.

Insgesamt ändert sich damit grundlegend die Struktur: Waren zuvor die einzelnen Stammbrüche jeweils separat eingeführt und geübt worden, ist dank der handlungsorientierten „Papiermethode“ (-> Referenz an den Arbeitsschulgedanken des Lehrplans) nun prinzipiell das Einführen zahlreicher alltagsrelevanter Stammbrüche zeitgleich möglich, bevor dann die formalen und später angewandten Übungen folgen. Diese bestehen fast immer aus der Aufforderung zum Rechnen, Reflexionsfragen zum Nachdenken gibt es kaum – auch hier ein Rückschritt im Vergleich zu den Ideen 20 Jahre zuvor.

3. Bruchrechnung in Mitteldeutschland 1920 bis 1950 – Zusammenfassung und Ausblick

> *„Für viele Lernende gilt die Beschäftigung mit der Bruchrechnung in Form der Brüche, aber auch der Dezimalbrüche als schwieriges und herausforderndes Gebiet. Wegen des erstmals höheren Abstraktionsgrades passiert es hier durchaus nicht selten, dass bei Lernenden erstmalig das mathematische Verständnis weitgehend auf der Strecke bleibt und an seine Stelle das blinde Auswendiglernen unverstandener und darum leicht zu verwechselnder Regeln tritt.“*[16]

Mit diesen Worten kennzeichnet die aktuelle Fachdidaktik zur Bruchrechnung die Beschäftigung mit eben derselben im Mathematikunterricht, als damals wie heute zentralen und bedeutsamen Bestandteil des Mathematikcurriculums. Um das Verständnis bei den Lernenden im Sekundarschulbereich zu erhöhen, sind in den letzten Jahrzehnten zahlreiche didaktische Anregungen entstanden, anerkannt und im Mathematikunterricht inzwischen etabliert. Die Geschichte jedoch zeigt schon im Rahmen dieses kurzen Einblicks mittels dreier Lehrbücher in drei verschiedenen Gesellschaftssystemen, dass einige der zeitgemäßen didaktischen Prinzipien bereits damals Bestandteil des Mathematikunterrichts waren.

Ob es die handlungsorientierten und praktisch-enaktiven Herangehensweisen des Papierfaltens (Lehrbuch 1 und 3) sind, die ausgewogene Mischung aus formal-automatisierendem und anwendungsorientiertem Üben (Lehrbuch 3), die Reflexionsanregungen zum Begründen, Erklären und Weiterdenken (Lehrbuch 1), die immanente Unterstützung durch Visualisierungen (Lehrbuch 3 und z. T. Lehrbuch 1) oder auch komplexe Aufgaben zum Üben in Gesamtzusammenhängen des Alltags (Exkurse in Lehrbuch 2). Andere Auffälligkeiten, die die exemplarisch ausgewählten früheren Lehrwerke auszeichnete, finden sich heute so nicht mehr in der Ausprägung, abgesehen von den behandelten zeitgeschichtlichen Themen der Sachaufgaben wird der Übergang zu den abschließenden Regeln im Umgang mit gemeinen Brüchen explizit vermerkt: Regeln, die neben dem wichtigen inhaltlichen Durchdringen einen unerlässlichen Bestandteil im Gesamtverständnis darstellen.

Trotz allem handelt es sich bei den untersuchten Lehrbüchern der Volksschulen um einen ersten Schritt in der Analyse der Geschichte der Bruchrechnung des frühen 20. Jahrhunderts. Sich unmittelbar daraus ergebende offene Problemfelder und Anknüpfungspunkte in diesem Bereich können vielgestaltig folgen:

1) Die beginnende Analyse auf der Gesamtebene des Lehrbuchs könnte den Maßstab deutlich vergrößern und bis in die Ebene einzelner Aufgaben für sich gesehen und im Zusammenhang deren Inhalt, Ziel und ihre Umsetzung in qualitativ-analysierender Art untersuchen.

[16] Padberg, F./Wartha S. 2017, S. V.

2) Die vorherigen Aussagen basieren auf Lehrbüchern der Volksschulen, nicht jedoch zu den verschiedenen zu allen Zeiten bestehenden höheren Schulen unterschiedlicher Bezeichnung. Eine erste Sichtung zeigt auffallende Gemeinsamkeiten im Grundkonzept und den strukturellen Elementen, die sich auch in den Volksschullehrbüchern finden, jedoch auch beispielsweise eine stärkere Betonung von formalen Aufgaben und expliziter Regelverankerung. Auch das Zusammenwirken im Hinblick auf die Anschlussmöglichkeit beim Wechsel auf höhere Schulen stellt einen sicherlich lohnenswerten Ansatz dar.[17]
3) Die vorgehende Untersuchung beschränkt sich geographisch auf die Region Sachsen, auch hier sind besonders zu Zeiten des föderalen Systems in Deutschland Unterschiede in der Behandlung der Bruchrechnung in anderen deutschen Regionen zu erwarten.
4) Die drei untersuchten Zeitepochen stehen selbst zeitlich in einem größeren Zusammenhang. Die vorherigen Gegebenheiten (etwa Deutsches Reich ab 1871) und spätere zeitliche Dynamik, insbesondere der bislang kaum untersuchte Mathematikunterricht der DDR[18] in den Jahren 1949 bis 1990 (der wie alle Fächer im Kanon der Institution Schule nicht nur einen Bildungs- sondern auch einen Erziehungsauftrag[19] besaß) für sich oder im Vergleich zur Bundesrepublik Deutschland kann wertvolle Erkenntnisse liefern.

4. Literatur

- Borneleit, P. (2003): Lehrplanerarbeitung und Schulbuchentwicklung in der DDR. In: Henning, H., Bender, P. (2003). Didaktik der Mathematik in den alten Bundesländern – Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR – Aufarbeitung einer getrennten Geschichte, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg: FEIM.
- Buddrus, M. (2003): Totale Erziehung für den totalen Krieg. Hitlerjugend und nationalsozialistische Jugendpolitik (= Band 13 der Reihe Texte und Materialien zur Zeitgeschichte), 2 Teilbände, De Gruyter.
- Deutsche Zentralverwaltung für Volksbildung DVV (1946): Lehrpläne für die Grund- und Oberschule in der Sowjetischen Besatzungszone Deutschlands. Mathematik, Physik, Chemie, Volk und Wissen Verlag.
- Geißler, G. (2011): Schulgeschichte in Deutschland – von den Anfängen bis in die Gegenwart, Peter Lang.
- Geißler, G./Wiegmann, U. (1995): Schule und Erziehung in der DDR. Studien und Dokumente, Hermann Luchterhand Verlag.
- Günther, Karl-Heinz; Uhlig, Gottfried (1970): Dokumente zur Geschichte des Schulwesens in der Deutschen Demokratischen Republik. Teil 1: 1945–1955 (= Monumenta paedagogica VI.), Volk und Wissen.
- Ministerium für Volksbildung (MfV) (1928): Landesplan für die Volksschulen, Buchdruckerei der Dr. Güntzschen Stiftung.
- Richtlinien für die Volksschule (1940): Erziehung und Unterricht für die Volksschule – Die neuen Richtlinien für die Volksschule.
- Padberg, F./Wartha, S. (2017): Didaktik der Bruchrechnung, Springer.
- Schulz, H. (1919): Die Schulreform der Sozialdemokratie, Berlin.
- Stadt Leipzig (1926): Lehrplan für die Volksschulen der Stadt Leipzig, Bär und Herrmann.
- Werth, G. (2017): „Guter“ Raumlehreunterricht aus der Sicht des Reformpädagogen und Volksschullehrers Ernst Heywang, in: Der Mathematikunterricht, Jg. 63, Heft 2, S. 17-33.

Anschrift der Verfasser

Prof. Dr. Silvia Schöneburg-Lehnert
Universität Leipzig
Mathematisches Institut, Abteilung Didaktik
Augustusplatz 10, 04109 Leipzig, Deutschland
E-Mail: schoeneburg@mathematik.uni-leipzig.de

Dr. Thomas Krohn
Universität Leipzig
Mathematisches Institut, Abteilung Didaktik
Augustusplatz 10, 04109 Leipzig, Deutschland
E-Mail: krohn@mathematik.uni-leipzig.de

---

[17] Vergleichbare Lehrwerke der Weimarer Republik (wie „Behrend-Morgenstern-Eichler: Rechenbuch für sächsische höhere Schulen) deuten bei einer ersten Analyse darauf hin, dass hier Formalismus, Regelerlernen und Rechnen zulasten der praktischen und handlungsorientierten Arbeitsschul-Ansätze deutlich mehr Gewicht besitzen.

[18] Vgl. laufendes Dissertationsprojekt von H. Wuschke: Über die Entwicklung der Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts in der SBZ und frühen DDR (1945–1962) am Beispiel Sachsens.

[19] Vgl. hierzu Borneleit 2003, S. 27ff.

Female invited speakers at the International Congresses of Mathematicians (1897-2018) - a long-durée investigation

Annette B. Vogt (Berlin)

(1) The International Congresses of Mathematicians

In 1897 the first International Congress of Mathematicians (ICM) took place in Zürich, following the development of internationalization and international conferences and congresses in various scientific disciplines. In 1900 the next ICM was held in Paris, and from this time on each four years a Congress was organized - interrupted by WW I and WW II. The principles to organize these international congresses are more or less the same over the 125 years. There are an organizing committee, a program committee, and each congress will be organized in a similar way. The congress is grouped in different sessions on the main mathematical disciplines or sub-disciplines at that time. Finally, several plenary lectures are giving by outstanding mathematicians, and the most distinguished and acknowledged mathematicians in special fields will be invited to give special lectures - they are the invited speakers.
The lectures and talks during the congresses were published in special volumes, the "Proceedings", and more recently one can find all basic information in the internet too. During the congresses also journalists were (and are) involved, therefore newspaper articles are an interesting source of information for the public as well as for historians of mathematics. And after each congress reports were published in mathematical journals. Meanwhile some books are published about the history of the ICM, from an illustrated history to an investigation about the history and policy of the International Mathematical Union (IMU), which was mostly responsible to organize these congresses.[1]

---

[1] On the history of the ICM see Albers et al (1987), Lehto (1998), and Curbera (2009). On the history of the IMU see Schappacher (2022).
Albers, Donald J., Gerald L. Alexanderson, Constance Reid. International Mathematical Congresses: An Illustrated History, 1893-1986. Springer 1987 (first ed. 1986). - Lehto, Olli. Mathematics without Borders: A History of the International Mathematical Union. Springer, 1998. - Curbera, Guillermo P. Mathematicians of the World, Unite! The International Congress of Mathematicians - A Human Endeavor. Wellesley, Mass.: AK Peters, 2009. - Schappacher, Norbert. Framing Global Mathematics. The International Mathematical Union between Theorems and Politics. Springer, 2022.

Being an invited speaker at the ICM was - and still is - a special honor. In literature one can find the expression that being invited to give a talk at the ICM may appear as being a member in a "hall of fame". The invitation is a sign of appreciation and of acknowledgement in the scientific community of mathematicians and a great honor. Thus, one always could find in CVs of mathematicians these invitations mentioned among the tributes. Moreover, invited lectures are giving information on new developments and trends in mathematics at this time. As Olli Lehto described it in 1998: "The invited lectures of the International Congresses of Mathematicians (ICM), which are now entirely the responsibility of the IMU, reflect the state and progress of mathematics every fourth year."[2]

The choice of the city where the next congress should take place was (and is) always a complicate one. The idea behind was that the city should be chosen to acknowledge the development of mathematics in this country - for the last years up to the congress or in general over a longer period of time. Moreover, politics in general and the political circumstances in certain countries played always a role and were always involved in the discussions during these 125 years - from 1897 to 2018, and quiet recently in 2022. Politics played a strict role due to WW I and WW II, when congresses had to be cancelled. Likewise, politics was always heavily involved during Cold War I (1947/48-1990/91). Recently, the International Congress of Mathematicians which was planned to take place in July 2022 in St. Petersburg (Russian Federation) had to be transferred in the internet and was held in July only virtual due to the horrible new war since February 24.
The International Mathematical Union (IMU) decided in the beginning of March 2022 that the ICM 2022 will be held virtual in July, and that only the General Assembly (GA) and the awards ceremonies will occur in persona in Helsinki (until May 2022 the capital of the political neutral state Finland). On July 3 and 4, the GA took place and the awards were given the honored mathematicians. The IMU Awards 2022 for mathematical achievement are: the Fields Medal, the Abacus Medal, the Gauss Prize, the Chern Medal, and the Leelavati Prize. The General Assembly decided that the next ICM will be held in 2026 in Philadelphia (USA), and the next GA will be held in New York.[3]

One should mention especially that in 2022 it was only the second time that a female mathematician was awarded the prestigious Fields Medal. In 2014

---

[2] Lehto (1998), p. VIII.
[3] See the webiste of the IMU: www.mathunion.org
Here one also find all informations about the Prize Winners in 2022.

Maryam Mirzakhani (1977-2017) was the first who was honored with the Fields Medal - the first female mathematician ever since 1936. Unfortunately, Maryam Mirzakhani died already few years later due to cancer. Born in Iran and studied there, she later became professor at Stanford University, her special fields were ergodic theory, and hyperbolic geometry. Her academic sister, being awarded with the Fields Medal in 2022, is Maryna Viazovska (b. 1984).[4] A Ukrainian mathematician who was born in Kiev and studied mathematics at the University of Kiev, she became professor at the École Polytechnique Fédérale de Lausanne in Switzerland. Her special fields are number theory and geometry. And she was an invited speaker at the ICM in 2018 in Rio de Janeiro, thus she belongs to our sample of female invited speakers at the ICM.

To examine the history of the ICM as a symbol, a certain reflection, or as a mirror of the development of mathematics in the 20th and 21st centuries, two approaches are possible. Either, one can analyze one ICM in one city/country at a certain time to evaluate the development and to describe the progress of mathematics in a kind of snapshot.[5] Or, one is studying different aspects of the development of mathematics over a longer time period - the long-durée study or long-durée investigation. Long-durée studies have the advantage to offer insights in trends as well as to provide continuities and discontinuities over a certain time period. It becomes possible to recognize breaks as well as highlights, and one can reconstruct certain aspects of the development. For example, one can reconstruct:
- the development of mathematical disciplines and fields, for example, to answer the question when number theory or computer sciences became a favored or preferred topic in sessions of the ICM;
- regarding the invited speakers one may answer questions like, which mathematicians from a certain country have dominated the congresses, or which countries have sent most invited speakers over the longer time period, or which shifts between the countries are visible, or which topics were chosen for the invited lectures reflecting “the state and progress of mathematics every fourth year“, as Olli Lehto characterized it[6];

[4] The Fields Medal Prize Winners 2022 are: Hugo Duminil Copin, June Huh, James Maynard, and Maryna Viazovska. On further informations, including a video and an interview with each Prize Winner see www.mathunion.org.
[5] See Hollings/Siegmund-Schultze (2020).
Hollings, Christopher D., Reinhard Siegmund-Schultze. Meeting under the Integral Sign? The Oslo Congress of Mathematicians on the Eve of the Second World War. AMS (History of Mathematics, vol. 44), 2020.
[6] Lehto (1998), p. VIII.

- and last but not least, one can answer the question when female mathematicians were invited speakers at the ICM at the first time; moreover, one can answer questions like, when female speakers were invited over the longer period, on which topic they held their lectures, where they were coming from, and what was their later career path.

(2) Female Mathematicians

When the first ICM took place in Zürich in 1897 female mathematicians were an absolutely minority among mathematicians. This was simply the case because of the circumstances for women scientists, because of their exclusion from higher education. They were not able to study at a College or University until the late 19th century, and they were not allowed to work in the world of academia. Only from the 1880s on universities in different countries opened their doors for women students, among them very early in Switzerland and very late in the German Empire, here only from 1900 onwards. The exception among female scientists and female mathematicians was the first female professor of mathematics Sof'ja (Sonja) V. Kovalevskaja (1850-1891) in Stockholm, who attended private courses with Karl Weierstrass (1815-1897) in Berlin, received her doctoral degree in absentia from the University of Göttingen, and she was supported by former students of Weierstrass, among them Gösta Mittag-Leffler (1846-1927).
It is interesting that a parallel development happened in the early 20th century: when the first two International Congresses of Mathematicians took place, in the beginning of the 20th century also women were allowed to study regular at universities in most European countries, and at Women Colleges in UK and in the USA. They can receive an academic (doctoral) degree, and they can work as professionals in most science disciplines and in mathematics - at Women Colleges in UK and in the USA, at Technical Colleges and Universities in most European countries. But one has to take into account that there were large differences between the countries regarding the openness to women scientists and their career chances.[7]

One little detail illustrate that women mathematicians were entering the world of academia. It was a signal as well as a symbol that one report about the ICM in Paris in 1900 was written by a female mathematician - by the

[7] On the development in Prussia and in Berlin with comparisons to the development in other European countries, see Vogt (2007), especially chapter 1 and 2.
Vogt, Annette. Vom Hintereingang zum Hauptportal? Lise Meitner und ihre Kolleginnen an der Berliner Universität und in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, Pallas & Athene Bd. 17, 2007.

British mathematician Charlotte Angas Scott (1858-1931). She studied mathematics in UK and was working at Girton College Cambridge (UK). From 1885 - the year of opening the college - until her retirement in 1924 she was working at Bryn Mawr College (USA). In 1925 she moved back to Cambridge (UK) where she died in 1931. She was one of the founders of the American Mathematical Society (AMS), and in the Bulletin of the AMS she published a long report about the International Congress of Mathematicians in Paris.[8] Charlotte Angas Scott had seven PhD students at Bryn Mawr, and one of her PhD students, the Canadian born Louise Duffield Cummings (1870-1947) became an invited speaker at the ICM twice, in 1924 in Toronto - as the first and only female mathematician - and in 1932 in Zürich.

(3) Female invited speakers at the ICM (1897-2018)

Taking into account this coincidence - the parallel development of the first International Congresses of Mathematicians and the growing number of female mathematicians - the question was whether female mathematicians were invited speakers at the ICM, and when and who. In other words, from late 19th Century on, women mathematicians in UK, in the USA, and in several countries in Europe existed, who partly got an excellent education with some of the most gifted (male) mathematicians. Some of these first female mathematicians were teaching at different scientific units, did research in mathematics, and published their results in mathematical journals. Then the question arises whether some of these first female mathematicians were invited as speakers to give talks at the ICM. And more general, where there female invited speakers at the ICM - when, where and who?

In my talk I presented the results of my investigation on female speakers at the ICM from 1897 until 2018, i. e. when and where female speakers gave lectures at the ICM.
I have investigated the female invited speakers at ICM from three aspects:
- where they were coming from, where they got their education;

---

8 See Angas Scott (1900).
Scott, Charlotte Angas. The International Congress of Mathematicians in Paris. In: Bull. Amer. Math. Soc. 7 (2), 1900 (Nov. 1900), pp. 57-79.
Her report was finished with: “Bryn Mawr College, October 1900“ (p. 79).
About her report and the female mathematician Mary F. Winston Newson who translated the - later famous - talk of David Hilbert on problems, see Albers et al (1987), p. 9, under the title “And the Ladies of the Club“.

- which research they did, in which field or mathematical discipline they were working;
- how was their career path.

In my talk I gave an overview on the participation of female invited speakers at the ICM from 1897 to 2018 under these three aspects. I gave the total numbers of female speakers (see the table), and I sketched out their education and their career path. In my talk I described in detail all female mathematicians who were invited speakers at the ICM from 1897 to 1936. Quite often these female invited speakers moved to academic institutions in the USA, during the 1930s some escaped to the USA because of the Nazi regime, after 1945 they got better career chances at universities in the USA than in their homeland or due to political reasons. Finally, I mentioned also all invited speakers at the ICM in 2018, including Maryna Viazovska (b. 1984) who was awarded the Fields Medal in July 2022.

Regarding the total number of female invited speakers at the ICM from 1897 to 2018 the table is given in the end of this paper. I collected the data studying the “proceedings“ and other official information about these ICM. From 1990 on one has to take into account that the total number of female speakers may differ - plus 1-2 probably - due to the problem with family names in Japanese and Chinese languages (especially in 1990 and in 2002) because I was unable always to clarify the gender due to my limit language capacity.
It became obvious that there wasn't a continuous development of growing numbers of female speakers. In contradiction, there were breaks, and up and downs. It is a non-trivial question why the development, i.e. the participation of female invited speakers at the ICM, was discontinuously. Why the numbers are looking so strange, I discussed in my talk about the results of this long-durée investigation. The differences between Zürich 1932 and Cambridge 1950 are obvious, and the reasons have to do much more with politics than with an insufficient number of capable female mathematicians. The years between 1950 and 1986 are showing an absolute under-representation of female mathematicians as invited speakers, and it is a non-trivial question why this was the case. Little progress was made in the next 20 years, from 1990 to 2010, and the highlight in 1932 in Zürich (12 female invited speakers) was reached again only in 2002 in Beijing. Looking back, we see some progress - slowly but effective -, looking in the future we will see hopefully more female invited speakers at International Congresses of Mathematicians, and that it will be normal becoming a female invited speaker.

Table
Female invited speakers at the ICM from 1897 to 2018

1897 - 1920	0
1924 Toronto	1 of 180
1928 Bologna	4 of 265
1932 **Zürich**	**12** of 258
1936 Oslo	4 of 191
1950 Cambridge (USA)	1 of 77
1954 Amsterdam	1 of 59
1958 Edinburgh	0 of 56
1962 Stockholm	0 of 70
1966 Moscow	1 of 87
1970 Nice	2 of 198
1974 Vancouver	2 of 163
1978 Helsinki	0 of 131
1982/83 Warsaw	3 of 140
1986 Berkeley	5 of 165
1990 Kyoto	9 of 154 (9 + X)
1994 Zürich	7 of 164
1998 Berlin	8 of 195
2002 **Beijing**	**11** of 199 (11 + X)
2006 Madrid	8 of 198
2010 Hyderabad	21 of 182
2014 Seoul	20 of 214
2018 Rio de Janeiro	30 of 220

Prof. Dr. Annette B. Vogt
Max Planck Institute for the History of Science
Boltzmannstr. 22
D-14195 Berlin
vogt@mpiwg-berlin.mpg.de

Danuta Ciesielska

L.&A. Birkenmajer Institute for the History of Science of Polish Academy of Sciences

e-mail: smciesie@cyfronet.krakow.pl, ORCID: 0000-0002-3190-5617

About Poles who studied under Klein. Introduction to the research

In the period 1874-1912 in Münich, Leipzig and Göttingen more than 50 Poles studied mathematics under Klein. The very first ones were Władysław Podhajecki, W. Kwiatkowski, Józef Biliński and Ignacy Małachowski who in 1874 in High Technical School in Münich attended Klein's courses on the analytic geometry. At the Münich Polytechnic 12 Poles listened to Klein's lectures.[1] I think that they did not make a career, as I was not able to find information about them, except one – Michał Gnatowicz. Gnatowicz was a full-time clerk in the City Hall in Lwów in 1872, he was an inspector at the market office.[2] In the academic year 1876/1877 he listened to Klein’s lecture on analytic geometry.

In Leipzig only two Poles attended Klein's lectures: Bolesław Buszczyński[3] (1857 - 1926) from Poznań and Jacob Kallir (1862-1929) from Brody (near Lwów). Buszczyński[4] attended the lecture on geometric theory of functions in the summer semester of the academic year 1880/1881. Jacob Kallir[5] attended Klein’s lecture and exercises on analytic geometry at the same time and in the next year an introduction to the differential and integral calculus. In 1887 Kallir received doctorate in physical chemistry in Leipzig for the dissertation *Ueber den Krystallewassergehalt gelöster Kolbaltsaltze*.[6]

Klein's longest period of professional activity was his scientific and academic work at the Göttingen University. The total number of Klein’s Polish students in Göttingen is too large to discuss all of them. Between 1885 and 1911, 39 Polish

1 Władysław Podhajecki, W. Kwiatkowski, Józef Biliński, I. Małachowski, Salomon Herschel, Ignacy Szymański, Pinkaus Reiner, Michał Gnatowicz, Stanisław Daszkiewicz, Stefan Rewicki, Franciszek Kotowicz, Paweł Leszczyński.

2 *Szematyzm Królestwa Galicyi i Lodomeryi z wielkim księstwem krakowskiem na rok 1875*, Drukarnia A.J.O. Rogosza, Lwów 1875.

3 Jadwiga Biała, *Bolesław Buszczyński o związkach meteorów i komet,* “Acta Societatis Metheoriticae Polonorum”[Rocznik Polskiego Towarzystwa Meteorytowego], Vol. 8, 2017, p. 12–17.

4 Buszczyński was a son of Józef, a Prussian publisher who was operating in Leipzig and Poznań. The printing house fell to his older brother Sylwester, and Bolesław devoted to science. He studied in Jena, Berlin, Leipzig and Breslau. After studies he was an assistant at the Jagiellonian University Astronomical Observatory in Kraków. He received his doctorate in 1890 in Erlangen. Since 1892, he taught mathematics and physics in Kraków, Dresden, Kościan and Poznań. After Great War he was the director of the Meteorological Observatory of University of Poznań. He was interested in observations of meteors, mainly in calculating their orbits. He also dealt with meteorology. He made a renovation of so-called Toruń [Thorn] globe (made by Willem Blaeu in 1622). He calculated ephemerides of planets for astronomical calendars. He was an author of popular articles.

5 Jacob Kallir was a son of Markus (Max) Kallir (1830-1886) and a close relative of Mayer von Kallir (1789-1875), a deputy to the Vienna Parlament. Max Kallir's family moved to Leipzig, Jacob with his mother settled there, Max moved to the USA.

6 J. Kallir, *Ueber den Krystallewassergehalt gelöster Kolbaltsaltze*, Inaugural-dissertation, Halle 1887.

women and men participated in lectures, exercises and seminars conducted by Klein, among them there were 12 Poles or people of Polish origin who presented papers at Klein's seminar. I decided to restrict my presentation to the Klein’s seminar students. I will present the complete list of titles and dates of papers presented by Poles and short information about the two papers.

Many of Klein's Polish students did not work at universities until 1918. During interwar period the situation drastically changed and at least one former Klein’s student held a chair at a state university in Poland. Many Poles who studied under Klein became prominent scientists, members of Polish and foreign academies and scientific societies. They also contributed to the significant development of science in their homeland, especially after 1918, when Poland regained its independence. Among them were professors of the Polish universities operating in Austria (until 1918): the universities in Kraków and Lwów, and the Lwów Technical School; two of them became rectors of these universities. During this period many Poles decided to stay outside of Polish lands. One of the best known was a physicist, and simultaneously the first Polish Klein’s student in Göttingen, Józef Wierusz-Kowalski (1866–1927, von Kowalski, Josef de Kowalski).[7] In 1889 in Göttingen he presented his doctoral thesis *Untersuchungen über die Festigkeit des Glases* written under Woldemar Voigt. For many years Kowalski worked at the university in Freiburg, Switzerland, where he was a rector for two years. He was a member of the DPG and member, president and vice-president of the Schweizerischen Physikalischen Gesellschaf, a founder and the first president of the Polish Physical Society. A large group of Poles educated by Klein came from the Russian Empire, the vast majority of whom returned there. After the scientific journey to Germany they usually have a very fast career, they became docents and professors in St. Petersburg, Moscow and Kharkov. Some Poles in their scientific careers went to America, to Michigan in the USA, La Plata in Argentina and Lima in Peru.

Let us present the papers given by Poles. The topics of the papers presented on the seminar were not fixed; it depended on the interests of a young scholars and on Klein’s decision on the topic of the seminar in the following academic year.

In two papers delivered by Józef Kowalski, *Ueber die Anwendung der Functionentheorie auf die Drehungen im Raume*[8] and *Ueber die Gruppe der Kreistheilungsgleichung*[9] Kowalski dealt with issues on applications of mathematics in physics. The next two papers by Poles were related to the theory of differential equations. Kazimierz Żorawski (1866–1953), a former student of Warsaw and Leipzig universities, presented a lecture on Grünwald–Letnikov derivative *Ueber die Differentiation zu beliebigem Index*[10]. Żorawski later was a professor and a rector of the Jagiellonian University, a Polish representative in the International Commission on Intellectual Cooperations and a president of Warsaw Scientific Society. Stanisław Kępiński (1867–1908), a former student and doctor of

7 Kowalski is also know as a man responsible for the mariage of Maria Skłodowska and Pierre Curie, future Nobel Prize Laureates.

8 Klein Protokolle, Bd. 8, J. Kowalski, *Ueber die Anwendung der Functionentheorie auf die Drehungen im Raume* s. 17–30, 29 May 1886.

9 Klein Protokolle, Bd. 8, J. Kowalski, *Ueber die Gruppe der Kreistheilungsgleichung*, s. 105–114, 1 December 1886.

10 UniGö, Klein Protokolle, Bd. 10, K. Żorawski, *Ueber die Differentiation zu beliebigem Index*, s. 145–154, 27 June 1891.

the Jagiellonian University in Kraków in next academic year presented a paper on Fuchs' results in the field of the theory of differential equations in his paper *Über die bei den gewöhnlichen homogenen Differentialgleichungen auftretednen Transcendenten III. Gattung*.[11] He later extended his results to functions of two variables, which completed his studies in Göttingen and Berlin and were presented as a habilitation thesis at the Jagiellonian University in 1895. These results were published in German language in "Mathematische Annalen", in Polish language (habilitation thesis) in "Rozprawy Akademii Umiejętności" [Dissertations of the Academy of Learning] and as a short annotation in French language in "Bulletin International de'l academie des sciences di Cracovie".[12] Kępiński was a rector of Technical School in Lwów and a member of the national parliament of the land Galicia and Lodomeria in Austria.

The next lectures were given by two women. They were born in Russia but were of Polish origin. Helena Bortkiewicz [Helen Bortkewisch] (1870-1939) and Aleksandra Stebnicka [A. Stebnitzky] (1868-1928) graduated Bestuzhev Courses in St. Petersburg and went to Göttingen in the search for further education, as it was not available to women in Russia. In 1895 Bortkiewicz gave two papers – on differential calculus and the theory of ideals,[13] Stebnicka also gave two papers – on Gauss integers and summation calculus.[14] Next year Stefan Kwietniewski (1874–1940) from Warsaw presented a paper entitled *Ueber die Riemann'sche Fläche der Transformationsgleichung F(J, J') = 0*. The paper referred to Klein's lectures in this area.[15]

Michał Feldblum (1875–1925) from Warsaw, the first Pole with PhD under Hilbert,[16] also presented a paper at Klein's seminar. In December 1898 he spoke about Camille Jordan's result *Beweis des Satzes: "Jede stetige, geschlossene Curve ohne mehrfachen[!] Punkten[!] teilt die Ebene in 2 Gebiete ein: ein inneres und ein äusseres"*.

The next Poles who took part in Klein's seminar were a physicist Czesław Reczyński (1878–1936) from Kharkov and an astronomer Władysław Dziewulski (1878–1962) from Warsaw. Reczyński presented on 11 February 1903 a paper *Prinzip der kleinsten Action bei [Joseph-Louis] Lagrange u[nd] [Leonhard] Euler*,[17]

---

11 IM UGö, Klein Protokolle, Bd. 11, S. Kępiński, s. 120, *Über die bei den gewöhnlichen homogenen Differentialgleichungen auftretednen Transcendenten III. Gattung*, s. 120–125, no date.

12 S. Kempinsei [Kępiński], *Ueber Fuchs'sche Functionen zweier Variabeln*, "Mathematische Annalen"
t. 47, 1896, nr 4, s. 573–588. Polish version as a habilitation dissertation in "Rozprawy Akademii Umiejętności"
1896 and a short abstract in „Bulletin International de'l academie des sciences di Cracovie" 1895.

13 IM UniGÖ, Klein Protokolle, Bd. 12, H. v. Bortkewitsch (H. Bortkiewicz), *Differenzenrechnung*, s. 226–323, wtorek, 28 May 1895; *Grundlegung der Idealtheorie*, s. 330–339, 11 December 1895.

14 IM UniGÖ, Klein Protokolle, Bd. 12, A. v. Stebnitzky (A. Stebnicka), *Summationsrechnung*, s. 233–236, 31 May 1895; *Ueber die ganzen Zahlen im Körper(i) und ihre Zerlegungssätz,* s. 311–322, 27 November 1895.

15 IM UniGÖ, Klein Protokolle, Bd. 13, S. Kwietniewski, *Ueber die Riemann'sche Fläche der Transformationsgleichung F(J, J') = 0,* s. 48–55, 17 May 1896.

16 M. Feldblum, *Über elementar-geometrische Konstruktionen*, Warschau 1899.

17 IM UniGÖ, Klein Protokolle, Bd. 19, C. Retschinky [Reczyński], *Prinzip der kleinsten Action bei [Joseph-Louis] Lagrange u[nd] [Leonhard] Euler*, s. 71–72, 11 February 1903.

while Dziewulski on 25 February presented a paper *Kanonische Gleichungen und Substitutionen*.[18] In the following year at a seminar meeting a paper *Zahlentheoretische Mittelwerte und Wahrscheinlichkeiten (Im Gebiete der rellen Zahlen)* was delivered by Alexander Axer (1880–1948), from Przemyśl [Premissel] – doctor of mathematics (PhD from the University of Vienna). Two years later Reczyński received his doctoral degree in Göttingen for his dissertation *Über die Wiedervereiningung der Ionen in Luft* written under the supervision of Eduard Riecke. In Göttingen Reczyński met Johannes Stark, with whom he not only cooperated but also became his close friend.

The last Pole who presented paper at Klein's seminar was Antoni Łomnicki (1881–1941) from Lwów. Although he had a doctoral diploma from Lwów University, Klein did not accepted his first application and asked for a copy of doctoral dissertation. For it Łomnicki wrote to Lwów University requesting a copy of his doctoral dissertation. Smoluchowski, to whom Lomnicki turned[19] for a copy of his doctoral dissertation, sent it and finally Łomnicki was accepted as a seminar participant. In 1906 Łomnicki gave a lecture entitled *Numerische Bestimmung des accessorischen Parameters für* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \rho\right)$.

In the lecture the seminar papers of mathematicians Kazimierz Żorawski and Aleksander Axer will be presented in details.

Literature

BJ Rkp 9417 III, t. 5, Korespondencja Mariana Smoluchowskiego z lat 1893–1917, Antoni Łomnicki to Marian Smoluchowski, Göttingen, 20 October 1906, k. 30–31.

Mathematische Institute Georg-August Univeristät zu Göttingen, Klein Protokolle: Bd. 8, **J. Kowalski**, s. 17–30. Bd. 10, **J. Kowalski**, s. 105–114; **K. Żorawski**, s. 145–154. Bd. 11, **S. Kępiński**, s. 120–125. Bd. 13, s. 48–55. Bd. 12, **H. Bortkiewicz**, s. 226–232, 330–339; **A. Stebnicka**, s. 233–237, 311–322. Bd. 14, **M. Feldblum**, s. 315–325. Bd. 19, **C. Reczyński**, s. 71–72; **Władysław Dziewulski**, s. 82–90. Bd. 20, **A. Axer**, s. 204–213. Bd. 25, **A. Łomnicki**, s. 267–271.

Niedersächsische Staats- und Universitäatsbibliotek Göttingen, Sammlung Felix Klein, Cod. Ms. F. Klein 7E, Hörerverzeichnisse der Vorlesungen F. Klein 1871–1920.

J. Biała, *Bolesław Buszczyński o związkach meteorów i komet,* „Acta Societatis Metheoriticae Polonorum”[Rocznik Polskiego Towarzystwa Meteorytowego], Vol. 8, 2017, p. 12–17.

J. Kallir, *Ueber den Krystallewassergehalt gelöster Kolbaltsaltze*, Inaugural-dissertation, Halle 1887.

Szematyzm Królestwa Galicyi i Lodomeryi z wielkim księstwem krakowskiem na rok 1875, Drukarnia A.J.O. Rogosza, Lwów 1875.

18 IM UniGÖ, Klein Protokolle, Bd. 19, W[Ładysław] Dziewulski, *Kanonische Gleichungen und Substitutionen*, s. 82–90, 25 February 1903. On page http://page.mi.fu-berlin.de/moritz/klein/# there is an incorrect information that a paper was presented by Wacław Michał Dziewulski (Władysław’s younger brother, then a student in Warsaw).

19 BJ [Jagiellonian Library] Rkp 9417 III, t. 5, Korespondencja Mariana Smoluchowskiego z lat 1893–1917, Antoni Łomnicki to Marian Smoluchowski, Göttingen, 20 October 1906, k. 30–31.

Seligmann Kantor

Mostly unknown German mathematician from Soborten

Martina Bečvářová

Childhood

Seligmann Kantor was born on 6 December 1857 in Soborten located near the famous spa town Teplice in Bohemia. His father Moritz Kantor (1823–?) was a businessman, his mother was Charlotte Kantor (1830–1906), née Wiener, came from Eidlitz near Chomutov. Kantor's parents married on May 16, 1854 in Soborten. In marriage on June 11, 1855 they had their first child, a daughter Amalia Kantor whose fate is unknown. The family claimed German nationality and Jewish faith and was one of the less wealthy members of the Jewish community of Soborten. [1]

Secondary education in Litoměřice

In September 1872, Kantor was enrolled as a full-time student of the sixth grade of the municipal high school in Litoměřice. According to the annual school report, he did not receive any scholarship or support for poor pupils. From the first days he excelled in almost all subjects. In the school year 1873/1874, he continued his studies and he again did not receive any scholarship or support. In the summer of 1874, he underwent a difficult graduation exam. He passed it with honors and as the best student at school.

University studies in Vienna

In October 1874, Kantor enrolled the general department at Technical University in Vienna. Since his first year he was totally exempt from paying school fees as a poor student. He studied six semesters in Vienna and took various lectures and exercises in mathematics, physics and descriptive geometry. But he was almost not interested in technical subjects. At the beginning of the summer of 1877, he completed his studies at the Technical University in Vienna. From 1877 till 1878, he stayed in turns in Vienna and Soborten and self-studied. In the reports of the meeting of the Academy of Sciences in Vienna he published the first mathematical results and looked for possibilities of his further professional application.

[1] Details of Kantor's life and work, including references to all studied archive sources, are stated in the article [1] and [2].

Stays in Italy and France

In early January 1879, Kantor left for his first stay abroad in Rome where he encountered modern mathematics. He made friends with the famous Italian mathematician Luigi Cremona (1830–1903). For a large part of his life they maintained relatively lively professional and personal correspondence from which 25 letters from 1878 to 1892 have been preserved.

The correspondence shows that Kantor went to Rome on the recommendation of Emil Weyr (1848–1894), Viennese professor of mathematics who had been in close professional and personal contact with Cremona since 1870. Kantor's semester stay in Italy was funded by the Vienna Ministry of Cult and Education. His main goal was to deepen his geometrical knowledge and broaden his insight into the new directions of the modern Italian school of geometry. He therefore attended Cremona's lectures, professional meetings in Cremona's household, in Accademia dei Lincei and discussions with various Italian mathematicians. At the end of spring 1879, he left Italy because he had to report in Vienna on the results of his stay.

In the spring of 1879, Kantor spent a period of study at the University of Strasbourg. His stay was funded again by the Vienna Ministry of Cult and Education. However, it is not clear from the preserved correspondence whether it was a second scholarship or whether Kantor distributed the funds received for two shorter stays with the approval of the Ministry.

It is clear from the correspondence with Cremona that in the winter of 1880 Kantor visited Rome again and stayed there for at least two months on study stay. He consulted Cremona on his mathematical ideas, completed manuscripts for articles for Austrian and Italian journals, attended Cremona lectures. In spring of 1880, he was again on a study stay, this time in Paris. His studies were financed by the Ministry. He dealt with quadratic, biquadratic, rational and periodic transformations.

The above-mentioned stays had a decisive influence on Kantor's professional growth. Between 1878 and 1882 he dealt with the issue of configuration theory, which was a completely new and relatively unusual topic in the Czech and Austrian countries. In several articles published at the Vienna Academy of Sciences he studied the incidental relationships between points and straight lines in a plane.[2] He came to a discrete grouping of points and lines, where each point is passed through the same number of lines and on each line there is the same number of points, i.e. he studied the so called *Reye's Geometric Configurations,* at a time when they were not yet widely

[2] Kantor's interesting works are for example [8], [9] and [10].

known. These are probably the most important and still cited Kantor's mathematical results.[3]

The problem of configurations was brought to the geometry of the 19th century by German mathematician Karl Theodor Reye (1838–1919) who dealt with configurations in the scheme (p_r,l_k) in his monograph *Geometrie der Lage I*.[4]

In 1877, Reye asked, how many different type configurations $(10_3,10_3)$, i.e. configuration of 10 different points and 10 different lines, while each point must be passed by exactly 3 lines and each line must have exactly 3 points, in the second edition of the monograph *Geometrie der Lage*. Only planar configurations should have been considered.

Kantor in 1881 found three different configuration of type $(9_3,9_3)$ and ten different configurations of type $(10_3,10_3)$ in the work titled *Die Configurationen* $(3,3)_{10}$ (see [10]). He noted that he also knew the configuration of type $(11_3,11_3)$, however, he did not indicate their number or shape. He approached the issue in a purely combinatorial way. He did not use Reye's standard symbolism but his symbolism which he created in 1879 and 1880.[5]

Reye dealt with the issue of configuration in more detail in 1882 in an article titled *Das Problem der Configurationen*,[6] in which he reminded that in case of type $(8_3,8_3)$ there is no real configuration and mentioned Kantor's results of configurations of type $(9_3,9_3)$ and type $(10_3,10_3)$. He tried to answer more general question: how to find a method to determine the number of all different configurations of type (n_i,n_i) for small natural n. He approached the whole issue in a geometric way.

In 1887, the problem of configurations caught the attention of the Italian mathematician Vittorio Martinetti (1859–1936) who tried to study configurations from the perspective of combinatorics in an article titled *Sulle configurazioni piane* μ_3. He successively found a recursive method of creating all configurations of type (n_3,n_3) from the knowledge of all constructions of type $(n–1_3,n–1_3)$.[7] He showed his method on the example of configurations of type $(11_3,11_3)$ – he found 31 different configurations.

[3] In the *Zentralblatt für Mathematik* database are stated 78 of Kantor's works and 51 citations of his 12 works. The highest number of citations is from 1990 to 2018. In the database of *MathSciNet Mathematical Reviews* 19 Kantors works are stated (one more work is assigned to Kantor by mistake) and 5 citations of his works (from 1997, 2008, 2010, 2015, 2018; these are articles linking group theory with the theory of plane transformations, resp. curve theory, resp. transformation theory).

[4] C. Rümpler, Hannover, 1866, xii + 146 pages (second edition 1877).

[5] For Kantor's contribution to configuration theory, see [16]; for Kantor's results, see page 484, 486–489, 491 and 494.

[6] Acta Mathematica 1(1882), pp. 93–96.

[7] Annali di matematica pura ed applicata 15(1887), pp. 1–26.

Martinetti's work became the basic inspiration for the German mathematician Heinrich Eduard Schröter (1829–1892) who undertook a critical study of existing configurations and replaced the combinatorial methods with geometric methods in 1888 in an article titled *Ueber lineare Constructionen zur Herstellung der Configurationen* n_3. He strictly distinguished cases of "real configurations" and "theoretical configurations".[8] One year later he proved that one of Kantor's configurations (10_3,10_3) is not feasible in the plane, i.e. it is a theoretical configuration in his work *Ueber die Bildungsweise und geometrische Construction der Configuration* 10_3.[9]

Later, Italian and German mathematicians began to deal more deeply with configuration issues, e.g. V. de Pasquale, F.W. Levi, D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. For more information see, [15], [14], [7].[10]

Work at the German Technical University in Prague

Probably at the end of 1880, Kantor began work on the habilitation thesis which he submitted in the spring of 1881 to German Technical University in Prague. At the beginning of the winter semester 1881/1882, Kantor was appointed a private associate professor for geometry. He immediately announced a three-hour special selection lecture entitled *Geometrische Theorie der Curven und Oberflächen*. Since the summer semester 1881/1882, he did not lecture at the German Technical University in Prague anymore.

Doctoral procedure in Leipzig

In spring of 1882, Kantor initiated a doctoral procedure at the Faculty of Philosophy of the University in Leipzig. On April 22, 1882, two reviewers of his mathematical thesis and five next articles were established. At the end of April, Felix Christian Klein (1849–1925) wrote very positive review and supported Kantor's doctoral procedure. In the middle of May, Wilhelm Scheibner (1826–1908) also appreciated Kantor's mathematical results, but he added doubts as to whether the procedure could be conducted properly according to the rules and laws because Kantor did not study at a classical grammar school or at a university. In May, the Faculty of Philosophy established a doctoral committee consisting of professors Klein, Scheibner, Carl Gottfried Neumann (1832–1925), Wilhelm Gottlieb Hankel (1814–1899), Wilhelm Maximilian Wundt (1832–1920), Adolph Wilhelm Hermann Kolbe

---

8 Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen 1888, pp. 237–253.

9 Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen 1889, pp. 193–236.

10 About the history of configuration theory see for exemple [3], [5], [6]. On the history of configuration theory in Austria-Hungary see [4].

(1818–1884), Ferdinand Zirkel (1838–1912), Gustav Heinrich Wiedemann (1826–1899) and Ernst Heinrich Bruns (1848–1919). Everyone except Klein voted to end the doctoral procedure for purely formal reasons. However, no one questioned Kantor's mathematical results. In June 1882, the University in Leipzig officially stopped Kantor's doctoral proceduere and returned him all materials to Prague.

We know that Kantor was with a personal and corresponding touch with Felix Klein from 1878 until 1890. Ten Kantor's letters from these years which he wrote to Klein and one Klein's letter from 1884 which he wrote to Kantor are deposited in the Archive of the University in Göttingen. In 1882, Kantor attended Klein's mathematical seminar in Leipzig. The letters also show that Kantor consulted with Klein his doctoral procedure and his mathematical ideas and main research plans and objectives. His letters from 1884 also describe Kantor's conflict with Adolf Hurwitz (1859–1919), which arose due to Kantor's request to borrow famous Hurwitz's records of Weierstrass' lectures on the theory of analytical function from the summer semester 1878.[11] The last two Kantors's letters sent to Klein are from 1888 and 1890. The first one touches on a delicate matter. Kantor identified Heinrich Eduard Schröter for the plagiarist of his works that discussed the problem of configurations. Kantor demanded the printing of an apology in the journal Nachrichten von der Köhniglichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augustus-Universität zu Göttingen and he begged Klein's understanding, help and standing. We do not know Klein's reaction, but no note was published in the journal. The second letter touches also on a delicate matter. Kantor criticized Hurwitz's work on the theory of transformations from 1888. We do not know Klein's reaction.

Work at the German University in Prague

In autumn of 1882, Kantor initiated a habilitation procedure at the German University in Prague where he wanted to become a private associate professor. On October 19, 1882, the Faculty of Philosophy established a habilitation committee consisting of professor of mathematics Heinrich Jacob Karl Durège (1821–1893) and professors of physics Carl Ferdinand Lippich (1838–1913) and Ernst Mach (1838–1916). During October and November, the committee went through Kantor's materials and recommended the usual procedure of the habilitation procedure.

On December 14, 1882, Kantor underwent a habilitation colloquium in front of the habilitation committee and a habilitation lecture in front of the

[11] See Viz *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen. Vorlesung Berlin 1878*. In einer Mitschrift von Adolf Hurwitz. Bearbeitet von Peter Ullrich, Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Band 4, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig u. a. 1988, 186 pages.

teaching staff. In December 1882, he was nominated by a professorship to be appointed a private associate professor of mathematics. The appointment took place at the beginning of 1883.

From the summer semester 1882/1883 to the winter semester 1886/1887, Kantor gave interesting, thematically modern and non-traditional selective lectures on mathematics. In 1887 Kantor terminated his work at the German University in Prague after numerous disagreements with the management of the university and misunderstanding with the Vienna Ministry of Cult and Education.

Pre-served correspondence with Cremona shows that Kantor was interested in the competition prize announced in 1882 by the Academy of Sciences in Naples for 1883.[12] In several letters he consulted with Cremona about his intention to apply and enthusiastically informed him of the progress of his professional work. In 1883, in the work *La transformazione birazionale,* he solves the above-mentioned task given by the Neapolitan Academy of Sciences. He directly linked to the works of Arthur Cayley (1821–1895), William Kingdon Clifford (1845–1879) and Max Noether (1844–1921) that generalized Cremona's famous transformations. In December 1883, Kantor responded enthusiastically to Cremona's report that the Academy Award in Naples was won by his work.

Kantor's career seemed to develop well, as he was the only mathematician in the Czech lands to receive such a prestigious award. However, as we already know, the situation turned out differently.

From 1877 to 1885, Kantor published 40 articles written in German (31), Italian (2) and French (7). They dealt with the theory of special curves and surfaces, point configurations and special geometric transformations. In the spring of 1886, Kantor again spent several months in Italy, in Naples and Rome.

Life after 1887 – one big unknown

Almost no information has been found about Kantor's life stories. The main sources are his letters addressed to Cremona in 1884, 1886 and 1892. They are quite long, very gloomy, and sometimes incoherent. They fully reflect the state of Kantor's mind, his despair, depression, and the desire to leave his homeland at all costs. In a letter dated 25 December 1884, Kantor referred to Cremona as his only friend who had always stood by him. He reminded him of his stays in Italy and described them as the most beautiful years of his life. At the same time, he appreciated the help and goodness of Emil Weyr. He also

[12] Find in the plane of periodic Cremona's transformations, which after *n*-times use convert the object to itself. See Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Napoli) 22(1883), p. 314.

described his situation in Prague and the reasons why he decided to take a radical step – to immigrate to Italy. He depicted Prague as evil, full of hatred and envy. He wrote that he was surrounded by opposing colleagues who had never accepted him into their ranks. He thought he was always overlooked and mocked for his Jewish background, his poverty, his poor clothes and his modest way of life.

In 1883, for the first time, he decided to leave his native country and seek happiness abroad. He turned to an American mathematician Jamese Joseph Sylvestr (1814–1897) and asked him to help with the provision of a suitable post in America. Everything is said to have been very promising and Kantor was already looking forward to a new location across the sea. However, he was deceived when looking for a travel loan, got into another financial distress and had no funds to travel to America.

At the end of 1884 another crisis came and Kantor turned to Cremona to ask him to help him immigrate to Italy because he would soon be expelled from the university, students had no longer taken his lectures and colleagues avoided him and mocked him. At this time he saw only two hopes – to obtain a subsidy from the Ministry of Cult and Education for a one-year stay in Italy or immediately emigrate to Italy.

It is not possible to find out how Cremona responded to this very emotional letter because his letters were not preserved. Nor is it clear whether Kantor's information was true, resp. to what extent they were true. We do not know whether he suffered from any mental illness or was too egocentric and conflicting. None of the surviving memories of Prague mathematicians, nor their correspondence, has been able to prove the situation described by him.

We know that Kantor eventually obtained a ministerial subsidy and he really lived in Italy in the spring of 1886. He contacted Cremona by a letter dated 26 March 1886 written in Naples. He told him that he was again in Italy. He reaffirmed that his determination to settle in Italy was firm and lasting that he no longer wanted to return to his birthplace. He begged Cremona to help him to get any post.

How has the situation evolved cannot be reconstructed sufficiently convincingly. The other two surviving letters of Kantor are up from 1892. More than half of the first letter touches on a delicate matter. Kantor identified two Italian mathematicians Giuseppe Veronese (1854–1917) and Guide Castelnuovo (1865–1952) for the plagiarists of his works that discussed the configuration, resp. transformations of periodic curves. He demanded the printing of an apology, analyzed the individual passages of works, pointed out their shortcomings and misconduct and taking results without citing resources. He begged Cremona to help in this situation and to defend his scientific priority. At the end of the letter he reported on what had happened in his life since 1886 when Cremona talked him out from the emigration to Italy for lack of knowledge of language, culture and traditions.

At the end of 1887, Kantor was forced to terminate his teaching at the German University in Prague. He reluctantly went to his relatives to his birthplace where he had to engage in a family business, i.e. an activity he hated. He started working as an accountant in a family business, occasionally privately continued to study, researched and attempted to publish. But he was surrounded by misunderstanding, he had no one to share his thoughts with and above all he was completely cut off from the latest literature. He hated his life and regarded it as suffering. He still wanted to leave for Italy, Switzerland or America. He wanted to start a new and better life away from his home country, relatives and former colleagues.

From 1887 to 1891, Kantor as a mathematician paused completely. He was probably expanding and improving his monograph for the Academy of Sciences of Naples published in French in 1891 under the title *Premièrs fondaments pour une théorie des transformations périodiques univoques* (see [11]). It was published at the expense of the Naples Academy. He returned to scientific work in 1891. Between 1891 and 1903 he published 2 monographs and 36 articles written in German (24), Italian (7) and French (5). Let us emphasize that Kantor was the first mathematician from the Czech lands to be able to get on the pages of the journal *American Journal of Mathematics* (he published five extensive works). In addition to the aforementioned monograph from 1891, he published a monograph in 1895 *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene* (see [12]), which belongs to his results cited to this day. Kantor's work dealt with the problems of group theory, with the theory of special curves and surfaces, special geometric transformations, solving systems of linear differential equations and special determinants.

From the introduction or conclusions of some of Kantor's works published between 1894 and 1901, it appears that his personal and financial situation has probably improved that he could have devoted himself fully to mathematical research and, moreover, he could have also travel. In 1894 he completed some works in Paris, in 1895 they were drafted in Calais, Reims, Innsbruck or Venice, and he worked in Dover in 1896, spent 1899 in Venice and Innsbruck, and 1901 in Vienna. The causes of this change could not be identified.

In the article [6], it is stated that Kantor moved to Italy after finishing his academic career. It is not clear how the author came to this information. From Kantor's preserved correspondence with Cremona in the early 90s of the 19th century he stayed in his native Soborten.

Gerhard Hermann Waldemar Kowalewski (1876–1950), the famous German mathematician, wrote in his memorial book about Kantor a short paragraph (see ([13], p. 251). But it is not clear from what sources he drew his information, because he came to Prague only 6 years after the Kantor's death and more than 20 years after his departure from Prague. Therefore, he could hardly remember him and many witnesses were no longer among the living.

Kantor's image

Today, the only poorly accessible Kantor's photograph is known taken around the 1870s. It is a typical cabinet business card accompanied by the text *Dem Herrn Prof. Dr. Weyr zur Bürgschaft freundlicher Erinnerung. In Verehrung und Dankbarkeit. S. Kantor.* It depicts a young, dark-haired, confident man with a penetrating, even evil gaze. It was preserved in the album of Emil Weyr whose basis was created during Weyr's study stay in Italy in the school year 1870/1871.

End of life

Kantor died on 21 March 1903 in the hospital in Teplice, not in Italy, as Kowalewski and others supposed. The cause of death is listed in the registry office as a "hemiplegia contra myocar cardis", i.e. paralysis in combination with a heart attack. He was buried in the Jewish cemetery in Sobědruhy on 23 March 1903. His monument has been preserved to this day. It is a massive black granite tombstone of a modern type overwritten by an inscription in Hebrew and German.

References

[1] M. Bečvářová: *Seligman Kantor ze Sobědruh – osudem zkoušený matematik*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 64(2019), pp. 29–54. ISSN 0032-2423.

[2] M. Bečvářová: *Ještě jednou Seligmann Kantor – nevydařený doktorát na univerzitě v Lipsku v roce 1882*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 66(2021), pp. 33–48. ISSN 0032-2423.

[3] H. Gropp: *On the History of Configurations*, pp. 263–268, in A. Díez, J. Echeverría, A. Ibarra (eds.): *Structures in Mathematical Theories: Reports of the San Sebastian International Symposium, September 25–29, 1990*, Universidad dei País Vasco, Bilbao, 1990, 492 pages. ISBN 978-8475852638.

[4] H. Gropp: *On the History of Configurations II – Austria and the Rest of the World*, pp. 21–25, Ch. Binder (ed.): *IV. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik*, Neuhofen am Ybbs, 1995.

[5] H. Gropp: *Die Configurationen von Theodor Reye in Straßburg nach 1876*, pp. 287–301, in M. Toepell (ed.): *Mathematik im Wandel: Anregungen*

zu einem fächerüber-greifenden Mathematikunterricht, Band 2, Mathematikgeschichte und Unterricht III, Hildesheim, Berlin, 2001, vii + 490 pages. ISBN 9783881203425.

[6] H. Gropp: *Configurations between Geometry and Combinatorics*, Discrete Applied Mathematics 138(2004), pp. 79–88. ISSN 0166-218X.

[7] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 37, Springer, Berlin, 1932, viii + 310 pages (English edition: *Geometry and the Imagination*, translation by P. Nemenyi, Chelsea Publishing, American Mathematical Society, 1952, 357 pages).

[8] S. Kantor: *Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe, 80(1879), p. 227.

[9] S. Kantor: *Ueber die Configurationen* (3,3) *mit den Indices* 8,9 *und ihren Zusammenhang mit den Curven dritter Ordnung*, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe, 84(1881), pp. 915–932.

[10] S. Kantor: *Die Configurationen* $(3,3)_{10}$, Sitzungsberichte d. Academie d. Wissenschaften in Wien, math.-naturwiss. Classe, 84(1881), pp. 1291–1314.

[11] S. Kantor: *Premièrs fondaments pour une théorie des transformations périodiques univoques*, Mémoire couronné par l'Académie des Science de Naples dans le concours pour 1883, Naples, 1891, 335 pages.

[12] S. Kantor: *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene*, Mayer & Müller, Berlin, 1895, 111 pages.

[13] G. Kowalewski: *Bestand und Wandel – Meine Lebenserinnerungen, zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik*, Verlag von R. Oldenbourg, München, 1950, 309 pages.

[14] F. W. Levi: *Geometrische Konfigurationen*, S. Hirzel, Leipzig, 1929, vi + 310 pages.

[15] V. de Pasquale: *Sui sistemi ternari di* 13 *elementi*, Rendiconti di Istituto Lombardo Scienze e Lettere 2(1899), pp. 213–221.

[16] E. Steinitz: *Konfigurationen der projectiven Geometrie*, article IIIAB 5a from 1910, pp. 481–516, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III-1-1, Teubner, Leipzig, from 1902 until 1910, 770 pages.

Die Mathematik WILHELM WIRTINGER*s (1865–1945) – nicht nur ein Differentialkalkül für Funktionen komplexer Veränderlichen*

PETER ULLRICH
Universität Koblenz · Landau, Campus Koblenz,
Fachbereich 3: Mathematik / Naturwissenschaften, Mathematisches Institut,
Universitätsstraße 1, 56070 Koblenz, Deutschland

Der Abschlussvortrag des ersten Österreichischen Symposiums zur Geschichte der Mathematik, welches noch in Neuhofen an der Ybbs stattfand, wurde Freitag, den 14. November 1986 von Frau Hofrat AUGUSTE DICK (1910–1993) gehalten und zwar, unter dem Titel „In Ybbs geboren – in Ybbs gestorben“, über WILHELM WIRTINGER [4]. Zudem bestand am nächsten Vormittag die Möglichkeit, im Stadtmuseum von Ybbs an der Donau eine Ausstellung zu WIRTINGER zu besuchen, die DICK mitorganisiert hatte.

Das Thema „WILHELM WIRTINGER“ bildet somit die Endpunkte eines *Längsschnitts* durch die mittlerweile 15 Österreichischen Symposia zur Geschichte der Mathematik. Zudem kann es auch für einen *Querschnitt* verwendet werden: Während DICK hauptsächlich das Leben WIRTINGERs behandelte, widmet sich die folgende Darstellung – bis auf einen kurzen Überblick über dessen wichtigste Lebensdaten – seinem Werk. Sie berücksichtigt die aktuelle Sicht auf sein Schaffen und greift daher einige Aspekte auf, die in der 1948 verfassten Würdigung [6] nicht erwähnt werden. Dabei werden die von DICK als Ergebnis einer Datenbankrecherche nur aufgelisteten Stichwörter „Wirtinger-Kalkül, Wirtingersche Ungleichung, Wirtingersche Thetas“ [4, S. 119] ausführlicher besprochen, wenn auch in umgekehrter Reihenfolge.

1 Der Lebensweg in Kurzfassung

WIRTINGER wurde am 19. Juli 1865 in Ybbs an der Donau geboren. Er studierte von 1884 bis 1887 in Wien, insbesondere bei GUSTAV RITTER VON

Escherich (1849–1935) und Emil Weyr (1848–1894); seine Promotion erfolgte am 23. Dezember 1887. Hieran schloss sich 1888/89 ein Studienjahr in Berlin und Göttingen an, während dessen er engen Kontakt zu Felix Klein (1849–1925) fand. Zurück in Wien wurde Wirtinger 1890 an der Universität habilitiert und hatte von 1892 bis 1895 eine Assistentenstelle an der Technischen Hochschule inne. Im Jahr 1895 wurde er, als Nachfolger Leopold Gegenbauers (1849–1903), auf eine außerordentliche Professur an der Universität Innsbruck berufen, wo er auch ein Jahr später zum ordentlichen Professor ernannt wurde. Im Jahr 1903 folgte er, wiederum als Nachfolger Gegenbauers, einem Ruf auf einen Lehrstuhl an der Universität Wien, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1935 wirkte. Am 16. Januar 1945 verstarb er an seinem Geburtsort Ybbs an der Donau.

Wirtinger beeinflusste durch seine akademische Tätigkeit praktisch alle, die im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts an der Universität Wien Mathematik studierten. Die Liste der Personen, bei denen er Doktorvater oder doch zumindest an der Promotion beteiligt war, ist beeindruckend sowohl hinsichtlich ihres Umfangs als auch der in ihr auftretenden Namen.

Wegen ausführlicher biographischer Details zu Wirtinger vergleiche man neben dem Artikel [4] auch die in dessen Anmerkung (1) [4, S. 122–123] angegebene weitere Literatur, insbesondere die Würdigung [6], wo sich auch ein „Verzeichnis der Arbeiten“ Wirtingers findet [6, S. 9–12]. Aktuelle Lexikonbeiträge zu seinem Leben sind [8] und [10].

2 Frühe Arbeiten zur Geometrie

Bereits als Schüler hatte Wirtinger 1883 eine Abhandlung „Über die drei algebraischen Flächen umschriebene Regelfläche“ an die Akademie der Wissenschaften in Wien geschickt. Gegen deren Veröffentlichung sprach sich jedoch Weyr in seinem Gutachten vom 8. Juni 1883 aus, da sie Thesen enthielt, die ihm zu gewagt erschienen. Das Manuskript wurde an Wirtinger zurückgeschickt; über den weiteren Verbleib ist nichts bekannt [4, S. 121].

Trotz dieses negativ verlaufenen Erstkontaktes orientierte sich Wirtinger in seinem Studium an der Forschungsausrichtung Weyrs und publizierte noch vor seiner Promotion die beiden Artikel [11] und [12] aus dem Bereich der synthetischen Geometrie. Auch seine Dissertation gehört dem Titel „Über eine kubische Involution in der Ebene“ [13] nach zum Arbeitsgebiet von Weyr; sie wurde allerdings nicht veröffentlicht.

3 Algebraische Funktionen und deren Integrale

Nach seiner Promotion und seiner Rückkehr vom Studienjahr in Berlin und Göttingen bis ungefähr zur Zeit des Ersten Weltkriegs war WIRTINGERs Hauptarbeitsgebiet, als dessen Vertreter er innerhalb der mathematischen Gemeinschaft wahrgenommen wurde, die Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Damit wirkten sich seine Forschungen sowohl auf die Analysis, insbesondere die Funktionentheorie, als auch auf die (heutzutage so genannte) algebraische Geometrie aus. Hierbei hatte er von VON ESCHERICH die Standards mathematischer Präzision bei der Grundlegung der Analysis im Sinne von KARL WEIERSTRASS (1815–1897) übernommen, während seine mathematischen Ideen von BERNHARD RIEMANN (1826–1866) beeinflusst waren, dessen Werke er schon während seiner Schulzeit gelesen hatte. Vor allen Dingen aber hatte KLEIN ihn darin bestärkt, sich mit dieser Gedankenwelt auseinander zu setzen.

Insbesondere beschäftigte sich WIRTINGER mit Thetafunktionen, die von mehreren komplexen Veränderlichen abhängen, etwa $z_1, \ldots, z_p$. Diese sind durch Reihen folgender Gestalt definiert:

$$\vartheta(z,\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \exp\left(\pi i\langle n, \tau n\rangle + 2\pi i\langle n, z\rangle\right)$$

mit $z = (z_1, \ldots, z_p)$ und τ einer symmetrischen komplexen $p \times p$-Matrix mit positiv definitem Imaginärteil, wobei $\langle . , . \rangle$ das kanonische Skalarprodukt bezeichnet; bei der Summation durchläuft $n = (n_1, \ldots, n_p)$ die Menge $\mathbb{Z}^p$ aller p-Tupel ganzer Zahlen. Wählt man hier für τ die Periodenmatrix der p Normalintegrale einer algebraischen Varietät vom Geschlecht p und für z das p-Tupel der Werte dieser Integrale, so erhält man, in der damaligen Sprechweise, die „algebraischen“ oder, da sie bereits von RIEMANN betrachtet worden waren, „RIEMANNschen“ Thetafunktionen.

WIRTINGERs Untersuchungen begannen mit den beiden Arbeiten [14] und [15], in denen er die von KLEIN gestellte Frage beantwortete, welche Mannigfaltigkeit im 7-dimensionalen projektiven Raum von 8 linear unabhängigen Quadraten von (allgemeinen) Thetafunktionen dreier Veränderlichen parametrisiert wird. Hieran schlossen sich die Arbeiten „Zur Theorie der Abel'schen Funktionen vom Geschlecht 3“ [16] und „Untersuchungen über Abel'sche Funktionen vom Geschlecht 3“ [17] an, in denen WIRTINGER eine neue Lösung des Umkehrproblems für ABELsche Funktionen für das Geschlecht 3 gab.

Den bei der Umkehrung verwendeten Thetafunktionen waren einige Jahre später die beiden Artikel „Zur Theorie der $2n$-fach periodischen Funktionen 1“ [18] bzw. „[...] 2“ [20] gewidmet und, vor allen Dingen, die 1895 verfassten und als Buch veröffentlichten *Untersuchungen über Thetafunktionen* [19]. In deren erstem Teil verallgemeinerte WIRTINGER die in den Arbeiten [14] und [15] gegebene Lösung auf die Situation von 2^p linear unabhängigen Quadraten von (allgemeinen) Thetafunktionen von p Veränderlichen im $2^p - 1$-dimensionalen projektiven Raum; im zweiten Teil bewies er, dass jede allgemeine Thetafunktion $\vartheta(z,\tau)$ von p komplexen Veränderlichen als Faktor einer „RIEMANNschen“ Thetafunktion auftritt. Genauer gesagt, gibt es eine algebraische Varietät vom Geschlecht q mit $q > p$, so dass die „RIEMANNsche“ Thetafunktion zu dieser Varietät gleich dem Produkt der gegebenen allgemeinen Thetafunktion und einer anderen Thetafunktion in $q-p$ komplexen Veränderlichen ist. Bei dieser Konstruktion entstehen Thetafunktionen eines neuen, nicht „RIEMANNschen“, Typs, die WIRTINGER in [19] in Analogie zu den „RIEMANNschen“ Thetafunktionen weiter untersuchte und die ihm zu Ehren „WIRTINGERsche Thetafunktionen“, kurz: „WIRTINGERsche Thetas“, genannt werden. Auch später noch beschäftigte er sich mit dieser Thematik, trug aber nur in seinem Seminar über seine neuen Ergebnisse vor und veröffentlichte nichts mehr dazu.

Die Abhandlung [19] erwies sich als von gravierender Bedeutung für WIRTINGERs akademische Karriere: Auf Betreiben KLEINs wurde sie von der GUSTAV BENEKE-Stiftung in Göttingen preisgekrönt, was entscheidend zu WIRTINGERs ersten Berufung, nach Innsbruck, beitrug.

WIRTINGER verfasste nicht nur Originalarbeiten zu diesem Forschungsgebiet, sondern gab auch gemeinsam mit MAX NOETHER (1844–1921) im Jahr 1902 die *Nachträge* [9] zu den Gesammelten Werken RIEMANNs heraus. Weiterhin wandte WIRTINGER beträchtliche Energie auf für die Darstellung dieses Themenkreises in der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* im Rahmen von deren dreiteiligem Band 2 zur Analysis, den er auch mit herausgab: Er schrieb selbst den Beitrag über „Algebraische Funktionen und ihre Integrale“ (1901) [21], steuerte Vorlagen zu dem über „Elliptische Funktionen“ (1913) bei und verfasste gemeinsam mit ADOLF KRAZER (1858–1926) den über „Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen“ (1920) [7]. Unter anderem diese Aktivitäten hinterließen deutlich wahrnehmbare Lücken in der Liste der von ihm zwischen 1909 und 1919 publizierten Originalarbeiten.

4 Die „WIRTINGERsche Ungleichung“

Nach WIRTINGER wird die folgende Ungleichung benannt:

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Periode 2π, deren Ableitung quadrat-integrierbar ist und für die gilt

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Dann gilt die Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} \bigl(f(x)\bigr)^2\,dx \leqq \int_0^{2\pi} \bigl(f'(x)\bigr)^2\,dx,$$

wobei die Gleichheit genau dann erfüllt ist, wenn $f(x) = a\cos x + b\sin x$ für $x \in \mathbb{R}$ beliebig gilt mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$.

Allerdings wurde die Ungleichung in einer nur leicht abgeschwächten Fassung – es wurde verlangt, dass die Ableitung f' stetig und nicht nur quadrat-integrierbar ist – bereits 1905 von EMILIO ALMANSI (1869–1948) publiziert [1]. In der Tat hat WIRTINGER diese Ungleichung nicht selbst veröffentlicht und offenbar nie die Urheberschaft für sie beansprucht; die Zuschreibung stammt von seinem ehemaligen Doktoranden WILHELM BLASCHKE (1885–1962), der zu jener Zeit bereits Professor in Prag bzw. Leipzig war.

Dieser hatte in einem 1914 erschienenen Artikel [2, S. 232–234] einen einfachen Beweis des Satzes von BRUNN mittels trigonometrischer Funktionen gegeben: HERMANN BRUNN (1862–1939) hatte gemeinsam mit HERMANN MINKOWSKI (1864–1909) die Konvexgeometrie begründet. Der auf ihn zurückgehende Satz besagt, dass die Kubikwurzel des LEBESGUE-Maßes der MINKOWSKI-Summe

$$(1-t)K_1 + tK_2$$

zweier konvexer Körper K_1, K_2 eine konvexe Funktion des reellen Parameters t ist. Der Satz von BRUNN verallgemeinert die isoperimetrische Ungleichung $U^2 - 4\pi A \geqq 0$ für Figuren in der Ebene mit Umfang U und Flächeninhalt A, wobei das Gelten des Gleichheitszeichens den Kreis charakterisiert, sowie das Analogon dieser Aussage für Körper im Raum.

WIRTINGER hatte BLASCHKEs Beweis dieses Satzes dann nochmals vereinfacht unter Verwendung einer Ungleichung, die er mitsamt ihrem Beweis BLASCHKE mitteilte, der sie zwei Jahre später in seiner als Buch ausgearbeiteten Leipziger Antrittsvorlesung „Kreis und Kugel“ [3] unter der Überschrift

„Ein Lemma von Wirtinger“ veröffentlichte [3, S. 105–106]. Der gesamte Abschnitt „§ 23. Ergänzungen“ ist zwar mit der einleitenden Fußnote „Kann übergangen werden.“ versehen, aber man darf dennoch vermuten, dass für Blaschke der Hinweis seines Doktorvaters wichtig war und er keine Einwände dagegen hatte, dass sich aufgrund dieser Zitierung die Bezeichnung „Wirtingersche Ungleichung“ für dieses Resultat einbürgerte, insbesondere, da Blaschke weder Almansi noch andere Vorläufer erwähnte. Jedenfalls übernahm er den diesbezüglichen Text auch in die zweiten Auflage von [3], die vierzig Jahre nach der Erstauflage erschien.

5 Der Wirtingersche Differentialkalkül

Bereits bei seinen Arbeiten über algebraische Funktionen und deren Integrale hatte sich Wirtinger mit Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen beschäftigt, etwa den Thetafunktionen. Dabei zeigte er schon früh eine kreative Flexibilität beim Umgang mit reellen Veränderlichen als Real- und Imaginärteilen von komplexen Veränderlichen:

In einem 1902 im Gedächtnisband der *Acta mathematica* für Niels Henrik Abel (1802–1829) erschienenen Artikel „Über einige Probleme in der Theorie der Abelschen Funktionen“ [22] bewies Wirtinger, dass man bei einem beliebig vorgegebenen Parallelotop im $\mathbb{R}^{2n}$ diesen Raum so mit n komplexen Veränderlichen versehen kann, dass deren Real- und Imaginärteile zwar einerseits noch orthogonale Funktionen in den ursprünglichen Koordinaten sind, das Parallelotop aber andererseits zu einem Fundamentalbereich der $2n$-fach periodischen Funktionen in den eingeführten komplexen Veränderlichen wird [22, Abschn. 2].

Bereits in dieser wie auch in anderen seiner frühen Publikationen machte Wirtinger Ansätze, die Betrachtung der konkreten Funktionen, die er für die Integration algebraischer Funktionen benötigte, auf beliebige differenzierbare Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen zu verallgemeinern. Im Jahr 1927 schrieb er sogar einen ganzen Artikel „Zur formalen Theorie der Funktionen von mehr komplexen Veränderlichen“ [23]. Dieser beginnt wie folgt [23, S. 357]:

> „Die folgenden Untersuchungen betreffen die allgemeine Theorie der Funktionen von n komplexen Veränderlichen, ausgehend von den partiellen Differentialgleichungen, und ihre Definition durch solche auf Mannigfaltigkeiten von $n+1$ bis $2n$ Dimensionen.“

Von besonderer Auswirkung war dabei der Umgang mit „den partiellen Differentialgleichungen“, den WIRTINGER machte: Seit AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857) und RIEMANN war bekannt, dass man die komplex differenzierbaren Funktionen $f = f(z)$ einer komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ mit Realteil x und Imaginärteil y unter den nur reell differenzierbaren Funktionen dadurch charakterisieren kann, dass die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

wobei u den Real- und v den Imaginärteil von f bezeichnet. Schreibt man dies als $f = u + iv$, so kann man die beiden Differentialgleichungen für die beiden reellwertigen Funktionen u und v auch zusammenfassen zu einer einzigen für die eine komplexwertige Funktion f, nämlich zu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \text{also} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Auf WIRTINGER geht nun die Einführung der beiden Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ zurück mit

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Mittels dieser lässt sich die obige Differentialgleichung umschreiben als

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Damit werden die komplex differenzierbaren Funktionen unter den reell differenzierbaren dadurch charakterisiert, dass ihre Ableitung nach $\overline{z}$ verschwindet; die Ableitung nach z ist für derartige Funktionen dann gleich der komplexen Ableitung. Für jede reell differenzierbare Funktion lassen sich umgekehrt die partiellen Ableitungen nach x und y wegen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

aus denen nach z und $\overline{z}$ zurückgewinnen.

WIRTINGER selbst führte diese Differentialoperatoren in [23, Abschn. I.] sogleich für n komplexe Veränderliche $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$ ein:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

und übertrug die eben genannten Resultate von der Situation einer auf die mehrerer komplexer Veränderlichen, etwa die Charakterisierung der komplexen Differenzierbarkeit einer Funktion $f = f(z_1, \ldots, z_n)$ durch das Gelten der n Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = 0 \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

Weiterhin verwendete WIRTINGER in [23, Abschn. III.] bereits die Differentialoperatoren ∂ und $\overline{\partial}$ mit

$$\partial f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \qquad \text{und} \qquad \overline{\partial} f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} d\overline{z_j}$$

für $f = f(z_1, \ldots, z_n)$, ohne jedoch eine explizite Definition zu geben, weshalb sie heute nach PIERRE DOLBEAULT (1924–2015) als „DOLBEAULT-Operator“ ∂ bzw. „DOLBEAULT-Quer-Operator“ $\overline{\partial}$ bezeichnet werden.

In der Tat definierte DOLBEAULT diese Operatoren 1953 in seiner Arbeit [5] nicht nur, sondern verwendete sie auch dazu, um „DOULBEAULT-Komplexe“ zu erklären: Sei U eine offene Teilmenge einer komplexen Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n. Für natürliche Zahlen p, q bezeichne dann $\mathcal{A}^{p,q}(U)$ die Menge der (p, q)-Differentialformen auf U, also – in lokalen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ – die Menge der Linearkombinationen von Ausdrücken der Gestalt

$$dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z_{k_1}} \wedge \cdots \wedge d\overline{z_{k_q}},$$

wobei $1 \leqq j_1 < \ldots < j_p \leqq n$ und $1 \leqq k_1 < \ldots < k_q \leqq n$, mit auf U beliebig oft reell differenzierbaren Funktionen als Koeffizienten. Indem man den Quer-Operator $\overline{\partial}$ auf die Koeffizienten solch einer Linearkombination anwendet, erhält man eine Abbildung $\overline{\partial}\colon \mathcal{A}^{p,q}(U) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(U)$. Zum Beispiel nennt man eine Differentialform $\omega \in \mathcal{A}^{p,0}(U)$ komplex differenzierbar, wenn $\overline{\partial}\omega = 0$ gilt.

Bei festem p heißt dann die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^{p,0}(U) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,1}(U) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{A}^{p,n-1}(U) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,n}(U) \longrightarrow 0$$

der p-te DOLBEAULT-Komplex, wobei die verbindenden Morphismen durch die jeweiligen Quer-Operatoren $\overline{\partial}$ gegeben sind. Die Quotienten der Kerne und Bilder der jeweils passenden Quer-Operatoren ergeben dann wie gewohnt eine Kohomologie, die p-te DOLBEAULT-Kohomologie. Diese wird zur

Untersuchung komplexer Mannigfaltigkeiten eingesetzt; so besagt zum Beispiel der Satz von DOLBEAULT, dass die q-te Kohomologiegruppe der p-ten DOLBEAULT-Kohomologie zu der q-ten Garbenkohomologiegruppe mit Werten in den komplex differenzierbaren p-Differentialformen isomorph ist.

6 Schlussbemerkung

Während man bei der nach WIRTINGER benannten Ungleichung also trefflich über die Berechtigung der Namensgebung streiten kann, ist die Benennung „seiner" Thetafunktionen völlig gerechtfertigt und die Verwendung seines Namens im Zusammenhang mit dem Differentialkalkül sogar eher zurückhaltend.

WIRTINGERs weitere Arbeiten können in diesem Rahmen nicht angemessen besprochen werden, sie fügen sich aber auch thematisch nur zu kleinen Gruppen zusammen oder sind sogar einzeln stehende Beiträge wie etwa sein Artikel zur LIE-Theorie [24]. In der Regel schließen sie sich eher an Vorlesungsinhalte an, ohne einem größeren Forschungsgebiet WIRTINGERs zugeordnet zu sein.

Literatur

[1] EMILIO ALMANSI: Sopra una delle esperienze del Plateau. *Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie III.* **12** (1905), 1–17.

[2] WILHELM BLASCHKE: Beweise zu Sätzen von Brunn und Minkowski über die Minimaleigenschaft des Kreises. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **23** (1914), 210–234.

[3] —: *Kreis und Kugel.* 1. Auflage Veit & Comp.: Leipzig 1916, 2., durchgesehene und verbesserte Auflage Walter der Gruyter: Berlin 1956.

[4] AUGUSTE DICK: In Ybbs geboren – in Ybbs gestorben. In *Tagungsband des I. Österreichischen Symposions zur Geschichte der Mathematik (Neuhofen 1986).* Herausgegeben von Christa Binder. Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte: Wien 1986, S. 119–123.

[5] PIERRE DOLBEAULT: Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* **236** (1953), 175–177, 2203–2205.

[6] HANS HORNICH: Wilhelm Wirtinger †. *Monatshefte für Mathematik* **52** (1948), 1–12.

[7] ADOLF KRAZER und WILHELM WIRTINGER: Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen. *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.* Band II, Teil 2, B, 7. Teubner: Leipzig 1920.

[8] Martina Pesditschek: Wilhelm Wirtinger. *Österreichisches Biographisches Lexikon 1815–1950*. Band **16** (Lfg. 71), 276–277. Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften: Wien 2020.

[9] Bernhard Riemann: *Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke. Nachträge*, herausgegeben von Max Noether und Wilhelm Wirtinger. B. G. Teubner: Leipzig 1902.

[10] Peter Ullrich: Wilhelm Wirtinger. *Neue Deutsche Biographie*. Band **28**. Duncker & Humblot: Berlin 2023.

[11] Wilhelm Wirtinger: Über rationale Raumkurven 4. Ordnung. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien* **93** (1886), 28–45.

[12] —: Über die Brennpunktkurve der räumlichen Parabel. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien* **94** (1886), 302–309.

[13] —: *Über eine kubische Involution in der Ebene*. Inauguraldissertation: Wien 1887. Unveröffentlicht.

[14] —: Über das Analogon der Kummer'schen Fläche für $p = 3$. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* 1889, 474–480.

[15] —: Über eine Verallgemeinerung der Kummer'schen Fläche und ihre Beziehungen zu den Thetafunktionen zweier Variablen. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **1** (1890), 113–128.

[16] —: Zur Theorie der Abel'schen Funktionen vom Geschlecht 3. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **2** (1891), 55–66.

[17] —: Untersuchungen über Abel'sche Funktionen vom Geschlecht 3. *Mathematische Annalen* **40** (1891), 261–312.

[18] —: Zur Theorie der $2n$-fach periodischen Funktionen 1. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **6** (1895), 69–98.

[19] —: *Untersuchungen über Thetafunctionen*. B. G. Teubner: Leipzig 1895.

[20] —: Zur Theorie der $2n$-fach periodischen Funktionen 2. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **7** (1896), 1–25.

[21] —: Algebraische Funktionen und ihre Integrale. *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Band II, Teil 2, B, 2. Teubner: Leipzig 1901.

[22] —: Über einige Probleme in der Theorie der Abelschen Funktionen. *Acta mathematica* **26** (1902), 133–156.

[23] —: Zur formalen Theorie der Funktionen von mehr komplexen Veränderlichen. *Mathematische Annalen* **97** (1927), 357–375.

[24] —: Lie's Translationsmannigfaltigkeiten und Abelsche Integrale. *Monatshefte für Mathematik und Physik* **46** (1938), 384–431.

Einige neue Erkenntnisse zur Biographie Emil Artins

Alexander Odefey

Emil Artin (1898–1962) war einer der maßgeblichen Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Er kam 1922 an die erst wenige Jahre zuvor gegründete Hamburgische Universität und trug mit seinen wissenschaftlichen Leistungen dazu bei, dass das Mathematische Seminar in den 1920er Jahren weltweites Renommee erlangte. Besonderen Ruhm erwarb Artin, als es ihm 1926/27 gelang, gleich zwei der Hilbert'schen Probleme zu lösen. Zugleich war er zeit seines Lebens ein hoch geschätzter akademischer Lehrer, der über exzellente pädagogische Fähigkeiten verfügte.

Artins Biographie war aber auch geprägt von schwierigen Phasen. Das gilt zunächst für seine Jugend. Nachdem sich bei seinem Vater Emil Artin senior immer stärker eine schwere psychische Erkrankung bemerkbar gemacht hatte, wurde dieser in der Landesheil- und Pflegeanstalt für Geisteskranke in Mauer-Öhling bei Amstetten in Niederösterreich behandelt, wo er am 20. Juli 1906 im Alter von nur 38 Jahren verstarb. Emils Mutter Emma hatte ihre berufliche Karriere als Schauspielerin und Operettensängerin nach der Geburt ihres Sohnes weitergeführt, ja weiterführen müssen und auch Theater-Engagement außerhalb Wiens angenommen. So war sie während Emils Grundschulzeit in Innsbruck, Teplitz-Schönau und Reichenberg tätig, während das Kind die Volksschulen in Strebersdorf (damals eine eigenständige Gemeinde im Norden Wiens), Baden bei Wien und Strobnitz, einem Dorf im südlichen Böhmen, besuchte.

Warum Emil gerade dort zur Schule ging und bei wem er zu dieser Zeit lebte, ist unklar. In jedem Fall wird man konstatieren dürfen, dass er – bedingt durch die häufige Abwesenheit der Mutter, die Krankheit und den Tod des Vaters, die zahlreichen Wechsel seiner Wohnorte, der Schulen und somit auch der Bezugspersonen und Freunde – keine einfache Kindheit gehabt hat. Seine Lebenssituation stabilisierte sich indes in mehrfacher Hinsicht, als der Zehnjährige im Sommer 1908 nach Reichenberg kam. Emma Artin hatte während ihres Engagements am Theater der wohlhabenden böhmischen Stadt den gleichaltrigen Fabrikanten und Chemiker Dr. Rudolf Hübner kennengelernt. Sie hatten sich verliebt und geheiratet; am 27. Oktober 1907 war ihr gemeinsamer Sohn Rudolf zur Welt gekommen. Emil lebte jetzt also zusammen mit seiner Mutter, seinem Stiefvater und dem kleinen Stiefbruder. Rudolf Hübner war ein in der Stadt angesehener, gutsituierter Besitzer einer Wolltuchfabrik, die Familie wohnte zunächst in einem Stadthaus am damaligen Altstädterplatz, ab 1910 dann in der Mozartstraße des Villenviertels. Dort schloss Emil eine enge Freundschaft mit dem zwei Jahre jüngeren Arthur Beer, dessen Vater Lehrer an der K. k. Staatsgewerbeschule war. Die Familie Beer bewohnte das Nachbarhaus, und die beiden Jungen verbanden ihre Zimmer mit einer selbstkonstruierten Telegraphenleitung. Sie besaßen auch Teleskope und interessierten sich gemeinsam für Astronomie. Die Freundschaft hielt bis zu Artins Tod, zahlreiche weitere Begegnungen und Kontakte sind dokumentiert.

Die 1920er Jahre verliefen in beruflicher Hinsicht für Artin fast ausnahmslos sehr erfreulich und erfolgreich: von der Promotion bei Gustav Herglotz 1921 in Leipzig über die Habilitation in Hamburg 1923 bis zur Ernennung zum dortigen außerordentlichen und schließlich ordentlichen Professor (1925 bzw. 1926), begleitet von zahlreichen herausragenden Forschungsergebnissen in seinen Hauptarbeitsgebieten der Algebra und Zahlentheorie, aber auch in der Topologie („Theorie der Zöpfe"). In privater Hinsicht ist eine bemerkenswerte zweimonatige Reise nach Island zu erwähnen, die Artin gemeinsam mit mehreren Freunden im Sommer 1925 unternahm und die er detailliert in einem Reisetagebuch sowie in Photographien festgehalten hat. Großes persönliches Glück wurde ihm zuteil, als er am 15. August 1929 Natascha Jasny, eine Studentin der Mathematik und Kunstgeschichte, heiratete. Im Januar 1933 konnten sich beide über die Geburt ihres ersten Kindes freuen, einer Tochter, der sie den Namen Karin gaben. Im Juni 1934 folgte der Sohn Michael. Emil Artin war sehr musikalisch. Er spielte vorzüglich Querflöte und Klavier und besaß überdies mehrere Tasteninstrumente, etwa ein zweimanualiges Cembalo und ein Klavichord. Regelmäßig musizierte er mit Freunden. Darunter befanden sich der Medizinstudent und spätere Arzt Heinz Klinger, der Maler, Grafiker und Bildhauer Heinrich Stegemann, der Artin und seine Familie mehrmals porträtiert hat, und – als ein besonders enger Freund – Fritz Sievers. Klinger wie auch Sievers hatte Artin durch die „Wandervogel“-Bewegung kennengelernt, deren Mitglied er war. Der aus Bernburg an der Saale stammende, sechseinhalb Jahre jüngere Sievers hatte in Köthen das Anhaltische Landeslehrerseminar besucht, anschließend aber keine Anstellung als Volksschullehrer gefunden und war von Artin als sein Büroassistent nach Hamburg geholt worden. Es war ebenfalls Artin, der ihn dabei unterstützte, parallel zur Bürotätigkeit das sogenannte Fremdenabitur abzulegen und danach ein Studium der Mathematik, Physik, Biologie und Philosophie aufzunehmen.

Mit dem Beginn der nationalsozialistischen Diktatur 1933 verdunkelte sich Emil Artins Stimmung. Er selbst stand dem neuen Regime ohnehin ablehnend gegenüber, doch vor allem sorgte ihn natürlich der Umstand, dass Natascha die Tochter eines jüdischen Vaters war. Bereits 1934 befasste er sich mit Gedanken an eine Emigration mit seiner Familie. Dass diese dann schließlich 1937 erfolgen konnte, war insbesondere Richard Courant zu verdanken, der schon im April 1933 in Göttingen beurlaubt worden war, seit dem folgenden Jahr als Professor an der New York University wirkte und sich von dort aus mit großem persönlichen Einsatz um eine geeignete Position in den USA für den mit ihm freundschaftlich verbundenen jüngeren Kollegen bemühte. Als die Artins Ende Oktober 1937 in New York eintrafen, wurden sie von Courant sowie von Hermann Weyl und Nataschas Vater Naum Jasny, die aus Princeton bzw. Washington, D.C. angereist waren, am Pier empfangen. So groß die Dankbarkeit und Erleichterung waren, nun sicher in Amerika angekommen zu sein, so groß war die Ernüchterung, als sie im Anschluss an einen kürzeren Aufenthalt an der Ostküste nach South Bend im Bundesstaat Indiana gelangten, an dessen Stadtrand sich Artins neue Wirkungsstätte, die University of Notre Dame, befand. In Briefen an Fritz Sievers und die anderen Hamburger Freunde schildern Emil und Natascha Artin in großer Deutlichkeit ihre keineswegs positiven Eindrücke vom amerikanischen Leben wie auch von dem geringen wissenschaftlichen Niveau der dortigen Universität. Glücklicherweise gelang es Artin, schon im folgenden Jahr eine erheblich bessere Stellung an der Indiana University im 300 Kilometer südlich von South Bend gelegenen Bloomington zu erhalten. Hier fühlten sie sich wesentlich wohler. Artin publizierte wieder bedeutende Forschungen, etwa seine berühmte „Galois Theory“, er hatte qualifizierte Mitarbeiter, er gab Sommerkurse an anderen Universitäten, wohin die Familie ihn stets begleitete. Natascha und er nahmen das gesellschaftliche Leben wieder auf, das sie in Hamburg so genossen hatten. Zu ihrem Freundeskreis zählten – entsprechend ihren vielseitigen kulturellen und intellektuellen Interessen – Persönlichkeiten aus verschiedenen Fakultäten der Universität. Und gleich zu Beginn der Zeit in Bloomington war ihr drittes Kind, der Sohn Thomas, zur Welt gekommen. Die Krönung von Artins beruflicher Karriere in Amerika bildete 1946 seine Berufung an die Princeton University. Auch aus den Jahren in Bloomington und Princeton finden sich aufschlussreiche Berichte in den Briefen an Sievers, zum Beispiel ein Schreiben Artins aus Japan, wo er im September 1955 an einem internationalen Symposium über Algebraische Zahlentheorie teilnahm.

Für das akademische Jahr 1956/57 war Artin in Princeton ein sabbatical year bewilligt worden, das er als Gast der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen und an seiner alten Universität in Hamburg verbrachte. Nach Princeton zurückgekehrt, schrieb er an Helmut Hasse, er habe sich in Hamburg „so wohlgefühlt wie in den alten Zeiten, vielleicht noch wohler“, habe „sehr viel Heimweh nach Deutschland“ und würde gerne zurückkommen, wenn man ihn haben wolle. Dies war der Fall, und Emil Artin trat am 1. Oktober 1958 seine neu geschaffene Ordentliche Professur am Mathematischen Seminar der Universität Hamburg an. In den folgenden Semestern hielt er Vorlesungen über Algebra, Algebraische Geometrie, Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen und Topologie sowie mit großer Freude eine vielbeachtete Anfängervorlesung über Analytische Geometrie und Algebra. Leider währte diese zweite Tätigkeit in Hamburg nur vier Jahre, denn völlig unerwartet erlitt Artin am 20. Dezember 1962, wenige Monate vor seinem 65. Geburtstag, einen schweren und tödlichen Herzinfarkt.

Eine ausführliche Darstellung der hier behandelten und weiterer Aspekte von Artins Leben findet sich in der im Mai 2022 erschienenen Biographie:
Alexander Odefey: *Emil Artin. Ein musischer Mathematiker* (Wissenschaftler in Hamburg, Bd. 4), Göttingen: Wallstein, 2022.

Eberhard Hopf's (1902-1983) Work in Astrophysics and Astronomy

Rita Meyer-Spasche,
Max Planck Institute for Plasma Physics, Boltzmannstr. 2
85748 Garching, Germany; meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de

Abstract

The text begins with a brief longitudinal cut through the history of mathematical astronomy from Johannes Kepler to today. Then we focus on Eberhard Hopf in Astronomy. Eberhard Hopf is mostly known for his mathematical work, but actually he also made very deep and influential contributions to astronomy and mathematical astrophysics. His two books and many of his papers deal with mathematical problems from astronomy and astrophysics and/or are influenced by astronomical literature, but they are also substantial contributions to mathematics. His book *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium* (1934, repr. 1964) was praised in 1935 by three reviewers as an important contribution for a modern, mathematically oriented astrophysics. Some people judge that his book *Ergodentheorie* actually started the field, though there was earlier work by other authors. His famous paper on the Hopf bifurcation (1942 published in German, reprint/English translation published and discussed in 1976 and in 2002) was strongly influenced by Poincaré's work on celestial mechanics (ca 1895).

1 From Johannes Kepler (1571-1630) to Eberhard Hopf (1902-1983) to today

We begin our longitudinal cut through the history of mathematical astronomy with Johannes Kepler (1571-1630), because he revolutionized astronomy with his book *Astronomia Nova* in 1609 [Kep09, GoH05]. We note that last year was the 450th anniversary of his birth and it could not be celebrated adequately because of Covid 19.

Today we say that Kepler's laws of planetary motion follow from the exact solution of *the mathematical 2-body problem*, i.e., from considering the orbits of two mass points in a gravitational field. This statement actually summarizes the scientific development from Kepler's *Astronomia nova* of 1609 to Newton's *Philosophiae naturalis principia mathematica* of 1687 [New87]. When Kepler derived his famous laws, he actually did consider *three* bodies in special constellations. His revolutionary approach was to abandon the then common concept of *orbs* and to replace it with the concept of *orbits*, i.e. the concept of paths of planets together with their physical cause. Thus he laid the seed for today's theory of dynamical systems. It is known that Newton did not read Kepler's publications, but he knew Kepler's work from other publications. Newton was clearly influenced by Kepler's work when he formulated his theory of gravitational forces. [GoH05]

> Newton thus extended the core idea of Kepler's celestial physics to all of physics – the same physical laws apply equally to celestial and terrestrial bodies. [GoH05, p. 104]

Celestial mechanics is a *multi*-body problem. To follow Newton et al. directly by solving *the mathematical three-body problem* turned out to be qualitatively completely different and very difficult: only very few special cases are exactly solvable, many solutions are chaotic (see for instance the book by Parker and Chua [PaC89] for properties of chaotic systems). For a history of the three-body problem see publications by June Barrow-Green, for instance [Bar96]. In addition to their attemps to solve the three-body problem directly, astronomers employed several other methods and thus developed mathematical methods which turned out later on to be very valuable, also for completely different applications. Among these methods are, for instance: solve a two-body system which is perturbed by a third small body ($\Rightarrow$ mathematical perturbation theory) or solve the n-body problem numerically. Many of these attempts of astronomers contributed to the development of the Qualitative Theory of Dynamical Systems, to Ergodic Theory and to Numerical Particle Simulations (like Particle in Cell (PIC) methods). Eberhard Hopf made many contributions to the theory of dynamical systems and to ergodic theory. Numerical Particle Simulations were successfully developed in Plasma Physics and Astrophysics [MSp18a] and involve nowadays several million particles. Their field of applications grew considerably. Today, they include such diverse fields as medicine, hydrodynamics and graphics for computer games.

2 Eberhard Hopf and Astrophysics/Astronomy

Eberhard Hopf was born in Salzburg in 1902. He finished school in Berlin in 1920 and studied mathemaics and physics at the universities of Berlin (7 semesters) and Tübingen (one semester). In 1925/26 he finished his dissertation in mathematics in Berlin, with advisors *Erhard Schmidt (1876-1959)* and *Issai Schur (1875-1941).* In 1927 he became *wissenschaftlicher Assistent* at the *Astronomisches Recheninstitut (ARI)*[1] of Berlin University. In 1929 he finished his habilitation and obtained the *venia legendi* for mathematics and astronomy.[Tob06]

With a Rockefeller stipend Hopf became an *International Research Fellow* at *Harvard College Observatory* for 1930-1932. [RSS98, pp 38f], [Tob06]. This was very attractive to him for several reasons: In the US there was a strong tradition in celestial mechanics; because of the economic situation in 1929 it was very hard to find an adequately paid position in Germany, and *George D. Birkhoff (1884-1944)* was at the Harvard College Observatory and worked on the theory of dynamical systems and on ergodic theory. During his time at Harvard Hopf met *Norbert Wiener (1894-1964)* of the neighboring MIT.[RSS98, RSS09] Their famous joint paper appeared in 1931 [WiHo31]. When Hopf's stipend ended, he would have liked to go back to Germany, but letters from Berlin made clear that there were no positions available. So Norbert Wiener helped him in 1932 to get a position as assistent professor at the mathematics department of MIT. Thus Hopf moved in 1932 from astronomical institutes to a mathematical institute. Formally, this move turned out to be for good: From MIT he moved to mathematical chairs in Leipzig (1936), LMU Munich (1944) and Indiana University (1948). When the people in Leipzig discussed whom to offer the vacant mathematical chair in 1936, there were very active Nazis among the students and in the *Dozentenschaft* at U Leipzig. They strongly opposed an offer to any non-Nazi candidate, and thus also to Eberhard Hopf. But finally a group of professors won with their *Sondervotum* (dissenting opinion) for Hopf: they were the physi-

[1] Institute for Astronomical Calculations

cists *Werner Heisenberg (1901-1976)* and *Friedrich Hund (1896-1997)*, the mathematician *Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996)* and the geophysicist *Ludwig Weickmann (1882-1961)* [Gir09, MSp18b]. They appreciated Hopf's astronomical work.

This move from astronomical institutes to mathematical institutes did not really change the character of Hopf's work: all his publications were mathematically well-founded, and much of his later work was motivated by astronomical problems and related publications, especially by *Henri Poincaré's (1854-1912)* work [Poi92-99].

During the years 1927 to 1934 Hopf focused on mathematical problems of radiative equilibrium of stars. He obviously was introduced to this topic by *Erwin Freundlich (1885-1964)*[2] and *U. Wegner* at the Einstein Institute at Potsdam. U. Wegner had published on a closely related mathematical problem before. In their joint paper they examined several recent papers by Russian authors who had 'attempted to bring forward a proof that the homogeneous integral equation of radiative equilibrium possesses no solution other than one identically equal to zero.' [FHW27]. Freundlich, Hopf and Wegner point out that this is in contradiction to all approximate solutions of the integral equation which were obtained by Schwarzschild, Jeans and Milne by using several different numerical methods. Also, the testing of the theory by observation confirmed the theory. In their article, Freundlich, Hopf and Wegner discuss in detail which statements in the arguments of the Russian authors are wrong (some for mathematical, some for physical reasons), and Hopf announced a proof of the existence of a non-zero solution. In a series of three papers Hopf proved in a physics context a) the existence of a non-zero solution [Hopf28a] and b) the uniqueness of this solution [Hopf28b]; c) in a purely mathematical context in a much more general setting he then proved further mathematical properties [Hopf28c]. He continued to publish on

[2] Erwin Finlay Freundlich (1885-1964) was a German astronomer with a British mother. He was a student of Felix Klein (1849-1925) and Karl Schwarzschild (1873-1916). After 1910 he worked at the Potsdam observatory. As a working associate of *Albert Einstein (1879-1955)* his main task became to verify the general theory of relativity by designing and performing experiments for testing the theory by astronomical observations. In 1920 the Einstein Institute was founded in Potsdam with an Astrophysical Observatory, in the Einstein Tower. Freundlich was appointed there as observer in 1921. He emigrated in 1933. Later on he became *Napier Professor of Astronomy* in St Andrews, Scotland. When retired, in 1957, he returned to his native town Wiesbaden and became honorary professor at U Mainz. [McTu]

related problems, sometimes in the astrophysics context, sometimes in purely mathematical context. Especially remarkable in this series is the article *Remarks on the Schwarzschild-Milne Model of the Outer Layers of a Star*, [Hopf30]. Among other results, he found an explicit expression for the ratio of the two characteristic temperatures in the problem, while previous authors (Jeans, Milne and Eddington) approximated that term numerically. Without a co-author with a British mother, Hopf sent his manuscript to Prof. Milne in German, and Milne[3] translated it himself (7 pages). Altogether Hopf published[4] about 15 articles on this topic during the years 1927 to 1932. Mixed into this series there are also papers on other topics, from 1929 on also articles on problems from the theory of dynamical systems and ergodic theory. Already at MIT, Hopf summarized his work on radiative equilibrium and published a monograph in 1934: *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium* [Hopf34, 104 pages]. This book was praised in 1935 by the three reviewers *Harry Bateman (1882-1946)* (in the US), *Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995)* (at that time still in England), and *Boris P. Gerasimovič (1889-1937)* (at the Poulkovo Observatory near Leningrad) as an important contribution for a modern, mathematically oriented astrophysics [Bat35, Cha35, Ger35]. Only Chandrasekhar criticized that the book did not cover the topic completely, that there were some open points not even mentioned. Thus Hopf wrote one more article on the topic, dealing with work both by Chandrasekhar and himself and discussing relations between their results. He submitted it such that it was communicated by Chandrasekhar [Hopf36]. For a 1994-discussion on the importance of Hopf's radiative-transfer-work see the article by Andrzej Icha [Ich94, p.77].

Hopf wrote a first article on the theory of dynamical systems in 1929. From 1932 on, he wrote several articles on dynamical systems and ergodic theory, certainly strongly influenced by the work of George Birkhoff at Harvard College Observatory. His book on ergodic theory appeared while he was in Leipzig, and thus in German. *Ergodentheorie*, Springer Verlag, 83 pages [Hopf37]. Some people judge that this book actually started the field, though there was earlier work by other authors, among them

[3] *Edward Arthur Milne(1896-1950)*, British mathematician and astrophysicist

[4] according to the publication list in Morawetz, Serrin, Sinai 2002 [MSS02, pp. xvii-xxi]

George Birkhoff.

Hopf's famous paper on the Hopf bifurcation [Hopf42] (1942 published in German, reprint/English translation published and discussed in 1976 and in 2002) was strongly influenced by Poincaré's work on celestial mechanics [Poi92-99], though Poincaré is only mentioned in a footnote and the applications discussed in Hopf's article were of recent interest in fluid dynamics.

During the years 1926 to 1971 Eberhard Hopf wrote[5] in total two books and approximately 79 journal articles, of which one book (1937) and 41 articles are in German and one book (1934) and 38 articles are in English. Both books were motivated by mathematical problems from astronomy and/or astrophysics. About 18 articles were closely related to radiative equilibria and integral equations, the most famous one in this group is the article with Norbert Wiener: *Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen* [WiHo31]. At least 16 articles dealt with ergodic theory and the theory of dynamical systems. The most famous one in this group is the one on the *Hopf bifurcation*: *Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems* [Hopf42].

As was discussed in detail in my Miesenbach Talk in 2018, the curriculum vitae of Eberhard Hopf was not unique, but very unusual: He was one of the very few German scientists who moved from the US to Germany in 1936, and this was so though he had a secure position at MIT. Moreover he returned to the US shortly after 1945, with the help of *Richard Courant (1888-1972).* The behavior of Hopf and also of Courant found dismay, disapproval and understanding in the math community. As a consequence, there are many falsified references to Hopf's work, but there is also enthusiastic praise of the high quality of his mathematical results. For details and a discussion see [MSp18a] and the references therein.

Acknowledgement The author thanks Prof Richard Kremer (Dept of History, Dartmouth) for a very helpful discussion on Kepler's methods, during the 2022 meeting of the *Astronomische Gesellschaft* in Bremen.

[5] according to the publication list in Morawetz et al. [MSS02, pp. xvii-xxi]

References

[Bar96] J. Barrow-Green (1996): Poincaré and the Three-Body Problem, Oxford University Press, 272 pages

[Bat35] Harry Bateman (1935): Review of [Hopf34], Bulletin of the American Mathematical Society **41** (1935), p 170

[Bin18] C. Binder (Ed.) (2018): Vernachlässigte Teile der Mathematik und ihre Geschichte. Proceedings des 14. Österreichischen Symposiums zur Geschichte der Mathematik (ÖSGM XIV), Miesenbach, 29.04.-05.05.2018, Wien: Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte.

[Cha35] S. Chandrasekhar (1935): Review of [Hopf34], The Mathematical Gazette **19** (1935), pp 371-372

[FHW27] E. Freundlich, E. Hopf, U. Wegner (1927): On the Integral Equation for Radiative Equilibrium, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **88**, pp. 139-142

[Ger35] B.P. Gerasimovič (1935): Review of [Hopf34], Astrophysical Journal **82** (1935), pp 268-270

[Gir09] Girlich, Hans-Joachim (2009): Streiflichter auf die Mathematik an der 600-jährigen Alma mater Lipsiensis, Erweiterte Fassung eines Vortrags, gehalten auf der 11. Tagung der Fachsektion Geschichte der Mathematik der Deutschen Mathematik-Vereinigung (DMV) in Pfalzgrafenweiler (Schwarzwald) am 21.5.2009, In: Münchner Universitätsschriften - Algorismus, Heft 76 (2011), pp 80-93

[GoH05] Bernard R. Goldstein, Giora Hon (2005): Kepler's Move from Orbs to Orbits: Documenting a Revolutionary Scientific Concept, Perspectives on Science **13**, pp 74-111

[Hopf28a] E. Hopf (1928a): Zum Problem des Strahlungsgleichgewichts in den äußeren Schichten der Sterne, Zeitschrift für Physik **46** (1928), pp 374-382

[Hopf28b] E. Hopf (1928b): Über Strahlungsgleichgewichte in den äußeren Schichten der Sterne II, Zeitschrift für Physik **49** (1928), pp 155-161

[Hopf28c] E. Hopf (1928c): Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern, Sitzungsberichte Preussische Akademie deer Wissenschaften Berlin (1928), pp 233-245

[Hopf30] E. Hopf (1930): Remarks on the Schwarzschild-Milne Model of the Outer Layers of a Star, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **90**, pp 287-293, Communicated and translated by Prof. E.A. Milne
`https://doi.org/10.1093/mnras/90.3.287`

[Hopf32] E. Hopf (1932): Remarks on the Schwarzschild-Milne Model of the Outer Layers of a Star II Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **92**, pp. 863-868

[Hopf34] Hopf, Eberhard (1934, repr. 1964): *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium,* Cambridge University Press, 104 pages, Series Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics Vol. 31,

[Hopf36] E. Hopf (1936): Absorption lines and the integral equation of radiative equilibrium, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **96**, pp. 522-533 Communicated by Chandrasekhar,

[Hopf37] Hopf, Eberhard (1937, repr 1970): *Ergodentheorie,* Springer Verlag, 83 pages;

[Hopf42] Hopf, Eberhard (1942): Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems, *Berichte der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig,* Band XCIV, Sitzung vom 19. Januar 1942, pp.3-22,
reprinted in [MSS02], pp. 91-110, with a Commentary by Martin Golubitzky and Paul H. Rabinowitz
Howard, L.N., Kopell, N. (1976): A Translation of Hopf's Original Paper, pp. 163-193 and Editorial Comments, pp. 194-205 in [MMcC76]

[Ich94] Icha, Andrzej (1994): Eberhard Hopf (1902-1983) (in English), Nieuw Archief Voor Wiskunde **12**, pp 67-84

[Kep09] Johannes Kepler (1609): Astronomia nova, Heidelberg: Gotthard Vögelin

[McTu] O'Connor, J.J., Robertson, E.F. (eds.): MacTutor History of Math archive, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/`

[MMcC76] J.E. Marsden, M. McCracken (1976): *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer Verlag

[MSp18b] Rita Meyer-Spasche, Eberhard Hopf between Germany and the US, pp. 206-213 In: C. Binder (2018) [Bin18]
Cite as `http://hdl.handle.net/21.11116/0000-0002-8E9C-F`

[MSp18a] Meyer-Spasche, R. (2018). Oscar Buneman and the Early Stages of Research on Cosmic Plasmas. In G. Wolfschmidt (Ed.), Astronomie im Ostsee-Raum – Astronomy in the Baltic (pp. 490-515). Hamburg: tredition Verlag
`http://hdl.handle.net/21.11116/0000-0003-1061-D`

[MSS02] Morawetz, C.S., Serrin, J.B., Sinai, Y.G. (eds): *Selected works of Eberhard Hopf with Commentaries*, A.M.S., Providence, 2002

[New87] Isaac Newton (1687): Philosophia naturalis principia mathematica, London: The Royal Society

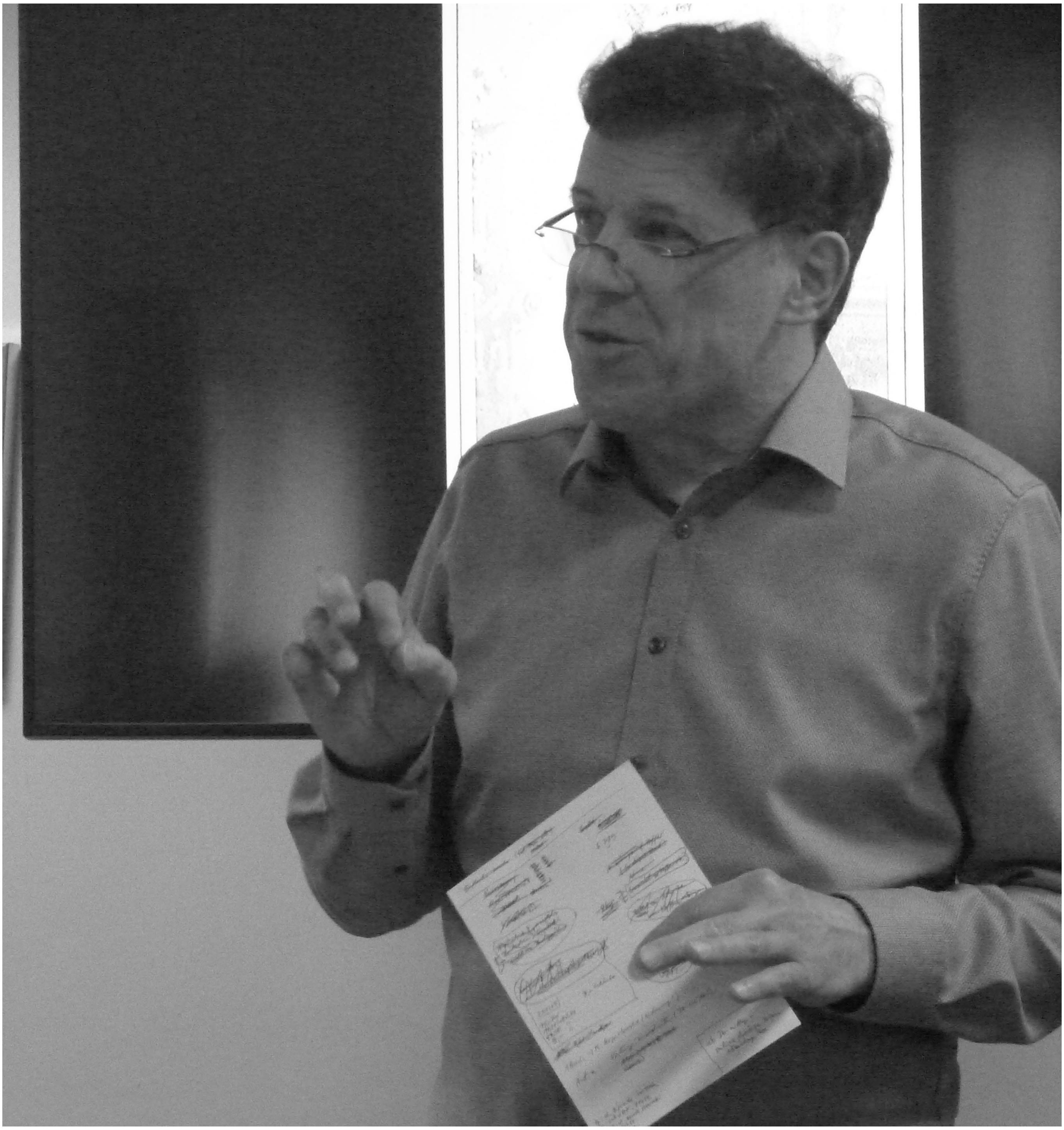
[PaC89] T.S. Parker, L.O. Chua (1989): Practical numerical algorithms for chaotic systems, Springer New York, NY

[Poi92-99] H. Poincaré (1892-99): Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3 volumes Gauthier-Villars, Paris, 1892-1899,

[RSS98] Siegmund-Schultze, Reinhard: *Mathematiker auf der Flucht vor Hitler*, Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Vieweg, Braunschweig 1998

[RSS09] Siegmund-Schultze, Reinhard: *Mathematicians fleeing from Nazi Germany*, Princeton University Press, 2009, [Tob06] Tobies, Renate (2006): *Biographisches Lexikon in Mathematik promovierter Personen an deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen WS 1907/08 bis WS 1944/45*, Dr Erwin Rauner Verlag, Augsburg

[WiHo31] N. Wiener, E. Hopf (1931): Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, *Sitzungsberichte Akad. Wiss. Berlin* (1931) pp. 696-706



Alexander Odefey

Stanisław Domoradzki (Institute of History, University of Rzeszów, Aleja Rejstna 16 C, 35-310 Rzeszów Poland, e-mail: stanislawdomoradzki@gmail.com)
Michael Zarichnyi (Institute of Mathematics, University of Rzeszów, 1 Prof. St. Pigonia str., 35-310, Rzeszów, Poland and Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str., 79000 Lviv, Ukraine, e-mail: zarichnyi@yahoo.com)

Lwów School of Mathematics" in the period of the Second World War

Abstract. The activity of the worldwise famous Lwów Mathematical School was interrupted by the Second World War. The note is an attempt to describe what happened in the mathematical life of Lwów during the war.

During the Second Polish Republic, Lwów was a prosperous research center, and the well-known Lwów Mathematical School, founded by professors H. Steinhaus and S. Banach, successfully functioned there (see [Du, DSZ]). The activities of the mathematics school were brutally interrupted on September 1, 1939.

On November 1, 1939, the USSR annexed the Western Ukraine to the Ukrainian SSR. The Jan Kazimierz University and Lwów Polytechnical School were closed, the Ukrainian University (since 1940 named after I. Franko) and the Ukrainian Polytechnic Institute were established. Also, the Academy of Foreign Trade operated, its rector in 1939 was the mathematician S. Ruziewicz. The only Polish dean at the Ukrainian university was S. Banach, who, together with S. Mazur, W. Orlich, J. Schauder and H. Steinhaus, were also employees of the Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR in Kyiv. K. Bartel and E. Marczewski were in Soviet prisons,W. Hepter and S. Kaczmarz did not survive the first Soviet occupation. In 1940, F. Barański received master's degree at the Ukrainian University based on a thesis completed under the supervision of S. Banach and H. Steinhaus.

After the outbreak of the German-Soviet war in 1941, the German occupation of Lwów began (1941-1944), which was not survived by H. Auerbach, K. Bartel, M. Eidelheit, A. Łomnicki, S. Ruziewicz, J. Schauder, L. Sternbach, W. Stożek, and M. Wojdysławski. Universities in Lwów have been closed, Germany allowed two-year and four-year vocational schools at the upper secondary level without the possibility of transferring to German universities. After the end of the German occupation, in 1944 Feliks Barański (1915-2006) was appointed an assistant to S. Banach in the Department of Mechanics of the Polytechnic Institute in Lwów, where he worked until 1945, when Polish scientists began to emigrate from Lwów.

Without pretending to be complete, we will mention here several names of mathematicians who became connected with Lwów during the war period.

Bronisław Knaster (1893-1980), an outstanding mathematician who dealt primarily with topology, was not a representative of Lwów's school, although he cooperated with Lwów mathematicians. He studied, got doctorate and habilitation in Warsaw and before the Second World War he also lectured at the University of Warsaw. Knaster, in particular, is known for the following results and notions:

– Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (KKM) lemma
– Knaster-Kuratowski fan
– Knaster-Tarski fixed point theorem.

He arrived in Lwów in 1939, to protect himself against Germans. He was a professor at the university in Lwów in 1939-1941 and 1944-1945. During 1941-44 Knaster worked as a lice feeder in the Weigl Institute.

In 1939, after the Soviet army entered Lwów, Ludwik Sternbach (1905-1942) returned to that city and from November 1939 he was a teacher at the Pedagogical Institute, and then an assistant at the Department of Mathematics at the University of Ivan Franko (1940–1941). Sternbach had to visit the Scottish Café (see below), because he entered the following problem 107 in the Scottish Book: Does there exist a fixed point for every continuous mapping of a bounded plane continuum *E*, which does not cut the plane, into part of itself? The same for homeomorphic mappings of *E* into all of itself.

At the end of 1941, together with his wife Józefa Wiezenberg, he was moved to the Lwów ghetto. Threatened with deportation to the death camp in Bełzec, he and his wife committed suicide by taking cyanide.

The life and activity of Józef Schreier (born in 1909) is described in [GP]. He worked mostly in the theory of topological groups and semigroups. Together with Stanisław Ulam Schreier published 8 papers in this area. Some of the results concern the notion of base in topological (semi)groups. Schreier committed suicide in 1943.

From January 1940, Menachem Wojdysławski (1918 – 1942 or 1943) worked as an assistant at the University of Lwów in the Department of Geometry headed by S. Mazur and was Mazur's doctoral student. His mentioned publication was probably a part of the PhD thesis under preparation. One of the most known results: The hyperspace 2^X of a continuum X is an AR if and only if X is locally connected. His question whether hyperspace $2I$, where I is the unit segment, is homeomorphic to Hilbert's cube, proved to be difficult and was positively resolved only in 1972 by R. Schori and J.E. West.

Meier (Maks) Eidelheit was born in 1910 in Janów near Lwów. Since January, 1939 he was an Associate Professor (Docent), of the Chair of Analysis II, whose head was H. Steinhaus, later Eidelheit changed the Chair. He participated in sessions in the Scottish cafe (till November, 1940). The results concerned systems of linear equations with infinitely many unknowns. Killed by Nazis in March, 1943.

A Ukrainian mathematician Miron Zarycki published about 20 papers till 1939. In 1942-1944 he lectured in mathematics, professional technical courses on the base of Polytechnical School. From 1939, Zarycki headed the Chair of Probability at the University of Ivan Franko in Lviv, and in 1940 he became a researcher at the Institute of Mathematics of the Lviv Branch of the Ukrainian Academy of Sciences. In the years 1939-1941 he was the vice-dean (the dean was Banach), and in the years 1944-1947 the dean of the Faculty of Physics and Mathematics.

In 1939–1940, Zarycki translated Banach's monograph Théorie des opérations linéaires into Ukrainian, which was published only in 1948 as the "Course of Functional Analysis". For unknown reasons, translator's name was not mentioned in the book.

In [Za] Zarycki formulated axioms that described the notion of boundary of a set analogously to Kuratowski's axioms of the closure. Considering the intuitive comprehensibility of the concept of the boundary, its importance for various sciences, both natural and humanitarian, the mentioned article by Zarytskyi was repeatedly cited, in particular in works on philosophy (formal ontology) [Sm].

Documentary material about the activities of the Lviv Mathematical School can be obtained by analyzing publications of the war and post-war period in the journal Studia mathematica. The journal was established in 1929 by Stefan Banach and Hugo Steinhaus and its first editors were Stefan Banach, Hugo Steinhaus, and Herman Auerbach.

Volume 9 published in 1940 contained papers by H. Auerbach [Au], S. Banach [Ba], M. Wojdysławski [Wo]. In the paper [Wo] by in particular, a characterization of the planar absolute neighborhood retracts (ANR-spaces) is given. Note that the affiliation of the author was Léopol, Pologne. In [Ba], S. Banach considers a metric space of orthogonal and normed series on a segment. It is proved that the set of complete series is of the second category. Note that the method of proving existence theorems by using the Baire category arguments was often used in the Lwów Mathematical School.

The journal „Studia mathematica" moved to Poland after the World War II. Its volume 10 published in 1948 contains articles of representatives of the Lwów School of Mathematics. In particular, two papers are authored by Stefan Banach, they were prepared for publication by S. Hartman. One of the results concerns the continuity of the inverse map for the multiplication defined in a complete metric space.

Finally, we mention the Scottish Book, a world-famous collection of open problems formulated by participants of the Lwów Mathematical School during their sessions at the Scottish Café. The current state of problems is summarized in [Ma].

Some problems from the Scottish Book were formulated during the war (September, 1939 - May, 1941). In 1940, Eidelheit contributed the Scottish book. The paper [MMP] contains a solution of one of Eidelheit's problems.

The authors of some of them were mathematicians who came from the Soviet Union: Bogolyubow (183), Alexandroff (187), Sobolev (188), Lusternik (190). The last problem, 193, was formulated by Hugo Steinhaus.

The result reported by M. Vishik on Students scientific conference at the University of Lwów in April, 1941was the solution to the problem from the Scottish Book formulated by E. Szpilrajn. This was a joint result of M. Vishik and V. Lyantse.

The activities of the Lwów School of Mathematics were significantly affected when two decades of relative political stability were replaced by war. This period in the history of the school has not been studied enough. On the basis of several documents and post-war publications, we tried to analyze mathematical life in Lwów during the war. Information about the activities of Lwów mathematicians in this period is also available in [MP, Pr, Tu].

Bibliography

[Au] H. Auerbach, Sur une propriété caractéristique de l'ellipsoïde, Studia Mathematica, 1940, tom 9, nr 1, 17–22.

[Ba] S. Banach, Sur la divergence des séries orthogonales, Studia Mathematica, 1940/9/1, 139–155.

[DSZ] S. Domoradzki, M. Stawiska-Freiedland, M. Zarichnyi, Formation and Activity of the Lwów School of Mathematics, in M. Bečvářová (ed.): The Development of Mathematics Between the World Wars, World Scientific, London – Singapore. 2021, p. 227-285. ISBN 978-1-78634-930-9.

[Du] R. Duda, Pearls from a Lost City: The Lvov School of Mathematics, History of Mathematics, Volume: 40; 2014; 231 pp.

[GP] I. Guran, Ya. Prytula. Józef Schreier "On finite base in topological groups", Mat. Stud. 39. (2013), 3–9.

[MMP] L. Maligranda, V. Mykhaylyuk and A. Plichko, On a problem of Eidelheit from The Scottish Book concerning absolutely continuous functions, J. Math. Anal. Appl. 375 (2011), nr 2, 401–411.

[MP] L. Maligranda, Ja. G. Prytula, Lwowscy uczeni wymienieni w przesluchaniach Banacha z 1944 roku (Lviv scholars mentioned in the hearings of Banach in 1944), Wiad. Mat. 49(1) 2013, 29–66.

[Ma] R.D. Mauldin, The Scottish Book: Mathematics from The Scottish Café, with Selected Problems from The New Scottish Book, Birkhäuser, 2015. -340 pp.

[Pr] Ya. Prytula, Mathematics in Lviv, In: Leopolis Scientifica. V. 2: Exact Sciences in Lviv until the middle of the 20th century, Lviv, 2020, p. 145-234.

[Sm] B. Smith, The Basic Tools of Formal Ontology, In: Nicola Guarino (ed.), Formal Ontology in Information Systems, Amsterdam, Oxford, Tokyo, Washington, DC: IOS Press (Frontiers inArtificial Intelligence and Applications), 1998, 19–28.

[Tu] A. Turowicz, Fragment wspomnien o Stanisławie Mazurze, in: red. S. Fudali, Matematyka przelomu XIX i XX wieku, Szczecin, 1990, p. 69-70.

[Wo] M. Wojdysławski, Sur les rétractes par déformation des coupures de la surface sphérique, Studia Mathematica, 1940, tom 9, nr 1, 166–180.

[Za] M. Zarycki, Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique, Fund. Math. 9 (1927), 3–15.

Zu den ersten Assistenten von Mathematik-Professoren in Deutschland – längs und quer beleuchtet

Renate Tobies, Friedrich-Schiller-Universität Jena

Felix Klein (1849-1925) war zum Sommersemester 1875 einem Ruf an das Polytechnikum in München gefolgt. Hier konnte er erstmals zum Wintersemester 1876/77 einen aus dem (bayerischen) Staatshaushalt bezahlten Assistenten erkämpfen (vgl. TOBIES 2019: 152–55; TOBIES 2021: 174–77). Dies erreichte er auch an seinen weiteren Stationen in Sachsen (Universität Leipzig) und Preußen (Universität Göttingen), jedoch nicht ohne hartnäckiges Bemühen.

Vor ca. vier Jahren entdeckte ich eine Akte im Archiv der Universität Göttingen mit dem Titel „Die Assistenten des Mathematischen Instituts, 1892-1927" [UAG]. Erst dadurch gewann ich die Erkenntnis, dass Klein lange Zeit der einzige Mathematik-Professor an einer deutschen *Universität* war, dem ein bezahlter Assistent gewährt wurde. So erhielt David Hilbert (1862-1943) – den Klein zum Sommersemester 1895 für eine Professur neben sich in Göttingen hatte gewinnen können – erst im Jahre 1904 einen halben Assistenten aus dem Staatshaushalt bezahlt, gemeinsam mit Hermann Minkowski (1864-1909). ([UBG] Cod. Ms. Hilbert 93, Bl. 5; TOBIES 2019: 345; TOBIES 2021: 391)

An polytechnischen Schulen/Technischen Hochschulen waren Assistenten, insbesondere für das Gebiet *Darstellende Geometrie*, früher als an Universitäten gewährt worden. Detaillierte Studien darüber existieren für die TH München (HASHAGEN 1995) und für die TH Dresden (VOSS 2005). Für weitere mathematische Gebiete einen Assistenten zu erhalten, war schwieriger.

Da Felix Klein der erste Mathematikprofessor mit Assistent war, soll hier näher dargelegt werden, warum und mit welchen Argumenten er das Ziel erstrebte. Außerdem wird am Ende des Beitrags gezeigt, was bisher über Assistenten an anderen Universitäten ausgesagt werden kann.

Felix Klein listete die Namen seiner zahlreichen Assistenten auf, als er seine *Gesammelten Mathematischen Abhandlungen* mit Hilfskräften noch selbst edierte (KLEIN 1923, Anhang: *14*). Für die Frage nach dem *warum* lassen sich vor allem zwei Gründe anführen.

Erstens. Klein wünschte einen mathematischen Übungsbetrieb, wozu die Arbeit mit mathematischen Modellen und Instrumenten gehörte. Bereits als 23-Jähriger hatte er in seiner Erlanger Antritts*rede* (7.12.1872) dazu argumentiert und die Situation dieses Übungsbetriebs mit den Praktika naturwissenschaftlicher und technischer Fächer verglichen. Klein hatte als Student den experimentellen Übungsbetrieb kennengelernt, da ihn Julius Plücker (1801-1868) als Assistent bei die Vorlesung Experimentalphysik ausgewählt hatte.

Ein *zweiter* Grund für Kleins Streben nach einem Assistenten muss in seiner kooperativen Arbeitsweise gesehen werden, in welche ihn Plücker eingeführt hatte. Klein brauchte auch später den regelmäßigen Austausch mit anderen, um zu neuen Resultaten zu gelangen. Schöner Ausdruck dafür ist sein Schreiben vom 1. Oktober 1876 an seinen Leipziger Kollegen Adolph Mayer (1839-1908), mit dem er im selben Jahr die Herausgabe der *Mathematischen Annalen* übernommen hatte:

> Es ist ein wahres Unglück: wenn ich so, wie diese Ferien, nur auf mich angewiesen dahinlebe, dann bringe ich gar Nichts Gescheidtes fertig […] Ich habe wissenschaftlichen Verkehr […] nothwendig und sehne mich darum schon seit langer Zeit nach dem Semester. [Zitiert in TOBIES/ROWE 1990: 76]

Klein folgte den Vorbildern Julius Plücker und Alfred Clebsch (1833-1872), die ihn zu regelmäßigem mathematischen Austausch veranlasst hatten. Bei ihren geometrischen Forschungen basierten sie in hohem Maße auf der Arbeit mit mathematischen Modellen. Dieses Veranschaulichen komplizierter Verhältnisse für das Gewinnen neuer Ergebnisse wurde schließlich zu einem Hauptargument, um einen Assistenten zu gewinnen.

Als Klein zum 1. Oktober 1872 erstmals auf ein Ordinariat an der Universität Erlangen berufen worden war, führte er zwar schon mathematische Übungen mit Modellen und Instrumenten durch, beantragte jedoch aufgrund der geringen Studentenzahlen keinen Assistenten. Als aber der Ruf an das Polytechnikum München (zum 1.4.1875, Denomination: analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung, analytische Mechanik) feststand, stellte er noch von Erlangen aus, am 9. Dezember 1874, einen Antrag betr. „Räumlichkeiten für ein neu zu gründendes mathematisches Institut". Er argumentierte mit dem Herstellen von Modellen, um „abstracte geometrische Verhältnisse zu versinnlichen und so unmittelbar eindringender Forschung zugänglich zu machen" und formulierte: „Es wäre ein Assistent anzustellen, der mit der ausreichenden geometrischen Vorbildung die nöthige handwerkliche Geschicklichkeit verbindet." [TOBIES 2019: 152; Tobies 2021: 174]

Die Genehmigung ließ jedoch auf sich warten. Die Mathematik gehörte am Polytechnikum zur Allgemeinen Abteilung, der bereits zwei Assistenten zugeordnet waren, einen für die Professur Darstellende Geometrie und mechanische Technologie sowie einen für die Physik. Klein konnte erst ab Wintersemster 1876/77 einen eigenen Assistenten durchsetzen: sein Student Gottlob Fischer erhielt jedoch zunächst nur ein halbes Jahresgehalt (550 Mark), sodass Klein aus eigener Tasche zuzahlte. Sebastian Finsterwalder (1862-1951) berichtete später, dass es Kleins „Feuergeist, Genialität und Unternehmungslust" bedurft hatte, um weiteres zu erreichen [FINSTERWALDER 1936: 657]. Nachdem sich Klein bei der im September 1877 in München tagenden Jahresversammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte außerordentlich engagiert und dort auch Modelle präsentiert hatte, erhielten er und der gleichzeitig und mit derselben Denomination berufene Alexander Brill (1842-1935) zum WS 1877/78 – das Polytechnikum hieß nun Kgl. Bayerische Technische Hochschule – nicht nur neue Räume, sondern auch je einen eigenen Assistenten (1000 Mark Jahresgehalt). Im neu etablierten Mathematischen Institut hatten sie geschickt zwei Abteilungen gebildet und die Modellsammlung auf beide verteilt.

Beim Ruf nach Leipzig (zum 1. Oktober 1880) musste Klein zunächst darauf verzichten, Institut und Assistent zu fordern. Sein Leipziger Kollege Adolph Mayer (1839-1908) hatte ihn am 7. März 1880 informiert:

> Nun ist leider ein Punkt in Ihrem Briefe, der, wenn Sie darauf bestehen, von vornherein unsere Hoffnung, Sie hierherzubekommen, zerstören wird. Das ist Institut und Assistent. Können Sie sich nicht entschließen, hierauf zu verzichten. So ist nach unsrer aller Ueberzeugung nichts zu machen. [Tobies/Rowe 1990: 118]

Klein blieb nach Annahme des Rufs hartnäckig und erreichte sein Ziel bis zum Beginn des WS 1881/82 (in Klein 1923, Anhang: *14*, steht falsch SS 1881). Eine *Modellsammlung* aufzubauen und zu betreuen sowie das bisher nur an Technischen Hochschulen vorhandene Lehrgebiet *Darstellende Geometrie* einzuführen, waren die Argumente für die Stelle des planmäßigen Assistenten, bezahlt aus dem sächsischen Staatshaushalt. Das war der erste Assistent eines Mathematikers an einer *Universität* in Deutschland [Lorey 1916: 167].

Die Position wurde mit Walther Dyck (1856-1934) besetzt (vgl. auch [Hashagen 2003: 121ff.]), der bereits in München eine Zeitlang Klein assistiert hatte. Als Dyck einen Ruf an die TH München annahm, schrieb Klein am 9. Dezember 1883 nach Dresden, dass der Privatdozent Friedrich Schur (1856-1932) bereit ist, die Assistenz „iterimistisch zu übernehmen, – wogegen das K.[önigliche] Ministerium, wie ich hoffe, keinerlei Einspruch erheben wird." ([STA Dresden] 184A, Bl. 23b)

In Göttingen (Ruf zum 1. April 1886) musste Klein sechs Jahre warten, bevor er einen Assistenten beantragen konnte. Die Modellsammlung unterstand Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), der keinen Assistenten besaß. Als Schwarz' Wechsel nach Berlin feststand, konnte Klein am 29. Februar 1892 Vorschläge zur Neugestaltung des Mathematischen Instituts unterbreiten, dessen Direktorat er übernehmen sollte. Darin lesen wir über die Assistenten-Position:

> Ich würde die Direktion der Modellsammlung allerdings nicht übernehmen können, wenn mir hierfür nicht ein Assistent zur Verfügung gestellt wird, der vielleicht zugleich die jetzt von einem Studenten geleistete Beaufsichtigung des Lesezimmers übernehmen könnte und überhaupt die Anweisung erhalten könnte, mir bei der Ausarbeitung meiner Vorlesungen (für das Lesezimmer) behülflich zu sein. Ich habe seither auf diese Ausarbeitungen, die von wechselnden Zuhörern und zum Theil von mir selbst ausgeführt werden, eine ganz unverhältnismäßige Zeit verwenden müssen, auch habe ich oft den Wunsch gehabt, eine Hülfskraft zu besitzen, welche neu ankommende Zuhörer, insbesondere Ausländer, in der nachgerade großen Zahl der neben einander stehenden Ausarbeitungen zurecht weisen könnte. Trotzdem diese letztere Aufgabe ja mehr mit dem Lesezimmer in Verbindung steht, würde ich doch bitten, den Assistenten bei der Modellsammlung anzustellen, indem ja das Lesezimmer allgemeines Seminarinstitut ist und also im Princip der Generaldirektion des math.phys. Seminars untersteht. [Tobies 2019: 511]

Das preußische Kultusministerium verfügte die Assistentenstelle zum 1. April 1892 mit einer geringfügigen jährlichen Vergütung von 600 Mark. Als Klein im Juli 1892 einen Ruf an die Universität München (Nachfolge Ludwig Seidel (1821-1896)) ablehnte, konnte er 1200 Mark für die Göttinger Assistenz ab 1. April 1893 aushandeln (in Bayern waren ihm dafür 1500 Mark geboten worden). [TOBIES 2019: 337f; 341-45; TOBIES 2021: 380; 385–91]

Die Assistenten-Akte [UAG] enthält handschriftliche Anträge Kleins an das Preußische Kultusministerium zu jedem in Göttingen ausgewählten Kandidaten. Kleins Kooperation mit den ersten Assistenten, Friedrich Schilling (1868-1950), Ernst Ritter (1867-95) und Arnold Sommerfeld (1868-1951) ist in TOBIES 2019 und 2021 beschrieben. Es folgten weitere 18 Assistenten bis zum 30. September 1921, als Klein die Direktion der Modellsammlung an Richard Courant (1888-1972) abgab. Bis dahin hatte Klein auch als Emeritus weiterhin über die Position des dort angestellten Assistenten verfügen können.

Edmund Landau (1877-1938), der während Kleins Sanatoriums-Aufenthalt (1911/12) Mitdirektor der Sammlung und des Lesezimmers geworden war, hatte am 2. Januar 1913 an Klein geschrieben, dass er es für zweckmäßig und erfreulich halte, „dass Sie vorläufig die Leitung der Sammlung und des Lesezimmers mitbehalten“. Landau wünschte Klein „volle Gesundheit“, „damit dann wir fünf, Sie, Hilbert, Runge, *X* und ich gemeinsam mit vollen Kräften an der Aufrechterhaltung der mathematischen Grösse Göttingens arbeiten können.“ [TOBIES 2019: 447; TOBIES 2021: 522]. Mit *X* war Kleins potentieller Nachfolger gemeint: zunächst Constantin Carathéodory (1873-1950), dem bald Erich Hecke (1887-1947) folgte. Beide mussten sich mit Kleins weiterer Mitregentschaft arrangieren und fühlten sich nicht derart für Göttingen verpflichtet wie Klein, Hilbert, Carl Runge (1856-1927), Profesor für angewandte Mathematik seit 1904, und Landau. Carathéodory äußerte sich aber später sehr anerkennend über Kleins Assistenten und bewunderte „die Sicherheit, mit der Klein unter seinen Zuhörern die Auswahl für diesen Vertrauensposten traf“, ihre Begabung erkannte und förderte. [TOBIES 2019: 344; TOBIES 2021: 390]

Klein wählte oft promovierte Personen als Assistenten und begründete im Antrag, wenn er davon abwich. Nach Sommerfeld (Assistent WS 1894/95–SS 1896) wollte sich Klein weiterhin technischen Problemen widmen und entschied sich zum WS 1896/97 für den Absolventen der TH Hannnover Moritz Weber (1871-1951). Dieser hatte dort mit Bestnoten abgeschlossen, sodass Klein ihn *ohne eigene* Prüfung als Assistenten anstellen ließ. Er wurde jedoch durch Webers mangelhafte mathematische Kenntnisse überrascht [TOBIES 2019: 345; TOBIES 2021: 390–91]. Die weiteren Kandidaten wurden intensiver eigener Prüfung unterzogen, indem sie in Kleins Seminaren vortrugen.

Auf Weber folgte Heinrich Liebmann (1874-1935) vom 1.10.1897 bis 30.9.1898, der den Doktortitel an der Universität Jena erworben hatte. Bevor er Assistent wurde, hatte er nicht nur mehrere Vorträge in Klein Seminaren gehalten, sondern auch Kleins Anregung realisiert, Ansätze von Tullio Levi-Cività (1873-1941) fortzusetzen, der die Differentialgleichungen der Kreiselbewegung mit Sophus Lies (1842-1899) Gruppentheorie behandelt hatte. Die Ergebnisse „Classification der Kreiselprobleme nach der Art der zugehörigen Parametergruppe" erschienen in den *Mathematischen Annalen* (50 (1898) 51–67) und flossen auch in Teil 1 des Kreisel-Buches (KLEIN/SOMMERFELD 1897: 161). Im Anschluss empfahl Klein Liebmann auf die Assistentenposition in Leipzig und förderte dessen weitere Karriere.

Kleins Kandidat für 1899/1900, Karl [Carl] Wieghardt (1874-1924), hatte wie Moritz Weber an der TH Hannover abgeschlossen, aber zusätzlich Vorlesungen und Übungen zur Mechanik bei Klein besucht. Somit gewann Klein ein positives Urteil und verzichtete bei Wieghardt auf die Promotion als Vorbedingung für die Assistenz. Klein erklärte im Antrag vom 22. Juni 1899:

> Derselbe ist am 21. Juni 1874 in Bergeborbeck (Rheinland) als Sohn des Fabrikdirectors G. Wieghardt geboren, evangelische Confession, besuchte von Ostern 1880 bis Ostern 1884 die evangelische Volksschule in Bergeborbeck, dann von Ost. 1884 bis Ostern 1893 das Realgymnasium in Essen. Von Ostern 1893 bis Ost. 1895 hat derselbe auf der Borbeck'schen Maschinenfabrik praktisch gearbeitet, ferner zwei Jahre auf der technischen Hochschule Hannover Maschinenbau studiert. Die Zeit von Ostern 1897 bis Herbst 1897 hat derselbe nach schwerer Erkrankung als Reconvalecent in seiner Heimath zugebracht. Seitdem studiert er in Göttingen. C.[arl] W.[ieghardt] ist vollkommen militärfrei.
>
> Vorstehende biographische Angaben erklären von selbst, wesshalb ich unter einer grösseren Zahl von anderen Candidaten, die mir zur Verfügung stehen würden, gerade Hrn. Wieghardt herausgreife. In der That ist mir bei den Vorlesungen über Mechanik, die ich für das nächste Jahr in Aussicht habe, ein Assistent besonders erwünscht, der Kenntnisse und Fähigkeiten nach der praktischen Seite besitzt. Es kommt allerdings hinzu, dass ich Hrn. Wieghardt als ganz besonders zuverlässig erprobt habe.
>
> Unter diesen Umständen bitte ich davon abzusehen, dass Herr Cand. Wieghardt bisher nicht promoviert hat. Ich kann auch nicht in Aussicht stellen, dass er dieses Ziel im Laufe des kommenden Jahres erreicht. Denn die Beschäftigung im Anschluss an meine Vorlesungen soll ihm zuvor unter allgemeinen Gesichtspunkten sehr nützlich sein, ihn auch die Grundlage für spätere selbständige Thätigkeit liefern, wird ihn aber von der Concentration auf ein einzelnes Thema, die für Anfertigung einer mathematischen Dissertation unerlässlich ist, abziehen.
>
> Ganz ergebenst
>
> Der Director der Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle
>
> F. Klein ([UAG] Kur. 7554, Bl. 39-40)

Wieghardt trug am 18. Juli 1900 „Über räumliche Fachwerke, insbesondere bei Kuppeldächern" in Kleins Seminar vor ([Protokolle] Bd. 16: 116–25), woraus sich das Thema für die Dissertation *Über die Statik ebener Fachwerke mit schlaffen Stäben* (1903) bei Klein sowie weitere Kooperationen ergaben.

Aloys Timpe (1882-1959), Kleins Assistent 1905/06, promovierte ebenfalls in Gebiet der Baustatik (*Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen*, 1905). Beide, Wieghardt und Timpe, gehörten zu den Autoren von Band IV (Mechanik) der *Encyklopädie* und erreichten Hochschulkarrieren [vgl. TOBIES 2019: 406f.; TOBIES 2021: 468–71; auch KURRER 2018].

Einige von Kleins Assistenten promovierten bei Hilbert oder bei Ludwig Prandtl (1875-1953), mit denen Klein – wie mit zahlreichen weiteren Kollegen –

gemeinsame Forschungsseminare veranstaltete. Hilbert-Schüler waren Hans von Schaper (Kleins Assistent 1898/99), Georg Hamel (1901/02), Ernst Hellinger (1907-09), Erich Hecke (1910/11).

Karl Hiemenz (1885-1973), der erst später (1910) bei Prandtl den Doktortitel erwarb, sei besonders hervorgehoben. Klein hatte Hiemenz' Qualitäten schon bei dessen Lehramtsexamen erkannt und ihn danach als Assistenten (1.10.1906 bis 30.9.1907) ausgewählt. Als für Hiemenz jedoch nur 900 Mark anstelle der üblichen 1200 Mark Jahresremuneration bewilligt wurden, insistierte Klein und schrieb zugleich generell über seine Auswahlkriterien:

> Ich möchte vorausschicken, dass Hr. Hiemenz bereits am 1. September hier eingetroffen ist und gleich am 2. September mit dem bisherigen Assistenten Dr. [Aloys] Timpe zusammen eine systematische Revision und Neuordnung des Lesezimmers begonnen hat, welche den ganzen September in Anspruch nehmen wird. Es möge dies ein Maasstab sein für die Hingabe an die Amtspflichten, welche ich von Hrn Hiemenz, wie überhaupt meinen Assistenten mit Erfolg in Anspruch nehme.
>
> Hier liegt in der That der springende Punkt. Ich habe promovierte Herren genug zur Auswahl, welche bereit sein würden, das Amt des Assistenten zu übernehmen. Aber ich greife auf denjenigen Candidaten, der den Pflichten des Assistenen am eifrigsten und geschicktesten genügen möchte. Eine mathematische Promotion ist nur mit ausschliesslicher Concentration auf ein einzelnes Thema zu erreichen. Dem steht die Assistentenpflicht (die ich dann auch immer auf kurze Zeit, meistens ein Jahr, beschränke) gegensätzlich gegenüber: <u>sie hindert</u>, sowie jetzt bei unserem Betriebe die Verhältnisse liegen, <u>den Candidaten geradezu, auf die Promotion hinzuarbeiten</u>; sie fördert die Entwickelung seiner allgemeinen Persönlichkeit, aber nicht seine wissenschaftliche Qualification in einer Spezialfrage. Dies habe ich gemeint, wenn ich in meiner Eingabe sagte, dass (im Falle Hiemenz) <u>nach Lage der Verhältnisse</u> in absehbarer Zeit nicht von Promotion die Rede sein würde.
>
> Hierdurch scheint mir die Entscheidung, derzufolge Hr. Hiemenz bis zur Promotion nur als Hülfsassistent angestellt werden soll, die volle Stelle aber sofort nach erfolgter Promotion erhalten soll, von Voraussetzungen auszugehen, die bei […] anderen Instituten aber nicht im vorliegenden Falle zutreffen möchten.
>
> In der That ist auch unter den Assistenten, die ich seit Bewilligung der Stelle im Jahre 1892 beschäftigte, durchweg eine grosse Zahl Nichtpromovierter gewesen und es ist nie die Anstellung derselben als Vollassistenten beanstandet worden. Ich nenne aus den Jahren von 1900 an die Namen [Karl] Wieghardt, [Conrad Heinrich]Müller und [Rudolf] Schimmack (von denen ich gern hinzufüge, dass alle drei über die Assistentenzeit hinaus in erfreulichster Weise weitergearbeitet haben und sich immer mehr anschicken, eine selbständige wissenschaftliche Bedeutung zu gewinnen).
>
> Ich habe denn auch Herrn Hiemenz, der in seine Heimath Hessen-Darmstadt zurückgekehrt war, ohne an dem fehlenden Doctortitel meinerseits Anstand zu nehmen, durch das Anerbieten der Assistentenstelle schlechtweg hierhergezogen und würde ihm gegenüber in einer prekären Lage sein, wenn ihm die Bedingungen, die ich ihm in dieser Hinsicht in Aussicht stellte, nicht gewährt werden könnten. Ich würde mich auch, wenn ich dies nicht erreichen könnte, hinsichtlich der Auswahl aller zukünftigen Assistenten in einer dem sachlichen Interesse nicht entsprechenden Weise beengt fühlen.
>
> Hiernach bitte ich Ew. Hochwohlgeboren, die Verfügung des Rescriptes Nr. 3698 dahin modifizieren zu wollen, dass Hr. Hiemenz als Assistent schlechtweg, mit der vollen Jahresrenumeration vom 1200 M, vom 1. Okt. beginnend angestellt wird.
>
> Ganz ergebenst F. Klein [UAG, Bl. 93-94]

Das Ministerium genehmigte Kleins Antrag [UAG, Bl. 97].

Im WS 1907/08 beteiligte sich Hiemenz auch am Seminar *Hydrodynamik*, das Klein unter Mitwirkung von Prandtl, Runge und dem Geophysiker Emil Wiechert (1861-1928) leitete. Hiemenz sprach am 4.12.1907 „Über Wirbelbewegung“ [Protokolle, Bd. 27: 18-24] und inspirierte – basierend auf Kleins Impulsen – den ebenfalls teilnehmenden Theodore von Kármán (1881-1963) zu seiner berühmten Theorie der „Kármánschen Wirbelstraße“. Michael ECKERT (2019: 53) betonte gleichfalls diesen Einfluss.

Die von Klein im obigen Zitat hervorgehobenen Assistenten Conrad Heinrich Müller (1878-1953) und Rudolf Schimmack (1881-1912) hatte Klein nicht nur zu ihren Dissertationen angeregt. Er führte beide auch zur Habilitation mit neuartigen Denominationen. Müller erhielt in Göttingen erstmals die venia legendi für „Mathematik, namentlich Geschichte der Mathematik“ (28.10.1908); Schimmack für „Didaktik der mathematischen Wissenschaften“ [TOBIES 2019: 412; 434; TOBIES 2021: 479; 504].

Aus der Göttinger Assistenten-Akte geht hervor, dass Klein erst spät erfuhr, dass die ihm zugeordnete Assistentenstelle an seine Person gebunden und nicht „etatmäßig“ war. Im Interesse des Instituts schrieb Klein am 5. Mai 1915 an den Universitätskurator Geh. Ober-Reg. Rat Dr. Ernst Osterrath (1851-1925):

> Der Umstand, dass ich seit zwei Jahren von der Verpflichtung zum Abhalten von Vorlesungen entbunden bin, hat in den hier in Betracht kommenden Richtungen keine wesentliche Veränderung herbeigeführt. Dass der Assistent, der mir 1892 bewilligt wurde, als ich einen glänzenden Ruf nach München zu Gunsten von Göttingen ablehnte, keine etatsmässige Stellung hat, habe ich, wie Ew Hochwohlgeboren bekannt, erst letzthin erfahren. Ich kann nicht umhin, jetzt anlässlich des Schreibens 1472 ausdrücklich den Antrag zu stellen, der Assistentenposten möge möglichst bald in einen etatsmässigen verwandelt werden. Es ist zu wichtig, dass die hiesigen mathematischen Unterrichtseinrichtungen vor jeder möglichen Schädigung bewahrt bleiben. Ist erst wieder Frieden, so wird wahrscheinlich ein weiterer Ausbau dieser Einrichtungen unabweisbar sein.
>
> Der Direktor der Sammlungen mathematischer Instrumente und Modelle Klein

Als Richard Courant als dritter Nachfolger auf Kleins Lehrstuhl erstmals einen Antrag für eine Assistentenstelle formulierte, sprach er von *außerplan*mäßiger Assistenz. Hellmuth Kneser (1898-1973) erhielt zum 1. Oktober 1921 als Erster diese Stelle. Kleins letzter offizielle Assistent Hermann Vermeil (1889-1959), von 1.10.1919 bis 30.9.1921, wurde gemäß Courants Antrag weiterhin als unbesoldeter Volontärassistent am Mathematischen Institut geführt ([UAG], Bl. 216]. Vermeil arbeitete an der Herausgabe von Kleins *Gesammelten Mathematischen Abhandlungen* (1921-23) mit [TOBIES 2019: 457; TOBIES 2021: 535–36].

Der eingangs erwähnte erste Assistent von Hilbert und Minkowski war Ernst Hellinger (1883-1950), 1904 bis 1907, wobei er anfangs 600 M und nie mehr als 900 M erhielt; als Assistent von Felix Klein bekam Hellinger (ab WS 1907/08 drei Semester lang) jedoch 1200 M.

Für *angewandte Mathematik* musste in Göttingen ein aus dem Staatshaushalt bezahlter Assistent auch erst „erkämpft“ werden. Kleins Doktorschüler und erster Assistent Friedrich Schilling, der 1899 das Extraordinariat für angewandte Mathematik übernahm, beantragte schließlich am 27. März 1902 300 Mark (150 M pro Semester) für einen „Hilfsassistenten“ für die „geometrischen Vorlesungen und die graphischen Übungen“, was gewährt wurde. [UAG, Bl. 52, 61, 69]. Schilling wechselte 1904 an die TH Danzig. Sein Nachfolger in Göttingen Carl Runge erhielt das deutschlandweit erste Ordinariat für angewandte Mathematik, aber auch nur einen Hilfsassistenten (300 Mark), gemäß Antrag vom 22. Februar 1906 [UAG, Bl. 80]. Die Zahl der Praktikanten in seinen Übungen erhöhte sich stetig: 87 im WS 1908/09; 108 im SS 1909; 115 im SS 1910. (Das WS 1909/10 verbrachte Runge als Gastprofessor in New York.) Somit beantragte er am 5. August 1910 eine volle Assistentenstelle beim preußischen Kultusministerium. Das Ministerium gab kund, die Assistentenstelle im nächsten Staatshaushalt berücksichtigen zu wollen. Da dies nicht sofort geschah, beantragte Runge erneut am 1. Januar 1911 und argumentierte, „dass an keiner technischen Hochschule der Unterricht in der darstellenden Geometrie ohne vollen Assistenten geleitet wird“ und dass an einer TH bei derartiger Teilnehmerzahl (bei Runge: 85 im WS 1910/11; 98 im SS 1911) mehrere Assistenten angestellt würden. Zugleich betonte er, dass mathematische Apparate verwendet werden und für photographische Aufnahmen [Photogrammetrie] die Hilfe eines erfahrenen Assistenten notwendig sei [UAG, Bl. 125, 131–39]. Die offizielle Genehmigung fehlte am 31. März 1911 noch immer, sodass Runge für seinen damaligen Hilfsassistenten Dr. Horst von Sanden (1883-1965) wenigstens 600 Mark erbat, was bewilligt wurde. Das Ministerium informierte schließlich am 24. November 1911, dass im nächsten Staatshaushaltsetat 1500 Mark für einen Assistenten am Göttinger Institut für angewandte Mathematik eingestellt werden, was 1912 zugeteilt wurde. Die Position besetzte lange Zeit von Sanden; erst ab 1.4.1919 folgten neue Kandidaten. [UAG, Bl. 144; 151–53]

Dieses langwierige Bemühen um den Assistenten für angewandte Mathematik in Göttingen ist in Anbetracht des „Kampfes“ von Richard von Mises (1883-1953) um Assistentenstellen für sein „Mathematisches Praktikum“ an der Universität Berlin in den 1920er Jahren beachtenswert [SIEGMUND-SCHULTZE 2021: 203–208]. Von Mises konnte 1922 Hilda Geiringer (1893-1973) als aus dem Staatshaushalt bezahlte Assistentin anstellen lassen [SIEGMUND-SCHULTZE 2021]. Darüberhinaus geht aus der Vita von Günther Schulz (1903-1962) hervor, dass er 1928 ein zweiter Assistent v. Mises’ wurde; Schulz blieb Assistent am Institut für angewandte Mathematik der Universität Berlin bis zu seinem Wechsel 1938 an die TH Berlin [TOBIES 2006: 305].

Die Entwicklung der Situation an den Universitäten ist bisher nicht systematisch untersucht worden. Außer Leipzig und Göttingen, wofür die Anfänge hier betrachtet wurden, kamen zunehmend weitere Universitäten zu mathematischen Assistenten. Das lässt sich bisher nur aus einzelnen Biographien oder Korrespondenzen erschließen (so empfahl Klein z.B. ihm bekannte jüngere Mathematiker auf entsprechende Positionen in Erlangen oder in Bonn). Aus (TOBIES 2006) sind einige Assistenten erkennbar, Personen, die von WS 1908/09 bis WS 1944/45 an deutschen Universitäten und THs promovierten. Davon werden hier diejenigen Personen mitgeteilt, die vor 1920 Assistenten-Positionen bekleideten (außer U Göttingen und den THs, wo es zahlreiche gab):

Hermann Wäsche (*1889), U Halle 1910-11
Rudolf Ackermann (*1889), U Halle, Assistent 1913-14,
Lothar Koschmieder (1890-1974), U Breslau 1913-14 (bei A. Kneser),
Wolfgang Sternberg (1887-1953), U Breslau 1915-17 (bei A. Kneser),
Johannes Teichmann (*1889), U Breslau 1917-19 (bei A. Kneser),
Carl Ludwig Siegel (1896-1981), U Berlin 1917-18 (bei E. Schmidt),
Max Draeger (1895-1974), U Jena 1918-19 (bei R. Haußner),
Erich Schönhardt (1891-1979), U Tübingen 1919-27,
Otto Volk (1892-1989) U München, ab SS 1919,
Jacob Nielsen (1890-1959), U Hamburg 1919 (zu Hamburg vgl. auch ODEFEY 2022).

Es sei hervorgehoben, dass neben der erwähnten Hilda Geiringer (1922 U Berlin bei R. von Mises) auch weitere Frauen bezahlte Assistentin wurden.

August Gutzmer (1860-1924) in Halle wählte seine Doktorschülerinnen dafür: Charlotte Platen (1894-1987) von 1917-19, Margarete Freund (verh. Dammann) (1896-1971) von 1920-22; Elisabeth Kumm (*1892) von 1922-23.

An der Universität Freiburg wurde Gertraude Siehl (verh. Osann, verh. Heffter) (1895-1978) ab Herbst 1920 Assistentin am Mathematischen Institut.

An der TH Dresden gab es einen gemeinsamen Assistenten für die Lehrstühle Reine und Angewandte Mathematik; Gerhard Kowalewski (1876-1950), Professor für Reine Mathematik, erreichte 1923, dass ihm seine Doktorandin Gertrud Wiegandt (1898-1983) als eigene Assistentin zugeteilt wurde; ihr folgte 1926-28 seine Doktorschülerin Elisabeth Junge (1899-1983) [VOSS 2005, 2008].

An der Universität Jena konnte Max Winkelmann (1879-1946) seine Doktorschülerin Dorothea Starke (1902-1943) zum 21. April 1928 als Assistentin an seinem Institut für angewandte Mathematik anstellen. Sie hatte zuvor das Doktorexamen mit *summa cum laude* absolviert; ihre Stelle wurde aus Mitteln der Carl Zeiss-Stiftung finanziert [BISCHOF 2014: 112].

Reinhard SIEGMUND-SCHULTZE (2001: 123; 158; 161) erkannte, dass die Position des mathematischen Assistenten in der Schweiz in den 1920er Jahren nicht existierte und in Paris erst seit Ende der 1920er Jahre durch die Rockefeller-Stiftung geschaffen wurde. Weitere Analysen sind wünschenswert.

Bibliographie

[StA Dresden] Sächsisches Staatsarchiv Dresden, Ministerium für Volksbildung.
[UAG] Universitätsarchiv Göttingen. Kur. 7554 (Assistenten des Math. Instituts, 1892-1927).
[UBG] Handschriftenabt. der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliohek Göttingen.

BISCHOF, Thomas (2014): *Angewandte Mathematik und Frauenstudium in Thüringen*. Jena: Garamond.

ECKERT, Michael (2019): *Strömungsmechanik zwischen Mathematik und Ingenieurwissenschaft. Felix Kleins Hydrodynamikseminar 1907-08*. Hamburg: University Press.

FINSTERWALDER, Sebastian (1936): „Alexander v. Brill. Ein Lebensbild“. *Math. Ann*. 112: 653–663.

HASHAGEN, Ulf (1995): „Die Mathematik und ihre Assistenten an der TH München (1868-1918)“. In: Behara/Fritsch//Lintz (Hg.), *Symposia Gaussiana*. Berlin: de Gruyter & Co., 135–146.

— (2003): *Walther von Dyck (1856-1934). Mathematik, Technik und Wissenschaftsorganisation an der TH München*. Stuttgart: Steiner.

KLEIN, Felix (1921/1922/1923): *Gesammelte mathematische Abhandlungen* [GMA I, II, III]. Berlin: Julius Springer.

KLEIN, Felix; SOMMERFELD, Arnold (1897): *Über die Theorie des Kreisels.* H. I. Leipzig: B. G. Teubner.

KURRER, Karl-Eugen (2018): *The History of the Theory of Structures*. Berlin: Ernst & Sohn.

LIEBMANN, Heinrich (1914): „Berührungstransformationen“ und „Geometrische Theorie der Differentialgleichungen“. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Leipzig: B.G. Teubner, Bd. 3.3, 441–502, 503–539.

LOREY, Wilhelm (1916): *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts* (Abhandlungen über den mathematischen Unterricht, veranlasst durch die IMUK, hrsg. v. F. Klein, Bd. 3, H. 9. Leipzig/Berlin: B.G. Teubner.

ODEFEY, Alexander (2022): *Emil Artin – ein musischer Mathematiker*. Göttingen: Wallstein.

[PROTOKOLLE] Protokolle der Seminare Felix Kleins. http://xwww.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/

SIEGMUND-SCHULTZE, Reinhard (2001): *Rockefeller and the Internationalization of Mathematics between the Two World Wars: Documents and Studies for the Social History of Mathematics in the 20th Century*. Basel, Boston and Berlin: Birkhäuser.

— (2021): “The First Mathematically Serious German School of Applied Mathematics”? In Laurent Mazliak/ Rossana Tazzioli, eds., *Mathematical Communities in the Reconstruction After the Great War* 1918 – 1928. Trajectories and Institutions (Trends in the History of Science). Cham: Birkhäuser/Springer Nature, 191–225.

TOBIES, Renate (2006): *Biographisches Lexikon in Mathematik promovierter Personen*, WS 1907/08 bis WS 1944/45 (Algorismus, Studien zur Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften, 58). Augsburg: Dr. Erwin Rauner Verlag.

— (2019): *Felix Klein. Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*. Berlin: SpringerSpektrum.

— (2005): *Felix Klein. Visions for Mathematics, Applications, and Education* (Vita Mathematica, 20). Cham: Birkhäuser/Springer Nature Switzerland.

— ; ROWE, David (1990): *Korrespondenz Felix Klein – Adolph Mayer. Auswahl aus den Jahren 1871 bis 1907* (Teubner-Archiv zur Mathematik, 14). Leipzig: B.G. Teubner.

VOSS, Waltraud (2005): *„... eine Hochschule (auch) für Mathematiker ...“* (Algorismus, Studien zur Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften, 51). Augsburg: Dr. Erwin Rauner Verlag.

— (2008): „Die Schwestern Johanna und Gertrud Wiegandt promovieren in Mathematik. Einflußfaktoren auf ihre Karrieren“. In: R. Tobies (Hg.), *„Aller Männerkultur zum Trotz“. Frauen in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*. Frankfurt a.M./ New York: Campus, 125–148.

Internationale Symposien und Kongressveranstaltungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte
XV. ÖSTERREICHISCHES SYMPOSION ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK
Thema: »Längs- und Querschnitte« - »Vertical and horizontal cross sections«
in Miesenbach, Niederösterreich, von Sonntag, dem 17. Mai bis Samstag, dem 23. Mai 2020
http://www.wissenschaftsgeschichte.ac.at/

Running with Nonlinear Dynamics

The memory of scientist
Hans Troger (March 11, 1943–February 22, 2010),
Full member of the Austrian Academy of Sciences and Professor of the Technical University of Vienna

Katica R. (Stevanović) Hedrih[1,2]

[1] Mathematical Institute of Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade, Serbia
e-mail: katicah@mi.sanu.ac.rs,khedrih@sbb.rs
[2] Faculty of Mechanical Engineering, The University of Niš, Niš, Serbia

Abstract: It's been half a century since I've been running around with Theoretical and Applied Mechanics, as well as Non-linear Dynamics. I received my guidance from the wonderful scientists of my professors, Danilo Rašković and academician of Yu.A. Mitropolski. In this commitment to Nonlinear Dynamics, I was a “marathon runner”, targeting more than half a century on the course, meeting many scientists with more or less significant scientific legacies. They left us numerous scientific articles, monographs, as well as memories of the lectures and presentation releases they gave. Also, more or less numbers of participants, but subjectively selected creators in the field of Nonlinear Dynamics, were or are still organizers of exceptionally good scientific gatherings at which they gathered. It depends on the world reputation and architecture of the city, or the state and region, even its political reputation and the situation in which the scientific gatherings are organized. The impressive symposia and congresses of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM), EurMeh Sociery, as well as the ICNO Conferences of the states of the former Eastern Bloc, or the Conference Series on Nonlinear Mechanics in Shanghai, China, should be noted. Also, must to listed following important Congressed: ICTAM Haifa 1993, Warsaw 2004, Adelaide 2008, Beijing 2012, Montreal 2016, World Congress of Nonlinear Analysts (IFNA WCNA) Orlando 2004 in America, et al.

The last of these, of course, are NODYCON 2019 in Rome (400 participants) organized by W. Lacaebinara, and the All-Russian Congress TAM UFA 2019 (1000 participants) in the Russian Federation.

The series of symposiums of Non-linear Mechanics, Non-linear Sciences and Nonlinear Dynamics held in Serbia and Yugoslavia, starting at 1984m, certainly lag behind the number of participants, but not by the scientific results presented there.

Running with Nonlinear Dynamics, I met and now known many outstanding non-linear creators, researchers and felt honored, not only to know them, but also because they showed my attention as well as respect for my scientific results to TAM and Nonlinear Dynamics, and if I come from Yugoslavia is still today a small state of Serbia, which has long been a villa under groundless aggression, bombing and blockades. I ran to "catch up", the annexes steadily walked and innovated and contributed their scientific results to Science Nonlinear Dynamics, to which we were all devoted and loving, and our meetings with

colleagues inspired us to come up with new results. In this “marathon” course for more than half a century, I would single out the encounters with: V. Matrosovв, B. Lashmikantham, G. Reg, S.T. Ariaratnam, V. Rumyantcev, R. Hetnarsky, Hans Trager, V. Beletski, I. Blekhman, Ali Nayfeh, P. Harlamov, Jam Awrejcewicz, Tenreiro Machado, O.A. Goroshko and others. Of the younger generation, I am certainly honored to have met the remarkable Walter Lacarbonara, a NODUCON 2019 organizer.

I dedicate this historical paper to Hans Troger (March 11, 1943–February 22, 2010), a scientist, outstanding persson and academician at the Austrian Academy of Sciences, and on the occasion of the decade since his untimely departure, a vicious illness that interrupted his considerable work and research in the field of nonlinear dynamics, and in particular, Nonlinear stability and bifurcation theory, as well as in Heteroclinic cycles in the three-dimensional postbifurcation motion of O (2) -symmetric fluid conveying tubes together with colleague Alois Steindl, and Dynamics of Tethered Space Systems co-authored with Vladimir Beletski between other.

Keywords: Nonlinear Dynamics, Scientific meetings, History, Hans Troger, Svientific legates, Nonlinear stability, Bifurcation, Tethered Space Systems

1. Two photos of participants of two IUTAM Symposiums and my first encounter with Hans Troger

Figures 1 and 2 show the participants of two IUTAM Symposiums. These are scientific symposia:

The first is the IUTAM Symposium “*Non-linearity and Chaos in Engineering Dynamics*” UCL 1993 London UK and it was organized by J.M.T. Thompson, S.R. Bishop. (see Figure 1).

Figure 1. Participants of IUTAM Symposium Non-linearity and Chaos in Engineering dynamics UCL 1993 London UK

The second is the IUTAM Symposium “*Chaotic Dynamics and Control of Systems and Processes in Mechanics*”, held in Rome 2003, at SAPIENZA University of Rome. The organizers of this symposium are Professors G. Rega, F. Vestroni. (see Figure 2).

For example, in these pictures are the professors and imprtant scientists: G. Pera, A. Kiunadus, S.T. Ariaratnam, Filip Holms, Francis Moon, Vladimir Beletski, Hans Troger, Dick von Campen and others.

Here, I personally single out Professor Hans Trogirer, whom I have met many times later, and had the opportunity to give a lecture at his Seminar at the Technical University of Vienna. This year marks the decade since his untimely death. I also dedicate this work to the memory of the outstanding scientist, academician of the Austrian Academy of Sciences and professor at the Technical University of Vienna, and especially one of the permanent participants in numerous scientific meetings in Nonlinear Dynamics.

Figure 2. Participants of IUTAM Symposium Chaotic Dynamics and Control of Systems and Processes in Mechanics Rome 2003 SAPIENZA University of Rome

2. Basic bibliographical data about scientist Hans Troger (March 11, 1943-February 22, 2010).

Hans Troger was born on March 11, 1943, as youngest of three children in Villach, Carinthia. His father died in Second World War and his mother had to take care of the whole family. As a war widow, his mother had to care forthe living of the family of four. Troger explains that his sister participated in the education of her significantly younger brother Hans. [2].

Hans visited the grammar school in Villach and studied Mechanical Engineering at Vienna University of Technology. In 1966, he graduated from Vienna University of Technology to Dipl.-Ing. of Mechanical Engineering.

He also defended his doctoral dissertation in Technical Sciences at Vienna University of Technology. The title of his dissertation reads “*Investigation of thedriving stability of a semitrailer unit”*. Graduation to Dr. of Technical Sciences, followed in 1970.

From 1970 to 1972, Hans Troger was an Assistant at the Institute of Rational Mechanics in the Department of Civil Engineering of Vienna University of Technology. In 1979 he became Professor at the Institute for Mechanics following Professor Heinz Parkus.

In the Reference [21] cited as basic source of the Biography of prominent scientist Hans Troger we learn:

“At that time, the late Prof. Gerhard Heinrich, Full Member of the Austrian Academy of Sciences, was Head of this Institute. From 1972–1977, Hans Troger worked as an Assistant at the Institute for Mechanics in the Department of Mechanical Engineering, the Head of which then was the late Prof. Heinz Parkus, also a Full Member of theAustrian Academy of Sciences. Hans Troger spent the academic year 1975/76 as a Max Kade Fellow, selected by the Austrian Academy of Sciences, at the University of California at Berkeley. In 1977, he obtained the Venia Docend for Mechanics. As of October 1, 1979, he was appointed to Full Professor of Mechanics at the Institute for Mechanics in the Department of Mechanical Engineering of Vienna University of Technology, succeeding Prof. Parkus”.

Hans Troger held guest professorships at the Universities of Metz (1988), Pavia (1994), and Rome (1995), the Technical University of Hamburg-Harburg (1997), the University of Illinois at Urbana Champaign (1998), and at the Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro (PUC-RIO) (1999).

These numerous and prestigious guest proffessorships document the international character of Prof. Troger’s scientific activities.

Hans Troger was an internationally highly distinguished scientist in the World wide area of Mechanics of Solids with large Scientific communications. Since 1998, he servedas Chairman of the Austrian National Committee for Theoretical and Applied Mechanics, a delegation of the Austrian Academy of Sciences in the frame of the International Council for Science (ICSU).

In recognition of the numerous important achievements, Hans Troger received an honorary doctorate from the Budapest Uni-versity of Technology and Economics, at the comparatively young age of 47 years. In 1993.

Hans Troger was electedto Corresponding Member of the Austrian Academy of Sciences and in 2002 to Full Member.

For his excellent contributions to the nonlinear stability theory and bifurcation theory, he received, in the year 2000, the Erwin-Schrödinger Prize of the Austrian Academy of Sciences.

He was also a longstanding co-editor of ActaMechanica (1980–2005) and a member of the Editorial Board of several leading international journals in the scientific area of Mechanics of Solids.

The heavy illness, to which Hans Troger finally fell victim, had broken out approximately 20 years ago.

Inaddition to it, in the last years of his life, his health was progressively impaired. In spite of a nearly 6-month stay in hospital, which he terminated a few weeks before his death, his will to live remained unbroken. Itwas Ash Wednesday 2010, five days before his passing away, when Alois Stendtl visited Hans Troger for the last time.

In the Reference [21] we read:

"Albeit physically already very weakened, he showed great interest in science and research, in general, andin scientific activities in his narrower scientific area, in particular. He was indeed a scientist with heart andsoul!Hans Troger was a dedicated academic teacher and researcher at Vienna University of Technology and avery active member of the Austrian Academy of Sciences. He regularly attended meetings of the Academy and participated in several committee and board meetings of Academy Institutes. By Hans Troger's death, his sister, who is living in Germany, now has also lost her younger brother, to whose sickbed she hurried as often as possible and at whose death bed she stayed. Vienna University of Tech-nology and the Austrian Academy of Sciences, however, have lost not only an outstanding representative of the worldwide highly respected Austrian School of Mechanics, but also a wonderful, modest person who always subordinated his personal state of mind to the cause and never created fuss about himself."

Hans Troger, Professor of Mechanics at the Faculty of Mechanical and Industrial Engineering, passed awayon February 22, 2010, after a long and painful illness, shortly before his 67th birthday.

3. Scientific Legate, monographs, references of scientist Hans Troger and scientific-ships with scientist around the World

The research activities of Hans Troger are characterized by a strong reference to the scientific fundamentals of his scientific field and the brilliant use of the current mathematical tools required for the treatment of demandingmechanical problems.

He was particularly concerned with the application of bifurcation theory, with chaos theory and with methodsof dimension reductions in engineering.

An excellent overview of applications of the local bifurcation theoryis contained in the book "*Nonlinear Stability and Bifurcation Theory*", jointly authored by Hans Troger and his Associate Alois Steindl, published by Springer-Wien, in 1991.

Essentially, three classes of nonlinear stability problems are treated in this book. The first one consists of problems of vehicle dynamics (road vehicles, railvehicles, and ships), robotics, and of vibrations of liquid cross-flow hoses. The second class is concernedwith the postbuckling behavior of statically loaded thin-walled structures. The third one is with applica-tions of dimension reduction of dynamic as well as static systems by means of an extension of the classical Galerkin method.

Such dimensional reductions represent an important area for applications in mechanicalengineering. Nowdays is very actual research in reduction pg number of coordinates in modeling and abstraction real engineering system dynamic to the model with minimal number of degrees of freedoms.

In the Reference [3] cited as basic source of the evaluation of scientific legate of prominent scientist Hans Troger, as well as from the content of the corresponding published references [3-9], we learn:

"Since the beginning of the nineties of the last century, Hans Troger was occupied intensely with the simula-tion of the dynamics of tethered satellites. In the frame of several research projects supported by the European Space Agency (ESA), his group developed a computer program for numerical simulation of the dynamic behavior of such satellites. They consist of two or more satellites connected by thin cables, revolving around a planet. In addition to the development of the simulation program, the problem of the stability of tethered satellites was treated with the so-called energy–momentum method. Not only does this problem represent a great theoretical challenge, but it is also of great practical importance".

It is normally to point out that it is large visible that Hans Troger's equally broad and deep knowledge about tethered satellites was of benefit to the book "*Dynamics of Tethered Space Systems*", co-authored by him and published by CRC Press, that appearedshortly after his death.

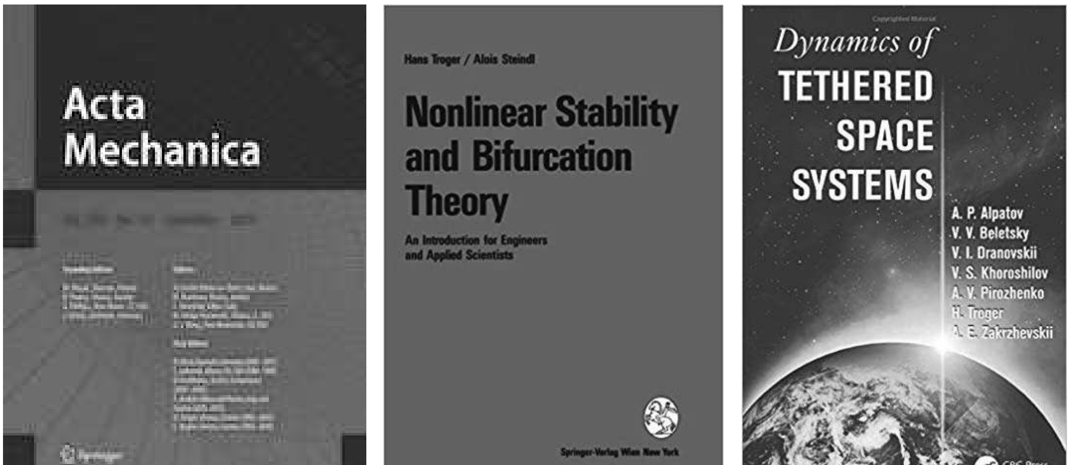


Figure 3. The cover of the Journal of the Acta of Mechanica [23] and the Cover of Monograph [24] and the Book [25] by Academician Hans Troger

On the internet, a decade after the early death of Hans Troger, a large number of articles and multi-volume monographs and books [23-30] that he has edited with other scholars can be found.

Here we point to his editorial work on editing the leading scientific journal of the Acta of Mechanica in the Springer edition, which is referenced by the Web of Sciences (red cover in picture 3).

We pay special attention to the monograph [24] in the co-authorship of Hans Troger and Steindl A. under the heading (red cover in picture 13):

Hans Troger and Steindl A. , Nonlinear stability and bifurcation theory: an introduction for engineers and applied scientists September 1991, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, ISBN:978-3-211-82292-0
https://www.amazon.in/Books-Hans-Troger/s?rh=n%3A976389031%2Cp_27%3AHans+Troger

Prof. Hans Troger's latest scientific book [25] is co-authored with a group of scientists. Among them we pay attention to Vladimir Beletsky. The title of the book is:
Hans Troger (Author), A.P. Alpatov (Author), V.V. Beletsky (Author), V.I. Dranovskii (Author), V.S. Khoroshilov (Author), A.V. Pirozhenko (Author), A.E. Zakrzhevskii (Author), Dynamics of Tethered Space Systems (Advances in Engineering Series) Paperback – Import, 5 May 2010

Using abstract of book presentation on the Springer publisher, we select the following text:

"During many of the earliest American and Russian space missions, experiments were performed using cables to connect people and objects to spacecraft in orbit. These attempts generated considerable information about the formation of tethered systems and basic problems with tether orientation and gravity-gradient stabilization. During the 1970s, interest in tethered space systems (TSS) came to the forefront with an international project that involved the hanging of a probe from a low-orbit satellite to collect data on the Earth and its atmosphere. Since that time, TSS has grown to become its own area of research".

Group of leading scientists: Hans Troger (Author), A.P. Alpatov (Author), V.V. Beletsky (Author), V.I. Dranovskii (Author), V.S. Khoroshilov (Author), A.V. Pirozhenko (Author), A.E. Zakrzhevskii (Author) published important scientific book [25] as collection of their research results under the title **Dynamics of Tethered Space Systems.** The book brings together the work and scientific legates of previous listed seven leading researchers working at the forefront of Tethered Space Systems. Together, they provide a brief yet thorough introduction to Tethered Space Systems. Then, combining theory with experimental approaches important to industry, they cover the dynamics of the mechanical, physical, and mathematical modeling approaches involved in tethered satellite deployment.

These seven scientists present several models from the literature, focusing on the simplest, but most important system: two satellites in orbit around the Earth. Part containing discussion expands possibility to cover and application of knowledge to more complex examples.

Content of this book shown multidisciplinary results and that Hans Troger is a leading scientist with nt only strong personality, but with personality to work with other leading scientists, and between them Vladimir Beletski, for obtaining in results complex multidisciplinary higher scientific level fundamental monograph valuable for next generation of researchers ub area of Tethered Space Systems and complex systems.

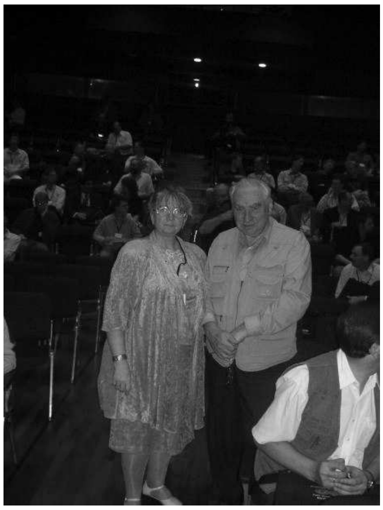


Figure 4. a * Two academicians Vladimir Beletski and Hans Troger (picture left) engrossed in scientific discussion and **b *** Academician Vladimir Beletski and Katica (Stevanović) Hedrich at ENOC 2006 Euidhoven (picture right)

This fundamental Book contain a number of important topics, such as energy production resulting from interaction between the system and Earth's magnetic field and momentum transfer in relation to satellites, microgravity laboratories, energy dissipation. The text of book includes theoretical models and experimental methods, and a wealth of essential equations and detailed analyses of forces acting on tethered objects in motion.

In Figure 4.a *, two prominent academics Vladimir Belezski and Hans Troger are engrossed in scientific discussions, and the topics are not lacking. During many of the earliest American and Russian space missions, experiments were conducted using cables to connect humans and objects to orbiting spacecraft. This is one of the topics to which Hans Troger devoted much of his research. Vladimir Beletski (May 2, 1930 - July 21, 2017) was a top scholar in the field general theory of the attitude of motion of natural and artificial celestial bodies under the influence of various disturbs. Troger and Beletsky had a common interest in studying spacecraft.

In this jubilee 2020 year, 90 years have passed since the birth of Vladimir Beletsky (May 2, 1930 - July 21, 2017) and a decade since the untimely death of Hans Trogirer (March 11, 1943-February 22, 2010). Beletsky published more than 200 scientific papers and 11 monographs. His book "Essays on the Motion of Celestial Bodies", written in unusual way when mathematical fragments are combined with publicistic comments, was translated into many languages. Asteroid 14790 Beletskij was named after V. Beletsky in 2001.

4. Memories of the personality of fellow professor and academician Hans Troger

Professor Giuseppe Rega [1], who was also a close friend of Professor Hans Troger, remembers:

“ I met Hans Troger in the second half of the 80s at CISM in Udine and then at an IUTAM Symposium in Stuttgart. I start appreciating his great knowledge of mechanics and nonlinear dynamics, along with his equally important personal qualities, which also include a remarkably reserved and respectful attitude. We were good friends for two decades, with many occasions to pleasantly meet each other and discuss on both research and general issues, not only in scientific events but also during my visits in Vienna and his visits in L’Aquila, Rome and my sea-side home on the Adriatic sea. His premature death in 2010 was a major loss for the community of nonlinear dynamics. I remind him with respect and great regret“.

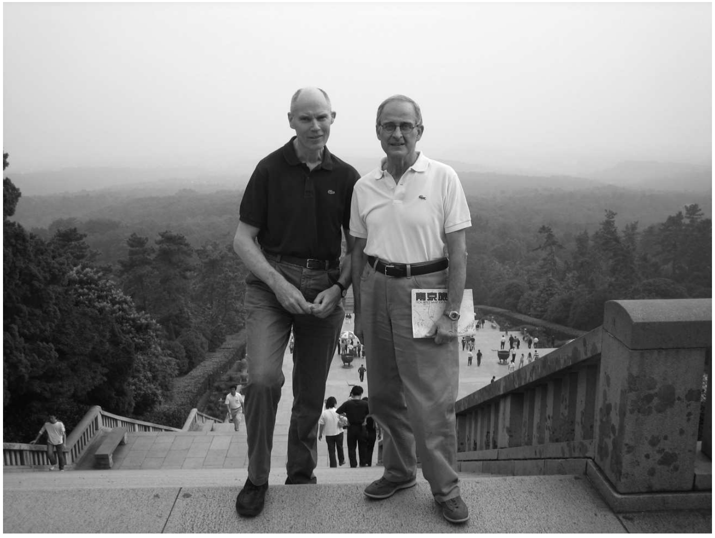


Figure 5. Professors Hans Troger and Giuseppe Rega, scientists stepping with Nonlinear Dynamics gave her significant nominal dynamics legacies

Professor Alois Steindl of the Technical University of Vienna very warmly describes the knowledge of Hans Troger's personality:

“Hans Troger was very much interested in Natural Sciences and all new developments in Mathematics. When Bifurcation Theory and Catastrophe Theory flourished, he organized seminars at the Institute together with colleagues from mathematics and physics, to learn the new ideas and methods and to apply these ideas to various mechanical problems. He felt committed to learn the proper mathematical vocabulary and formalism and translate it into the engineers’ language so that they can understand and apply successfully to their own problems. Whenever he got aware of some new mathematical theory, he was looking for a corresponding engineering problem, where this theory could be applied. As Michael Païdoussis called it, he was intensively interested in “curiosity driven research”. When our group investigated the stability of a periodically driven robot arm, he was fond to find all possible types of stability loss and cases of emerging dynamics.

The different topics in this special issue also reflect his wide range of interests. Hans Troger combined a rigor mathematical treatment of bifurcation problems and case studies in different areas of engineering in the book “Nonlinear Stability and Bifurcation

Theory" (Springer-Verlag Wien, 1991). For his excellent research in this area the Austrian Academy of Science awarded him the Erwin Schrödinger prize in the year 2000. Hans Troger not only acted as mediator between Mathematics and Engineering Science, he also brought together people from all over the world. When the iron curtain restricted the contact with colleagues from eastern countries, he tried hard to invite them to Vienna and get into contact with them. For his engagement he was awarded the honorary doctorate from the Technical University of Budapest. Of course, we had also many guests from many other countries and had many opportunities to learn about the latest developments in different scientific fields. Hans also took care, that his co-workers had plenty of opportunities to visit conferences and other institutes.

Despite his professional achievements and his academic positions Hans Troger was a very modest and kind person with a sense of humour, which was never offensive. He was a very sportive person, played excellent tennis and made ski and climbing tours in the mountains".

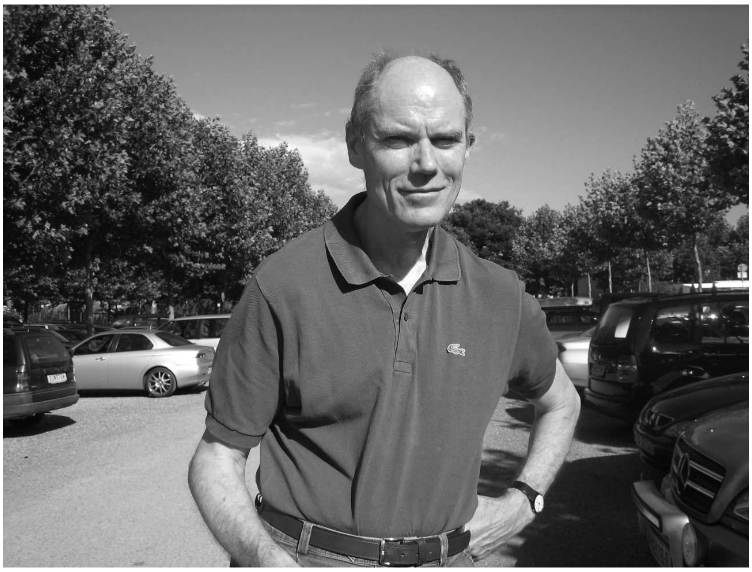


Figure 6. Discreet smiley of the well-meaning scientist and academician Hans Troger

Professor Alois Steindl goes on to describe the power of the personality of Hans Troger, which captivating and admiring his commitment to science:

"In summer 2009 metastases from an old malignant melanoma recurred and he had to stay in hospital for several months. Also in this time he was very interested in the scientific development and co-organized a minisymposium at a GAMM meeting. During a 3 week leave from the hospital he came to his office and gave his lectures. He got extremely weakened and had to return to the hospital, from which he was finally released two weeks before he died. During the last months of his life his elder sister took care for him.

With Hans Troger we lost an enthusiastic scientist, an important advisor and, above all, a good friend. His achievements and the memory of his outstanding personality will be with us forever".

Katica (Stevanović) Headrih's memories of Professor Hans Troger are as follows:

"I first saw Professor Hans Troger at the University College of Kinds (UCL) in London, when I first participated in a IUTAM symposium "Non-linearity and Chaos in Engineering dynamics" UCL 1993 London UK, as a subsequently submitted abstract and accepted participant. Abstract of my presetation was not inkuded in the book of abstracts, because I applied for the later, but my presentation was realized in scientific program of TUTAM symposium and I am in a joint symposium photo of all the participants of this IUTAM Symposium. Professor Hans Troger is also pictured here. Later we met, as we regularly participated in conferences of the European Society for Nonlinear Oscillations.

Figure 7. Academician Hans Troger and Professor Katica (Stevanović) Hedrih at the European Conference on Nonlinear Dynamics ENOC Eindhoven 2005.

Later, when I met with Professor Hans Troger and met many paths at European Conferences ENOC and IUTAM Symposia, communication of random encounters began among us. Since 1993, republics have broken up into separate states in Yugoslavia, and Serbia has been under blockade, and as a finale under aggression that ended in bombing 1999. Scientists from Serbia were not favorite, but Professor Hans Troger always showed sympathy and affection for me at every chance encounter. He was interested in asymptotic methods of nonlinear mechanics, which I was doing at the time, so I got a call from him and I stayed for a few days in Vienna, where I gave a lecture at his Seminar at the Technical University. That was 2003. He was an exceptional host, he waited for me at the Vienna airport, provided me with a hotel accommodation, and drove me to the airport on departure.

During my stay in Vienna, he instructed me what to see. So I took a look at a vowel at the Under Vienne Theater, as well as the Magic Flute at the Vienne Opera, in addition to the other sights of Vienna, where I first stayed. My last stay in Vienna was 2014, when the ENOC-the European Conference of Nonlinear Oscillations was held, but then Professor Hans Troger was absent. In 2010, he was killed by a vicious cancer disease".

Next description of personality of Professor Hans Troger by **Katica (Stevanović) Hedrih** follows:

"He remembers the remarkable scientist, Professor Hans Trogirer, as a tall, sophisticated person, always sportily trained with a backpack, quick movements and warm friendly eyes, ready to always accept scientific communication with a lot of benevolence, a person open to new knowledge and information. It was an honor to know him and to be under his care. Rarely do they meet such persons, who are in communication with scientists from both the west and the east. For Hans Troger, the whole world was an area of easy movement and he had friends around the world. I was honored to have had the opportunity, at his invitation, to participate in a 2003 scientific lecture at a scientific seminar at the Technical University of Vienna".

References

1. Giuseppe Rega, Nonlinear dynamics in mechanics and engineering: 40 years of developments and Ali H. Nayfeh's legacy, Nonlinear Dyn (2020) 99:11–34. https://doi.org/10.1007/s11071-019-04833-w
2. Obituary: Hans Troger 1943–2010, Acta Mechanica, April 2011, Volume 218, Issue 1–2, pp 1–8 . First Online: 06 February 2011. DOI https://doi.org/10.1007/s00707-010-0428-0
3. Hans Troger and Steindl A. , Nonlinear stability and bifurcation theory: an introduction for engineers and applied scientists September 1991, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, ISBN:978-3-211-82292-0 https://www.amazon.in/Books-Hans-Troger/s?rh=n%3A976389031%2Cp_27%3AHans+Troger
4. Hans Troger (Author), A.P. Alpatov (Author), V.V. Beletsky (Author), V.I. Dranovskii (Author), V.S. Khoroshilov (Author), A.V. Pirozhenko (Author), A.E. Zakrzhevskii (Author), Dynamics of Tethered Space Systems (Advances in Engineering Series) Paperback – Import, 5 May 2010
5. Hans Troger (Author), A.P. Alpatov (Author), V.V. Beletsky (Author), V.I. Dranovskii (Author), V.S. Khoroshilov (Author), A.V. Pirozhenko (Author), A.E. Zakrzhevskii (Author), Dynamics of Tethered Space Systems (Advances in Engineering Series) Paperback – Import, 14 Jun 2017
6. Steindl A. and Hans Troger , Heteroclinic cycles in the three-dimensional postbifurcation motion of O(2)-symmetric fluid conveying tubes, September 1996, Applied Mathematics and Computation, Volume 78, Issue 2-3https://doi.org/10.1016/0096-3003(96)00014-8
7. W. Steiner, H. Troger On the equations of motion of the folded inextensible string, November 1995, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), Volume 46, Issue 6https://doi.org/10.1007/BF00917880
8. A. Kuhn, W. Steiner, J. Zemann,, D. Dinevski, H. Troger, A comparison of various mathematical formulations and numerical solution methods for the large amplitude oscillations of a string pendulum, Publication: Applied Mathematics and ComputationSeptember 1996 https://doi.org/10.1016/0096-3003(96)00014-8
9. Trends in Applications of Mathematics to Mechanics 1989 (Interaction of Mechanics and Mathematics) Hardcover – 7 Oct 1991, by W. Schneider (Editor), etc. (Editor), Hans Troger (Editor), Franz Ziegler (Editor)

Science through Love, Love through Science!

Academician, Professor Katica Stevanović Hedrih, PhD

"If I speak in the tongues of men or of angels, but
do not have love, I am only a resounding
gong or a clanging cymbal"
Apostle Paul, 1 Corinthians, 13:1

The name and image of Katica Stevanović I first noticed as long back as 1969, in then well-known Yugoslav paper "Politika" (still printed today in Belgrade). Since then, and during the following 1970s and 1980s, until I myself became an "external associate of MISANU" (in 1990), I have not particularly followed her *Curriculum Vitae,* but I was aware that she obtained her master's, PhD degree, became a docent, an associate professor, and then finally full university professor (in 1986).

As a matter of fact, that she successfully and brilliantly met all the conditions that lead a young man to the status of "university professor" under then (and certainly current) laws applying to higher education. Finally, when she was no longer burdened by "getting through the ranks" that would enable her to have an adequate "spot under the sun", commensurate to her great talent, diligence, and hard work, her true work, infused by real passion and first of all love for technical sciences, her absolute dedication to her calling, continuous advancement as well as her personal development began, loving everything that was, so to say, the fruit of *positive energy*! Even today, in the 21st century, in the year 2020, her „ironclad" work ability and curiosity forces her into new endeavours, despite the occasional "warning signs" that her body occasionally sends her. Nonetheless, her motto now seems to be: "*Festina Lente*"[1].

We, her colleagues and friends, are impressed and attracted by her tirelessness in science, her ever present glow of cheerfulness to her surroundings. Now, when she is mother to Vladimir Hedrih, a psychologist, a PhD, and from February 2019 a full professor, and a grandmother to three grandchildren, a large portion of her time she devotes to her family, all of whom (her son, her daughter-in-law, her grandchildren) she loves immensely!

Now, let us look at the „biography" of an Academician Katica Stevanović Hedrih, chronologically as far as that is possible:

Katica Stevanović Hedrih was born in a small town of Bobovište, near the town of Aleksinac, on 28 August 1944, as the first child of a father - lawyer – and a mother (it was unusual at that time for a woman to graduate from two boarding schools in the areas of agriculture and home economics) - all her life, her mother would regret that she was not allowed to go to the university, but Katica had full support of her mother as well as her father – very early, her parents noticed her "talent" for school and studying and, in everything that depended on them, they supported her for as long as they lived! She finished elementary school and Gymnasium in Niš, and as the first in her class, she graduated from the Faculty of Mechanical Engineering (at the age of 23), with average mark of 9.67 and mark 10 at her graduation examination. That school year of 1966/67, she was proclaimed and awarded as the Best Student of the University in Niš (her award was a gold watch with inscription of the University). Also, her graduation paper at the Faculty of Mechanical Engineering was pronounced the best graduation paper (being quite applicable) written at all-natural sciences and engineering faculties in Yugoslavia in the year 1967.

Even as a pupil in the Gymnasium, she was awarded with a large number of municipal, regional, republic and federal awards from mathematics competitions, and as a member of a seven-person team of young mathematicians, she represented Yugoslavia at the V International Mathematical Olympiad held in Wroclaw, Poland, in 1963.

From the beginning of the school year 1967/68 until 30 September 2009, she worked at Faculty of Mechanical Engineering - University of Niš, having the titles from assistant professor to full professor, which she acquired in 1986. On 2 February 1972, at the age of 24, she defended her master's thesis, and in February 1975, her doctoral dissertation, entitled "Energy Analysis of Non-Linear Oscillations of Deformable Bodies".

In 1974, she married Otmar Hedrih, a BSc. in Electrical Engineering and MSc, with whom she has a son, named Vladimir, a PhD in psychology, a renowned scientist in his field and also a full university professor!

1 Lating for: „Hurry up, but slowly!"

In her life with her husband, until his death ten years ago, she fruitfully nurtured her marriage and good family relations together with being able to build a successful career in science, readily sacrificing “hedonism” in her life; work and love, love and work; study visits, advancement and keeping up with all the innovations in the world of her branch of science!

As a student funded by Yugoslav Federal Government, she spent 1971 at professional advancement of non-linear oscillations at the Mathematics Institute of the National Academy of Sciences of the Ukraine, under the mentorship of Academician Jury Alexyevich Mitropolski, on recommendation of Professor Danilo Rašković, a renowned Yugoslav scientist in technical field, who noticed Katica as a talented student at first, and later she became his close associate. In a short time, she acquired knowledge and passed, with excellent results, the exam of the program for acquiring the title “the Candidate of Sciences in USSR”, of the “specialty of candidate minimum in the field of theoretical and mathematical physics”, which was the confirmation of the successful eleven-month study visit. In NANU monography on the occasion of 90th birthday of J.A. Mitropolski, Russian Academician, she was inscribed as the first one of all his candidates and members of famous science school of “Non-linear mechanics asymptotic methods Krylov – Bogoliubov – Mitropolski”. From October 2009 till 2011 (her sixty-seventh birthday) she was in full-time employment in MISANU, working on posts such as: Science Advisor, Head of the Department of Mechanics and Project Leader in fundamental science projects. She is still involved in the ongoing project cycle on the proposal of the Ministry of Education, Science and Technological Development of the Republic of Serbia. From 2011 till 2019, she was the Project Leader of the important project on Dynamics of Hybrid Systems with Complex Structures – Mechanics of Materials.

During her research work, which lasted longer than half a century, Professor Katica Stevanović Hedrih performed different scientific, professional and social functions, such as:

1. Head of the Department of Mechanics and Automation,

2. Vice-Dean for Education, President of the Work Council of the Faculty of Mechanical Engineering in Niš,

3. Head of the Department of Mechanics and member of the Management Board of MISANU,

4. Head of the scientific seminar and Project Leader for Mechanics, in even 8 project cycles.

As a student, she was the member of the first founding council of the University in Niš (in 1965), and then the organizer of academic conferences and conventions, as well as mini symposiums as the part of great conventions and conferences in America, China, Ukraine, Russia, Greece, Poland and Portugal. She was the frequent participant in the international conferences and seminars, and/or the lecturer on call in Greece, Ukraine, Russia, America, Canada, Brazil, Japan, Poland, Italy, Romania, India and other countries. She, also, distinguished herself in science magazines, as an active editor, writer, “quoted scholar”; She was an editor-in-chief of the magazine “Facta Universitatis” of the University in Niš, and during that time, the publishing of 11 series of that magazine started; She was the member of editorial staff of a great number of international science magazines, as well as the guest editor of several special editions of science magazines, among which is the special edition of leading Elsevier’s magazine “International journal of nonlinear mechanics.

Professor Katica Stevanović Hedrih, PhD is the author of 2 unique authentic monographies. In the first one, published in English, she designed vector method, based on newly introduced original vectors of mass moments, related to pole and axis. The second monography was prepared with the co-author Academician O.A. Goroski from Ukraine, and it was the unique monography in the world introducing the integral theory of analytical dynamics of discrete, hereditary systems. She published more than 10 university scientific publications in the field of theoretical and applied mechanics. She is one of three authors of the original monography in the field of dynamics of vibro-impact systems.

Professor Katica Stevanović Hedrih, PhD is the author of more than 350 scientific and professional papers, which are mostly written by one author, (most of them were published abroad). During the last 20 years (up to now, 22 years) she has had more than 701 self-citations, registered at Thompson Royter and Web of Science (these are the data from the year 2018, obtained from Matica Srpska – meaning that her newly published scientific results are based on her original previously published scientific results)[2]. Then, there are around one hundred citations in Serbian science magazines and more than 300 citations in master’s thesis and doctoral dissertations made in Serbia. The most significant citations referring to her papers in significant monographies in the world are as follows: from nonlinear mechanics of Academician I.A. Mitropolski (published in Ukraine in 1976) and monography in the field of nonlinear oscillations of Ali Nayfeh (Springer in 1976, USA), as well as in reference magazine “Applied Mechanics Review” (in 2010, International American Society of Mechanical Engineers).

I would, also, like to mention that professor Katica Stevanović Hedrih was the mentor in 10 doctoral dissertations and 10 master’s thesis, and great number of her research results was implemented in research projects under her management, which were incorporated in great number of successfully defended master’s thesis and doctoral dissertations at several universities throughout the country. At the Faculty of Mechanical Engineering in Niš she established the school of “Nonlinear oscillations and elastodynamics (within this school great number of postgraduate students and PhD candidates obtained their Master and PhD degrees – in 2 generations).

The path, life course of a true scientist, especially a woman scientist has not been easy, even in the 20th century and up to the present day, in the

2 Hirsch index / for the papers published from 1967 till 2000, H.I. is 10 to the Scopus from – to 2020

world ruled mostly by jealousy, envy and hatred, outright or hidden, directed to those who are successful, especially if they are women! People like Katica exist, they represent the torch that lights the ways of those not so talented. What guided this amazing person through life, who helped her to succeed?

Now, when I know Professor Katica Stevanović Hedrih, PhD, for a long time, as an academician, maybe I have managed to find the answer, or at least, have come closer to it, studying and knowing her for many years, as a person, colleague, following her work, her work and family relations, etc.

She is, first of all, a quality person, born with great talent, who, through the life, developed work ethic, curiosity and most of all love! She received great amount of love from her parents, husband and all those who were around her – there is not such a person as Mrs Katica. She embodies the victory of good universal forces over evil ones! At the same time, that women – genius, In our small country, shows the truth to all who know her, if they want to see it, and her truth is that you should love everything that life puts before you and most of all that you should survive as the moral person, first of all. The main character of these written lines confirms the old saying I would like to use as the end of this true story of love, talent, self-discipline and, most of all, kindness that can be achieved if we know how to recognize what is worth dedicating the life to!

“Wonderful soul and wisdom are hidden in the human who needs love!”

My scientific results:

1. Mathematical Institute

   Serbian Academy of Sciences @arts (MISANU) Belgrade 2016, page 14

2. 52 years of scientific work of professor Katica Hendrih (Stevanović) PhD
3. Two days symposium on the occasion of the 75th birthday @ 52 years of scientific work of professor Katica (Stevanović) Hendrih PhD MISANU, September 4-6, 2019, Belgrade, organised for her jubilee
4. A contribution to the development of functional thinking related to complexity M. Matljevich MISANU – Scientific conference dedicated to 70th anniversary of the birth of professor Žarko Mijajlović, PhD – Belgrade 2018

Jasna Fempl Mađarević

MISANU, 36 Knez Mihajlova Street

11000 Belgrade, Serbia

e-mail tanjamadjarevic@gmail.com

Katica Hedrih und Jasna Fempl Madjarević

Drei Dresdner Höhere Lehrer: Johann von Vieth (1856-1938), Martin Gebhardt (1868-1946), Erich Günther (1886-1951)

Waltraud Voss

Johann von Vieth, Martin Gebhardt und Erich Günther waren eng mit der Dresdner Ausbildung höherer Lehrer verbunden: Vieth und Günther haben in der Dresdner Lehrerabteilung studiert, Gebhardt und Günther waren Leiter des Praktisch-Pädagogischen Seminars der TH Dresden und damit selbst in die Ausbildung höherer Lehrer involviert. Alle arbeiteten aktiv im „Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts" („Förderverein") mit und haben so an der Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts mitgewirkt. Die Drei studierten die Fächer Mathematik, Physik und Geographie und wurden von der Universität Leipzig zum Dr.phil. promoviert. In dem recht großen Zeitabschnitt, den sie gemeinsam überdecken, haben sich Lehrerbildung und Unterrichtsinhalte deutlich verändert, daher wird kurz auf die Dresdner Lehrerbildung eingegangen, und es folgen wenige Bemerkungen zur Unterrichtsreform.

<u>Dresdner höhere Lehrerbildung</u>
1828 wurde die Technische Bildungsanstalt (TBA) als erste Vorgängerin der heutigen TU Dresden begründet. Von Anfang an wurden an der TBA auch Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaften ausgebildet. Das war auch an anderen deutschen technischen Bildungsstätten dieser Zeit üblich, da diese – anwendungsorientiert ausgerichteten – Lehrer dringend gebraucht wurden. Die in Dresden ausgebildeten Lehrer fanden zunächst Stellungen an den mittleren technischen Schulen, die seit den 1830er Jahren in Sachsen entstanden, und an privaten Realschulen. In Dresden wurde, und das ist das Besondere, die Lehrerbildung beibehalten, 1862 durch die Gründung der „Lehrerabteilung" institutionalisiert und nach und nach ausgebaut, bis die TH Dresden Mitte der 1920er Jahre die einzige deutsche TH war, an der alle mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer auf das höhere Schulamt studiert, mit dem Staatsexamen abgeschlossen und mit der Promotion gekrönt werden konnten. In Preußen blieb die höhere Lehrerbildung bis an die Schwelle des 20. Jahrhunderts ganz den Universitäten vorbehalten. Der renommierte Mathematiker Oskar Schlömilch stand von 1862 bis zu seinem Übertritt in den Ministerialdienst 1874 an der Spitze der Dresdner Lehrerabteilung. All ihre Absolventen fanden mit der Dresdner Abschlussprüfung gute Stellungen, doch war diese Prüfung kein Staatsexamen. Aber bereits seit 1848 (!) wurden an der Landesuniversität Leipzig die Semester angerechnet, die in Dresden auf Mathematik und Physik studiert worden waren. Und 1879 wurde dann am Polytechnikum Dresden auch eine eigene Prüfungskommission für die höheren Schulamtskandidaten eingerichtet, - nur die Promotionsmöglichkeit für diese fehlte noch bis 1912, so dass die Promotionswilligen unter den künftigen höheren Lehrern bis dahin häufig nach einigen Dresdner Semestern an die Universität Leipzig wechselten. Die Grenze zwischen höherem Lehrer und Hochschullehrer war durchaus fließend, bis in das 20. Jahrhundert hinein war es nicht selten, dass Mathematiker von der höheren Schule als Professoren an eine Hochschule wechselten. Nahezu alle Hochschulprofessoren hatten die Prüfung für das höhere Schulamt abgelegt. Das gab ihrem Berufsweg zusätzliche Sicherheit, denn die Hochschullehrerlaufbahn war von vielen Unwägbarkeiten bestimmt. Da also in Dresden mit den höheren Lehrern Fachnachwuchs ausgebildet wurde, gelang es, hervorragende Mathematiker und ebensolche Physiker und andere Naturwissenschaftler für Dresden zu gewinnen.

<u>Zur Unterrichtsreform</u>
Die Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts stand Ende des 19. / Anfang des 20. Jahrhunderts nicht nur in Deutschland, sondern in allen wirtschaftlich

fortgeschrittenen Staaten an. Dieser Unterricht musste endlich auf ein Niveau gehoben werden, das den Anforderungen von Industrie und Gesellschaft entsprach. Zur Beförderung der Zusammenarbeit über Ländergrenzen hinweg wurde 1908 auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Rom die Internationale Mathematische Unterrichtskommission (IMUK) gebildet, an deren Spitze der Göttinger Mathematikordinarius Felix Klein gewählt wurde. Zunächst waren die Ist-Zustände in den Teilnehmerstaaten der IMUK zu ermitteln. Es entstand ein vielbändiges Werk, herausgegeben im Auftrag der IMUK von Felix Klein. Zu den deutschen Autoren gehörte u. a. Martin Gebhardt.

Vieth von Golßenau, Carl Johann
Johann von Vieth, wie er sich kurz nannte, hat an der Polytechnischen Schule und am Polytechnikum Dresden studiert, den unmittelbaren Vorgängereinrichtungen der Technischen Hochschule. Er hat die letzte Vorlesung von Oskar Schlömilch und die ersten von Leo Königsberger gehört. 1875 zog er mit in das neuerbaute Gebäude des Polytechnikums am Bismarckplatz – in der Nähe des Hauptbahnhofs – um. Über seine Dresdner Studienzeit hat er 1928, anlässlich des 100. Geburtstages der TH Dresden, Erinnerungen veröffentlicht.
Carl Johann Vieth von Golßenau wurde am 16. Juli 1856 in Dresden geboren. Er entstammte einer alten Offiziers- und Beamtenfamilie. Sein Vater Victor von Vieth (1803-1886) trat in die österreichische Armee ein und focht unter Radetzky mit; der Verlust seines Gehörs zwang ihn dazu, seinen Abschied zu nehmen. Als Major a. D. ließ er sich in Dresden nieder und heiratete im Alter von über 50 Jahren die 20 Jahre jüngere Caroline Hammanni (1823-1894); aus der Ehe gingen Sohn Johann und Tochter Marie hervor. Johann von Vieth besuchte nach Volksschule und privater Käufferscher Realschule zwei Jahre die Realschule 1. Ordnung in Dresden-Neustadt. Mit deren Abschlusszeugnis nahm er „Michaelis 1873“, also zum Wintersemester, an der Polytechnischen Schule Dresden das Studium der Ingenieurwissenschaften auf, wechselte aber Ostern 1875 zum Lehramtsstudium der Mathematik, Physik und Geographie über. In die Polytechnische Schule konnte er 1873 noch ohne Abitur eintreten, das derzeit nur am humanistischen Gymnasium erworben werden konnte. Bis Ostern 1877 studierte von Vieth in Dresden, dann wechselte er an die Universität Leipzig. Vom 1. Okt. 1878 an diente er ein Jahr lang als Einjährig-Freiwilliger beim Leipziger Infanterieregiment Nr. 107 „Prinz Johann Georg“, dem sogenannten „Studentenregiment“. Während der Militärzeit legte er im Januar 1879 die Staatsprüfung für das höhere Schulamt ab, - also nach effektiv nur drei Leipziger Studiensemestern. Das Probejahr absolvierte er 1879/80 an der Nikolaischule in Leipzig, an der er bis 1883 unterrichtete. Danach zog er zurück zu den betagten Eltern nach Dresden, lehrte hier zunächst am Käufferschen Realinstitut und seit Anfang Januar 1885 am Kgl. Gymnasium Dresden-Neustadt.
1886 heiratete er Bertha geb. Raspe (1867 Moskau – 1949 Dresden), Tochter von Professor Friedrich Raspe, früher Apotheker in Moskau; aus der Ehe gingen zwei Söhne hervor, Viktor (1887-1914) und Arnold (1889-1979). Viktor von Vieth hatte sich beruflich der Landwirtschaft zugewandt, er fiel bereits 1914. Arnold von Vieth, Berufsoffizier, Weltreisender, Spanienkämpfer, nach 1945 Professor in Dresden und Berlin, ist als Schriftsteller „Ludwig Renn“ sehr bekannt geworden. -
Johann von Vieth wurde im Juni 1893 von der Universität Leipzig aufgrund der Dissertation „Anwendungen einer vielfach komplexen Größe auf die Zahlentheorie“ promoviert. Von Vieth, Professor, Studienrat, Oberstudienrat, war nebenamtlich auch Lehrer und Erzieher an der Prinzenschule, die der letzte sächsische König, Friedrich August III., für seine drei Söhne seit 1904 im Taschenbergpalais unterhielt. Von Vieth hatte sich 1914 freiwillig für den Kriegsdienst gemeldet und war als Hauptmann in der Telegrafen-Überwachungsstelle Dresden tätig. Vom Kgl. Gymnasium dringend angefordert, kehrte er Ostern 1916 – hochdekoriert – an die Schule zurück. Trotz hoher Lehrbelastung fand er Zeit, mit jüngeren Schülern Laub als Futterersatz für die Pferde des Heeres zu sammeln und geeignete Schüler

beim Werben für Kriegsanleihen anzuleiten. Nach dem Krieg half er den aus dem Felde zurückkehrenden Studenten der Technischen Hochschule, den Anschluss an die mathematischen Vorlesungen zu finden. Am 31. März 1922 trat er in den Ruhestand, blieb aber mit der Schule – nun Staatsgymnasium – und ihren Schülern verbunden. Im Landheim der Schule, in Kipsdorf, studierte er mit Interessierten den Sternenhimmel oder führte mit ihnen Feldmessübungen durch. Der Gedankenaustausch mit ehemaligen Schülern, die sich der Mathematik zugewandt hatten, war eine besondere Freude für ihn. Zu diesen gehörte der Topologe William Threlfall, der eng mit der TH Dresden verbunden war und später als Professor in Halle, Frankfurt/Main und Heidelberg wirkte. Als Vorstandsmitglied des „Vereins für Rat und Tat" war von Vieth sozial engagiert, bis in die letzten Lebenstage suchte er seine alten und kranken Schutzbefohlenen persönlich auf. Am 6. November 1938 starb er zu Hause nach kurzer Krankheit. 1939 erschienen Erinnerungen ehemaliger Schüler und Kollegen, aus denen nachfolgend einiges angeführt werden soll, das den Menschen und Lehrer charakterisiert.
Studienrat Dr. Johannes Werner (Abiturient 1914): „Obwohl ich ein unerhört schlechter Mathematiker war und in allen seinen Stunden unter schwerstem Druck stand, habe ich stets lebhaft empfunden, dass hier ein tief vornehmer Mensch vor mir stand. … Wesentlich war bei ihm die innere Vornehmheit, die in seinem schlechtesten Schüler noch die Persönlichkeit achtete, mit der er auch nach dem härtesten Tadel das erschütterte Selbstbewusstsein des Schülers wieder aufrichtete, die ihn jene Haltung noblen Vertrauens finden ließ, die unmittelbar zum Stolz des Schülers sprach, der sonst in der Schule so leicht in verbitternder Weise zerbrochen wird. Da sprach Adel und Herzensgüte zu uns. …"
Dr. Arno Kleber, Oberstudiendirektor in Bautzen (Abiturient 1905, Absolvent der Dresdner Lehrerabteilung 1909, einige Jahre von Vieths Kollege): „Es wird nicht viele Lehrer geben, die so ernst über ihre Unterrichtsweise nachdenken, wie er es tat. Wenn ihm beim schwächeren und Durchschnittsschüler nicht die letzten Erfolge beschieden waren, so lag das nicht an seinem Mangel an Lehrgeschick, sondern daran, dass er den Schülern für zu Hause zu wenig aufgab und dass er sie bei der Anfertigung der Hausaufgaben nicht genug unter Druck setzte. Er zwang sie in der Stunde zu gründlichem und vielseitigem Nachdenken, aber er unterschätzte wohl den bildenden Wert der häuslichen nachschaffenden Übung. Denkfreudige und gar mathematisch begabte Schüler hat von Vieth bei seinem hohen wissenschaftlichen Niveau aufs stärkste angeregt, mehr vielleicht, als sie damals selber gemerkt haben. … "

Gebhardt, Martin
Martin Gebhardt wurde am 2. Oktober 1868 in Leipzig geboren. Seine Eltern waren der Lehrer der Mathematik und spätere Konrektor am Nikolaigymnasium Professor Dr.phil. Adalbert Gebhardt und Liddy Gebhardt geb. Schumann. Seit 1880 besuchte Martin Gebhardt das Nikolaigymnasium, an dem von 1880 bis 1883 als junger Lehrer Johann von Vieth wirkte. Ostern 1888 legte er hier das Abitur ab, schloss den Einjährig-Freiwilligen-Militärdienst an (im selben Regiment wie vor ihm von Vieth) und nahm 1889 das Studium an der Universität Leipzig auf. Er studierte Mathematik, Physik, Geographie und legte am 22. Februar 1894 die Staatsprüfung für diese Fächer ab. Seit 1. März 1894 war er bei Professor August Toepler Assistent für Physik an der TH Dresden; das Probejahr absolvierte er am Dresdner Annenrealgymnasium, an dem er bis Ende 1899 unterrichtete. 1896 wurde er von der Universität Leipzig als Schüler des Professors der Geographie Friedrich Ratzel (1844-1904) aufgrund der Dissertation „Versuch einer morphologischen Klassifikation der Firnflächen" promoviert. Im selben Jahr, am 17. Mai 1896, heiratete er seine Frau Elisabeth (*1876); der Ehe entstammten die Kinder Wolfgang (1897), Heinz (1900) und Hildegard (1903).
Zum 1. Januar 1900 wechselte Gebhardt von der Annenschule an das Vitzthumsche Gymnasium, wo er Professor, Studienrat, Oberstudienrat und 1928 Konrektor wurde. Von

1914 bis 1918 hatte er im Heeresdienst gestanden und war, mehrfach dekoriert, als Major entlassen worden. Er blieb in Militärbünden aktiv, gehörte in den 20er Jahren dem fünfköpfigen Leitungsgremium des Sächsischen Militärvereinsbundes an und war von 1928 bis 1938 Vizepräsident des Reichskriegerbundes „Kyffhäuser".
Für die IMUK verfasste er die 1912 bei Teubner in Leipzig und Berlin erschienene Schrift: „Gebhardt, Martin: Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands: dargestellt vor allem auf Grund alter und neuer Lehrbücher und der Programmabhandlungen höherer Schulen (Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Herausgegeben von F. Klein)"
Zur Reihe „Mathematische Bibliothek", die 1912 von Alexander Witting (Absolvent der Dresdner Lehrerabteilung 1885) und Walther Lietzmann begründet worden war, gedacht für fortgeschrittene höhere Schüler, steuerten Gebhardt und Witting gemeinsam „Beispiele zur Geschichte der Mathematik" bei (2. Teil Leipzig 1913), wozu sie die von ihnen benutzten lateinischen und griechischen Originaltexte neu übersetzten.
Martin Gebhardt arbeitete aktiv und über lange Jahre im „Förderverein" mit. Durch die Reform ermöglichtes Neues, wie die „physikalischen Schülerübungen", führte er in seinem eigenen Unterricht sehr engagiert ein, auch wenn ihm zunächst keine städtischen Mittel dafür zur Verfügung gestellt wurden.
Die 28. Hauptversammlung des „Fördervereins" fand vom 5.-9. April 1926 in Dresden statt. Sie hatte die sehr lebendige Ortsgruppe Dresden mit ihren beiden Abteilungen für Mathematik und Physik und für Chemie und Biologie als solide Basis. Den geselligen Teil, das „Damenprogramm" für die begleitenden Gattinnen eingeschlossen, organisierte Martin Gebhardt. Leitthema der Hauptversammlung war: „Die Bedeutung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer im Kreise der Gesamtkultur". Die folgenden Kernsätze, die wohl auch heute noch uneingeschränkt gültig sein sollten, fanden allgemeine Unterstützung der Teilnehmer:
„Für die höhere Schule ist die Vermittlung einer grundlegenden Bildung viel wichtiger als spezielle Vorbereitung auf künftiges Hochschulstudium. Unter grundlegender Bildung ist kein enzyklopädisches Vielwissen zu verstehen, sondern eine ausreichende Bekanntschaft mit den Grundlagen der wichtigsten Gebiete unserer Kultur und Technik, zu denen heute ohne Zweifel auch Mathematik und Naturwissenschaften, Technik und Wirtschaft gehören. Die Schüler müssen die Denk- und Ausdrucksweise dieser Wissensgebiete soweit kennen lernen, dass sie sich später im Leben nötigenfalls darin selbst orientieren können. <u>Das Hochschulstudium ist durch Gewöhnung an selbständiges Beobachten, Denken, Schließen und Schaffen am besten vorzubereiten</u>."[i]
Martin Gebhardt veröffentlichte in den Jahresberichten (JB), Programmen und Festschriften des Vitzthumschen Gymnasiums und in verschiedenen Zeitschriften, etwa in den „Unterrichtsblättern für Mathematik und Naturwissenschaften" und in der „Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht". In der Festschrift des Jahres 1911 des Vitzthumschen Gymnasiums war Gebhardts Beitrag „Der mathematische Unterricht auf dem Vitzthum-Gymnasium in Dresden während der Zeit von 1861-1911" zu lesen. Die Beiträge zu physikalischen Themen waren häufig durch die „Schülerübungen" angeregt und von ihm theoretisch vertieft worden. Immer wieder ging es ihm um Goethe und die Wissenschaften, und zum Goethe-Jahr 1932 erschien in Berlin sein Buch „Goethe als Physiker. Ein Weg zum unbekannten Goethe". Gebhardt war – wie von Vieth und Günther – auch in der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis zu Dresden aktiv. In den „Abhandlungen" der Isis veröffentlichte er 1938 „Persönliche Erinnerungen eines alten Assistenten", die er anlässlich der Gedenkfeier zum 100. Geburtstag des früheren Dresdner Physikordinarius August Toepler vorgetragen hatte.

Gebhardt organisierte die jährlich stattfindenden Schülerbälle des Vitzthumschen Gymnasiums mit und betätigte sich gelegentlich für seine Schule als Dichter. So stammte der „Szenische Prolog“, der am 22. September 1928 im Dresdner Alberttheater beim Festakt anlässlich der Hundertjahrfeier des Vitzthumschen Gymnasiums aufgeführt wurde, von ihm. Es nimmt nicht Wunder, dass eine solch vielseitige Persönlichkeit unter den Mitgliedern der „Waldenburger Tafelrunde“ zu finden ist; die „Tafelrunde“ war 1921 von Günther Fürst von Schönburg-Waldenburg ins Leben gerufen worden und bestand bis 1938. Auf Einladung des Hausherrn trafen sich jeweils für zwei bis drei Wochen (!) bedeutende Vertreter aus Wissenschaft, Kunst und Kultur auf Schloss Waldenburg, darunter waren der Direktor des Dresdner Kunstgewerbemuseums, der Direktor der Bibliothek der klassischen deutschen Literatur Weimar, der Direktor des Goethe-Schiller-Archivs Weimar, der Besitzer des Insel-Verlages Leipzig - und der Maler und Graphiker Professor Georg Lühring, der Karikaturen der Gäste schuf und diese seit 1932 in mehreren Serien veröffentlichte. Die von Martin Gebhardt (als wütender Ziegenbock) lässt auf dessen stürmisches Temperament bei kontroversen Diskussionen schließen, zu denen es zu „Goethe als Physiker“ sicher kam. Die „Tafelrunden“ regten das kulturelle Leben weit über die Region hinaus an.
Vor dem Hintergrund der Weltwirtschaftskrise musste in Staat und Kommunen gespart werden. Zum 1. Januar 1932 wurde auch der 63-jährige Martin Gebhardt infolge von Zusammenlegungsmaßnahmen von der Stadt Dresden „in Wartegeld gesetzt“. Seine Abschiedsrede am Vitzthumschen Gymnasium schloss Konrektor Gebhardt mit den Worten: „Ich bin zu alt, um etwas zu tadeln, doch immer jung genug, etwas zu tun.“ Sehr schnell wurde er zu bedeutsamem Tun herangezogen. Bereits am 16. April 1932 erhielt er die Ernennung zum Direktor des Praktisch-Pädagogischen Seminars (PPS) der TH Dresden, das von den auf das höhere Schulamt Studierenden besucht wurde. Damit verbunden waren der Stellvertretende Vorsitz der Wissenschaftlichen Prüfungskommission für die Kandidaten des höheren Schulamts und eine Honorarprofessur an der TH für Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften. Mit dem Vitzthumschen Gymnasium blieb er in enger Verbindung, auch, da er die Lehrproben der Studenten oft dort durchführen ließ. An dem „Verzeichnis der Lehrer und Schüler des Vitzthumschen Gymnasiums zu Dresden seit dem Jahre 1861“, das 1937 erschien, hat er wesentlich mitgearbeitet.

Günther, Erich
Otto Erich Günther wurde am 8. Mai 1886 in Oschatz geboren. Seine Eltern waren Otto Clemens Günther, Oberrechnungsrevisor bei der Kgl. Sächs. Oberrechnungskammer, und dessen Ehefrau Erna Ernestine geb. Nitzsche. Günther hatte zwei jüngere Schwestern. Erich Günther legte Ostern 1906 das Abitur am Dresdner Gymnasium zum Heiligen Kreuz ab und wurde am 24. April 1906 in der Allgemeinen Abteilung der TH Dresden für das Studium der Mathematik und Physik inskribiert. Den Grundkurs Höhere Mathematik, der in diesem Semester – eine Neuerung – erstmals aus einer Hand geboten wurde, hörte er bei Georg Helm, Darstellende Geometrie und Höhere Analytische Geometrie las Martin Disteli, Experimentalphysik mit Praktikum bot Wilhelm Hallwachs, Technische Mechanik Martin Grübler, der selbst ein früher Absolvent (der technischen Sektion) der „Lehrerabteilung“ war, Geodäsie Bernhard Pattenhausen, Höhere Algebra Martin Krause, Partielle Differentialgleichungen Emil Naetsch, Elektromagnetische Lichttheorie hörte er bei Maximilian Toepler und Geschichte der neueren Philosophie bei Fritz Schultze. Günther studierte vier Semester an der TH Dresden. Das Abgangszeugnis wurde ihm am 15. April 1908 ausgestellt, er hatte darum gebeten, um „seine Studien an der Universität Leipzig fortzusetzen und zu beenden“. Am 25. Januar 1913 legte er die Staatsprüfung ab und erwarb die Lehrbefähigung für alle Klassen der höheren Schulen in Mathematik, Physik und Geographie. Bereits vor der Staatsprüfung, im Dezember 1912, erwarb er den Doktorgrad aufgrund der Schrift „Energie und Widerstand von Öffnungs- und Schließungsfunken in

induktiven Stromkreisen; Funkenlöschung durch Kondensatoren“. Gutachter waren die Physikprofessoren Wiener und Des Coudres. Angeregt hatte das Thema jedoch der Professor der Astronomie und Direktor der Leipziger Sternwarte Heinrich Bruns aus ganz konkretem praktischen Interesse heraus: Mit der weiteren Verbreitung elektrischer Uhren wurde die Behandlung der dazu nötigen Schwachstromkreise wichtig, und Prof. Bruns wünschte eine Behandlung dieser Kreise besonders für astronomische elektrische Uhren. In diesem Umfeld vergab er Themen für Dissertationen. 1912 hätte Erich Günther auch in Dresden promovieren können, und auch ein Thema aus der Schwachstromtechnik – bei dem legendären Heinrich Barkhausen – wäre möglich gewesen, doch das hatte er 1908 ja nicht voraussehen können.
Nach dem Probejahr, u. a. am Nikolaigymnasium Leipzig, ging Günther nach Dresden, war von 1914 bis 1919 Lehrer am Vitzthumschen Gymnasium, wechselte an das König-Georg-Gymnasium, war 1928 bis 1933 Oberstudiendirektor an der Oberrealschule Dresden-Neustadt und ging dann in gleicher Funktion an das Realgymnasium Dresden-Blasewitz.
Erich Günther war mit dem „Förderverein“ seit den ersten Berufsjahren verbunden. Sein väterlicher Freund und Kollege Martin Gebhardt nahm ihn bereits Pfingsten 1914 zur Hauptversammlung nach Braunschweig mit. 1921, auf der ersten Hauptversammlung nach dem Krieg, trug Günther über „Anwendungen stroboskopischer Erscheinungen“ vor, - und danach fast in jedem Jahr. Die physikalischen Schülerübungen nahmen inzwischen längst einen festen Platz im Unterricht ein, aus ihnen – Günther bevorzugte die Bezeichnung „physikalischer Forschungsunterricht“ – kamen häufig die ersten Anregungen zu seinen Vorträgen und den Veröffentlichungen. Von ihm stammt das physikalische Arbeitsbuch als Anleitung für den Arbeitsunterricht, mit dem in vielen Schulen gearbeitet wurde. Es wurde von Günther ständig erweitert und überarbeitet und ist in mehreren Ausgaben und Auflagen erschienen.
Als der „Förderverein“ 1926 in Dresden tagte, war Günther dessen stellvertretender Vorsitzender und leitete außerdem die Ortsgruppe Dresden. Auf der Hauptversammlung 1930 in Würzburg legte Walther Lietzmann den Vorsitz des „Fördervereins“ nieder, Erich Günther wurde sein Nachfolger und sowohl 1931 als auch 1934 wiedergewählt. Wegen Arbeitsüberlastung trat er 1936 von dieser Funktion zurück. Er war 1935 als Nachfolger von Martin Gebhardt mit der Leitung des Praktisch-Pädagogischen Seminars der TH Dresden betraut worden, übernahm von ihm auch den Stellvertretenden Vorsitz in der Prüfungskommission für die Kandidaten des höheren Schulamtes und die Honorarprofessur. Seine Funktion am Realgymnasium Blasewitz behielt er bei, d.h. er war wirklich hoch belastet. (1938 ging der Förderverein im Nationalsozialistischen Lehrerbund auf.)
Nach dem verheerenden Bombenangriff verließ er mit seiner Frau Dresden und ließ sich nach einigen Zwischenstationen in Göttingen nieder. Hier nahm er am Physikalischen Kolloquium und am Astronomischen Kolloquium teil, und er stellte sich den Physikern als Vortragender für ihre Kurse zur Verfügung. Als der „Förderverein“ 1949 in Göttingen wiedergegründet wurde, war auch Günther von Anfang an mit dabei. An der Hauptversammlung 1951 in Hamburg nahm er mit einem Vortrag teil. Sein physikalisches Unterrichtswerk hatte er für die Neuherausgabe überarbeitet und wollte sich in Herbst und Winter 1951 nun mehr Ruhe gönnen. Die Frau war im Vorjahr verstorben, aber die Kinder – Tochter und Sohn – waren nahe. Auch Günthers finanzielle Sorgen – ein regelmäßig bezahlter Wiedereinstieg in den Beruf war ihm nicht gelungen – „waren ein wenig geschwunden“ (Lietzmann 1951). Ein Schlaganfall setzte all den Plänen für die Zukunft ein Ende. Erich Günther starb am 7. September 1951 in Göttingen infolge eines Schlaganfalls. Er wurde in Harzburg an der Seite seiner Frau beigesetzt; der Vorsitzende des Fördervereins legte einen Kranz am Grabe nieder.

Quellen:

Quellen zu Johann von Vieth

Vieth, Johann von: Erinnerungen aus meiner Studienzeit am Kgl. Polytechnikum zu Dresden 1873-77, in: Die höhere Schule im Freistaat Sachsen. Zeitschrift des Sächsischen Philologenvereins, 6. Jahrgang 1928, Heft 10, S. 138/139; Dresdner Nachrichten, Freitag, 11. Nov. 1938, S. 4 und S. 13 (Nachruf, Traueranzeige der Familie); „Blau-Gold" (Nachrichten- und Erinnerungsblätter des Staatlichen Gymnasiums zu Dresden-Neustadt), 12. Jg., Nov. 1939, Nr. 23: S. 8 Foto Vieths mit Kurzlebenslauf, S. 4-10 „Erinnerung an Oberstudienrat von Vieth" (u.a. von Dr. Arno Kleber, Dr. Johannes Werner, Oberst Schütze, Ministerialrat Dr. Arno Großmann); Jahrbuch des Kgl. Gymnasiums zu Dresden-Neustadt (JB), 1898/99, Dresden 1899; JB Ostern 1914 bis Ostern 1915, Dresden 1915; JB des Staatsgymnasiums Ostern 1916 bis Ostern 1919, Dresden 1919; JB Ostern 1919 bis Ostern 1927, Dresden 1927; http://books.google.com>books>about>Anwendungen … (Dissertation Vieths im Volltext, mit Lebenslauf)

Quellen zu Martin Gebhardt

Universitätsarchiv der TU Dresden: Professorenbogen und Anlage: Gebhardt, Martin 1932-1935; „Poggendorff" IV T., 1923-1931 F-K: Martin Gebhardt; Dissertation mit Lebenslauf; Sächsisches Staatsarchiv Dresden, Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts: Nr. 15303, Blatt Martin Gebhardt, Nr. 15749, Bl. 58, 71; „Die höhere Schule im Freistaat Sachsen", 9. Jahrgang 1931, Heft 11, S. 214/215; Jahresbericht (JB) des Vitzthumschen Gymnasiums, Dresden 1909 (mit den Schulnachrichten von Ostern 1908 bis Ostern 1909); JB, Dresden 1910, S. 6 und 7; JB 1932; JB 1933; Festschrift des Vitzthumschen Gymnasiums, Dresden 1911; Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht 1922, 1923, 1924, 1925; SLUB, Signatur 31 8 (0) 3894; http://www.waldenburg.de/seiten/schloss-leben.htm (Ausdruck vom 26.4.2005); Georg Lühring: Karikaturen von Mitgliedern der Waldenburger Tafelrunde aus den Jahren 1926-1930. 1. Serie (mit 17 Karikaturen), Mai 1932 (in: SLUB, Signatur 1 G 4(0) 59); Der Sächsische Militär-Vereins-Bund. Ein Rückblick auf das Jahr 1927 (in: SLUB, Signatur Z A 484); W. Voss: Mathematiker als Rektoren der TH Dresden, Bielefeld 2021, S. 283-287 und S. 331-335

Quellen zu Erich Günther

Universitätsarchiv der TU Dresden, Altstudentenakte Nr. 4263; W. Lietzmann: „Erich Günther zum Gedenken", in: Der mathematische und naturwiss. Unterricht, 4. Band, 4. Heft, Nov. 1951, S. 193-194; „Poggendorff" IV T, 1923-1931 F-K: Erich Günther; Physikalische Arbeitsmaterialien von Erich Günther sind u. a.: Physikalisches Arbeitsbuch 1 - Unterstufe: 9 + 238 Seiten, 1928; Physikalisches Arbeitsbuch 2 - Oberstufe, 11 + 339 Seiten, 1930; Sumpf/Hartenstein/Günther: Grundriss der Physik (verschiedene Ausgaben und Auflagen), 1928, 1929, 1930; Handbuch Arbeitsunterricht höhere Schulen: Physikalischer Arbeitsunterricht, 46 S. (Heft 9, 2. Auflage, 1925). Dazu Publikationen u. a. in: „Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften": (24; 1918), (28; 1922), (30; 1924), (31; 1925), (32; 1926), (35; 1929); „Zeitschrift für mathematischen und naturwiss. Unterricht": (29; 1916), (30; 1917), (32; 1919), (34; 1921), (35; 1922); W. Voss: Mathematiker als Rektoren der TH Dresden, Bielefeld 2021, S. 283-287 und S. 331-335

Gabriela Besler
Institute of Philosophy
University of Silesia in Katowice
11 Bankowa Street
40-007 Katowice
Poland
gabriela.besler@us.edu.pl

Collaboration of Polish Logicians with Heinrich Scholz (1884–1956) And "Group from Münster" in the years 1928-1956

In summer 2018, Heinrich Scholz's literary estate (Nachlass Heinrich Scholz) was transferred from the Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung der Universität Münster (Germany) to the Universitäts- und Landesbibliothek Münster. It was collated and prepared by the archivists for sharing in the library reading room. You can find there a lot of documents showing close academic cooperation of Scholz and his "Group from Münster" interested in mathematical logic with Polish logicians: Kazimierz Ajdukiewicz, Józef. M. Bocheński, Tadeusz Czeżowski, Stanisław Jaśkowski, Maria Kokoszyńska, Tadeusz Kotarbiński, Stanisław Leśniewski, Jan Łukasiewicz, Andrzej Mostowski, Jan Salamucha, Jerzy Słupecki, Bolesław Sobociński, Alfred Tarski and Mordchaj Wajsberg, from the 1930s to 1950s. They maintained close and regular scientific contacts before, during, and after the Second World War.

Heinrich Scholz was a logician, philosopher, and theologian, one of the most important German academics in the 20th century. J.M. Bocheński included him among the leading analytical philosophers, next to Willard V. Orman Quine, John L. Austin, Alfred Tarski and Karl Popper (Bocheński 1993, p. 38).

In 1921, at the age of 37, Heinrich Scholz became acquainted with Alfred North Whitehead's and Bertrand Russell's *Principia Mathematica* and thereafter worked in the field of mathematical logic. His last workplace was the Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany). He was employed from 1928 to 1952 and formed the so-called Group from Münster (Gruppe von Münster), a group of academics working together on mathematical logic. He tried to follow the example of the Lvov-Warsaw School, with the style of work he learned during his two stays in Poland, in 1932 and 1938. He was a supervisor of at least 11 PhD students, whose dissertations were in the field of mathematical logic or mathematics.

Scholz knew Polish well enough to be able to read and translate logical papers (Mostowski – Scholz, 05.02.1947).

Scholz's collaborators include: Friedrich Bachmann, Albrecht Becker, Gisbert Hasenjaeger, Hans Hermes, Friedrich Hirzebruch, Jürgen von Kempski, Walter Kinder, Adolf Kratzer, Eugen Roth, H. Arnold Schmidt, Karl Schröter and Herman Schweitzer. Scholz also established the Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung in Westfälische Wilhelms-Universität that still exists.

Scholz and his co-workers built a school of analytical philosophy (with specialisation in mathematical logic) following the example of the Lvov-Warsaw School.

The following types of documents connected with Poland are stored in Nachlass Heinrich Scholz:

1. Correspondence between the above-mentioned Polish logicians and Scholz: letters written by these logicians and carbon copies of Scholz's letters to them, altogether about 150 typewritten pages. Most of the letters are in German, some in English, and at least one in Polish. It is known from the content of the letters that the archives in Münster do not have a complete collection of Scholz's correspondence.
2. Polish names mentioned in Scholz's correspondence with others: Max Bense, Rudolf Carnap, Alonso Church, Bertrand Russell, Carl F. von Weizsäcker.
3. Works of Polish logicians sent to Scholz, some of which have never been published, for example J.M. Bocheński's paper *Ueber die Bedeutung der mathematischen Logik fuer die Philosophie und ihre Geschichte*; date 08.07.1951; S. Leśniewski's *Ueber die Matrizenmethode in der Mathematik*, date 16.01.1935.
4. Results of Polish logicians' works in the teaching materials of Scholz and his collaborators.
5. Quotations from Polish logicians's works in the papers of Scholz and his collaborators papers.
6. Other documents: letters to university authorities, post-war explanations, an opinion written by Jan Łukasiewicz.

The cooperation between Scholz and the Polish logicians was probably initiated by Scholz, who wrote to Jan Łukasiewicz in 1928:

(ich) möchte Ihnen sagen dürfen [...] dass ich hier seit fünf Jahren die Axiomatik und Logistik als philosophisches Studienfach eingeführt habe und Sie daher bitten

möchte, mich über alles zu unterrichten, was Sie in diesem Bereich publizieren. Denn im Gegensatz zu fast allen deutschen Hochschulprofessoren der Philosophie bin ich tief und fest davon überzeugt, dass die Zukunft der wissenschaftlichen Philosophie in diesen beiden Gebieten, und bis auf weiteres auch nur in ihnen, zu suchen sein wird. (Scholz – Łukasiewicz, 13.08.1928)[1]

The following topics are discussed in the letters: organization of the scholarly environment, development of mathematical logic, didactic activities, duties, academic trips, current research topics, prospects for publications and future publishing plans, organizing help during the Second World War and shortly after it, personal matters.

There is another topic worth mentioning. The "Group from Münster" wrote that Jan Łukasiewicz and Stanisław Leśniewski were the first researchers to discover the value of Gottlob Frege's logic. Frege's voluminous correspondence and Philip Jourdain's article devoted to Frege's logic show that the statement is not entirely true. However, it needs further in-depth research.

The correspondence includes such thought-provoking quotations as the following:

Do you remember that in the last letter you sent me before the war you expressed the hope of meeting me in the United States in 1940 if „unsere schöne abendländische Kultur noch existieren wird"? These words resounded prophetically to me during the whole time of the war. Well, „unsere schöne abendländische Kultur" still exists – – though badly hurt and crippled; and I do hope, dear friend (if I may address you this way), that I shall see you again in the not too distant future. (Tarski-Scholz, 21.10.1946)

Preserved documents demonstrate that during the war Scholz and others substantially helped at least four Polish academics: Jan Łukasiewicz and his wife Regina, Alfred Tarski's family, Jan Salamucha, and a colleague from Cracow, Professor [Tadeusz] Kowalski (a Polish orientalist and secretary of Polska Akademia Umiejętności / the Polish Academy of Arts and Sciences). They tried to help Joachim Metallmann (1889-1942), who died in Buchenwald. However, this topic has already been described in Polish and foreign literature (Jadacki 2017; Schmidt H.-Ch. am Busch, K.F. Wehmeier 2007).

This correspondence was made available to the Polish scientific community for the first time during the 9th Polish School of the History of Mathematics in Międzyzdroje, 5-9 June

[1] It is a lost letter. Łukasiewicz took a quotation from it in an article, see J. Łukasiewicz, *O znaczeniu i potrzebach logiki matematycznej*. „Nauka Polska" 1929, vol. 10, p. 604 – 620.

1995. Polish translations of excerpts from four letters from Łukasiewicz and one from Mostowski appeared as an appendix to Peter Schreiber's article in 1995 and in German in 1998.

I have found four original documents written by Scholz to Czeżowski in the Archives of the Nicolaus Copernicus University in Toruń (Poland) and one draft of Czeżowski's letter to Scholz, from 1949–1951. It can be assumed that other Polish archives also contain Scholz's letters.

Based on my research I claim that Scholz and the Group from Münster knew good Polish logicians' papers and referred to them in their research, publications as well as teaching. The Polish logicians were asked to help them with studying mathematical logic and correcting their papers while the German logicians critically referred to their results and corrected German language in some articles written by the Polish logicians.

Work is underway at the University of Silesia in Katowice to prepare a Polish translation of the correspondence between the Polish logicians and Scholz. The following works are in progress:

1. Reading, transcribing, translating, and preparing scientific comments.
2. Working on the correct translation of logical and mathematical terminology.
3. Searching for Scholz's letters in Polish and foreign archives.
4. Establishing copyrights to the letters.

The first part of transcribed German or English originals and their Polish translations has been published first as teaching materials (in a "draft", only electronic version available in open access) in the repository maintained by the Scientific Information Center and Academic Library (CINiBA) in Katowice (see Besler, et al 2022). The translations have been prepared with a team of students as a part of didactic projects led by the University of Silesia in Katowice.

To sum up, Heinrich Scholz's co-operation with the Polish logicians of the Lvov-Warsaw school was fruitful for both sides. Their correspondence preserved in Universitäts- und Landesbibliothek Münster (Germany) testifies to a successful international scholarly collaboration. However, so far little is known about the details of their co-operation. In addition I consider the publication of the letters as a contribution to biographies of the mentioned academics.

References

Besler G.: *The Correspondence between Józef M. Bocheński (1902-1995) and Heinrich Scholz (1946-1954)*. „Studies in East European Thought", 2022, vol. 74, p. 197–210. doi:10.1007/s11212-021-09447-w.

Besler G., (et al.): *Translation and Edition of the German Professor Heinrich Scholz's Correspondence with Polish Logicians: Kazimierz Ajdukiewicz, Tadeusz Czeżowski, Jan Łukasiewicz, and Jerzy Słupecki*. In: *Repozytorium Uniwersytetu Śląskiego* (https://rebus.us.edu.pl/), Katowice 2022, p. I–VIII, 1–29. URL: http://hdl.handle.net/20.500.12128/23584.

Bocheński, J.M.: *O filozofii analitycznej* (*About Analytic Philosophy*). In: J.M. Bocheński: *Logika i filozofia* (*Logic and Philosophy*), Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993. p. 35–49.

Jadacki J.J.: *The Lvov-Warsaw School and Austro-German Philosophers. Two Cases*. In: *The Significance of the Lvov-Warsaw School in the European Culture*. Eds: A. Brożek, F. Stadler, J. Woleński. Springer 2017.

Jourdain P.E.B.: *The Development of the Theories of mathematical Logic and the Principles of Mathematics*. "The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics" 1912, vol. 43, p. 237–269.

Peckhaus V.: *Heinrich Scholz*. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2018 Edition. Ed. E.N. Zalta, https://plato.stanford.edu/entries/scholz/ [access: 1.04.2019].

Schmidt H.-Ch. am Busch, K.F. Wehmeier: *On the Relations between Heinrich Scholz and Jan Łukasiewicz*. „History and Philosophy of Logic" 2007, vol. 28, p. 67–68.

Scholz H.: *Abriss der Geschichte der Logik*. Berlin, Junker und Dünnhaupt, 1931. Polish Edition: *Zarys historii logiki*. Tłum. M. Kurecka-Wirpszowa. Introduction to Polish edition T. Kotarbiński. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1965.

Schreiber, P.: *O związkach Heinricha Scholza z logikami polskimi*. In: St. Fudali (red.) *Matematyka Polska w stuleciu 1851–1950.* Szczecin, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, 1995.

Schreiber, P.: *Über Beziehungen zwischen Heinrich Scholz und polnischen Logikern*. In: Toepell M. (Ed.). *Mathematik im Wandel*, Bd. 1. Hildesheim-Berlin, Verlag Franzbecker, 1998.

Documents from the collection Nachlass Heinrich Scholz, Universitäts- und Landesbibliothek Műnster, Dezernat Historische Bestände (Germany) https://www.ulb.uni-muenster.de/sammlungen/nachlaesse/nachlass-scholz.html

Bocheński J.M.: *Ueber die Bedeutung der mathematischen Logik fuer die Philosophie und ihre Geschichte*; date 08.07.1951.

Leśniewski S.: *Ueber die Matrizenmethode in der Mathematik*, date 16.01.1935.

Mostowski – Scholz, 05.02.1947. Andrzej Mostowski's letter to Heinrich Scholz (in German).

Tarski-Scholz, 21.10.1946. Alfred Tarski's letter to Heinrich Scholz (in English).

Gabriela Besler

1948 - Das Denken in Strukturen in Lyrik und Mathematik: Kurt Reidemeisters Mallarmé-Übersetzung und Nicolas Bourbakis Architektur

Philippe Séguin

1948 erschien der Sammelband *Les grands courants de la pensée mathématique* (*Die großen Strömungen des mathematischen Denkens*) mit dem berühmten Bourbaki-Artikel „Die Architektur der Mathematik“, in dem vielleicht zum ersten Mal der Begriff „Struktur“ auf die Mathematik angewandt wurde. Da der Band aber erst zwei Jahre später in der englischen Übersetzung wirklich an die Öffentlichkeit gelangte, ist anzunehmen, dass Kurt Reidemeister keine Kenntnis davon hatte, als er im selben Jahr seine Mallarmé-Übersetzung veröffentlichte. Diese hatte mit Mathematik unmittelbar nichts zu tun, und sie war nicht speziell für Mathematiker gedacht: Reidemeister gehörte nämlich zu den Gelehrten, die nach 1933 in Deutschland blieben, aber darauf bedacht waren, sich mit den Nationalsozialisten nicht zu kompromittieren, sodass er von der Besatzungsmacht die Möglichkeit erhielt, im gerade gegründeten kleinen Scherpe-Verlag im Rahmen des Entnazifizierungsprogramms eine Auswahl aus Mallarmés Gedichten zu veröffentlichen.

Stéphane Mallarmé (1842-1898) hat sehr wenig geschrieben und gilt als hermetisch und schier unübersetzbar, aber nach 1900 betrachteten ihn viele Dichter als den Begründer der modernen Lyrik wie z. B. in Frankreich Wilhelm Albert Włodzimierz Apolinary Kostrowicki (Guillaume Apollinaire, der Erfinder des Wortes „surréaliste“), Stefan George in Deutschland und Rilke in Österreich, Witkiewicz in Polen, Alexander Blok in Russland, und viele andere. Einige seiner Gedichte waren in Deutschland bereits vor dem Krieg übersetzt worden, allerdings mit unterschiedlichem Erfolg.

In diesem Beitrag möchte ich anhand eines Gedichts und seiner Übertragung durch Reidemeister zeigen, dass durchaus ein Zusammenhang zwischen Mathematik im Allgemeinen, Bourbakis Ideen im Besonderen und Mallarmés Dichtkunst besteht, und dass es kein Zufall ist, wenn der für das „exakte Denken“ eintretende Mathematiker Reidemeister sich für die sogenannte „dunkle“ Lyrik Mallarmés so interessierte, dass er sich als erster in Nachkriegsdeutschland an eine Übersetzung heranwagte. Zunächst soll ein Gedicht und seine Übersetzung vorgestellt und diskutiert werden, dann will ich auf Zusammenhänge zwischen Mallarmés Lyrik und der Mathematik hinweisen, und schließlich versuchen, folgende Frage zu beantworten: Was hat Reidemeister in Mallarmés Werk gesehen, was die Bourbakisten nicht sehen konnten ?

1. Annäherung zum Verständnis des Gedichts

SAINTE	HEILIGE
1 A la fenêtre recelant	Am Fenster, unter dem verhehlt
Le santal vieux qui se dédore	Das alte Sandelholz vom Gold
De sa viole étincelant	Der Geige träumt, erfunkelnd einst
Jadis avec flûte ou mandore,	Mit Flöte oder Mandoline,
5 Est la Sainte pâle, étalant	Steht bleich die Heilige, aufgetan
Le livre vieux qui se déplie	Das alte Buch, entfaltend sich
Du Magnificat ruisselant	In Lobpreis niederrinnend einst
Jadis selon vêpre et complie :	Zu Vesper oder Abendssegen:
9 A ce vitrage d’ostensoir	Am heilig gläsernen Gehäus,

Que frôle une harpe par l'Ange	Das eine Harfe streift, vom Engel
Formée avec son vol du soir	Aus seinem Abendflug geformt
Pour la délicate phalange	Für eines Fingers zarten Griff,
13 Du doigt que, sans le vieux santal	Der ohne altes Sandelholz,
Ni le vieux livre, elle balance	Ohn altes Buch, zu Gleichklang rührt
Sur le plumage instrumental,	Gefieder wie ein Instrument —
Musicienne du silence.	Steht sie und ist Musik aus Schweigen.

1. 1. „Man kann sich dieser Dichtung nicht vom Inhalt her annähern" Reidemeister

Ob in der Originalsprache oder in einer Übersetzung, der Zugang zu dieser Art von Lyrik dürfte manch einem Nicht-Eingeweihten aussichtslos erscheinen. Bedeuten die Heilige, das alte Buch, das Gefieder dasselbe wie in der Außenwelt? Vielleicht ist es besser, von einer „Bedeutung" im Sinne von *denoting* abzusehen, und nach einem „Sinn" innerhalb des Gedichts zu fragen. Fassen wir mal sehr kurz und kühn zusammen: Am Fenster (1. Vers) steht eine bleiche Heilige (V. 5) und spielt Musik (passim), aber ihre Musik besteht oder entsteht aus Stille (letzter Vers). Warum Dichter aus ganz Europa begeistert waren, ist heute schwer nachvollziebar. Fragen wir also lieber in Anlehnung an Reidemeisters Feststellung, was dieses Gedicht *nicht* bietet, und vielleicht erfahren wir, wogegen diese neue Poetik ankämpfte, im Bewusstsein, dass der Gang des abendländischen Denkens unentwegt von der Negation des Vorherigen vorwärts getrieben wird.

Es mangelt an allem in diesem Gedicht: Wo ist die Natur, das Mädchen, das liebende Ich, kurz, das Frohlocken oder die Klage? (Goethe) Oder: Wo ist die Idee, der Wert der ehrlichen Arbeit? (Schillers *Glocke*)? Und wie ist es mit der Politik, der Revolution oder dem Trost nach der Resignation (Heine)? Nichts von alledem, Humor und Moral fehlen gänzlich. Das ist natürlich der Mathematik nicht unähnlich, denn wo sind Empfindungen, Gefühle, moralische Gebote in den mathematischen Formeln? Wo ist das „Ich"? So weist Reidemeister auf eine weitere Ähnlichkeit hin.

1. 2. „Bei Mallarmé versagt die biographische Interpretation [...]" Reidemeister

Was heißt „biographische Interpretation?" Nehmen wir beispielsweise *Mailied*: Ein Umweg über das Liebesleben des jungen Goethe ist wohl nicht zu vermeiden. Das wunderbare Erscheinen der artigen Friederike in der Tür des Pfarrhauses zu Sessenheim ist die Quelle der Inspiration. Über das Herz kommt die Inspiration, oder allgemeiner gesagt, der Entstehung dieses Gedichts liegt ein *Erlebnis* zugrunde. Gegen diese Art von Erlebnislyrik und der anschließenden Romantik übernimmt Mallarmé die Poetik von Edgar Allan Poe, der behauptet, er hätte sein Gedicht *The Raven* (*Der Rabe*) systematisch konstruiert. Man kann es auch anders ausdrücken: ein Gedicht ist Arbeit, nur Arbeit, und da haben wir eine weitere Gemeinsamkeit mit der Mathematik: Mathematik ist „Arbeit, saure Arbeit" schreibt Jacobi, und hat ebenfalls wenig mit romantischer Inspiration zu tun. Allerdings kann man sich durchaus vorstellen, dass ein Dichter tagelang an einem Gedicht feilt, um daraus ein kleines Juwel zu schaffen. Vielleicht hat das sogar Goethe mit *Mailied* getan! Aber Mallarmé war ein großer Poe-Bewunderer, und er hat seine Poetik nicht nur übernommen, er war der eigentliche Erbe und Vollstrecker seiner Ideen. Das führt uns zu einem weiteren, interessanteren Aspekt der Ähnlichkeit zwischen Mallarmés Lyrik und der Mathematik seiner Zeit.

Poes Kunsttheorie ist eine Kriegserklärung an das, was er den „holden Wahnsinn" und die „ekstatische Intuition" nennt: „The work [*The Raven*] proceeded, step by step, to its completion with the precision and rigid consequence of a mathematical problem." heißt es in *Philosophy of Composition* (*Compl. Works* 14, 195). Indem Mallarmé dieses Credo befolgt, verwirft er die gefühlsbetonte oder didaktische Lyrik, d. h. er *emanzipiert* die Lyrik von der

Außenwelt sowie die Mathematik des 19. Jh. sich etwa durch die arithmetische Definition der Stetigkeit oder die Einbürgerung der nichteuklidischen Geometrien von den Fesseln der Anschauung emanzipierte (Man erinnere sich an Poincarés Worte 1905: "Wie kann uns Anschauung derart täuschen?", von Bourbaki zitiert; *Éléments d'histoire des mathématiques*, S. 27, Übers. Ph. S.). Lyrik und Mathematik gewinnen an Abstraktion. Das ist aber bei Weitem nicht alles, und Reidemeister präzisiert seine Charakterisierung.

2. formalistische Lyrik und axiomatische Mathematik

Laut Reidemeister ist Mallarmé bemüht, „die Sprache des Empfindens bewusst und genau in einer angemessenen Grammatik aus den Sprachelementen neu zu erschaffen [...]". Um grammatische Regeln im üblichen Sinne geht es gewiss nicht, denn in Wien las Reidemeister Wittgensteins *Tractatus logico-philosophicus*: dort wird „*logische* Grammatik" mit „logische[r] Syntax" gleichgesetzt, also ist „Grammatik" nicht didaktisch, sondern logisch zu verstehen. Aber wahrscheinlich aus Rücksicht auf seine Leserschaft sollte sein Nachwort nicht zu wissenschaftlich wirken. „Angemessen" ist ein Lieblingswort vom auf „Exaktheit" bedachten Reidemeister. Er benutzt es z. B. um die „Distanz" zu bezeichnen, die seiner Auffassung nach das Metamathematische durch dessen logische Form vom Anschaulichen trennt. (*Die Unsachlichkeit der Existenzphilosophie*, 1954, 2. Aufl. 1970, S. VII) Auch der Terminus „Sprachelemente" ist im Zusammenhang mit Lyrik nicht fehl am Platz: Klingt es nicht so, als ließe sich selbst aus einer Zusammenstellung von in der Geschichte der axiomatisierten Mathematik so ruhmreichen Wörtern wie „Liebe", „Gesetz", Schornsteinfeger",[1] und gewiss auch anderen, ein Gedicht „Schritt für Schritt" machen? So extrem ist es wohl nicht, es heißt ja „die Sprache des Empfindens", also ist die Wortwahl nicht beliebig, und trotzdem ist die Analogie zwischen Mallarmés Vorgehen und der axiomatischen Methode offensichtlich: es ist die *Struktur*, die *Form* des Textes, ob lyrisch oder mathematisch, die den Sinn produziert. 1948 fasst Jean Dieudonné Hilberts „Programm" wie folgt zusammen: „Das eigentliche *Wesen* der untersuchten Dinge zählt nicht; nur die *Beziehungen*, die diese Dinge untereinander unterhalten, ist von Belang [...]" (295) 1956 formuliert der Lyrik-Spezialist Hugo Friedrich Poes ästhetisches, von Mallarmé umgesetztes Programm so: „Der Einfall Poes besteht darin, dass es die von der älteren Poetik angenommene Reihenfolge der dichterischen Akte umkehrte. Was Resultat scheint, die ‚Form', ist der Ursprung des Gedichts; was Ursprung scheint, der ‚Sinn' ist Resultat." (51)

Die Parallelen zwischen Mallarmés Poetik und Hilberts Auffassung der Mathematik sind auffallend. Hier zusammenfassend einige Gemeinsamkeiten, die alle mehr oder weniger miteinander verflochten sind:

- Ungefähr zeitgleich mit Hilbert macht Mallarmé seinen Dichterkollegen die selbe Bemerkung wie Hilbert seinem Kollegen Frege: sein Werk *bedeute* nichts, aber es *produziere* Sinn.
- Deswegen wurden sowohl Mallarmé als Hilbert des Formalismus bezichtigt.
- Mit anderen Worten: es wohnt Mallarmés Poetik und Hilberts Axiomatik ein kreatives Moment inne: Sie verdoppeln, widerspiegeln, oder bilden die Außenwelt keineswegs ab. Hilbert schreibt ohne Umschweife an Frege, dass die von ihm durch Axiome definierten Dinge „existieren". Mallarmé wünscht sich, dass seine Leser glauben, „etwas zu erschaffen".
- Beide bestanden auf „Reinheit": „la poésie pure" beim einen, „das reine Denken" (*Probleme, G. A.* 293-298) beim anderen.

[1] Siehe Hilberts Brief an Frege vom 29. 12. 1899, Felix Meiner Verlag 1980, S. 13.

— Beide zielten auf unendliche Anwendbarkeit hin: Mallarmé wollte jedem Leser die Freiheit der Interpretation seiner Verse überlassen, während Hilbert am Schluss der *Probleme* proklamierte, die Mathematik sei „die Grundlage alles naturwissenschaftlichen Erkennens".
— Und schließlich, Mallarmés Poetik und Hilberts Axiomatik revolutionierten nachhaltig ihre jeweiligen Gebiete.

Aber bei all diesen Übereinstimmungen unterscheiden sich letztere grundsätzlich voneinander: Hilberts Denken ist wesentlich positiv und zukunftsorientiert: Wenn Dieudonné schreibt, Hilbert sehne sich unermüdlich nach einer immer einheitlicheren, reineren und nüchterneren Wissenschaft (*Strömungen* 297), dann bezeichnen diese drei Komparative für ihn drei wesentliche Aspekte von Hilberts unwiderstehlichem Bedürfnis zu „*verstehen*" (ebd., kursiv bei Dieudonné), das es gilt, an die jüngeren Generationen weiterzugeben. Mallarmé hingegen verzichtet auf jegliche Mitteilung: sein Gedicht ist nur noch Musik, der Dichter macht keine Aussage. Aus diesem Schweigen kann sich zwar jeder Leser, wenn er es wünscht, seine eigene poetische Blume frei erdenken. Mallarmé jedoch war sich durchaus bewusst, dass diese „absolut" (ein Wort, das ihm viel galt) negative Art zu dichten „eine Sackgasse" war.

Reidemeister und die für *Die Großen Strömungen* schreibenden Mathematiker waren Nachfahren und Verehrer von Hilbert. Auch in dem Sammelband wurde Mallarmé nicht vergessen: Im Kapitel „Die Schönheit in der Mathematik" kann man ganze zwei Verse von ihm lesen (445). Sie dienen zur Illustration der durch elliptische Funktionen veränderten Pascalschen Schneckenkurve, und stehen unter der Rubrik „Die romantische Schönheit in den mathematischen Fakten". Man stelle sich vor: Der antiromantische, der Zurschaustellung von inneren Stimmungen völlig abgeneigte Mallarmé musste zur Bebilderung romantischer Schönheit herhalten! Offensichtlich verstand Reidemeister Mallarmé viel besser als der kunstbeflissene Bourbaki. Man kann sich kaum des Eindrucks erwehren, dass Bourbaki andere Bereiche wie Kunst, Philosophie und Literatur nur dann gnädig behandelt, wenn sie der Mathematik zu Dienste stehen. Andererseits ist es verwunderlich, dass Raymond Queneau, der Autor von *Zazie in der Metro* und von *Hunderttausend Milliarden Gedichte*, einen Aufsatz zum Platz der Mathematik in der Klassifizierung der Wissenschaften verfasste, aber nichts zur Lyrik im Allgemeinen, und zu Mallarmé im Besonderen beitrug. Aber 1948 konnte sich kaum ein französischer Geist für Mallarmé erwärmen, dieser war völlig unzeitgemäß. Ganz anders bei Reidemeister, dem dessen Poesie schon lange vertraut war, und in seinem Leben nicht wirkungslos geblieben war.

3. Was hat Reidemeister gesehen, oder erfahren, wofür Bourbaki blind war?

In seiner 1953 erschienenen Essaysammlung *Geist und Wirklichkeit* schreibt Reidemeister im „Appell im Elend" betitelten Kapitel folgendes: „In der Öde fand ich ein Kristall aus Geist und Verzweiflung, die edel schien." Dann liefert er einen Übersetzungsversuch eines Mallarmé-Gedichts, das eigentlich keinen Titel trägt. Er nennt es aber „Der Schwan", wahrscheinlich in Erinnerung an Baudelaire, wobei das französische Wort für Schwan, „cygne", genauso wie „signe", „Zeichen", klingt. In diesem formvollendeten Sonett befindet sich der sinnreiche Vogel im Todeskampf, weil er nicht rechtzeitig vor dem Winteranfang wegflog, und sich jetzt vom vereisten See nicht mehr befreien kann. Aber in diesem „nutzlosen Exil" verharrt er voller Verachtung in seiner verzweifelten Schönheit. In einem kurzen Kommentar erwähnt Reidemeister die „wunderbare Widerstandskraft und Beständigkeit", die aus dem Gedicht spricht, sowie die Tatsache, dass es „keinen falschen Trost" spendet. Das, worauf Reidemeister anspielt, hatte seit 1945 einen Namen, es hieß „innere Emigration".

Der Romanist Kurt Wais hatte 1952 in seinem Buch über Mallarmé Reidemeister seine „entwaffnende Unkenntnis der französischen Sprache“ vorgeworfen. Tatsächlich sind Reidemeister einige Fehler untergelaufen. Aber Wais hat nicht erkannt, was eigentlich viel gewichtiger ist, nämlich dass Reidemeister Mallarmés Lyrik sehr wohl begriffen hat, da er bereits 1948 in seinem Nachwort und mit seinem eigenen Wortschatz etwas Ähnliches formuliert, wie der oben bereits genannte Hugo Friedrich in seinem erst 1956 erschienenen und zum Klassiker gewordenen Standardwerk *Struktur der modernen Lyrik*. Nicht zufällig wurde in der Zeit des „nutzlosen Exils“ (s. oben) Friedrich von den Nationalsozialisten „übertriebenen Intellektualismus“ vorgeworfen. Ist das nicht eine andere Bezeichnung für das Schimpfwort „Formalismus“, mit dem Ludwig Bieberbach die Mathematik von Hilbert, also auch von Reidemeister, belegte? Für diesen, wie höchstwahrscheinlich für Friedrich, war Mallarmés Lyrik der letzte verzweifelte Halt in der Öde. Wais, der seine erste Professorenstelle von 1942 bis 1945 an der sogenannten Reichsuniversität Straßburg innehatte, nach 1945 aber sechzehn Jahre warten musste, bis er wieder Ordinarius wurde, konnte das anscheinend nicht nachempfinden. Was die Bourbakisten angeht, so waren sie bereit, Paul Valéry, dem sozusagen inoffiziellen französischen *poeta laureatus*, das Verfassen eines Vorworts für *Die großen Strömungen* zu überlassen, jedoch nicht, weil er anerkannter Erbe von Mallarmé war, sondern eigentlich nur deswegen, weil er als ein sehr guter Kenner der Mathematik seiner Zeit galt. Welche Rolle Mallarmé, von dem man zu dieser Zeit annahm, er interessiere sich nicht im geringsten für die Wissenschaft, im Leben eines deutschen Knotentheoretikers zwischen 1933 und 1945 gespielt hatte, hätte die Bourbakisten bestimmt sehr wundergenommen.

4. Höher als das Strukturdenken: Dessen Exaktheit oder Einheit

Dass Reidemeister nicht nur Mathematiker, sondern auch philosophisch tätig war und sogar Gedichte schrieb, kann man z. B. im von seinem ehemaligen Studenten Raphael Artzy verfassten, in den *Jahresberichten* der DMV erschienenen Nachruf lesen, in dem sich ein sehr ausführliches Literaturverzeichnis befindet. Allerdings wird seine Mallarmé-Übersetzung nicht erwähnt. Dasselbe gilt für die Notiz in den *Mathematischen Annalen* und den Artikel im *DSB*. Dass sich Reidemeister sehr für Mallarmé interessierte, und zwar in der schwierigsten Periode seines Lebens, konnte dennoch nicht übersehen werden, denn die oben erwähnte Anspielung auf den *Schwan* ist in der oben bereits erwähnten, gegen die Existenzphilosophie Heideggers gerichtete Essay-Sammlung *Geist und Wirklichkeit* zu lesen, die von seiner kämpferischen Haltung gegen das nicht exakte Denken nach dem Krieg Zeugnis ablegt. Allerdings scheint die Beschäftigung mit Mallarmé zeitlich begrenzt gewesen zu sein.

Wie viele Mathematiker vor ihm war und blieb Reidemeister davon überzeugt, dass das wissenschaftliche, „exakte“ Denken einen sittlichen Wert habe und den Menschen ethisch bilde. Eine solche Vorstellung war dem polykephalen Bourbaki, dem es vermutlich schwer fiel, philosophisch und politisch einig mit sich zu sein, fremd: von 1948 bis 1987, dem Erscheinungsjahr von Dieudonnés letztem Buch *Pour l’honneur de l’esprit humain*, schien die Einheit, „die tiefgründige und oft geheimnisvolle Einheit der Mathematik“ (ebd., S. 89, Übers. Ph. S.), das Schönste, wonach ein echter Mathematiker überhaupt streben sollte.[2]

[2] Moritz Epples Beschäftigung mit Reidemeister und anderen Themen verdanke ich wertvolle Anregungen.

Miesenbach 2022

Cyparissos Stephanos' unsuccessful attempt to translate Erlanger Programm

Christine Phili

I. Introduction

After the defeat of 1870 , the foundation of the French Mathematical Society in 1872 ,as well as the establishment of its *Bulletin des Sciences mathématiques* created in 1873, organized and reinforce the French mathematical community.

So, when in autumn 1878 Cyparissos Stephanos (1857-1917) with his Ph.D from Athens university, mastering French and German, arrived to Paris in order to prepare his Thèse d'État under Ch. Hermite's supervision, he found this atmosphere of scientific euphoria and national exaltation.

On the 14th of February 1879 the young Greek mathematician presented his first communication in the French Mathematical Society[1] regarding a remarkable property of irrational numbers, which was published in the Bulletin of the French Mathematical Society[2].

During the next session, on the 28th of February 1879, Stephanos was introduced by Halphen and Laguerre to this newly established scientific Society[3] and in the next session, this of 14 March 1879, was elected member of the French Mathematical Society[4].

In this same year Stephanos showed evidence of his mathematical talent and presented six interesting papers mainly focused on geometry[5]. All this

1 Twice in month from November to July took place the sessions of the French Mathematical Society.
2 C. Stéphanos, «Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables». *Bulletin de la Société Mathématique de France.* Vol. 7, Paris 1879, pp. 81-83.
3 *Bull. S.M.F.* Vol. 7 1879, p. 205.
4 Idem.
5 See f. ex. C. Stéphanos, Sur une généralisation de la théorie des groupes projectifs de staudt (session of 28 March 1879); Sur la correlation dans le plan (session of 13 June 1879); Sur le système de trois tétraèdres dont deux quelconques sont en perspective, par rapport à chacun de sommets du trosième

scientific activity became his modus viventi for the young Greek mathematician during his Parisian sojourn (1878-1884).

Under Laguerre's presidency (1880-1881) Stephanos was appointed archivist of the French Mathematical Society. From his new post of archivist he tried to develop the scientific relations as well as the exchange of the *Bulletin of the Mathematical Society* with other well known mathematical journals.His first letters to Klein and to Mittag-Leffler reflected his concern to contribute to the regular exchanges of the *Bulletin* with *Mathematische Annalen*[6] and *Acta Mathematica*[7].

His reputation as research worker as well as the post of archivist gave him the great opportunity to attend the milieu of the distinguished mathematicians of his epoch.

Characteristic is the following fragment of Lie's letter to Klein on October 1882:

«... In the Academy I met with Halphen, Darboux, Poincaré, Levy and Stephanos, all of whom were very obliged»[8]. Continuing his letter he added: *«Halphen, Darboux and Stephanos spoke with the highest praise about you»*[9].

Two years later Lie's expressed his favorable opinion regarding Stephanos' research in his letter on the 1st February 1884 to E. Holst, stressing that the acquaintance of the young Greek mathematician gave him great pleasure *«who as a gifted mathematician seems to win the esteem of all»*[10].

However Stephanos' activities were not only focused on his publications and on his administrative duties. He tried to enrich the French Mathematical

(session of 11 July 1879); Sur un certain covariant relatif à une courbe de la classe m et à une conique (session of 25 July 1879) etc.

6 From his post at the Erlangen University Klein accepted to exchange *Mathematische Annalen with the Bulletin de la Société Mathématique de France.* See *Bull. S.M.F.*, Vol. 1, 1872-1873, Paris 1873, p. 121.

7 See his letter to F. Klein (4 March 1882) as well as to Mittag-Leffler (19 March 1883). Ch. Phili Stephanos' eight unpublished Letters to Felix Klein». *Proceedings of the Academy of Athens* Vol. 87 A´ 2012, p. 38. «Six unpublished Letters of Cyparissos Stephanos to Gösta Mittag-Leffler» *Proceedings of the Academy of Athens.* Vol. 91, A´ 2016, pp. 93-94.

8 D. E. Row, «Three Letters from Sophus Lie to Felix Klein on Parisian Mathematics during the early 1880's» *The Mathematical Intelligencer* Vol. 7 (3) 1985, p. 76. Letter of October 1882, *Niedersächsische Staats und universitätsbibliothek.* Göttingen Cod. Ms. Klein 10. Nr. 685.

9 Idem.

10 A. Stubhaug, *The Mathematician Sophus Lie. It was the Audacity of my thinking.* (transl. from the Norwegian by R. H. Doly) Springer Verlag 2002, p. 292.

Society with new members. So, he became the godfather (*parrain* in French) of two great mathematicians of his epoch. And moreover in spite all the existent prejudices against the mathematical "qualifications"[11] of S. Kowaleskaya who at that period lived in Paris, he «dared» to present her in the French Mathematical Society.

Thus, on the 21th of April 1882 Henri Poincaré was introduced by Halphen and Stephanos[12] to join the French Mathematical Society and from that period started the friendship between these two young mathematicians.

Two months later during the session of the 21th of June 1882, Stephanos and Picquet introduced Madame Sophie de Kowalewski, to become member of the Society[13]. Once more time the esteem of the Parisian mathematicians was concretized as they permit to the archivist to preside the session of the 6 July 1883[14].Moreover during the session of the 18th January 1884 ,Lie joined the French Mathematical Society *«Mr. S. Lie, professor at the University of Christiania was introduced by M.M. Halphen and Stephanos and was elected member of the Society»*[15] .

II. F. Klein's Erlanger Programm

F. Klein (1849-1925) only 23 years old was appointed to a full professorship at the Erlanger University. On this occasion on the 7th of December 1872 gave a lecture[16], his Erlangen *Antrittsrede*[17] ,which was not the famous *«Vergleichende Betrachtungen ueber neure geometrische Forschungen».*

11 Ch. for example the letter of the 15th October 1882 of Charles Hermite to Gösta Mittag Leffler. Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag Leffler éditées par P. Dugac. *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 5, 1984, p. 177.

12 According to the status of the Society still valid until today any new member must be introduced by two members of the Society. *Bull. S.M.F.,* Vol. 12 1882-83, p. 251.

13 *Bull. S.M.F.,* Vol. 12, 1882-1883, Paris 1883, p. 254.

14 *Bull. S.M.F.,* Vol. 12 1882-83. Paris 1883, p. 202.

15 *Bull. S.M.F.,* Vol. 12, 1883-1884, Paris 1884, p. 146.

16 D. E. Row, «A forgotten chapter in the History of Felix Klein's Erlanger Programm» *Historia Mathematica.* Vol. 10, 1983, pp. 448-457.

17 The topic of his lecture was the pedagogical principles and goals of his future academic activity.

So, the newly appointed professor at the University in order to introduce himself to his colleagues was obliged to submit a published program[18], which was distributed as a pamphlet.

According to his own account, the *Erlanger Programm* was composed in October 1872 and its source can be traced back to ideas presented in his paper *«Ueber die sogennante nicht euklidische Geometrie, zweiter Aufsatz»*[19].

Klein, who had as target to stress the unity for the fragmented geometry, started this historical essay identifying each of the continuous groups of geometric transformations that was associated with some branches of geometry[20]. Firstly he discussed the principal group (Hauptgruppe) and there he presented *«a larger project group. the conformal group generated by inversions, the group of birational transformations leaving invariant the singularities of algebraic varieties, which contained all of the preceding, groups, and the (still more general) group of all homeomorphisms leaving the topology of a manifold or space invariant»*[21].

Later Max Noether, in his obituary article for Lie stresses the connections between *Erlanger Programm* and Lie's works:

«In the Erlanger Programm for the first time [we find unveil] *the central role of the transformation group for all geometrical investigations... and that, with invariant properties, there is always associated such a group... Lie, who worked with most varied groups, ...found the idea congenial from then on»*[22].

At that period Klein's dominance in geometry was indisputable and quickly he became the only heir of the German «school» of geometers: Möbius, Steiner, von Staudt, Plücker and Clebsch

18 F. Klein, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen* Bd. I, R. Fricke und A. Ostrowski (hersg) Berlin J. Springer 1921, p. 411.
19 Idem.
20 Professor R. Tobies stressed that the *Erlanger Programm «bildete... eine entscheidenende Zäsur für die Geometrie des 19. Jahrhunderts. Die Verwedung des Gruppenbegriffes durch Klein unterstützte die Ansätze strukturellen mathematischen Denkens, die sich gegen Ende des 19. Jahrhunderts heraus bildeten».* R. Tobies, *Felix Klein* 1981. Leipzig: BSB, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, pp. 36-37.
21 G. Birkhoff and M. K. Bennet, «Felix Klein and his «Erlanger Programm»» in *History and Philosophy of modern mathematics,* ed. W. Aspray and P. Kitcher, Minnesota studies in the Philosophy of science. Vol. 11 Minneapolis: University of Minnesota Press, p. 151.
22 M. Noether, Sophus Lie, *Mathematische Annalen* Bd. 53. 1900, p. 23 and G. Birkhoff and M. K. Bennet, *op. cit.,* p. 153.

III. Stephanos' relationship with Klein and the refusal of his translation

In the session of the 1st June 1883 of the French Mathematical Society, Stephanos presented his communication on the geometrical representation of quaternions[23]. In this same year this work was published in *Mathematische Annalen*[24].

In reality this paper constitutes a letter which Stephanos sent to Klein. Professor Arild Stubhaug in his book on Lie, unveiled that *«Lie praises Stephanos' paper, which was published in Mathematische Annalen»*[25].

In his preface regarding Henri Poincaré's correspondence, professor Philippe Nabonnand stresses that Poincaré and Klein were convinced on *Acta Mathematica's* important role and mainly for its task to diffuse new ideas in mathematics[26]. So according to this policy *i.e.* to publish German articles probably initiated by Stephanos' idea to present *Erlanger Programm,* Poincaré on the 14th August 1883 sent a letter to Mittag-Leffler, where among others underlying that: *«some publicity would be useful to many geometers, and especially to the French»*[27].

We must take into consideration that in spite their scientific rivalry concerning the theory of Fuchsian fonctions the relations between Poincaré and Mittag-Leffler were good.

Let us permit to present the following fragment from Poincaré's letter on 14th August 1883:

«... I am sending you a pamphlet by Mr. Klein. Stephanos thought that a translation of this little known booklet would be of interest to readers of Acta and he has offered to translate it. I also believe that this pamphlet, though written a somewhat obscure style contains ideas that are very justified and

23 *Bull. S.M.F.* Vol. 10, 1882-1883. Paris 1883, p. 203.
24 C. Stéphanos, «Sur la théorie des quaternions» *Mathematische. Annalen.* Bd. 22 1883, pp. 589-592.
25 A. Stubhang, *The Mathematician Sophus Lie. It was the audacity of my thinking* (trad. from Norwegian by R. H. Daly) Springer Verlag 2002, p. 304.
26 *La correspondance d'Henri Poincaré.* Vol. 1. *La correspondance entre Henri Poincaré and Gösta Mittag Leffler* présentée et annotée par Philippe Nabonnand. Birkhäuser Verlag Basel-Boston-Berlin 1999. Préface, p. 7.
27 IDEM.

unfortunately not very widespread. I thus believe that giving these ideas some publicity would be useful to many geometers, and especially to the French»[28].

As *Acta's* unexpected success surprised even its editor, Mittag-Leffler very quickly abandoned his idea regarding translations as at his office were already accumulate so many original papers waiting to appear in *Acta's* pages[29].

Thus, the position of the Swedish mathematician to Poincaré's appeal remains firm and irrevocable:

«25 August 1883 Sma-Dalzö.

I am very grateful for Mr. Stephanos' kind offer to translate into French the work you sent me by Mr. Klein. It will, however, very difficult for me to publish this translation. In my hands I have so many original papers or essays which I expect to receive in the future. So it is almost impossible to publish new translations»[30].

Stephanos knowing that Poincaré's appeal remained unsuccessful, informed his mentor regarding Mittag-Leffler's refusal. So, having full acquaintance about the context of Poincaré's letter of the 14 August, he decided to search for further advices.

Thus, in one of his unpublished letters to Klein, this of the 29 September 1883 appeared his unknown attempt to translate *Erlanger Programm,* which unfortunately was never realized. Moreover through his letter appeared Stephanos' good will to collaborate with Klein in order to enrich this pamphlet with additions and notes making its study more accessible.

Through Klein's disciple, Walther von Dyck, Stephanos transmit his vivid interest to publish in *Acta* the French translation of *Erlanger Programm.* Did this translation constitute a common project with Poincaré, as later Lie's unveiled? Unfortunately we couldn't find sufficient proofs for that.

Let us permit to present the following fragments from Stephanos' letter:

28 H. Poincaré to G. Mittag-Leffler 14 August 1883 *Archives Henri Poincaré* Nancy. See *La Correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler* présentée et annotée par Philippe Nabonnand. Birkhäuser Verlag Basel - Boston - Berlin 1999, p. 129. See D. E. Row, *A Richer Picture of Mathematics. The Göttingen Tradition and Beyond.* Springer International Publishing 2018, p. 129.
29 *La correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffer* Vol. 11. Birkhäuser Verlag. Préface p. 8, note 11.
30 G. Mittag Leffer to H. Poincaré, 25 August 1883. *Archives Henri Poincaré.* Nancy. See Ph. Nabonnand *op. cit.,* p. 128. See also D. E. Row, *op. cit.,* idem.

«... Mr Dyck must inform you about my interest to publish in French your booklet Vergleichende Betrachtungen but unfortunately until now all my efforts[31] *remain unsuccessful.*

For this reason recently I ask Mr Poincaré to write...» [a letter] *to Mr Mittag-Leffler. For this reason Mr. Poincaré* [already] *sent him a letter.*

[Through his lines] *it seems that Mr Leffler could eventually in the future*[32] *publish your article. However he didn't appeared hasty to precise how long we can wait... regarding the translations he established a general measure, although he had already published many translations of German papers*[33].

Do you consider that could be another way to overcome this difficulty. I think that now we must be coordinated on the additions which you intend to embed in your essay Vergleichende Betrachtungen in a systematic plan, in order that the publication of this new work could improve[34] *the reedition of your former essay.*

Do you have another idea in order to obtain more quickly a concreter result?»[35].

In his Letter (1st February 1884) to P. L. Sylow it appears that Lie by chance had come to know that Poincaré and Stephanos would translate *«an old Program of Klein's into French for Acta, and that Klein would consequently add new notes, a submission that Mittag Leffler had refused, and after that the work was put aside»*[36].However it might be stressed that at the period when the *Erlanger Programm* was published, Klein's vision regarding group's concept as an unifying tool for mathematics, was also, also share by Lie and Poincaré. *«All three were impressed by the work of Jordan, particularly his Traité des substitutions (1870), where groups were applied to geometry as well as to the theory of equations»*[37]. *This work «which stands in intimate relationship with*

31 We ignore Stephanos' former efforts.
32 In reality in his letter to Poincaré Mittag-Leffler excluded any hope or expectation.
33 Direct reference regarding Cantor's translations.
34 Stephanos understood the obscure style of Klein's booklet.
35 Göttingen, Nachlass Felix Klein, Cod Ms. F. Klein 11: 1154. See Ch. Phili, *op. cit.,* p. 41-42.
36 A Stubhaug, *op. cit.,* pp. 486-487.
37 Th. Hawkins, «Erlanger Programm of Felix Klein». *Historia Mathematica.* Vol. 11, p. 445.

my old Themes in a very effective Manner»[38]*. (i.e. Erlanger Programm)»,* stressed Lie.

And Lie continues *«As for the rest, I have taken no part in Poincare's proposal, apart from the fact that* P[oincaré] *and I talked about the work in question, which in my eyes is the most significant mathematical-philosophical work in my time»*[39].

Lie felt that Mittag-Leffler's refusal was a *«Blunder»* and that accordingly this was due to his desire to follow *«in Berlin's Footsteps»* and the eminent Norwegian mathematician concluded *«But what irritates me is that this Man*[40] *could, as it were, pass over a Writer and a Work, both of whom I am so close, without me knowing anything about it»*[41].

Two years after Poincaré's appeal and Stephanos' letter on the 21th June 1885 ,Klein on its turn decided to send a letter to Mittag Leffler having as target to bent his colleague's objections regarding *Erlanger's Programm* translation and to convince him to reconsider this proposal. Moreover he proposed that the competition between the two journals should be transformed to a collaboration[42].

«... Recently, as far as I know, Mr. Poincaré wrote you at the instigation of Mr. Stephanos about my Erlanger Programm (1872). I was gratified by the idea of the Parisian' mathematician that a translation might be published in Acta because the general ideas underlying my program will be disseminated as widely as possible. Now, however, having heard that for the time being, you do not wish to publish any translations I gladly accede to this. Would you please take my acceptance as proof that I would like as much as possible to

38 IDEM.
39 IDEM.
40 It might be stressed that in this same letter revealed that he is the only responsible for this refusal, stressing that *«Mittag-Leffler is a strange person ... He is also extremely arrogant. For him Weierstrass, Hermite, Poincaré and Leffler are the four great mathematicians of an epoch and the two last are the greatest of the future. For him all the other mathematicians most of them are non existent».*
41 IDEM.
42 *«Wollen sie in meiner bereitwilligkeit den Beweis dafür erblicken, dass ich die naturgemässe Concurenz zwischen den Acta und den Annalen möglichst zu einer Cooperationen umgestalten möchte».* Mittag-Leffler Institute Djurshold. See Ph. Nabonnand, *op. cit.,* p. 8.

turn the natural competition between Acta and the Annalen into a form of cooperation»[43].

It might be stressed that Stephanos was quite incorporated into the French mathematical community, so Klein utilized the adjective Parisian[44] [*die Idee der Pariser Mathematiker*].

However this famous cooperation which Klein had hoped to establish between *Acta Mathematica* and *Mathematische Annalen* would never realized and Klein never submit his papers to be published in *Acta*.

IV. Conclusion

We consider that Stephanos confronted the rivalry of two distinguished mathematicians who having as shield their own journals fight in order to dominate over the mathematical milieu Klein with his *Mathematische Annalen* and Mittag-Leffler with his recently established *Acta Mathematica.*

However according professor Nabonnand this competition between *Acta* and *Annalen* was only in Klein's mind. The desire of *Acta's* editor was to create an international journal, while Klein's *Annalen* were mainly addressing to German mathematicians[45].

Stephanos forgot Mittag-Leffler's refusal and didn't maintain any hard feelings for the Swedish mathematician. Thus, when in 1897 the mathematical community desiring to honor the 20th volume of *Acta Mathematica* addressed their unanimous recognition to its editor. In their tribute the most famous mathematicians of that epoch expressed their gratitude to Mittag-Leffler[46], who founding the *Acta Mathematica* offered *«a service of the highest importance...*

43 Klein to Mittag Leffler, 8 October 1883 Mittag Leffler papers. Institute Mittag-Leffler Djursholm. See D. H. Row, *op. cit.,* idem.

44 Stephanos quite often was designated as Parisian mathematician. See f. ex. E. Müller's paper «Die Geometrie der Punktpaare und Kreise im Raume nach Grassmann'schen prinzipien» *Monatshefte für Mathematik und Physik.* Bd. 7 (1) 1896, p. 77 *«welche die französischen Mathematiker Stephanos».* Müller refers to Stephanos' papers, «sur une configuration remarquable de cercle dans l'espace» and «Sur une configuration de quinze cercles et sur les congruences linéaires de cercles dans l'espace». *C. R. Ac. Sc.* T. 93, 1881, pp. 578-580 and pp. 633-636.

45 Ph. Nabonnand, *op. cit.,* p. 8, note 12.

46 A. Stubhaug, transl. from Norwegian T. Tunnally) *Gösta Mitta-Leffler. A Man of convinction.* Springer 2010.

... In the name of friends of Analysis, we express the hope that the Acta Mathematica will pursue for the good of science a career begun with brilliance and encouraged by the universal feelings of mathematicians»[47].

This tribute «letter» was signed by the mathematical élite. Among them we can quote: Weierstrass, P. du Bois-Reymond, Fuchs, Weyr, Lord Kelvin, J. J. Sylvester, J. Bertrand, Hermite, Jordan, Darboux, Poincaré, Picard, Appell, Brioschi, Cremona, Beltrami, A. Markov, Cyparissos Stephanos, Texeira and others.

However Felix Klein declined to pay tribute to his colleague.

Later when in March 1900 Mittag-Leffler arrived in Athens ,after his sojourn in Egypt, Stephanos tried to make his visit comfortable and pleasant .

We must stress that almost the same period in which Stephanos took the initiative to translate into French the *Erlanger Programm,* S. Lie in January 1884 advised Klein to republish it. Lie had right. Klein's *Erlanger Programm* was published as a *Programmschrift* had a limited diffusion , so during a period of twenty years (1872-1892) was not widely known .

The *Erlanger Programm* was firstly translate into Italian by G. Fano and it was published in *Annali di Matematica* in 1890.Finally it was translated into French by H.Padé, and it was insert in the *Annales Scientifiques de l' Ecole Normale Supérieur*e (1891).Two years later Klein decided to republish *Erlanger Programm* in his own journal ,*Mathematische Annalen*. and in 1893 his former student , M. W. Haskel translated *Erlanger Programm* ,which was published in the *Bulletin of New York Mathematical Society*. .Finally Klein's ambition regarding the diffusion of his booklet will be complete by the almost simultaneous translations into Russian and Polish in 1895 by D.Sintzov and S. Dickstein respectively

:We consider that the discovery of Stephanos' attempt, who very young had this gentle ambition to publish in the first issues of *Acta*

47 N. E. Norlund, «G. Mittag-Leffler» *Acta Mathematica* Vol 50 1927, p. iv. see also J. E. Barrow-Green, «Gösta Mittag-Leffler and the Foundation and Administration of Acta Mathematica» in *Mathematics unbound: The Evolution of an International Mathematical Research community, 1800-1945.* K. Hunger Parshall, A. C. Rice (eds). A. M. S., L. M. S. 2002, p. 160.

Mathematica his translation of *Erlanger Programm*[48], the greatest guiding principle[49] (*Richtlinie*) for Klein subsequent research ,constitutes an important unknown event concerning the history of mathematics of the 19th century.

Winfried Mahler

48 For the significance of Erlanger Programm see C. Carathéodory, «Die Bedeutung des Erlanger Programms». Naturwissenschaften Bd. 7, 1919, pp. 297-300; *Gesammelte mathematische Schriften* Bd. 5, München 1957, pp. 45-51.

49 F. Klein, Göttinger Professoren. Lebensbilder von eigener Hand U. Felix Klein *Mitteilungen des Univestitätsbundes* Göttingen 5, 1923, p. 18.

Originelle und kuriose Aufgaben der Unterhaltungsmathematik aus dem 16. Jahrhundert

Stefan Deschauer

Einleitung

Aufgrund meiner langjährigen Beschäftigung mit mathematischen Texten insbesondere der frühen Neuzeit sind mir immer mal wieder Aufgaben begegnet, die wenig oder gar nicht bekannt sind, Originalität für sich beanspruchen können, teilweise sogar einen Platz im mathematischen Kuriositätenkabinett einnehmen und durchaus einen reizvollen mathematischen Hintergrund haben.
Es folgt eine kleine Zusammenstellung solcher Aufgaben, wobei ich auf geometrische Probleme der frühen Neuzeit bewusst verzichtet habe, da sie allgemein zu bekannt sind.
Zur Einstimmung wollen wir uns ein wenig mit den Frauen beschäftigen.

Zur Rolle der Frau

Item es het ein treger eine fraw / vnd wenn er allein trinckt an einer Tun bier / so het er 3 wochen genug / vnd wen die fraw mit im trinckt / so wirt sie / in 16 tagen aus / Ist die frag wen die fraw allein trunke / wie lang wurt das bier weren … (VON ELLENBOGEN 1538, B v)

Die Überschrift gehört natürlich nicht zum Text. Wichtige Zusatzinformation: 1 Tag = 15 Stunden. Die Lösung soll interessierten Lesern und Hörern überlassen bleiben.

Darüber hinaus hat VON ELLENBOGEN einen (weiteren) bemerkenswerten Beitrag zur weiblichen Emanzipation geleistet: Er hat *togentsame Junckfrawen vnnd frawen* in seine Rechenschule aufgenommen – deshalb rechnete er schon im Voraus mit vernichtender Kritik (vgl. VON ELLENBOGEN 1540, A ij) – und das wahrscheinlich erste Rechenbuch für Mädchen und Frauen geschrieben.

Bemerkung.
Korrigierter Beitrag aus dem Band XIV (2018), 224–230,
da bei der Konvertierung ins pdf-Format einige Zeichen falsch wiedergegeben wurden.

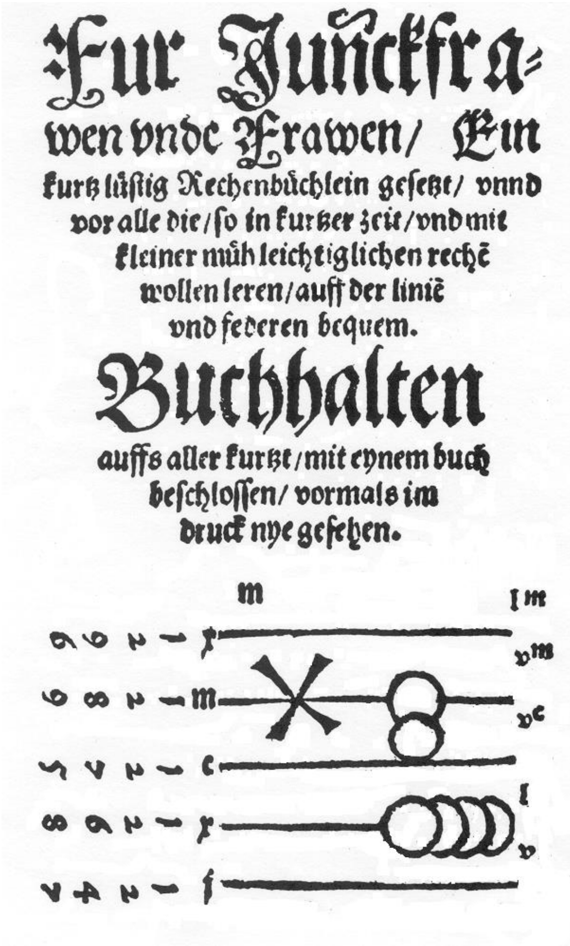
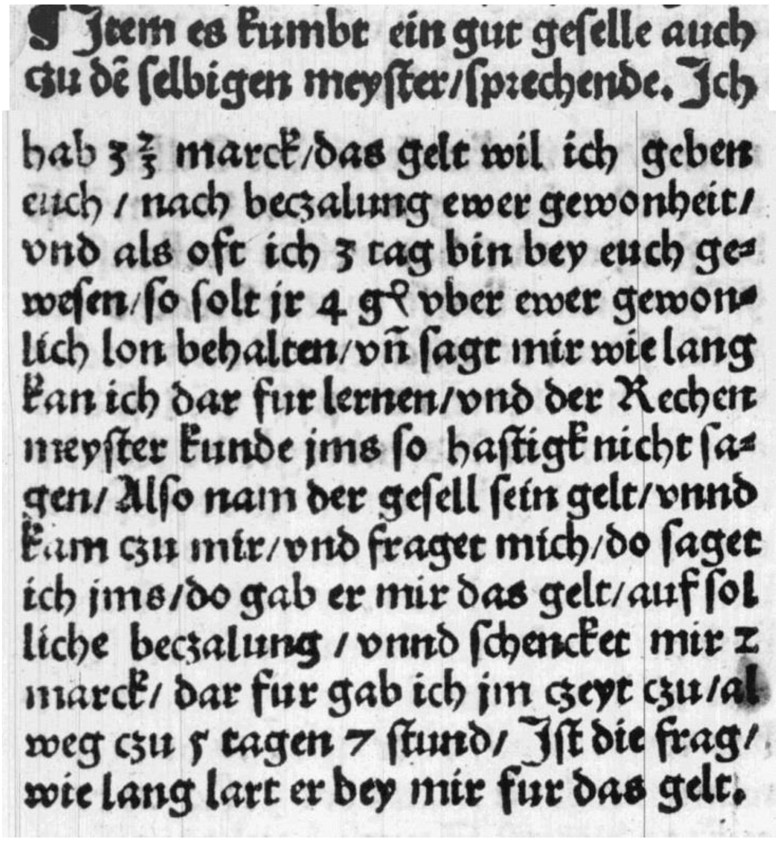

Fur Junckfrawen vnde Frawen/ Ein
kurtz lüstig Rechenbüchlein gesetzt/ vnnd
vor alle die/so in kurtzer zeit/vnd mit
kleiner müh leichtiglichen rechē
wollen leren/auff der liniē
vnd federen bequem.
Buchhalten
auffs aller kurtzt/mit eynem buch
beschlossen/ vormals im
druck nye gesehen.

Abb. 1: VON ELLENBOGENS Rechenbüchlein von 1540 (s. Linienschema), Titelblatt

Ein Schüler sucht den geeigneten Rechenmeister oder die Frage nach der Unterrichtszeit

Es folgt eine wirklich ungewöhnliche und interessante Aufgabe aus dem frühesten arithmetischen Druck im nördlichen deutschen Sprachraum (1524), außerdem eine typische ELLENBOGEN-Aufgabe, da der Autor (wie so oft) seine vermeintliche Überlegenheit gegenüber anderen Berufskollegen dokumentieren will.

Die Mark-Groschen- und die Tag-Stunden-Relation sind nicht angegeben. In Danzig galt damals 1 Mark (gering) = 20 Groschen, außerdem kann man durchaus von 1 Tag = 12 Stunden ausgehen. Diese Prämissen lassen sich aber nicht verifizieren, da der Autor die Lösung der Aufgabe nicht verraten hat. Trotz eines gewissen Interpretationsspielraums scheinen folgende Überlegungen schlüssig zu sein.



¶ Item es kumbt ein gut geselle auch
czu dē selbigen meyster/sprechende. Ich
hab 3 2/3 marck/das gelt wil ich geben
euch / nach beczalung ewer gewonheit/
vnd als oft ich 3 tag bin bey euch ge-
wesen/so solt jr 4 gr̄ vber ewer gewon-
lich lon behalten/vn̄ sagt mir wie lang
kan ich dar fur lernen/vnd der Rechen
meyster kunde jms so hastigk nicht sa-
gen/ Also nam der gesell sein gelt/vnnd
kam czu mir/vnd fraget mich/do saget
ich jms/do gab er mir das gelt/auf sol
liche beczalung / vnnd schencket mir 2
marck/ dar fur gab ich jm czeyt czu/al
weg czu 5 tagen 7 stund/ Ist die frag/
wie lang lart er bey mir fur das gelt.

Abb. 2 a, b: Die Frage nach der Unterrichtszeit (v. ELLENBOGEN 1524, a6/a6[v])

Die $3\frac{2}{3}$ Mark dienen der genannten Überbezahlung des Rechenmeisters.
VON ELLENBOGEN erhält 2 Mark für 5 Tage 7 Stunden; der Bonus von 4 Groschen ist darin bereits einmal enthalten, sodass der Autor sonst nur $1\frac{4}{5}$ Mark für 5 Tage 7 Stunden nimmt. Umrechnung auf 1 Tag: $\frac{108}{335}$ Mark; Umrechnung auf 3n Tage (mit n-fachem Bonus) und Maximalbedingung: $(\frac{324n}{335}+\frac{n}{5})$ Mark $\leq 3\frac{2}{3}$ Mark. Ergebnis: $n \leq 3\frac{166}{1173}$, das heißt $n=3$ ist maximal. Hierfür, also für 9 Tage, ergeben sich auf der linken Ungleichungsseite $3\frac{168}{335}$ Mark. Von $3\frac{2}{3}$ Mark bleiben $\frac{166}{1005}$ Mark übrig, für die die restliche Unterrichtszeit nach dem „Normalpreis“ zu berechnen ist: $\frac{83}{162}$ Tage. Gesamtergebnis: $9\frac{83}{162}$ Tage $=$ 9 Tage $6\frac{4}{27}$ Stunden. Rundet man auf volle Stunden, so werden $\frac{4}{27}$ Stunden nicht genutzt, was $\frac{16}{201}$ Groschen entspricht.
Die Aufgabe lässt sich natürlich auch durch „intelligentes Probieren“ lösen: $3\frac{2}{3} : \frac{108}{335} > 11$ (Tage), der Preis für 11 Tage Unterricht übersteigt aber $3\frac{2}{3}$ Mark, ebenso der für 10 Tage. So kommt man zu 9 Tagen wie oben usw.

Die Feigen

Item ainer hat kinder / sagt nit wieuil / vnd hat einē korb mit feygen / sagt auch nit wieuil / vnnd so er yegklichem kind 12 feygen gibt / so bleiben 30 *feygen über. Nu kumbt die muter / vnd nimbt den kindern die feygen alle wider / vnd thut sy wider in den korb / So kumbt der vatter / vnd tailt die feygen wider vnter die kinder / vnd gibt yegklichem kind 17 feygen / so zerrinnen jm noch 40 feygen / Nun ist die frag / wieuil der kinder / auch der feygē gwesen seind.* (GRUEBER 1544, D vj^{v}–D vij)

Der (hier nicht vorgestellte) Lösungstext bietet folgendes Rechenrezept:
$17-12=5$, $30+40=70$, $70:5=14$ (Anzahl der Kinder), $12\cdot 14=168$, $168+30=198$ (Anzahl der Feigen)
Diese Rechenvorschrift entspricht, wie man leicht sieht, den auf die reinen Zahlen beschränkten Äquivalenzumformungen zur Lösung des zugehörigen linearen Gleichungssystems $f=12k+30$, $f=17k-40$ (*f*: Anzahl der Feigen, *k*: Anzahl der Kinder). Aber auch inhaltlich – ohne algebraischen Hintergrund und sogar auf Grundschulniveau – lässt sich die Lösungsmethode des Autors erschließen: 5 Feigen mehr pro Kind ergeben 70 Feigen Unterschied, 1 Feige mehr pro Kind führt also zu 14 Feigen Unterschied, daher sind es 14 Kinder und 198 Feigen.

Echo oder die vorgeburtlichen Erziehungskosten
Item ein knab fragte seinen Herren / wy alt er wer / Antwort der her / vnd vorsuchte jn / du bist so alt / als vil marck ich jerlichen hab vor dich ausgeben / das man dich erzogen hat / vnd so vil du mich 3 jar vber (= mehr als) *18 marck gestanden hast / so vil marck hastu mich 4 jar vber 16 mar. gekost / Antwort der knab / das ist Echo / ein widerhal / der nichts bedeut / Darum merke gar eben darauff wen dir was wirt furgeben / ob es müglich ist / aber* (es muss „ader" heißen) *nicht / dan vil Exempl haben einen schein / das man sie machen kan / sein doch vnmüglich / Da sprach sein her / setz fur die 4 jar 15 / vnd fur die 16 mar. 174 Nu subtrahir von beiden seitten die kleinste zal / von der grossern / vnnd teils ab / so komt dir 13 marck / vnd in der proben komt itliches 21 ma. mer / vnnd wirt von etlichen Regula plurima genant. Facit 13 jar alt der knab.* (V. ELLENBOGEN 1538, C^{v})
Die 1. Aufgabe führt algebraisch betrachtet auf die Gleichung $3x-18=4x-16$ $(x=-2)$, sie ist daher nicht lösbar. Die 2. Aufgabe führt zu $3x-18=15x-174$ mit der Lösung $x=13$ (jährliche Ausgabe in Mark und Alter des Knaben). VON ELLENBOGEN hat aber nicht bedacht, dass ein 13-jähriger Junge seinem Herrn nicht 15 Jahre lang Kosten verursacht haben kann.
Von WIDMANN (1489, f. 113^{v}), stammt die Bezeichnung *Regula plurima*. Es handelt sich um ein Rechenrezept, das den Äquivalenzumformungen zur Lösung von Gleichungen des Typs $ax-b=cx-d$ entspricht, sofern $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $(a>c \wedge b>d) \vee (c>a \wedge d>b)$ gilt.

***Antipedes*, ein „gesandtes Exempel"**

Eine besondere Rolle spielen für von Ellenbogen die „gesandten Exempel", die er allesamt habe lösen können und von denen er einige (wie die nachfolgende, mit Lösung) in seine Rechenbücher aufgenommen hat. Da kann er sich lange über die Einsender „aus bösen Herzen" ereifern, also über die, die ihn glauben reinlegen zu können und ihm unterstellen, er könne die Aufgaben nicht lösen. Sie wollten ihn aus Hass zuschanden machen, was vor Gott dem Totschlag gleichkäme (vgl. 1 Joh 3, 15). Weiter schreibt er: *Wer sich an einen alten kessel thut reiben mus den rus empfahen / Ich wolte doch manchen wol beschmieren / aber es wer nicht brüderlich gehandelt* (von Ellenbogen, Fragmente, ca. 1537, I ij^{v}–I iij).
Und nun folgt die Aufgabe:

Item 3 wechters des selbigen hern / kauffen auch 9 Ellen / zu einem rock / von den selbigen dreyerleyen farben / als 3 ellen blaw / vnd 3 ellen graw / vnd 3 ellen gel / vnnd vortragen den rock mit einander / den̄ alwegen mus nur einer mit dem rock ausreitten / vnnd die zwen der Burck hüten / Nu muste der erste alwegen eynen solchen rock haben / in $\frac{3}{4}$ *jars / dan jm geburt am meisten aus zureitten / der ander bedarff einen solchen rock in* $1\frac{1}{3}$ *jars / der drite in* $2\frac{2}{11}$ *jars* (d. h. jeder würde als alleiniger Träger den Rock nach den angegebenen Zeiträumen abtragen) */ Ist die frage / wie vil mus yderman zu dem gewant geben / Machs also / vnd ist dz dritte gesante Exempl / setz inn die mitte der 9 ellen wert als 16 marck … Vnd mercke das Antipedes sein die leut / die vnter vns wonen / vnd keren die fusse gegen vns / vn̄ darum mustu auch in disser Regl / die zalen vorkeren also / die nenners setz oben / vnd die zelers vnten /*

$$\textit{Fa. ma. d}\bar{e}\begin{Bmatrix} \textit{Ersten} & 8 \\ \textit{andern} & 4 \\ \textit{dritten} & 2 \end{Bmatrix} \textit{ß} \begin{Bmatrix} 23 \\ 43 \\ 53 \end{Bmatrix} \textit{d} \begin{Bmatrix} 3\frac{39}{61} \\ 1\frac{41}{61} \\ 0\frac{42}{61} \end{Bmatrix}$$

Nu fraget der Her / wie lang weret euch ein solcher rock / Mach einen Antipedischen gemeinen nenner / ist der zeler / vnd die erfunden geaddirtē zelers ist dein nenner / Also machs auch von den alte keirischen schiff / vnd dreyzappischem fas / vnd von den wolff / hunt / vnd fuchs.
Fac. $\frac{24}{61}$ *jars / vnd macht auch so vil gelt.* (v. Ellenbogen 1538, C iij–C iij^{v})

Die Angaben am Anfang stammen von einer anderen Aufgabe, in der der Rock ebenfalls 16 Mark kostet. Die Zahl der Ellen und die gleich verteilten Farben sind hier irrelevant. Um es vorwegzunehmen: Von Ellenbogen gibt die richtige Lösung an, aber der Lösungsweg lässt sich anhand des Textes

nicht nachvollziehen. Auch muss man erst die zweite Frage beantworten, bevor man die Kosten für das Gewand aufteilen kann.
Die drei Wächter verschleißen pro Jahr $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{11}{24}$ Röcke (Zähler und Nenner sind „antipedisch" vertauscht). Zusammen brauchen sie pro Jahr $2\frac{13}{24}$ Röcke, sodass 1 Rock $\frac{24}{61}$ Jahre hält. Auf diesen Zeitraum umgerechnet, verschleißen die drei $\frac{32}{61}$, $\frac{18}{61}$ bzw. $\frac{11}{61}$ Röcke. Gemäß diesen Anteilen sind die Kosten von 16 Mark umzulegen – siehe das Diagramm im Aufgabentext.
VON ELLENBOGEN verweist auf weitere Aufgaben dieser Art, die sich wieder bei WIDMANN (1489, f. 137–139) finden. Das „alte keirische" Schiff ist aber eine Verballhornung: Das Schiff bei WIDMANN (1489, f. 138^{v}) fährt von „Alkeyer" ab, also wohl von Kairo *(al-Qāhira).*

Literatur

Deschauer, St. (2002). Die Bücher des Danziger Rechenmeisters Erhart von Ellenbogen. Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz, Band 14 (S. 113–126).
Deschauer, St. (2012). Über eine Arithmetik des oberbayerischen Schulmeisters Leonhard Grueber (1544) – Plagiate "gründlich inbegriffen". In: Zeitläufte. Algorismus Heft 77 (S. 59–66). Augsburg: Erwin Rauner.
Deschauer, St. (2014). Über den frühesten arithmetischen Druck im nördlichen deutschen Sprachraum – Erhardt von Ellenbogens Rechenbüchlein von 1524. Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz Band 23 (S. 349–356).
von Ellenbogen, E. (1524). Ein Rechñ buchlein durch gantz vñ gebrochen Species auf die linien ader federen bequem. Danzig: Hans Weinreych
von Ellenbogen, E. (1536). Rechenbuch auff Preussische müntze / mas vnd gewichte / auff der linien vnd federn seer bequem / mit wenig worten viel begriffen / zu dem gmeinen handel vnd scharffer Rechnung verfertiget. Welscher Practica jnhalt / mit den dreien gesanten Exempeln vleissiglich beschlossen den 9. Weinmonat: Anno 1535. Wittenberg: Joseph Klug.
[von Ellenbogen (ca. 1537). Fragmente]
von Ellenbogen, E. (1538). Rechēbuch auff Preusische muntze / maß / vnd gewicht / auff der linien vnnd fedderen seer bequem / mit wenig worten / gar vil begriffen / zu dem gemeinem handl / vnd scharffer Rechnung verfertiget / durch den Canon, Echo, Conuersus, Antipedes, Falsus, Cecus. Buchhalten auch auff vnsere ganckhafftige müntze / in geselschaffter weise / gantz offen bar vnd auffs kurtz gesetzet. Danzig: Franz Rhode.
von Ellenbogen, E. (1540). Fur Junckfrawen vnde Frawen / Ein kurtz lüstig Rechenbüchlein / vnnd vor alle die / so in kurtzer zeit / vnd mit kleiner müh leichtiglichen rechē wollen leren / auff der liniē vnd federen bequem. Buchhalten auffs kurtzt / mit eynem buch beschlossen … Danzig (vermutlich Franz Rhode).
Grueber, L. (1544). Rechenbuechel der Linien vnnd Zyffer / auff die schwartze Müntz / für die anfahenden / mancherlay keüff betreffend / Durch Leonhardū Grueber / Burgerssune zu Öting / Camrer vnnd Lateinischer Schulmaister im Closter zu Sewn gepracticiert. Augsburg: Philpp Ulhart
Widmann, Johannes (1489). Behēde vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft. Leipzig: Conrad Kacheloffen.

TEILNEHMER

∗ Martina Bečvářová (111)
Katedra aplikované matematiky, Fakulta dopravní, ČVUT v Praze,
Na Florenci 25, CZ 11000 Praha 1, Tschechien
becvamar@fd.cvut.cz

Bernhard Beham
Josefinengasse 10/11, A 1020 Wien, Österreich
bernhard.beham.vie@gmail.com

∗ Gabriela Besler (185)
Instytut Filozofii, ul. Bankowa 11, PL 40-007 Katowice, Poland
gabriela.besler@us.edu.pl

Christa Binder
Adolf-Gstöttner-Gasse 6/37, A 1200 Wien, Österreich
christa.binder@tuwien.ac.at

∗ Danuta Ciesielska (107)
L&A Birkenmajer Institute for the History of Science,
Polish Academy of Sciences,
ul. Nowy Swiat 72,PL 00-330 Warsaw, Poland
smciesie@cyfronet.krakow.pl

∗ Lea Dasenbrock (60)
Mathematisches Institut, Abteilung Didaktik
Augustusplatz 10, D 04109 Leipzig, Deutschland
Lea.Dasenbrock@math.uni-leipzig.de

∗ Stefan Deschauer (68 , 207)
Hübnerstraße 15, D 01069 Dresden, Deutschland
Stefan.Deschauer@tu-dresden.de

∗ Stanisław Domoradzki (146)
Institute of History, University of Rzeszów, Aleja Rejstna 16 C, 35-310 Rzeszów, Poland
stanislawdomoradzki@gmail.com

Gerlinde Faustmann
Kaisersteingasse 6, A 2700 Wiener Neustadt, Österreich
gerlinde.faustmann@aon.at

∗ Jasna Fempl Madjarević (172)
MISANU, 36 Knez Mihajlova Street, 11000 Belgrade, Serbia
Vidikovački venac 27, apt. 10, 11000 Belgrad, Serbien
tanjamadjarevic@gmail.com

∗ Hans Fischer (85)
Am Wald 32, D 85072 Eichstätt, Deutschland
hans.fischer@ku.de

Evi Fischer

∗ Harald Gropp (52)
Henkel-Teroson-Straße 20, D 69123 Heidelberg, Deutschland
d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

∗ Katica Hedrih Stevanović (160)
st. Vojvode Tankosića nr.3/22, 18000 Niš, Serbien
khedrih@sbb.rs

∗ Wolfgang Herfort (92)
Technische Universität Wien, Institut für Analysis und Scientific Computation
w.herfort@tuwien.ac.at

∗ Alfred Holl (75)
Deiningerstraße 4, D 93049 Regensburg, Deutschland
alfred.holl@th-nuernberg.de

∗ Karl Kleine (41)
Grete-Unrein-Straße 3, D 07745 Jena, Deutschland
karl@kkleine.de

∗ Thomas Krohn (93)
Davidstraße 13, D 04109 Leipzig, Deutschland
krohn@math.uni-leipzig.de

∗ Winfried Mahler
Pestalozzistraße 11, D-07749 Jena, Deutschland
winfried.mahler@web.de

∗ Rita Meyer-Spasche
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik,
D-85748 Garching bei München, Deutschland
meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de

∗ Alexander Odefey (131)
Silker Busch 2, D 21521 Wohltorf, Deutschland
odefey@gmx.de

Christine Phili (196)
22 Socratous Street, 14561 Kifissia, Athen, Griechenland
xfili@math.ntua.gr

∗ Marko Razpet (15)
Levstikova 6, SI 1230 Domžale, Slovenija
Marko.Razpet@guest.arnes.si

∗ Nada Razpet (23)
Levstikova 6, SI 1230 Domžale, Slovenija
nada.razpet@guest.arnes.si

∗ Herwig Säckl
Traberweg 1, D-93049 Regensburg, Deutschland
herwsaeckl@aol.com

Karl-Heinz Schlote
Elie-Wiesel-Straße 55, D 04600 Altenburg, Deutschland
schlote49@yahoo.de

Peter Schmitt
Adolf-Gstöttner-Gasse 6/37, A 1200 Wien, Österreich
peter.schmitt@univie.ac.at

∗ Silvia Schöneburg-Lehnert (93)
Rosa-Luxemburg-Straße 15e, D 04109 Leipzig, Deutschland
schoeneburg@math.uni-leipzig.de

Philippe Séguin (191)
23 rue Milton, F-54000 Nancy, France
philippe.seguin11@wanadoo.fr

∗ Jacques Sesiano (31)
1, rue Patru, CH-1205 Genf, Schweiz
seziano@bk.ru

∗ Reinhard Siegmund-Schultze (7)
Gimleveien 48A, 4630 Kristiansand, Norwegen
reinhard.siegmund-schultze@uia.no

∗ Renate Tobies (150)
Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Haeckel-Haus,
Institut Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin
Berggasse 7, D 07745 Jena
renate.tobies@uni-jena.de

∗ Peter Ullrich (121)
Universität Koblenz-Landau, Campus Koblenz, Fachbereich 3:
Mathematik/Naturwissenschaften, Mathematisches Institut,
Universitätsstraße 1, D 56070 Koblenz, Deutschland
ullrich@uni-koblenz.de

∗ Annette Vogt (100)
MPI für Wissenschaftsgeschichte,
Boltzmannstraße 22, D-14195 Berlin, Deutschland
vogt@mpiwg-berlin.mpg.de

∗ Waltraud Voss (178)
Hauptstraße 3, D 01097 Dresden, Deutschland
waltraud.voss@web.de

Franz Vrabec
Franz-Boos-Gasse 1/20, A 1130 Wien, Österreich
franz.vrabec@aon.at

∗ Wiesław Wójcik ( )
Institute of Philosophy, Jan Długosz University of Częstochowa, Poland
w.wojcik@ujd.edu.pl, wwoj100@gmail.com

∗ Mykhailo Zarichnyi (146)
Institute of Mathematics, University of Rzeszów
1 Prof. St. Pigonia Str., 35-310 Rzeszów, Poland
Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str., 79000 Lviv, Ukraine
zarichnyi@yahoo.com

Wolfgang Herfort, Herwig Säckl, Waltraud Voss, Gerlinde Faustmann

Marko Razpet, Thomas Krohn, Franz Vrabec, Evi Fischer, Nada Razpet, Stanisław Domoradski

Rita Meyer-Spasche, Wiesław Wójcik, Stefan Deschauer, Bernhard Beham, Karl-Heinz Schlote