Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte

xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv

xiv XIV. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik xiv
xiv xiv

xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv--xiv

Vernachlässigte Teile der Mathematik *und ihre Geschichte*

Neglected parts of mathematics *and their history*

Tagung, 29. April bis 5. Mai 2018, Miesenbach (Niederösterreich)

Kurzfassungen der Vorträge

Herausgeber:
Dr. Christa Binder *e-mail:* christa.binder@tuwien.ac.at
Institut für Analyis und Scientific Computing
Technische Universität Wien

Danksagung:
Ohne die großzügige Hilfe der folgenden Institutionen
wäre die Durchführung der Tagung nicht möglich gewesen.
Dafür herzlichen Dank.

International Commission on the History of Mathematics (ICHM)
Amt der Niederösterreichischen Landesregierung, Abteilung Kultur und Wissenschaft
anonyme Spender

Photos, Layout und Druckvorlage: Peter Schmitt

KULTUR NIEDERÖSTERREICH

Gefördert durch das Land Niederösterreich.

von links nach rechts (↑ weist auf die hintere Reihe):

Michael von Renteln, ↑Ulrich Reich, Karl Kleine, ↑Stanisław Domoradski, ↑Gerlinde Faustmann, Christa Binder, ↑Mykhailo Zarichnyi, ↑Nada Razpet, Martina Bečvářová, ↑Lea Dasenbrock, ↑Thomas Krohn, Silvia Schöneburg-Lehnert, Annette Vogt, ↑Hans Fischer, Renate Tobies, ↑Karl-Heinz Schlote, ↑Marko Razpet,

im Hintergrund: der Börsenhof *(der Tagungsort)*

Inhaltsverzeichnis

von links nach rechts (↑ weist auf die hintere Reihe):

Herwig Säckl, ↑Philippe Séguin, ↑↑Peter Ullrich, Jasna Fempl-Madjarević, ↑Luboš Moravec, ↑Vlasta Moravcová, Danuta Ciesielska, ↑Holger Wuschke, Christine Phili, ↑Menso Folkerts, Sergui Demidov, ↑Wiesław Wójcik, ↑Wolfgang Breidert, Stefan Deschauer, ↑Joanna Zwierzyńska, Rita Meyer-Spasche, ↑Detlef Gronau, ↑Alfred Holl, Harald Gropp

im Hintergrund: der Börsenhof *(der Tagungsort)*

Weitere Teilnehmer:
Detlef Gronau, Luboš Moravec,
Michael von Renteln, Karl-Heinz Schlote, Peter Schmitt

Punktweise und gleichmäßige Stetigkeit bei Cauchy und Dirichlet

Hans Fischer, Eichstätt

Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) gilt als eine wichtige und einflußreiche Figur in der Geschichte der Analysis (und nicht nur hier) während der direkten Vor-Weierstraß-Phase. Über seine Schüler (darunter etwa Borchardt, Seidel, Heine, Lipschitz, Riemann, Dedekind) hat er nachhaltigen Einfluß auf spätere Entwicklungen ausgeübt. Den Grundstock für seine analytischen Leistungen hat Dirichlet offenbar während seines Studiums in Paris (1822–26) erworben. In den landläufigen biographischen Notizen wird hierbei vor allem auf Fourier, Lacroix und Poisson als Lehrer Dirichlets verwiesen. Es war aber offenbar Cauchy, der – mindestens über seine Werke – den stärksten Einfluß auf Dirichlet ausgeübt hat. Tatsächlich hatte Dirichlet auch persönlichen Kontakt mit Cauchy, wie ein Brief von 1831 mit einer Verabredung zum Mittagessen zeigt (Stiftung Preußischer Kulturbesitz, NL Dirichlet). Eine gründliche und überzeugende Analyse der analytischen Grundlagen Cauchys verdanken wir Detlef Spalt [2015, 297–350], der auch bezüglich einiger Fragen (Funktionsbegriff, Stetigkeit, Integral) auf die Beeinflussung Dirichlets durch Cauchy eingeht [Spalt 2015, 363–370]. Die Argumente von Spalt bezüglich Dirichlet beruhen auf der Edition einer Vorlesung von 1854 und Dirichlets beiden, im Kern inhaltsgleichen, gedruckten Arbeiten zur Darstellung von Funktionen durch ihre Fourierreihe. Tatsächlich kann aber auf einige weitere, unpublizierte, Mitschriften von Vorlesungen Dirichlets zurückgegriffen werden, durch die sich ein aspektreicheres Bild ergibt. In der vorliegenden Untersuchung soll dies exemplarisch am Stetigkeitsbegriff entwickelt werden.

Cauchys Stetigkeitsdefinition für die Funktion f geht von dem Differenzausdruck

$$f(x+\alpha) - f(x) \tag{1}$$

aus. Wenn für jeden Wert der Variablen x zwischen vorgegebenen Intervallgrenzen dieser Ausdruck mit α zugleich so abnimmt, daß er „kleiner wird als jede endliche Zahl“, so wird f als stetig „zwischen den gegebenen Grenzen“ bezeichnet. Dies scheint die heute geläufige punktweise Stetigkeit zu sein, wenn auch die zusätzliche Betonung des Intervalls, innerhalb dessen die Funktion überall stetig sein soll, auffällt. Komplizierter wird die Sache, wenn man weiterliest [Cauchy 1821/85, 23]:

> Mit anderen Worten:
>
> Die Funktion $f(x)$ wird zwischen den gegebenen Grenzen stetig in Beziehung auf x sein, wenn zwischen diesen Grenzen ein unendlich kleiner Zuwachs der Veränderlichen stets einen unendlich kleinen Zuwachs der Funktion bewirkt.

Man kann dies so interpretieren als ob Cauchy gar nicht die punktweise Stetigkeit, sondern von vornherein die gleichmäßige Stetigkeit in einem endlichen, ggf. ausreichend kleinen, Intervall bei seinem Stetigkeitsbegriff im Blickfeld gehabt hat [Laugwitz 1987, 261 f.], zumal sein Funktionsbegriff deutlich auf (zusammengesetzten) algebraischen Termen fußt, bei deren Untersuchung sich natürlich immer die gleichmäßige Stetigkeit in einem kompakten Intervall mehr oder weniger deutlich zeigt. Auch sein vorgerechnetes

Beispiel [Cauchy 1821/85, 24] für die Stetigkeit, die der Sinusfunktion, ergibt so die gleichmäßige Stetigkeit:

$$\sin(x+\alpha)-\sin(x)=2\sin(\frac{1}{2}\alpha)\cos(x+\frac{1}{2}\alpha).$$

Daß $\sin(z)$ für $z\to 0$ gegen Null geht, wird von Cauchy in diesem Zusammenhang nicht erwähnt, folgt aber sofort aus der Ungleichung $0<\sin(z)<z$ für positive z, die auch von Cauchy [1821/85, 43] bei der Diskussion des Grenzwerts von $\sin(z)/z$ für $z\to 0$ erläutert wird.

Besonders wichtig wird die gleichmäßige Stetigkeit im Zusammenhang mit der Integration. Cauchy [1823, 122–125] zeigt in seinem *Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, daß für eine zwischen den Grenzen a und b stetige Funktion f die Summen

$$S(n):=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)$$

bei beliebigen und mit n sich verfeinernden Zerlegungen

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

gegen einen festen Wert konvergieren. Der Beweis verläuft auf der Grundlage des heute so genannten „Cauchyschen Konvergenzkriteriums“. Sind $S(n')$ und $S(n)$ die Summen, die zu einer feineren Zerlegung des Intervalls in n' Teile und einer gröberen in n Teile gehören (d.h. die Eckpunkte der n Teilintervalle sollen dabei auch als Eckpunkte bei den n' Teilintervallen vorkommen), so gilt

$$S(n')-S(n)=(b-a)M(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{n-1}),$$

wobei

$$\min_{x\in[x_i,x_{i+1}]}(f(x)-f(x_i))\leq\varepsilon_i\leq\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}(f(x)-f(x_i)).$$

Cauchy konstatiert ohne Begründung, daß der Ausdruck „M“ (ein nicht näher spezifizierbarer „Mittelwert“ aus den Epsilons, von dem man nur weiß, daß er zwischen dem kleinsten und dem größten Epsilon liegt) für $n,n'\to\infty$ gegen 0 geht. Mit der gleichmäßigen Stetigkeit von f wäre das überhaupt kein Problem, und die naheliegende Vermutung ist, daß Cauchy diese auch als Selbstverständlichkeit angesehen hat.

Von Dirichlet sind keine Grundlagenwerke zur Analysis überliefert. In der ausführlichen Arbeit über Fourierreihen [Dirichlet 1837, 135–138] findet sich immerhin ein Abriß über den Stetigkeitsbegriff und über bestimmte Integrale. Ausführlichere Hinweise geben Vorlesungsmitschriften, besonders aus seiner Berliner Zeit (1828–1855), in denen analytische Grundbegriffe angesprochen und auch – teilweise recht genau – erörtert sind. Dies betrifft insbesondere seine Vorlesungen zur Integralrechnung und zu partiellen Differentialgleichungen (einführende Vorlesungen in die Analysis hat dagegen Dirichlet nur selten gehalten, s. [Biermann 1959, 34–39; 73f.]). Zum erstgenannten Thema gibt es sogar zwei gedruckte Ausarbeitungen über Vorlesungen in den 1850er Jahren: [Arendt 1904] (SS 1854) sowie [Meyer 1871] (SS 1858). Während die Ausarbeitung von

Arendt als weitgehend authentisch gilt und auch entsprechende Berücksichtigung in der historischen Literatur [Laugwitz 1999, 59; Spalt 2015, 364] erfahren hat, trägt die Edition Meyers – ganz bewußt – den Stempel eigener Bearbeitung durch den Herausgeber, wenn auch bei den einzelnen Abschnitten des Buches grob angegeben ist, wie nah die Darstellung an der ursprünglichen von Dirichlet ist. Doch auch Arendts Ausführungen haftet natürlich der große zeitliche Abstand von einem halben Jahrhundert zwischen Vorlesung und Herausgabe an. Dazu kommt ein generelles Problem mit Vorlesungsmitschriften aus der damaligen Zeit: Mathematische Grundbegriffe, wie etwa der Funktion oder der Stetigkeit, wurden eher in verbaler Weise vom Vortragenden präsentiert, was zwangsläufig in der Wiedergabe zu mancherlei begrifflicher Unschärfe führen muß. So ist es ein glücklicher Umstand, daß zusätzlich gut ausgearbeitetete Vorlesungsmitschriften aus der Hand von Ludwig Seidel (1821–1896; Nachlaß im Deutschen Museum München) existieren. Seidel studierte in Berlin von 1840 bis 1842 und war ein offenbar sehr eifriger Hörer der Vorlesungen von Dirichlet. Er stenographierte diese zunächst mit (ein Teil seiner Stenogramme ist im Nachlaß erhalten) und übertrug die meisten davon anschließend in eine sehr saubere und ausführliche Form. Für unsere Zwecke besonders interessant ist die Vorlesung aus dem SS 1840 zur Integralrechnung (im folgenden [IR 40] abgekürzt), die Vorlesung aus WS 1840/41 zu partiellen Differentialgleichungen (mit [PD 40/41] abgekürzt) und die Vorlesung zur Reihenlehre, ebenfalls aus WS 1840/41. Das letztgenannte Dokument gibt interessante Aufschlüsse über Dirichlets Rezeption der einschlägigen Kapitel des *Cours d'analyse* von Cauchy, geht aber auch über dessen Ergebnisse deutlich hinaus, wenn es etwa um die Umordnung von absolut und auch nur bedingt konvergenten Reihen geht.

Im ersten Teil der Vorlesung [PD 40/41, 8f.] ist Dirichlets Funktionsbegriff besonders umfassend beleuchtet.

> Wenn zwei veränderliche Größen durcheinander bedingt sind, so ist die Eine <u>Function</u> der anderen; das Verhältnis ist also zunächst ein gegenseitiges; bei der Betrachtung wird aber immer die eine als die unabhängige oder vorzugsweise „Veränderliche", die andere als die von ihr abhängige oder „Function" angesehen.

Gleich im Anschluß wird erläutert, daß eine solche Abhängigkeit im allgemeinen Falle „nicht ohne Zweideutigkeit" bleiben würde, die aber dadurch behoben werden könne, daß man „Einen Werth heraushebt und diesen ins Auge faßt". Es folgt der Satz:

> Wir betrachten also ausschließlich nur solche Funktionen, bei denen zu jedem Werthe der Veränderlichen nur Ein Werth der Function gehört.

Ähnliche Gedanken finden sich in allen einschlägigen Vorlesungsmitschriften Dirichlets, wenn auch nicht immer in dieser Striktheit. Wie Cauchy betont auch Dirichlet beim Funktionsbegriff die gegenseitige Abhängigkeit von veränderlichen Größen und bringt andererseits auch die einzelnen Werte dieser Veränderlichen ins Spiel. Während bei Cauchy jedoch mögliche Mehrdeutigkeiten nie ausgeblendet werden — ganz im Gegenteil bei seiner Diskussion der Stetigkeit eine wichtige Rolle spielen, da an Sprungstellen gemäß Cauchy automatisch Mehrdeutigkeiten auftreten — versucht Dirichlet, solche Mehrdeutigkeiten auszuschließen. Damit ist bei ihm der Zuordnungsaspekt von

Funktionen deutlicher ausgeprägt als bei Cauchy.[1] Dem entspricht auch die explizite Fallunterscheidung, die Dirichlet in [IR 40, 41] dem Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx$$

im Sinne einer „nicht stetigen Function von b“ angedeihen läßt, die wir hier zur Abkürzung mit $f(b)$ bezeichnen: $f(b) = \frac{\pi}{2}$ für positives b, $f(b) = -\frac{\pi}{2}$ für negatives b, und $f(b) = 0$ für $b = 0$. Gemäß Cauchys Lehre müßte dagegen $f(b)$ in $b = 0$ mehrwertig sein, s. [Spalt 2015, 309; 315].

Auch der Begriff der Stetigkeit wird in [PD 40/41, 9–15] ausführlich dargelegt. Dabei geht Dirichlet — wie knapper auch schon in [Dirichlet 1837, 135] und in [IR 40] — aber nicht von der Differenz (1) aus, die gegen Null strebt, sondern von folgender verbalen Charakterisierung:

> Geschieht es nun hierbei, dass während x sich allmählich ändert, auch y sich allmählich ändert, so sagt man, die Function sei stetig.

Bei einer solchen qualitativen „Definition“ müssen noch einige Dinge klargestellt werden:
1.) Auch mehrdeutige Funktionen, wie etwa $y = \pm\sqrt{x}$ könnten in diesem Sinne womöglich als stetig angesehen werden, aber die Eindeutigkeit ist ja quasi als Generalvoraussetzung dem Ganzen schon vorangestellt.
2.) Ist eine Funktion wie $y = \frac{1}{x^2}$ nun stetig oder nicht? Sie macht in $x = 0$ ja keinen Sprung, oder? In allen einschlägigen Fundstellen (mit Ausnahme von [PD 40/41]) findet sich der Hinweis, daß stetige Funktionen keine Unendlichkeitsstellen haben.
3.) Da kein Rückgriff auf die „arithmetische“ Beziehung (1) erfolgt, kommt der Sachverhalt der Stetigkeit primär geometrisch zum Vorschein: durch eine über einem bestimmten Intervall $[a; b]$ „zusammenhängende Curve“ [Dirichlet 1837, 134], unabhängig von irgendwelchen angenommenen oder auch nicht-angenommenen algebraischen Funktionstermen. Genau dieser Aspekt wird in [PD 40/41] besonders ausführlich angesprochen. Unstetige Funktionen mit der einen oder anderen Sprungstelle (andere Funktionen betrachtet Dirichlet in seinen Vorlesungen und auch seinen gedruckten Arbeiten offenbar nicht) sind stückweise stetig und damit dem Wesen nach von diesen kaum zu unterscheiden: „Die Sache geht daher wesentlich auf die continuirliche Function zurück“ [PD 40/41, 13]. Dies ist dann auch der Grund dafür, daß Dirichlet (ebenso wie Cauchy) seine Grundlagenbetrachtungen zu bestimmten Integralen ausschließlich auf stetige Funktionen bezieht.

Zu stetigen Funktionen mehrerer Variabler findet man bei Dirichlet nur sehr wenig. In der Vorlesung von 1854 [Arendt 1904, 94f.] gibt es eine kurze Ausführung über stetige Funktionen in zwei Variablen, die sich im wesentlichen auf eine Definition beschränkt, die der modernen Folgenstetigkeit zu entsprechen scheint und sich auf eine globale

[1]Dieser Feststellung widersprechen nicht vereinzelte Aussagen Dirichlets [1837, 156] (ähnlich [1837, 159]) bezüglich Sprungstellen von stückweise stetigen Funktionen: „. . . für jede solche Abscisse finden eigentlich zwei Ordinaten statt . . . “ Der Bezug ist hier auf die geometrischen Eigenschaften von Funktionskurven („eigentlich“), nicht auf Funktionen im Sinne von Zuordnungen (Spalt [2015, 365f.] vertritt eine abweichende Meinung).

Sicht der Stetigkeit bezieht (die Grenzbedingung muß für „jedes beliebige Wertepaar x, y“ gelten).

Fazit: Dirichlets Stetigkeitsbegriff ist wesentlich geometrisch geprägt, zumindest bei Funktionen in einer Variablen, auf die wir uns im folgenden beschränken wollen. Dieser Umstand, in dem sich Dirichlet deutlich von Cauchy unterscheidet, drückt sich noch in seinen Vorlesungen der 1850er Jahre aus, auch wenn dort die arithmetische Betrachtungsweise im Sinne der Konvergenz von $f(x+\alpha) - f(x)$ explizit dazukommt. Damit einher gehen Stetigkeitsbetrachtungen, die sich auf Intervalle und nicht auf punktweise Stetigkeit beziehen, dies wiederum sehr ähnlich zu Cauchys Betrachtungsweise.

Die für die Integrierbarkeit wichtige gleichmäßige Stetigkeit wird von Dirichlet „epsilontisch“ ausgedrückt:

> Denn da nach demselben die Function sich nirgends sprunghaft verändert, so folgt daraus nothwendig, dass wenn wir uns irgend ein bestimmtes, aber beliebig kleines, Quantum ρ denken, es immer möglich sein müsste, die Intervalle, die zwischen a und b genommen wurden, so klein zu machen, dass innerhalb jedes einzelnen die Functionalwerthe [sic!] um weniger als ρ voneinander verschieden sind ... [PD 40/41, 17].

In [PD 40/41] wird diese Eigenschaft als direkte Konsequenz der Stetigkeit, und damit keiner genaueren Begründung bedürftig, hingestellt. In ähnlicher Weise findet sich die Aussage auch schon in Dirichlets eigenen kurzen Notizen zur Integration anläßlich seiner Vorlesung über partielle Differentialgleichungen im WS 1832/33 (Archiv BBAW, NL Dirichlet 18). Es drängt sich daher die Vermutung auf, daß der Sachverhalt der gleichmäßigen Stetigkeit für Dirichlet (und ebenso wohl auch für Cauchy) eine nicht unbedingt beweisbedürftige Beinahe-Selbstverständlichkeit gewesen sein könnte.

Diese Vermutung wird allerdings bezüglich Dirichlet dadurch relativiert, daß dieser für die gleichmäßige Stetigkeit, wie sie oben verbal beschrieben worden ist, tatsächlich Beweise gegeben hat. Dies beginnt in [IR 40], wenn auch hier Dirichlet neben der Stetigkeit noch zusätzlich die Monotonie über dem betrachteten Intervall $[a, b]$ fordert. Man beachte im folgenden, daß gegenüber dem obigen Zitat aus [PD 40/41] der verwendete Buchstabe ρ in [IR 40] eine andere Bedeutung hat. Dirichlet betrachtet in [IR 40, 9] eine ohne Einschränkung der Allgemeinheit monoton zunehmende Funktion f und gibt sich ein beliebig kleines positives δ vor. Er geht von a aus mit der Veränderlichen x so weit nach rechts, bis für $x = c_1$ die Differenz $f(c_1) - f(a) = \delta/2$ geworden ist (hier wird in selbstverständlicher Weise der Zwischenwertsatz verwendet). Von c_1 geht man nun weiter nach rechts bis zu $x = c_2$, sodaß $f(c_2) - f(c_1) = \delta/2$ und so fort. Wegen der Monotonie kommt man auf diese Weise in endlich vielen Schritten zu einem $x = c_m$ mit der Eigenschaft, daß $f(c_m) - f(c_{m-1}) = \delta/2$ und $f(b) - f(c_m) \leq \delta/2$. Setzt man nun

$$\rho = \min\{c_1 - a, c_2 - c_1, \ldots, c_m - c_{m-1}, b - c_m\},$$

so ist für $x \in [c_i; c_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, m-1$ (der Bequemlichkeit setzen wir in Abweichung zu Dirichlets Notation noch $c_0 := a$ und $c_{m+1} := b$) stets

$$f(x+\rho) - f(x) \leq f(c_{i+2}) - f(c_i) \leq \delta$$

sowie trivialerweise

$$f(b) - f(x) \leq \delta, \text{ falls } c_m \leq x \leq b.$$

Daß sich Dirichlet nicht in analoger Weise mit beliebig unstetigen monotonen Funktionen befaßte, etwa um zu zeigen, daß sie integrierbar sind, mag man als Indiz dafür werten, daß (stückweise) Stetigkeit auch für ihn den „Normalfall“ darstellte.

So simpel die eben wiedergegebene Überlegung Dirichlets ist, so ist sie doch aus zwei Gründen sehr bemerkenswert. Erstens bietet sie ein frühes Beispiel lupenreiner Epsilontik in einer Grundlagenfrage, und zweitens läßt sie sich relativ mühelos auf den allgemeinen Fall stetiger, nicht-monotoner Funktionen übertragen, wie das dann auch in [Arendt 1904, 4–6] nachzulesen ist. Da entsprechende Betrachtungen in der anderen Vorlesungsedition [Meyer 1871] nicht zu finden sind (hier wird behauptet (S. 3), daß die gleichmäßige Stetigkeit „unmittelbar einleuchtet“), könnte man durchaus annehmen, daß Arendts Darstellung durch die Weiterentwicklung der modernen Analysis in der Zwischenzeit von ca. 50 Jahren geprägt gewesen sein könnte. Die starke Ähnlichkeit in der Argumentation zu Seidels Mitschrift erweist dagegen die Authetizität der bei Arendt zu findenden Ideen.

Im allgemeinen Falle geht man genauso vor wie im Falle monotoner Funktionen. $c_1 > a$ bestimmt sich aus dem zu a auf der rechten Seite nächsten Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit einer der beiden Geraden $y = f(a) \pm \delta/2$, $c_2 > c_1$ aus dem zu c_1 auf der rechten Seite nächsten Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit einer der beiden Geraden $y = f(c_1) \pm \delta/2$ usw. Angenommen, man würde so die rechte Intervallgrenze b nicht in endlich vielen Schritten erreichen, so würde es ein $c \leq b$ geben, gegen das die Folge der c_k konvergieren würde. Ab einem bestimmten Index k_0 wäre dann aber für $k \geq k_0$ der Abstand zwischen c_k und c_{k+1} beliebig klein, jedoch bliebe

$$|f(c_k) - f(c_{k+1})| = \frac{\delta}{2}$$

konstant von 0 wegbeschränkt. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, daß wegen der Stetigkeit von $f(x)$ in $x = c$ der Unterschied

$$|f(c_k) - f(c_{k+1})| \leq |f(c_k) - f(c)| + |f(c) - f(c_{k+1})|$$

beliebig klein wird.

Erst (und offenbar auch nur) in diesem Beweis findet man bei Dirichlet tatsächlich die beiden Aspekte der Stetigkeit eindeutig vor: globale Stetigkeit (zusammenhängender Graph) und punktweise Stetigkeit (Konvergenz von $f(c_k)$ gegen $f(c)$).

Zusammenfassung:
Sowohl bei Cauchy wie auch bei Dirichlet herrscht eine globale Sicht der Stetigkeit vor, die bei Dirichlet — zumindest bei Funktionen einer Variablen — vorwiegend geometrisch charakterisiert wird. Der globalen Auffassung entspricht auch die oftmals selbstverständliche Verwendung der gleichmäßigen Stetigkeit bei beiden Autoren. Der Sachverhalt der punktweisen Stetigkeit kann zwar in einige Verbaldefinitionen hineininterpretiert werden, spielt jedoch im Rahmen konkreter Probleme keine Rolle. Funktionen, die etwa nur für $x = x_0$ stetig, ansonsten aber in jedem anderen Punkt einer Umgebung

von x_0 unstetig sind, findet man bei keinem der beiden Autoren.[2] Immerhin scheint allerdings Dirichlet dem Aspekt der Zuordnung einzelner Werte bei Funktionen eine größere Bedeutung beigemessen zu haben als Cauchy. Die explizite Problematisierung der gleichmäßigen Stetigkeit im arithmetischen Sinn resultiert bei ihm aus seiner grundsätzlich geometrischen Betrachtungsweise. Dabei wird aber schlußendlich auch bei ihm die punktweise Stetigkeit, wenn auch eher implizit, bedeutsam.

Auch im Aspekt der Stetigkeit von Funktionen erweist sich Dirichlet somit als Person des Übergangs, aber zugleich als Wegbereiter hin zu einer „epsilontisch“ geprägten Analysis.

Literatur:

Arendt, G. 1904. *G. Lejeune-Dirichlets Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen.* Braunschweig: Vieweg.
Biermann, K.-R. 1959. *J.P.G. Lejeune Dirichlet, Dokumente für sein Leben und Wirken.* Berlin: Akademie-Verlag.
Cauchy, A.L. 1821/1885. *Cours d'analyse*, deutsche Übersetzung: *Algebraische Analysis von Augustin Louis Cauchy*. Berlin: Springer.
Cauchy, A.L. 1823. *Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal.* Wiederabdruck in OC (2) 4, 1899.
Lejeune-Dirichlet, J.P.G. 1829. Sur la convergence des séries trigonométriques. Zitiert nach Wiederabdruck in *Werke* I, S. 117–132, Berlin 1889, Reimer.
Lejeune-Dirichlet, J.P.G. 1837. Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen. Zitiert nach Wiederabdruck in *Werke* I, S. 133–160, Berlin 1889, Reimer.
Lejeune-Dirichlet, J.P.G. 1840 [IR 40]. *Die Lehre von den bestimmten Integralen und einige Anwendungen davon.* Vorlesungsmitschrift von Ludwig Seidel. Deutsches Museum München, Nachlaß Seidel Vorl. 001.
Lejeune-Dirichlet, J.P.G. 1840/41. *Elemente der Lehre von den Reihen.* Vorlesungsmitschrift von Ludwig Seidel. Deutsches Museum München, Nachlaß Seidel Vorl. 003.
Lejeune-Dirichlet, J.P.G. 1840/41 [PD 40/41]. *Theorie der partiallen Differentialgleichungen.* Vorlesungsmitschrift von Ludwig Seidel. Deutsches Museum München, Nachlaß Seidel Vorl. 016.
Laugwitz, D. 1987. Infinitely Small Quantities in Cauchy's Textbooks. *Historia Mathematica* **14**, 258–274.
Laugwitz, D. 1999. *Bernhard Riemann 1826–1866, Turning Points in the Conception of Mathematics.* Basel: Birkhäuser.
Meyer, G.F. 1871. *Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale.* Leipzig: Teubner.
Spalt, D. 2015. *Die Analysis im Wandel und im Widerstreit.* Freiburg–München: Karl Alber.

[2] Ein Beispiel für eine solche Funktion wäre etwa $f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, die nur in $x = 0$ stetig ist und enge Verwandtschaft zur „Dirichlet-Funktion“ aufweist. Bei der letztgenannten Funktion wird jeder rationalen Zahl der Funktionswert c und jeder irrationalen der Funktionswert $d \neq c$ zugeordnet. Dirichlet [1829, 132] diskutiert diese Funktion freilich nur als ein pathologisches Beispiel, da sie nicht integrierbar und daher einer Behandlung durch Fourierreihen unzugänglich ist, s.a. [Spalt 2015, 366].

Franz / Franciszek Mertens *(1840–1927)*: *Auch in der Mathematik ein Bindeglied zwischen verschiedenen Kulturen?*

Peter Ullrich
Universität Koblenz · Landau, Campus Koblenz,
Fachbereich 3: Mathematik / Naturwissenschaften, Mathematisches Institut,
Universitätsstraße 1, 56070 Koblenz, Deutschland

Sowohl die familiäre Herkunft als auch der Lebensweg von Franz Carl Joseph Mertens belegen, dass die gegenwärtige Ausprägung der Nationalstaaten relativ neu ist: Seine Vornamen lassen eine Nähe zum Kaiserhaus Habsburg(-Lothringen) vermuten. Als seine Großeltern mütterlicherseits, ein französischer Major und eine polnische Gutsbesitzerstochter, an seinem späteren Geburtsort heirateten, gehörte dieser zu einem napoleonischen Satellitenstaat polnischer Nation, bei seiner Geburt jedoch zum Königreich Preußen. Die Familie seines Vaters hingegen stammte aus der Gegend von Bremen. Und seine akademische Karriere spielte sich an den Universitäten von Berlin, Kraków / Krakau, Graz und Wien ab.

Aber auch im Hinblick auf seine mathematischen Leistungen überbrückte Mertens die Grenzen verschiedener Kulturen: Bereits Auguste Dick (1910–1993) konstatiert in [3, S. 13] und [4, S. 16–17] einen Einfluss von Mertens über Ernst (Sigismund) Fischer (1875–1954) auf Emmy Noether (1882–1935) hinsichtlich ihrer Wendung fort von der in konkreten Rechnungen verhafteten Mathematik im Sinne ihres Doktorvaters Paul Gordan (1837–1912) und hin zu einer abstrakt-konzeptuellen Sichtweise, die über Bartel Leendert van der Waerdens (1903–1996) Lehrbuch „(Moderne) Algebra“ [24] Einfluß auf Nicolas Bourbaki nahm.

Allerdings gibt Dick keine Belege für diese Feststellung, was insbesondere angesichts der folgenden Unklarheiten bedauerlich ist:

- Noethers Ausspruch „Es steht alles schon bei Dedekind.“ legt eine Nähe ihrer Sichtweise von Mathematik zu der von Richard Dedekind

(1831–1916) nahe. Nun wird allerdings jüngst behauptet [10, S. 46, 53], dass dessen mathematische Ideen ihre Wirkung nur über den „Zahlbericht“ [9] von DAVID HILBERT (1862–1943) entwickelt hätten. Zu den Zeiten, in denen NOETHER in Göttingen war, interesssierte sich HILBERT aber längst schon nicht mehr für algebraische Zahlentheorie, kam also als Vermittler DEDEKINDscher Ideen nur bedingt in Frage.

- Hingegen bekundete NOETHER in einem Lebenslauf anlässlich ihres Habilitationsverfahrens vor allem den Einfluß FISCHERs, dem sie für „den entscheidenden Anstoß zu der Beschäftigung mit abstrakter Algebra in arithmetischer Auffassung“ [3, S. 13] dankte. MERTENS als Doktorvater von FISCHER käme also in der Tat für eine Beeinflussung NOETHERs in diesem Sinne in Frage.

- Allerdings spricht gegen solch eine Einschätzung auf den ersten Blick, dass MERTENS die nach ihm benannte Vermutung 1897 für die ersten 10.000 natürlichen Zahlen von Hand explizit nachgerechnet hat [14], was eher zum GORDANschen Stil der Mathematik zu passen scheint.

- Aufgrund seiner großen Arbeit [15] gilt MERTENS zudem als einer der profiliertesten Vertreter der Eliminationstheorie, was dazu führte, dass SHREERAM ABHYANKAR (1930–2012) ihn in seinem Gedicht [1] dezidiert zu den Gegenspielern BOURBAKIs zählte, insbesondere zu denen VAN DER WAERDENs und damit natürlich auch NOETHERs.

Im Folgenden soll diese Situation entworren und auch die Frage beantwortet werden, ob MERTENS nicht sogar der „missing link“ von DEDEKIND zu NOETHER ist.

Mein Dank gilt Frau Dr. CHRISTA BINDER für ihre Unterstützung bei der Beschaffung biographischen Materials zu MERTENS.

1 Zur Vita von FRANZ / FRANCISZEK MERTENS

Familiengeschichte und Lebenslauf von MERTENS sind bereits beschrieben in [4] und [21, S. 300–307], siehe auch [2] und [23], so dass im Folgenden nur ein grober Überblick über seine universitäre Laufbahn gegeben wird:

MERTENS studierte an der FRIEDRICH WILHELMs-Universität zu Berlin, wo er 1865 bei ERNST EDUARD KUMMER (1810–1893) und LEOPOLD KRONECKER (1823–1891) promoviert wurde. Im gleichen Jahr wurde er an die Universität in Krakau berufen auf eine außerordentliche Professur für reine Mathematik – mit polnischer Vortragssprache. Überdies publizierte er über Jahrzehnte hinweg zahlreiche seiner Forschungsarbeiten auch auf Polnisch. 1869 wurde er zum ordentlichen Professor in Krakau ernannt. Später jedoch wechselte er in die österreichischen Kernlande: Im Jahr 1884 erhielt er eine Professur am Polytechnikum in Graz, und 1894 wurde er ordentlicher Professor an der Universität in Wien, wo er 1911 auch emeritiert wurde und bis zu seinem Tode 1927 wohnte.

2 Mertens zwischen Gauss und Bourbaki

In der mathematikhistorischen Literatur ist bereits dokumentiert, dass Carl Friedrich Gauss (1777–1855) durch seine „Disquisitiones Arithmeticae" [7] sowohl direkt als auch durch Vermittlung über Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) Einfluss auf Dedekind genommen hat hinsichtlich dessen begrifflich-abstrakter Konzeption von Mathematik. Weiterhin ist bekannt, dass Noether sowohl direkt als auch über Emil Artin (1898–1962) Einfluss auf die „(Moderne) Algebra" [24] von van der Waerden genommen hat, welche Jean Dieudonné (1906–1992) zutiefst beeindruckte, der wiederum als Endredakteur für Nicolas Bourbaki fungierte.

2.1 Eine Lücke zwischen Dedekind und Noether

Diese beiden Einflusslinien fügen sich scheinbar nahtlos zusammen durch das bekannte Noether-Zitat „Es steht alles schon bei Dedekind." Wie der Einfluss von Dedekind auf Noether genau erfolgt sein soll, wird aber nur selten thematisiert. Eher wird, gerade in popularisierenden Darstellungen zu Noether, im Anschluss an van der Waerdens Nachruf [25, insb. S. 469] unterstellt, es habe gar keinen Einfluss auf Noether gegeben; sie habe immer abstrakt-begrifflich gedacht und gearbeitet und demgemäß Dedekind erst im Nachhinein „entdeckt".

Allerdings stammt nicht nur die unter der Anleitung von Gordan verfasste Dissertation Noethers [17] aus dem Gebiet der „formalen Invariantentheorie" und ist demgemäß mit „verwickelten (symbolischen) Rechnungen" und seitenlangen Listen von Formen übersät, wie schon Franz Meyer (1856–1934) in seinem Referat für das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" nachdenklich-kritisch anmerkte. Auch der erste Vortrag, den

NOETHER auf einer Jahrestagung der DMV hielt, [18], gehörte noch zu diesem Bereich.

Es muss also doch eine Beeinflussung NOETHERs hin zu einer begrifflichen Sichtweise der Mathematik gegeben haben. Was speziell DEDEKIND betrifft, so hat sie aber keine Vorlesung bei ihm gehört; es scheint auch – der theoretischen Möglichkeit zum Trotz – keinen persönlichen Kontakt zwischen den beiden gegeben zu haben. Überdies wertet FRANZ LEMMERMEYER jüngst die Arbeiten von DEDEKIND wie folgt [10, S. 46]:

> „Wie viele Mathematiker Dedekind mit seinen Supplementen für die Zahlentheorie gewonnen hat, ist schwer zu sagen [...], aber der Aufschwung der Zahlentheorie im 20. Jahrhundert hängt mit der Wirkung des [Hilbertschen] *Zahlberichts* zusammen."

Hinsichtlich der Zurückdrängung der Ansätze DEDEKINDs durch HILBERT sieht sich LEMMERMEYER einig mit HERMANN MINKOWSKI (1864–1909) [10, S. 53]:

> „Minkowski schrieb im März 1896 an Hilbert:
>
> > [Dein Referat] wird sicher allgemein großen Beifall finden und die Kroneckerschen wie Dedekindschen Abhandlungen sehr in den Hintergrund drängen."

Jedoch interessierte sich HILBERT beim ersten Besuch NOETHERs in Göttingen im Wintersemester 1903/04 nicht mehr für Algebra und Zahlentheorie, sondern für Geometrie sowie Logik und Grundlagen der Mathematik und beim zweiten Aufenthalt ab Sommersemester 1915 für Analysis und Mathematische Physik.

2.2 ERNST FISCHER und sein Einfluss auf NOETHER

Demgemäß thematisierte NOETHER in ihren offiziellen Lebensläufen keinen spezifischen inhaltlichen Einfluss von HILBERT auf sie. Für den Lebenslauf, den sie anlässlich ihrer Promotion einreichte [20, S. III], braucht dies nicht zu überraschen. Jedoch auch in dem vom 4. Juni 1919 datierenden Lebenslauf, dem Tag ihrer öffentlichen Probevorlesung und ihrer Zulassung als Privatdozentin, erwähnt sie keinen besonderen Einfluss von HILBERT:

> „Während meiner Studienzeit waren meine mathematischen Lehrer die Herren Gordan und Noether in Erlangen, Hilbert, Minkowski und Blumenthal in Göttingen."

Bezüglich der Beeinflussung ihrer Art mathematischen Denkens nennt NOETHER hingegen einen anderen Namen:

> „Vor allem bin ich Herrn E[rnst] Fischer zu Dank verpflichtet, der mir den entscheidenden Anstoß zu der Beschäftigung mit abstrakter Algebra in arithmetischer Auffassung gab, was für all meine späteren Arbeiten bestimmend blieb und für solche nicht rein algebraischer Natur."

FISCHER hatte von 1894 bis 1899 in Wien und Berlin Mathematik studiert und war 1899 in Wien bei MERTENS mit einer Dissertation „Zur Theorie der Determinanten" promoviert worden. Hieran schlossen sich in den Jahren 1899 bis 1902 Studienaufenthalte bei MINKOWSKI in Zürich und Göttingen an sowie in den Jahren 1902 bis 1911 Assistentenzeit, Privatdozentur und außerordentliche Professur an der Technischen Hochschule in Brünn / Brno. (In die letztgenannte Zeit fällt auch seine Publikation, praktisch zeitgleich mit FRIGES RIESZ (1880–1956), des Satz von FISCHER-RIESZ und des Darstellungssatzes von FISCHER-RIESZ [5], [6].) Nach einem kurzen Zwischenspiel von ERHARD SCHMIDT (1876–1959) hatte FISCHER dann 1911 in Erlangen die (Nach-)Nachfolge von GORDAN angetreten.

Da FISCHER nach ihrem eigenen Bekunden NOETHER zur begrifflich orientierten Algebra DEDEKINDscher Prägung gebracht hat, stellt sich die Frage, wer wiederum ihn zu dieser Auffassung gebracht hatte: GEORG FROBENIUS (1849–1917) als Vertreter der Algebra in Berlin hatte ihn während seines dortigen Studienaufenthaltes sicherlich nicht dazu bewegt: Im Dezember 1893 hatte dieser in einem Brief an HEINRICH WEBER (1843–1912) seine Freude darüber, dass dieser ein Werk über Algebra schrieb, mit der Hoffnung verbunden, dass dieses zwar DEDEKINDs Ideen folgen, aber dessen abstrakte Darstellungsweise vermeiden würde. Und dass MINKOWSKI die DEDEKINDsche Sichtweise in den Hintergrund zu drängen wünschte, wurde bereits oben erwähnt. Somit bleibt in der Tat nur FISCHERs Doktorvater FRANZ MERTENS übrig, um ihn und damit eben indirekt NOETHER zur „abstrakte[n] Algebra in arithmetischer Auffassung" zu führen.

3 MERTENS als scheinbarer Traditionalist

Diese Herleitung der Bedeutung von MERTENS für die NOETHERsche Mathematik steht allerdings auf den ersten Blick im Widerspruch zu einigen Aspekten seines Werkes.

3.1 Die Mertenssche Vermutung

Der Wert $\mu(n)$ der Möbiusschen μ-Funktion für eine natürliche Zahl n ist gleich

$$\begin{array}{rl} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0, & \text{wenn } n \text{ durch ein nichttriviales Quadrat geteilt wird,} \\ (-1)^k, & \text{wenn } n \text{ das Produkt von } k \text{ verschiedenen Primzahlen ist.} \end{array}$$

Bezeichnet M die Summatorfunktion von μ, also $M(x) := \sum_{n \leqq x} \mu(n)$, so besagt die Mertenssche Vermutung, dass für alle x gilt $|M(x)| \leqq \sqrt{x}$. Träfe diese zu, so würde daraus die Gültigkeit der Riemannschen Vermutung folgen. Allerdings wurde die Mertenssche Vermutung 1985 von Andrew Odlyzko (*1949) und Herman te Riele (*1947) widerlegt, wobei allerdings bis jetzt kein explizites Gegenbeispiel bekannt ist und man weiß, dass die Vermutung für alle Argumente x kleinergleich 10^{14} doch korrekt ist.

Mertens selbst hatte ihre Gültigkeit bis 10.000 „von Hand“ nachgerechnet und dies 1897 in einer 70 Seiten umfassenden Arbeit [14] publiziert. Dies klingt zuerst nach stumpfem Durchrechnen, ähnlich wie in Noethers Dissertation [17]. Diese Methode des systematischen numerischen Rechnens wurde aber bereits von Gauss praktiziert, etwa zur Verteilung von Primzahlen und zu absolut kleinsten Primitivwurzeln; heutzutage würde man sie wohl als „experimentelle Mathematik“ bezeichnen.

Und genau das Präzisieren von Vermutungen auf der Basis empirischer Daten sowie, im Anschluss daran, das Führen exakter Beweise hatte Mertens schon im Jahr 1874 praktiziert: Adrien-Marie Legrendre (1752–1833) hatte rein empirisch für die Summe der reziproken Primzahlen die asymptotische Formel

$$\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} = \log(\log x - 0{,}08366) + C$$

gefunden, wobei sich 0,08366 rein numerisch ergeben hatte und C eine unbekannte Zahl war. Mertens bewies in [11] dann die genauere Beziehung

$$\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} = \log\log x + B + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

für $x \to \infty$ mit einer explizit als Reihenwert angebbaren Konstanten B.

3.2 Eliminationstheorie

Aufgrund seines fundamentalen Artikels [15] zur Eliminationstheorie – welcher 1899 auf Deutsch und 1901 auf Polnisch publiziert wurde – gilt MERTENS als Protagonist dieser Theorie. In der vierten Auflage des zweiten Teils der „(Modernen) Algebra“ [24] von 1959 fiel diese Theorie jedoch Kürzungen zum Opfer, wie VAN DER WAERDEN im Vorwort beschreibt:

> „So ist das Kapitel „Eliminationstheorie“ weggefallen. Der Satz von der Existenz des Resultantensystems für homogene Gleichungen, der früher mittels der Eliminationstheorie beweisen wurde, erscheint jetzt in § 121 als Folge des Hilbertschen Nullstellensatzes.“

Dies wiederum brachte ABHYANKAR dazu, in seinem Gedicht „Polynomials and power series, may they forever rule the world!“ MERTENS – unter anderem neben CARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804–1851) und KRONECKER – als einer derjenigen aufzuführen, deren Mathematik einen Schutz gegen die bourbakistischen Abstraktionen bilden sollte [1, S. 783]: “Eliminate, eliminate, eliminate! Eliminate the eliminators of Elimination theory!” schallt es darin der BOURBAKI-Gruppe, VAN DER WAERDEN und damit letztlich auch NOETHER entgegen.

VAN DER WAERDEN selbst jedoch würdigte in seiner Darstellung der Quellen seiner „Modernen Algebra“ die Arbeit [15] von MERTENS als ein “remarkable paper, in which the existence of a system of resultants for homogeneous equations was proved for the first time” [26, S. 37].

4 Zwischen Abstraktion und Konkretisierung

Die Haltung von MERTENS zwischen abstrahierter und konkretisierter Mathematik wird charakterisiert durch eine Bemerkung von HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843–1921) bereits aus dem Jahr 1869 [22, S. 105]:

> „Herr M e r t e n s [. . .] machte gelegentlich mir gegenüber die Bemerkung, es sei doch eigenthümlich, dass R i e m a n n von einer Function, welche z. B. die Fläche eines ebenen geradlinigen Dreiecks auf die Fläche eines Kreises conform abbildet, bereits die Existenz nachgewiesen habe, während die wirkliche Bestimmung einer

> solchen Function wegen der in den Ecken liegenden Unstetigkeiten der Begrenzungslinie die Kräfte der Analysis zur Zeit noch zu übersteigen scheine."

Diese Haltung, unvoreingenommen zu fragen, wie sich eine Abstraktion in einer speziellen Situation konkretisiert, in der man die notwendige Aussage vielleicht besser „zu Fuß" beweisen kann, kommt im Werk von MERTENS prominent in der Arbeit [13] zum Tragen, in der er den Beweis für die Existenz von Primzahlen in arithmetischen Progressionen in der Art vereinfachte, wie er heute noch üblicherweise geführt wird: DIRICHLET hatte an entscheidener Stelle aufwendig theoretisch nachgewiesen, dass gewisse L-Funktionen einen von Null verschiedenen Wert annehmen; Mertens hingegen rechnete den Wert konkret so weit aus, dass man diesem ansah, dass er von Null verschieden ist. (Nur der Vollständigkeit halber sei anmerkt, dass MERTENS sich auch mit Arbeiten von DEDEKIND auseinandersetzte, etwa in [16].)

Teilweise griffen die Arbeiten von MERTENS auch seiner Zeit voraus: So bewies er 1887 die Aussage des HILBERTschen Basissatzes in dem Spezialfall von Idealen in Polynomringen in zwei Variablen mit Koeffizienten aus einem Körper und von Kernen von Algebrenhomomorphismen mit Bild in solchen Polynomringen und zwar mittels Induktion nach dem kleinsten positiven im Ideal auftretenden Grad [12], ein Jahr, bevor HILBERT mit seinen Publikationen zum Allgemeinfall begann [8].

Was den direkten Einfluss betrifft, so ist bezeichnend, dass NOETHER sowohl in ihrem letzten Artikel zur Invariantentheorie [18] als auch in ihrer ersten längeren Publikation im Geiste der abstrakten Algebra [19] Arbeiten von MERTENS zitierte.

5 Ein Treffen in Wien

Und es gab sogar ein direktes Treffen der beiden: Auf der Versammlung der deutschen Naturforscher und Ärzte in Wien im Jahr 1913 trug NOETHER am 29. September über die ersten Resultate ihres neuen Zugangs zur Algebra vor, vgl. [19]. Diese Gelegenheit nutzte sie auch, um MERTENS zu besuchen. OTTO GUGLIA (1904–1984), ein Enkel von MERTENS, erinnerte sich später wie folgt daran [4, S. 16]:

> „Zu den „mathematischen Bekannten" meines Großvaters, deren ich mich aus meiner Kindheit erinnere, gehört auch Emmy Noether. Es muss so um 1912 [lies: 1913, s. o.] gewesen sein, als sie

> meinen Großvater in der Stammgasse besuchte. Es kann sein, dass sie sogar mehrmals zu uns kam. [...] Auf meine Frage, wer denn dieser Besuch gewesen sei, erklärte mein Großvater, das wäre eine Mathematikerin, eine Gelehrte, gewesen, die sich mit ihm fachlich unterhalten hätte.“

Es hatte sich also offensichtlich nicht um den Höflichkeitsbesuch der Tochter des Ordinarius Max Noether (1844–1921) bei dessen sogar etwas älteren Kollegen gehandelt, sondern um einen wissenschaftlichen Austausch, wobei Mertens’ Wahl des Subjekts in dem Relativsatz bemerkenswert ist.

Literatur

[1] Shreeram Abhyankar: *Polynomials and Power series, May they forever rule the world!* September 1970. Unter anderem in Chris Christensen, Ganesh Sundaram, Avinash Sathaye, Chandrajit Bajaj (Hrsg.): *Algebra, Arithmetic and Geometry with Applications. Papers from Shreeram S. Abhyankar’s 70th Birthday Conference.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag 2004, S. 783–784.

[2] Christa Binder: 100 Jahre Mertenssche Vermutung. *Internationale Mathematische Nachrichten* **178** (1998), S. 2–6.

[3] Auguste Dick: Emmy Noether 1882–1935. *Beihefte zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik“* **13** (1970).

[4] —: *Franz Mertens 1840 – 1927. Eine biographische Studie mit einer Einleitung von Edmund Hlawka.* Bericht 151 der mathematisch-statistischen Sektion im Forschungszentrum Graz, 1981.

[5] Ernst Fischer: Sur la convergence en moyenne. *Comptes rendues hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences Paris* **144** (1907), S. 1022–1024.

[6] —: Applications d’un théorème sur la convergence en moyenne. *Comptes rendues hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences Paris* **144** (1907), S. 1148–1151.

[7] Carl Friedrich Gauss: *Disquisitiones Arithmeticae.* Fleischer, Lipsiae (1801); auch *Werke*, 12 Bände. (Königliche) Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Göttingen (1863–1933), Bd. I.

[8] David Hilbert: Zur Theorie der algebraischen Gebilde (Erste Note). *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1888), S. 450–457.

[9] —: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **4** (1897), S. 175–546.

[10] Franz Lemmermeyer: David Hilbert: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. Deutsche Math. Ver. 4 (1897), 175–546. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **120** (2018), S. 41–79.

[11] Franz Mertens: Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **78** (1874), S. 46–62.

[12] —: Beweis, dass alle Invarianten und Covarianten eines Systems binärer Formen ganze Functionen einer endlichen Anzahl von Gebilden dieser Art sind. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **100** (1887), S. 223–230.

[13] —: Über Dirichlets Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte ganzzahlige arithmetische Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern teilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen enthält. *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abt. 2* **106** (1897), S. 254–286.

[14] —: Über eine zahlentheoretische Funktion. *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abt. 2* **106** (1897), S. 761–830.

[15] —: Zur Theorie der Elimination. *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abt. 2a* **108** (1899), S. 1173–1228, 1344–1386. Auch auf Polnisch in *Prace matematyczno-fizycne, Warschau* **11** (1901), S. 139–219.

[16] —: Über den Dedekindschen Beweis der Irreduktibilität der Gleichung für die primitiven n-ten Einheitswurzeln. *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abt. 2* **114** (1905), S. 1293–1296.

[17] Emmy Noether: *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form.* Dissertation Friedrich-Alexander-Universität Erlangen 1907. Auch in *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **134** (1908), S. 23–90; auch in [20, S. 31–99].

[18] —: Zur Invariantentheorie der Formen von n Variablen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **139** (1911), S. 118–154; auch in [20, S. 104–140].

[19] —: Körper und Systeme rationaler Funktionen. *Mathematische Annalen* **76** (1915), S. 161–196; auch in [20, S. 145–180].

[20] —: *Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers.* Hrsg. v. Nathan Jacobson. Berlin et al.: Springer-Verlag 1983.

[21] Helga Peppenauer: *Geschichte des Studienfaches Mathematik an der Universität Wien von 1848 bis 1900.* Dissertation Universität Wien 1953.

[22] Hermann Amandus Schwarz: Ueber einige Abbildungsaufgaben. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **70** (1869), S. 105–120.

[23] Peter Ullrich: Franz / Franciszek Mertens (1840–1927). *Berliner Mathematische Gesellschaft e. V., Mathematiker des Monats Juli 2018.* `http://www.math.berlin/mathematiker/franz-carl-joseph-mertens.html`

[24] Bartel Leendert van der Waerden: *(Moderne) Algebra.* 2 Bände. Berlin: Springer zahlreiche Auflagen seit 1930.

[25] —: Nachruf auf Emmy Noether. *Mathematische Annalen* **111** (1935), S. 469–475.

[26] —: On the sources of my book *Moderne Algebra. Historia Mathematica* **2** (1975), S. 31–40.

The Greek language: a cradle of important mathematical terms

Christine Phili*

I. Introduction

Around the sixth century B.C. in the Ionian coasts flourished the Greek polis[1], a well organized self governing state. In this same epoch the Ionian thinkers abandoned the mythical interpretation mostly related to religious convictions and started to inquiry a rational accounting of the world. Thus, the logos (ὁ λόγος) i.e. the word, the reason became the necessary tool in order to answer compatible with the knowable natural universe. So the cosmogony (κοσμογονία), deriving from the word κόσμος = order, ornament, world order, and then universe, γονία = generation, was replaced by the cosmology (κοσμολογία) κόσμος = universe, λογία = the study of something or the branch of knoweledge of a discipline, from the verb λέγω = to speak, to tell. Plato in his dialogue *Gorgias* stressed the meaning of the word κόσμος: *«the experts call the world a kosmos, an ordered whole, not a disorder»*[2].

Henceforth Science and Philosophy constituted a unity, the same episteme, noun derived from the verb ἐπίσταμαι (epistamai) = to know well.

The systematic study of Physis[3], φύσις = nature, from the verb φύειν = to bring forth, started with the Milesian School, while the natural philosophy founded by Thales (ca 625 to ca 547 B.C.) marked the end of mytho-poetic thought of cosmos[4] and the beginning of the rational interpretation of the universe. In reality the Ionian thinkers (we can't use the noun philosopher) φιλόσοφος = a lover of wisdom[5] as at that period they were named σοφοί = wise men, the word philosopher was adopted in Plato's epoch) started to envisage cosmos as an ordered universe tractable to reason.

«Thales», as Proclus revealed «*was the first to introduce this science [geometry] into Greece. He made many discoveries himself and taught the principles for many others to his successors»*[6].

---

[1] From this noun the words politics, policy are derived.
[2] Plato, *Gorgias* 508 a.
[3] Physis in Greek mythology was the Protogenos (primerval god), all parent, heavenly, ancient and divine. In reality she had the task to put order in the nature.
[4] Cf. Hesiode's *Theogony.*
[5] It might be stressed that according to Platonic conception only the god is wise (σοφός). Later Cicero, in his Tusculanae *Disputationes* gave to the philosopher the role of an intellectual person who denying honors and riches devoted his life to contemplate the universe and to understand the nature of things. *Tusculanae Disputationes*, v. 3. 9.
[6] Proclus. *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements* translated, with introduction and Notes by G. R. Morrow. Princeton University Press. Princeton 1970, 65: 7-10, p. 52.
* National Technical University of Athen School of Appied Mathematical and Physical Sciences Department of Mathematics. Zografou Campus 157 80, Athens Greece. xfili@math.ntua.gr

This transition from myth (μύθος, related to root *μυ, μυῶ = to initiate, μύστης = initiate, adept as well as the word μυστήριο = mystery) to logos[7] (λόγος from the verb λέγω = to talk, to tell) reason, the adoption of the alphabet as well as the democratization of the institutions became a fertile ground for the birth of three revolutions: a political, a legal and a scientific one.

The concept of democracy was born in Greece and this country offered its foundation side by side with the concept of freedom[8]. In the framework of this political revolution it may include the legal one, which was immortalized by Aeschylus in his trilogy *Oresteia* and mostly at the end of Eumenides where it was praised the granting of justice[9].

During the scientific revolution in the Ionian coasts, the deductive reasoning, the corner stone of mathematical science was established.

II. The Pythagoreans

After the death of Anaximander[10], who used to be a Thales' disciple, the center of Greek civilization was moved from the Ionian coasts to southern Italy. Pythagoras (ca. 560 to ca. 480 B.C.) a mystic teacher of wisdom, after his «studies» in Egypt and Babylon settled at Croton, a prosperous Dorian sea port in Southern Italy, where he founded his religious and philosophical society.

His disciples, the Pythagoreans, who lived in a rigorous and ascetic obedience, invoked a common program of study mainly focused on four disciplines.

From the Greek verb *manthanein* (to learn) was derived the substantive *mathima* (in singular), *mathimata* (in plural) i.e. lessons, which could indicate any branch of learning. Thus the adjective *mathimatikos* signifies a person who in general is fond of learning[11]. *«According to the tradition»,* Proclus revealed, *«the Pythagoreans recognized that everything we call learning is remembering*[12]*, not something placed in the mind from without, like the images of sense pictured in the imagination... then, is what learning (μάθησις) is, recollection of the eternal ideas in the soul; and this is why the study that especially brings us the recollection of these ideas is called the science concerned with learning (μαθηματική)»*[13].

In this religious and philosophical brotherhood according to his hierarchical principles its disciples were divided in two major categories: *the akousmatikoi* (the listeners), the debutant followers, who had the privilege to hear and accept Pythagoras' teaching deprived of any possibility to quest. After a considerable training the advanced disciples, *oi mathimatikoi* are able to express their own

---

7 E. Moutsopoulos, *La pensée présocratique. Du Mythe à la raison.* Athènes. Grégoris 1978.

8 Aristotle, *Politics* 1317, 40a-b 14.

9 For more details see Ch. Phili, Juriprudence elements in Labdakian and Atredian myths in *Festschrift für Kostas Beis dem Rechtdenker in attischer Dialektik.* Athen 2003, σσ. 1255-1271.

10 It might be stressed that in order to interpretated the universe he substituted Thales' principal element, the water by the apeiron, boundless (ἄ-πειρον).

11 Cf. the Dutch term for mathematics *Wiskunde* means literally the art to achieve wisdom.

12 Cf. the platonic concept in *Meno* see Platos' *Meno* 82bff. as well as in Phaedo 73b *«If you take a person to a diagram... then you can show most clearly that learning is recollection».*

13 Proclus, *op. cit.,* 45: 4-8 and 46: 15-18, pp. 37-38.

opinion as well as to conduct and to educate the new disciples. Moreover they had access to the most important and deepest part of his doctrine.

The curriculum of the Pythagorean School expressed their conception on mathematics. It might be stressed that in this secret society mathematical science was considered to be divided into four parts, according to their specific differences. Thus one half of this science was concerned *«with quantity (ποσόν), the other half with magnitude (πηλίκον); and each of these they posited as twofold. A quantity can be considered in regard to its character by itself or in its relation to another quantity, magnitudes as either stationary or in motion. Arithmetic, then studies quantity as such, music, the relations between quantities, geometry, magnitude at rest, spherics,* [i.e. astronomy] *magnitude inheavenly moving»*[14]. Thus in this religious and mystic brotherhood the main part of the education was based on four *mathimata* (topics): arithmetic, geometry, harmonia and astronomy.

It might be stressed that later Plato and Aristotle included these fundamental lessons in the Academy and the Lyceum respectively, while in the Middle Ages this curriculum will be known in the West as the quadrivium.

Arithmetics derives from the word ἀριθμός = number, from the Greek verb ἀραρίσκω = ararisko, to concentrate, to count. Geometry derives from the word γεω-μετρία, ge=earth, metria = metry, process of measuring Astronomy, derives from the words ἄστρο = star, νόμος = arranging, regulating, rule, from the Greek verb νεμεῖν = nemein = deal out, and harmonia = ἁρμονία in Greek means agreement, concordance of sounds[15].

Early Pythagoreans also studied the five regular polyhedra (πολύ = πολλά = many, ἕδρες = edges) i.e. convex solids whose edges form congruent regular polygons (πολλύ = πολλές, γωνίες = angles). So they studied:

the tetrahedron (or pyramis = πυραμίς, πύρ = fire, αμίς = vessel, vessel of fire), having four faces (τέσσερεις ἕδρες)

the hexahedron (or cube - κύβος), having six faces (ἕξη ἕδρες)

the dodecahedron, having twelve faces (δώδεκα ἕδρες)

the octahedron, having twenty faces (εἴκοσι ἕδρες)

Aetius in his *Vetusta Placita,* stressed that: *«The universe is made from five solid figures which are called mathematical; of these he* [Pythagoras] *says that earth has arisen from cube, fire from the pyramid, air from octahedron, and water from the icosahedron and the sphere of All from the dodecahedron»*[16].

Another testimony related to the study of five regular polyhedra and their correspondence to the five elements we found in Stobaeus: *«There are five bodies, pertaining to the sphere – the fire, water, earth and air in the sphere, and the vessel of the sphere itself as the fifth»*[17].

It might be stressed, that the dodecahedron, the sphere of All, or the vessel of the sphere itself, which Plato[18] identifies with the ether[19], (αἰθήρ) in his dialogue,

[14] Proclus, *op. cit.,* 35: 22-31, pp. 29-30.
[15] However the noun musik = μουσική means the art of Muses.
[16] Aetius, *Vetusta Placita* ii.6 Dox 334.
[17] Philolaus, cited by Stobaeus Extracts 1, proem 3 ed. Wachsmuth 18.5; H. Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker.* Berlin 1906. i 5 412 15 - 413.2.
[18] Ch. Binder, P. Schmitt, Platonische und archimedische Körper. Entwicklung der Definitionen in *Mathematik im Fluss der Zeit* H. Hein, P. Ullrich (hersg.) *Algorismus* 44, 2004, pp. 132-142.
[19] upper air, bright, purer air, from the verb αἰθεῖν = to burn, to shine.

Epinomis[20], in our days was «realized» with the introduction of the topology of the dodecahedral (Poincaré) space[21]. Of course it is well known that Theaetetus is the first who formulated the theory of polyhedra, as it is exposed in the XIIIth Book of Euclid's *Elements*[22].

The name of Pythagoras is also involved with the well known theorem, that the square of the hypotenuse, ὑποτείνουσα from the Greek preposition ὑπό = under and the verb τείνειν = to stretch, is equal to the sum of squares of the other two sides. We can't discuss here if Pythagoras is really the person[23] who discovered this theorem. Proclus in his *Commentary on* the First Book of Euclid's *Elements* denied the Pythagoras' paternity: *«For my part, though I marvel at those who first noted the truth of this theorem, I admire more the author of the Elements, not only for the very lucid proof by which he made it fast, but also because in the sixth book he laid hold of a theorem even more general than this and secured it by irrefutable scentific arguments»*[24].

A legendary element in Pythagorean School constitutes the tetraktys (τετρακτύς) from τετράς, the group of the first four numbers (1,2,3,4). The Pythagoreans payed a great attention to its sum which equals ten. Moreover for the early Pythagoreans tetraktys was a synonyme of harmony. Iamblichus in his Life of Pythagoras Vita Pythagorica, revealed that a Pythagorean acousma identifies tetraktys with harmony. A harmony is when it comprises all synfoniai (συμφωνίαι = consonances) (συν = with, φωνή = voice, with the same voice), or contains the numbers of the basic harmonious intervals octave (2:1), quinte (3:2) and quatre (4:3)[25].

It concerns the definition of the oracle in Delphi «What is the Oracle in Delphi?»[26]. The answer revealed that it *«is Tetraktys. This in the scale (harmonia) in which the sirens sing»*[27]. We must stress that Plato in his myth of Er, a brave man from the family of Pamphylon, considers that the Sirens are sitting on eight celestial circles to produce the music of the spheres[28].

However *«Pythagoras transformed mathematical philosophy into a scheme of liberal education, surveying its principles from the highest downwards and investigating its theorems in an immaterial [ἀύλως = in abstraction from sensible things] and intellectual manner»*[29].

In the Pythagorean brotherhood the science of mathematics was cultivated as a necessary instrument in order to lead the soul in a higher spiritual world, the

---

[20] Epinomis 981 d «*The bodies, then, being five, we must name them as fire, water and thirdly air, earth fourth and ether fifth*».

[21] J. Weeks, The Poincaré dodecahedral space and the mystery of the missing fluctuations. *Notices A.M.S* Vol. 51 No 6 June/July 2004, pp. 610-619; see also J. P. Luminet, J. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq and J. P. Uzan, Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide angle temperature correlations in the cosmic microwave background *Nature* No 425 2003, pp. 593-595.

[22] The corrollary of the Proposition 18 offers the proof that no more than the five types of convex regular polyhedra exist.

[23] T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics* Vol. 1 Oxford 1921, 144 f.

[24] Proclus, *op. cit.,* 426: 6-12, pp. 337-338.

[25] Theon Smyrn, p. 58.13.

[26] Iamblichus VP 82 = DK 58 C. 4.

[27] Ibidem.

[28] Plato, Republic X 617 b.

[29] Proclus, *op. cit.,* 65: 14-128, pp. 52-53.

abstractness started with them. Characteristic is the following testimony of Proclus who revealed that the Pythagoreans had adopted the moto: *«a figure and a stepping-stone, not a figure and three obols»*[30]. This rule signifies that they *«must cultivate that science of geometry which with each theorem lays the basis for a step upward and draws the soul to the higher world, instead of letting it descend among sensibles to satisfy the common needs of mortals and in aiming at these, neglect to turn away hence»*[31].

Later Plato in his *Republic* followed the same way of abstractness. From him the training of mathematics is to turn the mind away from sensory experience to the study of abstract form *«the search for the beautiful and the good»*[32].

III. Geminus' classification of the mathematical sciences.

Geminus of Rhodes (1st century B.C.) a stoic philosopher and a pupil or a follower of Posidonius, in his treatise, *Theory of Mathematics,* which is not extant, gave a classification of the mathematical sciences[33]. In reality the stoic philosopher formulated a larger caliber regarding the quadrivium and at the same time gave a certain number of relative disciplines. Thus through Proclus we get the information about the following five branches of mathematics: mechanics, optics, geodesy, canonics and calculation[34]. Let us present the etymology of these branches The science of mechanics, i.e. *«the art of making useful engines of war, like the machines of Archimedes is credited with devising for defense against the besiegers of Syracuse, and also the art of wonderworking, which invents figures moved sometimes by mind, like those written about by Ctesibius and Heron, sometimes by weights, whose imbalance and balance respectively are responsible for movement and rest... also [is the science] of equilibrium in general and the study of so called center of gravity, as well as the art of making spheres imitating the revolution of heavens»*[35].

Thus mechanics is derived from the Greek word μηχανή = machine.

Geminus also presented the branch of optics, i.e. the science of sight, which derives from the Greek word ἁπτός = seen, visible, having the root ap cf. also the verb ὄψεσθαι = be going to see, related to ops = eye.

As it concerns the branch of canonics, i.e. the mathematical theory of music, from the Greek noun κανών = rule.

Both of them, the disciplines of optics and canonics *«are offshoots of geometry and arithmetic. The former science uses visual lines and the angles made by them; it is divided into a part specifically called optics, which explains the illusory appearances presented by objects seen at a distance, such as the converging of parallel lines or the rounded appearance of square towers*[36] *and*

[30] Σχᾶμα καὶ βᾶμα, ἀλλ' οὐ σχᾶμα καὶ τριώβολον. Proclus, *op. cit.,* 84: 17-18, p. 69.
[31] Proclus, *op. cit.,* 84: 19-23, p. 69.
[32] Plato, *Republic* Book VII, 531 c 6.
[33] See B. Vitrac, «Les classifications mathématiques en Grèce antique» *Archives de Philosophie.* Vol. 68 2005, pp. 269-301.
[34] Proclus, *op. cit.,* 38: 12-13, p. 31.
[35] Proclus, *op. cit.,* 41: 5-16, pp. 33-34.
[36] This statement *«the rounded appearance of squar towers»* appeared in R. Schöne's book *Auszüge aus Geminos* Berlin 1897 p. 22, known as Damianos' «proposition», constitutes one of the basic rules of

general catoptrics [from the Greek word κάτοπτρον = mirror] which is concerned with the various ways in which light is reflected. The latter is closely bound up with the art of representation and studies what is called «scenepainting» [σκηνογραφική in Greek], *applied perspective»*[37].

As it concerns the calculation in Greek is λογιστική from the verb λογίζεσθαι = to calculate. Nevertheless *«astronomy, which inquires into the cosmic motions, the sizes and shapes of the heavenly bodies, their illuminations and distances from the earth, and all such matters...*[38]. According to Geminus' classification astronomy is divided in: gnomonics, from the Greek word γνώμων = sun dial. This branch of astronomy is related to *«the divisions of time by the placing of sun-dials»*[39]. Another branch constitutes meteorlgy, from the Greek word μετεωρολογία, μετέωρον = thing high up, from μετά = over, beyond ἄωρος = lifted, hovering in air, raising from the ground, αἰρεῖν = to rise and λογία = treatment of.

In the antiquity (cf. Aristotle's *On meteors)* meteorology has a different meaning[40] i.e. the determination of *«different risings of the heavenly bodies and their distances from one another and teaches many and varied details of astronomical theory»*[41].

The third part of astronomy is the branch of dioptrics, derived from the Greek word διόπτρα, an optical instrument for measuring angles or altitudes. The aim of this discipline is to fix *«the positions of the sun, moon, and stars by means of special instruments»*[42].

As it concerns the branch of geodesy, the art of land surveying derived from the Greek word = ge, Γῆ, Γαῖα (in mythology spouse of Uranus, mother of Titans, goddess of Earth) and the verb δαιεῖν = to divide.

IV. Zeno and Democritus

Zeno of Elea (ca. 490 to ca 425 B.C.), a Parmenides' disciple, a philosopher and logician rather than a mathematician, remains well known for his four paradoxes (from the Greek word παράδοξο, παρά = contrary to, δόξα = opinion from the verb δοκεῖν = to seem, to think.

His first paradox is known as dichotomy, which derived from the Greek word διχοτομία, δίχα = in two, from δίς = twice and τομία, τομή = a cut from the verb τέμνειν = to cut.

---

perspective. Nevertheless in Ancient and Medieval epoch the meaning of optike and perspective was the same, as the etymology of the word perspective had a larger meaning deriving of the latin verb *perspicere* (to see clearly) a direct translation of the noun optike, science of the vision.

[37] Proclus, *op. cit.,* 40: 9-18, p. 33.

[38] Proclus, *op. cit.,* 41: 18-21.

[39] Proclus, *op. cit.,* 41: 23-42: 1.

[40] Sinc 1547 this branch was dedicated to the study of the atmospher.

[41] Proclus, *op. cit.,* 42: 2-4, pp. 34-35.

[42] Proclus, *op. cit.,* 42: 4-5, p. 35. Heron wrote a special treatise *on dioptra.* Teubner Leipzig 1983. Moreover in his treatise on Catoptrics Heron gave the rules regarding its construction.

Aristotle in his *Physics* describes the first paradox, called the dichotomy, as follows: «*The first asserts the nonexistence of motion on the ground that whatever is in motion must arrive at the half-way stage before it arrives at the goal»*[43].

In his treatise, *De Generatione et Corruptione,* Aristotle revealed that Eleatic and Pythagorian doctrines influenced Democritus (ca. 460 to ca 379 B.C.) from Abdera, a Leucippus' disciple. As his master Leucippus used to be a Zeno's pupil, Democritus tried to resolve Zeno's paradoxes adopting that the geometrical magnitudes are infinitely divisible as well as that a geometrical point has no magnitude. Thus he introduced the indivisible particles, the atoms derived from the Greek word ἄτομος = uncut, a = a privative prefix of the Greek language which stresses the negation, and τομή = a cut, from the verb τέμνειν = to cut.

Formulating his theory, Democritus considered the atoms, infinite in number differing in size and shape, small and indivisible.

V. The Platonic Academy

In the gardens of the Attic hero Academus (Ἀκάδημος), Plato (429-347 B.C.) around 385 B.C established the first official high educational institution, *The Platonic Academy*[44]*,* mostly addressed to students from aristocratic origin. At that period the oral tradition ends and the written one starts.

The mathematical curriculum of the Academy[45], as well as this of *Republic* is directly based on the Pythagorean quadrivium, as many of Pythagorean ideas were absorbed and transformed by Plato and his disciples. It might be stressed that in the Platonic dialogues, *Gorgias, Phaedon* and *Timaeus,* Plato covered two main Pythagorean concepts: the immortality of the human soul[46] as well as the preponderancy of mathematics.

In the *Republic* Plato discussed the education of philosopher kings, the ideal rulers of the state. The mathematical part of this education[47] contains[48]:

arithmetic[49].
plane and solid geometry
astronomy[50]

---

[43] Aristotle, *Physics*. Z 9, 239 b 9.

[44] We consider that the legend regarding the inscription over Academy's entrance *«Let no one ignorant of geometry enter here»* remains an unveriable story dating 700 years after its foundation.

[45] Isocrates and his rhetorical school won the competion regarding succes and material income as he had five times more students than plato.

[46] Cf. «*Who knows if life is really death and death is life?»* Gorgias 492 e.

[47] Plato, *Republic «education is not what the professions of certain men assert to be they presumably assert that they put into the soul knowledge that isn't in it, as though they were putting sight into blind eyes»* Book VII 518, b 9 - c1.

[48] Among the lessons was the training of the body as gymnastic, of course, is wholly engaged with coming into being and passing away. For it oversees growth and decay of the body». Plato, *Republic* 521 e 3-4.

[49] As it concerns the science of arithmetic in *Philebus* Socrates makes clear the distinction of two kinds of arithmetic, the practical and the theoretical one: *«SOCRATES: Are there not two kinds of arithmetic, that of the reckoning and measuring as they are use in building and in trade when compared with philosophical geometry and elaborate computations - shall we speak of each of these as one or two?* PROTARCHUS: *I should say that each of them was two»* Plato, *Philebus,* 56d - 57e. However in the *Republic* does not exist two sort of mathematics: pure and applied.

[50] As the study of the motion of what had depth (528 e1) and is conceived as a natural extension of solid geometry.

harmonics (music).

Nevertheless the proper acquisition of these topics were quite different from Pythagorean ones because the study of mathematics constitutes the first step to understand the Good. It might be stressed that in this curriculum every kind of manual art (βάναυσαι τέχναι) was excluded as all these arts which are mechanical, reduced the power of the intellect.

This mathematical curriculum is valuable as propaideutic for dialectical study of the Forms. These five mathematical studies (arithmetic, plane geometry, solid geometry, astronomy and harmonic theory) together and in this definite sequence constitute the necessary stage of preparation for the philosopher. Indeed those who have used mathematics to climb up out of the cave to the sunlight are still unable *«to look at the animals themselves and at stars themselves and then finally at the sun itself»*[51]. What they are able to look at is only *«the divine appearances in water and at shadows of the things that are»*[52].

In the beginning of his treatise cited both as *On Mathematical Science* (Περὶ μαθηματικῆς) and as *The theory of Harmony* (ὁ ἁρμονικὸς λόγος), Archytas stressed the affinity of geometry, arithmetic and harmony (music):

«*The students of mathematics seem to me to have attained excellent knowledge, and it is not surprising that they correctly understood how things stand in each matter. For, since they have obtained knowledge of the nature of the universe as a whole, they will have come to have a good view of how each thing stands in particular. Concerning the speed and risings and settings of the heavenly bodies they have handed down to us clear knowledge, concerning geometry and numbers, and not least concerning music. For these studies seem to be akin (ἀδελφαί = sisters)»*[53].

This teaching of Pythagorian brotherhood is cited by Plato in the 7th Book of his *Republic.*

It might be stressed that the acquaintance of reasoning (λογισμός) conduct to the equality of social inequalities.

«When calculation (λογισμός) is discovered, it puts an end to civil strive and reinforces concord. Where this is present, greed disappears and is replaced by equality (ἰσότης). It is by calculation that we are able to come to terms in dealings with one another. By this means the poor receive from the affluent and the rich give to the needy, both parties believing that by this they will have what is fair (ἴσον = equal)»[54].

VI. The Hellenistic Period

Plato's as well as Aristotle's inheritance[55] attended its acme during the Hellenistic period. The works of Euclid, Archimedes, Apollonius marked the second great part of Greek mathematics.

[51] Plato, *Republic,* 532 a 3-4.
[52] Plato, *Republic,* 532, c1 - c3.
[53] H. Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker* 1ste Bd. Berlin 1906, 47B1.
[54] Archytas fragm. 3.
[55] J. Dillon, *The Heirs of Plato: A study of the Old Academy (347-247 BC)* Oxford: clarendon Press 2003.

Proclus, in his *Commentary on the First Book of Euclid's Elements,* revealed commenting in Euclid's *Elements*, that the parabola, the ellipse and the hyperbola were firstly conceived as plane curves generated by the Pythagorean method regarding the application of areas. Moreover their names correspond literally to their construction as Eudemus saved in his Summary:

«These things, says Eudemus, are ancient and are discoveries of the Muse of the Pythagoreans, I mean the application of areas (παραβολή χωρίων), their exceeding and their falling short. It was from the Pythagoreans that later geometers took the names, which they again transferred to the so-called conic lines, designating one of these a parabola (παραβολή), another a hyperbola (ὑπερβολή) and another an ellipse (ἔλλειψις), whereas those godlike men of old saw the things signified by these names in the construction, in a plane, of areas upon a finite straight line. For when you have a straight line set out and lay the given area exactly alongside the whole of the straight line, then they say that you apply (παραβάλλειν) the said area; when however you make the length of the area greater than the straight line itself, it is said to exceed (ὑπερβάλλειν)[56] and when you make it less, in which case, after the area has been drawn, there is some part of the straight line extending beyond it, it is said to fall short (ἐλλείπειν). Euclid too, in the sixth Book, speaks in this ways both of exceeding and falling short; but in this place he needed the application simply, as he sought to apply to a given straight line an area equal to a given triangle in order that we might have in our power, not only the construction of a parallelogram equivalent to a given triangle, but also the application of it to a finite straight line... such then is the application which has down to us from the Pythagoreans»[57].

So Apollonius (ca 262 - 190 B.C.) of Perga, *«the Great Geometer»* working systematically on conic sections, adapting this early Pythagorean terminology regarding the application of areas, utilized the terms of parabola (exact application), hyperbole (exceeds) and ellipse (falls) in order to name the derived three curves from one circular cone, either oblique or right. Thus according to the Pythagorian terminology regarding the application of areas, Apollonius introduced the terms «parabola» («exact application»), «hyperbola» («exceeds») and «ellipse» («falls short»).

Hipparchus of Bithynia (190 - ca 125 B.C.) is generally considered as the founder of trigonometry, which later was elaborated by Menelaus and Ptolemy. The birth of this new branch was motived by the desire to create a quantitative astronomy. Trigonometry (τριγωνομετρία, τρίγωνο = triangle, μετρία = measurement) this mathematical innovation of late antiquity, comprises a systematic study of relations between angles and arcs of circles and substendings chords.

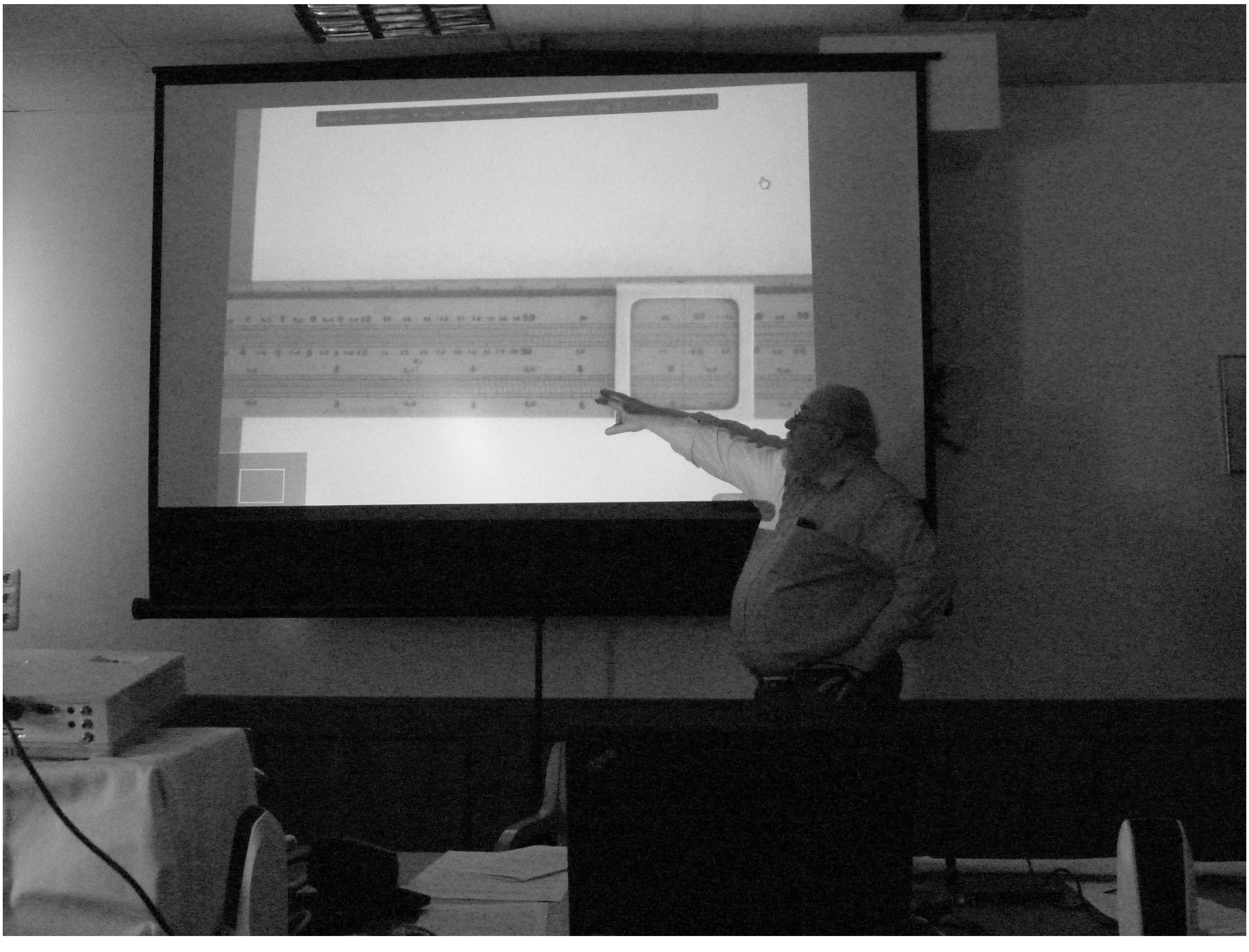
[56] It might be stressed that from the second component βολή = a throwing, deriving the verb βάλλειν = to throw, was named the science of ballistics.
[57] Proclus, *op. cit.* 419: 12-21 – 420: 1-11, 420: 20-21, pp. 332-333.

VII. Conclusion

The richness and the power of mathematics are in an excellent way described in the first part of his Prologue of Proclus' *Commentary on the first Book of Euclid's Elements:*

«[Mathematics] *arouses our innate knowledge, awakens our intellect, purges our understanding, brings to light the concepts that belong essentially to us, takes away the forgetfulness and ignorance that we have from birth, sets us free from the bonds of unreason; and all this by the favor of the god who is truly the patron of this science, who brings our intellectual endowments to light, fills everything with divine reason, moves our souls towards Nous, awakens us from our heavy slumber, through our searching turns us back to ourselves, through our birthpangs perfects us, and through the discovery of pure Nous leads us to the blessed life»*[58].

This science was elaborated and honored by the Greeks, who founded and diffused it in all the world, creating its foundations as well as its terminology.



Karl Kleine

[58] Proclus, *op. cit.,* 46: 20 - 47: 6, p. 38.

Lea Dasenbrock

Johannes Volmar

Ein Wittenberger Mathematiker und seine unbekannte Sammelhandschrift

In den ersten Jahrzehnten nach ihrer Gründung im Jahr 1502 erlangte die Universität Wittenberg[1] einen bedeutenden Ruf[2] im mitteleuropäischen Raum durch Martin Luther (1483-1546) und Philipp Melanchthon (1497-1560), welche den „Wandel im Lehrbetrieb in Richtung humanistische Studien […] vollzogen“[3]. Insbesondere Melanchthon leistete durch seinen Einfluss und sein Wirken einen großen Beitrag zur Ausrichtung der Universität, welches auch die Förderung der Naturwissenschaften und speziell der Mathematik beinhaltete.[4]

Die Eigenständigkeit der Mathematik begann durch die Einführung von Vorlesungen über die Mathematik, die in einem Beschluss der Artistenfakultät aus dem Sommersemester 1514 festgelegt wurden,[5] und die Mathematik ab diesem Zeitpunkt nicht mehr als Anhängsel der Metaphysik betrachtet, sondern als ein eigenständiges Unterrichtsfach.[6] Die mathematischen Vorlesungen erstreckten sich im Sommersemesters über Werke, die sich mit astronomischen Einführungen, wie die „Sphaera“ von Johannes de Sacrobusto, mit der Kirchenrechnung, wie „Computus Ecclesiasticus“, beschäftigten und im Wintersemester über die Bücher des Euklids, die „gemeine Arithmetik“ oder Werke über die Musiktheorie[7], dieses entsprach dem Quadrivium.

Die stärker werdende Bedeutung der Mathematik gipfelte 1525 in der Aufteilung der Mathematik in zwei Lehrstühle, einen für die Höhere und einen für die Niedere Mathematik,[8] Diese wurden bereits ab dem Jahr 1521 durch

1Einen Überblick über die Geschichte der Universität Wittenberg bietet Friedensburg (1917).
2Vgl. Reich (1998), S. 115.
3Schöneburg (2010), S. 11.
4Die Bedeutung der Mathematik verdeutlicht sich in Melanchthons Antrittsrede: Schöneburg (2010), S. 12.
5Vgl. UAH, Rep. 1, Nr. XXXXV.
6Vgl. Kathe (2002), S. 39.
7Vgl. Kathe (2002), S. 39f..
8Vgl. Kathe (2002), S. 69.

Melanchthon nach dem Vorbild der Wiener Universität gefordert.[9] Die Professur für Niedere Mathematik wurde von Johannes Longicampianus übernommen und Johannes Volmar, welcher ab 1519 die zweite Mathematikprofessur innehatte, wurde die Professur für Höhere Mathematik übertragen.[10]

1. Johannes Volmar

Johannes Volmar stammte aus Villingen,[11] wo er wohl um 1480,[12] wenn man seine Immatrikulation in Krakau 1498/99 zur Grunde legt, geboren wurde. Sein Studium in Krakau hat er 1501 mit dem Grad eines Baccalaureus artium beendet,[13] zu den Jahren bis zu seiner Immatrikulation 1514 an der Universität Wittenberg, wo er am 30. Januar 1515 den Grad eines Magister artium erwarb,[14] gibt es keine Informationen. Nach einem kurzen Aufenthalt 1516 an der Universität Leipzig, wo ihn sein „Wissendurst“[15] hintrieb, kehrte er im Wintersemester 1516/17 nach Wittenberg zurück. Man kann davon ausgehen, dass er nach seiner Rückkehr bereits begann Mathematikvorlesungen zu halten[16] und 1519 nach dem Weggang des ersten Mathematikprofessors, Bonifacius Erasmi, die Mathematikprofessur übernahm. In seiner Zeit in Wittenberg wurde er Mitglied des Senats und 1521 Mitglied des Stiftskapitels der Schlosskirche, was eine bessere Bezahlung für Volmar durch die Hofkammer bedeutete.[17] Unter den Schülern Volmars ist Johann Joachim von Lauchen (Rhaeticus) hervorzuheben ist,[18] welcher die Nachfolge Longicampianus antrat.[19] „Am bezeichnendsten für Volmars Bedeutung ist die Tatsache, daß der Praeceptor Gemaniae, einer der Hauptförderer der mathematischen Studien, auf ihn wegen

9Vgl. Cantor (1880), S. 375.
10Vgl. Kathe (2002), S. 463.
11Vgl. Müller (1911), S. 343.
12Das Geburtsjahr lässt sich durch die Immatrikulation 1498/99 vermuten, wenn man beachtet, dass die Universität meist mit 18 / 19 Jahren erstmals aufgesucht wurde.
13Vgl. Köstlin (1887), S. 16.
14Vgl. ebd., S. 343f..
15Müller (1911), S. 344.
16Vgl. Müller (1911), S. 345 und Spalatin: Vgl. Weimarer, Reg. O Nr. 315.
17Die Bezahlung Volmars über die Stiftsherrenpfünde löste einen Streit zwischen dem Kurfürst und der Universitätsverwaltung aus. Vgl. Müller (1911), S. 345ff..
18Vgl. Müller, S. 348.
19Vgl. Kathe (2002), S. 463.

seines Wissens große Stücke hielt".[20] Volmar verstarb im Mai 1536 in Wittenberg[21].

2. Schriften Volmars

Von seinem wissenschaftlichen Schaffen zeugen verschiedene Schriften, die man zwischen Gelegenheitsschriften und Sammelhandschriften unterscheiden muss. Die drei Gelegenheitsschriften beschränken sich auf astronomisch-astrologische Themen.[22] Die „Practica Wittenbergensis" ist eine jährlich erscheinende Schrift, welche als Vorbild die „Practica Lipsensis" und die „Practica Lipsenses deutsch" hatte.[23] Es ist geprägt durch besondere astronomische Erscheinungen und Debatten der damaligen Zeit, wie zum Beispiel die Sintflut Debatte 1524.

Die anderen beiden Werke „Almanach Magistri Joannis Volmar de Villingen Ad elevationem Poli Li. Graduum calculatum" und „Prognosticatio Wittenbergii Magisteri Johanis Volmar Mathematici ad Annum 1522" thematisierten ebenfalls astronomisch-astrologische Erscheinungen und Berechnungen.

Des Weiteren sind sieben astronomisch-mathematische Sammelhandschriften aus dem Besitz Volmars erhalten geblieben,[24] welche im Codex Ienensis wiedergegeben sind. Diese namenlosen Sammelhandschriften umfassen astronomisch-astrologische, (rein) mathematische und medizinische Themen. Es existiert keine logische Gliederung zwischen und in den einzelnen Sammelhandschriften, sondern sie müssen als Sammelsurium von Einzeltexten aufgefasst werden. Die Texte beziehen sich zum Teil auf bedeutende Mathematiker, Astronomen und Mediziner, wie zum Beispiel Euklid, Jordanus Nemorarius, John Shirwood oder den Krakauer Mathematiker Johannes de Glogovia. Bezüglich der Mathematik umfasst die Sammelhandschrift 74[25] die

20Müller., S. 348.
21Vgl. Müller, S. 348.
22Einen Überblick über die Werke bietet Talkenberger (1990).
23In Sudhoff (1909), S. 128 wird eine Beteiligung von Volmar angesprochen.
24Die Sammelhandschriften finden sich in der Bibliothek Jena: Cod. El. Folg. 70-74, 77; Phil. qu.3.
25Siehe Cod. El. Folg. 74

meisten Themen und ist somit für die mathematische Wissenschaftsgeschichte der Frühen Neuzeit besonders interessant.

3. Sammelhandschrift Cod. El. folg. 74

Die zu untersuchende Sammelhandschrift beinhaltet 16 Kapitel, die insgesamt einen Umfang von 240 Seiten haben.

Die Themen dieser Sammelhandschrift sind, wie oben bereits erwähnt dreigliedrig, wobei die besondere Aufmerksamkeit auf den mathematischen Themen, speziell in diesem Artikel auf der Rithmomachie liegen soll, bei der es sich um ein im Mittelalter beliebtes Zahlenkampfspiel handelt.

Astronomie / Astrologie	Reine Mathematik	Medizin
Astrologische Räder Astronomische Tafeln Alfonsinische Tafeln Planetentheorie	Algebra Elemente des Euklids Rithmomachie Feldvermessung	„Tractatus de formatione corporis humane“ und „De physionomia“ von Johannes de Glogovia

In den letzten vier Jahrzehnten ist die Rithmomachie verstärkt in das wissenschaftliche Interesse gerückt,[26] wobei sich die Arbeiten auf die Einflüsse verschiedener Autoren auf die Spielregeln,[27] auf die Herleitung des Namens,[28] und auf die Untersuchungen verschiedener Texte über die Rithmomachie, wozu dieser Artikel zu zählen ist, konzentrieren. Das Finden eines Rithmomachietextes bei Volmar lässt vermuten, „dass die Rithmomachie gängiger Lehrstoff an den ostdeutschen Universitäten im 16. Jahrhundert […] war – wenigstens aber die zugehörige Mathematik, der das Spiel immer noch als Anschauung für die Proportionenlehre des Boethius diente“[29].

26Vgl. Borst (1986).
27Vgl. Folkerts (2001).
28Vgl. Schöneburg / Wuschke (2016).
29Mebben (1999), S. 66

4. Rithmomachie

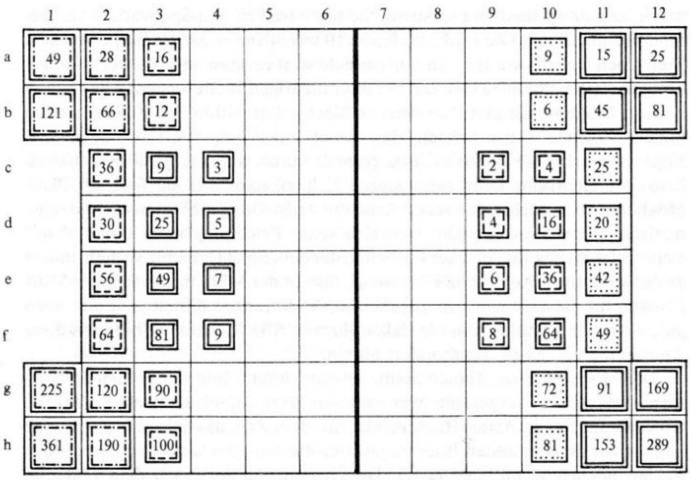


Abb.1: Spielfeld nach Lütticher Anonymus (Wuschke, S.53)

Das Spiel beruht auf der Harmonietheorie des Boethius und diente zum spielerischen Erlernen der Arithmetik, Musiktheorie und Proportionenlehre.[30] Es besteht aus je vier Grundsteinen für das gerade und das ungerade Heer. Diese Grundsteine werden nach verschiedenen Proportionen erweitert und die Erweiterungen werden *mutliplex*, *superparticularis* und *superpartiens* genannt.[31] Das Ziel des Spiels ist es eine harmonische oder arithmetische Reihe im Lager des Gegners zu errichten.[32]

multiplex	$1 \cdot 2 = \mathbf{2}$ $2 \cdot 2 = \mathbf{4}$	$1 \cdot 4 = \mathbf{4}$ $4 \cdot 4 = \mathbf{16}$	$1 \cdot 6 = \mathbf{6}$ $6 \cdot 6 = \mathbf{36}$	$1 \cdot 8 = \mathbf{8}$ $8 \cdot 8 = \mathbf{64}$
superparticularis	$(1 + 1/2) \cdot 4 = \mathbf{6}$ $(1 + 1/2) \cdot 6 = \mathbf{9}$	$(1 + 1/4) \cdot 16 = \mathbf{20}$ $(1 + 1/4) \cdot 20 = \mathbf{25}$	$(1 + 1/6) \cdot 36 = \mathbf{42}$ $(1 + 1/6) \cdot 42 = \mathbf{49}$	$(1 + 1/8) \cdot 64 = \mathbf{72}$ $(1 + 1/8) \cdot 72 = \mathbf{81}$
superpartiens	$(1 + 2/3) \cdot 9 = \mathbf{15}$ $(1 + 2/3) \cdot 15 = \mathbf{25}$	$(1 + 4/5) \cdot 25 = \mathbf{45}$ $(1 + 4/5) \cdot 45 = \mathbf{81}$	$(1 + 6/7) \cdot 49 = \mathbf{91}$ $(1 + 6/7) \cdot 91 = \mathbf{169}$	$(1 + 8/9) \cdot 81 = \mathbf{153}$ $(1 + 8/9) \cdot 153 = \mathbf{289}$

Abbildung 2: Erzeugung der Spielsteine des geraden Heers (Schöneburg/Wuschke, S.3)

Das Spiel wurde um 1030 von Asilo entworfen und von Hermann von Reichenau um 1040 verbessert. Erst durch den Anonymus aus Lüttich wurde das Spiel als Lehrmittel der Proportionenlehre eingesetzt,[33] mit der durch Fortolf 1130 verbesserten Spielpraxis blieb das Spiel bis ins 15. Jahrhundert bestehen.[34] „Die Rithmomachie findet ab dem 13. Jahrhundert eine internationale Verbreitung“[35] insbesondere im englischen Raum, wo 1330 eine

30Vgl. Folkerts (2001), S. 331f.
31Erzeugung der Spielsteine: Siehe Abbildung 2 und Schöneburg/Wuschke (2016), S. 3.
32Vgl. Schöneburg / Wuschke (2016), S. 7.
33Vgl. Borst (1986), S. 111.
34Vgl. Borst (1986), S. 187.
35Wuschke (2015), S. 61.

Rithmomachieschrift von Pseude-Bradwardine und um 1474 eine Schrift von John Shirwood „Epitome de ludo arithmomachiae“ erschien, die Einfluss auf spätere Werke im deutschen und englischen Raum[36] über die Rithmomachie hatten.[37]

Auch bei dem in der Sammelhandschrift enthaltenen Rithmomachietext von Volmar lassen sich diesbezüglich Einflüsse nachweisen. Dies bezeugt bereits das Inhaltsverzeichnis Volmars, indem geschrieben ist „John Shirewood: Praefetio in epitomen de ludo Rythomachiae“[38]. Der Eindruck verstärkt sich in der Einleitung der Schrift:

„John Shirewood: Praefatio in epitomen de ludo Rythmomachiae: Ad reverendissimum religiosissumque in Christo patrem ac amplissimum dominum Marcum cardinalem sancti Marci vulgariter nuncupatum Johannis Shirvod quod Latine interpretatur limpida filium sedis apostolice protonotarii Anglici prefacio in epitomen de ludo rithmomachie“[39].

5. Untersuchung des Rithmomachietextes Volmars unter Berücksichtigung der Dresdner Quelle C 80[40]

Allgemein kann die Schrift in mehrere Teilabschnitte gegliedert werden, was Volmar durch die roten Teilüberschriften im Text unterstützt. Nach einer Erläuterung des Nutzens, wird der Beginn und das Ende eines Spiels thematisiert, bevor dem Leser die Grundspielfiguren der Heere, die Spielsteine der Pyramiden und die Erweiterungen durch verschiedene Proportionen erklärt werden. Das Spielfeld[41] wird zwischen den Spielfiguren und der Erklärung der Pyramiden dargestellt.

36Vgl. Mebben (1999), S. 62.
37Einen Überblick über die Bearbeitungen der Rithmomachie findet sich bei Wuschke (2015), S. 51.
38Cod. El. folg. 74, S. I.
39Übersetzung nach Cod. El. folg. 74, S. 54v. John Shirewood: Kurzer Auszug in die Einleitung über das Spiel Rythmomachie An den Beeindruckendsten und Heiligsten in Christus Vater und bedeutendsten Herrn Kardinal Markus des St. Markus veröffentlichen Schrift genannt John Shirewoord welcher lateinisch wird erstmalig aufgeschrieben in den kurzen Auszug über das Spiel Rithmomachie glücklich beginnt.

40Die Dresdner Quelle C 80 eignet sich für den Vergleich, da in dieser drei Rithmomachietexte, unter anderem einer Shirwoods, abgebildet sind.
41Siehe Abb. 4.

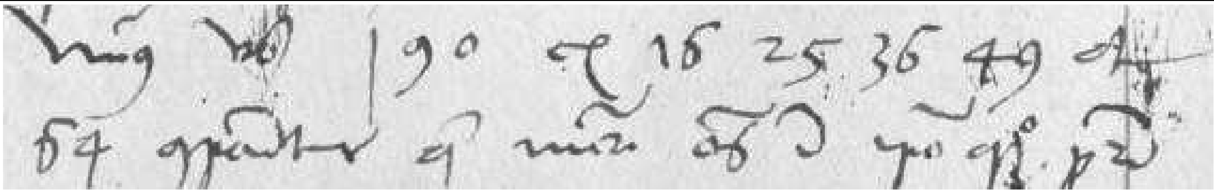


Abbildung 3: Pyramide des ungeraden Heers (Volmar, S.57r)

Wie man an der Abbildung 3 bereits erkennen kann, ist das Kapitel, in einem für die Zeit typischen Fließtext geschrieben und die Erweiterungen der Spielsteine in diesem angeführt worden. Betrachtet man die Angabe der Erweiterungen verdeutlicht sich der geschriebene Charakter. So heißt es in Abbildung 3: „190 aus 16 25 36 49 und 64“, beachtenswert ist, dass die Rechnungen nicht zusätzlich angefügt wurden, sondern dem Leser die Proportionen bekannt sein müssen. Dieses ist charakteristisch für das gesamte Kapitel. Das Fehlen von detaillierten Rechnungen und Angaben der gesamten Spielsteinerweiterungen zeugt davon, dass Volmar von seinen Lesern bzw. Zuhörern Vorwissen zu der Proportionenlehre und den Grundrechenarten voraussetzte. Betrachtet man das angegebene Spielfeld verdeutlicht sich der Verzicht auf Erklärungen, wie die Steine entstehen und zu positionieren sind. Die Spielsteine der *multiplex* sind kreisförmig dargestellt, die Spielsteine der *superparticularis* dreieckig und die der *superpartiens* quadratisch, bei Volmar eher rechteckig, dargestellt. Diese Darstellungen entsprechen den Darstellungen der damaligen Zeit. Auffällig ist, dass es zwischen den Spielsteinen des geraden und ungeraden Heers keine darstellerischen oder farblichen Unterschiede gibt sowie die besonderen Spielsteine der Pyramide keine eigene Gestaltung besitzen, sondern sie mit der Spielsteinform einer

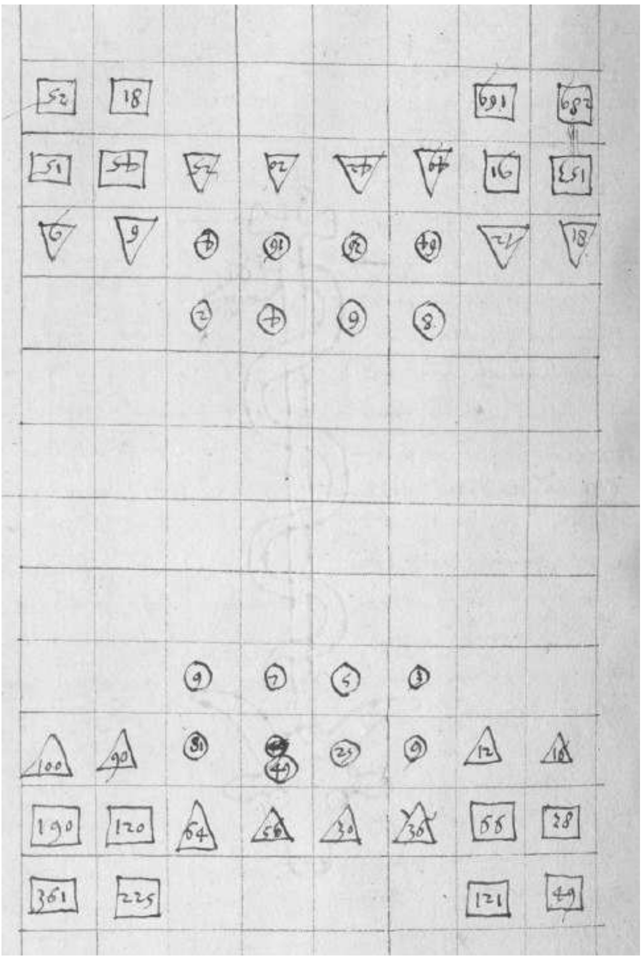


Abbildung 4: Spielfeld (Volmar, S.56r)

superpartiens wiedergegeben sind. Ein weiterer Unterschied ist die verkehrte Reihenfolge, im Vergleich zum Spielfeld nach dem Lütticher Anonymus[42], der vier Grundsteine. Jenes findet man auch in dem Spielfeld der Dresdner Quelle wieder.[43] Es spiegelt den Einfluss verschiedener Autoren wider und die Weiterentwicklung des Spiels. Dieser Einfluss konstatiert sich ebenfalls durch die Vielzahl von Rithmomachieschriften, explizit bei Volmar durch den Verweis auf John Shirwood. Einen Auszug der Schrift Shirwoods findet sich in der Dresdner Quelle C80 wieder,[44] sie wird als Vergleichsquelle herangezogen, da sie im mitteldeutschen Raum eine Vielzahl von wichtigen Schriften beinhaltet und im Besitz von den bedeutenden Mathematikern Johannes Widmann und AdamRies war.[45] Die Quelle umfasst unter anderem Texte über die Rithmomachie von dem Regensburger Anonymus, von John Shirwood und von dem Pseudo-Bradwardine[46] verfasst wurden, wobei insbesondere die Schrift Shirwoods für einen Vergleich mit der Schrift Volmars vielversprechend erscheint.

Die im Codex enthaltenen Schriften zur Rithmomachie legen verstärkt Wert auf die beispielhaften Erklärungen der Spielsteine. So wird z.B. im Text von John Shirwood die Form des Spielsteins sowie seine Zahlen durch Propositionen angegeben.

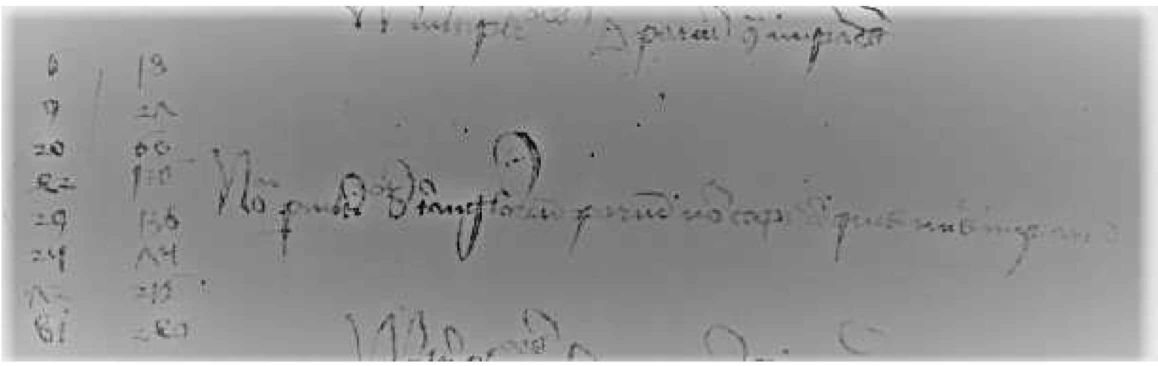


Abbildung 5: Darstellung der multiplex (C 80, S. 534)

42Vgl. Abb. 1.
43Mscr. C 80, S. 260r.
44Über die Quelle C 80: Gärtner (2000), S. 28ff..
45Vgl. Mebben (1999), S. 67.
46Vgl. ebd., S. 67.

Diese verständnisfördernde Art verdeutlicht sich des Weiteren an der Wiedergabe von Tabellen mit allen Spielsteinen. Auf eine explizite Darstellung der Spielsteinformen und die Angabe aller ihrer Werte verzichtet Volmar. Ein weiterer Unterschied ergibt sich durch den Umfang der Texte. Der Auszug Shirwoods umfasst neun Seiten, [47] während der Text von Volmar zehn Seiten umfasst, die zweispaltig beschrieben wurden. Der Ansicht Peter Mebben's, dass es sich bei dem Text Volmars um Auszüge des Textes von John Shirwood handelt, kann mit den bisherigen Untersuchungen nicht zugestimmt werden. Allerdings muss untersucht werden, inwieweit der Auszug mit dem Originaltext übereinstimmt, unter dem Aspekt, dass möglicherweise Änderungen durch Widmann oder andere vorgenommen wurden.

6. Fazit

Die Sammelhandschrift Volmars umfasst ein breites Spektrum an Themengebieten, die in der damaligen Zeit von großem Interesse waren. Insbesondere ist der Text zur Rithmomachie zu nennen. Durch den Verzicht auf ausführliche Erklärungen muss der Leser mit der Proportionlehre des Boethius vertraut sein. Dieses unterscheidet stark die Schrift Volmars und den Auszug Shirwoods aus der Dresdner Quelle. Anhand dieser Quelle kann man keine Aussagen darüber treffen, ob es sich bei Volmar Schrift um eine Abschrift Shirwoods handelt. Erst weitere Untersuchungen der Originalschrift Shirwoods mit der Schrift Volmars erlauben eine konkrete Aussage.

Aktuelle Untersuchungen der Sammelhandschrift konzentrieren sich auf die Kapitel zur Algebra, welche von großem Interesse für die mathematischen Forschungen der Frühen Neuzeit sind und einen weiteren Einblick in die Lehre der Universität Wittenberg in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts geben.

47Vgl. ebd., S. 67.

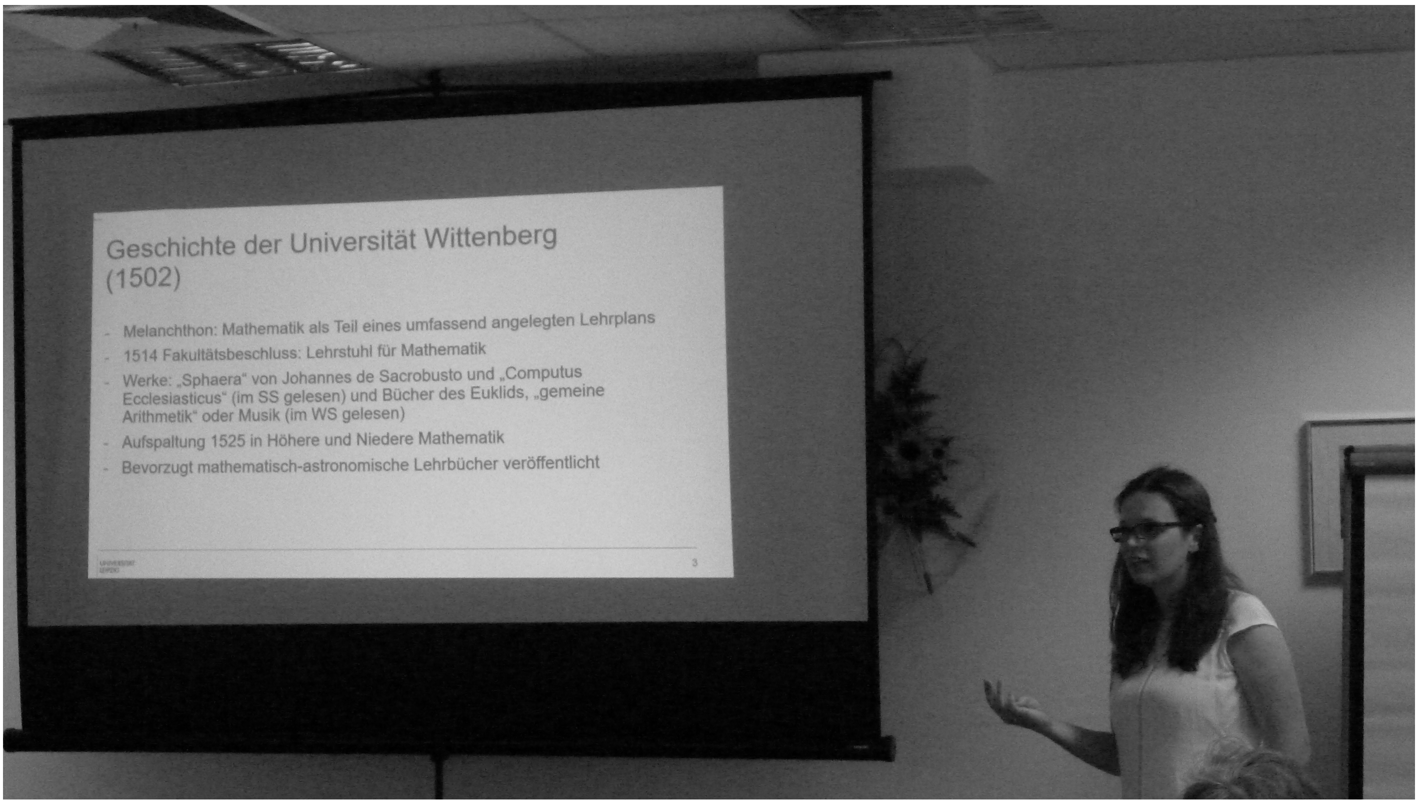
Quellen:

- Codex Iensis folg. 70-74.
- Mscr. Dresd. C.80.
- Weimarer Reg. O Nr.315.

Literatur:

- Borst, Arno (1986): *Das mittelalterliche Zahlenkampfspiel*, Wien.
- Folkerts, M. (2001): *Rithmimachie,* in: Folkerts, M. / Knobloch, E. / Reich, Karin (Hrsg.): Maß, Zahl und Gewicht. Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung, Wiesbaden, S.333-346.
- Friedensburg, W. (1917). *Geschichte der Universität Wittenberg*. Halle a. S.: Niemeyer.
- Friedensburg, W. (1926). *Urkundenbuch der Universität Wittenberg Teil 1 (1502-1611),* in: Historische Kommission für die Provinz Sachsen und für Anhalt (Hrsg.): Geschichtsquellen der Provinz Sachsen und des Freistaates Anhalt, Band 3.
- Kathe, Heinz (2002): *Die Wittenberger Philosophische Fakultät 1502-1817,* in: Hrsg. Rothe, Heinz et al.: Mitteldeutsche Forschungen, Band 117, Köln, Böhlau Verlag.
- Mebben, Peter (1999): *Die Arithmomachie des Abrahams Ries und weitere neuzeitliche Überlieferungen der Rithmomachie*, in: Board Games Studies Issue 2, S.60-79.
- Methuen, Charlotte (1998): Zur Bedeutung der Mathematik für die Theologie Philipp Melanchthons, in: Hrsg. Frank, Günther / Rhein, Stefan (1998): Melanchthon und die Naturwissenschaften seiner Zeit, Sigmaringen; S.85-104.
- Müller, N. (1911). *Die Wittenberger Bewegung 1521 und 1522: Die Vorgänge in und um Wittenberg während Luthers Wartburgaufenthalt; Briefe, Akten u. dgl. und Personalien* (2. Aufl.). Leipzig: Heinsius Verlag.
- Reich, Karin (1998): Melanchthon und die Mathematik seiner Zeit; in: Hrsg. Frank, Günther / Rhein, Stefan (1998): Melanchthon und die Naturwissenschaften seiner Zeit, Sigmaringen, S. 105-122.

- Schöneburg, Silvia (2010): *Mathematische Forschungen und Lehre an der Universität Wittenberg, Band 1. Frühe Mathematik und Kometenbeobachtung in Wittenberg*, in: Richter, Katrin / Schöneburg, Silvia: Mathematische Forschung und Lehre im 16. und 17. Jahrhundert, Band 1, Hamburg, Verlag Dr. Kovac.
- Schöneburg, Silvia / Wuschke, Holger (2016): *Der mittelalterliche Zahlenkampf – Ein Spiel kommt zu seinem Namen*, in: Binder, Christa (Hrsg.): Beiträge zum XIII. Österreichischen Symposium zur Geschichte der Mathematik vom 01.05.–07.05.2016, S. 124-134.
- Sudhoff, Karl (1909): *Die medizinische Fakultät zu Leipzig im ersten Jahrhundert der Universität,* in: Hrsg. Puschmann-Stiftung an der Universität Leipzig: Studien zur Geschichte der Medizin, Heft 8, Leipzig, Verlag von Johann Ambrosius Barth.
- Talkenberger, Heike (1990): *Sintflut. Prohetie und Zeitgeschehen in Texten und Holzschnitten alstrologischer Flugschriften 1488-1528*, in: Hrsg. Frühwald, Wolfgang et al.: Studien und Texte zur Sozialgeschichte der Literatur, Band 26, Tübingen, Max Niemeyer Verlag.
- Wuschke, H. (2015). *Rithmomachie – Vergessen und verschollen?*. Leipzig.



Lea Dasenbrock

Gauß — Goethe: Die Zahl — der Blick — die Einheit und die Grenzen des Wissens

Philippe Séguin

In diesem Beitrag möchte ich an Überlegungen anschließen, die u. a. bei Kurt-R. Biermann, *Gauß und Goethe. Versuch einer Interpretation ausgebliebener Begegnung* (Goethe-Jahrbuch 1975), und Ivo Schneider, *Goethe Vorbild für die Einstellung deutscher Bildungsbürger zur Mathematik?* (Miesenbach 2010) nachzulesen sind. Als Vorlage dient ein 2016 im von Michel Serfati geleiteten Seminar des IREM Paris 7 gehaltener, unveröffentlichter Vortrag mit dem selben Titel. Hier werde ich Gauß zeit- und raumgebunden betrachten, d. h. nicht nur in Bezug auf die Größen seiner Zeit, sondern auch gemessen an dem, was damals wissenschaftlich um ihn herum passierte: *Science in context*!
In drei Phasen werden Gauß und Goethe konfrontiert: zuerst in Bezug auf „das Problem des Unendlichen“ (Hilbert) und seinen Einfluss auf die Protagonisten in ihrer Jugend, dann auf die Zeit der Reife und der Ausgestaltung einiger grundlegender Ideen, drittens wird die mögliche Anwendung dieser Ideen in Betracht gezogen, wobei es um Ziele, Ideale und Grenzen gehen wird. Einige Betrachtungen zum Thema „Freiheit“ werden abschließend beide Persönlichkeiten charakterisieren.

1. Das Problem des Unendlichen im Frühwerk unserer Autoren

1.1. Goethe

Die Leiden des jungen Werthers kann man etwa so zusammenfassen: Er liebt sie, sie mag ihn gern. Er begeht Selbstmord. Oder etwas ausführlicher vielleicht so: Was passiert, wenn die Autorität der Religion bröckelt (es gibt keine feste Grundlage mehr zur Orientierung im Leben), wenn das Individuum (ein gebildeter junger Mann aus dem Bürgertum) dem Ruf der Unendlichkeit lauscht und versucht, in der Natur ganz aufzugehen? Dann wird die innere Spannung im jugendlichen Gemüt zu groß, und der Freitod scheint der einzige Ausweg zu sein. Das Problem des Unendlichen bleibt ungelöst.

1. 2. Gauß

Machen wir ein kleines Gedankenexperiment: die Szene spielt 1798 auf dem Wall zu Göttingen, und der betagte, also auf Distanz zu seiner Zeit stehende Professor Kästner, macht seinen Nachmittagsspaziergang. Kästner wusste, dass er wissenschaftlich nicht zu den Lagrange und Laplace gehört, aber Gauß bescheinigte ihm ein gutes Urteil *über* Mathematik. Er findet ein kleines Heft auf dem Weg: es ist das Arbeitsjournal des Studenten Gauß. Kästner erkennt die Handschrift und beim Blättern murmelt er vor sich hin: „Na, schauen wir mal, ob der talentierte, aber etwas übermütige junge Mann auch zu dieser Schule gehört! Reihen! Kettenbrüche! Gut! Aber jetzt: ‚Der goldene Lehrsatz’, ‚Heureka!’ Er hält sich wohl für einen neuen Archimedes. Da! Drei Striche übereinander, ein komisches Zeichen. Der Herr Studiosus erfindet neue Zeichen. Und jetzt schreibt er im *pluralis majestatis*: ‚Vicimus’ was? Giganten? Größenwahnsinnig und schon so geheimnistuerisch wie Cartesius. ‚Euler’, ‚Lagrange’, sehr gut, aber schon wieder dieses Zeichen, und es bekommt auch noch einen Namen: ‚Kongruenz’. Also, er scheint nicht nur ein neues Zeichen, sondern ein neues mathematisches Objekt schaffen zu wollen. Wie seltsam: auf der einen Seite natürlich *Analysis infinitorum*, dann aber Primzahlen, ganze Zahlen, und immer noch keine Spur von der selbsternannten Schule! Ob er etwa dem philosophischen Ruf unserer Jugend nach bodenloser Unendlichkeit standgehalten hat?“ Denn 1796 war *Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis* von Prof. Hindenburg veröffentlicht worden, worauf sich eine Schule bildete, die sich zum Ziel setzte, „die ganze Analysis“ auf einer unendlichen Formel rein formal zu begründen! Eine Art Verabsolutierung von Eulers und Lagranges Vorgehensweise. Aber nichts davon beim jungen Gauß. 1798 konnte das Arbeitsjournal nur Rätsel aufgeben.

2. Die Reife und die Ausgestaltung der Ideen

2.1. Goethe und die Vervollkommnung einer neuen Romanform

Wie soll das Individuum dem Ruf des Unendlichen widerstehen? Im Bildungsroman versucht Goethe eine Antwort auf die Gefahr der Selbstaufgabe zu geben. Die Erziehung und Selbstbildung des Einzelnen sind zwar unerlässlich, wie man es *Wilhelm Meisters Lehrjahren* entnehmen kann, aber erst die Utopie, die in den *Wanderjahren* entworfen wird, gibt eine sozial gültige Antwort auf diese Frage: Die Lösung besteht in einer Gesellschaft von Handwerkern, deren Wissen aus dem Zusammenspiel von Kopf- und Handarbeit besteht, d. h. *möglichst* ohne wissenschaftlich erdachte Maschinen auskommt. Der Umgang mit der Natur soll immer maßvoll vor sich gehen, in dem Sinne, dass die Natur nicht vom Tribunal des Verstands, d. h. vom Messen, bestimmt wird. Goethe tritt für einen sanften, anschauenden Empirismus ein, er ist bekanntlich gegen Newtons Zersetzung des Lichts und gegen das Sezieren, dem er die Herstellung von Anschauungspuppen entgegenhält. Für ihn stellen die messende Wissenschaft und das Experiment eine Gefahr dar, sie sind sozusagen das Unmaß des Menschen und kennen keine Schranken im Bezwingen der Natur. Der Mensch soll sich unendlich entwickeln, aber nur innerhalb bestimmter, die Natur und die anderen Menschen respektierenden Grenzen. (Damit ist natürlich nicht gemeint, dass es diesbezüglich bei Goethe nicht auch widersprüchliche Tendenzen gibt).

2. 2. Gauß und „The Shaping of Arithmetic“ (Hommage auf C. Goldstein e. a.)

Nun stelle man sich vor: Während ihres Aufenthalts in London empfängt Olga Taussky, die ehemalige strenge Verbesserin von Hilberts Beweisen, eine Studentin, die sich für die Geschichte der Zahlentheorie interessiert. Taussky freut sich, rät ihr aber entschieden davon ab, die *Disquisitiones* ohne Vorbereitung zu lesen („Ein Buch mit sieben Siegeln“!), obwohl die Studentin die erst 1889 erschienene Übersetzung ins Deutsche lesen kann. Eine englische Fassung gibt es vorerst nicht. Statt dessen empfiehlt sie ihr, zuerst das Büchlein ihres verstorbenen ehemaligen Kollegen Arnold Scholz zu lesen, und dann in den *Disquisitiones* zu blättern und einzelne Passagen in Bezug auf Scholz gründlich aufzuarbeiten. Das tut die begabte Studentin denn auch: Scholz fängt mit den natürlichen Zahlen an, geht zur Teilbarkeit über und führt den Ring der ganzen Zahlen ein. Das kennt sie, sie kommt ganz gut mit. Aber bei Gauß sieht alles ganz anders aus: keine Ringe, keine Strukturen. Und dennoch, man hat den Eindruck, dass z. B. der Gruppenbegriff bereits zum Greifen nah ist: die Assoziativität ist da, in einer Fußnote erkennt man die Kommutativität. Der siebte Teil über die Teilbarkeit des Kreises scheint zwar auf Anhieb keinen Bezug zu den vorigen Kapiteln zu haben, aber wenn man von einem Kapitel zu einem anderen hin und her springt, versteht man, dass es Gauß darum ging, versteckte Beziehungen zwischen Zahlen oder zwischen verschiedenen Bereichen innerhalb der Mathematik zum Vorschein zu bringen. Jetzt glaubt die Studentin zu verstehen, wie das Werk angelegt ist, und was Gauß eigentlich damit bezweckt: er ist auf der Suche nach Zusammenhängen, die er wahrscheinlich *sieht*, anschaut, um sie dann, und manchmal mehrmals und von verschiedenen Standpunkten aus, streng zu beweisen. Er sucht

nach der verborgenen Einheit innerhalb der Mathematik, aber nicht nach dem, „was die Welt im Innersten zusammenhält", sondern, um dieses bekannte Goethe-Zitat aus dem *Faust* zu variieren, *wie die Welt der Mathematik im Innersten zusammenhängt*.
Eines dürfen wir nämlich nicht aus den Augen verlieren: Gauß bewunderte Newton sehr, und er war zur Zeit der Popularisierung der *Kritik der reinen Vernunft* durch Reinhold groß geworden. Selbst, wenn er sich nicht für Philosophie interessiert hätte, musste er wissen, dass Kant von Newtons Gravitationstheorie ausging, um seine berühmte Frage zu stellen: nicht mehr, wie Descartes, *ob* unsere Wissenschaft, sondern eben *wie* sie möglich ist, weil etwa die Vorausberechnung der Wiederkehr des Halleyschen Kometen zeigte, dass sie mit der Welt übereinstimmte, dass sie gültig war. Und so verstehen wir, was Kästner 1798 stutzig machte: Gauß interessierte sich nicht für die kombinatorische Schule, weil er im Versuch, die Mathematik, und vielleicht sogar alle mathematisierbaren Wissenschaften auf einmal endgültig zu *begründen*, keinen Sinn sah. Sein Interesse galt der Mathematik an sich, nicht einer Suche nach einer mehr oder minder philosophischen Fundierung derselben. Außerdem — und da beugte er sich dem Zeitgeist keineswegs — war ihm die Auffassung, die Mechanisierung, das kombinatorische Denken, sei die beste Methode, um Resultate in der Mathematik zu erzielen, fremd. Zwar besaß Gauß den *Polynomischen Lehrsatz*, aber dieser fristete ein unaufgeschnittenes Dasein in der Gauß-Bibliothek bis zum Jahr 1999.[1]
Nach Erscheinen der *Disquisitiones* stellte sich der Erfolg im deutschen Sprachraum nicht so schnell ein. Tatsächlich entging es unserer neugierigen Studentin nicht, dass Gauß eine Professur für Astronomie, nicht für Mathematik erhielt. Sein Kollege, Bernhard Thibaut, der bei den Studenten auf große Resonanz stieß, vertrat eine ganz andere Art von Mathematik als Gauß: einerseits führte er die kombinatorische Analysis weiter, allerdings unter Verzicht auf die komplizierte Hindenburgesche Symbolik, andererseits war sein *Grundriss der allgemeinen Arithmetik* auch als ein Beitrag zur allgemeinen *Bildung* anzusehen. Gauß dagegen stellte seine Forschung nicht in den Dienst einer außermathematischen gesellschaftlichen Tendenz oder Sache, am liebsten betrieb er, wie er 1838 Dirichlet schrieb, „Wissenschaft um der Wissenschaft willen". Trotzdem war er ein großer Anwender der Mathematik in der Astronomie, Geodäsie usw., und vertrat die Meinung, man wisse nichts wenn man nicht messe, und so ist die Frage berechtigt, wie weit für ihn das Messen gehen sollte. Bei Goethe allerdings ist die Frage leicht zu beantworten.

3. Ziel und Ideal des Forschens/Wissens, und: Was man nicht tun sollte, oder: Wie weit darf der Blick reichen?

3. 1. Goethe und die Einheit des Wissens als polares Gleichgewicht

Für Goethe ist die Beantwortung der Frage nach dem Ziel des Wissens einfach zu formulieren: man soll das Gleichgewicht, das die Polaritäten wie Mensch/Natur, Mann/Frau, Individuum/Gesellschaft usw. regiert, nicht stören. Wenn der Mensch seinen Wissensdrang über die menschlichen Maße stillen will, dann wird z. B. das Weibliche geopfert (*Faust 1*), oder die Natur wird zusammenhanglos. Am besten kommt das Goethesche Ideal im Lied des Turmwächters Lynkeus (*Faust 2*) zum Vorschein, aus dem jegliche Hybris verbannt ist:

Zum Sehen geboren,
Zum Schauen bestellt,
Dem Turme geschworen,
Gefällt mir die Welt.

[1] Es sei denn, das intakte Exemplar des *Polynomischen Lehrsatzes*, das man zu diesem Zeitpunkt da finden konnte, war nicht das einzige, das Gauß besaß.

Ich blick in die Ferne,
Ich seh in die Näh,
Den Mond und die Sterne,
Den Wald und das Reh.
So seh ich in allen
Die ewige Zier,
Und wie mir's gefallen,
Gefall ich auch mir.
Ihr glücklichen Augen,
Was ihr je gesehen,
Es sei, wie es wolle,
Es war doch so schön.

Durch den an sich begrenzten Blick bildet der Mensch eine Einheit mit der Welt. So sind der Goethesche nach außen gerichtete Blick, der die Natur bewundernd betrachtet, und der Gaußsche nach innen gerichtete Blick, der die Eigenschaften der Zahlen anschaut und dann beweist, zwei entgegen gesetzte Tätigkeiten.

3. 2. Gauß und die Ausbildung der Wissenschaft

Fangen wir mit einem Gaußschen Zitat aus dem Vorwort zu Eisensteins *Ges. Abh.* an:

Die höhere Arithmetik bietet einen unerschöpflichen Reichthum an interessanten Wahrheiten dar, und zwar an solchen, die nicht vereinzelt, sondern in innigem Zusammenhang stehen und immer neue, ja unerwartete Verknüpfungen erkennen lassen, je weiter die Wissenschaft sich ausbildet. (*Werke* X, 1, 7)

Wie weit soll sich nach Gauß die Wissenschaft „ausbilden", und was sollen die Zahlen leisten? Mit den Zahlen kann man zählen, z. B. Menschen zählen, und Gauß bewunderte Süßmilchs *Göttliche Ordnung*. Man kann aber auch messen, am Himmel und auf der Erde, und Gauß hat beides getan. Zum Vermessen hat er bekanntlich ein Instrument erfunden, den Heliotrop, der einen großen Fortschritt für die Geodäsie darstellte. Aber wie weit sollte dieser Fortschritt gehen, und wozu sollte man die Erde vermessen? Dieser Frage scheint sich Gauß nicht ernsthaft gestellt zu haben, sowenig wie der Frage nach dem Nutzen des Telegraphen. Aber privat, in einem Brief an seinen Freund Schumacher, äußert er seine Sorge:

Könnte man darauf aber Tausende von Thalern wenden, so glaube ich dass z. Bsp. die Electromagnetische Telegraphie zu einer Vollkommenheit und zu einem Maaßstabe gebracht werden könnte, vor der die Phantasie fast erschrickt. Der Kaiser von Russland könnte seine Befehle ohne Zwischenstation nach Odessa, ja vielleicht nach Kiachta (also nach Osten! P. S.) geben. (Wussing, *Gauß*, 1976, 79)

Gauß konnte sich bestimmt sehr gut vorstellen, dass mithilfe des Telegraphen die Truppen eines neuen selbsternannten Kaisers Göttingens Tore sehr schnell erreichen würden. Andere „Fortschritte" in der Elektrizitätsforschung hat Gauß noch miterlebt, z. B. Emil Du Bois-Reymonds Versuche an Fröschen. Goethe wäre vermutlich der Meinung gewesen, dass man mit Du Bois' Methoden nicht zum Wesen der Natur, sondern zu einer anderen, vom Zauberlehrling Mensch gemachten bzw. in ihrer Einheit zerstückelten Natur gelangt. Gauß dagegen mag in solchen Experimenten lediglich die Möglichkeit gesehen haben, ganz tief „unerwartete Verknüpfungen" zu finden. Dass der Mensch ein begrenztes Wesen ist, etwa durch seinen Körper, dessen war sich Gauß vollkommen bewusst. Im Gegensatz zu Goethe jedoch scheint diese Erkenntnis wenig Einfluss auf seine Forschung ausgeübt zu haben. Vielleicht lag es daran, dass Gauß anders als Goethe die Wissenschaft als etwas ansah, was man am liebsten abgesondert von allen Menschen in seiner stillen Kammer betrieb, da wo die menschliche Freiheit den größten Spielraum hat.

4. Schlusswort: Gauss, Goethe und das Problem der Freiheit

4. 1. Gauss und die *Disquisitiones* als *Meditationes*

Wie oft haben wir das gelesen: Gauß hielt die Mathematik für die Königin der Wissenschaft, und die Arithmetik für die Königin der Mathematik. Dieser Ausspruch besagt viel über Gauß' Auffassung von menschlicher Freiheit, wenn man ihn mit den ständigen Klagen des Mathematikers in Zusammenhang bringt, er sei unaufhörlich von seiner Lieblingsbeschäftigung, der Arbeit an den Zahlen, abgelenkt worden. Die Gaußsche Freiheit bestand in der Möglichkeit, durch „Meditationen" (s. Widmung und Vorwort der *Disquisitiones*) zur Entdeckung der geheimnisvollen Beziehungen, welche die Zahlen regieren, in immer weitere Tiefen der göttlichen Ordnung zu dringen. Anders als später Dedekind wollte Gauß nichts erschaffen, er vergriff sich nicht an der Schöpfung Gottes und überließ gern dem Unendlichen und Unermesslichen (hier Dativ des Maskulinums, nicht des Neutrums) das aktual Unendliche. Sein Verständnis von Freiheit war vom Pietismus geprägt, rein innerlich und geistig, und wie in Schillers Gedicht *Das Ideal und das Leben*, bestand sein Ideal darin, sich von den irdischen Banden loszulösen und die Bürde des Körpers endlich abzulegen. Das hat H. Mehrtens in seinem Buch *Moderne Sprache Mathematik* treffend analysiert. Alles in allem war Gauß' Auffassung von Freiheit privat und eher negativ. Er war genauso wenig ein Bürger wie der katholische Cauchy, hatte aber im Gegensatz zu diesem das Glück, dass ihm die Obrigkeit zeitweise Schaffensperioden gewährte, in denen er sich der Wissenschaft um der Wissenschaft willen widmen konnte.

4. 2. Goethes „klarer Blick" und „feste Hand"

Nicht nur Rudolf Steiner trug zur Goetherenaissance in der Weimarer Republik bei. Kein geringerer als Friedrich Ebert beschwor den „Geist von Weimar" in seiner Eröffnungsrede im Nationaltheater 1919 und berief sich auf Goethe, nicht auf Schiller:

> Jetzt muss der Geist von Weimar, der Geist der großen Philosophen und Dichter, wieder unser Leben erfüllen. Wir müssen die großen Gesellschaftsprobleme in dem Geiste behandeln, in dem Goethe sie im zweiten Teil des ‚Faust' und in ‚Wilhelm Meisters Wanderjahren' erfasst hat. Nicht ins Unendliche schweifen und sich nicht im Theoretischen verlieren. Nicht zaudern und schwanken, sondern mit klarem Blick und fester Hand ins praktische Leben hineingreifen. (*Weimar und die Republik*, M. Schultheiß & J. Roßberg (Hg.), Weimar 2009, S. 18)

Über die literarischen Hinweise lässt sich sicherlich streiten, aber die Aussage ist klar: die neue Republik hatte Bürger nötig, aber weder Untertanen wie in Heinrich Manns Roman noch skrupellose Inflationsprofiteure, und diese Bürger sollten ihrer Begrenzung bewusst und für die republikanische Idee tätig sein, d. h. frei sein. Dieser Freiheitsbegriff ist positiv, gesellschaftlich nach außen orientiert und praktisch. Für die republikanische Idee konnte der Dichterfürst postum die Werbetrommel rühren. Der *Princeps Mathematicorum* hingegen sehnte sich sein Leben lang nach Stille, und obgleich er sehr wohl am technischen Fortschritt entscheidend teilnahm, war er zutiefst überzeugt von der Eitelkeit menschlicher Bestrebungen und verzweifelte gern mit den antititanischen Helden seines Lieblingsschriftstellers, des antigoetheschen Jean Paul.[2]

---

[2] Gauß pflegte seiner Familie aus Jean Pauls Roman *Titan* vorzulesen. Es ist anzunehmen, dass G. Waldo Dunnington, der ursprünglich Germanist war und über Jean Paul promoviert hatte, seine große Gaußbiographie nicht zufällig „Carl Friedrich Gauss Titan of Science" (New York 1955, 2. Auflage mit mathematischem Anhang von Jeremy Gray 2004) betitelte.

Die Entwicklung des professionellen Universal-Rechenschiebers

Karl Kleine*

14. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, Miesenbach 2018

1 Rechenschieber der ersten zwei Jahrhunderte

Die ersten knapp 200 Jahre der Geschichte des logarithmischen Rechenschiebers spielen im wesentlichen in England [1]. Während das logarithmische Prinzip $\log(a \times b) = \log a + \log b$ und seine körperliche Umsetzung durch Streckenaddition[1] von Skalenabschnitten auf aneinander gelegten Hölzern anderswo nur beschränkt auf ein gewisses Interesse stieß, z.B. [2], entwickelten sich in England drei konkrete Anwendungsbereiche und damit einhergehend ein Markt für besondere Rechenschieber: Navigation auf hoher See (Gunterscale), Alkoholbesteuerung (excise rules, zur Bestimmung der Volumina teilgefüllter Fässer und des Normalalkoholgehalts) und Holzwirtschaft/Zimmerei. Diese und andere fachspezifische Rechenschieber trugen die für ihre Zwecke nötigen Skalen und waren nicht für universelle Berechnungen ausgelegt. Typisch waren Skalenbilder mit eingearbeiteten Faktoren durch Skalenversatz. Derartige Rechenschieber für spezielle Anwendungen waren bis weit ins neunzehnte Jahrhundert stark verbreitet.

2 SOHO-Rechenschieber

Das änderte sich mit der industriellen Revolution um 1790, und zwar ausgerechnet mit James Watt (1736–1819). Seine Erfindungen verbesserten Leistung und Kosteneffektivität der Dampfmaschine; die Partnerschaft mit Matthew Boulton (1728–1809) brachte den Durchbruch. In ihrer Fabrik im Vorort Soho von Birmingham bauten sie Dampfmaschinen mit großem wirtschaftlichen Erfolg. Für die täglichen Konstruktionsberechnungen, denn die Maschinen waren immer etwas anders, entwarf Watt mit seinem Mitarbeiter Southern einen einfachen aber universellen Rechenschieber für seine Ingenieure und Techniker und ließ ihn in Kleinserie fertigen. Dieser Typ wurde als SOHO-Rechenschieber bekannt [3].

Es ist ein Einseitenstab ohne Läufer, gefertigt aus Holz, und er hat insgesamt nur vier Skalen. Auf dem oberen Stabkörper befindet sich eine logarithmische Skala von zwei Zyklen, d.h. von 1 bis 100, bezeichnet mit A. Auf der Zunge befinden sich zwei weitere gleiche Skalen B und C. Auf dem unteren Stabkörper liegt eine weitere logarithmische Skala, genannt D, mit einem Zyklus von 1 bis 10.

A	1	10	100
B	1	10	100
C	1	10	100
D	1		10

*Prof. i.R. Karl Kleine, Ernst-Abbe-Hochschule Jena, karl.kleine@eah-jena.de

[1] alternativ auch Winkeladdition

Mit dem oberen Skalenpaar A/B kann man multiplizieren und dividieren, und zwar ohne die Notwendigkeit des „Durchschiebens“ der Zunge bei Produkten größer 10. Mit dem unteren Skalenpaar C/B kann man Wurzelziehen oder Quadrieren und dies mit einer Multiplikation verbinden. Die Skalenlänge betrug 10 Zoll, und der gesamte Rechenstab war nur wenig länger. Eine Dekade auf den Skalen A, B und C war somit nur etwa so lang wie die Hauptskalen C/D-Skalen eines modernen Taschenrechenschiebers. Doch das war für die Anwendungen genau genug; dafür war die Handhabung einfach. Andere Rechenschieber der Zeit waren deutlich komplexer. Zudem lagen alle Skalen auf einer Seite und es gab mit der Zunge nur ein einziges bewegliches Teil, was dem praktischen Gebrauch in der Fabrik sehr entgegen kam.

Watt wachte scharf über sein Know-How und seine Werkzeuge, denn das machte seinen wirtschaftlichen Erfolg aus. Obwohl die SOHO-Rechenschieber in Kleinserie ursprünglich nur für die Belegschaft von Boulton und Watt produziert wurden, kamen einige auch in den allgemeinen Handel. Es sind wenig Exemplare überliefert. Erst 1827 gab Farey [4] eine eingehende Beschreibung der SOHO-Rechenschieber und ihrer Anwendung im Dampfmaschinenbau. Doch inzwischen hatte sich die Nützlichkeit der SOHO-Stäbe herumgesprochen [5, 6].

3 SOHO in Frankreich: Lenoir, Gravet, Tavernier

Der Franzose Jomard machte 1814 eine Studienreise nach England zur Information über die dortige industrielle Revolution. Dabei fiel sein Augenmerk auf die SOHO-Stäbe und er berichtete darüber im Frühjahr 1815 [5]. England war Frankreich seinerzeit industriell weit voraus, und die *SEIN* (*Societé d'Encourangement pour l'Industrie Nationale*) und ihre Zeitschrift waren Frankreichs Mittel zum Technologietransfer in heutiger Terminologie. Manches kann und muß man sicher auch als staatlich unterstützte Industriespionage und Produktpiraterie sehen. Bezüglich Rechenschieber hatte Frankreich jedoch zwei wesentliche Vorteile gegenüber England, das Dezimalsystem und Étienne Lenoir. Mit der Revolution von 1789 hatte Frankreich eine umfassende Dezimalisierung aller meß- und zählbarer Maße vollzogen, bis auf den Kalender. Historische, auf Körper- oder Naturmaße bezogene Größen wie z.B. Fuß und Rute (pouce, pied de roi, perche) und deren mannigfaltigen Umrechnungsfaktoren waren durch das metrische System ersetzt worden. Die durchgängige, systematische Nutzung des Zehnersystems paßte genau zu den auf dekadischen Logarithmen beruhenden Rechenschiebern, und diese wurden für viele Anwendungsbereiche praktische Hilfsmittel, wo früher alte spezifische Rechenregeln galten.

Étienne Lenoir (1744–1832) war der führende Instrumentenmacher Frankreichs; er hatte z.B. bereits den Prototypen des Urmeters für den französischen Staat gefertigt. Die von ihm und seinem Sohn Paul-Étienne Lenoir (1776–1827) ab 1820 produzierten Rechenschieber im SOHO-Design waren qualitativ hochwertiger als die in England für die Fabrikarbeit bei Boulton und Watt gemachten. Es waren Instrumente für die Schreibtische von Wissenschaftlern und Ingenieuren. Für diese wurden auf der Rückseite der Zunge zusätzliche Skalen für die Winkelfunktionen Sinus und Tangens angebracht, sowie Aussparungen im Stabkörper mit Ablesemarken. Somit konnte man nun viele weitere Aufgaben mit einem Rechenschieber bearbeiten, ohne Tabellen für Winkelfunktionen zu Rate ziehen zu müssen. Zudem hatte Étienne Lenoir eine Teilmaschine entwickelt, womit eine (Klein-)Serienfertigung ermöglicht wurde.

Das Geschäft mit den Rechenschiebern blühte. Nach dem Tod der beiden Lenoirs führte deren ehemaliger Mitarbeiter Mabire das Geschäft unter dem Namen Lenoir weiter, bis es 1846 von Gravet übernommen wurde, der die Rechenschieber ab 1851 recht erfolgreich unter dem Namen Gravet-Lenoir vermarktete. Im Jahre 1867 kam Tavernier in die Firma, die im folgenden unter dem Namen Tavernier-Gravet auftrat. Insgesamt entwickelte sich so eine Kontinuität der Lenoir'schen Werkstatt bis in das 20. Jahrhundert. Wie gut das Geschäft lief, kann man an den mehrfachen Umzügen der stetig wachsenden Firma in Paris sehen, die immer größere Räume brauchte. Heute liefern die auf den Rechenschiebern angebrachten Namensvarianten und Adressen Hinweise für deren Datierung.

Es gab aber noch eine dritte Komponente für den Erfolg des Rechenschiebers im Frankreich des 19. Jahrhunderts, die Entstehung eines neuen Berufsbildes, des Zivilingenieurs. Technik und Bau lagen bis dahin weitgehend in den Händen des Militärs, genauer gesagt technischer Offiziere der Artillerie und des Pionierwesens, und in denen von Meistern des Handwerks. Sie konzipierten, projektierten und überwachten die Ausführung. Mit der Industrialisierung und der Technisierung gab es neue Anforderungen hinsichtlich der mathematischen, wissenschaftlichen und technischen Bildung. Überdies hatten die französische Revolution und später die Napoleonischen Kriege zu einem starken Verlust entsprechend fähiger Männer geführt. Ersatz kam aus den Militärakademien und der 1794 gegründeten École Polytechnique. Zu Artillerie und Festungsbau gesellten sich Aufgaben wie Straßen-, Brücken-, Kanal- und später auch Eisenbahnbau. Diese Infrastruktur lag dann nicht mehr in Händen des Militärs, sondern ziviler Staatseinrichtungen. Mit der Zeit und dem Fortschreiten der Industrialisierung kam dazu das gesamte zivile Spektrum der Technik. Verstand man in Frankreich um 1800 unter einem Ingenieur einen technischen Offizier, gab es so um 1850 daneben den Zivilingenieur. Beide kamen aus den obengenannten Bildungseinrichtungen, und diese setzten auf eine solide Basis von Mathematik, Wissenschaft und Technik. Als Konsequenz wurde es um 1840 für alle Studenten Pflicht, bereits zu Studienbeginn einen eigenen Rechenschieber zu besitzen, und mit diesem alle Berechnungen in ihrem technischen Studium als auch in ihrem späteren Berufleben auszuführen.

Insgesamt führte dies in Frankreich nicht nur einer allgemeinen Kenntnis eines Standard-Rechenschiebers für technische Berufe, und das hieß ein Rechenschieber mit SOHO-Skalenlayout, sondern auch zu entsprechenden Fertigkeiten und der praktischen Verwendung in vielen technischen Bereichen. Natürlich gab es in Frankreich auch Rechenschieber mit anderen Skalenanordnungen, doch unter dem Strich entwickelte sich so in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts ein Typ eines universellen professionellen Normalrechenschiebers.

4 System Mannheim

Amédée Mannheim (1831–1906) trat 1848 in die École Polytechnique in Paris ein und hatte daher spätestens dann einen Rechenschieber. 1850 wechselte er an die Militärakademie in Metz. Nach deren Abschluß wurde er Artillerieoffizier, doch bereits 1859 wurde er Dozent an der École Polytechnique und schon 1864 Mathematikprofessor für das Fachgebiet Geometrie ebendort. Daneben war er nach wie vor Offizier, bis er 1890 im Range eines Oberst der Pioniertruppe aus dem Armeedienst ausschied. Seine Professur behielt er bis zum 70. Lebensjahr 1901. Mannheim war sehr produktiv; rund 9000 Studenten durchliefen seine Kurse, und er veröffentlichte eine Reihe mathematischer Abhandlungen. Aber am bekanntesten und von größter praktischer Wirkung war seine Neugestaltung des Standard-Rechenschiebers, die er 1851 im Alter von gerade einmal 20 Jahren entwarf [7].

Die Skalen des Mannheim-Rechenschieber scheinen nur eine kleine Änderung gegenüber dem SOHO-Design zu sein, sind jedoch essentiell: Skalen A, B und D bleiben, allein C erhält die gleiche Teilung wie D. Damit kann das Skalenpaar C/D als für die meisten Rechnungen benutzt werden, mit entsprechend besserer Genauigkeit. Aber wer will kann weiterhin mit A/B rechnen. Für den Übergang zwischen den unteren und oberen Skalenpaaren benutzt Mannheim einen Läufer. Dieser war schon vorher bekannt; es ist eine Wieder-Erfindung Mannheims.

A	1	10	100
B	1	10	100
C	1		10
D	1		10

Auf der Rückseite der Zunge finden sich eine Tangens und eine Sinus-Teilung, dazwischen eine Linearskala von 0 bis 1 als Logarithmenskala. Zur Nutzung dieser Skalen wird die Zunge gewendet.

Das „System Mannheim“ entwickelte sich parallel zum eingeführten SOHO-Layout (das in Frankreich aber nie so hieß) zum Standardtyp für Rechenschieber auf dem Kontinent. Und auch hier spielen wieder zwei geschichtliche Ereignisse eine Rolle: Als Folge des Krieges 1870/1871 gab es einen Boykott Frankreichs, Rechenschieber nach Deutschland zu liefern. In diese Lieferlücke stieß die junge Firma Dennert&Pape, Altona [8], die bis dahin Vermessungsinstrumente mit Zubehör herstellte. Auf Betreiben von Goering, der auch gleich eine deutsche Anleitung schrieb [9], produzierte D&P ab 1872 Rechenschieber vom Mannheim-Typ, als auch tachymetrische. Ab 1880 folgte dem die Maßstabfabrik Nestler aus Lahr/Schwarzwald, und 1892 produzierte Faber-Castell den ersten Rechenschieber, natürlich das System Mannheim.

Neben der kriegsbedingten Versorgungslücke spielte der Bedarf durch die vielen Ingenieurarbeiten im Rahmen der Zweiten Industriellen Revolution eine entscheidende Rolle. Nicht nur, daß die drei genannte Firmen gute Instrumente in ausreichender Stückzahl liefern konnten, sie machten auch eine Reihe wesentlicher konstruktive Verbesserungen. Dabei sticht die Firma Dennert&Pape mit einer Reihe Innovationen hervor, so z.B. mit deutlich besser ablesbaren Skalen auf maßhaltiger Celluloid-Laminierung (DRP 34583), Maßnahmen für einen passenden Andruck der oberen und unteren Wangen an die verschiebliche Zunge (DRP 126499, DRGM 37191, DRGM 192052) und besser ablesbare Läufer, insbesondere Freiblickläufer (DRGM 383627 u.v.a.m.) [10].

Damit übernahmen diese drei Firmen die Führungsrolle in der weiteren Entwicklung als auch Ausstattung der Kunden mit Rechenschiebern, nicht nur in Deutschland, sondern dem gesamten europäischen Kontinent, mit Exporten in die übrige Welt. Bevor z.B. in den USA Keuffel&Esser eigene Rechenschieber fertigte, kauften sie fast fertige von Dennert&Pape und versahen sie nur noch mit dem eigenen Namen. Einen Dämpfer erhielt dies nur durch den ersten Weltkrieg durch Enteignung von Übersee-Vertretungen und Annulierung von Schutzrechten.

5 System Rietz, der meistproduzierte Rechenschiebertyp

Max Rietz (1872–1956), ein Ingenieur für Dampfkessel aus Erfurt, überarbeitete das Design des Systems Mannheim, indem er die oben genannten Verbesserungen ausnutzte, speziell die nun technisch mögliche breitere Form von Rechenschiebern, indem er das Skalenbild oben durch eine Kubikskala und unten durch eine Logarithmenskala ergänzte [11].

K	1	10		100	1000
A	1		10		100
B	1		10		100
C	1				10
D	1				10
L	0				1

Sein Design wurde zunächst von der Firma Nestler als Modell 23 realisiert, doch noch Ablauf der Schutzrechte übernahmen auch andere Fabrikaten sein erweitertes Skalenbild. Das „System Rietz“ wurde auch als „Kubus-Rechenstab“ vermarktet. Es fand schnell sehr großen Anklang, denn es war für viele ein einfaches “Upgrade” vom System Mannheim, welches nun vielfach als „Normal-Rechenstab“ vermarktet wurde.

Rietz selber hatte in seinem Entwurf [11] nichts über die Rückseite der Zunge mit den trigonometrischen Skalen geschrieben. Hier änderten die Hersteller im Laufe der nächsten Jahre den Bezug der Sinus-Skala (meist nur als S gekennzeichnet) zur A-Skala hin zur D-Skala und fügten eine ST-Skala für kleine Winkel ($< 5°$) als gemeinsame Näherung für Sinus und Tangens, wo beim Mannheim sich die L-Skala befand. Als nächster, etwas späterer Schritt wurde die weitere Unterteilung der trigonometrischen Skalen von Minute und Sekunden auf eine dezimale Unterteilung der Gradskala umgestellt.

Auf der Vorderseite der Zunge wurde dann ab 1921 zwischen die B und C-Skalen optional eine rückläufige CI-Skala eingefügt, um ein Drehen der Zunge zu vermeiden, womit einige clevere Berechnungsschemata für Rechenausdrücke mit mehr als zwei Operanden mit weniger Zungenbewegungen zur Erhöhung der Genauigkeit möglich sind.

Der Läufer wurde auch weiter aufgerüstet, einerseits durch andere Konstruktionen (Freiblickläufer, Lupenläufer), andererseits durch zusätzliche Striche, z.B. Dreistrichläufer mit zusätzlichen Ablesestrichen im Abstand $\pi/4$ neben dem mittleren Ablesestrich.

Diese Zusatzausstattungen, des ursprünglichen Rietz-Modells, welche zwischen 1902 und etwas 1920 auf den Markt kamen, wurden parallel auch für Mannheim-Rechenschieber angeboten. Insgesamt entwickelte sich der Markt aber dahin, daß der Mannheim-Typ als preisgünstigeres Einstiegsmodell und der Rietz als professionelles Instrument mit praktischen Erweiterungen angeboten wurden. Taschenmodelle mit halber Skalenlänge, also 12,5 cm statt 25 cm waren der nächste Schritt, ebenso Langversionen für das Büro mit 50 cm Skalenlänge.

Der Erfolg war anhaltend. Rietz-Rechenschieber wurden bis an das Ende der Rechenschieberzeit, d.h. bis etwa 1977 von de facto allen Herstellern angeboten und in sehr großen Stückzahlen verkauft. Bei den deutschen Herstellern sind dies bei ARISTO (Dennert&Pape) die Modelle 89, 99 und 109 (12,5/25/50 cm-Modelle), bei Faber-Castell 375, 1/87, 111/87, 67/87, 4/87 sowie weitere Ausführungen, bei Nestler 23, 23R3, 232, um nur die wichtigsten zu nennen. Dieser Erfolg war weltweit, jeder Hersteller hatte de facto mindestens einen Rietz-Rechenschieber oder eine Rietz-Variante im Angebot. Als Beispiel für eine solche Variante sei das Keuffel&Esser-Modell 4053 für den amerikanischen Markt genannt, bei dem die K-Skala auf die untere Wange oder die untere Schmalseite und die L-Skala wie beim Mannheim auf der Zungenrückseite lag. Marketingmäßig war für K&E der 4053 ein verbesserter Mannheim. Besonders beliebt wurden Rietz-Rechenschieber nach dem zweiten Weltkrieg in der Ausführung als Plastik-Rechenschieber im Taschenformat mit einem (Kunst-)Lederetui passend für die Hemdentasche, insbesondere als Werbegeschenk mit entsprechenden Aufdrucken auf der Rückseite.

Aber nicht nur die technische Seite war entscheidend, daß das „System Rietz“ das erfolgreichste Rechenschiebermodell wurde. Seit der Mitte des neunzehnten Jahrhunderts hatten sich die technischen Wissenschaften parallel zur Zweiten Industriellen Revolution rasant entwickelt und das bedeutete vor allem eine Verwissenschaftlichung; aus Bauakademien und polytechnischen Schulen wurden Technische Hochschulen. Als Eckdaten seien die Gründung des VDI (Verein Deutscher Ingenieure) 1858 und für Deutschland das Promotionsrecht zum Dr.-Ing. 1900, zusammen mit dem Recht der Verleihung des akademischen Grades Diplom-Ingenieur genannt.

Dies bedeutete auch eine Mathematisierung der technischen Fächer. Wo früher vieles nach $\pi \times$ 👍 entschieden oder bemessen wurde, kamen nun physikalische und technische Grundlagen mit entsprechenden Berechnungsformeln zum Tragen. Zu nennen ist in diesem Zusammenhang auch die Rolle der *Hütte*, des Taschenbuchs des Ingenieurs, in zahlreichen, immer umfangreicher werdenden Auflagen, womit vieles vom Hörsaal in die Praxis getragen wurde. Der Bedarf an Berechnungen stieg, und zu deren schnellen, effizienten Ausführung der Bedarf an Rechenhilfen / Recheninstrumenten. Wer seine Grundlagen und deren Umsetzung kennt und alles berechnen konnte, war klar im Vorteil. Das geflügelte Wort vom Potential des Offiziers mit dem Marschallstab im Tornister kann in diesem Kontext auf den Ingenieur mit dem Rechenschieber im Arbeitskittel übertragen werden.

Dieser Abschnitt wäre unvollständig ohne die Erwähnung des Lehrmaterials der Zeit. Typisch und stellvertretend seien hier die einflußreichen Bücher von Prof. Ernst Hammer, Stuttgart, genannt [12]. Sie erschienen in vielen Auflagen, zum einen eine Hochschulreihe, zum anderen als Anleitung für Nestler-Rechenschieber. Der Aufbau war typisch, auch für Hefte / Bücher vieler anderer Autoren: Zunächst wurde der Mannheim-Rechenschieber ausgiebig behandelt, dann als Erweiterung das Rietz-System. Das waren die professionellen Standard-Rechenschieber, die klar im Vordergrund standen. Optional wurde dies ergänzt um Erweiterungen / Abwandlungen der jeweiligen Rechenschieberfabrikanten. Dieses Schema galt auch für die amerikanischen Autoren Cox und Breckenridge, die Anleitungen für den großen amerikanischen Hersteller Keuffel&Esser schrieben.

6 System Darmstadt von Alwin Walther & Mitarbeitern

Anfang der 1930er Jahre war der Rietz der „Platzhirsch“ unter den in Stückzahlen verbreiteten Rechenschiebern. Aber die Welt war nicht stehen geblieben. Betrachtete man zuvor primär statische oder stationäre Situationen, die gut mit den bislang behandelten Rechenschiebern behandelt werden konnten, so lagen nun physikalisch-technische Berechnungsverfahren auch für Systeme vor, in denen Potenzen jenseits von Quadraten und Kuben oder dynamische Veränderungen exponentiellen Typs vorkamen. Als Musterbeispiele seien gedämpfte Schwingungen, Resonanzen, Wachstumsprozessse, Auf/Abbau elektrischer Ladungen genannt. Die Idee von log-log-Skalen für Exponentialfunktionen gab es zwar schon lange [13] und auch schon einzelne, aber wenig verbreitete Rechenschieber dafür, doch nun war die Zeit reif für einen Standard-Rechenschieber mit log-log-Skalen.

Um die genannten Rechenaufgaben zu bewältigen modifizierte Prof. Alwin Walther (1898–1967) von der TU Darmstadt das Rietz-Design: Als erstes verlegte er die trigonometrischen Skalen der Zungenrückseite auf den Rechenschieberkörper, und zwar auf die untere Schmalseite, und die L-Skala wanderte auf die obere Schmalseite. Dazu wurde der Läufer so umgestaltet, daß er nicht nur die Oberseite des Rechenschiebers abdeckte, sondern auch die Seiten umfaßte. Auf die Zungenrückseite kam eine dreiteilige Skala der e-Funktion, von 1.01 bis 10^5 (mit Überteilungen), deren Teilskalen LL1 ($e^{0.01x}$), LL2 ($e^{0.1x}$) und LL3 (e^x) genannt wurden, und x mit D korrespondiert. An den Platz der verlegten L-Skala kam eine pythagoräische Skala P der Funktion $\sqrt{1-x^2}$ für kleine Winkel.

L	0				1
K	1	10		100	1000
A	1		10		100
B	1		10		100
CI	10				1
C	1				10
D	1				10
P	0.995				0
sin	5.8				90
tg	5.8				45

Diesen Rechenschieber realisierte die Firma Faber-Castell 1934/35 als Modell 1/54 in Holz mit einem aufwändigen Läufer und nannte den neuen Rechenschieber „System Darmstadt“, Walters Universität. Das Design war nicht geschützt und wurde bald von Mitbewerbern kopiert. Dabei hatte Dennert&Pape den Vorteil, zur etwa gleichen Zeit die gesamte Produktion von Rechenschiebern mit Holzkörper vollständig auf Kunststoff (Astralon) umgestellt zu haben. Das erlaubte es, den Körper breiter zu gestalten und die auf die Schmalseiten verbannten Skalen wieder oben und unten auf die Oberseiten der Wangen zu legen. Damit verschwand auch das Problem des komplexen, und damit teuren und auch für Beschädigungen anfälligen Läufers.

Walther, der sich stark für die praktische Ingenieur-Mathematik einsetzte, ließ für die Entwicklung einiges an Modellrechnungen ausführen, doch sind leider Unterlagen dazu ebenso wie alle andere Unterlagen zum Design dieses Rechenschiebers im verherenden Brand durch den Bombenangriff auf Darmstadt in der Nacht des 11./12.9.1944 verloren gegangen. Kron, ein Mitarbeiter in der Entwicklung des System Darmstadt, schrieb das Handbuch für die Version von Dennert&Pape (ARISTO 967 bzw. 867) [14].

Das System Darmstadt wurde nach dem zweiten Weltkrieg das Spitzenmodell eines professionellen Standard-Rechenschieber in der in Europa üblichen geschlossenen Bauform. Es wurde bis zum Ende der Rechenschieberzeit produziert.

7 Offene Bauform, Duplex-Rechenschieber, verschobene Skalen und der amerikanische Einfluß

Die bisherigen Entwicklungen waren europäisch und konsekutiv, die folgenden nicht mehr. Die oben genannten Rechenschieber hatten alle eine geschlossene Bauform, gekennzeichnet durch einen zusammenhängenden Korpus. Schon früh gab es auch eine offene Bauform, bestehend aus der oberen und unteren Wange, verbunden durch Stege an den Enden, z.B. viele der frühen englischen Alkoholsteuer-Rechenschieber. Es waren von Natur aus Zweiseiten-Rechenschieber.

Der wesentliche Unterschied zum 1891 von Cox erfundenen Duplex-Rechenschieber [15] besteht darin, daß die beiden Seiten des Zweiseiten-Typs voneinander unabhängig sind, während beim Duplex-Typ die Skalen über die Läufer- / Zungenposition gekoppelt sind. Stellt man einen Wert auf der einen Seite ein, so hat man beim Umdrehen des Rechenschiebers immer noch die gleiche Läufer- / Zungenposition und kann auf einer der Skalen der Rückseite einen Wert bezüglich des Wertes auf der Vorderseite ablesen. Damit kann praktisch jede Skala fast beliebig auf dem Rechenschieber plaziert werden. Überdies erlaubt die offene Bauweise von sich heraus auch breitere Wangen und Zungen, also Platz für viele Skalen.

Das Urmodell, der „Cox Duplex“, Keuffel&Esser Typ 1744, gefertigt von Dennert&Pape, nimmt sich geradezu bescheiden aus. Die Vorderseite ist vom Mannheim Typ[2], also A/B,C/D, die Rückseite A/BI,CI/D.

Interessanterweise erfreute sich ein Skalentyp frühzeitig großer Beliebheit in Amerika, der lange Zeit in Europa keine Rolle spielte, die relativ zu C/D um π versetzten Skalen CF/DF. Diese nehmen auf dem Rechenschieber die Plätze von A und B ein; zu sehen z.B. in der Patentanmeldung von Cox [15]. Der Skalenübergang mittels Läuferstrich gibt eine einfache Multiplikation mit π. Neben dem Mannheim-Typ als Massenmodell wurde so der *Polyphase Duplex Slide Rule*, K&E-Modell 4088-3, in den frühen Dekaden des zwanzigsten Jahrhunderts recht popular: Rietz-Skalen plus rückläufige plus versetzte Skalen: DF/CF,CIF,C/D und K,A/B,S,T,CI/D,L.

Schon im Katalog von 1913 bot Keuffel&Esser auch einen Duplex-Rechenschieber mit LL-Skalen an, das Modell 4092. Ähnliches galt für andere Anbieter. Viele von ihnen fertigten nicht selber, sondern setzen nur ihr Namen und Logos auf durch andere gebaute Rechenschieber, oft Importe aus Deutschland oder Japan. So kam es nicht zu einer einheitlichen Situation wie in Europa, die stark von den drei großen deutschen Herstellern beherrscht wurde.

Nach dem Zweiten Weltkrieg wurden Duplexstäbe auch in Europa gebaut. Vorreiter war wieder Dennert&Pape: 1935/36 war in einem sehr mutigen Schritt die gesamte Produktion auf Kunststoff umgestellt worden. Der Typname ARISTO für diese neuen Modelle wurde bald auch Teil des Firmennamens. Auf dieser Basis brachte D&P 1948 das Modell ARISTO 966 heraus, eine 1:1 Kopie des K&E 4092. 1950 folgte das Modell ARISTO Studio 968, welches mit leichten Modifikationen in der Ausführung bis 1978, dem Produktionsende bei ARISTO gebaut wurde.

Das Modell Studio, ARISTO 868 / 968 / 1068 (12.5/25/50 cm Teilungslänge), stellt zusammen mit dem Keuffel&Esser 4081, dem POST VersaLog, dem Pickett N3 und dem Faber-Castell 2/82 den prototypischen professionellen Universal-Rechenschieber der letzten 30 Jahre der aktiven Nutzung vor Rechenschiebern vor deren Ablösung durch elektronische Taschenrechner dar. Sie haben alle die Skalen des Rietz-Systems, dazu die inverse Skala CI (optional auch weitere inverse Skalen), LL-Skalen für positive (LL1, LL2, LL3) wie für negative Exponenten (LL01, LL02, LL03) [16], versetzte Skalen CF, DF und optional die P-Skala des Darmstadt gemein. Unterschiede liegen in der Plazierung der Skalen, speziell der trigonometrischen: Amerikaner präferieren sie auf der Zunge, Europäer auf einer der Wangen. Gemein ist ihnen die Konzentration auf die Kern-Rechenfunktionen in Wissenschaft und Technik, klares, gut ablesbares Skalenbild und gute Handhabarkeit.

[2] *polyphase slide rule* in K&E Marketing-Terminologie, die vor den übrigen US-Lieferanten von Rechenschiebern übernommen wurde. Rietz bzw. Rietz-artige Skalenarrangements, die i.d.R. inverse, also rückläufige Skalen einschließen, wurden als *maniphase* bezeichnet.

Somit bildeten universellen Duplex-Profi-Rechenschieber der Nachkriegszeit auch die natürliche Basis für professionelle Extramodelle mit zusätzlichen Skalen, wie Wurzelskalen, hyperbolische Funktionen, tachymetrische Skalen, erweiterte LL-Skalen, u.v.a.m.

Literatur

[1] Cajori, Florian: *A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments*, Chelsea Publishing Co, New York, 1910; reprint: The Astragal Press, Mendham, NJ, 1994.

[2] Kleine, Karl: *Die Lambert-Branderschen Rechenstäbe*, in: *12. International Meeting und 3. Symposium zu Entwicklung der Rechentechnik*, Universität Greifswald, 2006.

[3] Zoller, Paul: *The Soho Slide Rule: Genesis and Archaeology*, in: *Bulletin of the Scientific Instrument Society*, issue 57 (1998), S. 5–13.

[4] Farey, John: *A Treatise on the Steam Engine*, London 1827.

[5] Jomard, Edme-François: *Description d'une règle à calculer, employée en Angleterre et appelée sliding rule, précédée de quelques réflexions sur l'état de l'industrie anglaise en avril 1815*, in: *Bulletin de la SEIN*, Band 14 (1815), S. 179–190.

[6] Burg, Adam: *Über die Einrichtung und Verwendung des bei englischen Mechanikern und Maschinenarbeitern gebräuchlichen Schieberlineals (Sliding Rule), mit welchem sie sämmtliche, auf ihre Arbeiten Bezug habenden Rechnungen sehr leicht und schnell ausführen*, in: Prechts, Johann (Ed.): *Jahrbücher des Kaiserlichen Königlichen Polytechnischen Institutes in Wien*, Band 16 (1830), S. 101–158.

[7] Mannheim, Amédée: *Règle à calcul*, Kurzanleitung, Metz 1851, gedruckt von Gravet-Lenoir.

[8] Kühn, Klaus; Kleine, Karl: *Dennert & Pape ARISTO 1872–1978 — Rechenschieber und mathematisch-geodätische Instrumente*, W. Zuckschwerdt Verlag, München, 2004 (mit 2 CDROM).

[9] Goering, A: *Der Rechenstab — Beschreibung und Gebrauch desselben*, Dennert & Pape, Altona, 1873.

[10] Kleine, Karl: *Patente, Gebrauchsmuster und Warenzeichen der Rechenschieber von Dennert & Pape*, in: [8], S. 141–163.

[11] Rietz, Max: *Rechenschieber mit gleichmäßiger (numerischer) einfacher, zweifacher und dreifacher, logarithmischer Theilung auf dem Lineal und einfacher und zweifacher, logarithmischer Theilung auf dem Schieber zum direkten Ablesen von Logarithmen, Kubikzahlen, Kubikwurzeln*, DRGM 181110, 1902.

[12] Hammer, Ernst: *Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch*, Zwei Serien: Metzler, Stuttgart, 1898... und Nestler, Lahr; beide in vielen Auflagen bis ca 1925.

[13] Roget, Peter Mark: *Description of a new instrument for performing mechanically the involution and evolution of numbers*, in: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Band 105 (1815), S. 9–28.

[14] Kron, A.-W.: *Der ARISTO-Rechenschieber System Darmstadt D und seine Anwendung*, Dennert & Pape, Altona, 1940.

[15] Cox, William: *Engineers Slide Rule*, US Patent 460930, 1891.

[16] Paulin, Eugen: *Log-Log Skalen*, in: [8], S. 164–180.

Abbildungen

wären sehr wünschenswert gewesen, konnten aber aus Platz- und Qualitätsgründen in dieser Vorabfassung für das Miesenbach-Treffen leider nicht realisiert werden.

Plemeljsches Dreieck, gleichseitige Hyperbel und Bernoullische Lemniskate

Marko Razpet

Pädagogische Fakultät, Universität in Ljubljana

In diesem Beitrag behandeln wir eine geometrische Konstruktion des Dreiecks ABC, wenn bekannt sind: seine Seite AB, Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ und Gerade, auf welcher sein Eckpunkt C liegt. Dieses Problem ist eine Verallgemeinerung der im Jahr 1891 gestellten Aufgabe zu Josip (Josef) Plemelj und seinen Mitschülern von ihrem Mathematiklehrer Vincenc (Vincenz, Vinzenz) Borštner (Borstner) am Gymnasium in Ljubljana (Laibach).

Einführung

Es ist bekannt (mehr davon in [4, 5]), dass Prof. Vincenc Borštner (1843-1917) am klassischen Gymnasium in Ljubljana im Jahr 1891 zu seinen Schülern aus einer uns noch immer *unbekannten Sammlung* die folgende Aufgabe diktierte:

Aufgabe (A). *Konstruiere ein Dreieck ABC mit bekannter Seite $c = |AB|$, Winkeldifferenz $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$ und Höhe h_c!*

Alle geometrischen Konstruktionen sollten nur mit einem unmarkierten Lineal und einem Zirkel ausgeführt werden. Wir wissen, dass man Aufgabe (A) auf verschiedene Arten lösen kann. Plemelj hat die Aufgabe zuerst trigonometrisch gelöst und erst dann hat er auf der Grundlage des Resultats eine geometrische Konstruktion gefunden. Bei der Suche nach *der unbekannten Sammlung* stoßen wir zweimal auf die gleiche Aufgabe in umfangreichem Werk [2], wo die Autoren bei der Konstruktion den Satz über die Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises und die Methode der Vervollständigung des Dreiecks zu einem gleichschenkligen Trapez verwenden. Die letzte Methode wurde im Aufsatz [1] beschrieben. Aber keine von den erwähnten Lösungen wurde in Borštners Sammlung enthalten. Die Lösungen wurden später in [4, 5] erklärt. Bei der weiteren Suche nach *der unbekannten Sammlung* finden wir das Lehrbuch [3] aus dem Jahr 1855. Auf Seite 185 gibt es die folgende allgemeinere Aufgabe als jene in Borštners Sammlung:

Aufgabe (B). *Konstruiere ein Dreieck ABC mit bekannter Seite $c = |AB|$, Winkeldifferenz $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$ und Gerader g, auf welcher der Eckpunkt C liegt!*

Wir werden davon ausgehen, dass jedes Dreieck ABC standardmäßig markiert ist, wobei $0 < \varepsilon < \pi$. Die Winkel α, β und γ sind die inneren Dreieckswinkel. Wenn g zu AB auf dem Abstand h_c parallel ist, dann erhalten wir aus (B) Borštners Aufgabe (A).

Analytische Lösung

Zuerst werden wir das Problem (B) analytisch lösen, ähnlich wie es in [6] gemacht wurde. Im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem Oxy sollten Eckpunkte $A(-f,0)$ und $B(f,0)$ sein, wobei $f = c/2 = |AB|/2$. Der Eckpunkt C sollte eine positive Ordinate haben, so dass das Dreieck ABC korrekt markiert (1) wird. Wenn α ausgewählt wird, dann ist $\beta = \alpha - \varepsilon$. Die Gerade durch A, Trägergerade der Seite b, und die Gerade durch B, Trägergerade der Seite a des Dreiecks, haben Gleichungen

$$y = (x+f)\tan\alpha, \quad y = -(x-f)\tan(\alpha-\varepsilon). \tag{1}$$

Ihr Schnittpunkt sei $C(x_C, y_C)$, der dritte Eckpunkt des gewünschten Dreiecks. Wenn wir das Gleichungssystem (1) lösen und die erhaltenen Ausdrücke vereinfachen, haben wir:

$$x_C = -f\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin\gamma}, \quad y_C = f\cdot\frac{\cos\varepsilon+\cos\gamma}{\sin\gamma}. \tag{2}$$

Mit einer etwas längeren, aber nicht schwierigen Rechnung finden wir aus (2)

$$x_C^2 - y_C^2 - 2x_Cy_C\cot\varepsilon - f^2 = 0,$$

was bedeutet, C liegt auf einem Kegelschnitt, der die folgende Gleichung besitzt:

$$x^2 - y^2 - 2xy\cot\varepsilon - f^2 = 0. \tag{3}$$

Im Sinne der Aufgabe kann sich der Eckpunkt C nur in jenem Teil befinden, wo $x < 0$ und $y > 0$ ist. Für $\varepsilon = \pi/2$ geht (3) in $x^2 - y^2 = f^2$ über, was die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel ist. Das gemischte Glied $-2xy\cot\varepsilon = 2xy\tan(\varepsilon - \pi/2)$ in (3) bedeutet (siehe zum Beispiel [7]), dass (3) durch die Drehung der Grundhyperbel $x^2 - y^2 = f^2\sin\varepsilon$ um O um den Winkel $\vartheta = \varepsilon/2 - \pi/4$ entsteht. Weil es eine reelle Zerlegung

$$x^2 - y^2 - 2xy\cot\varepsilon = (y + x\cot\frac{\varepsilon}{2})(x\tan\frac{\varepsilon}{2} - y)$$

gibt, ist der Kegelschnitt (3) immer eine Hyperbel und ihre Asymptoten sind zueinander senkrechte Geraden

$$y = x\tan\frac{\varepsilon}{2}, \quad y = -x\cot\frac{\varepsilon}{2},$$

was bestätigt die Tatsache, dass es in jedem Fall um eine gleichseitige Hyperbel geht. Die erste Asymptote bildet mit der x-Achse den Winkel $\varepsilon/2$ und der andere den Winkel $(\varepsilon + \pi)/2$. Der Schnittpunkt beider Asymptoten ist der Mittelpunkt $O(0,0)$ der Hyperbel.

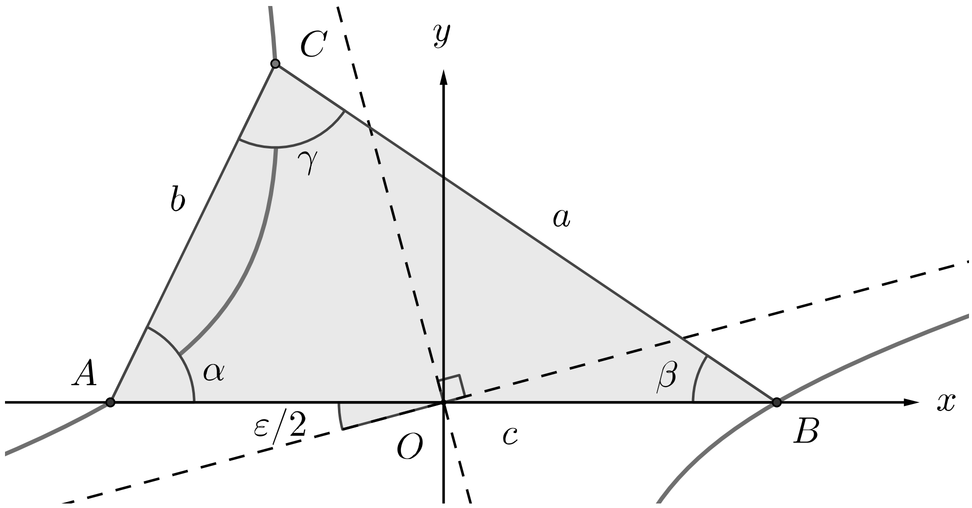


Abbildung 1: Dreieck und Hyperbel.

Die Hyperbel (3) läuft durch die Punkte A und B. Mit ihnen und der Winkeldifferenz ε ist sie genau bestimmt. Die Punkte E und F der Hyperbel (3), die am nächsten zum Mittelpunkt O sind, sind die Scheitel der Hyperbel (Abbildung 2).

Die Länge der Haupthalbachse $|OE| = |OF|$ der Hyperbel (3) finden wir als Extremum der Funktion $|OT|^2 = x^2 + y^2$ bei der Nebenbedingung (3). Wir bilden die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 - y^2 - 2xy \cot \varepsilon - f^2).$$

Wir setzen die notwendigen Bedingungen für das Extremum, was selbstverständlich ein Minimum ist:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L}{\partial x} = x - \lambda(x - y \cot \varepsilon) = 0,$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L}{\partial y} = y - \lambda(-y - x \cot \varepsilon) = 0,$$
$$x^2 - y^2 - 2xy \cot \varepsilon - f^2 = 0.$$

Das System der ersten zwei Gleichungen oben ist linear in x und y und wegen der dritten Gleichung betrachten wir nur die nicht-triviale Lösung. Wenn wir die erste Gleichung mit x und die zweite mit y multiplizieren und danach beide Ergebnisse summieren, erhalten wir in Extremen

$$(x^2 + y^2) - \lambda(x^2 - y^2 - 2xy \cot \varepsilon) = (x^2 + y^2) - \lambda f^2 = 0.$$

Dies Resultat bedeutet, dass $|OE| = |OF| = f\sqrt{\lambda}$. Für diese nicht-triviale Lösung muss die Bedingung

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda \cot \varepsilon \\ \lambda \cot \varepsilon & 1+\lambda \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 - \lambda^2 \cot^2 \varepsilon = 1 - \lambda^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \varepsilon} = 0$$

erfüllt sein. Die vernünftige Lösung ist nur $\lambda = \sin\varepsilon > 0$. So haben wir die Länge der Haupthalbachse der Hyperbel (3) ausgedrückt: $|OE| = |OF| = f\sqrt{\sin\varepsilon}$. Beide Scheitel erhalten wir aus der Bedingung $\partial L/\partial y = 0$, die wir in die Form

$$\frac{y}{x} = \frac{-\lambda\cot\varepsilon}{1+\lambda} = -\frac{\cos\varepsilon}{1+\sin\varepsilon}$$

umschreiben. Durch die Einführung des Winkels $\vartheta = \varepsilon/2 - \pi/4$ wird der Ausdruck zu $y/x = \tan\vartheta$ vereinfacht. Die Scheitel der Hyperbel liegen auf der Geraden $y = x\tan\vartheta$ und sie haben Polarradien

$$\varrho = f\sqrt{\sin\varepsilon} = f\sqrt{\sin(2\vartheta + \pi/2)} = f\sqrt{\cos 2\vartheta}.$$

Die Scheitel E und F der Hyperbel (3) wandern beim Ändern des Winkels ε auf einer *Bernoullischen Lemmiskate*, die in Polarkoordinaten die Gleichung $r = f\sqrt{\cos 2\varphi}$ hat, in gewöhnlichen rechtwinkligen kartesischen Koordinaten aber $(x^2 + y^2)^2 = f^2(x^2 - y^2)$.

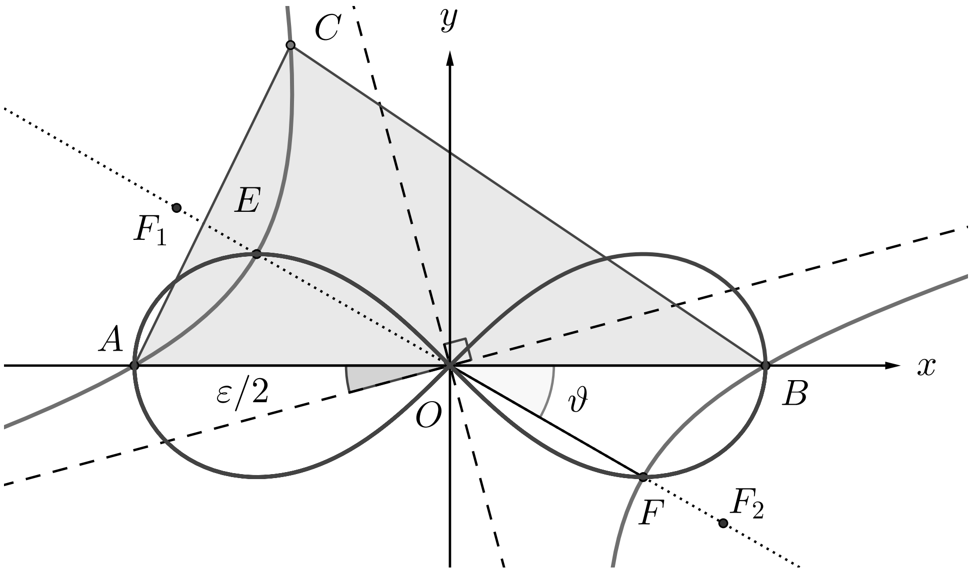


Abbildung 2: Dreieck, Hyperbel und Bernoullische Lemniskate

Die Brennpunkte F_1 und F_2 der Hyperbel (3) liegen ebenfalls auf der Geraden $y = x\tan\vartheta$ und deren Polarradien sind $f\sqrt{2\cos 2\vartheta}$, was bedeutet, dass sie sich entlang der Bernoullischen Lemniskate beim Ändern des Winkels ε bewegen. Diese Lemniskate hat in Polarkoordinaten die Gleichung $r = f\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Aufgabe (B) kann man verallgemeinern, wenn man fordert, dass der Eckpunkt C auf einer gegebenen Kurve $\mathcal{C}$ liegen soll. Dann konstruieren wir für bekannte Seite AB und bekannte Winkeldifferenz ε die entsprechende Hyperbel. Der Eckpunkt C ist endlich der Schnittpunkt des positiven linken Astes der Hyperbel mit der Kurve $\mathcal{C}$.

Das Lösen von Problemen mit dem Schneiden der Kegelschnitte und anderer Kurven ist nicht neu. Einige antike Mathematiker haben das verwendet, zum Beispiel beim Problem, den Würfel zu verdoppeln und den Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.

Bemerkung. Wenn Punkte A, B, C auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen, wobei AB ihr Durchmesser ist, dann bleibt die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ im Dreieck ABC ständig, von C unabhängig.

Geometrische Konstruktionen

Leider sind Kegelschnitte außer dem Kreis nicht echte Konstruktionselemente. Zweifellos ist die gleichseitige Hyperbel nützlich, weil sie uns schnell die Existenz und die Anzahl der Lösungen zeigt.

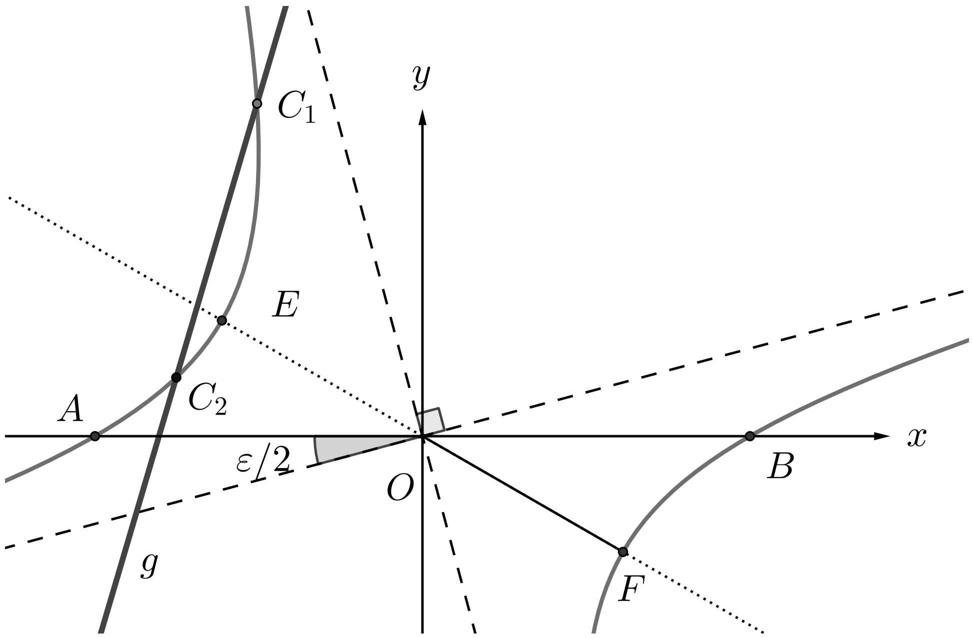


Abbildung 3: Hyperbel und Gerade

Die Abbildung 3 zeigt ein Beispiel, wenn Aufgabe (B) zwei Lösungen hat. In Plemeljs Nachlass gibt es eine einfache und elegante Lösung der Aufgabe (A) mit ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken. Hier kommen wir auf die Idee Aufgabe (B) zu lösen (Abbildung 4). Dabei ist O der Mittelpunkt des Umkreises von Dreieck ABC, m_c die Mittelsenkrechte der Seite c und D der Schnittpunkt der Geraden g und m_c. Wenn g parallel zu m_c läuft, geht D ins Unendliche über und die Gerade durch A und D ist ebenso parallel zu g.

Schlusswort

Geometrische Konstruktionen waren bis zum Ende des 20. Jahrhunderts an Gymnasien und technischen Schulen eine reguläre Tätigkeit, die aber ziemlich au-

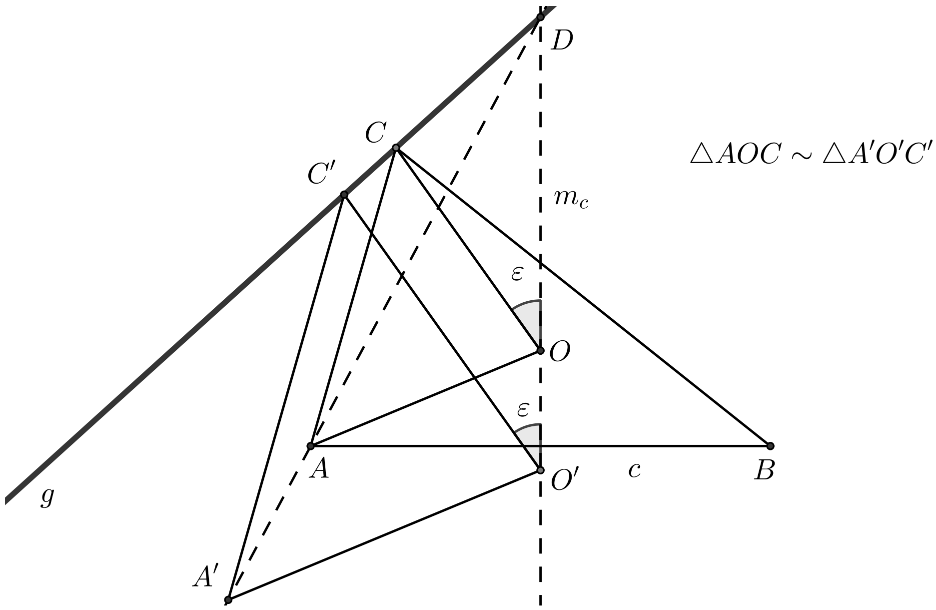


Abbildung 4: Euklidische Lösung der Aufgabe (B).

sgestorben ist, wahrscheinlich auf Kosten der anderen Fächer und wegen der abnehmenden Anzahl der Lehrer, die dafür qualifiziert sind.

In den letzten Jahrzehnten haben wir einige hervorragende Computerprogramme erlebt, was das Interesse an Geometrie und geometrischen Konstruktionen wiederherstellen sollte. Der Zweck dieses Beitrags liegt eben darin, aber auch in der Erinnerung an Prof. Josip Plemelj anlässlich seines 50. Todestages und des bevorstehenden 100. Jahrestages der Gründung (am 23. Juli 1919) der Universität in Ljubljana, deren erster Rektor Josip Plemelj war.

Literatur

[1] M. Brodar, *Odgovor na vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), No. 8, S. 285.

[2] H. Holleben, P. Gerwien, *Aufgaben-Systeme und Sammlungen aus der ebenen Geometrie*, I. und II. Teil, G. Reimer, Berlin 1831 und 1832.

[3] E. Heis, T. J. Eschweiler, *Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten*, Verlag der M. DuMont–Schauberg'schen Buchhandlung, Köln, 1855.

[4] J. Plemelj, *Iz mojega življenja in dela*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992), No. 6, S. 188–192.

[5] J. Plemelj, *Odgovor na vprašanje št. 6, Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), No. 7, S. 243–245.

[6] I. Pucelj, *Plemljev trikotnik in negibne točke transformacij*, Obzornik mat. fiz. **62** (2015), No. 1, S. 12–14.

[7] H. Stöcker, *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*, Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2007.

Forgotten geometric constructions

Nada Razpet, University of Ljubljana, Faculty of Education, Slovenia

In 2017, on the occasion of the fiftieth anniversary of the death of the great Slovenian mathematician Josip Plemelj, we made a project to search for his unpublished manuscript legacy. We found some geometrics sketches, which were drawn on the backside of an old calendar. There were only sketches, with no comment or description, sometimes with some mathematical relations indicated between triangle's elements. We decided to research these constructions in detail. In studying Plemelj's constructions we found that they were related to several similar old geometrical construction problems, which were solved with special methods.

We will present some unusual Plemelj's solutions of constructing triangles and some by other authors, which use special, today almost forgotten methods of solving geometrical construction problems.

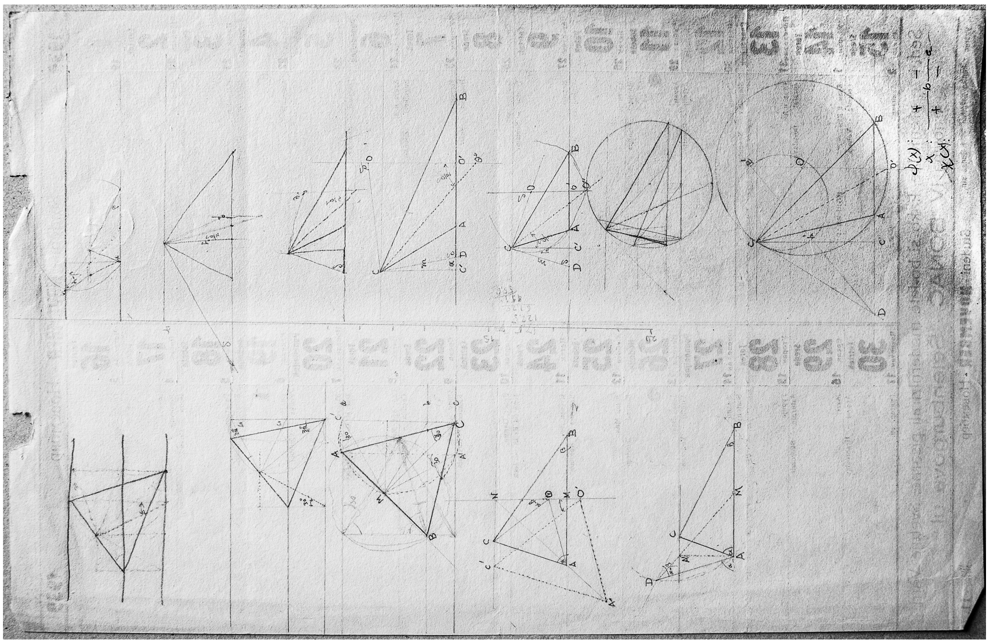


Figure 1: Sketches drawn on the backside of an old calendar.

1 Construction problem in Proteus

In 2017 we investigated documents concerning Josip Plemelj's work and life. In "Proteus", the oldest popular scientific review in Slovenia, published since 1933 (with the interruption in the time of the WW2), we found an article by Lavo Čermelj [1], published in the Issue 4-5 from the volume **12** where the author wrote:

> From the 8^{th} to 12^{th} of November 1949, the first Congress of the Yugoslav mathematicians and physicists took place at Lake Bled. The very first day,

> doyen of the Yugoslav mathematicians, Academician and University Professor presented *his path and mission in the field of mathematics.* Speaking about his life and mathematical career, he mentioned that as early as in the fifth grade of the classical gymnasium (this means at the age of about 17-18 years) he solved a mathematical problem put forward by the gymnasium teacher Vincenc Borštner which nobody in the class was able to solve. At first, he also was unable to see the way to the solution of the problem. Only when the teacher specifically summoned to the blackboard (which otherwise never happened) and asked him if he found the solution, he buried himself into the problem and found an apparently complicated solution.
>
> The problem reads: Construct the triangle, if the length of one side, the altitude to this side, and the difference of the adjacent angles (e.g. c, v_c and $\alpha - \beta$) are given. We would be glad if the readers from among the secondary school as well as the high school students tried to solve the problem and report to us about their effort. Professor Plemelj used to return to this problem over and over and discovered about twenty different solutions.

In what follows, we call this problem “Problem A”.

In the 9$^{\text{th}}$ issue of the same volume ([2]), Čermelj published three of Plemelj’s solutions and wrote:

> Professor Plemelj was so kind that he sent us three complete solutions of this problem. The first solution was the one from the book of Professor Borštner, the other two were due to Professor Plemelj who added the trigonometric solution which helped him as the 5$^{\text{th}}$ grade student to draw the triangle.

The response to the problem exceeded the expectations and later Čermelj published some of the solutions. For two of them added a comment *that they are already to be found among the solutions in Plemelj’s collection.*

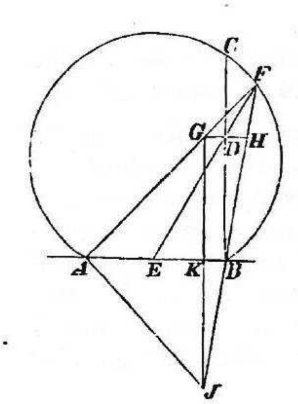
As we know, the publication of Plemelj’s solutions in Proteus was the first among the published papers on this topic. Later, the speech at the congress was printed in the congress proceedings, published in Belgrade in 1951 (Prvi kongres matematičara i fizičara FNRJ - Naučna saopštenja i obaveštenja 1951, 1 - 6). In Slovenia, Plemelj’s presentation was not published (with the above mentioned solutions of the triangle construction) until 1992 ([3])

The Čermelj mentioning to have seen the published solutions among Plemelj’s collection of solutions has prompted us to start searching of the collection and looking for solutions. In his speech at the Congress, Plemelj mentioned to have found nine solutions, the last one, according to his diary, in the New Year‘s Night of 1939 to 1940. Apart from these solutions, he found two other solutions. He wrote that he did not know the book used by Borštner, and that a student from Chernivtsi (where Plemelj was Professor for some time) also showed him the book, but he did not remember the title. He remarked that in Ljubljana he found a book with geometrical problems by Wiegand, but he used the word “Obergymnasien” instead of “höhere Lehranstalten” in the title. The book can be found on the web in the pdf format. The book is actually a revised edition of the English

book *Geometrical problems* by Miles Bland (1786 - 1868) from the year 1819 [5] and can also be found on the web in integral edition. The book contains solved problems from plane geometry arranged in such a way as to follow Euclid‘s axioms; trigonometry is also added.
It is interesting that the German edition was intended for teachers, while the English edition was intended for “younger students”. In Section 9 of the book the problem 15 helped Plemelj to find his solution. The problem reads:

> Given the line bisecting the vertical angle, the perpendicular drawn to it from one of the angles at the base, and the other angle at the base; to construct the triangle.

We will call this problem “problem (B)”. The construction by GeoGebra is shown in Fig. 3.

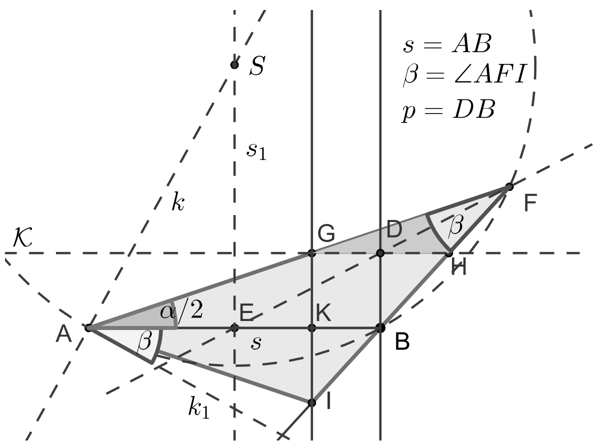


15. ***Ein Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind die Halbirungslinie (h_a) des Winkels an der Spitze, das darauf von einer anderen Winkelspitze (β) gefällte Loth. (p) und der dritte Winkel (γ).***

Es sei AB = h_a, beschreibe darüber ein Kreissegment, welches den Winkel γ fasst, ziehe BC ⊥ AB, mache BD = p, halbire AB in E, ziehe EDF, dann FA, FB, durch D ziehe GDH || AB, trage auf der Verlängerung von FB noch BJ = BH ab, so sind A, J, F die Spitzen des gesuchten Dreiecks.

Zieht man AJ, JG, welche letztere Linie AB in K schneiden möge, so ist, weil GH || AB und AE = EB, auch GD = DH; es war aber auch HB = BJ, folglich ist BD || GJ, ∴ JK = KG = BD = p, u. s. w.

Figure 2: Problem from the Wiegand‘s book (p. 147, pdf page 158)



s	$\Rightarrow$	A, B
$AE = EB$	$\Rightarrow$	E
at E $\perp s$	$\Rightarrow$	s_1
at B $\perp p$	$\Rightarrow$	D
$\angle\beta$	$\Rightarrow$	k_1
at A $\perp k_1$	$\Rightarrow$	k
at E $\perp (A, B)$	$\Rightarrow$	s_1
$k \bigcap s_1$	$\Rightarrow$	S
$(E, D) \bigcap \mathcal{K}$	$\Rightarrow$	$F, \triangle ABF$
at D $\parallel s$	$\Rightarrow$	G, H
$\lvert GK\rvert = \lvert KI\rvert$	$\Rightarrow$	$\triangle AIF$

Figure 3: Construction of Bland‘s problem with construction protocol.

2 How many solutions were really found by Plemelj?

The interesting question to ask, of course, was how many different solutions were actually found by Plemelj and where the before mentioned collection of solutions is to be found. We first addressed our quest to Professor Anton Suhadolc who collected and organized Plemelj's manuscripts for the Archives of Slovenia. Unfortunately, he never saw the collection. Nevertheless, three members of the Society of Mathematicians, Physicists and Astronomers of Slovenia (Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, DMFA), Marko Razpet, Izidor Hafner and myself went to the Archives of the Republic of Slovenia and browsed through Plemelj's manuscripts. Plemelj's legacy is abundant, kept in 19 cases. We looked through third case more in detail. We drew attention to a piece of paper from an old calendar - we remembered that Plemelj mentioned that he solved the problem on a New Year‘s Day ([7]). On the back side of the paper, we discovered sketches reminding us of constructions of triangles (Fig. 1).

2.1 The first solution after Bland

Let us construct triangles (B) as suggested by Bland and adapt it to Plemelj's construction.

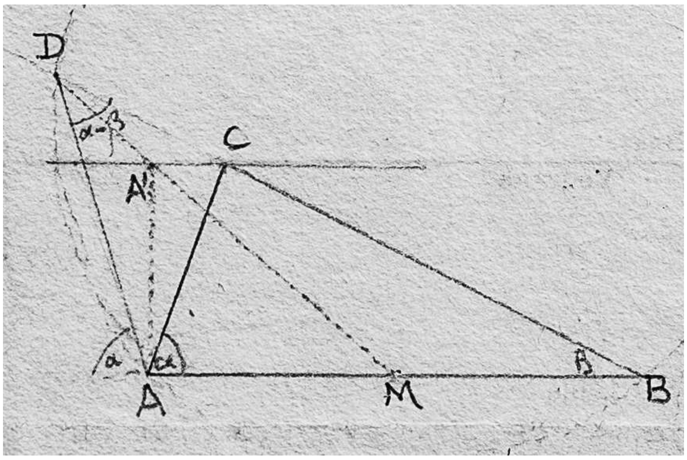


Figure 4: Plemelj‘s sketch.

Also, let us make comparison with the Bland construction. The role of the bisector of the angle α (the line segment s) is taken over by the bisector of the angle 2β, i.e. the side c, the distance from the bisector p takes over the altitude v_c, and the angle $\varepsilon = \alpha - \beta$ is assumes the role of the Bland‘s angle β (see Fig. 5 left). To make the similarity between the two construction even clearer, we reflect the triangle $AA'B$ in segment AB). We get the triangle ABA''. The angle at A' and A'', respectively, is $\varepsilon = \alpha - \beta$ which can be proved easily as α is the exterior angle of the triangle$AA'B$. It therefore holds true:

$$\alpha = \varepsilon + \beta \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon = \alpha - \beta.$$

In the following, we assume $\alpha > \beta$.
Let us describe the construction protocol in telegraphic style:

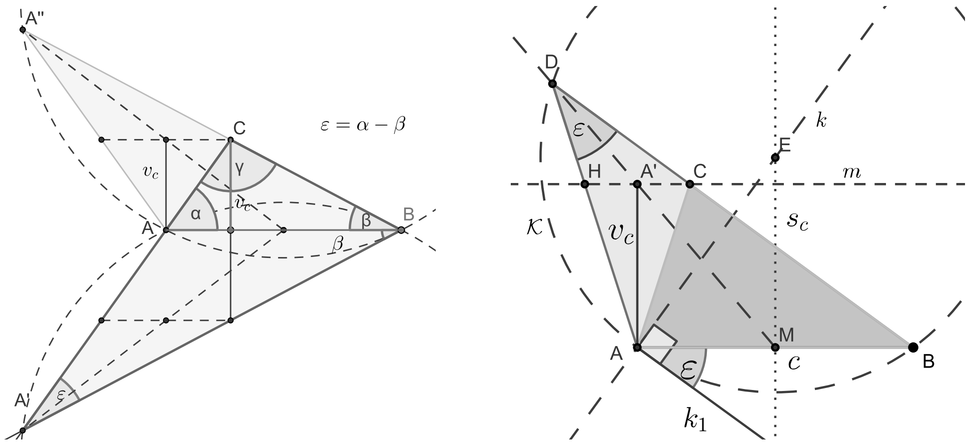


Figure 5: Left: to find similarity with Bland‘s construction, we need to reflect the triangle $AA'B$ in segment AB. Right: Plemelj’s construction.

1.	c	$\Rightarrow$	A, B	7.	$\mathcal{K}(E, r = \|AE\|)$		$\mathcal{K}$
2.	s_c	$\Rightarrow$	M	8.	$\mathcal{K} \bigcap (M, A')$	$\Rightarrow$	D
3.	(at A $\sphericalangle\varepsilon$)	$\Rightarrow$	k_1	9.			$\triangle ABD$
4.	at A $\perp$ line to k_1	$\Rightarrow$	k	10.	(at C_1 $\|$ line c)	$\Rightarrow$	m
5.	$k \bigcap s_c$	$\Rightarrow$	E	11.	$m \bigcap (D, B)$	$\Rightarrow$	C
6.	at A v_c	$\Rightarrow$	A'	12.			$\triangle ABC$

2.2 Similar isosceles triangles

Let us solve Problem (A) in another way. We assume that $\varepsilon = \alpha - \beta < \pi/2$. Let us circumscribe the triangle ABC with a circle and denote its center with O. Then we draw other lines, segments and points, as shown in Fig. 6. It can be easily shown that the angle $\sphericalangle CON = \varepsilon$. We choose the point O' on the perpendicular bisector s. We draw a similar triangle AOC'. The points A, A' and N lie on the same straight line. We are now in the position to draw the triangle we are looking for.

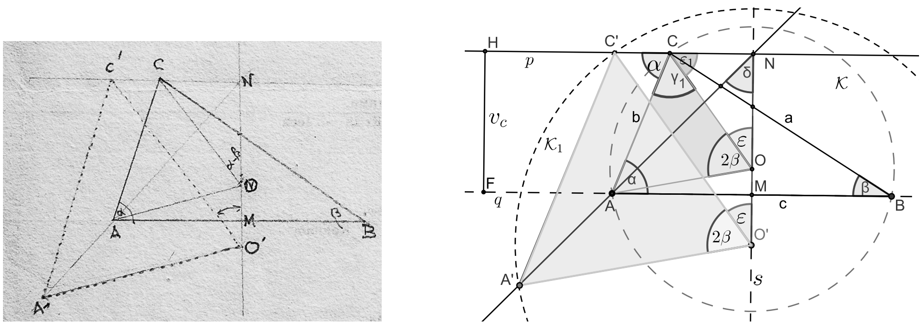


Figure 6: Left: Plemelj’s sketch. Right: Completed Plemelj’s sketch.

How should the point O' be chosen? Its position depends on the magnitude of the angle ε. If $\varepsilon < \pi/2$, then O' is located on the bisector s bellow the point N; if, however, $\varepsilon > \pi/2$, O' is located above the point N; and, if $\varepsilon = \pi/2$, then $O\prime = N$.

Again, in telegraphic style, we show the construction protocol:

1.	c	$\Rightarrow$	$A,\, B, q$	6.	$O' \in s$	$\Rightarrow$	
2.	s	$\Rightarrow$	M	7.	at $O'\varepsilon$	$\Rightarrow$	C'
3.	at $F \perp v_c$	$\Rightarrow$	H	8.	$\mathcal{K}_\infty$	$\Rightarrow$	
4.	at$H \parallel q$	$\Rightarrow$	p	9.	$(A, N) \bigcap \mathcal{K}_\infty$	$\Rightarrow$	A'
5.	$s \bigcap p$	$\Rightarrow$	N	10.	at $A \parallel (A'C')$	$\rightarrow$	C

2.3 Completion of a triangle in a trapezium

During the search for the book mentioned by Plemelj, we found a book containing 2300 construction problems with solutions ([9]). The collection was published in two volumes in the years 1831 and 1832 in contained 860 pages. The pertaining sketches are gathered at the end of the book. In the first part, Plemelj's problem is found with an exhaustive explanation. A method of completion of the triangle into an isosceles trapezium is used, what is to be found also among the solutions published in Proteus ([8]).

2.4 Solution using the power of a point with respect to a circle

In the second volume ([9]) on page 298 the solution to the same problem is found using the method of the power of point with respect to a circle (Fig. 8).

1720. Fig. 308. **Aufgabe.** △ aus a, h, (β—γ).

Analysis 1) ꝛc. Siehe g. Betr. §. 31.

Analysis 2). Zeichnet man ∠ ABD = γ, so ergiebt sich ∠ CBD = (β — γ). Zieht man ferner, um h anzuwenden, eine ǂ zu a durch A, so bestimmt sich BD. Legt man endlich, um a zu benutzen, eine ǂ zu b durch B, so erhält man AE = a, und △ ADB ∾ △ EDB, da ∠ DEB = ∠ ACB = ∠ ABD und ∠ EDB = ∠ ADB ist. Hieraus folgt aber a + DA : BD = BD : DA, durch welche Proportion DA, folglich auch △ ABC gezeichnet werden kann, da BD gegeben ist.

Auflösung. Zeichne CB = a, ∠ CBD = (β—γ), lege zu a eine um h entfernte ǂ ED, errichte in B auf BD

Figure 7: From the Holleben's and Gerwien's book [9], II. p. 298 (pdf p. 316).

Construction protocol:

1.	q	$\Rightarrow$	$K \in q$	7.	$\mathcal{K}_\infty(C, r = c/2) \bigcap p_1$	$\Rightarrow$	B_2
2.	at $q \perp m,\ v_c$	$\Rightarrow$	C	8.	(O, B_2)	$\Rightarrow$	q_1
3.	at $C \parallel q$	$\Rightarrow$	p	9.	$\mathcal{K}(B_2, r = c/2) \bigcap q_1$	$\Rightarrow$	A_3, F
4.	atC $\sphericalangle\varepsilon$	$\Rightarrow$	p_2	10.	$\mathcal{K}_\in(O, r = \lvert OA_3\rvert) \bigcap q$	$\Rightarrow$	A
5.	$p_2 \bigcap q$	$\Rightarrow$	O	11.	$\mathcal{K}_\ni(O, r = \lvert OF\rvert) \bigcap q$	$\Rightarrow$	B
6.	at $C \perp p_2$	$\Rightarrow$	p_1	12.			$\triangle ABC$

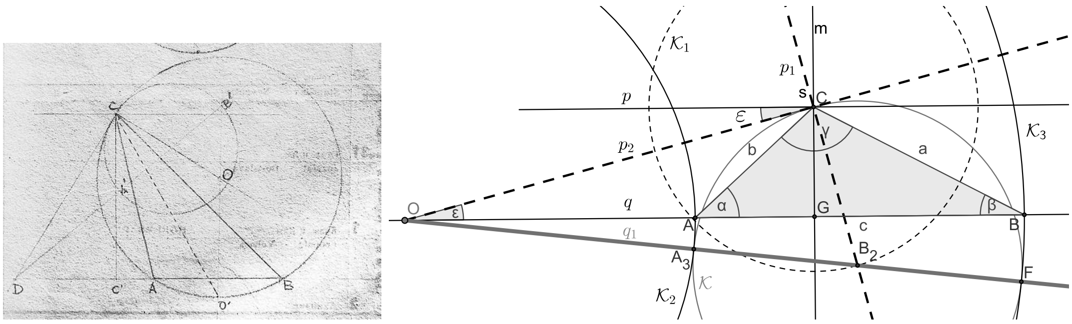


Figure 8: Left: Plemelj's sketch. Right: Constructing the triangle with the help of the power of point with respect to a circle.

4 Conclusion

In relation to the problem considered we found many variants - examples where instead of the altitude some other datum about the triangle was given (e.g. the sum of sides $a+b$). Treating one problem alone, we discovered a lot of new things. Unfortunately, we still do no know how many solutions were discovered by Plemelj. We found six different solutions (we did not considered all of them in this article). Also, we still do not know which collection was used by Borštner.

Izidor Hafner showed Plemelj's solutions (and some other solutions) using the computer package *Mathematica*; they are accessible on the web site:
`demonstration.wolfram.com/ThePlemlejConstructionOfATriangle/`

References

[1] L. Čermelj, *Vprašanje št. 6*, *Za bistre glave*, Proteus **12** (1949/50), 4/5, 166.

[2] J. Plemelj, Odgovor na vprašanje št. 6, *Za bistre glave*, Proteus, **12** (1949/50), 7, 243-245.

[3] J. Plemelj, *Iz mojega življenja in dela*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992), 6, 188-192.

[4] M. Bland, A. Wiegand, Geometrische Aufgaben für höhere Lehranstalten, zweite Auflage, Braunschweig, C. A. Schwetschke und Sohn, 1865.

[5] M. Bland, Geometrical problems, J. Smith, London, 1819.

[6] M. Razpet, N. Razpet, *Po sledeh neke geometrijske konstrukcije*, Obzornik mat. fiz. **64** (2017), 5, 161–170.

[7] AS 2012, Plemelj Josip, škatla 3, mapa 58, J. Plemelj, *Razni matematični zapiski in rokopisi.*

[8] M. Brodar, Odgovor na vprašanje št. 6, *Za bistre glave*, Proteus, **12** (1949/50), 8, 285.

[9] H. Holleben, P. Gerwien, *Aufgaben-Systeme und Sammlungen aus der ebenen Geometrie*, I., II., G. Reimer, Berlin 1831, 1832, p 136, 298.

NEGLECTED APPLICATIONS OF CONIC SECTIONS IN DESCRIPTIVE GEOMETRY

Vlasta Moravcová[1]

Abstract: The main aim of this paper is to show how one of interesting conic section applications related to sundial construction was taught at secondary schools in Austro-Hungarian Empire period. Brief sundial history is also mentioned together with basic terms and principles of their construction.

Introduction

Descriptive geometry was taught on a very advanced level at technical universities and also at real-schools[2] in Austro-Hungarian Empire. Many topics, which are not taught currently, were a common part of curriculum. One of them is construction of sundials, which we can find in textbooks for real-schools published in about 1900 and later.[3]

1 History of Sundials

The spreading of sundials usage was problematic and slow, because its construction depends on the latitude. Beginnings of sundials were related to understanding the Sun's motions in the sky and shadow changes during a day.

The first idea to use a vertical rod (called *gnomon*) was known in 15th century BC in ancient Egypt, Mezopothamy etc. The principle of gnomon is very simple (Fig. 1) – the length (and direction) of its shadow is regularly changing during the day. Therefore we can draw a simple dial-plate as a net of concentric circles around the gnomon. Then the direction of the gnomon shadow is not so important, approximate time is recognized mainly from the length of it. The disadvantage of this method is its inaccuracy, because the length of the shadow depends on the season. On the other hand, the changes are negligible near the equator.

[1] RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D., Department of Mathematics Education, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, Sokolovská 83, 186 75 Prague, Czech Republic, e-mail: morava@karlin.mff.cuni.cz.

[2] Real-school (from German: *die Realschule*) was a special type of secondary school with emphasis on mathematics, natural sciences and modern languages as a contrary to grammar school (gymnasium). Real-schools were constituted in Austrian Empire in 1849 by the Exner-Bonitz reform.

[3] See e.g. [3], [4], [7] or [8].

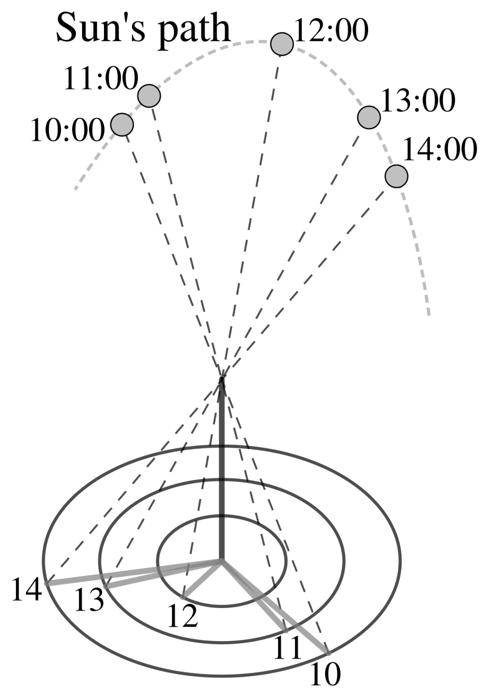


Fig. 1: *Principle of gnomon*

Important progress can be observed in ancient Greece. Greek geometers were aware of the inaccuracy of a simple gnomon and they searched for more exact methods. One of them was horizontal hemispherical sundial called *skafé* [1], but its creation was very complicated. Roman builder Marcus Vitruvius Pollio mentioned the use of special curve called *analemma* for creation of sundial in his book *De architectura libri decem* [10], which was probably written between 33 and 22 BC.

The most important discovery for sundial construction was probably the fact that the gnomon[4] has to be situated parallel with Earth's rotation axis. This rule has been known in the Europe since 14th century.

In modern time of watches, smartphones and computers, the importance of sundials is not so significant. But it can be an interesting illustration of applied mathematics at school and moreover, it gives the exact solar time of a place (instead of the standard time according to time zones).

2 Basic Principles

Firstly, two of Earth's motions should be reminded: the rotation around its axis and the rotation around the Sun. The trajectory of Earth's rotation around the Sun is elliptical and the Sun is one of its focuses.[5] Earth's axial obliquity is about 23,5°. When the Earth is in vertices of elliptical trajectory,

[4] If a gnomon is as a part of typical sundial with a dial-plate, it is often called *post*.

[5] One of three Kepler's laws of planetary motion, see [9].

we have the solstice. When the sunrays shine perpendicular to equator, we have the equinox (Fig. 2).

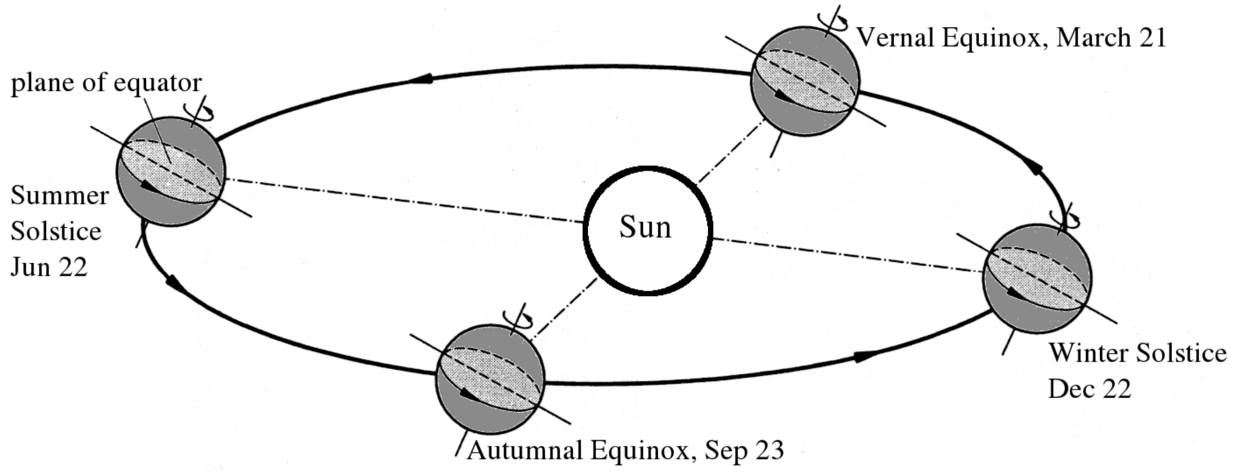


Fig. 2: *Draft of Earth's rotation around the Sun*

From the view of an observer, who stands in one place on the Earth, the Sun appears to move along a circle in the celestial sphere. The plane of this circle depends on the season and latitude. It also oscillates between two limit positions (Fig. 3). An observer who stands at the North/South Pole sees the Sun revolving around him. On the contrary, someone who stands at equator sees the Sun moving in a plane which is perpendicular to the horizontal plane.

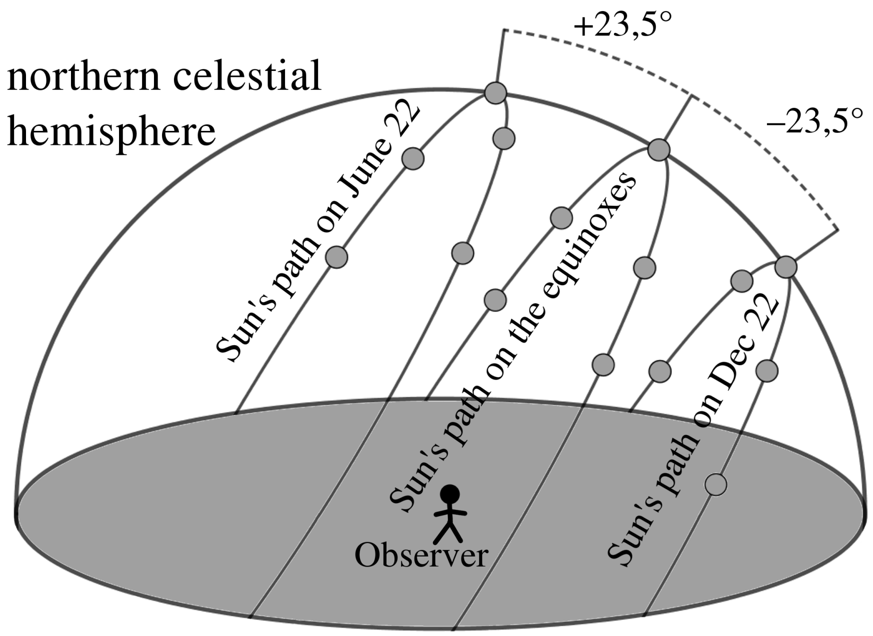


Fig. 3: *Sun's motion in the sky, situation in a place in the temperate zone*

We can use the apparent motion of the Sun for construction of basic *equatorial* sundial. This one has the dial-plate sited in a plane which is parallel with the plane of equator. The post has to be perpendicular to the dial-plate and situated in its midpoint. Then the Sun is revolving around the post (like around an observer at the Earth pole) and the post shadow moves at an angular rate of 15° per hour. Therefore we can construct the dial-plate as a circle divided into 24 regular sectors (Fig. 4). The shadow points the north exactly at midday at the northern hemisphere.

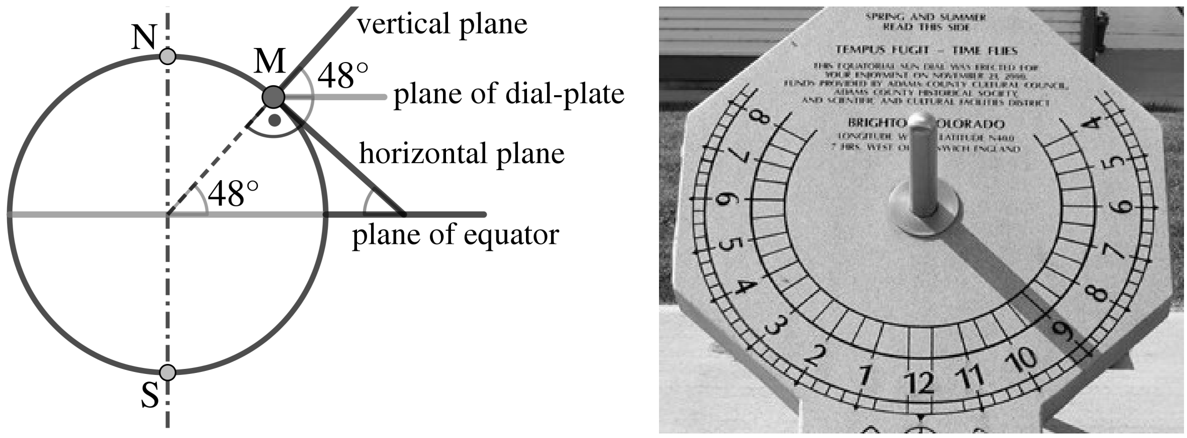


Fig. 4: *Equatorial sundial – its position approximately in Miesenbach, Austria (left); sundial in Henderson, Colorado, USA*[6] *(right)*

3 Projection of Equatorial Sundial

The above mentioned principles were used for construction of horizontal[7] and vertical[8] sundials in descriptive geometry at real-schools in the Austro-Hungarian Empire period. Related tasks were one of common applications of parallel projection, they were also assigned during school-leaving examinations.[9]

We can construct a horizontal or vertical sundial using parallel projection of an equatorial sundial onto horizontal/vertical plane (Fig. 5). The direction of this projection has to be perpendicular to the plane of equator (i.e. it is parallel with a post). The post of the horizontal/vertical sundial will be parallel with Earth's axis again.

The result of this projection for latitude 50° is constructed in Monge's method in Fig. 6. First, the equatorial sundial dial-plate (with the midpoint O) was constructed and the points 1, 2, 3, ... were marked on the main

[6] Source: `www.waymarking.com/gallery`

[7] The dial-plate of horizontal sundials lies in a horizontal plane (in relation to the place where the sundial is situated), these sundials are often positioned onto the ground.

[8] The dial-plate of vertical sundials lies in a vertical plane (in relation to the place where the sundial is situated), these sundials are often positioned on a wall of a building.

[9] For more about school-leaving examinations in descriptive geometry at real-schools see [2] or [6].

axis. Then the first and the second projection of O was found using a side view and the lines from ${}^1O_1$, ${}^2O_2$ to 1, 2, 3, ... were drawn.

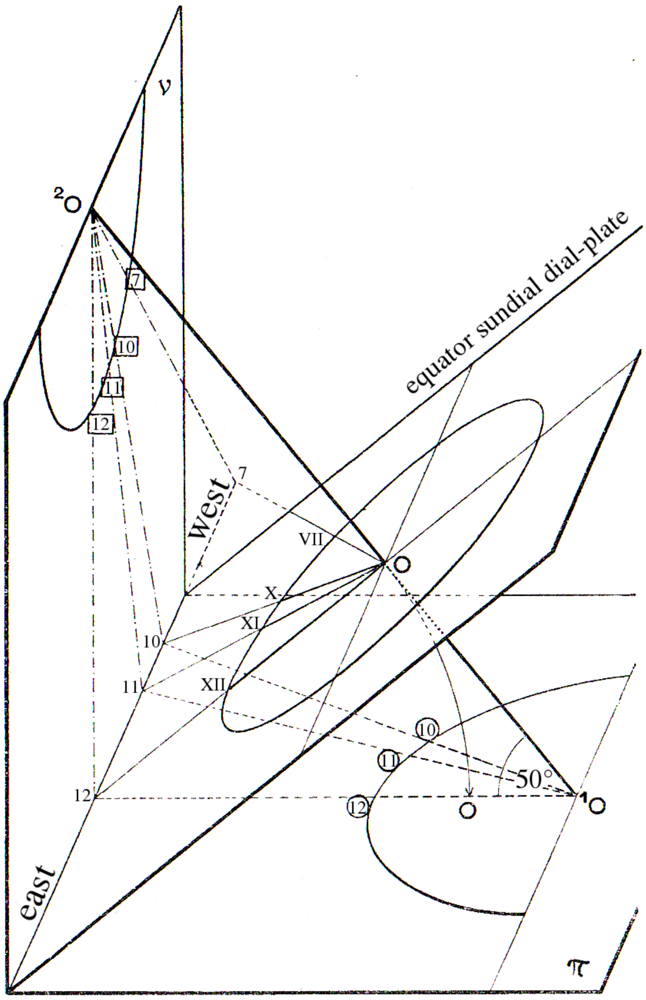


Fig. 5: *Equatorial sundial parallel projection onto horizontal and vertical plane (adjusted figure from [7], p. 124)*

4 Date Lines

We can observe many interesting curves in dial-plates of some sundials. For example analemma[10] or date lines. Date lines, which were also taught at Austrian real-schools, are trajectories of the end of a post shadow during the particular day.

As we mentioned above, the Sun moves along a circle in the sky. Therefore, sunrays which go throught the end of a post (which we can imagine as a point) create a rotate conical surface. The plane of a dial-plate cuts this surface in a conic section, i.e. the date lines are conic sections.

[10] For more about analemma see [11].

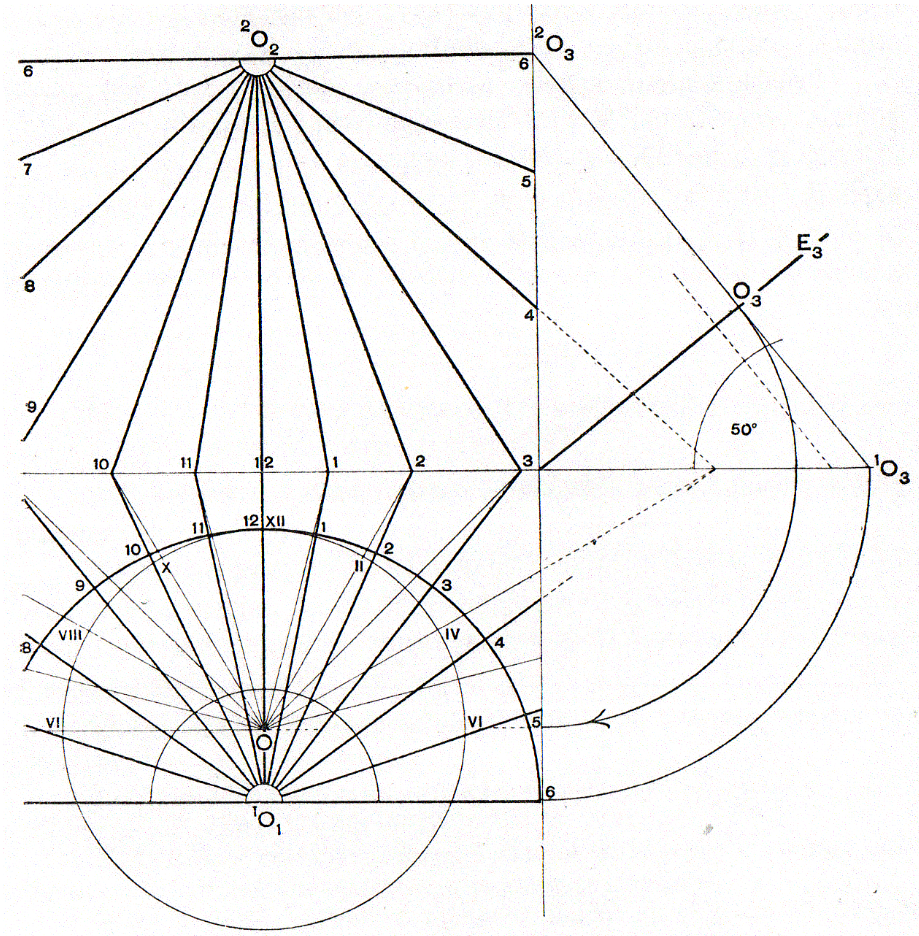


Fig. 6: *Horizontal and vertical dial-plate construction ([7], p. 125)*

We can usually find two special date lines constructed in a dial-plate, which make a border of all points on where the shadows of the post end can fall. These are data lines for the summer and the winter solstice and they are called *lines of declination.* If we construct more data lines in one dial-plate, we obtain a net of conic sections (hyperbolae[11] or ellipses) and a straight line, which is typical for the equinoxes (Fig. 7).

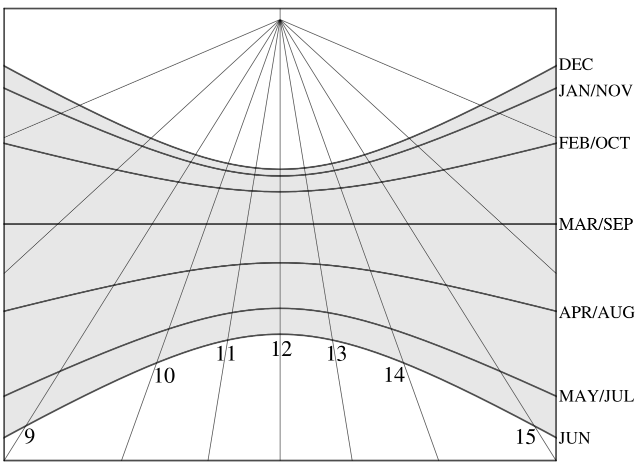


Fig. 7: *Draft of a horizontal sundial data-plate with data lines*

[11] Hyperbolae are created in the latitude between the equator and the Arctic Circle.

The lines of declination in the latitude 50° for a horizontal sundial are constructed in Fig. 8. The main vertex of the conical surface is M, the vertices of hyperbola are marked A, B. The side view of the hyperbola is a union of two rays, which start in A_3 and B_3. These points are transformed into the first and the second plane of projection according to the rules of Monge's method. The asymptotes of hyperbola can be found as lines parallel with an intersection of the conical surface and the plane τ, which is parallel with the horizontal plane and contains M.

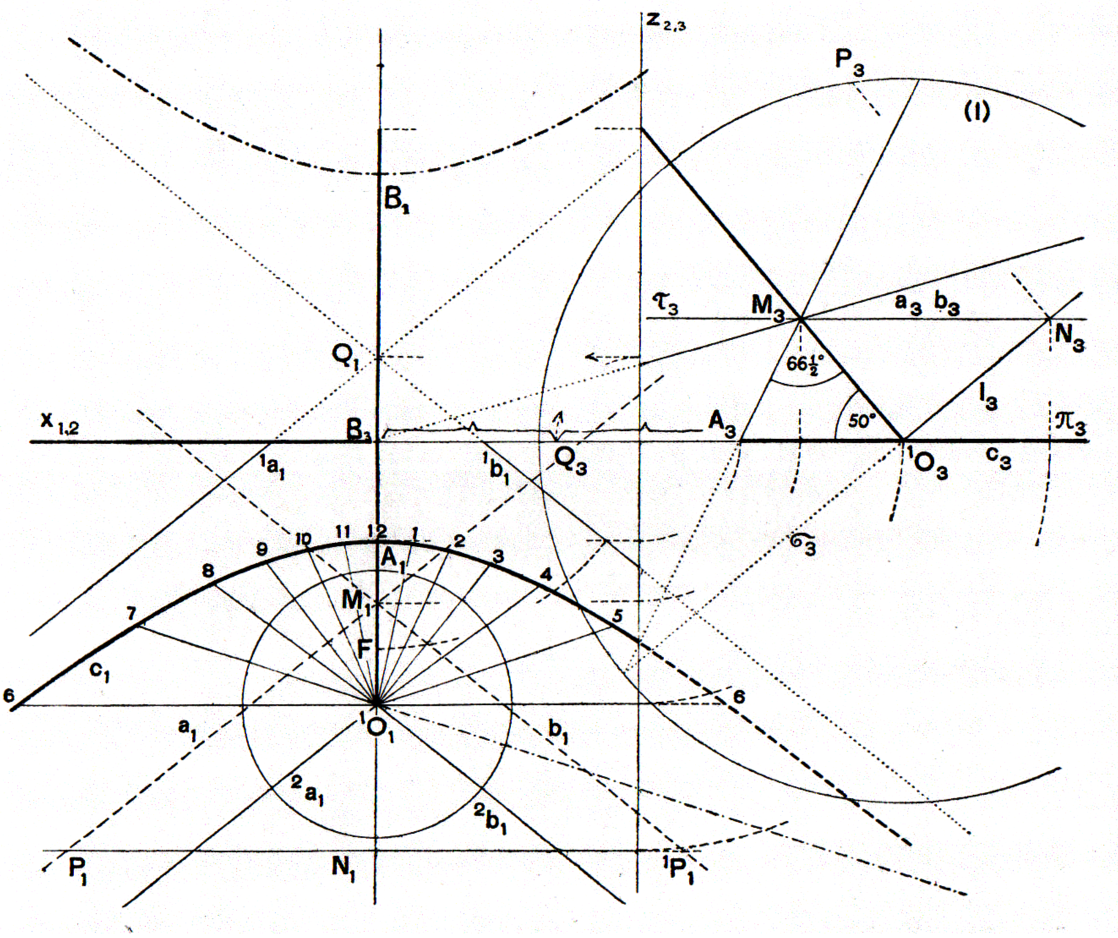


Fig. 8: *Lines of declination construction ([7], p. 126)*

Conclusion

History and constructions of sundials are documented very well.[12] Nevertheless, present absolvents of secondary schools[13] do not know anything about this topic, even though hundred years ago every absolvent of real-school knew basic principles of sundial and could construct it.

[12] For more information about sundials see e.g. [5] or [11].

[13] We mean secondary schools in countries, which were parts of Austro-Hungarian Empire. We especially studied a curriculum of gymnasiums and some secondary technical schools in the Czech Republic and Austria.

In our opinion, sundial construction is a good opportunity to show students a nice application of conic sections in practice. Unfortunately, this topic is not a part of curriculum today.

Acknowledgement: This work has been supported by Charles University Research Centre program No. UNCE/HUM/024.

References

[1] Brož M., Nosek M., Trebichavský J., Pecinová D.: *Sluneční hodiny na pevných stanovištích.* Academia, Praha, 2004.

[2] Chmelíková V.: *History of Descriptive Geometry Teaching at Secondary Schools.* In J. Šafránková, J. Pavlů (ed.): *WDS'09 Proceedings of Contributed Papers*, Matfyzpress, Praha, 2009, 171–175. On-line: `https://www.mff.cuni.cz/veda/konference/wds/proc/pdf09/WDS09_130_m8_Chmelikova.pdf`

[3] Klír K.: *Deskriptivní geometrie pro vyšší třídy reálních škol.* Unie, Praha, 1910.

[4] Klír K., Matas B.: *Deskriptivní geometrie pro vyšší třídy reálných škol.* Unie, Praha, 1925.

[5] Mayall R. N., Mayall M. W.: *Sundials. Their Construction and Use.* Dover Publications, Mineola, New York, 1994.

[6] Moravcová V.: *Výuka deskriptivní geometrie v našich zemích.* Doctoral thesis, Charles University, Prague, 2015. On-line: `https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/57679`

[7] Pithardt J., Seifert L.: *Základy deskriptivní geometrie. Díl III. a IV. Pro VI. a VII. třídu reálek.* JČM, Praha, 1911.

[8] Schwefel A.: *Darstellende Geometrie für Realschulen, Realgymnasien und Reformrealgymnasien. Vierter Teil.* Staatliche Verlagsanstalt, Prag, 1923.

[9] Vanýsek V.: *Základy astronomie a astrofyziky.* Academia, Praha, 1980.

[10] Vitruvius M. P.: *De architectura libri decem.* F. Krohn, Leipzig, 1912.

[11] Yeow T. S.: *The Analemma for Latitudinally-Challenged People.* Bachelor thesis, National University of Singapore, 2002. On-line: `www.math.nus.edu.sg/aslaksen/projects/tsy.pdf`

A sonnet on the "Pascaline"
and a chapter of learned poetry in Paris in the 17th century

Wolfgang Breidert

My paper is concerned with a sonnet on Pascal's calculating machine. It was written by Charles Vion Dalibray (or d'Alibray) († 1652), and probably it is the first poem about Blaise Pascal. The poet's biography is almost unknown. We know most about it from his collected works, which he himself procured. They were published one year after his death.

Dalibray was closely befriended with Jacques Le Pailleur († 1654), who was a friend of Blaise Pascal's father Étienne Pascal. Le Pailleur and the two Pascals, and presumably also Dalibray, were participants of the "Académie Mersenne", i. e. the meetings of persons around Marin Mersenne. After Mersenne's death Le Pailleur attempted to continue the "Académie Mersenne". Therefore it is sometimes known as "Académie Le Pailleur".

In the middle of the 17th century men of letters and scholars were enthusiastic about automatic machines, and in 1637 Descartes declared animals to be merely automates (*Discours de la méthode*, V). That enthusiasm about automates was not restricted to funny tools, but it included useful instruments and machines. In one of his sonnets the poet Dalibray eulogized that combination of pleasantness and usefulness.

Sur vn liuvre de Machines du Sieur ***

Ces diuers instrumens de l'artifice humain
Prouuent combien nostre ame en desseins est fertile,
Et font voir, en ioignant l'agreable à l'vtile,
Ce que vaut la raison sous l'ayde de la main.

On espargne auec eux vne folle despence,
Ou le temps qui souuent plus que l'Or est sans prix;
Auec eux bien souuent deux bras ont entrepris
Ce que d'executer cent n'ont pas la puissance.

De l'esprit et du corps c'est icy l'abbregé;
Icy de chaque chose on void l'ordre changé
Par des inuentions dans les arts sans pareilles:

Enfin ces instrumens sont subtils à ce point,
Que la Nature mesme admirant leurs merueilles,
Se plaist à s'y chercher et ne s'y trouue point.

*On a book on machines by Mr. ****

These various instruments of the human art
prove how fertile our soul is in designs,
and connecting the pleasantness and the usefulness
they show what reason achieves with the help of the hand.

By them crazy expense is saved
or time which often is like gold but without price.
By them often two arms have accomplished
What a hundred could not execute.

Here is the short cut for spirit and body.
Here you can see the rules of each thing changed
by the incomparable inventions in the arts.

Finally these instruments are subtle in that point
that nature itself admiring their miracles
likes to seek itself and does not find itself there.

Blaise Pascal was developing his calculating machine about 1641, and in 1645 he presented it to the "Académie Mersenne". Probalby Dalibray, too, was present at this presentation. He wrote the following sonnet.

A Monsieur Pascal le fils,
Sur son instrument pour l'arithmetique

Cher Pascal, qui comprens par vn subtil sçauoir
Ce que la Mechanique a de plus admirable,
Et de qui l'artifice auiourd'huy nous fait voir
D'vn merueilleux genie vne preuue durable.

Apres ton grand esprit, que sert-il d'en auoir?
Compter, fut l'action d'vn homme raisonnable,
Et voila, maintenant ton art inimitable
Aux esprits les plus lourds en donne le pouuoir.

Il ne faut pour cet art, ny raison, ny memoire,
Par toy chacun l'exerce, et sans peine, et sans gloire,
Puisque chacun t'en doit, et la gloire, et l'effet;

Ton esprit est semblable à cette ame feconde
Qui va s'insinuant par tout dedans le Monde,
Et preside, et supplée à tout ce qui s'y fait.

To Mr. Pascal, the son,
on his instrument for arithmetic

Dear Pascal, who apprehends by a subtle knowledge
which most admirable things are in mechanics

and of whom the art shows us today
a durable proof of a glorious genius.

After your great spirit, what will there be?
Calculating was the action of reasonable man,
and look, now your inimitable art
makes the dullest spirits able to do it.

That art does not need either reason or memory,
due to you everyone exercises it without effort or glory
since everyone owes to you glory and effect.

Your spirit is like that fecund soul
which permeates all the world
and presides and replaces all that happens there.

It is conspicuous that nothing about the machine itself or its construction is contained in the poem. And it is remarkable that Dalibray considers of importance "memory" in spite of the fact that the "Pascaline" had not yet any memory. He could not imagine that memory would be so important in computer technology as it is today.
Aristotle emphasized the relevance of memory for the development of experience and the sciences (*Metaphysics,* at the beginning). He thought that even some of the animals had some sort of memory. And since Plato it has been a common conviction that only human beings were distinguished by having reason.
In the last lines of the poem Pascal is eulogized like a creative deity, whereas during the middle ages creativity was reserved for God. The calculating machine effected that reason and memory nevermore would be necessary for calculating. Altogether Pascal is praised in an exalted and baroque way. His machine is assumed to be a proof of genius. -

There exists another poem where Dalibray is concerned with Pascal's experiments for the demonstration of a vacuum, and he wrote also a sonnet on the tremendous heat in the universe (contrary to the assumed "heat death" in the 19th century). Moreover he produced a cycle of forty sonnets entitled *Sur le mouvement de la terre* (On the motion of the earth). With regard to the content these sonnets constitute a continuous text which is formed almost like letters to Le Pailleur. And the latter responded with an extensive poem (not in sonnets, but in rhymed distiches). Dalibray is convinced of the Copernican system, whereas Le Pailleur is more sceptical about it.
In these sonnets Dalibray is concerned with many of the arguments connected with the Copernican Shift.

1) Experience with the motion of ships shows that it is impossible to note only by sight which object is moved or unmoved.

2) Copernicus is not ridiculous because he continues to a scientific tradition deriving from antiquity.

3) By the *book of nature* God is asking us a riddle.

4) Dalibray discusses the famous passage from the biblical book Josua where it is said that the sun but not the earth stood still. No other of the clerical objections are mentioned.

5) The solar spots deliver a proof of the rotation of the son.

6) If the earth were rotating, an object thrown upward could not return to its starting point. Since Dalibray could know neither the principle of inertia nor Foucauld's pendulum he "resolved" the problem by taking refuge to the principle of friendship: The object follows the motion of the earth by virtue of friendship.

7) One problem is left: Neither the rotary motion nor the orbital motion of the earth can be perceived, and the north pole does not seem to change its position in the sky in the course of the year. This observation argues against the orbital motion, till Bessel discovered the parallax of fixed stars at the beginning of the 19th century.

8) The explanation of tide by the gravitation theory with respect to the moon is explicitly rejected by Dalibray (according to Cesalpino in opposition to Stevin). He asserts that the tide is caused by the motion of the earth, which due to the irregular surface results in a shaking motion.

9) Moreover the magnificence of the universe is demonstrated by Galilei's telescope, because an enormous lot of stars are detected by it. And the telescope arouses the hope perhaps to discover extraterrestrial worlds with living beings.

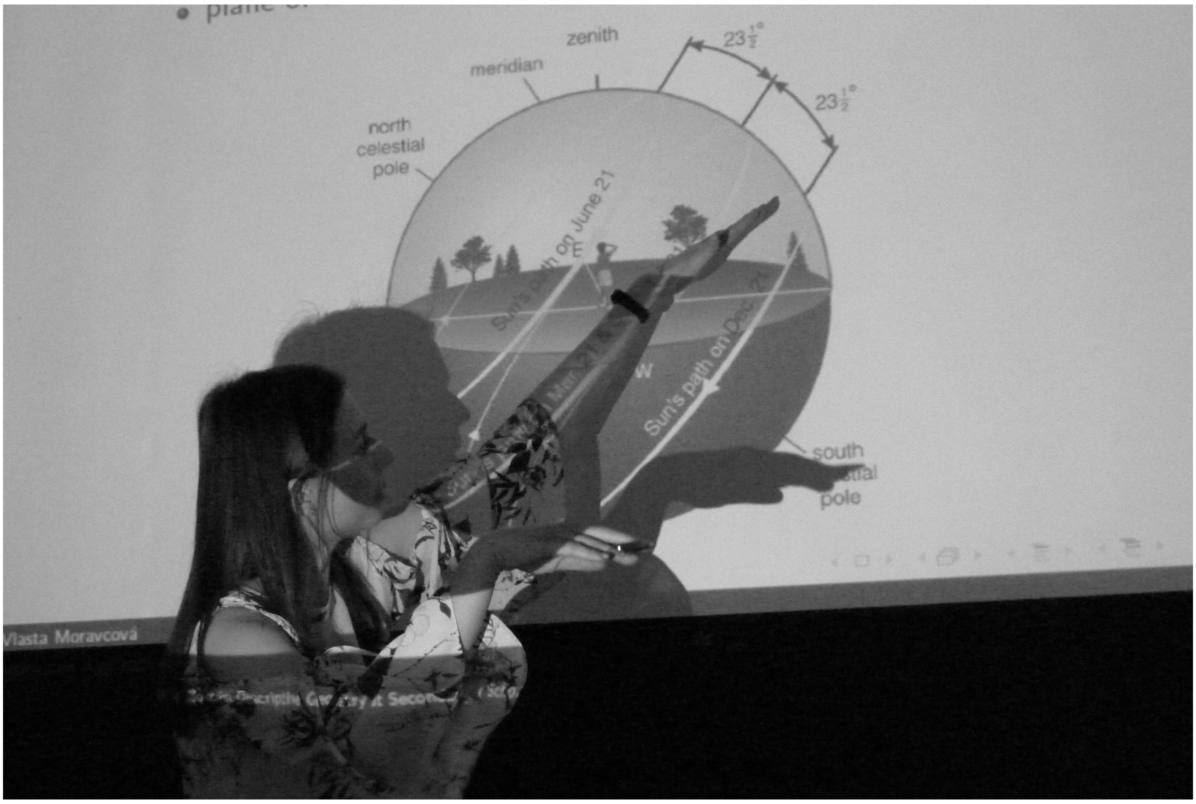
Literatur:

Dalibray, Charles Vion de, Œ*uvres poetiques*, *Divisées en vers Bachiques, Satyriques, Heroïques, Amoureux, Moraux, et Chrestiens*, Paris 1653.

d'Alibray, Charles Vion, *Le Soliman*, *Tragi-comédie*, Édition critique établie par Marie-Pauline Martin, dans le cadre d'un mémoire de master 1 sous la direction de Georges Forestier (2009-2010). [http://bibdramatique.paris-sorbonne.fr/dalibray_soliman/front-1. - Darin ist die beste Biographie von Dalibray enthalten.]

Huarte, Juan, *L'Examen des esprits pour les sciences. Ou se monstrent les différences d'esprits qui se trouvent parmy les hommes, et à quel genre de science chacun est propre en particulier* [« Examen de ingenios para las sciencias »], übersetzt von Dalibray,

Paris 1655.
[http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k55868283/f11.image]
Martin, Marie-Pauline s. d'Alibray
Michaud, G., *Un Poète ami de Pascal*, in: *La Revue Latine* (1906), pp. 561-569.
[http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k63152f/f606.image. - Darin ist auch das Sonett über die Rechenmaschine und das Gedicht über das Vakuum abgedruckt, doch wird vorwiegend das Gedicht über das Vakuum behandelt.]
Pécharman, Martine: *De la controverse aux règles de la méthode de discussion: La métamorphose Pascalienne de la dispute sur le vide*. In: *Revue de synthèse*, t. 137, no. 3-4 (2016), pp. 271-299.
Pascal, Blaise: *Œuvres complètes*, ed. Louis Lafuma, Paris 1963.
Roberval, Gilles Personne de: *Aristarchi Samii de mundi systemate* (Paris 1644).
Tallemant des Réaux, Gédéon : *Mémoires*, Tome III, Paris 1834. *Les Historiettes.*
[http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k31570c/f240.image]
Vion de Gaillon (Vicomte): *Charles de Vion, Sr. de Dalibray*, in: *Bulletin de bibliophile*, Paris 1853 (Mai et Juin), pp. 251-269.
[https://books.google.be/books?id=3rQEAAAAQAAJ&pg=PA251#v=onepage&q&f=false. - Sehr ausführlicher Artikel, der das Leben Dalibrays auf romanhafte Weise bildlich ausschmückt.]
Weiss, Charles: *Dalibray*, in Louis-Gabriel Michaud (dir.), *Biographie universelle ancienne et moderne* , vol. 10, 1855, p. 43.
[http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k51650f/f48.image.r=biographie%20universelle%20michaud%20.langFR.]
Grundriss der Geschichte der Philosophie, *Die Philosophie des 17. Jahrhunderts*, Bd. 2/2: *Frankreich und Niederlande*, hrsg. von Jean-Pierre Schobinger, Basel 1993.
[S. 529-590: Jean Mesnard, *Blaise Pascal*; S. 593-621: René Taton, *Die Akademien*; S. 648-655: Pierre Costabel: *Gilles Personne de Roberval*]



Vlasta Moravcová

Nikolai Bubnov, Moritz Cantor und die Frühgeschichte der indisch-arabischen Ziffern im Westen

Menso Folkerts

Wie wir heute wissen, ist das dezimale Stellenwertsystem mit den Ziffern, die wir heute benutzen, in Indien entwickelt worden. Im Mittelalter gelangte es von dort in die arabisch sprechende Welt, und durch die Übersetzungen aus dem Arabischen ins Lateinische wurde es im 12. Jahrhundert auch im Abendland bekannt. Von dort führt eine direkte Linie in die Neuzeit.

Weniger bekannt ist es, dass diese Ziffern schon seit dem 10. Jahrhundert im Westen nachweisbar sind, allerdings nicht in Verbindung mit dem schriftlichen Rechnen, sondern als Figuren auf speziellen Rechenbrettern, die vom Ende des 10. bis zum 12. Jahrhundert benutzt wurden. In diesem Beitrag möchte ich auf diese kurze Episode in der Mathematikgeschichte näher eingehen. Sie wurde seit der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wissenschaftlich untersucht. Die Protagonisten in der Zeit zwischen 1860 und 1900 waren Moritz Cantor und Nikolai Bubnov. Die beiden vertraten kontroverse Ansichten über die historische Entwicklung. Während jeder Mathematikhistoriker Moritz Cantor kennt, ist Nikolai Bubnov weitgehend in Vergessenheit geraten. Daher werde ich auf Bubnovs Leben und Werk näher eingehen. Nachdem ich die Ansichten dieser beiden Personen dargestellt habe, will ich die historische Entwicklung aufzeigen, wie sie sich aus unserer heutigen Kenntnis ergibt.

1. Überblick über die Mathematik im Abendland im frühen Mittelalter

Die Mathematik im Abendland im frühen Mittelalter (d.h. vom 5. bis 11. Jahrhundert) konnte nicht von den hohen mathematischen Kenntnissen der Griechen profitieren, weil die Kenntnis der griechischen Sprache weitgehend verloren gegangen war und man daher nur die wenigen Schriften benutzen konnte, die in lateinischer Sprache zugänglich waren. Dies waren vor allem die Schriften der Enzyklopädisten, die auch elementare Kenntnisse zu mathematischen Gebieten präsentierten. Es gab die sieben „Artes liberales“, die seit dem 5. Jahrhundert in das „Quadrivium“ und das „Trivium“ unterteilt wurden. Das Quadrivium bestand aus den vier Fächern Arithmetik, Geometrie, Musiktheorie und Astronomie. Die wichtigsten lateinisch schreibenden Enzyklopädisten waren Varro, Macrobius, Martianus Capella, Cassiodor und Isidor von Sevilla. Von besonderer Bedeutung war Boethius, der um 500 versuchte, wichtige griechische Schriften durch Übersetzungen ins Lateinische vor dem Vergessen zu bewahren. Zu diesem Zweck übersetzte er Euklids „Elemente“ und Nikomachos‘ „Arithmetik“, also theoretische

Schriften zur Geometrie bzw. Zahlentheorie. Vollständig erhalten in Boethius‘ Arithmetik; von seiner Geometrie gibt es nur Auszüge (dazu später). Kenntnisse in der praktischen Geometrie waren im frühen Mittelalter vor allem durch die Schriften der römischen Feldmesser (Agrimensoren) zugänglich. Für das praktische Rechnen gab es den *Calculus* von Victorius (5. Jahrhundert): eine Reihe von Multiplikationstabellen für die Vielfachen der römischen Zahlen und der römischen Brüche. Seitdem sich das Christentum als Staatsreligion durchgesetzt hatte, musste man auch in der Lage sein, das Datum des Osterfests zu berechnen, das ja vom 19jährigen Mondzyklus und vom 28jährigen Sonnenzyklus abhängt, also letztlich auf Restebildung modulo 19 und modulo 28 beruht. Hierfür gab es spezielle Computus-Schriften, die allerdings in unserem Zusammenhang keine Rolle spielen.

Seit relativ kurzer Zeit weiß man, dass im 8. Jahrhundert das Kloster Corbie das Zentrum der Geometrie in der frühmittelalterlichen Welt gewesen ist. Hier wurden vor allem im 8. Jahrhundert mathematische Handschriften gesammelt und neue Kompendien erstellt, u.a. die so genannte „Geometrie I“, die Boethius zugeschrieben wurde.

Eine neue Entwicklung beginnt mit Gerbert, dem späteren Papst Sylvester II. (um 940 – 1003). Er verfasste eine Geometrie, die im Wesentlichen theoretisch ist, aber auch das Wissen der Agrimensoren einbezieht, und verschiedene kleinere Abhandlungen über zahlentheoretische Fragen. Außerdem hat er ein eigenes Rechenbrett entwickelt, das im 11. und frühen 12. Jahrhundert in den Klöstern benutzt wurde; hierzu später mehr. Im 11. Jahrhundert wurden vor allem in Lothringen mathematische Studien betrieben. Hier entstand auch ein weiteres Kompendium, die so genannte „Geometrie II“, die man ebenfalls Boethius zuschrieb. Durch die Übersetzungen aus dem Arabischen seit dem 12. Jahrhundert verloren alle diese Schriften (mit Ausnahme der Arbeiten zum Computus) weitgehend ihre Bedeutung.

Im Folgenden werde ich vor allem auf Gerberts Arbeiten zur praktischen Arithmetik eingehen. Sie hängen zusammen mit dem Schicksal der „echten“ Geometrie von Boethius. Hierüber gab es in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts heftige Diskussionen. Ihre Protagonisten waren Moritz Cantor und Nikolai Bubnov.

2. Die Ansichten von Moritz Cantor und Nikolai Bubnov

Jeder Mathematikhistoriker kennt Moritz Cantor (1829-1920) durch seine *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, deren ersten drei Bände zwischen 1880 und 1898 erschienen; weitere Auflagen und der 4. Band folgten bis 1908. M. Cantor hielt seit 1860 an der Universität Heidelberg Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Seit 1859 war er Mitherausgeber der

Zeitschrift für Mathematik und Physik und seit 1875 der *Historisch-literarischen Abtheilung* dieser Zeitschrift. 1877 gründete er die *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*.

Nikolai Bubnov (1858-1943) ist weit weniger bekannt als M. Cantor. Bubnov stammte aus Kiev. Er studierte Geschichte in St. Petersburg. 1882 fasste er den Plan, den Briefwechsel von Gerbert zu edieren. Aus diesem Grund untersuchte er Handschriften in verschiedenen europäischen Ländern (1883-85). Nach seiner Promotion (1891) wurde er Professor für alte und mittelalterliche Geschichte an der Universität Kiev. Er beschloss, alle mathematischen Schriften von Gerbert herauszugeben, und unternahm zu diesem Zweck weitere Bibliotheksreisen durch Europa (1894-98). Das Ergebnis war sein monumentales Werk *Gerberti opera mathematica* (Berlin 1899). Nach der Oktoberrevolution floh Bubnov aus Russland und ging in das „Königreich der Serben, Kroaten und Slowenen". Von 1920 bis zu seiner Emeritierung (1924) war er Professor für Geschichte an der Universität Ljubljana. Dort ist er 1943 gestorben. – Über Bubnov gibt es nur wenige biographische Arbeiten[1].

Bubnovs mathematikhistorisches Hauptwerk (*Gerberti opera mathematica* 1899) umfasst 740 Seiten und ist viel mehr als nur eine Ausgabe von Gerberts echten oder ihm zugeschriebenen Schriften. Diese nehmen nur 150 Seiten ein. Zu ihnen zählt auch Gerberts Arbeit über den Abakus. Noch wichtiger sind die sieben Anhänge (410 S.) und die ausführlichen Handschriftenbeschreibungen (120 S.). Für uns zentral sind zwei Komplexe: die Texte, die sich auf das Rechenbrett beziehen (Anhang 1), sowie die Boethius zugeschriebenen Geometrien und ihren Zusammenhang mit den Schriften der Agrimensoren (Anhang 7). Bubnov hat den Anhang 7 erst kurz vor dem Erscheinen des Buchs hinzugefügt und musste auf Grund neuer Handschriftenstudien manche früheren Aussagen revidieren.

Jetzt zu Cantors und Bubnovs Hauptthesen über die Entstehung unserer Ziffern. Man findet sie bei Cantor in den *Mathematischen Beiträgen zum Kulturleben der Völker* (1863). Cantor geht dort ausführlich auf die so genannte „Geometrie" des Boethius ein, die damals gerade von G. Friedlein ediert wurde[2]. Diese Fassung wird heute als „Geometrie II" bezeichnet. Sie enthält Auszüge aus Euklid, Exzerpte aus den Schriften der Agrimensoren und Abschnitte über das Rechnen auf dem Rechenbrett. Cantor hielt diese Schrift für ein echtes Werk des Boethius. Dort wird ein Rechenbrett beschrieben, auf dem angeblich die Pythagoreer gerechnet haben, und es bildliche Darstellungen, auf denen man „unsere" indisch-arabischen Ziffern sieht, zusammen mit speziellen Namen für die 10 Ziffern. Cantor folgerte daraus, dass die „arabischen" Ziffern in

[1] Die wichtigsten gedruckten Informationen findet man in Matviichine 1997 und in Brglez / Seljak 2007, S.80-82. Ausführliche Daten liefert die russische Wikipedia. Sehr wichtig ist seine Personalakte in der Universität Ljubljana.
[2] Cantor 1863, S.181-250. Edition der „Geometrie II": Friedlein 1867, S.372-428; Neuausgabe: Folkerts 1970, S.110-171.

Wirklichkeit aus der Antike stammen. Trotz mancher Kritik hat Cantor diese Meinung sein Leben lang vertreten, auch noch, allerdings in abgeschwächter Form, in der 3. Auflage seiner „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“[3].

Kommen wir jetzt zu Bubnov. Seine Hauptergebnisse kann man folgendermaßen zusammenfassen: Bubnov sorgte für Klarheit über die Überlieferungsgeschichte von Boethius‘ Euklid-Übersetzung. Er wies nach, dass Boethius zwar Euklids gesamtes Hauptwerk übersetzt hat, dass aber nur Teile davon erhalten sind. Die wichtigsten davon befinden sich in zwei Schriften, die Boethius zugeschrieben werden, aber nicht von ihm stammen: die „Geometrie I“ und die „Geometrie II“. Bubnov hat diese beiden Geometrien sehr deutlich voneinander unterschieden. Außerdem lieferte Bubnov erstmals klare Aussagen über Gerberts Abakus: Er präsentierte die zeitgenössischen Informationen über das Aussehen des Abakus und der darauf befindlichen Rechensteine, und er edierte Gerberts Schrift über den Abakus und weitere Abhandlungen, die in Gerberts Tradition stehen. Bis heute ist dies die Basis für alle ernsthaften Untersuchungen.

Trotzdem erfuhr Bubnovs Werk nicht die gebührende Aufmerksamkeit. Zwei Hauptgründe sind dafür verantwortlich: zum einen der Einfluss von Moritz Cantors *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, zum anderen die Tatsache, dass Bubnovs Werk komplett auf Latein geschrieben ist (auch Bubnovs Kommentare und sonstigen Bemerkungen). Dazu kommt noch, dass ein Leser ständig die „Corrigenda et addenda“ lesen muss, um die neuen Erkenntnisse zu berücksichtigen, die Bubnov im Anhang 7 präsentiert.

Bubnov hat noch eine Reihe weiterer Arbeiten über die Geschichte des Rechenbretts und die Entstehung unserer heutigen Ziffern veröffentlicht. Sie sind allesamt nach 1900 erschienen und fast ausschließlich in russischer Sprache[4]. In diesen Schriften versucht Bubnov zu beweisen, dass die grundlegenden Elemente unseres Zahlensystems schon in der klassischen Antike bekannt waren und dass sie daher auf die Griechen und nicht auf die Inder zurückgehen. Um seine Thesen zu begründen, verwendet Bubnov auch Ergebnisse seiner Forschungen über den Gerbertschen Abakus. Ein wichtiges Indiz für ihn sind die Namen der Ziffern auf Darstellungen des Gerbertschen Rechenbretts. Nach Bubnovs Ansicht deuten sie auf indogermanischen und nicht auf indischen Ursprung. Neuere Untersuchungen haben dies allerdings nicht bestätigt[5]. Auch andere Gründe sprechen gegen Bubnovs Theorien. So sind diese Arbeiten Bubnovs heute nicht mehr relevant, ganz im Gegensatz zu seinen *Gerberti opera mathematica*, in denen alle einschlä-

[3] Cantor 1907, S.580-590.
[4] Die Titel sind am Ende dieses Beitrags aufgelistet.
[5] Siehe hierzu Folkerts 2000.

gigen Quellen über den Gerbertschen Abakus und vieles mehr in zuverlässigen Editionen präsentiert werden.

Bubnov kannte allerdings einen wichtigen Text nicht, der Aufschluss darüber gibt, woher Gerberts Kenntnisse der indisch-arabischen Ziffern stammen. Erst dadurch werden die Zusammenhänge klar, so dass es jetzt möglich ist, die Frühgeschichte der indisch-arabischen Ziffern im westlichen Mittelalter und die Rolle, die Gerbert dabei spielte, zuverlässig darzustellen. Hierzu siehe die Darlegungen in Abschnitt 4.

3. Gerberts Rechenbrett: Texte und bildliche Darstellungen

Einige kurze Bemerkungen zu Gerberts Leben[6]: Er wurde vor 945 in Aurillac (Auvergne) geboren. Im Jahre 967 reiste er als Begleiter von Graf Borell in die Spanische Mark (Katalonien), also in das Grenzland zwischen dem arabischen und dem christlichen Bereich, das damals wieder für das Christentum zurückgewonnen worden war. Dort blieb Gerbert mehr als ein Jahr und lernte beim Bischof Hatto von Vich bisher unbekannte Schriften zum Quadrivium kennen. 972 begann Gerbert seine Lehrtätigkeit in Reims. Schon seit 971 stand er in Kontakt mit den ottonischen Kaisern und war später Lehrer und Berater von Otto III. 981 wurde er Abt von Bobbio, 999 Erzbischof von Ravenna, und von 999 bis zu seinem Tod (1003) war er Papst unter dem Namen „Sylvester II.“. Gerberts Aufenthalt in Katalonien, an der Nahtstelle zwischen der christlichen Welt nördlich der Pyrenäen und dem noch von den Arabern beherrschten restlichen Spanien, hat ihn geprägt. Wir wissen vor allem durch Gerberts Biograph Richer, dass Gerbert dort auch Kenntnisse erworben hat, die auf der Mathematik und Astronomie der Araber beruhen. Sie haben ihren Niederschlag gefunden in Gerberts Schriften über das Astrolab und über den Abakus. Hier interessieren uns nur seine Arbeiten zum Abakus.

Richer berichtet, dass Gerberts Rechenbrett aus 27 Spalten bestand. Auf sie legte er Figuren aus Horn, auf denen die neun Zahlzeichen aufgetragen wurden. Mit ihrer Hilfe konnten alle Zahlen dargestellt werden, und man konnte Multiplikationen und Divisionen leicht ausführen. Richer verweist auf Gerberts Schrift an Constantinus, in der alles ausführlich erklärt werde. Diese Schrift ist erhalten und von Bubnov ediert worden[7]. Sie ist für den Leser aber nicht sehr erhellend, denn nach einer kurzen Einleitung folgt nur eine Liste von Regeln über die Multiplikation von mehrstelligen Zahlen, genauer gesagt: über die Spalten auf dem Abakus, in die die Einer und die Zehner des Produkts gelegt werden müssen.

---

[6] Näheres in Lindgren 1976.
[7] *Gerberti opera mathematica,* S.6-22.

Es gibt mehrere Abbildungen des „Gerbertschen Abakus“ in Handschriften aus dem Ende des 10. und aus dem 11. Jahrhundert[8]. Nur eine Darstellung ist bekannt, die 27 Spalten enthält[9]. Dort sind jeweils drei Spalten durch Bögen zusammengefasst mit der Überschrift *M(onas)*, *D(ecem)* und *C(entum)*. Hier und auf anderen Darstellungen steht der Vers „Gerbertus Latio numeros abacique figuras“ („Gerbert hat der lateinischen Welt die Zahlen und die Figuren auf dem Abakus gegeben“). Oft findet man auch die Zahlzeichen (*notae*), die Gerbert (nach Richers Aussagen) auf zylinderförmige Steinchen aus Horn auftragen ließ. Sie haben große Ähnlichkeit mit den westarabischen Zahlzeichen, die im 10. Jahrhundert in Nordafrika und in Spanien benutzt wurden. Diese Zeichen werden in den Abhandlungen über den Abakus *apices* genannt, weil sie oben auf den Zahlsteinen aufgetragen wurden. Die Zahlzeichen hatten in diesen Schriften spezielle Namen, über deren Ursprünge es verschiedene Hypothesen gibt[10].

Das Prinzip des Gerbertschen Rechenbretts besteht also darin, dass jeweils nur ein Zahlstein in eine Spalte gelegt wird. Eine Null braucht man nicht, weil in solchen Fällen die Spalte leer bleibt. Zwar gibt es einen speziellen Stein mit einem Zeichen, das wie eine Null aussieht, aber dies ist ein Merkstein, durch den angegeben wird, in welcher Stelle gerade gerechnet wird.

Das Rechnen auf diesem Abakus ist ziemlich unpraktisch. Anders als bei dem üblichen Rechenbrett mit nicht markierten Steinen, kann man nicht 10 (bzw. 5) Steine verschieben und durch einen Stein in den nächsten Zwischenraum (bzw. auf die nächste Linie) legen, sondern man muss ständig einen benannten Stein durch einen Stein mit einer anderen Benennung ersetzen, nachdem man zuvor die Summe bzw. das Produkt der beiden Zahlen im Kopf bestimmt hat; für Multiplikationen benötigt man zusätzlich das kleine Einmaleins und die Stellenregel. Somit war der Gerbertsche Abakus für das Rechnen wenig geeignet. Vielmehr war er ein didaktisches Mittel, um den Umgang mit Zahlen zu erlernen.

4. Gerberts Quellen

Es bleibt die Frage, auf welchen Quellen Gerberts Darstellung beruht. Man liest in der Literatur nur allgemein, dass Gerbert sein Wissen vermutlich bei seinem Aufenthalt in der Spanischen Mark, also 967 oder 968, erworben hat. Ich kann aber viel konkretere Angaben machen: Es gibt nämlich zwei Handschriften, die Bubnov nicht kannte. Sie wurden 976 bzw. 992 geschrieben und stammen aus Albelda in der Provinz Huesca, die westlich an Katalonien grenzt. Dies sind der „Codex Vigilanus“, heute Escorial, d.I.2, und der „Codex Emilianus“, heute Esco-

[8] Siehe hierzu Folkerts 2001.
[9] In der Handschrift Bern 250. Abbildung in Folkerts 2001, Fig. 4.
[10] Siehe hierzu Folkerts 2000.

rial, d.I.1. Beide enthalten auch drei kurze mathematische Texte: eine Multiplikationsliste (die Vielfachen der Einer und die Quadrate der Zehner); die Stellenregeln für Multiplikationen von Einern, Zehnern, Hundertern und Tausendern; schließlich einen interessanten kurzen Text über die Zahlendarstellung der Inder[11]. Hier findet man das älteste bekannte Bild der indischen Ziffern im Westen, zusammen mit der Angabe, dass die Inder mit diesen „Ziffern“ jede Zahl darstellen konnten. Der Text über die Stellenregeln bei Multiplikationen ist im Wesentlichen identisch mit den Regeln, die man in Gerberts Schrift über den Abakus findet. Diese wichtige Tatsache ist bisher nicht bemerkt worden.

Hieraus kann man folgende gesicherte Schlüsse ziehen: Gerbert hat bei seinem Aufenthalt in der Spanischen Mark, also 967 oder 968, eine heute verlorene Handschrift (**X**) gesehen, die dieselben mathematischen Texte wie der Vigilanus und der Emilianus enthielt. Aus dieser Handschrift **X** kannte er die indischen Ziffern in der westarabischen Form, d.h. in der Form, die auch im arabischen Spanien benutzt wurde, und ebenfalls die Stellenregeln für die Multiplikation. Diese Ziffern hat er später auf runde Steine aufgetragen und sie für das Rechnen auf seinem Abakus benutzt. Gerberts Schrift über den Abakus beruht auf den Rechenregeln, die er ebenfalls in **X** gefunden hat und die in gleicher Formulierung in den Codices Vigilanus und Emilianus stehen. Somit besteht jetzt Klarheit über die Quellen von Gerberts Abakus: Die Formen der „indisch-arabischen Ziffern“ hat er in der Handschrift **X** gefunden und ebenso die Stellenregeln für die Multiplikation, die er dann in erweiterter Form in seiner Schrift über den Abakus präsentierte. Das Rechenbrett mit Spalten, die die verschiedenen Zehnerpotenzen darstellen und in die man runde Rechensteine legte, war seit der Antike bekannt. Neu ist allerdings Gerberts Idee, verschiedenartige Rechensteine zu benutzen, auf denen die „Ziffern“ aufgetragen waren.

Werner Bergmann hat sich in seinem lesenswerten Buch „Innovationen im Quadrivium des 10. und 11. Jahrhunderts“ auch ausführlich mit der Einführung des Abakus im lateinischen Mittelalter und mit der Rolle, die Gerbert dabei spielte, beschäftigt[12]. Er konnte überzeugend nachweisen, dass zur Zeit von Gerbert auch Rechenbretter mit Steinchen, die gewisse Zeichen trugen (z.B. Buchstaben des griechischen Alphabets), benutzt wurden. Bergmann beharrt aber darauf, dass Gerbert keinen Abakus mit Steinen, auf denen die arabischen Ziffern aufgetragen waren, gebraucht hat, sondern dass dies erst in der ersten Hälfte des 11. Jahrhunderts geschehen ist. Zwar wusste Bergmann, dass im Codex Vigilanus die indisch-arabischen Ziffernformen vorhanden sind, aber er hat nicht bemerkt, dass dort unmittelbar davor die Stellenregeln für das Multiplizieren auf dem Abakus stehen, die praktisch wörtlich mit Gerberts Abakustraktat über-

[11] Faksimiles der relevanten Teile aus beiden Handschriften findet man in Burnam 1920, S.90-96.
[12] Bergmann 1985, S. 175-215.

einstimmen. Dies erlaubt nur den Schluss, dass Gerbert die Ziffernformen aus dem Text seiner Handschrift **X** kannte und sie auf seinem Abakus benutzt hat. Diese Interpretation wird durch die Tatsache gestützt, dass sich schon wenige Jahre nach Gerberts Tod Abbildungen eines Abakus mit den „neuen“ Ziffern finden mit dem Hinweis, dass Gerbert diese *figurae* in die lateinische Welt eingeführt hat.

5. Epilog

Was geschah nach Gerbert? Sein Abakus und seine Schrift darüber waren schon zu seinen Lebzeiten in verschiedenen Klöstern bekannt. Er selbst hat sie im Unterricht in Reims benutzt. Andere Gelehrte haben Gerberts Abakus übernommen und seine Schrift über das Rechnen auf ihm weiterentwickelt. Die frühesten Autoren waren Abbo und Bernelinus. Um 1040 fügte ein Kompilator aus Lothringen einen Abschnitt über den Gerbertschen Abakus in die so genannte „Geometrie II“ ein, die er Boethius zuschrieb. Weil Moritz Cantor an die Echtheit dieser Schrift glaubte, kam er zu falschen Ergebnissen über die historische Entwicklung. Anders als Cantor, hat Bubnov die Grundlage der Textüberlieferung korrekt dargestellt. Er glaubte aber fälschlich an den griechischen Ursprung von Gerberts Abakus. Weil Bubnov die beiden Handschriften aus dem Escorial (Codex Vigilanus und Codex Emilianus) nicht kannte, blieb ihm der wahre Ursprung verborgen.

Im 11. Jahrhundert beschäftigten sich zahlreiche Gelehrte mit dem Rechnen auf dem Abakus. Für die Division benutzten sie verschiedene Methoden, die sie die „eiserne“ und die „goldene“ Division nannten. Eine Reihe von Schriften über dieses Thema sind erhalten. Die vermutlich späteste Abhandlung verfasste um 1120 Adelard von Bath. Danach geriet Gerberts Abakus in Vergessenheit. Das unpraktische Rechnen auf ihm wurde abgelöst durch die viel bequemeren schriftlichen Rechenmethoden der Araber, die durch lateinische Übersetzungen schnell weithin bekannt wurden. Durch sie bürgerten sich die indisch-arabischen Ziffern dauerhaft im Abendland ein, jetzt aber nicht mehr für das Rechnen auf dem Rechenbrett, sondern für das schriftliche Rechnen. So ist der Gerbertsche Abakus eine – historisch interessante – Episode geblieben.

Bubnovs Schriften zur Mathematikgeschichte[13]:

1888-90	*Über Gerberts Briefe und ihre historische Bedeutung* (russ.)
1899	*Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972-1003)* (lat.)
1905-10	*The authentic writing of Gerbert on the abacus, or the system of elementary arithmetic of Classical Antiquity* (russ.)
1907-12	*The Abacus and Boethius. A Lotharingian falsification of the 11th century* (russ.)
1908/14	*Arithmetische Selbstständigkeit* [!] *der europäischen Kultur. Ein Beitrag zur Kulturgeschichte* (russ. und dt.)
1912	*The abacus – cradle of our present arithmetic* (russ.)
1913	*The origin of the present method of representing numbers* (russ.)
1916	*The forgotten arithmetic of Classical Antiquity* (russ.)
1925	*Über den Ursprung der heutigen Zahlendarstellung* (kroat.)

Literatur

Bergmann, Werner: *Innovationen im Quadrivium des 10. und 11. Jahrhunderts*. Stuttgart 1985.

Brglez, Alja; Seljak, Matej: *Ruski profesorji na Univerzi v Ljublani*. Ljubljana 2007, S. 80-82.

Burnam, John M.: *Palaeographia Iberica*, Bd. 2. Paris 1920.

Cantor, Moritz: *Mathematische Beiträgen zum Kulturleben der Völker*. Halle 1863.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 1. Band, 3. Auflage. Leipzig 1907.

Folkerts, Menso: *„Boethius" Geometrie II. Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*. Wiesbaden 1970.

Folkerts, Menso: *Frühe westliche Benennungen der indisch-arabischen Ziffern und ihr Vorkommen*. In: M. Folkerts, R. Lorch (Hrsg.): *Sic itur ad astra. Studien zur Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften. Festschrift für den Arabisten Paul Kunitzsch zum 70. Geburtstag*. Wiesbaden 2000, S. 216-233.

Folkerts, Menso: *The names and forms of the numerals on the abacus in the Gerbert tradition*. In: Flavio G. Nuvolone (Hrsg.): *Gerberto d'Aurillac da Abate di Bobbio a Papa dell'Anno 1000*. Bobbio, Pesaro 2001, S.245-265. (Nachdruck in: Folkerts, M.: *Essays on Early Medieval Mathematics. The Latin Tradition*. Aldershot 2003, Nr. VI.)

Friedlein, Gottfried (Hrsg.): *Anicii Manlii Torquati Severini Boetii De institutione arithmetica libri duo, De institutione musica libri quinque. Accedit geometria quae fertur Boetii.* Leipzig 1867.

Lattin, Harriet Pratt: *The origin of our present system of notation according to the theories of Nicholas Bubnov*. In: Isis 19 (1933), S. 181-194.

Lindgren, Uta: *Gerbert von Aurillac und das Quadrivium. Untersuchungen zur Bildung im Zeitalter der Ottonen.* Wiesbaden 1976.

Matviichine, Iaroslav: *Nicolas Boubnov commentateur de Gerbert: une édition non réalisée.* In: Gerbert l'Européen. Actes du colloque d'Aurillac 4–7 juin 1996. Aurillac 1997, S. 347-361.

[13] Die russischen und kroatischen Titel in englischer bzw. deutscher Übersetzung.

Melchior Jöstels *Logistica προσθαφαιρεσις Astronomica* […] - Erste Einblicke in eine bislang vernachlässigte Wittenberger Handschrift

THOMAS KROHN & SILVIA SCHÖNEBURG-LEHNERT

Der folgende Beitrag soll in Kürze die wissenschaftlichen Leistungen des Wittenberger Mathematikers Melchior Jöstel (1559–1611) zur Prostaphärese in den Blickpunkt rücken, indem erstmals die ursprüngliche Handschrift Jöstels zu dieser Thematik einer beginnenden Analyse unterzogen wird.[1] Dabei werden nach einem Exkurs zur Rechenmethode der Prostaphärese in der Frühen Neuzeit besonders der Aufbau und zentrale Charakteristika des Manuskripts von Jöstel im Mittelpunkt stehen, sowie am Ende darauf aufbauende weiterführende Forschungsansätze aufgezeigt.

The following article will shortly focus on the scientific contribution of the Wittenberg mathematician Melchior Jöstel (1559–1611) to prostapheresis, in that the original manuscript of Jöstel on this topic can be subjected to an incipient analysis for the first time. After an excursion to the calculation method of prostapheresis in the early modern period, the structure and central characteristics of Jöstel's manuscript will be the focus, as well as further research approaches based on it at the end.

1. Die Prostaphärese – eine fast vergessene frühneuzeitliche mathematische Methode zur Erleichterung zeitintensiver Berechnungen

> „*Jeder der göttlichen Mathematik oder wenigstens einigermaßen Kundige weiß sehr wohl, wie groß die Vortrefflichkeit der Dreieckslehre* […] *für die übrigen Teile jener unbesiegbaren Geometrie ist und wie groß der Nutzen eben dieser bei geographischen und astronomischen Angelegenheiten ist*.“[2]

Mit der Erfindung des Logarithmus zu Beginn des 17. Jahrhunderts durch John Napier (1550–1617) und Jost Bürgi (1552–1632) und dessen Verbreitung in der Gelehrtenwelt Europas gab es in der Mathematik eine effiziente Möglichkeit, aufwendige multiplikative Berechnungen – welche es vielfach etwa in den angewandten Wissenschaftsdisziplinen Astronomie oder Geographie gab – auf die einfacher handhabbare Addition zurückzuführen. Ein Verfahren, welches ganz praktisch bis zu den Rechenschiebern des 20. Jahrhunderts in Verwendung war. Dass allerdings bereits zuvor mit der Prostaphärese über viele Jahrzehnte ein effektives Rechenverfahren zur Umgehung der Multiplikation auf der Basis trigonometrischer Zusammenhänge existierte, ist in der heutigen mathematikhistorischen Forschung ein immer nur in sporadischen Abständen thematisierter Problembereich und zudem weitgehend in Vergessenheit geraten, sodass bis heute eine abschließende Aufarbeitung nicht stattgefunden hat.[3]

---

1 Vgl. hierzu V. BRAUNMÜHL 1899, S. 22ff. Diese Ausführungen basieren jedoch auf einer in Wien aufbewahrten Abschrift des Originals, welche sich (siehe Abschnitt 2) vom Original unterscheidet.

2 JÖSTEL 1599, Vorwort (Übersetzung aus dem Lateinischen).

3 Es sollen an dieser Stelle die Leistungen vor allem Anton v. Braunmühls für die detaillierten Untersuchungen zur Genese der Trigonometrie im Allgemeinen (V. BRAUNMÜHL 1900) und im Speziellen zur Einordnung der Prostaphärese (V. BRAUNMÜHL 1899) erwähnt werden.
Untersuchungen aus neuerer Zeit liefern THOREN 1988 hinsichtlich der Leistungen von Paul Wittich (um 1546–1586) sowie KÜHN/MCCARTHY 2012 hinsichtlich des maßgeblichen Beitrags von Johannes Werner (1468–1528) zur Entwicklung der prostaphärischen Methode.

Die Prostaphärese, wörtlich das „Hinzufügen und Wegnehmen“, lässt sich in heutiger Schreibweise unter Anwendung trigonometrischer Sätze der Ebene (und analog auf der Kugeloberfläche) durch zwei kurze fundamentale Gleichungen für zwei Winkel α und β derart darstellen:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \text{ und } \cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)],$$

wobei im Detail von verschiedenen Gelehrten feine Unterschiede in der exakten Formulierung existierten, beispielsweise der Ersetzung des Cosinus durch den Sinus und umgekehrt.[4] Im Sprachgebrauch der Frühen Neuzeit hingegen hatte die Prostaphärese den Charakter eines mehrschrittig-abzuarbeitenden Algorithmus': Nimm die Summe und die Differenz zweier Winkel, bilde den jeweiligen Sinus, addiere diese und nimm die Hälfte. Die Hin- und Rückübersetzung der trigonometrischen Werte der Winkel ins Gradmaß geschah mittels ausführlicher Sinustafeln.[5]

Die Entdeckung der Prostaphärese wird nach aktuellen Erkenntnissen Johannes Werner zugeschrieben, welcher um 1510[6] den trigonometrischen Zusammenhang für das Produkt zweier Sinusse entdeckte. Ob Werner das große Potenzial seiner Entdeckung bewusst war, kann nicht abschließend geklärt werden,[7] zumindest gab es zu Lebzeiten Werners keinen Druck seiner Erkenntnisse und das Wissen geriet in Vergessenheit, bis um 1580 Tycho Brahe (1546–1601) und Paul Wittich den vorteilhaften Einsatz dieser Methode vor allem für die Belange der rechnenden Astronomie wiederentdeckten, zum endgültigen Durchbruch verhalfen und die Methode eng mit ihren Namen verbunden blieb.[8] Auch nach Bekanntwerden der Logarithmen blieben die prostaphärischen Rechnungen unter den Mathematikern Europas noch bis in die Mitte des 17. Jahrhunderts in Verwendung, erfuhren verschiedene Systematisierungen und Erweiterungen[9] ohne jedoch den grundlegenden oben angeführten Zusammenhang zu verlieren.

In diese Entwicklung reiht sich auch die hier untersuchte Handschrift *Logistica προσθαφαιρεσις Astronomica. Triangula Sphaerica tum Rectangula tum Obliquangula. Triangula Rectilinea* von Melchior Jöstel – Professor für höhere Mathematik an der Universität Wittenberg von 1595 bis 1611 – aus dem Jahr 1599 ein, welche in zwei Versionen erhalten geblieben ist. Das vermutliche Original[10] befindet sich in der Sächsischen Landes- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB), während eine noch undatierte Abschrift[11] in der Österreichischen Nationalbibliothek in Wien existiert.[12]

---

4 Vgl. etwa die Analyse der Herkunft der gefundenen Zusammenhänge von Werner im Vergleich zu denen von Tycho Brahe und Paul Wittich in KÜHN/MCCARTHY 2012, S. 16ff.

5 Vgl. hierzu ausführlich die Nachzeichnung der Genese der Trigonometrie in V. BRAUNMÜHL 1900.

6 Vgl. THOREN 1988, S. 32. KÜHN/MCCARTHY 2012, S. 9 nennen die Zeit „nach 1505“.

7 Vgl. KÜHN/MCCARTHY 2012, S. 9–10.

8 Die Nachzeichnung des möglichen Weges der Erkenntnisse von Werner zu Brahe findet sich in KÜHN/MCCARTHY 2012, S. 7–13.

9 Etwa 1593 durch Christopher Clavius (1538–1612) in dessen *Astrolabium*, 1622 durch Christian Severin Longomontanus (1562–1647) in dessen *Astronomica Danica* oder 1634 durch Georg Ludwig Frobenius (1566–1645) in dessen *Clavis universae trigonometriae*.

10 Signatur Mscr.Dresd.C.82.
Basierend auf ersten Vergleichen der Handschriften mit sonstigen erhaltenen handgeschriebenen Dokumenten Jöstels, etwa die Vorlesung *Lectiones in Trigonometriam Pitisci* von 1597. Ein fundiertes graphologisches Gutachten steht bislang aus.

11 Signatur Cod. Palat. 10869 Nr. 67.
Dass dieses Manuskript wahrscheinlich nicht von Jöstel verfasst wurde, lässt sich aufgrund der deutlich abweichenden Handschrift vermuten.

12 Von einer weiteren Abschrift, an deren Ende „*Descripta haec sunt ex ipsius Iöstelii Manuscripto* […]“ geschrieben steht und welche sich daher sowohl von der Dresdner als auch von der Wiener Handschrift unterscheidet, berichtete SCHEIBEL 1775ff., S. 19, dass es diese in Breslau in seinem Besitz hätte. Dieses Manuskript konnte trotz umfangreicher Recherche nicht mehr aufgefunden werden.

2. Aufbau und Charakteristiken des Manuskripts *Logistica προσϑαφαιρεσις Astronomica* […] von 1599

Ein Vergleich beider erhaltener Handschriften zeigt, dass sie vom Aufbau, der Ausführlichkeit und Reihenfolge der Darlegungen identisch sind. Unterschiede gibt es neben der unterschiedlichen Schrift in beiden Dokumenten hinsichtlich des Vorworts, welches der Wiener Abschrift fehlt.[13]

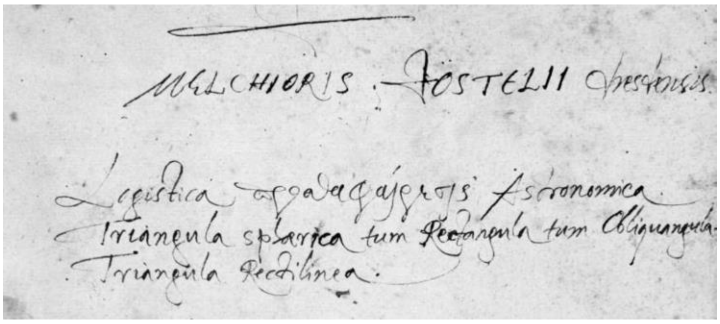


Abb.1 Titel des Manuskripts Mscr.Dresd.C.82

In seinem Vorwort[14], datiert auf den 15.06.1599, hebt Jöstel insbesondere die Bedeutsamkeit der Trigonometrie und den außerordentlichen Nutzen der prostaphärischen Rechenmethode hervor und positioniert sich deutlich zu Brahe als Erfinder der Prostaphärese, die Jöstel selbst dann im Jahr 1593 durch den Mathematiker Longomontanus kennenlernte.[15] Schließlich verfasste er auf Verlangen der Studierenden und auf Anraten Tycho Brahes, seine *Logistica προσϑαφαιρεσις Astronomica* […]. Bei der Aufbereitung der prostaphärischen Methode sei er sorgfältig vorgegangen und habe selbst Erweiterungen vorgenommen. So ergänzte Jöstel die Prostaphärese seiner Aussage nach beispielsweise um die dritte Regel[16] und fügte seinen Aufzeichnungen zahlreiche Rechenbeispiele, mit anschaulichen, geometrischen Herleitungen versehen, hinzu.

Sich an dieses Vorwort anschließend besteht der Hauptteil aus zwei grundlegenden Abschnitten. Abschnitt 1[17], als eigentliche *Logistica προσϑαφαιρεσις Astronomica* beschrieben, umfasst 16 Folio-Seiten und beschreibt die grundlegenden „prosthaphärischen Formeln". Dabei unterscheidet Jöstel in drei Regeln hinsichtlich des Auftretens des wichtigen Sinus totus insgesamt 12 Fälle[18]:

- Regel I sin tot an erster Stelle einer Proportion

  sin tot : a = b : c

13 Lediglich jene hatte v. Braunmühl 1899 zur Verfügung, weshalb das Vorwort bislang unbekannt war.

14 Vgl. das Vorwort in Jöstel 1599, Bl. 1.

15 Tycho Brahe verband seit den Aufenthalten in Wittenberg in den 1570er Jahren und Kontakten zu den Mathematikern Wolfgang Schuler und Johannes Praetorius (vgl. Krohn 2014, S. 93–94) auch später eine wiederholte wissenschaftliche Beziehung zur dortigen Universität, wie sich aus Briefen an Melchior Jöstel (vgl. Brahe 1600, G I 35: Bl. 81, G I 35: Bl. 139–140, G I 35: Bl. 151 u. G I 35: Bl. 165–166) oder auch der Empfehlung Jöstels, seinen Schüler und späteren Professor für höhere Mathematik Ambrosius Rhodius als mathematischen Assistenten zu Brahe nach Prag zu senden (Schöneburg 2007, S. 67–69), hervorgeht.

16 Ob Jöstel tatsächlich der erste war, welcher die dritte Regel (die Berechnung mittels eines Hilfswinkels, falls in der Proportion kein Sinus totus vorkommt) einführte, kann im Rahmen dieser ersten Analyse der Handschrift noch nicht mit Sicherheit gesagt werden.

17 Vgl. Jöstel 1599, Bl. 1–S. 17.

18 Die unter heutigen Gesichtspunkten große Vielfalt der Fallunterscheidungen liegt auch darin begründet, dass die trigonometrischen Werte in der Regel nur zwischen 0 und 90° tabelliert waren, sodass die Algorithmen jeweils entsprechend angepasst werden mussten, um diesen Bereich möglichst nicht zu verlassen.

- Regel II sin tot an 2./3. Stelle einer Proportion
  a : sin tot = b : c oder a : b = sin tot : c
- Regel III kein sin tot vorhanden.

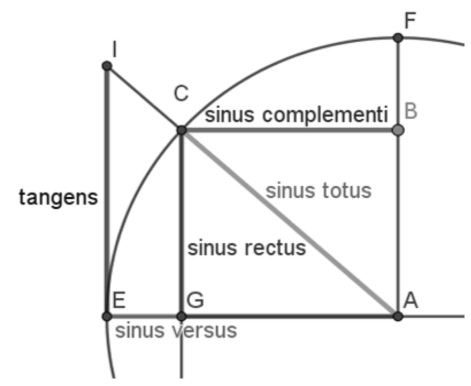


Abb. 2 Begriffe am Einheitskreis

In diesen Proportionen sind jeweils drei Werte bekannt (sin tot, a und b), aus denen der unbekannte Wert c ermittelt werden soll.

Da die Sinuswerte wie damals üblich als natürliche Zahlen dargestellt werden, wird der Sinus totus als eine entsprechende Zehnerpotenz definiert. Im Fall der *Logistica προσθαφαιρεσις Astronomica* liegt Jöstels Berechnungen ein Sinus totus von 100.000 zu Grunde.

Sämtliche von Jöstel unterschiedene Fälle sind jeweils nach der gleichen Struktur aufgebaut (vgl. auch Abb. 3): Nach der Nennung des jeweiligen Falls wird ein relevantes astronomisches Beispiel mit konkreten Zahlenwerten gegeben und vorgerechnet, bevor es dann mithilfe einer geometrischen Zeichnung zur Herleitung der jeweiligen Regel kommt.

Abschnitt 2[19] – überschrieben mit *Triangula Astronomica tum Spaerica, tum Rectilinea* – beinhaltet auf 39 Seiten die Anwendung der Prostaphärese auf die Kugeloberfläche in insgesamt 16 Fällen, unterteilt auf rechtwinklige (6 Fälle) und schiefwinklige (10 Fälle) Dreiecke. Auch hier werden sowohl geometrisch die grundlegenden Sätze der Dreieckslehre hergeleitet als auch am Beispiel numerisch illustriert.

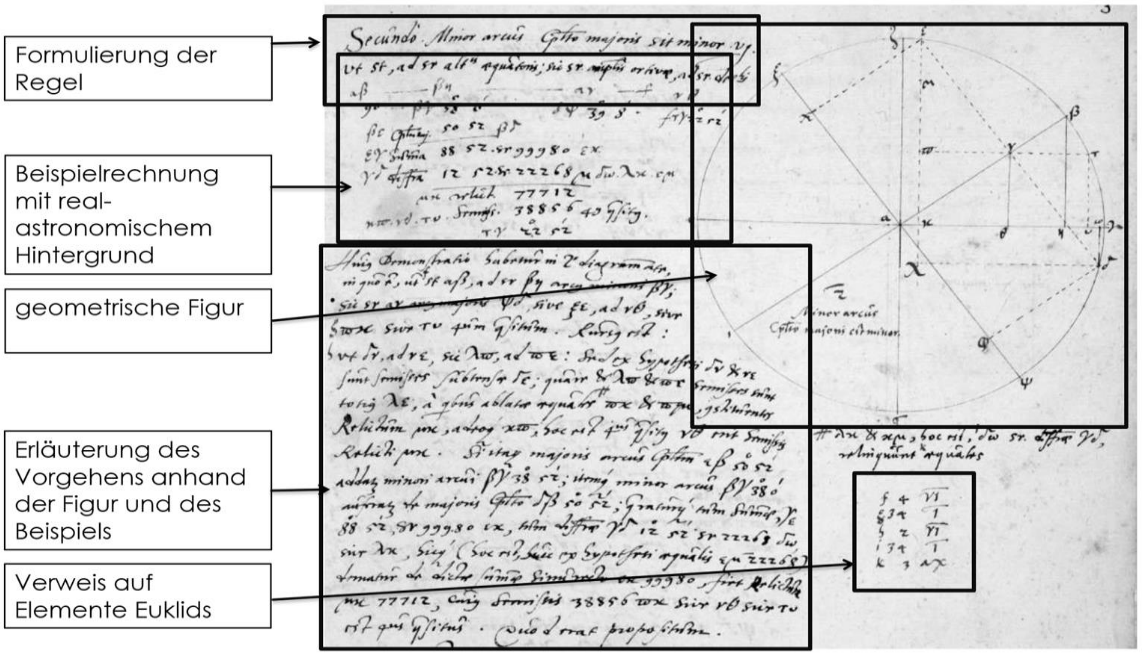


Abb. 3 Beispielhafter Aufbau eines Unterfalls, hier Regel 1, 2. Fall
(„Wenn der kleinere Bogen kleiner als das Komplement des größeren ist.“)

[19] Vgl. JÖSTEL 1599, S. 19–57.

Stellvertretend am 2. Fall der Regel I des 1. Hauptteils soll das Vorgehen Jöstels dargestellt werden:[20]

Der Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die nebenstehend geometrische Konstruktion, auf der die beiden relevanten Kreisbögen a und b zu sehen sind für die gilt: „*Wenn der kleinere Bogen kleiner als das Komplement des größeren ist*.“[21] Die geltenden Zusammenhänge der Strecken und Bögen beschreibt Jöstel nun ausführlich als Fließtext.[22] Zentral stehe die Proportion

$\alpha\beta : \beta\eta$ wie $\alpha\nu : \nu\theta$,

wobei gelte, dass mit

$\alpha\beta = st$

$\beta\eta = sr\ arc\ \beta\gamma$

$\alpha\nu = \delta\phi = sr\ arc\ \psi\delta = sr\ arc\ \varepsilon\zeta$

$\nu\theta = \tau\upsilon = sr\ arc\ \tau\gamma$,

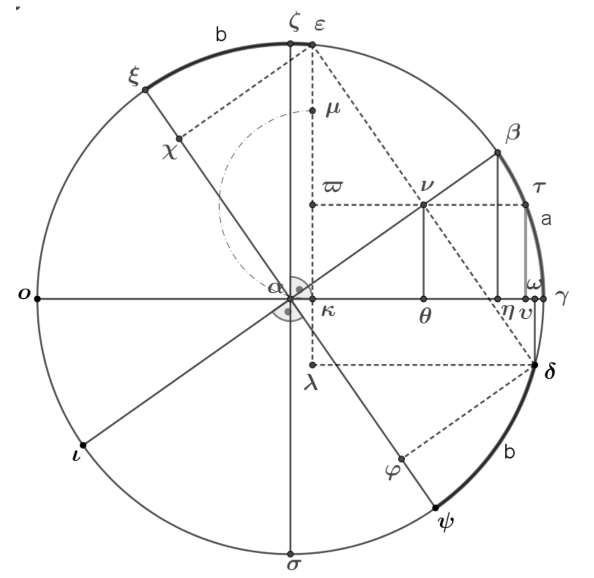


Abb. 4 Konstruktion Jöstels zur geometrischen Herleitung der Regel I.2

sodass dann die Proportion geschrieben werden könne als

$st :\ sr\ arc\ \beta\gamma = sr\ arc\ \psi\delta : sr\ arc\ \tau\gamma$.

Es seien *st*, *sr arc βγ* und *sr arc ψδ* bekannte Werte und *sr arc τγ* zu bestimmen.

Der Ansatzpunkt der Prostaphärese (die eigentliche Multiplikation, welche es zu umgehen gilt) wird in heutiger Schreibweise erkennbar, wenn die Gleichung nach dem gesuchten sin $\tau\gamma$ umgestellt wird:

$$\frac{1}{\sin a} = \frac{\sin b}{\sin \tau\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\tau\gamma = \sin a \cdot \sin b$$

Der bislang rein formalen Proportion gibt Jöstel nun mittels eines real-existierenden astronomischen Hintergrundes eine größere Anschaulichkeit:

„*Ut st, ad sr altitudinis aequatoris, sic sr amplitudinis ortivae, ad sr declinationis*.“

Dabei sind

- altitudinis aequatoris = Höhe des Äquators über dem Horizont (bekannt bzw. messbar) und
- amplitudinis ortivae = Entfernung des Aufgangspunktes eines Objekts von Osten („Morgenweite“, messbar),

woraus sich die unbekannte declinatio = Deklination des Objekts berechnen lässt.[23]

[20] Vgl. hierzu Jöstel 1599, S. 3.
[21] Das bedeutet, dass die Summe der beiden Winkel kleiner als 90° ist.
[22] Die Entstehung der Konstruktion wird von Jöstel nicht erläutert, auch nicht, warum die Gesetzmäßigkeiten (Abstände, Orthogonalität usw.) genau so gewählt wurden. Dies deutet darauf hin, dass ein trigonometrisches Grundverständnis des Adressaten vorausgesetzt wurde.
[23] Auch an dieser Stelle wird von Jöstel weder erklärt, warum die beschriebene astronomische Situation sich in dieser Regel II.2 widerspielt, noch hintergründig erläutert, wie die ursprünglich sphärischen Zusammenhänge in dieser Art in die Ebene projiziert werden und weiterhin gültig sind.

Das schrittweise Vorgehen im „Prostaphärese-Algortihmus“ veranschaulicht Jöstel durch eine tabellarische Darstellung und nutzt für die Rechnung exemplarisch fiktiv gegebene, aber real mögliche Werte seines vorher genannten astronomischen Zusammenhangs: *βγ* (=38°) ist der gemessener Abstand eines infragekommenden Objekts von Osten zur Zeit des Aufgehens und *δψ* (=39,8°) das Komplement der geographischen Breite Wittenbergs zu 90°.

αβ zu βη wie αν zu νθ

βγ = 38°0‘ — <u>Lösung:</u> τγ = 22°52‘
δψ = 39°8‘
Sinus Totus = αβ ≙ Sinus Rectus von 90°

βε, βδ	Komplement des größeren Bogens	50°52‘				
εγ	Summe	88°52‘	→	*Sinus Rectus*	99980	εκ
γδ	Differenz	12°52‘	→	*Sinus Rectus*	22268	δω, λκ, εμ
			μκ	das Übriggelassene	77712	
			κϖ, νθ, τυ	dessen Hälfte	38856	der gesuchte Winkel
				τγ	<u>22°25‘</u>	

Auf diese Weise gelingt es Jöstel, sowohl die Entstehung eines konkreten Prostaphärese-Falls geometrisch zu begründen, die Notwendigkeit der Fallunterscheidung durch ein reales astronomisches Beispiel zu untermauern und schließlich den Algorithmus der Prostaphärese schrittweise übersichtlich darzulegen. Letztendlich entsteht insgesamt eine übersichtliche Anleitung, wie in jeder denkbaren Situation vorzugehen ist.

3. *Logistica προσϑαφαιρεσις Astronomica* […]: erstes Fazit und Ausblick

Folgende wichtige Charakteristika der Manuskripts *Logistica προσϑαφαιρεσις Astronomica* […] lassen sich zusammenfassend durch diese erste Analyse herausstellen:

1. Es handelt sich um eine sehr ausführliche, vielleicht die ausführlichste Erläuterung der ebenen Grundlagen und der sphärischen Fälle, inklusive der Sonderfälle (z. B. Gleichheit der Winkel, Summe der Winkel = 90°).[24] Die Teilabschnitte sind klar gegliedert und zu Beginn einer Regel werden die Fallunterscheidungen zur Zielorientierung in einem übersichtlichen Schema dargestellt.
2. Jöstel verwendet in seinen Darlegungen konsequent den Sinus: Als Sinus totus und Sinus rectus, was eine gute Vergleichbarkeit und Verwandtschaften innerhalb der Fälle ermöglicht, aber etwa zur Formulierung der Cosinussätze[25] für sphärische Dreiecke jeweils eine Folio-Seite benötigt.

Im konkreten Fall handelt es sich beim Zusammenhang „Sin tot : Höhe des Äquators = Morgenweite : Deklination“ um die Transformation der Koordinaten eines Objekts an der Sphäre aus dem Horizontystems in das rotierende Äquatorsystem, in dem Spezialfall des Aufgangs des Objekts, da die Höhe h = 0° ist und damit das Azimut der Morgenweite entspricht.

24 Es handele sich um die „*vollkommenste Durcharbeitung der Anwendung der Prosthaphärese* […], *die damals geleistet wurde*“, so urteilt V. BRAUNMÜHL 1899, S. 28 nach einer ersten Sichtung der Wiener Abschrift.

25 Vgl. JÖSTEL 1599, S. 36 und S. 40.

3. Es wird durchgängig eine symbolischen Kurzschreibweise als *sr* und *st* für Sinus rectus und Sinus totus verwendet.
4. Sämtliche Herleitungen werden mittels akkurater geometrischer Figuren veranschaulicht, wichtige benötigte geometrische Grundlagen werden durch Verweis auf die Elemente Euklids abgesichert.
5. Zu jedem Fall werden erklärende Beispiele mit real-astronomischem Hintergrund gegeben, was den Nutzen der Prostaphärese für die angewandte Mathematik stets verdeutlicht.

Trotz allem handelt es sich bislang nur um eine beginnende Untersuchung des Manuskripts von Jöstel, sodass als mögliche Ansatzpunkte für weiterführende Untersuchungen mehrere Blickrichtungen bleiben, welche das sich bereits jetzt abzeichnende Bild der Handschrift Jöstels als bedeutendes zeitgenössisches Dokument innerhalb der Entwicklung und Nutzung der prostaphärischen Methode weiter fundieren können.

Eine zentrale Frage, die nach dem möglichen Adressatenkreis, kann bislang nur vermutet werden. Die Art der Strukturierung, Ausführlichkeit und Beispiele, aber auch das Voraussetzen grundlegender trigonometrischer und astronomischer Begriffe und Zusammenhänge ohne weitere Erklärung auf der anderen scheint einen vorgebildeten universitären Leser-/Hörerkreis anzusprechen. Zudem gibt Jöstel im Vorwort seiner Schrift wiederholt den Hinweis, dass er den großen Nutzen der prostaphärischen Methode für die Studierenden der Mathematik sehe:

> „*Endlich also meine auch ich, dem in dieser berühmten Akademie die mathematischen Disziplinen anvertraut worden sind* […], *dass von meiner Seite nichts so besteht, als dass ich vielmehr wegen der allgemeinen Art und Weise endlich diese sehr kunstvolle Lehre und Methode meinen Hörern vor Augen stelle*.“[26]

Sowohl die Trigonometrie als auch die sphärische Astronomie zählten spätestens ab der Wende zum 17. Jahrhundert zu den festen Bestandteilen des Lehrplans der höheren Mathematik[27] in Wittenberg und waren damit Jöstels Aufgabenbereich zugeordnet. Ob das Manuskript zur Prostaphärese dann tatsächlich in die universitäre Lehre eingeflossen ist, bleibt bislang offen. Ein Vergleich mit beispielsweise der mathematik-historisch bislang ebenso unbearbeiteten Handschrift *Lectiones in Trigonometriam Pitisci* zur Trigonometrie aus dem Jahr 1597 könnte hier wichtige Hinweise geben.

Zweitens und sich daran anschließend scheint es für die weitere Komplettierung des wissenschaftshistorischen Gesamtbilds der mathematischen Lehre an der Universität Wittenberg der Frühen Neuzeit lohnenswert, die Handschrift Jöstels (auch vor dem Hintergrund anderer von ihm erhaltener Manuskripte) zu untersuchen, um Beziehungen aufzudecken und die sich andeutenden auffälligen methodischen Herangehensweisen mit bestehenden Untersuchungen der direkten Nachfolger Jöstels auf dem Lehrstuhl der höheren Mathematik[28] in Beziehung zu setzen.

---

[26] Jöstel 1599, Bl. 1ᵛ.
[27] Vgl. hierzu die Untersuchungen in Schöneburg 2007, S. 42ff.
[28] Beide langjährig in Wittenberg tätigen Professoren für höhere Mathematik Ambrosius Rhodius (1577–1633) als Schüler und Nachfolger Jöstels sowie dessen Nachfolger Christoph Nothnagel (1607–1666) wurden von den Autoren dieses Beitrags bereits hinsichtlich ihres Wirkens in der mathematischen Forschung und Lehre an der Universität Wittenberg vor dem Hintergrund der kontemporären Wissenslandschaft untersucht. Vgl. hierzu Schöneburg 2007 sowie Krohn 2014.

Schließlich sollte hinsichtlich einer begründeten Verortung Jöstels in die Genese der Prostaphärese eine Transkription und Übersetzung der lateinischen Handschrift die Basis für eine bessere inhaltliche Vergleichbarkeit mit anderen zeitgenössischen Autoren bilden – hier vor allem die Einflüsse von Werner, Brahe/Wittich und Clavius – und eine Einbettung in den zeitgenössischen Rahmen ermöglichen, um auf diese Weise ein weiteres Teilstück der Genese der Prostaphärese inklusive einem eventuellen Beitrag der Universität Wittenberg hierzu zu geben.

Literaturverzeichnis

BRAHE, T. (1600): Briefe an Melchior Jöstel. Prag 1600. G I 35: Bl. 81, G I 35: Bl. 139–140, G I 35: Bl. 151 u. G I 35: Bl. 165–166, Universitätsbibliothek Basel.

VON BRAUNMÜHL, A. (1899): Zur Geschichte der prosthaphaeretischen Methode in der Trigonometrie. In: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Neuntes Heft. Teubner: Leipzig 1899.

V. BRAUNMÜHL, A. (1900): Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Erster Teil. Teubner: Leipzig.

JÖSTEL, M. (1597): Lectiones in Trigonometriam Pitisci. Wittenberg.

JÖSTEL, M. (1599): Logistica προσϑαφαιρεσις Astronomica. Triangula Sphaerica tum Rectangula tum Obliquangula. Triangula Rectilinea. Wittenberg.

KROHN, T. (2014): Christoph Nothnagels Lehr- und Forschungstätigkeit an der Universität Wittenberg – Mathematisch-astronomische Weltsicht des 17. Jahrhunderts im Spiegel universitärer Lehre. ULB-Diss.: Halle (Saale).

KÜHN, K./MCCARTHY, J. (2012): Prosthaphaeresis and Johannes Werner (1468-1522) – A history of the forerunner of the logarithm and of its inventor. Alling & Workingham.

SCHEIBEL, J. E. (1775–1781): Einleitung zur mathematischen Bücherkenntnis. Zweyter Band. Meyer: Breslau.

SCHÖNEBURG, S. (2007): Zur mathematischen Lehrtätigkeit an der Universität Wittenberg im 16. und frühen 17. Jahrhundert, dargestellt unter besonderer Berücksichtigung des Wittenberger Mathematikers Ambrosius Rhodius (1577-1633). ULB-Diss.: Halle (Saale).

THOREN, V. (1988): Prosthaphaeresis Revisited. In: Historia Mathematica 15, 1988.

Anschrift der Verfasser

Jun-Prof. Dr. Silvia Schöneburg-Lehnert
Universität Leipzig
Mathematisches Institut, Abteilung Didaktik
Augustusplatz 10
04109 Leipzig
Deutschland
E-Mail: schoeneburg@mathematik.uni-leipzig.de

Dr. Thomas Krohn
Universität Leipzig
Mathematisches Institut, Abteilung Didaktik
Augustusplatz 10
04109 Leipzig
Deutschland
E-Mail: krohn@mathematik.uni-leipzig.de

Die Autoren bedanken sich zudem bei Frau Sophie Lisa Noeske, welche im Rahmen ihrer Ersten Staatsexamensprüfung an der Universität Leipzig die erste Sichtung und beginnende Einordnung der Handschrift *Logistica προσϑαφαιρεσις Astronomica.* […] unterstützte.

MODERN MATHEMATICS IN LWÓW BEFORE BANACH

STANISŁAW DOMORADZKI, MARGARET STAWISKA-FRIEDLAND,
AND MYKHAILO ZARICHNYI

ABSTRACT. The purpose of this note is to outline the state of mathematics in Lwów in the period preceding the activity of the famous Lwów School of Mathematics. We emphasize the outstanding role of Józef Puzyna in bringing to Lwów mathematicians who later formed the mathematical schools in Lwów and Warsaw.

On January 20th, 1661, King Jan Kazimierz signed the act of foundation of the Lwów Academy, which gave the same rights and privileges to the College of the Jesuit Fathers existing since 1608 and the (older) Academy of Cracow. This date is considered as the establishment of the Lwów University. In the 1st Partition of Poland in 1773 Lwów was taken by Austria. The dissolution of the Jesuit Order followed and the Academy was closed. In the years 1784-1804 a university operated in Lwów with the Latin language of instruction. In 1817 it resumed activity, with German language of instruction. After Galicia obtained autonomy (in 1861), Polish language of teaching was introduced in 1871.

Before the Autonomy the exact and natural sciences in Lwów were at a low level. This started to change when in 1871 Wawrzyniec Żmurko (1824-1889) took the chair of mathematics at the Lwów University (in 1852 he arrived from Vienna to teach at the Lwów Polytechnics). He trained his successors: Placyd Dziwiński (1851-1936), a professor at the Polytechnic School, and Józef Puzyna (1856-1919), who after Żmurko's death took over the university chair and headed it until his own death in 1919. Puzyna was a specialist in analytic functions. His main accomplishment was a two-volume monograph "Teorya funkcyj analitycznych" (vol. I 1898, vol. II 1900). It contained not only an exhaustive treatment of the theory of analytic function taking into account the most recent achievements, but also exposition of fundamentals of set theory, set-theoretic topology, group theory and theory of surfaces. Already in 1899 Puzyna taught a course on "Topological Studies" for university students, free of charge.

Puzyna took purposeful actions to create a modern mathematical center in Lwów. It was during his tenure in the chair that habilitation was granted to Wacław Sierpiński (1882-1969), a graduate of the Imperial University in Warsaw and a PhD recipient from Jagiellonian University in Kraków. Sierpiński started an intense scholarly and teaching activity, in 1910 becoming an extraordinary professor.

During his Lwów period Sierpiński published three books in Polish: "The Theory of Irrational Numbers" (1910), "An Outline of Set Theory" (1912), and "Number Theory" (1912). In one of his papers he proposed a construction of a square-filling curve, which now bears his name. The Sierpiński curve turned out to be more symmetric that other square-filling curves and, for this reason, found later applications, e.g., to the Travelling Salesman Problem. In another paper Sierpiński proved that the cardinality of every uncountable G_δ-set in the unit segment should be continuum; as a consequence, the same is true for the set of continuity points of any function defined on a segment.

A group of young mathematicians educated at leading European universities gathered around Sierpiński. These were Zygmunt Janiszewski (1888–1920), Stefan Mazurkiewicz (1888–1945) and Stanisław Ruziewicz (1889–1941). They concentrated their interests in set theory, advancing the relatively young discipline and laying foundations for the future successes of the Polish Mathematical School.

In his paper published in 1913 in "Prace Matematyczno-Fizyczne" (written on the basis of his thesis), Janiszewski considered the problem of cutting the plane by continua. He proved that the sum of two continua cuts the plane provided their intersection is not connected. Another result of his stated that the sum of two continua does not cut the plane between two points provided that none of them cuts the plane between these points and their intersection is either connected or empty. These results were later reproved and generalized by several authors including S. Eilenberg, F.B. Jones, B. Knaster and K. Kuratowski, S. Straszewicz, Moore, A. Mullikin, S. Nikodym, and R.H. Bing.

Stefan Mazurkiewicz' thesis contained proofs of some results announced by H. Lebesgue on curves that fill n-dimensional domains. In one of his articles, Mazurkiewicz provided an important definition of dimension of subsets in euclidean spaces in terms of existence of mappings of given multiplicity. That this definition agrees with another definitions (say, with that of covering dimension) was proved later by W. Hurewicz and Kuratowski.

In 1913 Ruziewicz defended his PhD thesis "On Continuous Monotone Function without Derivative at Uncountable Set of Points" (under supervision of Józef Puzyna, as Sierpiński was not an ordinary professor then). The results from the thesis were improved in his publication in "Prace matematyczne" in 1916 ("Über stetige, monotone, überall dicht die Constanzintervalle besitzende Funktionen". Ruziewicz communicated with Sierpiński by letters about his habilitation proceedings, which he was able to complete in 1918. Later Ruziewicz was the supervisor of Ukrainian mathematician Miron Zarycki.

Ruziewicz's name is attributed to the famous Ruziewicz problem (also known as Banach-Ruziewicz problem): is the Lebesgue measure on the n-sphere is characterised, up to proportionality, by its properties of being finitely additive, invariant under rotations, and defined on all Lebesgue measurable sets? The problem was solved by Banach for $n = 1$ (in the negative). In 1980 it was solved for $n \geq 4$ in the affirmative by G. Margulis (slightly later and independently by D. Sullivan) and in 1984 for $n = 2, 3$ by V. Drinfeld.

After Sierpiński's internment in Russia during World War I and the departure of Janiszewski and Mazurkiewicz to take posts at the reactivated University of Warsaw (with Polish language of instruction), Puzyna personally contacted Hugo Steinhaus (1887–1972), a graduate of Göttingen who got his habilitation in Lwów in 1917, to take up teaching and scholarly duties. Subsequently, Steinhaus brought to Lwów Stefan Banach (1892–1945), whom he discovered earlier in Kraków. Banach and Steinhaus, later very important and influential worldwide-known mathematicians, also played a crucial role in the development of Polish Mathematical School.

At the initiative of Puzyna, Janiszewski, Steinhaus, Dziwiński, Antoni Łomnicki (1881–1941), Zdzisław Krygowski (1872–1955) and Tadeusz Czeżowski (1889–1981), Mathematical Society in Lwów was established in 1917. Its aims were, among others, *to support scientific works in the scope of mathematics and related sciences as well as to spread mathematical knowledge through scientific meetings (taking place mostly every two weeks), talks, contests, publications and gathering scientific means.*

There was also a mathematician at the Lwów Polytechnics whose education and research interests reflected modern mathematical topics. Lucjan Emil Böttcher (1872–1937), born in Warsaw, was for a brief time a student of mathematics at the Imperial University of Warsaw (expelled for participation in a demonstration) and of machine construction at the Lwów Polytechnics (finishing with an engineering half-diploma in 1897). In 1897-1898 he spent 3 semesters at the University of Leipzig. On April 27, 1898, after submitting the thesis "Beiträge zu der Theorie der Iterationsrechnung" and completing required examinations, he was promoted to the degree of a doctor. His supervisor was Sophus Lie (1842–1899)– one of the most influential mathematicians of the 19th century, who developed the theory of continuous groups of transformations and applied it successfully in geometry and differential equations. Böttcher returned to Lwów in the second half of 1898 and took up a position with the Polytechnic School. He worked there for about 37 years (becoming a *docent* in 1912), retiring in 1935. His teaching focused on the areas of mathematics which were considered relevant to technical applications, but his research went beyond that. The study of iterations of rational functions of a complex variable (over the Riemann sphere), which he started in his PhD dissertation and continued later, contains results and ideas which can be regarded as foundations of holomorphic dynamics. His best known, and very important, result concerned local dynamics of a complex analytic map around a superattracting fixed point, establishing a (local) conjugacy between the map and the lowest-degree term of its Taylor series expansion (Böttcher theorem). He also observed that the behavior of orbits of points induced partition of the sphere into "convergence regions" and "chaotic parts", which more or less corresponds to the dichotomy studied after 1918 by Pierre Fatou and Gaston Julia, the "founding fathers" of holomorphic dynamics. Böttcher's ideas were ahead of his time. Additionally, even though he had good background in complex analysis and elliptic functions (topics of interest to Puzyna), his writing was mostly not sufficiently rigorous. Therefore, his work was little appreciated by his contemporaries and he never got habilitation at the Lwów University, being rejected four times (he had habilitation at the Polytechnics, though). But nowadays he is rightly considered one of the pioneers of holomorphic dynamics.

Acknowledgments The research of the first and second author is partially supported by the project "The impact of WWI on the formation and transformation of the scientific life of the mathematical community" (GA CR 18-00449S).

References

[1] D. S. Alexander: *A history of complex dynamics. From Schröder to Fatou and Julia.* Aspects of Mathematics, E24. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1994. viii+165 pp. ISBN: 3-528-06520-6. MR1260930 Zbl 0788.30001

[2] D. S. Alexander; F. Iavernaro; A. Rosa: *Early days in complex dynamics. A history of complex dynamics in one variable during 1906-1942.* History of Mathematics, 38. American Mathematical Society, Providence, RI; London Mathematical Society, London, 2012. xviii+454 pp. ISBN: 978-0-8218-4464-9. MR2857586 Zbl 1244.37002

[3] S. Domoradzki: *The growth of mathematical culture in the Lvov area in the autonomy period (1870-1920)*, Prague: MatfyzPress (History of Mathematics 47), 2011

[4] S. Domoradzki: Józef Puzyna (1856-1919) – the pioneer of Polish Mathematical School, [in:] A. Lecko (ed.), Current Research in Mathematical and Computer Sciences, Publisher UWM, Olsztyn, 2017, pp. 11-22.

[5] S. Domoradzki, M. Stawiska: Lucjan Emil Böttcher and his mathematical legacy, In: *Mathematics without boundaries. Surveys in pure mathematics.* Edited by P. Pardalos and T. Rassias. Berlin-New York: Springer-Verlag, 2014, pp. 127-161

[6] S. Domoradzki, M. Stawiska: Polish mathematicians and mathematics in World War I (submitted); preprint at https://arxiv.org/abs/1804.02448

[7] S. Domoradzki; M. Stawiska; M. Zarichnyi: Lucjan Böttcher: A forgotten Polish mathematician and his influence on modern mathematics, Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte, XII Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, 'Mathematik– verschollen und gefunden', Tagung 4 bis 10 Mai (2014), Miesenbach (Niederösterreich), Herausgeber: Dr. Christa Binder, Kurzfasungen der Vorträge, pp. 222-226

[8] S. Domoradzki; M. Stawiska; M. Zarichnyi: On algebra in Lwów in the years 1870-1939, [In:] *XIII Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik*, Herausgeber: Dr. Christa Binder, Tagung 1 bis 7 Mai (2016), Miesenbach (Niederösterreich): Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte, pp. 86-95

[9] S. Domoradzki, M. Zaricznyi: On some aspects of the set theory and topology in J. Puzyna's monumental work, *Technical Transactions*, Fundamental Sciences, Issue 1 NP (7), 2014, p. 85-97

[10] Duda R.: *Lwowska szkoła matematyczna.* Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 2007.

[11] R. Duda: Katedry matematyczne i ich obsada na Politechnice Lwowskiej do 1945 r., *Antiquitates Mathematicae* 8 (2014), 47-74

[12] A. Łomnicki, S. Ruziewicz: Józef Puzyna (1856-1919), *Wiadomości Matematyczne* 25 (1921), 113-119.

[13] A. Płoski: O dziele Józefa Puzyny "Teorya funkcyj analitycznych"." [in:] S. Fudali (ed.): Materiały z II Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki. Szczecin, 1988, 237-243.

[14] Prytula Y.: Józef Puzyna- prekursor Lwowskiej Szkoły Matematycznej, in: M. Przeniosło (ed.): Studia Matematyczne Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego Jana Kochanowskiego w Kielcach, 11 (2009), 113-119.

[15] M. Stawiska: Lucjan Emil Böttcher (1872–1937)– the Polish pioneer of holomorphic dynamics, *Technical Transactions (Czasopismo Techniczne), Fundamental Sciences (Nauki Podstawowe)*, Cracow University of Technology, 1-NP, 2014, 233-243

Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Rzeszów, 35-001, Rzeszów, Poland
E-mail address: domoradz@ur.edu.pl

Mathematical Reviews, 416 Fourth St., Ann Arbor, MI 48103, USA
E-mail address: stawiska@umich.edu

Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Rzeszów, 35-001, Rzeszów, Poland and Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine
E-mail address: zarichnyi@yahoo.com

Women and mathematics at the German university in Prague

Martina Bečvářová[1]

1. Short historical background

For better understanding of some difficulties with the female doctoral procedures in mathematics at the German University in Prague during its whole existence (i.e. from 1882 until 1945), we firstly give a short description of the historical background.

It seemed that there was no obstacle for women to study at the universities because in 1878, the Ministry of Education and Enlightenment of the Austro-Hungarian monarchy issued the decree which allowed women to attend all "university lectures suitable for women".[2] The reality was however quite different. Although women in the same year gained also the right to pass the examinations called "maturita" or "matura" at the traditional schools (gymnasiums for boys), there existed no school to prepare them for these examinations and without them nobody could apply for admittance to the universities. According the Austrian laws, the girls could not study at the secondary schools for boys.

Let us say some words about the situation in Prague. In 1878, there were the *Prague University*[3] and enough secondary schools for boys but no secondary school for girls. From 1882, there were two independent national universities: *Czech Charles-Ferdinand University* (from 1920 until 1939 it used the name *Charles University*) and *German Charles-Ferdinand University* (from 1920 it used the name *German University in Prague* and from 1939 until 1945 the name *German Charles University in Prague*). We will use the abbreviation CU, resp. GU. In 1890, after many petitions, interventions and lobbying, the Empire Council in Vienna amended the obsolete legislation and approved in Prague *Minerva* – the first Gymnasium for girls in the Middle Europe. The first female students of *Minerva* graduated already in the year 1895. Thanks the "matura", the girls could apply for the first time for admittance to the both universities in Prague.

The first five graduates of *Minerva* who applied in 1895 for admittance to the Faculty of Medicine of the CU were refused by the professors. In the same year, the Faculty of Philosophy of the CU admitted six Minerva graduates as the so-called visiting students, which means on probation. In the same year, the Faculty of Medicine of the GU allowed

[1] The research is supported by the project *The impact of WWI on the formation and transformation of the scientific life of the mathematical community* (GA CR 18-00449S).

[2] We have no information what it meant "the university lectures suitable for women", in the decree, there was no explanation of these words and no example.

[3] The *Prague University* is the oldest university in central Europe which was founded by the Holy Roman Emperor Charles IV in 1348. Les us note that from the end of the 18th century, the lectures were taught in German. From 1871, Czech and German parallel regular lectures and seminars in mathematics, physics, medicine, laws, history, etc. were taught at the Prague University. On the 28th February 1882 in Vienna, it was signed the law on the foundation of two independent universities in Prague, one for Czech speaking students and second for German speaking students. Both universities in Prague were typical European universities of the 19th century. There were four faculties (Arts, Medicine, Laws and Theology) specialized in education and preparation of teachers, lawyers, physicians and surgeons, civil servants and officers, priests etc. There were many obligatory lectures and seminars and only few optional lectures and seminars. In 1920, the new faculties – the Faculties of Science – were established at the both universities in Prague on which mathematics and science teaching began.

studies of the first three Minerva graduates. In 1896, also the Faculty of Medicine of the CU allowed that women could be admitted to study as visiting students.

From 1897, all the faculties of philosophy in the Austro-Hungarian monarchy admitted women to regular studies without obstructions and under the same conditions as men. Three years later, women had the right to study also at all faculties of medicine in the whole monarchy.

In 1900, eight women completed their studies at the Faculty of Philosophy of the CU, where they prepared for the profession of secondary-school teachers. In 1901, the first two female doctors graduated at the Faculty of Philosophy of the CU and one year later, first female doctor finished her studies at the Faculty of Medicine of the CU. The GU was more open with regard to women studies, but more conservative with regard to female doctorates; the first women were awarded doctorate at the Faculty of Philosophy of the GU as late as 1908.[4]

At the time of the WWI, the number of studying women increased. Women filled up openings left by men-soldiers. In 1918, the *Washington Declaration* adopted the principle that women are equal to men with regard to politics, social and cultural matters. In 1918, the independent Czechoslovak Republic was formed,[5] which, among others, gave women suffrage and the right to study also at faculties of law. The Section 106 of the new *Czechoslovak constitution of 1920* declared that no sex is privileged. In the same year, the *Czech Technical University in Prague* and *German Technical University in Prague* admitted the first twenty regular female students. Since 1920s, women could study all university subjects (except for theology).

It is natural that women with university education found employment as physicians or teachers. Only few of them had the opportunity and courage to embark on an academic career. Many of them, even after completion of their demanding studies, got married and devoted themselves to their families rather than their professional careers. At that time, the society did accept university studies of women and tolerate women with university education in some professions (teachers, physicians, pharmacists, notaries), but it was not able to get rid of usual stereotypes. The situation was aggravated by the economic crises in the years 1929–1933, when women were regarded as undesirable competitors of men for jobs. It was only in the late 1930s that the society started to get the idea that women would gradually take up positions traditionally reserved for men.

From the year 1882 until the year 1945 at the GU, there were 43 doctorate degrees awarded in mathematics (including those by three females, resp. ten foreigners). All theses were written in German. From the year 1882 until the year 1939 at the CU, there were 150 doctorates awarded in mathematics (including those by nine females, resp. eight foreigners). All the theses, except for two, were written in Czech.

[4] The first women, Hedwig Fischmann (1885–?) and Charlotta Weil (1886–?), were awarded doctorate at the *Faculty of Philosophy of the GU* in 1908 (the former in the subject of the German language and literature, the latter in chemistry).

[5] The democratic republic in the centre of Europe connected together Czechs, Germans, Slovaks, Ukrainians and others habitants. Its official borders and independence were confirmed by the Versailles Agreement (thanks difficult discussions at the international peace conference, January – July 1919) and by the plebiscites in 1920 and 1921.

2. Three women graduated in mathematics at the GU

Now, we will try to analyse the successful doctoral procedures of three women graduated in mathematics at the GU. We will show their studies together with their life stories, professional activities, mathematical interests and results and fates of their families and relatives.

Saly Ruth Ramler (1894–1993) defended her PhD thesis in 1919 under the guidance of Georg Pick (1859–1942) and obtained her PhD degree.[6]

In 1914, she passed the so called "matura" at the First German Secondary Girl School in Prague (the part called Vinohrady). From 1914 until 1919, she studied mathematics and physics at the Faculty of Philosophy of the GU.

In 1919, she defended her PhD thesis titled *Geometrische Darstellung und Einteilung der Affinitäten in der Ebene und im Raume. Dreiecks- und Tetraederinhalt* (reviewers G. Pick and Gerhard Kowalewski (1876–1950), Prague German professors of mathematics at the GU). She passed the first (so called main) oral examination in mathematics in November 1919. She underwent the second (so called subsidiary) oral examination in philosophy in December 1919. She obtained her Doctorate Degree of Philosophy at the graduation ceremony on 11th December 1919. Her PhD thesis is not kept in the Archive of Charles University in Prague.

In 1919, she wanted to obtain her first professional position at the *German Technical University in Brno*. She prepared all her necessary documents, but we have no evidence that she took part in the competition. In 1921, she passed the so called teacher examinations to be a teacher of mathematics and physics at the secondary schools. In 1921, she started his career as a professor of mathematics at the *German Secondary Girl School in Prague II*, where she studied as a young girl. She had higher ambitions and therefore she

[6] Saly Ramler was a daughter of Gerson Ramler (1863–1930), a Jewish shopkeeper in Galicia (today Ukraine), later in Prague. She had five brothers and sisters: Fredryk (?–?), Natali (1887–?), Ernestine (1889–?), Rosa (1891–1938) and Leon (1892–1942).

Natali Ramler studied from 1908 until 1913 at the Faculty of Philosophy of the GU. In 1913, she defended her PhD thesis in philosophy and obtained her Doctorate Degree of Philosophy. She became a teacher of German and English at the First German Secondary Girl School in Prague II. In 1937, she was appointed a director of that school. In the winter 1939, she immigrated to the USA.

Ernestine Ramler became a bank clerk in Prague. In the winter 1939, she immigrated to the USA with her older sister Natali. Their immigration was not so difficult because they known German, English and Czech, they had enough money and relatives in Boston in the USA and they prepared their immigration before the Nazis coming to Prague.

Rosa Ramler became a shopkeeper in Prague (she had a shop with lace work). From the 1930s, she started to work as a clerk. In 1938, she prepared her immigration to the USA. Unfortunately, she did not coordinate her activities with her older more educated and successful sisters. In December 1938, she travelled herself to the Switzerland. She died (a suicide) in the Lake Curych.

Leon Ramler studied at the Faculty of Law of the GU. In 1920, he obtained his Doctorate Degree of Laws. He worked as a secretary and representative of the company "Griotte podniky", a famous company in Prague, which exported the special kind of alcohol to the all world. He was a good doctor of laws and a perfect businessman because he spoke fluently German, Czech, French, English and Spanish. He believed that Czechoslovakia is the best country for his life and he did not plan his immigration until the Nazis coming in Prague. In 1940, he started to look for his necessary documents to immigrate to the USA. It was too late for him. In November 1941, he was deported to the Jewish ghetto in Terezín. In April 1942, he was sent to the concentration camp Piaski (the branch of Auschwitz) where he was murdered.

continued in her education. She studied the special sport courses in Germany (July 1921) and she took part in the meeting of German mathematicians in Jena (September 1921). In the spring 1922, she left for her mathematical studies in Luxemburg. One year later, she performed for her studies in Germany. She spoke German, Czech, French and Italian (as we know from her official school documents and personal correspondence), and later she also learned English.

In July 1923, she married the famous Dutch-American mathematician Dirk Jan Struik (1894–2000). In 1974, he remembered his first meeting with his future wife and described her doctoral thesis. He wrote:

… in July 1923, I married at Prague, in the ancient Town Hall with the medieval clock, Saly Ruth Ramler. She was a PhD in mathematics of the University of Prague, where she had studied under G. Pick and G. Kowalewski. Her thesis was a demonstration of the use of affine reflections in building the structure of affine geometry, a new subject at the time. We had met the previous year at a German mathematical congress. After marriage we settled in Delft.[7]

In the first decade after marriage, she travelled with her husband to the Netherlands, then to Italy, Germany and France. In 1926, they immigrated to the USA, because Dirk Struik obtained a position as a professor at the Massachusetts Institute of Technology (MIT). The motivation for their travel had a political background as it is shown in the following quotation:

From 1924 to 1926, with Struik's Rockefeller Fellowship, he and his wife travelled to several other European countries and studied, met and collaborated with many of the great mathematicians and scientists of the twentieth century, including Tullio Levi-Civita, Richard Courant and David Hilbert.

Nevertheless, by 1926, Struik found himself unemployed in Holland and with limited opportunities in Europe. As a long-time mathematical and political friend of Struik, Lee Lorch of York University in Toronto, Canada, understood from him and wrote in an electronic correspondence to us, that Struik's "political commitments and activities closed European opportunities." Eventually, however, Struik received two offers, one from Otto Schmidt to go to Moscow and the other from Norbert Wiener to visit MIT. It was a hard choice for him: in the end, he decided to accept the teaching post from Samuel Stratton, the president of MIT.[8]

Saly fascinated her schoolmates with her elegance and education. She was interested in mathematics and history of mathematics. Together with her husband, they wrote a joint article probing (but not solving) the question of whether Augustin Louis Cauchy, when he was in Prague (1833–1836), might have met the Prague mathematician Bernard Bolzano.[9] She also wrote reviews for Isis, collaborated with Martin Jašek[10] (Bolzano's manu-

[7] D.J. Struik: *A letter from Dirk Struik*, in R.S. Cohen, J.J. Stachel, M.W. Wartofsky (eds.): *For Dirk Struik. Scientific, historical and political essays in honor of Dirk J. Struik*, Boston Studies in the Philosophy of Science, XV, Synthese Library, 61, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1974, pp. XIII–XVII, the quotation is from the page XIV.

[8] See A.B. Powell, M. Frankenstein: *In memoriam Dirk Jan Struik: Marxist mathematician, historian and educator* (*30 September, 1894 – 21 October, 2000*), For the learning of mathematics, an international journal of mathematics education 21(2001), no. 1, pp. 40–43, the quotation is from the page 43.

[9] See D.J. Struik, R. Struik: *Cauchy and Bolzano in Prague*, Isis 11(1928), pp. 364–366.

scripts and estates in Prague and Wien) and with Federigo Enriques (Italian translation of *Euclid's Elements*).[11]

She left mathematics as a young woman; she gave up her professional career and devoted herself to her husband and their daughters (Ruth Rebekka, Anne and Gwendolyn) although it was a very difficult decision for her as the following words show:

While she was an accomplished mathematician, she was kept out of mathematics by illness for much of her adult life. She struggled with the tension between raising three daughters and wanting to do mathematics. She found it unfair that women cannot have a career and a family, and she resented and suffered from the discrimination bred out of the traditional expectation that a married woman do nothing but attend to the family. However, in later years she became mathematically active again, attending meetings and publishing. The Kovalevskaya Fund at the Gauss School in Peru was endowed in her memory.[12]

In 1977, she published her article titled *Flächengleichheit und Cavalierische Gleichheit von Dreiecken*,[13] whose content is clearly characterized in the journal Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete[14] and also in the journal *Mathematical Reviews*.[15]

It is interesting that in 1978, Oene Bottema[16] published the article titled *Equi-affinities in three-dimensional space* in the journal of the University in Belgrade,[17] in which he quoted as its very inspiring source Ramler's forgotten PhD thesis (the quotation is at the pp. 9–10).

Saly Ramler Struik had interesting hobbies; she liked modern dance, travelling, history of mathematics and her family.

---

[10] Martin Jašek (1879–1945) was a famous Czech teacher of mathematics, physics, philosophy and propedeutics at the secondary girl school in Pilsen. He was interested in the mathematical heritage of Bernard Bolzano (1781–1848). He partly catalogized his manuscripts deposited in Vienna and Prague. He discovered Bolzano's example of a continuous and non-differentiable function, the so-called Bolzano's function.

[11] Federigo Enriques (1871–1946) was an Italian mathematician, a professor of mathematics at the universities in Bologna and Roma. He was an important member of Italian school of algebraic geometry (classification of algebraic surfaces). He was also interested in descriptive geometry, projective geometry, differential geometry, foundations of geometry, history of logic, history of mathematics, philosophy and history of sciences. He was a famous expert on Greek mathematics. He published a modern Italian translation of *Euclid's Elements* named *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna. Libri I–IV*, Alberto Stock – Editore, Roma, 1925, *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna. Libri V–IX, Libro X, Libri XI–XIII*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1930, 1932, 1936.

[12] See http://www.tufts.edu/as/math/struik.html. [25.2.2018.]

[13] See S.R. Struik: *Flächengleichheit und Cavalierische Gleichheit von Dreiecken*, Elemente der Mathematik. Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts 32(1977), no. 6, pp. 137–143.

[14] See review ZBL 0367.50004, available at the address https://www.zbmath.org/?q=ai:struik.s-r. [25.2.2018.]

[15] See review MR0513833, available at the address http://www.ams. org/mathscinet. [25.2.2018.]

[16] Oene Bottema (1901–1992) was a Dutch mathematician who defended his PhD thesis named *Figuur van vier kruisende rechte lijnen* at the University in Leiden in 1927 under the guidance of a geometer Willem van der Woude (1876–1974). Later, he taught at the Technical University in Delft.

[17] See O. Bottema: *Equi-affinities in three-dimensional space. With a dedication in French to D.S. Mitrinović on his seventieth birthday*, Univerzitet u Beogradu. Publikacije Elektrotehnič Fakulteta. Serija Matematika i Fizika / Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université á Belgrade. Série Mathématiques et Physique, no. 602–633, 1978, no. 603, pp. 9–15.

Hilda Falk (1897–1942) defended her PhD thesis in 1921 under the guidance of G. Pick and obtained her PhD degree.[18]

In 1916, she passed the so called “matura” at the First German Secondary Girl School in Prague (the part called Vinohrady). From 1916 until 1921, she studied mathematics and physics at the Faculty of Philosophy of the GU, resp. at the Faculty of Science of the GU. In 1920, she passed the so called teacher examinations to be a teacher of mathematics and physics at the secondary schools. But there is no evidence, that she did this occupation.

In 1921, she defended her PhD thesis titled *Beiträge zur äquiformen Flächentheorie* (reviewers G. Pick and Adalbert Prey (1876–1950), Prague German professor of physics at the GU). She passed the first oral examination in mathematics and theoretical physics in April 1921. She underwent the second oral examination in philosophy in May 1921. She obtained her Doctorate Degree of Nature Sciences at the graduation ceremony on 6th of May 1921. Her PhD thesis is not kept in the Archive of Charles University in Prague.

She never married and had no children. From 1921 until 1922, she worked as an assistant of physics at the *German Technical University in Prague*. In 1923, she became an assistant of physics at the *Medicine Institute of the GU*. In 1924, she obtained a position as a secretary at the company *Klatze a Lorenz* in Prague. After some years, she was appointed a higher clerk at the same company.

In 1939, as a Jew, she lost her working place and later her civil laws. In 1941, she tried to immigrate to Shanghai in China, where a big Jewish community from central Europe lived. She did not obtain her visa and passport for immigration. In 1942, she and her sister were sent to the Jewish ghetto Terezín and then by the transport to Jewish ghetto in Riga, where they were murdered by fascists.

As a student, Hilda Falk had a big scientific ambition and wanted to become a research worker at the university. Her dream was impossible in this time in Prague. She did not write any article. She was interested in car driving, travelling abroad and modern sports (skiing and tennis).

Josefine Mayer born **Keller** (1904–1986) defended her PhD thesis in 1934 under the guidance of Arthur Winternitz (1893–1961) and obtained her PhD degree.[19]

In 1921, she passed the so called “matura” at the German Secondary Girl School in Prague (the part called Vinohrady). From 1921 until 1922, she studied mathematics and physics at the GU. In June 1923, she married Jan Jindřich Frankl (1900–?), her schoolmate at the GU and later a clerk in Prague. They shortly lived in Prague. In the autumn 1923, they moved to Leipzig, where Josefine wanted to study philosophy. In the summer 1924, she divorced and married Ernst John, a German citizen and redactor of the newspaper *Neue Leipziger Zeitung*. In 1925, their daughter Sofie was born and a young family moved to Prague. In 1927, Josefine divorced once more. In 1928, she married Alfred

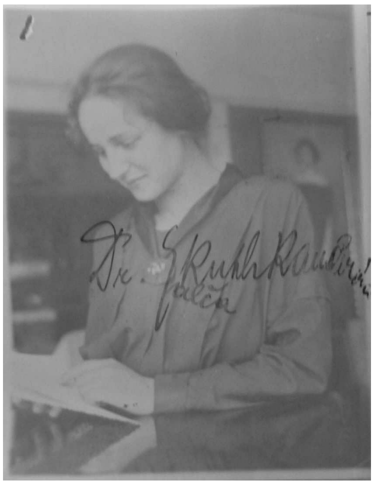
[18] Hilda Falk was a daughter of Otto Falk (1862–1899), who was a famous Prague doctor of laws. She had one older sister Margaret (1896–1942), who became a teacher at the elementary school in Most (North Bohemia).
[19] Josefine Keller was a daughter of Rudolf Keller (1875–1964), a rich Prague newspaper owner and publisher of the *Prager Zeitung*.

Maria Mayer (1899–?), a famous Prague newspaper owner and publisher of the *Prager Zeitung*. They had only one son Petr (1930–1938).

From 1925 until 1932, she again studied mathematics and physics at the GU. In 1933, she defended her PhD thesis named *Zur Axiomatik der ebenen Affinen der Geometrie* (reviewers A. Winternitz and Ludwig Berwald (1883–1942), Prague German professors of mathematics at the GU). She passed the first oral examination in mathematics in June 1933. She underwent the second oral examination in natural philosophy in June 1933. She obtained her Doctorate Degree of Nature Sciences at the graduation ceremony on 30$^{\text{th}}$ of June 1933. Her PhD thesis is not kept in the Archive of Charles University in Prague.

She studied mathematics and physics only for her amusement or recreation because she knew that as a married woman and mother could not become a teacher or research worker. She wrote her PhD thesis as a mother of two small children. She did not write any mathematical article. She never had to work regularly because she came from a very rich Prague family. She liked car driving, travelling abroad, sports (skiing) and organization of social parties.

During the WWII, she and her family because of Jewish origin had to emigrate from Czechoslovakia to save their lives. They obtained their visas and passports to move in the USA. We have no information on their personal fates here.



Saly Ruth Ramler
(1921, Prague)

Hilda Falk
(1921, Prague)

Josefine Mayer
(1939, Prague)

3. Conclusion

The German female candidates in Prague (except for one) descended from socially well-situated, the so-called “higher middle-class” or “middle-class”, families, which valued education and supported educative, cultural, sport and other general activities pursued by their daughters. They came from typical European Jewish families. They studied at the same German Secondary Girl School in Prague (the part called Vinohrady) and at the same university under the same teachers.

All the German female doctoral candidates properly submitted their doctoral theses, which were accepted and they were successful right at the first defence of both PhD examinations. They underwent an examination in mathematics or mathematics together with theoretical physics. They also underwent an examination in philosophy, later changed to philosophy of exact sciences.[20]

Although they did not devote themselves to mathematics after obtaining the doctorate out of various reasons, they proved that they would be able to compete with males provided they had the motivation and courage to do this, at the time when the public regarded female mathematicians with distrust.

References

[1] M. Bečvářová: *Matematika na Německé univerzitě v Praze v letech 1882 až 1945* [Mathematics at the German University in Prague from 1882 until 1945], Karolinum, Praha, 2016 (Czech with extended English summary).

[2] M. Bečvářová: *Women and mathematics at the Universities in Prague in the first half of the 20th century*, Antiquitates Mathematicae 10(1)(2016), pp. 181–216.

Address

Professor RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Institute of Applied Mathematics
Faculty of Transportation Sciences
Czech Technical University in Prague
Na Florenci 25, 110 00 Prague 1
Czech Republic
becvamar@fd.cvut.cz

[20] For more information on the mathematical studies, mathematical communities and their achievements in Prague see [1] and [2].

Stadium der Improvisation – Neulehrerausbildung und Arbeitsschulmethode in der SBZ und frühen DDR (1945–1952)

Holger Wuschke, Universität Leipzig

Nach dem zweiten Weltkrieg ist die Situation in den meisten Bereichen des menschlichen Lebens von Mangel geprägt[1]. Auf bildungspolitischer Ebene mangelt es nicht an Schulen oder an inhaltlichen Vorstellungen für den Unterricht, sondern an Lehrkräften. Des Weiteren soll die Bildung fortschrittlich gestaltet sein und es beginnt daher auch eine Suche nach einem tragfähigen Unterrichtskonzept. Im Laufe der Zeit werden in der SBZ und spätestens in der DDR Richtlinien und Strukturen geschaffen, die dem experimentellen Charakter der Unterrichtsmethoden oder der improvisierten Ausbildung von Lehrkräften entgegen gehen. Der nachfolgende Artikel widmet sich dieser ersten Phase, welche 1952 von Heinrich Deiters, dem Leiter der Deutschen Verwaltung für Volksbildung (DVV), im Rückblick als *„Stadium des Improvisierens“*[2] bezeichnet wird. Dabei liegt der Fokus auf dem Mathematikunterricht.

1. Bildungspolitik der SBZ/DDR ab 1945

In der SBZ erlässt die am 09. Juni 1945 gegründete Sowjetische Militäradministration Deutschland (SMAD) Befehle zur Verwaltung der SBZ[3]. Sie ist hauptsächlich dafür verantwortlich, die vereinbarten Grundsätze der Potsdamer Konferenz umzusetzen: Entmilitarisierung, Demokratisierung, Dezentralisierung und Entnazifizierung. Im Rahmen der Dezentralisierung wird durch den SMAD-Befehl Nr. 17[4] die Deutsche Zentralverwaltung für Volksbildung (DVV) als Institution zur Umsetzung der Bildungsbeschlüsse eingerichtet. Sie soll *„die Tätigkeiten der Schulverwaltungen in den Ländern und Provinzen zusammenfassen, koordinieren, anleiten und kontrollieren.“*[5]

Am 25. August 1945 wird durch den SMAD-Befehl Nr. 40 „Über die Vorbereitung der Schulen zum Schulbetrieb“[6] festgesetzt, sodass zum 1. Oktober 1945 der Schulbetrieb wieder aufgenommen werden kann und die DVV dafür Sorge tragen soll. In diesen Ausführungen steht auch: *„Ehemalige Mitglieder der NSDAP und ihrer Gliederungen sind grundsätzlich nicht zu beschäftigen.“*[7] Die Entnazifizierung sollte besonders im schulischen Bereich sehr stark durchgeführt werden. Von den 39.348 Lehrkräfte nach dem Krieg wurden 28.179 in Verbindung mit dem NS-Regime gebracht[8]. Dass diese 71,6% der Lehrkräfte nicht alle entlassen werden konnten, besonders unter den Umständen der Flucht und Vertreibung, durch welche die Anzahl der Schülerinnen und Schüler von 1.700.000 (1939) auf 2.199.000 (1. Oktober 1945) bzw. auf 2.518.000 (Dezember 1946) angestiegen ist[9], liegt auf der Hand. Daher

[1] Die Zeit von 1943 bis 1948 wird deshalb auch als *„Zusammenbruchsgesellschaft“* bezeichnet.
Vgl. Herrlitz (2009), S. 206.
[2] die neue schule (1952): 7/35, S. 7.
[3] Vgl. Keller (2002), S. 276. Hohlfeld schreibt in Bezug auf die Befehle von 1945: *„Diese Befehle beschreiben bestenfalls einen Zukunftswunsch der Realität des Jahres 1945 entsprachen sie nicht.“*, Hohlfeld (1992), S. 36.
[4] Vgl. Günther/Uhlig (1970), S. 179; Hohlfeld (1992), S. 34.
[5] Uhlig (1965), S. 61; vgl. Hettwer (1976), S. 27. Zur Kontrolle der Schulen und des Unterrichts wurden Bildungsoffiziere eingesetzt.
[6] Vgl. Günther/Uhlig (1970), S. 182 f.
[7] Ebd., S. 185.
[8] Vgl. ebd., S. 38; vgl. Uhlig (1965), S. 118; vgl. Hettwer (1976), S. 10.
Für eine ausführliche Beschreibung der Situation an den Schulen, in den einzelnen Gebieten und den Zahlen entlassener Lehrkräfte vgl. Hohlfeld (1992), S. 46-59.
[9] Vgl. Uhlig (1965), S. 69 f.

mussten schnell neue Lehrkräfte ausgebildet werden, welche in den Schulen eingesetzt werden konnten und im Laufe der Zeit die belasteten Lehrkräfte ersetzen sollten. Im August/September 1945 wurden bereits in Schnellkursen von dreiwöchiger Dauer *„vor allem Arbeiter und Bauern, aber auch andere Personen zu ‚Neulehrern' ausgebildet […].“*[10]

Am 6. Dezember 1945 wird durch den SMAD-Befehl Nr. 162[11] die Lösung der Neulehrerfrage angedacht. Bevor jedoch die Neulehrerausbildung betrachtet werden kann, muss dieser Begriff erst definiert werden.

2. Der Begriff „Neulehrer“

Der Begriff Neulehrer[12] besitzt zwei Aspekte: Einerseits ist der er positiv im Sinne der SBZ konnotiert, denn es sind Lehrkräfte, die in einem neuen, anti-faschistischen System beginnen, also vollkommen neu geprägte Lehrerinnen und Lehrer. Andererseits besitzt der Begriff eine negative Konnotation, denn sie sind neu in ihrem Beruf und somit „Laien“. In der ersten Phase wurden die Neulehrer auch als „Laienlehrer“ bezeichnet, da sie zu großen Teilen unausgebildet waren und keine berufliche Vorerfahrung als Lehrkräfte hatten[13]. Der Begriff Neulehrer grenzt sich von dem Begriff Altlehrer ab. Dieser Begriff wiederum ist leicht zu definieren, weil dies alle Lehrkräfte sind, die bereits vor 1945 an einer Schule gearbeitet haben.

Nun könnte durchaus eine zeitliche Definition geschehen und der Begriff könnte sich definieren lassen als: Alle Lehrkräfte, die nach 1945 ausgebildet wurden. Dass dies nicht tragfähig und unspezifisch ist, zeigt zum einen, dass Oberschullehrkräfte weiterhin studierten und zum anderen, dass selbst die Schulart nicht ausschlaggebend ist, da es ab 1946 parallel zur Neulehrerausbildung pädagogische Hochschulen gibt[14].

Zur Definition der Neulehrer kommt hinzu, dass dieser Begriff in der Literatur häufig auch als Oberbegriff für verschiedene Stadien der Ausbildung der Lehrkräfte verwendet wird und sogar darüber hinaus als Begriff für die ausgebildeten Lehrkräfte verwendet wird: *„Für die Gruppe der Neulehrer gilt […] in besonderem Maße, [dass] […] selbst die Ausbildungs'phase' sich – formal und allgemein – als ein lebenslanger Prozeß darstellt.“*[15] So sind Neulehrer auch „Lehramtsanwärter“ (Bezeichnung der Lehrkräfte vor Absolvierung der 1. Lehrerprüfung) oder „Lehramtsbewerber“ (Bezeichnung der Lehrkräfte vor Absolvierung der 2. Lehrerprüfung)[16], aber auch Personen, welche diese Prüfungen absolviert haben[17], werden trotzdem noch als Neulehrer bezeichnet. Jedoch ist dieser Begriff bezeichnend für den Zeitraum von 1945-1952/53[18]

---

[10] Borneleit (2006), S. 142.
[11] Vgl. Günther/Uhlig (1970), S. 194.
[12] Dieser Begriff kommt in den Quellen grundsätzlich in der männlichen Form vor, meint aber definitiv Neulehrer und Neulehrerinnen gleichsam. Es wird also ein historische Sprachgebrauch genutzt.
[13] Vgl. Mebus (1999), S. 43.
[14] Diese wurden durch den SMAD-Befehl Nr. 205 vom 12. Juni 1946 eingerichtet. Vgl. Günther/Uhlig (1970), S. 214.
[15] Gruner (1997), S. 308.
[16] Vgl. Mebus (1999), S. 43.
[17] Auch heute werden diese Personen noch als Neulehrer bezeichnet, obwohl sie schon längst nicht mehr als Lehrkräfte tätig sind.
[18] 1952 werden die letzten Kurse der Neulehrerausbildung begonnen, da sie fortan eingestellt wurde. Im April 1953 wird noch letztmalig die 2. Lehrerprüfung abgenommen, sodass bis 1953 noch Neulehrer in den Schulen ihren Dienst antreten. Vgl. die neue schule (1952): 7/35, S. 8.

Die hier verwendete Definition von Neulehrern bezieht sich auf die sorgfältig durch Mebus diskutierte Definition:

> *„Unter Neulehrern sind folglich jene Lehrer mit unterschiedlicher schulischer und beruflicher Vorbildung zu verstehen, die nach 1945 die Tätigkeit als Lehrer auf der Basis entweder absolvierter Kurzlehrgänge oder sofort einsetzender mehrjähriger berufsbegleitender fachspezifischer, pädagogisch-psychologischer und fachdidaktischer Ausbildung auf Lehrgangsbasis ohne akademischen Zuschnitt aufnahmen und ausübten. Für den bleibenden Einsatz als Lehrer mußten sie zwei Lehrerprüfungen ablegen, die ein gründliches Studium und erfolgreiche praktische Erfahrungen voraussetzten.“*[19]

Die Neulehrer sollen in der Grundschule eingesetzt werden. Die Grundschule umfasst nach dem *Gesetz zur Demokratisierung der deutschen Schule*[20] (Ende Mai/Anfang Juni 1946[21]) die Klassenstufen 1 bis 8 und sollte daher nicht mit dem heutigen Begriff der Grundschule verwechselt werden.

3. Die Struktur der Neulehrerausbildung

a. Struktur der Achtmonatskurse

Die Neulehrerausbildung gehört exemplarisch zum Stadium der Improvisation. Dies zeigt sich unter anderem darin, dass sie abhängig von den Orten und der Personalstruktur ist[22]. Somit müsste für eine korrekte Betrachtung, jeder Standort einzeln betrachtet werden. Dies leistet dieser Artikel nicht. Daher wird die in der Literatur gängige Struktur der Neulehrerausbildung beschrieben, auch wenn diese in vielen Einzelfällen anders verlaufen ist[23].

1945 wurde die Ausbildung bis Dezember je nach Ort noch in einer Spannweite von drei Wochen[24] bis zu zwei Monaten[25] absolviert. Durch den SMAD-Befehl Nr. 162 vom 6. Dezember 1945 wird die Kontingentzahl der Neulehrer pro Land festgelegt (vgl. Tabelle 1) und der DVV der Auftrag gegeben, *„Lehrpläne und Programme für die Kurse auszuarbeiten*.“[26]

Land	Ausbildungskontingente
Berlin (sowjetischer Sektor)	1.200
Brandenburg	3.000
Mecklenburg	2.500
Föderales Gebiet Sachsen	9.000
Provinz Sachsen	9.000
Thüringen	4.500
insgesamt	29.200

Tabelle 1: Kontingente der Lehrerausbildungskurse

[19] Mebus (1999), S. 44.
[20] Vgl. Günther/Uhlig (1970), S. 207 ff.
[21] Wurde in den Ländern zu unterschiedlichen Zeitpunkten veröffentlicht bzw. umgesetzt, da bis 1952 die Länder noch eine Art Kulturföderalismus haben und die DVV versuchen soll, dies zu steuern. Vgl. Geißler/Wiegmann (1995), S. 286 f.
[22] Vgl. Gruner (1997), S. 308; vgl. Uhlig (1965), S. 126; vgl. Hohlfeld (1992), S. 73.
[23] So zeigen sich Unterschiede bei den Kursen von der Dauer, über die Vorprägungen der Kursleitungen bis hin zur Struktur. Beispielsweise ist Neulehrer G. (vgl. Geißler/Wiegmann (1997), S. 193-206.) über viele Jahre hinweg ausgebildet worden. Dies wird aus Zeitzeugeninterviews mit sächsischen Neulehrern nicht deutlich.
[24] Vgl. Borneleit (2006), S. 142.
[25] Vgl. Hohlfeld (1992), S. 101.
[26] Günther/Uhlig (1970), S. 194.

Diese Kontingente sind jedoch nur die durch den Befehl gewünschten Zahlen. So treten beispielsweise von den vorgesehenen 9.000 Plätzen in Sachsen lediglich 6.000 Kandidaten diesen Platz an und nur 5.400 absolvieren den Kurs erfolgreich[27]. In den anderen Ländern ist die Situation ähnlich.

Noch im gleichen Monat (am 23. Dezember) erlässt die DVV Richtlinien, die 110 bis 120 Standorte der Neulehrerausbildung mit 240 Teilnehmern je Standort bestimmte. Die Ausbildung der Neulehrer soll fortan in Achtmonatskursen erfolgen. Auch dafür gibt die DVV Stundentafeln für die Ausbildung vor[28]:

Lehrfach		Theoretischer Unterricht	Praktische Übungen
I.	Allgemeinbildender Zyklus		
	1. Fragen der Tagespolitik	32	–
	2. Geschichte Deutschlands in Verbindung mit allgemeiner Geschichte	128	–
	3. Deutsche Sprache und Literatur	128	–
	4. Geographie	64	–
	5. Biologie	64	–
	6. Mathematik	128	–
II.	Pädagogischer Zyklus		
	1. Psychologie	32	32
	2. Pädagogik	64	
	3. Organisation der Arbeit in der Volksschule und Fragen der allgemeinen Methodik	32	32
	4. Didaktische Praxis, Elemente der Handfertigkeit, des Zeichnens usw.	–	64
	5. Methodik der deutschen Sprache	32	32
	der Arithmetik und Geometrie	32	32
	der Naturkunde	32	32
	der Geschichte und Geographie	32	32
	Examen und Vorbereitung dazu	–	96
	Insgesamt	800	352

Tabelle 2 Stundentafel der Achtmonatskurse

Wie aus der Tabelle ersichtlich, sind von den 1.152 Kursstunden 800 Kursstunden (≈ 69 %) theoretisch und 352 praktisch. Die Mathematik hat innerhalb des allgemeinbildenden Zyklus einen Anteil von 23,5 % und innerhalb des pädagogischen Zyklus lediglich einen Anteil von 12,5 %. Insgesamt umfasst Mathematik mit 192 Kursstunden genau ein Sechstel der gesamten Kursstunden.

„Schnellkurs' und ‚Schnellbackverfahren', in denen ‚Häppchenwissen' zum ‚Hineinriechen' und ‚Kennenlernen' vermittelt wurde, so lautete die gängigen Charakterisierungen der Kursausbildung durch die Interviewten.“[29] Grundsätzlich wird in der Literatur beschrieben, dass das Grundschulwissen durch die Kurse wiederholt wird und Wissen der Allgemeinbildung behandelt wird[30].

[27] Vgl. Hohlfeld (1992), S. 120.
[28] Uhlig (1965), S. 133.
[29] Gruner (1997), S. 312.
[30] Vgl. Hohlfeld (1992), S. 106.

Neben der inhaltlichen Ausbildung ist auch der methodische Aspekt des Unterrichts spannend. So findet sich verstärkt in der Neulehrerausbildung, aber auch in den Lehrplänen die Arbeitsschulmethode. Im Vorwort der neuen Lehrpläne 1946 schreibt der Bildungsminister Paul Wandel explizit auf die Umsetzung der Inhalte im Unterricht bezogen:

> *„Die dabei anzuwendende Methode ist diejenige der Arbeitsschule. Auf veraltete Unterrichtsverfahren darf nicht zurückgegriffen werden. […] Auch sollen die verschiedenen Unterrichtsfächer, besonders die inhaltlich verwandten, im Sinne eines ganzheitlichen Unterrichts aufeinander abgestimmt werden.“*[31]

Auch wenn sich diese Methode nicht durchsetzt, ist sie eine besondere Erscheinung dieses Stadiums der Improvisation, da hier versucht wird, diese im Unterricht umzusetzen.

b. Die Arbeitsschulmethode

Die Neulehrerausbildung wird von Personen durchgeführt, die vor allem durch die Weimarer Republik und die Reformpädagogik beeinflusst sind[32]. Daher schreiben Geißler und Wiegmann: *„Der ‚Arbeitsschulgedanke' wurde zweifellos als unterrichtsdidaktisches Prinzip privilegiert.“*[33] Die Arbeitsschulmethode selbst geht auf die Gedanken von Reformpädagogen, wie Hugo Gaudig zurück. Es ist eine Methode, in der die Selbsttätigkeit der Kinder im Vordergrund steht. In einem Aufsatz über den Raumlehreunterricht des Reformpädagogen und Mathematiklehrer Ernst Heywang ordnet Gerda Werth sieben Merkmale der Arbeitsschulmethode in diesem speziellen Fall zu[34]:

1. Bedeutsamkeit des Stoffs für das Kind im Hinblick auf die Bewältigung des Alltags
2. Weniger ist Mehr
3. Lebenswahre Aufgaben
4. Gemeinsam mit Schülern aufgestelltes Unterrichtsziel
5. Selbsttätigkeit des Kindes im Rahmen der Arbeitsgemeinschaft
6. Eher leiten als lenken
7. Die Lösungsansätze der Kinder ernst nehmen

Diese Merkmale können grundsätzlich als Orientierung dienen, um die Arbeitsschulmethode zu beschreiben[35]. Allerdings distanzieren sich einige Fachlehrpläne explizit von diesen Ansätzen, so auch der Mathematiklehrplan, in welchem steht:

> *„Die Methode des Arbeitsunterrichtes ist nicht übertrieben oder gar ausschließlich zu befolgen; gelegentlich ist auch die Methode des Lehrerunterrichtes von Vorteil. […] Querverbindungen sind nicht aufzuspüren oder systematisch zu pflegen. Wo sie sich ergeben, sind sie herauszuarbeiten und sind Zusammenhänge mit anderen Wissensgebieten bewußt zu machen. Ihren Hauptplatz finden die Querverbindungen bei den Aufgaben.“*[36]

---

[31] Mebus (1999), S. 44.
[32] Vgl. ebd., S. 89; vgl. Hohlfeld, S. 105.
[33] Geißler/Wiegmann (1995), S. 197.
[34] Merkmale wörtlich zitiert nach: Werth (2017), S. 22-29.
[35] An dieser Stelle sei jedoch angemerkt, dass es ähnlich wie *die* Neulehrerausbildung auch nicht *die* Arbeitsschulmethode gibt.
[36] DVV (1946b), S. 4.

Aus diesem Zitat wird deutlich, dass für den Mathematikunterricht die Bedeutung der Arbeitsschulmethode nicht unbedingt immanent ist. Dies zeigt sich auch darin, dass bereits 1948 die Arbeitsschulmethode in keinem Lehrplan mehr erwähnt bzw. gefordert wird[37]. Die bereits zu Beginn geäußerte Kritik wurde immer stärker und führte 1947 zum Rückgang der Arbeitsschulmethode[38].

Daher ist sie für die Neulehrerausbildung ein Element des Stadiums der Improvisation und für den Mathematikunterricht sogar noch von weniger Bedeutung, wie sich bereits aus den Lehrplänen zeigt.

4. Das Fach Mathematik in der Neulehrerausbildung

Wie aus der Stundentafel ersichtlich wurde, war Mathematik mit einem Sechstel ein fester Bestandteil der Neulehrerausbildung. Dies liegt unter anderem daran, dass die Neulehrer letztlich alles unterrichten mussten und sich vorerst nicht auf ein Fach spezialisiert haben. In der 1. Lehrerprüfung wird die Mathematik verbindlich von allen abgeprüft, während es in der 2. Lehrerprüfung möglich, aber nicht obligat ist. So heißt es in den Ausführungen zur 1. und 2. Lehrerprüfung: *„Bei der ersten Lehrerprüfung liegt der Ton auf der pädagogischen Eignung und dem allgemeinen pädagogischen Wissen, bei der zweiten auf dem für die Einheitsschule charakteristischen Fachwissen für die Mittelstufe.“*[39] So wird die 1. Lehrerprüfung in Deutsch, Mathematik und einem Wahlfach absolviert (neben Pädagogik, Psychologie und Geschichte der Pädagogik)[40].

Aus den Prüfungsanforderungen für die 1. Lehrerprüfung in Mathematik ist ersichtlich, dass die Prüfungsinhalte nicht über den Unterrichtsstoff von Klasse 8 (in der Zeit) hinausgingen. Fachlich sollen die beiden Bereiche „Arithmetik und Algebra“ und „Geometrie“ beherrscht werden. Die zu prüfenden Inhalte lassen sich folgendermaßen zusammenfassen[41]:

- 1. Arithmetik und Algebra
  Vier Grundrechenarten, Maßsysteme, Rechnen mit Unbekannten, Teilbarkeit, Bruchrechnung, Schlussrechnung, Prozent- und Zinsrechnung, rationale Zahlen, Funktionsgraphen zeichnen, lineare Funktionen, lineare Gleichungen, Verhältnisgleichungen

- 2. Geometrie
  „Geometrische Grundbegriffe, Symmetrie, Ähnlichkeit […] Gerade, Winkel, Dreieck, Viereck, Kreis, Kugel“[42], Flächenmessung von Vielecken und Kreisen (Berechnungen beispielsweise durch Satz des Pythagoras), Körperberechnungen (Quader, Zylinder, Pyramide, Kegel), Zweitafelprojektion

Neben diesen beiden fachlichen Bereichen wird auch die Methodik geprüft. Die Schwerpunkte sind hier das reine Zahlenrechnen (Einführung und schriftliche Verfahren) und das Sachrechnen, Rechnen mit Unbekannten (bis 1000), Dezimalbrüche bei Geld, Anfangsunterricht in Geometrie. Die Inhalte der Methodik gehen somit nicht über die 6. Klasse (in der Zeit) hinaus. Diese drei Bereiche bzw. dieser Teil der Prüfung ist für alle Neulehrer

[37] Vgl. DVV (1948).
[38] Vgl. Geißler/Wiegmann (1995), S. 283 f.
[39] die neue schule (1947): 2/15, S. 24.
[40] Vgl. ebd.
[41] Vgl. die neue schule (1948): 3/7, S. 33.
[42] Ebd.

verpflichtend. In der Prüfungsordnung werden auch verschiedene Buchtitel genannt, die einen Aufschluss darüber geben, auf welche didaktische Herangehensweise bei der Einführung der entsprechenden Themen im Unterricht Wert gelegt wurde.

Literaturauswahl:
Aus Lernen und Lehren: Goldbach: Die Zahlauffassung des Kindes und der erste Rechenunterricht, 1947. Kempinski: Das Einmaleins, 1947. Petzold: Einführung in die Bruch- und Dezimalrechnung, 1947. Siegel: Überall mathematische Körper, 1947. Kempinski: Prozentrechnung, 1948. Siegel: Sehet! der geometrischen Anweisung zweiter Teil, 1948. Kühnel: Neubau des Rechenunterrichts, Leipzig 1925. Gerlach: Schöne Rechenstunden, Leipzig 1920.

Abbildung 1 Literaturempfehlungen für die 1. Lehrerprüfung

In der 2. Lehrerprüfung konnte Mathematik von den Neulehrern frei gewählt werden. Wurde sich für das Wahlfach Mathematik entschieden, mussten fünf thematisch voneinander abgegrenzte Bereiche beherrscht werden[43]:

- A. Volkswirtschaftliches Rechnen
  Schluss-, Prozent-, Promille-, Zins-, Gewinn-, Verlust-, Rabatt-, Diskonto-, Wechsel- oder Wertpapierrechnung, Staffelkontorente, Kettensatz, häusliche und gewerbliche Buchführung (einfach), bargeldloser Verkehr
- B. Arithmetik, Algebra und Analysis
  Lineare (mit mehreren Unbekannten) und quadratische Gleichungen (mit bis zu zwei Unbekannten) sowohl grafisch als auch arithmetisch lösen, Prozentrechnung, Radizieren, Logarithmen, arithmetische und geometrische Reihe, komplexe Zahlen, Differentialrechnung mit trigonometrischen, exponentiellen, logarithmischen Funktionen (auch als Taylor- und Maclaurinreihe), Grundlagen der Integralrechnung
- C. Geometrie
  Ist ähnlich zur Geometrie in der 1. Lehrerprüfung. Hinzu kommen Stümpfe von Kegel und Pyramide und die Kugel
- D. Trigonometrie
  Verhältnisse im Dreieck, Einheitskreis, Mollweidische Formeln, Additionstheoreme, goniometrische Gleichungen, sphärische Dreiecke (rechtwinklig), *„Grundbegriffe der mathematischen Erd- und Himmelskunde“*[44]
- E. Analytische Geometrie der Ebene
  Kartesisches Koordinatensystem, Vektoren, Dreiecksberechnungen, Koordinatentransformation, Kegelschnitte, Diskussion von Quadriken

Damit gehen die Inhalte der 2. Lehrerprüfung bis zur 12. Klasse (in der Zeit) und nicht über den Schulstoff der höheren Schulbildung hinaus.

[43] Vgl. die neue schule (1948): 3/12, S. 36.
[44] Ebd.

5. Hilfen für Neulehrer

Die Situation der Neulehrer war keinesfalls einfach. Ein Bündel von Faktoren bedingt dies:

- Neulehrer wurden aufgrund der Entnazifizierung dringend gebraucht.
- Die Ausbildung der Neulehrer war sehr kurz.
- Während der Ausbildung wurden Neulehrer häufig bereits in der Schule eingesetzt.
- Neulehrer waren in den meisten Fällen vorher in keinem pädagogischen Beruf tätig.
- Neulehrer waren an einen festen Ort gebunden (außer bei Tauschmöglichkeit)[45].

Außerdem wurde in der Mathematik mit den neuen Lehrplänen die Fachwissenschaft verstärkt. *„Dies kommt z.B. in der Aufnahme des damals sogenannten ‚Buchstabenrechnens' und ‚Rechnens mit relativen Zahlen' zum Ausdruck*"[46].

Die Zeitschrift *„die neue schule*" bietet Hilfestellungen für den pädagogischen Alltag an. Die meisten Artikel sind eher aus den Bereichen Deutsch und Geschichte bzw. beschreiben die aktuelle Bildungsstruktur. Dennoch gibt es auch Artikel zur Mathematik und/oder zum Mathematikunterricht. Es gibt sogar im Zeitraum von 1946 bis 1950 zwei Ausgaben, die einen Schwerpunkt in der Mathematik haben: Heft 10 von 1946 und Heft 11 von 1947. In diesem Zeitraum erscheinen insgesamt 59 Artikel, von denen 28 konkrete Unterrichtsstunden thematisieren (beispielsweise *Gerhard Geißler: Einführung in den Zahleninhalt der 6*[47]), 10 Artikel explizit mathematische Themen behandeln (beispielsweise *Manfred Berliner: Gleichungen*[48]) und 21 Artikel eher über den mathematikdidaktischen Umgang mit Themen schreiben (beispielsweise *Karl Pietzker: Funktionales Denken in der Grundschule*[49]). Die Zuordnung zu diesen Bereichen ist dabei nicht immer eindeutig. Eine ausführliche Aufarbeitung dieser Artikel und der weiteren Jahrgänge steht jedoch noch aus.

Die mathematischen und naturwissenschaftlichen Inhalte gehen in der Zeitschrift immer weiter zurück. Dies liegt unter anderem daran, dass ab 1949 die Zeitschrift *„Mathematik und Naturwissenschaften in der neuen Schule*" erscheint, in der Artikel nur zu diesen Bereichen publiziert werden. So heißt es im Vorwort der ersten Ausgabe dieser Zeitschrift: *„Dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht kommt in der neuen Schule erhöhte Bedeutung zu. Die Zeitschrift […] ist bestrebt, an der Erreichung der besonderen Bildungs- und Erziehungsaufgaben in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern mitzuwirken.*"[50] Dass der Bedarf an Artikeln aus diesem Bereich hoch ist, zeigt auch, dass es die Zeitschrift in der Konstellation nur bis 1951 gibt. Anschließend wird sie zu *„Mathematik, Physik und Chemie in der neuen Schule*" (1952-1954), dann zu *„Mathematik und Physik in der Schule*" (1954-1963) und ab 1963 nur noch zu *„Mathematik in der Schule*".

Neben den Zeitschriften können sich die Neulehrer auch mit weiterführender Literatur oder dem Austausch mit anderen Neulehrern und Altlehrern helfen. Allerdings erkennt auch der Staat, dass es notwendig ist, an der Übergangslösung etwas zu ändern. Bereits am 12. Juni 1946 wurden durch den SMAD-Befehl Nr. 205[51] pädagogische Fakultäten an den Hochschulen eingerichtet, um die Neulehrer besser ausbilden zu können.

---

[45] Dies zeigt sich aus den vielen Suchanzeigen im Jahrgang 2 von „die neue schule" (1947), in denen Neulehrer ihren Standort zum Tausch anbieten.
[46] Borneleit (2003), S. 32.
[47] die neue schule (1946): 1/1, S. 23-24.
[48] die neue schule (1947): 2/14, S. 18-20.
[49] die neue schule (1948): 3/20, S. 23-26.
[50] Mathematik und Naturwissenschaften in der neuen Schule (1949): 1/1, S. 1.
[51] Vgl. Günther/Uhlig (1970), S. 214.

In stärkerem Maße kommt Kritik an der Neulehrerausbildung und der Wunsch nach Qualifizierung der Lehrkräfte an den Schulen auf. Im Laufe der Zeit wurden auch Alternativen geschaffen, sodass die Ausbildung in dem bislang durchgeführten Sinne nicht mehr notwendig ist. Die Neulehrerausbildung wird jedoch erst 1952 in der DDR endgültig beendet. So heißt es in dem eingangs erwähnten Artikel:

> *„Das Stadium des Improvisierens kann […] überwunden werden, wenn alle Mitarbeiter durch eine offene Kritik und Selbstkritik den Kampf gegen noch vorhandene unwissenschaftliche Arbeitsmethoden aufnehmen und sich in ihrer täglichen Arbeit von den Erkenntnissen der fortschrittlichen Wissenschaft leiten lassen. […]*
> *In Zukunft soll es in unseren Schulen nur noch vollausgebildete Lehrer geben, die nach dem Studium an einem Institut für Lehrerbildung* [für Klasse 1-4]*, an einer pädagogischen Fakultät* [für Klasse 5-8] *oder nach einem Universitätsstudium* [für Klasse 9-12] *in den Schuldienst eintreten* “[52]

Ab diesem Zeitpunkt wird der Begriff Neulehrer auch nicht mehr auf die aktuelle Ausbildung von Lehrkräften bezogen und verwendet. Diese heißen nun vor allem Lehramtsanwärter.

6. Fazit

Die Ausbildung von Neulehrern in der Zeit von 1945 war noch wenig strukturiert und in ihrer Dauer von drei Wochen bis zwei Monaten sehr kurz und variabel. Ab 1946 bis 1952 wurden sie in Achtmonatskursen ausgebildet. Die dazugehörige Struktur wurde sehr schnell geschaffen, jedoch war sie noch nicht ausgereift. Für eine bessere Ausbildung von Lehrkräften werden deshalb bereits 1946 pädagogische Fakultäten parallel zur Neulehrerausbildung eingerichtet.

Es zeigt sich jedoch, dass die Neulehrerausbildung nicht tiefgehend fachspezifisch war, sondern sehr breit gefächert. Neulehrer mussten in der Grundschule der sozialistischen Einheitsschule alle Fächer unterrichten, damit fehlt die Fokussierung und eine Spezialisierung in einem Fach ist nahezu unmöglich. Dies führt gerade in der Mathematik dazu, dass es ihnen nicht möglich sein konnte, das Schulthema in seiner Gänze und Wirkung in Bezug auf andere Themen (oder von einem höheren Standpunkt) zu betrachten[53].

Die Ausbildung war aufgrund des hohen Mangels an Lehrkräften und der stark vorgesehenen Entnazifizierung für die Zeit absolut notwendig und es ist beachtlich, wie viele Personen innerhalb kürzester Zeit zu Neulehrern ausgebildet werden konnten[54]. Aus der fachlichen (und nicht aus der pädagogischen) Perspektive ist jedoch genau diese Ausbildung fragwürdig und bedenklich. Daher gehört die Neulehrerausbildung zum Stadium der Improvisation.

[52] die neue schule (1952), 7/35, S. 7.

[53] Beispielsweise dient so (wie in den Ausbildungsinhalten der 1. Lehrerprüfung) der Satz des Pythagoras lediglich zur Längen und damit zur Flächenberechnung. Bezüge zu den Verhältnissen zwischen den Winkeln und den Seiten im Dreieck beziehungsweise zum Einheitskreis fehlen daher völlig.

[54] Keller schreibt dazu, dass 1949 *„in Sachsen 79,2 Prozent Neulehrer in den Schulen“* tätig sind. Keller (2002), S. 278.

Literatur:

- Borneleit, Peter (2003): *Lehrplanerarbeitung und Schulbuchentwicklung in der DDR*, in: Bender, Peter/Hennig, Herbert (Hrsg.): Didaktik der Mathematik in den alten Bundesländern – Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR – Aufarbeitung einer getrennten Geschichte, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, Universität-GH Paderborn, Fakultät EIM, S. 26-49.
- Borneleit, Peter (2006): *Zur Etablierung der Methodik des Mathematikunterrichtsan Universitäten und Hochschulen in der Sowjetischen Besatzungszone 1946-49.* – In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker Verlag, Bad Salzdetfurth, S. 139-142.
- DVV (1946a): *Lehrpläne für die Grund- und Oberschule in der Sowjetischen Besatzungszone Deutschlands. Vorwort, Gesetz zur Demokratisierung der deutschen Schule, Stundentafeln*, Volk und Wissen Verlag, Berlin/Leipzig.
- DVV (1946b): *Lehrpläne für die Grund- und Oberschule in der Sowjetischen Besatzungszone Deutschlands. Mathematik, Physik, Chemie*, Volk und Wissen Verlag, Berlin/Leipzig.
- DVV (1948): *Lehrpläne für die Grund- und Oberschule in der Sowjetischen Besatzungszone Deutschlands. Rechnen und Mathematik*, Volk und Wissen Verlag, Berlin/Leipzig.
- Geißler, Gert/Wiegmann, Ulrich (1995): *Schule und Erziehung in der DDR. Studien und Dokumente*, Hermann Luchterhand Verlag, Neuwied u.a., S. 193-206.
- Gruner, Petra (1997): *Wie Neulehrer Lehrer wurden. Anlehnungs- und Abgrenzungsstategien in der Berufssozialisation von Neulehrern*, in: Tenorth, Heinz-Elmar (Hrsg.): Kindheit, Jugend und Bildungsarbeit im Wandel. Ergebnisse der Transformationsforschung, Beltz Verlag, Weinheim/Basel, S. 307-332.
- Günther, Karl-Heinz/Uhlig, Gottfried (1970): *Dokumente zur Geschichte des Schulwesens in der Deutschen Demokratischen Republik. Teil 1: 1945-1955*, (=*Monumenta Paedagogica VI*), Volk und Wissen Verlag, Berlin.
- Herrlitz, Hans-Georg et al. (2009[5]): *Deutsche Schulgeschichte von 1800 bis zur Gegenwart*, Juventa Verlag, Weinheim/München.
- Hettwer, Hubert (1976): *Das Bildungswesen in der DDR. Strukturelle und inhaltliche Entwicklung seit 1945*, hrsg. von Wolfgang Keim, Kiepenheuer & Witsch Verlag, Köln.
- Hohlfeld, Brigitte (1992): *Die Neulehrer in der SBZ/DDR 1945-1953. Ihre Rolle bei der Umgestaltung von Gesellschaft und Staat*, Deutscher Studien Verlag, Weinheim.
- Keller, Katrin (2002): *Landesgeschichte Sachsen*, UTB-Verlag, Stuttgart.
- Mebus, Sylvia (1999): *Zur Entwicklung der Lehrerausbildung in der SBZ, DDR 1945 bis 1959 am Beispiel Dresdens. Pädagogik zwischen Selbst- und Fremdbestimmung*, Greifswalder Studien zur Erziehungswissenschaft, Peter Lang Verlag, Frankfurt a.M. u.a.
- Uhlig, Gottfried (1965): *Der Beginn der antifaschistisch-demokratischen Schulreform 1945–1946* (= *Monumenta Paedagogica II*), Akademie-Verlag, Berlin.
- Volk und Wissen (1946-1952): *die neue schule*, Jg. 1-7.
- Volk und Wissen (1949-1951): *Mathematik und Naturwissenschaften in der neuen Schule*, Jg. 1-3.
- Werth, Gerda (2017): *„Guter" Raumlehreunterricht aus der Sicht des Reformpädagogen und Volksschullehrers Ernst Heywang*, in: Der Mathematikunterricht, Jg. 63, Heft 2, S. 17-33.

Research on the foundations of mathematics and the development of mathematics

Introduction

The studies of the foundations of mathematics initiated by G. W. Leibniz are of great importance for the development of mathematics. These studies were intensively continued in the 19th and early 20th centuries. In my work, I refer mainly to research conducted by Polish mathematicians, especially within the Polish Mathematical School. They played the main role in characteristic of that School, apart from strictly mathematical results. The most important research areas were: probability, trigonometric series, geometry, set theory and mathematical logic, topology (geometric and algebraic), mathematical analysis.

These studies often led to the creation or development of new mathematical subdisciplines, for example, functional analysis, geometric topology, mathematical statistics, theory of real functions and trigonometric series, game theory, measure theory. It became natural to treat mathematics as a universal science and search for its various applications. Prominent mathematicians created their research programs, which other researchers joined, and which turned out to be crucial for the development of mathematics and other sciences. However, universality was understood in different way by them.

Stanisław Ulam's remarks and general scheme of research

Stanisław Ulam in an article published in 1969 in the "Wiadomości Matematyczne", recalling the Polish mathematical environment of the interwar period, emphasizes that "a significant part of mathematics' achievements in Poland during the interwar period is an important stage in creating the foundations of modern world mathematics. They influence not only the subject, but also the tone of contemporary research. (...) Despite growing diversity and specialization, and even the hyperspecialization of mathematical research, research directions and threads from various and independent sources often converge. (...) If I would like to determine the main characteristic of this school, I would first of all point out interest in the foundations of various theories. By this I mean that if one were to consider mathematics as a tree, the Lwow group would study the roots and stems, perhaps even the main branches, less interested in side shoots, leaves and flowers." (S. Ulam, p. 51)

General scheme of research in Polish School of Mathematics (PSM):

- Analysis of the concepts and principles underlying the theory

- Pointing to specific contradictions in the basics
- Showing the possibilities of solving them by defining new concepts, methods and building new mathematical theories
- Showing applications of new theories to other fields of science and philosophy, including the need to clarify certain philosophical concepts

Some of research programs that were realized in PSM:

- Mazurkiewicz's program – studies of the foundations of probability theory, building probability theory on algebraic basics and showing its wide application,

- Steinhaus' program – searching of analogies between different theories and sytuations; showing and revealing the presence of mathematics in the real world,

- Janiszewski's – using set theory (including mathematical logic, topology and theory of functions) to study the foundation of mathematics; exploring the possibilities and rationality of philosophy with the help of mathematics,

- Neyman's – mathematical statistics construction,

- mathematical foundation research of natural sciences (Zaremba, Nikodym, Żorawski),

- Ważewski's – applying topological methods to differential equations,

- Banach's – unification of mathematics around methods of functional analysis,

- Sierpinski's (investigating the consequences of the choice axiom and its alternative versions),

- Śleszyński's – clarifying the foundations of mathematics with the help of logic,

- Łukasiewicz's – building a scientific philosophy using methods of mathematical logic; algebraization of logic and logical theory of probability,

- Leśniewski's – building an alternative set theory (mereology) and logic in line with common sense,

The studies of foundation of probability

This tendency to study „roots and stems" appeared already before the establishment of the Polish Mathematical School. Of particular interest is the example of probability theory, which became a great challenge for researchers at the turn of the 19th and 20th centuries. Polish mathematicians and logicians undertook this challenge by giving many interesting ideas and solutions. The studies of Władysław Gosiewski, Hugo Steinhaus, Jan Łukasiewicz, Stefan Mazurkiewicz, Janina Hosiasson-Lindenbaum, Mark Kac and Jerzy Spława-Neyman are significant. In these forms there are at least four trends of probability research: logical, philosophical, strictly mathematical and related to applications. In each of these cases, I think that the concentration on studying the foundations of mathematics is the most important.

For example, let's look at the essence of the Stefan Mazurkiewicz program. On the verge of independence of Poland, January 17, 1918, at the Meeting of the Faculty of Mathematical and Natural Sciences of the Warsaw Scientific Society, Stefan Mazurkiewicz gave an inaugural address on the foundations of probability theory.

- He referred to the enthusiasm of the 17th century scholars who formulated the basic concepts and theorems of the probability theory and to criticize the foundations of this theory that took place at the turn of the 19th and 20th centuries.
- Then he pointed to research they sought to save the achievements of the classical theory of probability and to avoid the indicated contradictions by building it on other foundations.

"The reaction in this work is against the excessive skepticism of the critics of classical theory, and attempts to reconstruct the latter on a different basis. Undoubtedly, the direction of scientific interest was caused by the dissemination of probability-based statistical methods, which are today indispensable both in physics and in the descriptive natural sciences. Difficulties that arise when studying the basis of probability theory are perhaps greater than in any other branch of mathematics, mainly, I **think, because of the ambiguity and indistinct content of basic concepts such as probability, event etc. – and because of the boundaries between the real world and the realm of mathematical concepts are very obliterated in our theory**." (S. Mazurkiewicz 1918, p. 2)

The indicated difficulties are a special challenge for mathematicians, and their solution provides a field for a variety of applications. For

Mazurkiewicz, the key issue is to determine the proper axioms, from which building basics of mathematical theory must begin. **It is also the area of contact between mathematics and logic and philosophy**. Mazurkiewicz thus proposes a logical analysis of probability theory (and other mathematical theories) as a prelude to further mathematical (path up) and philosophical (path to depth) research.

As part of logical analysis, it is about identifying the original concepts and postulates (i.e. sentences on which the theory is based). Philosophical research on the ideal content of the original concepts; relations to the real world and the nature of postulates are a necessary stage of research, although they are no longer included in the field of mathematics.

Mazurkiewicz proposes to deal with the very determination of probability and two theorems on probability – law of total probability and comound probability and the theory of possible (random) variables and the law of large numbers. In their examination and refinement, the key is to fully mathematize the theory of probability and to reliable philosophical research.

Mazurkiewicz's proposal is correlated (but not identical) with the proposals of Władysław Gosiewski (maximal wide uses of probability calculus) and Jan Łukasiewicz (algebraization of logic and building logical probability theory).

Jerzy Spława-Neyman's Project

Jerzy Spława-Neyman is one of the founders of modern mathematical statistics. He also has a significant contribution to the development of the probability theory. His research, however, proceeds in accordance with a clearly defined program in which an essential element is to study the foundations of mathematics. Thanks to these research, he used the tools of pure mathematics to describe statistical phenomena, combined theory and practice, introducing methods and concepts: "confidence intervals", "probes sample", "test hypothesis" or "generalized chi-square test".

Together with E. Pearson, he conducted research on the theory of nonparametric tests, the theory of decision-making functions. He showed many applications of these theories in meteorology and environmental pollution research. He built the theory of sampling (1934). Neyman noticed almost unlimited possibilities of applying his methods and all mathematical statistics to very diverse areas of life and science, among others for attempts to precipitate precipitation, econometrics, study of the mechanism of cancer formation, traffic engineering, environmental pollution, demography, factor analysis in psychology (Neyman 1979).

He also used statistical methods to study the problem of indeterminism. He proposed, in relation to many phenomena, to introduce the concept of "stochastic process", exceeding the classical division into deterministic and indeterministic phenomena. These studies led him to build stochastic models. By the way, he showed that statistics are involved in the discussion of the fundamental issues of the philosophy of science (Neyman 1960, p. 625-639).

Studies of trigonometric series

Another important issue was the study of trigonometric series convergence (structure of a set of uniqueness). Aleksander Rajchman, Antoni Zygmund and Józef Marcinkiewicz took part in it. General research on the trigonometric series was initiated by Riemann in 1954. The aim was to examine what the structure of expanding functions in a trigonometric series must have i.e. a series of the form $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ and how to calculate expansion coefficients.

The problem of unambiguous development was also crucial. He led to the following question: if the series is convergent to zero, also its coefficients must be equal to zero? Then it would be impossible to have two different developments of the same function. Borel's research introduced the concept of uniqueness set (*U*-set), so such sets that the convergence of a series beyond it to zero leads to the zeroing of coefficients. It was to examine the structure of such a set.

Until Zygmund the strongest result was the statement of H. Young from 1909 saying that the set *U* is a countable set. A. Rajchman proved that the Cantor set is also a *U*-set. In 1923 N. Bari and A. Zygmund (in the doctoral dissertation) proved independently that the countable sum of uniqueness sets is a uniqueness set.

Clearly uniqueness sets have measure zero. However, Zygmund has shown that there are sets $U(\varepsilon)$ (ε is a sequence of positive numbers $\{\varepsilon_n\}$ convergent to zero) of a positive measure, where the sets $U(\varepsilon)$ being „close" to the uniqueness sets. They have the property that if $x \notin U(\varepsilon)$ and $|a_n| \leq \varepsilon_n$ a, then the convergence of the series $\sum_{n=-N}^{n=N} a_n e^{inx}$ to zero results in the zeroing of coefficients a_n. (E. Stein, p. 1130 - 1140)

The study of the basics of geometry

The development of mathematics was significantly influenced by the study of the basics of geometry. The best known are the works of B. Bolzano,

G. Cantor and D. Hilbert in this regard. Of particular interest is the case of Polish mathematicians (Janiszewski, Mazurkiewicz, Sierpiński, Knaster, Kuratowski, Saks) – co-creators of geometric topology.

In the Warsaw School of Mathematics with the origin and developmet of gemetric topology was connected the program of researching of geometry foundations by topological and set theoretical tools. Geometric topology, in particular continuum theory, was the main object of research by polish mathematicians. They searched for the basic characteristics of elementary geometric objects such as arc, curve, sphere.

Many previous intuitions have been corrected by these studies. It turned out that there exists a curve containing no arc and that an arc is not the only plain continuum homeomorphic to every of its proper subkontinua. Polish mathematicians also continued L. Zoretti's investigations of irreducibility concept introduced by him in 1909. It was constructed many objects with very unexpected properties, for example Knaster's continuum (pseudo-arc), Knaster-Kuratowski fan, Warsaw circle and many others.

To capture the continuum problem were constructed new concepts (and corelated to them theorems), for example: condensation continuum, compact set, connected set, continunum (in topological sense), irreducible continuum (a continuum is called irreducible, between two of its points, if no proper subcontinuum contains these points). The simplest example is an arc).

The basics of set theory and topology

The basics of set theory and topology were also investigated, among other things consequences of accepting a choise axiom or continuum hypothesis (W. Sierpiński, A. Tarski). In turn, S. Leśniewski constructed an alternative set theory (mereolology), trying to eliminate the antinomies found in its foundations. K. Kuratowski again gave an alternative axiomatization of topology and developed a descriptive set theory. Finally, Borsuk and S. Eilenberg develop algebraic topology.

Hugo Steinhaus' programm

Of particular relevance are studies of the foundations of mathematics conducted by H. Steinhaus. As part of the universality of mathematics program he searched for concepts, structures and theorems having equivalents in other areas of mathematics and beyond mathematics. He did not recognize rigid boundaries between particular mathematical disciplines, as well as between mathematics and other fields of science.

He also believed that mathematics is a part of reality, in every sense of the word, and therefore a part of nature, an element of the world of culture and is of importance for every human being, for raising his intellectual level and quality of life. He showed the possibility of constructing the **probability theory** with the help of the theory of measure and introduced and studied the **notion of stochastic independence**. He also made an important step towards building a unified **game theory** (the concept of strategy). These studies have pushed him towards the wide **applications of mathematics**.

Two examples

- Hugo Steinhaus (14 I 1887 Jasło - 25 II 1872 Wrocław)
- Samuel Eilenberg (30 IX 1913 Warsaw - 30 I 1998 New York)

Hugo Steinhaus (14 I 1887 Jasło - 25 February 1872 Wrocław) mathematician, science promoter, aphorist. Son of Bogusław, director of the credit cooperative and Ewelina Lipschitz-Widajewicz; Ignacy's nephew, member of the Austrian parliament, activist of the Polish Circle in Vienna; brother-in-law of Leon Chwistek (Olga's husband); married to Stefania Smosz (from 1917).

Steinhaus played a significant part in building of the mathematical **game theory**. He was its precursor and co-originator. In 1925 he published the work *Definitions for a theory of games and pursuits* (in polish, „Myśl Akademicka", pp. 13-14). The work was translated and published in Naval Research Logistics Quarterly in1960 (no 7, pp. 105-108). He defined the idea of strategy (before John von Neumann, he called it as "mode of play") and developed the mathematical foundation of game theory and its application.

Some years later Steinhaus (with J. Mycielski) formulated the axiom of determinateness (*A mathematical axiom contradicting the axiom of choice, 1962*). Besides game theory it plays a significant role in researches of set theory. It implies the negation of the axiom of choice but, on the other hand, it gives possibilities of building a weaker version of set theory (it allow to avoid problems connected with the use of the choice axiom).

Main Thoughts in the article *Definitions for a Theory of Games and Pursuits*:

A Hierarchy of mathematical problems:

- The first class – solving, for example, mathematical equations by means of known methods
- The second class – searching for new methods of solving and considerations on existing of solutions
- The third class – trials of defining of new kind of mathematical entities for example, for example after observation that equation has no solution in the domain of real numbers

Steinhaus consider that searching for definition for a theory of game belongs to the third class. Moreover these issues were beyond the strict area of mathematics. There was a need for a definition of “the best move in given circumstances”: But the definition led us to vicious circle because the best move of White (for example) depends on the best move of Black. As rescue Steinhaus proposes **a new definition “mode of play” (it is *de facto* the concept of “strategy”).** Presentation three different situation in which his method is effective and showing an analogy between them (game of Chess, pursuit, game of chance).

Samuel Eilenberg (30 IX 1913 Warsaw - 30 I 1998 New York), a mathematician – a disciple and representative of the Warsaw school of mathematics.

Mathematical fields such as category theory and homologous algebra created by Eilenberg - in cooperation with Sauers MacLane and Henri Cartan - presently constitute an important branch of mathematics, associated with many other branches. The introduction of a categorical point of view and the axiomatization of the theory of homology (together with N. Steenrod) have influenced the direction of development in huge areas of mathematics.

It should be noted that the beginnings of many fundamental aspects of his work can be found in papers and activities from the Warsaw period (this is a little-known fact which was noticed by prof. Stefan Jackowski in his article from 2014). Karol Borsuk, Bronisław Knaster, Kazimierz Kuratowski (important representatives of the Warsaw school of mathematics) and Witold Hurewicz (also asocciated with PSM) – had a great influence on him.

His master's thesis about transformations of the periodic surface of the sphere, published then in Fundamenta Mathematicae, pointed to his interests in algebra and topology. The work contained a gap supplement in proof of von Kerékjártó's theorem, that any periodic homeomorphism of the two-dimensional sphere is equivalent to the Euclidean isometry.

The years 1933-1939 (Warsaw period) were the most intense period of Eilenberg's publishing activity (he published 35 papers, most of them in *Fundamenta Mathematicae*. It was during this period that ideas, theorems and arguments were born, which were later developed. It was in cooperation with the Warsaw school of mathematics that he explored the basics of set theory and topology and developed an interest in algebraic topology.

References

(1) Jackowski S., *Samuel Eilenberg – wielki matematyk z Warszawy,* „Wiad. Mat." 50 (2014), s. 21-43.

(2) Mac Lane S., *Samuel Eilenberg a topologia,* „Wiad. Mat." 25 (1984), s. 229-241.

(3) Mazurkiewicz S., *O podstawach teorii prawdopodobieństwa*, „Sprawozdania z Posiedzeń Wydziału Nauk Matematycznych i Przyrodniczych Towarzystwa Naukowego Warszawskiego" 11 (1918).

(4) Mostowski A., *Thirty Years of Foundational Studies*, „Acta Fennica Philosophica", t. 17 (1965).

(5) Neyman J., *Narodziny statystyki matematycznej*, "Wiad. Mat." 22 (1979).

(6) Neyman J., *Indeterminism in Science and New Demands on Statisticians,* „Journal of the American Statistical Association" 55 (1960).

(7) Stein E.: *Singular Integrals: The Roles of Calderón and Zygmund,* „Notices Amer. Math. Soc." 45 (1998).

(8) Steinhaus H*., Czem jest a czem nie jest matematyka,* H. Altenberg, Lwów 1923.

(9) Steinhaus H., *Definitions for a Theory of Games and Pursuits,* „Naval Research Logistics Quartely" 7 (1960).

(10) Steinhaus H*., Podstawy geometrii,* Lwów 1925.

(11) Ulam S. *Wspomnienia z Kawiarni Szkockiej,* „Wiadomości Matematyczne", seria II, t. XII (1969).

(12) Ulam S., *The Scottish Book,* Michigan 1957.

(13) Wójcik W., Fenomen polskiej szkoły matematycznej a emigracja matematyków polskich w okresie II Wojny Światowej, w: „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" LIII (2013), s. 11–52.

Wiesław Wójcik

Institute of Philosophy, Jan Długosz University, al. Armii Krajowej 34a, PL 42-200 Częstochowa, Poland and
L&A Birkenmajer Institute for the History of Science, Polish Academy of Sciences, ul. Nowy Świat 72, PL 00-330 Warsaw, Poland
e-mail:wwoj@ihnpan.waw.pl

Wolfgang Breidert, Peter Ullrich, Holger Wuschke, Herwig Säckl

The development of descriptive set theory in the XXth century

and the problem of the structure of numerical continuum

S.S. Demidov (Moscow)

1. N.N. Luzin and the beginning of his mathematical career

N.N. Luzin was born in 1883. After his graduation from the gymnasium in Tomsk in 1901 he entered in the mathematical department of the Faculty of mathematics and physics of the Moscow University. At the University he became close friend with P.A. Florensky – a student one academic year older, who later became the famous theologian, philosopher and naturalist exercising a very strong influence on Luzin.

It might be stressed that Florensky did not intend to become a mathematician. He wanted to become an Orthodox theologian. For him the mathematical education constituted only the first step, necessary for serious comprehension of philosophy and theology. In the first year of his university life he interested very much in the set-theoretic works of G. Cantor and in 1904 he published an article «On the symbols of infinity» – the first exposition of Cantor's ideas in Russian. But as a student of the mathematical department Florensky was formed as theologian and his approach to Cantor set theory was exclusively based on theological point of view. In his exposition of Cantor's ideas the mathematical aspect played a subordinate role. So, Cantor's concept of transfinite ordinal numbers was for him, first of all, the key to solve the problem regarding the Celestial Hierarchy. I say about it because his polemic on the actual infinity with Luzin played a very important role in order to understand Luzin's conception on infinity.

If Florensky prepared himself for theologian career, Luzin chose an other direction: he would be a mathematician. As mentor he preferred a young professor D.F. Egorov, who was a remarkable mathematician and an excellent teacher, under whose guidance Luzin grew up in one of the largest Russian mathematicians of the twentieth century. As a thoughtful leader, Egorov tried to protect his talented but not yet totally formed student from the dangers that lay in wait for the young soul during the forthcoming revolutions. When in 1905 the well-known revolutionary events unfolded in Moscow, Egorov, having learned that the revolutionary comrades had dragged Luzin into the thick of these events, had used all his possibilities to send his young protégé to Paris. There Luzin had the opportunity to attend H. Poincaré's lectures on decompositions into the series of perturbation functions of celestial mechanics, E. Borel's courses on the theory of entire functions, J. Hadamard's lessons regarding the theory of wave propagation and G. Darboux's lectures on the theory of surfaces. He also tried to have enough time to enrich his knowledge visiting the Parisian libraries. In this intellectual atmosphere Luzin became interested in the theory of sets. In a letter to Florensky dated May 1 (14), 1906, he writes [1, p. 136 – 138]: "At the moment, I'm interesting in science only in *principles, symbolic logic and set theory* … Borel deals with it (with set theory – S.D.), but from some special point of view … He considers *continuum* as incapable to be *bien ordonné*". Thus, already in May 1906 Luzin was attracted by topics raised from the discussion regarding the axiom of choice. In 1906, he returned to Moscow, completed his candidate composition and at the end of the same year after passing the state examinations and obtaining a first-degree diploma, he was left by Egorov at the faculty in order "to prepare the professorship". In 1909 he passed the master's examinations and in 1910 became a privat-docent of the Moscow University. He was to start teaching. But this intention was not realized: in the autumn of 1910 by Egorov's efforts he was sent on a scientific trip to Göttingen and Paris. During this scientific trip, he was actively engaged in research in the theory of functions of a real variable and according to E. Landau's advice sent to Palermo his paper "On Power Series", which was published in the *Rendiconti* of the Circolo Matematico di Palermo in 1911 (it was his first publication), attended J. Hadamard's seminar, met E. Picard, E. Borel, H. Lebesgue and A. Denjoy. This trip lasted until the summer of 1914 (in passing we note that in August Russia entered the First World War) and was extremely fruitful. In the *Comptes Rendus* of the Academy of Sciences of France appeared his famous papers on the C-property and on the theory of power and trigonometric series. He returned to Moscow with the thesis "Integral and trigonometric series", which he had already accomplished in the main features, and as soon completed it, this thesis was published in 1915, and defended in April 1916: the jury decided to recognize this thesis as an outstanding scientific work and to award him, by passing the master's degree, the degree of doctor of pure mathematics. This was a triumph for the young mathematician. In those years another important event was the birth of his school, one of the most glorious mathematical schools of the twentieth century – the legendary Luzitania. Upon his return to Moscow in 1914, he began to give a special course on the theory of functions of a real variable. “This special course. which he lectured from year to year, and the seminar which accompanied it ... became the center from which the Moscow School of Theory of Functions grew – a remarkable monument of scientific activity of Luzin” – we can quote in his biography, written by N.K. Bari and V.V. Golubev [2, c. 475].

In 1914 – 1917 at this seminar appeared the first generation of Luzin students – i.e. D.E. Men'shov, M.Ya. Suslin, A.Ya. Khinchin, P.S. Alexandrov. The first results of Khinchin were exposed by the author in the fall of 1914 during the meeting of the student's mathematical circle. Luzin included these results in his thesis. However in 1916, in the *Comptes Rendus* of the French Academy of Sciences, was published Khinchin's note concerning the generalization of Denjoy integral. In this year and in the same scientific edition was published Men'shov's article, containing an example of trigonometric series with nonzero coefficients that converges almost everywhere to zero.

In the same year and again in the *Comptes Rendus* of the Academy of Sciences of France appeared the communication of Aleksandrov, who was also at that period an university student. In this paper he proved that every uncountable Borel set has the power of a continuum. And since at the time it was generally considered that the Borel sets exhaust all the sets actually used in mathematics, this result could be in a certain sense regarded as the solution of the continuum hypothesis. Finally, in the same year 1916, the third-year student M.Ya. Suslin, using the operation introduced by Alexandrov, constructed an example of a set that was a projection of a Borel set, but it did not constituted a Borel set [3]. This example, published in 1917 in the same Parisian *Comptes Rendus*, provoked a true sensation. It turned out that the sets actually used in mathematics are not closed in the class of Borel sets. (We must stress that in that year the revolution broke out in Russia.) These new sets, called Suslin or A-sets, or analytic sets constituted object in a great demand of research Luzin's school, which in that way became the leader in descriptive set theory. In the future from this school has grown if not the entire Soviet mathematical school, then one of its main components. And, of course, this hard work regarding the problems of set theory and functions, in which Luzin worked since the First Russian Revolution, undoubtedly provoked him to go deeper into the problems of set theory, into the mysterious infinity. When he began to immerse himself in these topics, he remained a young novice explorer, for whom his great French teachers were the indisputable authorities. And in that time all of them were involved in one way or another in the famous discussion regarding Zermelo's axiom. In this atmosphere of controversy around Zermelo's axiom, Nikolai Nikolayevich's talent grew and flourished.

2. **Axiom of choice and N.N. Luzin**.

In 1904 during the International Congress of Mathematicians in Heidelberg, the Hungarian mathematician J. König presented his communication untitled "On continuum's problem" [4], which among other things contained the statement that it is impossible to represent a continuum as a completely ordered set. In the same year in his paper [5] E. Zermelo gave the proof of the well ordering theorem. At the kernel of his proof existed a statement that later was known as the axiom of choice or Zermelo's axiom, which he formulated as follows [5, p. 516]: "For an infinite collection of sets, there always exists a mapping (Zuordnung) in which each set corresponds to one of its elements" (see [6]). The appearance of these two statements, contradicting each other, was considered objectionable by numerous mathematicians. Among the first manifestations was the note of Hadamard [7], in which was expressed a doubt, the essence of which was reduced to the non-obviousness of the fact that the operation of selecting an element from each set of an infinite family could be subordinated to some law. This note marked the beginning of the well known discussion that began in 1905 on the pages of the 33rd volume of the *Bulletin of the French Mathematical Society*, in which participated J. Hadamard, E. Borel, R. Baire and H. Lebesgue.

Borel considered that it is important to accurately separate the mathematical entities which a mathematician could regard as existing, from those that only seem to be real, but that nothing "really" corresponds to. This distinction constituted the basic topic of this discussion. According to the axiom of choice, Borel doubted even in its applicability regarding the case when the sets from which the choice is made are subsets of the continuum.

Hadamard did not see anything doubtful in this set-theoretic idea of infinity and considered as legitimate the use the axiom of choice. Borel called "idealists" the supporters of this position. Borel himself (together with Baire and Lebesgue) believed that set-theoretic concepts and principles need to be revised: in mathematics an unlimited use of the infinite’s concept and this of the axiom of choice could lead to conclusions lacking epistemological meaning. Borel called the supporters of this approach "realists" as he believed that the construction using the axiom of choice does not give an individual object, but only a class of objects which satisfy certain requirements.

Of course, the young Luzin closely followed this discussion concerning the axiom of choice from the very beginning and took the position of not the "idealists", but this of the "realists". That was evident due to his thesis "The Integral and the Trigonometric Series" [8], published in 1915. Afterwards he remained on the positions of effectivism (by this term Borel named the program which expressed the position of the “realists”). To this he was not so much inclined to the prestige of his French teachers as to his own reflections on the problems of set theory and functions.

Florensky did not accept Luzin's concept on the question of infinity. From the point of view expressed in the polemics of 1905, the closest to him was the Hadamard's position, this of the "idealistic" one. Of course, all sorts of restrictions on infinity introduced by the "realists" were absolutely unacceptable for him. For Florensky, as for a theologian, the infinite was one of the attributes of God. The contradictions, which could arise, when he was using the concept of the infinite, did not frighten him. So, in their reflections Luzin and Florensky took completely different positions. Thus, in Luzin's letter to Florensky on August 4, 1915, we can read [1, p.178]: "There is no *actual infinity*! And when we are intensifying to talk about it, we *actually* always talk about the finite and that there is n + 1 after n ... that's all!".

For Luzin the actual infinity has no place in mathematics. To what extent a mathematician can enter in his constructions, driven by the sense of the actual infinity's idea – became the topic of his constant reflections. The most complete expression of his concepts is included in his "*Lectures on analytic sets and their applications*" published in Paris in 1930 in Borel's series of monographs on function theory [9].

3. The problem of the structure of numerical continuum

The research regarding the theory of analytic sets of Luzin himself and this of his school, on the one hand, showed the naturalness for the mathematicians to go out from the sphere of analytic sets and further this of projective sets. Such an expansion seems just so natural as an expansion from the set of rational numbers to the numerical continuum. On the other hand, this same research showed that the objects, which were introduced in mathematics by a such way (for example some projective sets) often are not effectively constructed, but, as a matter of fact, constitute virtual beings. Concerning Borel's effectivism, the lack of the effective procedures of its individual definition doesn't give to such beings the possibility to acquire their citizenship in mathematics. Such a kind of beings is out of mathematics.

Now we could present a turn in the way of our reasoning: it's possible to have doubts about our ideas on numerical continuum. Do all real numbers, which form numerical continuum, exist in reality, that is to say, are effectively constructed ? After all, the set of real numbers effectively constructed is countable ! In this logic all other beings are parasitic. Accordingly to Borel and Luzin such parasitic beings must be expel from mathematics. Accordingly to them a such removal should simplify the analysis. And so mathematics after to many centuries return to the problem of construction of numerical continuum, a very ancient problem which was posed by the Pythagoreans.

Bibliography

1. Переписка Н.Н. Лузина с П.А. Флоренским. Публикация и примечания *С.С. Демидова, А.Н. Паршина, С.М. Половинкина и П.В. Флоренского* // Историко-математические исследования. 1989. Вып. 31. С. 125 – 191.
2. *Бари Н.К., Голубев В.В.* Биография Н.Н. Лузина // *Лузин Н.Н.* Собрание сочинений. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 468 – 483.
3. *Тихомиров В.М.* Открытие А-множеств // Историко-математические исследования. 1993. Вып. 34. С. 126 – 139.
4. *König J.* Zum Kontinuum-Problem // Verhandlungen des III-ten Intern. Math. Kongress in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. Leipzig. 1905. S. 144 – 147.
5. *Zermelo E.* Beweis, das jede Menge wohlgeordnet werden kann // Math. Ann. 1904. Bd. 59. S. 514 – 516.
6. *Медведев Ф.А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX – XX вв. М.: Наука. 1976.
7. *Hadamard J.* La théorie des ensembles // Revue gén. des sci. pures et appl. 1905. V. 16. P. 241 – 242.

8. *Лузин Н.Н.* Интеграл и тригонометрический ряд (1915) / *Лузин Н.Н.* Собрание сочинений. Т. 1. М. : Изд-во АН СССР. 1953. С.48 – 212.
9. *Lusin N.* Leçons sur les Ensembles Analytiques et leurs Applications. With a preface by *Henri Lebesgue* and a note by *Waclaw Sierpinski.* Paris: Gauthier-Villars. 1930.

nach der Arbeit

Felix Klein und Andrej A. Markov,
im Kontext der Beziehungen zu russischen Mathematikern, mit Bemerkungen zur *Differenzenrechnung*

Renate Tobies, Friedrich-Schiller-Universität Jena

Felix Kleins (1849-1925) Kontakt zu russischen Mathematikern beruhte zunächst auf deren Autorschaft bei den *Mathematischen Annalen*, wo in Deutsch, Englisch, Französisch, Italienisch publiziert werden konnte. Als erster veröffentlichte Aleksandr N. Korkin (1837-1908) bereits im zweiten Jahrgang (1870, S. 13-40) den Artikel « Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel ». Korkin entstammte der St. Petersburger Schule, die von Pafnuti L. Tschebyschow (1821-1894) begründet worden war. Zu dieser Schule gehörte auch Andrej A. Markov [Markoff] (1856-1922), der gemeinsam mit Nikolaj J. Sonin (1849-1915)[1] Tschebyschows Werke in zwei Bänden (1899, 1907, Russ. u. Franz.) edierte.

Korkin sandte 1879 erstmals einen Beitrag von A. A. Markov an die *Mathematischen Annalen.* Die Herausgeber Klein und Adolph Mayer (1839-1908) förderten Internationalität bewusst, auch wenn sie inhaltlich nicht alles detailliert beurteilen konnten und die Sprache eines Beitrags zu wünschen übrig ließ. Mayer bezeichnete es hinsichtlich der Konkurrenz mit dem *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Crelle Journal*) gar als „[…] politisch, die [in schlechtem Französisch geschriebene] Arbeit aufzunehmen".[2] Klein hatte Korkin bereits am 4. Mai 1879 signalisiert:

> Hochgeehrter Herr Professor!
>
> Die von Ihnen für die mathematischen Annalen eingesandte Arbeit von Herrn A. Markoff, für welche ich Ihnen unseren besten Dank ausspreche, soll baldmöglichst (in etwa zwei Monaten) gedruckt werden. Die Correcturen für den Herrn Verf.[asser] dürfen wir vielleicht, da keine besondere Adresse zugefügt ist, Ihnen zur gef.[älligen] weiteren Besorgung zustellen; zurückzusenden sind dieselben an die Teubner'sche Buchdruckerei Leipzig.
>
> Hochachtungsvoll ergebenst
> Prof. Dr. F. Klein[3]

A. A. Markov publizierte seitdem wiederholt in den *Annalen.* Kleins Briefe sind in St. Petersburg aufbewahrt, die von Markov im Klein-Nachlass in Göttingen.

1 Sonin knüpfte in seinen Forschungen u.a. an Tschebyschow an, hatte aber in Moskau, Berlin und Paris studiert und war Professor in Warschau, bevor er 1891 an die Akademie nach St. Petersburg ging. Er übernahm administrative Aufgaben im Bildungsministerium und beteiligte sich später (1909-14), auf Kleins Einladung hin, an den IMUK-Arbeiten. Seit 1880 publizierte Sonin auch in den *Mathematischen Annalen*.
2 Vgl. Tobies/Rowe 1990, S. 106, Brief Mayers an Klein v. 5.5.1879.
3 [Archiv St. Petersburg] Fond 2, 1-1895, 73, Bl. 1. – Markoff, A. A.: « Sur les formes quadratiques binaires indéfinies ». *Math. Ann.* 15 (1879) S. 381-406.

Noch 1880 schrieb Klein an Markov, „diese zahlentheoretischen Fragen liegen mir so fern, dass ich Mühe habe, auch nur zu verstehen, wovon die Rede ist, geschweige, dass ich ein klares Urtheil über Werth oder Unwerth haben sollte. Ich kann Sie nur […] auf die bisher leider unvollendeten zahlentheoretischen theoretischen Berichte von Stephen Smith aufmerksam machen, die Sie in den Bänden 29-35 der Reports of the British Association finden […].“[4] In den folgenden Jahren näherten sich ihre Interessengebiete. Typisch für Klein war, dass er immer wieder auf verwandte Arbeiten hinwies, um Autoren zum bestmöglichen Resultat zu bringen. So schrieb er auch an Markov:

> […] Die Fälle, in denen ein particuläres Integral der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe existirt, deren „logarithmische Ableitung“ eine rationale Function von x ist, finden Sie bei Schwarz in Bd. 75 des Crelle'schen Journals, p. 294, 295, vermutlich vollständig aufgezählt. Es ist nun keineswegs meine Meinung, dass darum Ihre Darstellung besonders modificirt zu werden brauchte: vielleicht wird ein blosses Citat, welches Sie einfügen wollen oder welches auch die Redaction, wenn Sie dies vorziehen, einfügen kann, genügen. […][5]

Schließlich passte das Forschungsfeld derart, dass Klein nicht nur Markov mehrfach um eine zusammenfassende Darstellung seiner Resultate bat, sondern auch eigene Ergebnisse mitteilte:

> Sehr geehrter Herr College!
>
> Eine Reihe von Zufälligkeiten hat mich leider verhindert, auf Ihre werthen Briefe schon vorher zu antworten. Lassen Sie mich heute vor allen Dingen den Wunsch aussprechen, von Ihrer Seite zwecks Abdruck in den mathematischen Annalen vielleicht eine einheitliche Redaction Ihrer verschiedenen Bemerkungen zu bekommen. Andererseits darf ich erzählen, dass ich die Ueberlegungen, durch welche ich in Bd. 37 mein Theorem entwickelt habe, inzwischen nach verschiedenen Seiten weiter verfolgte. Insbesondere habe ich eine Anwendung auf den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Gleichung gemacht. Es liegen da die Verhältnisse ganz ähnlich wie bei Ihnen, insofern die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei Particularlösungen hat, deren Product erst einem rationalem Polynom gleich ist. Eben für letzteres Polynom bestimme ich Zahl und Lage der reellen Wurzeln. Der kleine Artikel, den ich darüber schrieb, würde längst gedruckt sein, wenn nicht die Setzer in Leipzig seit Anfang November gestriket [sic!] hätten. Nun endlich hat der Strike aufgehört und ich hoffe in nächster Zeit wenigstens Correkturabzüge zu haben, von denen ich Ihnen dann umgehend ein Exemplar schicken kann. – Ein junger Amerikaner, der hier ist, Hr. Van Vleck, hat die Weiterführung der Betrachtungen übernommen, welche ich selbst in meinen Vorlesungen nur habe skizzieren können. Dabei hat er ganz besonders auch die Fragen weiter untersucht, die Sie in Annalen 27 (Sur les raçines des certaines équations) in Angriff genommen haben. Wenn Sie es gestatten, wird er Ihnen gern über seine bisherigen Resultate Näheres mittheilen. Ich selbst bin leider für dieses Jahr durch

4 Ebd. Bl. 3, Klein an Markoff, Brief. v. 31.12.1880. – Stephen Smith (1826-1883), irischer Mathematiker.

5 Ebd., Brief 7, Bl. 10, Klein an Markoff, 19.12.1886. – Hermann A. Schwarz (1843-1921): „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die *Gauss*ische hypergeometrische Reihe eine *algebraische* Function ihres vierten Elementes darstellt“. *Crelle J.* 75 (1873) 292-335. – Klein war seit 1.4.1886 neben Schwarz Professor in Göttingen und strebte nach einem einvernehmlichen Auskommen mit ihm.

anderweite Arbeiten ausschliesslich in Anspruch genommen; ich gebe aber die Hoffnung nicht auf, auf dem geometrischen Wege von Bd. 37 in das Wesen der linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung (d.h. der durch diese Differentialgleichungen definirten Functionen) noch genauer eindringen zu können.

Hochachtungsvoll bin ich
Ihr ganz ergebener
F. Klein[6]

Als Klein das nächste Mal am 9. Dezember 1895 an Markov schrieb, war es ein Dankeschön für die Aufnahme in die Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg:

Sehr geehrter Hr. College!

Nehmen Sie für die überraschende und mich überaus ehrende Wahl Ihrer Akademie meinen besonderen Dank. Ich finde mich in der That, wenn ich die Sache persönlich wenden darf, im Augenblicke in Folge von allerlei Widerstand[7], den ich erfahre, in einem Stadium der Depression, so dass eine Anerkennung, wie Sie sie mir schicken, mir in der That sehr willkommen ist. Nicht minder freue ich mich, was ich Ihnen kaum aussprechen brauche, durch Ihre Wahl in unmittelbare Verbindung mit einem wissenschaftlichen Kreise gesetzt zu sein, dessen hervorragende und originale Leistungen der besonderen Richtung meines mathematischen Interesses in hohem Grade entgegenkommen.

Wollen Sie bitte allen Ihren werthen Collegen meinen verbindlichen Dank aussprechen.

Hochachtungsvoll verbleibe ich
Ihr sehr ergebener
F. Klein[8]

Im November 1895 gelangten neben Klein Gaston Darboux (1842-1917) und Lazarus Fuchs (1833-1902) auf drei vakante Plätze für Korrespondenten in der Physikalisch-mathematischen Abteilung der Petersburger Akademie. Charles Hermite (1822-1901) und Karl Weierstraß (1815-1897) avancierten zu Ehrenmitgliedern, sodass ihre bisherigen Korrespondenten-Plätze neu vergeben werden konnten: an Camille Jordan (1838-1922) und Émile Picard (1856-1941).[9] Henri Poincaré erhielt zur selben Zeit als Physiker diese Position. Den Wahlvorschlag für die Mathematiker hatten A. A. Markov und N. J. Sonin in der Sitzung vom 8. November 1895 en bloc unterbreitet, wobei jeder einzelne Vorgeschlagene beurteilt wurde. Bei Darboux, Fuchs und Klein ist auffallend, dass zuvörderst ihre Tätigkeit als Herausgeber von Zeitschriften betont wurde; Darboux leitete das Referatejournal *Bulletin des sciences mathématiques* seit 1870[10];

6 Ebd., Brief 8, Bl. 12-13, Klein an Markoff, 1.2.1892. – Klein F.: „Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe". *Math. Ann.* 37 (1890) 573-590; „Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung". *Math. Ann.* 40 (1892) 125-129. Edward B. Van Vleck (1863-1943) promovierte 1893 bei Klein, KLEIN 1923, GMA III, Anhang, S. *16*; vgl. auch PARSHALL/ROWE 1994.
7 Der Widerstand betraf Kleins Pläne, ein Institut für *technische* Physik zu etablieren.
8 [Archiv St. Petersburg] Brief 9, 173, Bl. 15, Klein an Markoff, 9.12.1895.
9 [Archiv St. Petersburg] Fond 2, 810, Bl. 5.
10 Vgl. TOBIES 2015; 1016.

Fuchs war seit Bd. 110 (1892) Herausgeber des *Crelle-Journal*s; Publikationsorgane auch für russische Autoren.

Klein wurde als Professor in Göttingen und Herausgeber der *Mathematischen Annalen* vorgestellt, dessen Forschungen sich durch eine besondere Breite und selten tiefe Bezüge zwischen verschiedenen mathematischen Gebieten auszeichneten. Er wurde zugleich als Hochschullehrer gerühmt, der viele Hörer in seine Vorlesungen ziehe und zahlreiche junge Forscher zu weiterführenden Arbeiten anrege. Markov und Sonin sprachen von einer „Kleinschen Schule“ und hoben abschließend dessen Beiträge in den Gebieten der Lobatschewkskyschen [nichteuklidischen] Geometrie und der Riemannschen Geometrie hervor.[11]

Die Wahl der neuen Mitglieder wurde durch den zuständigen Minister am 25. November 1895 bestätigt.

Zur selben Zeit studierten bereits einige aus St. Petersburg Kommende bei Klein in Göttingen; und angeregt durch diese hatte Klein schon die Übersetzung eines Buches von Markov über endliche Differenzen (Russ.) empfohlen. So hatte Klein im Sommersemesters 1895 ein Seminar zur Differentialrechnung veranstaltet, gemeinsam mit dem gerade berufenen David Hilbert (1862-1943), sowie den Privatdozenten Ernst Ritter (1867-1895) und Arnold Sommerfeld (1868-1951). Am Seminar beteiligten sich 17 Personen mit Vorträgen, darunter sechs Frauen. Der Markov-Schüler Theophil Friesendorff (1871-1913) hörte von 1894/95 bis 1896 bei Klein und trug (als einziger) zweimal im genannten Seminar vor, über „Interpolation durch Polynome nach der Methode der kleinsten Quadrate“ (1.5.1895); über „Lineare Differenzengleichungen“ (31.5.1895); als Literaturgrundlage erwähnte er u.a. das Buch von Markov. Darauf basierten auch die Vorträge von Helene von Bortkewitsch (1870-1939) und deren Freundin Alexandrine v. Stebnitzky (*1868), die von 1895 bis 1896/97 bei Klein studierten.[12] Beide, Töchter aus polnischen Offiziersfamilien, hatten Frauen-Kurse in St. Petersburg absolviert, wo seit 1894 auch Sonin lehrte. Bortkewitsch sprach zum Thema „Differenzenrechnung“, Stebnitzky zu „Summationsrechnung“.[13]

Markov hatte in seinem Buch das „Rechnen mit endlichen Differenzen“ erklärt (Interpolation, Herstellen numerischer Tafeln, Aufsuchen zufälliger und Abschätzen unvermeidlicher Fehler), das für viele Anwendungsfelder zunehmend Gewicht erhielt. Auf Kleins Anregung hin ließ sich Friesendorff bereits im Sommer 1895 durch Markov genehmigen, dass er das Buch übersetzen darf. Die übersetzte deutsche Ausgabe, an welcher auch der Seminarteilnehmer Erich Prümm (*1872) mitwirkte, erschien schon im Jahr darauf: Markoff, A.A.: *Differenzenrechnung*, Leipzig B.G. Teubner, 1896. Veranlasst durch Klein, hatte Rudolf Mehmke (1857-1944) ein Vorwort dazu geschrieben,[14] in dem er Kleins weitsichtige Initiative zur Förderung des Gebiets betonte.

11 Ebd., Bl. 16-17. – Die Autorin dankt Dr. Winfried Mahler für die Übersetzung aus dem Russischen.
12 Zu den Anfängen des Frauenstudiums unter Felix Klein vgl. TOBIES (2019).
13 [Protokolle] Bd. 12, S. 189-248, 373-374.
14 Mehmke an Klein, Brief v. 17.6.1896 [UBG] Cod. Ms. F. Klein 10: 1134.

Dmitri F. Seliwanow (1855-1932), Autor des Beitrags „Differenzenrechnung“ (1901) in Band 1 der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* publizierte anknüpfend an Markov noch ein *Lehrbuch der Differenzenrechnung* (1904) bei Teubner, mit einigen vereinfachten Beweisen und gewisser Neuanordnung des Stoffes.

Kleins ehemaliger Assistent Heinrich Liebmann (1874-1939) übersetzte ein weiteres Buch von Markov, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (B.G. Teubner 1912). Das sind nur wenige Beispiele für die zahlreichen Buch-Projekte, die Klein im Verein mit dem Verlag B.G. Teubner auf den Weg brachte.

Seit 1890 (20. Oktober) existiert eine St. Petersburger Mathematische Gesellschaft, die im Vergleich zu den entsprechenden Gesellschaften in Moskau (1864) und Charkow (1879) spät entstanden war. Wenngleich es zwischen den Mathematikern in St. Petersburg und in Moskau lange Zeit tiefe Zerwürfnisse und Konkurrenz gab[15], hatte sich Klein nicht nur nach einer Seite orientiert, sondern versucht, möglichst vielseitige Kontakte zu pflegen. Er hatte diese schon in den 1880er Jahren verstärkt, als Gösta Mittag-Lefflers (1846-1927) *Acta Mathematica* als zusätzliches Konkurrenzorgan auf den Markt getreten war.

Der 1884 in Leipzig studierende Matvej A. Tichomandritzky (1844-1921) erfüllte Kleins Wunsch nach einer Übersicht über Institutionen, Zeitschriften, Forscher und ihre Hauptarbeitsgebiete im osteuropäischen Raum. Dieser fünf Jahre ältere Mathematiker hatte bereits von St. Petersburg aus eine Note „Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale“ (20.6. 1883) für die *Mathematischen Annalen* geschickt, bevor er Klein in Leipzig besuchte. Er war seit 1883 Dozent an der Universität Charkow, trug in Kleins Leipziger Seminar vor (21.7.1884) und publizierte eine weitere Arbeit in den *Annalen.*[16] Sein detaillierter Bericht über russische und weitere osteuropäische (ukrainische, polnische, ungarische, böhmische) periodische Literatur und zugehörige Personen umfasste drei Schriften der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften (St. Petersburg), *Memoires*, *Bulletins*, *Melanges mathématiques et astronomiques, tirés des Bulletins*, die nur Deutsch und Französisch publizierten; außerdem in Russisch erscheinende Organe in Moskau, Charkow, Kazan, Odessa, Kiew, Warschau u.a.[17] Auf dieser Basis entschied Klein über den Schriftentausch, gewann weitere Autoren, Studierende und Partner.

So pflegte Klein nicht nur gute Kontakte zu St. Petersburg, sondern auch zur Konkurrenz in Moskau. Der Moskauer Mathematiker Pavel A. Nekrasov [Nekrassoff] (1853–1924) trat Klein im schwelenden wissenschaftlichen Zwist mit Lazarus Fuchs zur Seite. In diesem Kontext muss auch Kleins Ausspruch an Adolph Mayer gesehen werden: „[…] ich glaube bis zu einem gewissen Maasse an die Zukunft der russischen Mathematik und meine, dass es jetzt zeitgemäss ist, Fühlung mit derselben zu suchen.“[18] Mit Nekrasov vereinbarte Klein den

15 Vgl. DEMIDOV 2015; DEMIDOV et al. 2016.
16 [Protokolle] Bd. 6, 121-126; *Math. Ann.* 22 (1883) 450-454 und 25 (1885) 197-202.
17 [UBG] Cod. Ms. F. Klein 12: 24, Tichomandritzky an Klein, Brief v. 14.11.1884.
18 Klein an Mayer, Brief v. 16.1.1891, in TOBIES/ROWE 1990, S. 188.

Zeitschriftenaustausch mit der Moskauer Mathematischen Gesellschaft, die ihn seit Anfang 1891 als Mitglied führte.

Im Jahre 1893 wurde Klein Ehrenmitglied der Kaiserlichen Universität Kazan, deren Physikalisch-mathematische Gesellschaft ihm am 22. Oktober 1897 die Goldene Lobačevskij-Medaille verlieh. Seit 1906 führte ihn auch die Mathematische Gesellschaft in Charkov als Mitglied, wie er inzwischen zahlreichen weiteren Gesellschaften und Akademien als Mitglied angehörte.[19]

Bibliographie

Archivalien

[Archiv St. Petersburg] Archiv der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, Wahlvorschläge 1895; Nachlass A. A. Markov Fond 173, Opis 1, Nr. 40 (Briefe F. Kleins an Markov).

[Protokolle] Protokollbände 1-29 der Mathematischen Seminare Felix Kleins. Originale in der Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen, online: http://www.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/klein/

[UBG] Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung. Cod. Ms. Klein

Literatur

DEMIDOV, Sergey S. (2015): “World War I and Mathematics in 'The Russian World'”. *Technical Transactions. Fundamental Sciences* (Krakow) 19, Issue 2, pp. 77-92.

DEMIDOV, Sergey S.; PETROVA, S. S.; TOKAREVA, T. A. (2016): “Moscow Mathematical Society and the development of Russian mathematical community”. *International Archive of the History of Science* 66, pp. 307-318.

KLEIN, Felix (1921/1922/1923). *Gesammelte mathematische Abhandlungen* [GMA]. Springer: Berlin, Bde. 1, 2, 3.

PARSHALL, Karen; ROWE David E. (1994): *The Emergence of the American Mathematical Research Community (1876-1900): J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore* (Series in the History of Mathematics, vol. 8). Providence: American Mathematical Society and London: London Mathematical Society; paperback edition 1997).

TOBIES, Renate (2015): „Klein und Lie über die Mathematik in Frankreich im Jahre 1870“. In: Ch. Binder (Hg.), *Mathematik – Verschollen und Gefunden* (XII. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik, Miesenbach 4.-10. Mai 2014), Wien, S. 24–31.

TOBIES, Renate (2016): „Felix Klein und französische Mathematiker“. In: Th. Krohn/S. Schöneburg (Hg.), *Mathematik von einst für jetzt*. Hildesheim: Franzbecker, 103-132.

TOBIES, Renate (2019): “Internationality: Women in Felix Klein’s Courses at the University of Göttingen”. In: E. Kaufholz/N. Oswald (eds.), *Against all Odds. The first Women in Mathematics at European Universities – A comparative Approach.* Berlin: Springer (forthcoming).

TOBIES, Renate; ROWE, David E. (1990): *Korrespondenz Felix Klein – Adolph Mayer. Auswahl aus den Jahren 1871 bis 1907* (TEUBNER-ARCHIV zur Mathematik, 14). Leipzig: B.G. Teubner.

19 [UBG] Cod. Ms. F. Klein 101-117 (Urkunden, Ehrungen, Medaillen).

Alea iacta est – Statistics and probability

– from ancient Egyptians, Babylon, through centuries – neglected or nowadays very important parts of mathematics

Jasna Fempl Mađarević
Misanu, Belgrade

Ich widme diesen Vortrag meinem Ehemann Mischa und meinen Schwestern Zvezdana und Sanja

1. „The foundation of the modern world is theory of probability – without it, contemporary research in natural and social sciences cannot be understood". – 1959 – statement of American mathemticians – Huff@ Geise

Development of the theory of probabilty, as with many other fields of mathematics, was encouraged by various practical problems. Year 1654 is usually taken as the „beginning" of the probability, when a respectable citizen De Mere turned to Bleis Pascal and De Fermat in relation to the gamblers' discussion (not so famous members of society!). The problem was basically this: Is it recommendable to bet that, in 24 consecutive rolls of two dice, both will show 6, at least once.
Many other questions related to games of chance influenced in a great deal the development of the theory of probability. What was really hiding behind those questions was mathematical models for trating different, very serious and socially useful problems of practical mathematics, while one of the basic difficulties was the very definition of the probability. The notion that intuitively seemed so clear, but still mathematically elusive! There was a search for a definition that would be precise enough for a mathematician (such as, for example, notions in geometry) and general and understandable enough at the same time, to be applicable for wide areas. The search of this definition lasted for almost 3 centuries! Starting from classical definition (hereinafter „Def."):
Def: The probability of a certain event is an unnamed number (a fraction), that represents the relation (ratio) of numbers of favorable (m) and possible events (n).

P(A) = m (favorable events) / n (possible events)

Hence, „the search" for the best definition for this „new number" in mathematics, during the centuries is marked with a lot of wandering and difficulties, until the appearance of Kolmogorov's axiom of probability, in his book (see (1)) Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" 1933. Here, he approaches to building a mathematical probability theory, holding onto and demanding two

conditions: 1) the theory must be completely mathematical, i.e. unrelated to the empirical; 2) the theory must be such, to be in accordance with empirical facts.
It is clear that for the probability as a number, it must be that $0 \leq P(A)=m/n \leq 1$

Here, I cite Kolmogorov's axioms: Let E be a set of elementary events; Ø a set of partitive set (subsets) from E; elements of Ø are accidental events: Axiom 1 – Ø is a set; Axiom 2 – Ø contains sets; Axiom 3 – a set A aus Ø is joined to a non-negative number P(A) which we call „the probability of the event A"; Axiom 4 – P(E)=1; Axiom 5 – if A and B are disjunctive sets, than P(A+B)=P(A) + P(B) is valid.

The system of Ø sets with a certain associated numbers P(A) that satisfy the axioms 1-5 is called the FIELD OF PROBABILITY.

So, finally, the probability that had been considered „empirical science" (more as a part of the physics, than mathematics) became a real part of mathematics (similar to algebra, geometri…), and mathematical logics and theory of sets have remained its tools. Since the 40's of the 20th century, the probability has been developing in the way that the solutions of other mathematical disciplines can be applied to its problems, which in the late 20th centry led to the rapid development of this theory, which is today applied in different areas of technology, physics, phychology, genetics, economics, etc.

For the contemporary science and most of practical applications, a statistical approach is characteristic, namely, it is part of the probability. Mathematical statistics – that subset of the probability, which, by the way, enabled „informal" definition of the probability, is the base for „practical" understanding of that notion. The fact is that the „hazardous" games (games of chance) encouraged the development of probability and statistics as its part, so it began, but still, this very important branch of mathematics today is something much deeper and more serious, and its methods imply mathematical models – from the simplest (especially statistics) up to „heavy" mathematical artillery (integral and differential calculation, variations).

Today, for the „applied" probability, its branch – statistics - may be the most current in contemporary social events.

At first sight, statistics may appear as very „modern" science (feature) because it uses very sofisticated computers with incredible performances to collect and process information (graphics, multitude of numbers, sign and acoustic records).

As a matter of fact, statistics is a very ancient science! It originates from ancient Egyptians and Babylonians, who used its elements in order to determine the number of citizens, the production flow, etc. The Evangelists talk about the population census at the time of Christ's birth. It was and still is a science of the state; the state has always been the one determining the most of information necessary for the State administration. It originates from a latin word status, the state of the country. In the last 60-70 years, statistics began to develop more seriously. In the beginning of the 20th century, areas of human research that used statistics could be counted on the fingers of one hand. Today, it is used by physicist, engineers, economists, chemists, biologists, doctors, psychologists, agronomists, sociologysts. Now, the areas that do not use statistics can be counted on the fingers of one hand, because in this technological and information world the need for translating information into the useful knowledge is contantly rising, as well as for usage of information for foreseeing and making confident decisions. The resault is that media are filled with various tables, graphic representations of data and various types of statiscical assertion.

What is statistics? A science that studies mass phenomena using mathematical aparatus and methods. In such manner statistics confirms its usefulness, and, on the other hand, it is an important connection between mathematics and other areas, both of natural and social character.
There is a saying: „When a child is born – it's happiness, and a 1000 children are born – that is just statistics."

Let's take, for example, Alexander, who went with his wife and friends to Miesenbach. After two days he complained of stomach pain, he had a headache and high body temperature. There was a suspicion of Salmonella. At that moment Alexander's disease is just a single case! However, if we other participants in the Börsenhof have had the same symptoms at the time, than it's no longer about the single, but a mass phenomenon, concering nearby health institutions, as well. Still, depending on the massiveness of the phenomenon (it is clear that Alexander and the others should be separately examined, because a man is an individual, and studied in order to take adequate measures, but – above all statistics is interested in mass phenomena out of which a well selected sample is usually studied (according to special statistical criteria)). For contemporary life, „massiveness" is characteristic for many phenomena and events and their networking – a world has become „a great village". On the other hand, individual cases and phenomena can show minor or greater deviations from the „average", so it is necessary to monitor a great number of those, i.e. in the „mass", in order to discover the generality and laws, regardless of whether it comes to living beings, things and the like. For example, mass phenomena are" the number of newborns in a city, number of spectators at a football match, number of car accidents in a place in a determined time interval, etc. All those are the cases, „subjects" for the statistics. Using the list of 100 most significant ‚athematicians, according to W.C. Eells in the magazine „The mathematics teacher", vol. 55, no. 7 of 1962, I will consider only one of my observations:

The majority on the list are mathematicians, but during the centuries, mainly those were versatile scientists – both phylosophers and linguists in one person. In any case, the list is interesting and debatable, but what intrigued me and led me to think – out of a hundred eminent mathematicians on the list, eleven played a key role in development of probability theory – gave their contribution to this area, and to statistics by extent. Unfortunately, in this „sample" there's no information about all the others who, during the centuries (3000 years and more), have been building „mathematical tower." The list is numbered in, at least for me, an unusual way. The list is missing six scientists important for the development of statistics (especially), therefore I am adding them to the „sample" of sixteen scientists, in chronological order, meritorious for the development of probability and statistics, as follows:

E List

Ergo, 16 eminent scientists layed the foundation of probability theory and statistics, starting from 16th century up to present day, which are among the most significant, used mathematical model, for understanding today's „scientific" view of the world, foremost of quantum physics, informatics, contemporary technology and their application in many social fields.

Chronologically, the story of probability begins and goes up to the 70's of the 20th century (we'll stop there) through the following great names of mathematics, physics, phylosophy, even law! Their short biographies follow:

1. Girolamo Cardano (1501 – 1576) – An Italian physician and mathematician. In his book *The Book on Games of Chance,* he stated the exact number of all possible outcomes of rolling 2 and 3 dices. He came close to the definiton of probability with a help of equally possible events.

2. Gallileo Galilei (1564-1642) – on of the founders of probability theory! He used to say that accidental mistakes in measuring are inevitable, and he asked the question about the assessment of those mistakes and concluded that minor mistakes

are more frequent, and major ones are less frequent. According to this „Italian genius“, the law on mistakes is symmetrical.

3. Perre de Fermat (1601-1665) a lawyer, but also an important French mathematician. He influenced the development of the whole mathematics of his era. He is considered one of the „founders“ of probability theory. During his life, he did not publish any works from the field of mathematics, but in correspondence with Pascal and together with him, he gradually created some parts of probability calculation.

4. Blaise Pascal (1623-1662) – a French genius! A mathematician, physicist, phylosopher, mystic, practitioner (the first calculator was his invention, on a mechanical principle). At the age of 16, he wrote a work from the field of geometry, and several mathematical achievements carry his name, in his honor! Pascal was one of the „founders“ of probability theory. In 1654, Pascal was faced with a problem by his gambler-friend: 2 players, A and B make a deal that all the bet belongs to the one who first wins in three games. When A won two, and B won one game, due to the extraordinary circumstances they had to stop the game. The question was how to properly divide the bet. Pascal answered based on the probability: „The bet should be divided in the ration 3:1“ (some historians of mathematics consider this example as an illustrative one for the creation of probability!).

5. Christian Huygens (1629-1695) a Dutch mathematician and physicist – also considered as one of the founders of probability theory. His work about calculations in „hazardous games“ is the first one from the field of probability, that until the apperance of works of Jacob Bernoulli played a vital role in the development of this „new“ theory. Huygens emphasises that the reader will notice that it is not only about hazardous games, but more about foundations of a new theory, profound and interesting at the same time. Furtheremore, in the same work, Huygens deals with notions of „mathematical“ expectations, random variables and other things.

6. Swiss mathematician Jacob Bernoulli (1654-1705) from a distinguished family of mathematicians and physicists. His book „The skills of anticipation“ is the first decisive step towards the probability theory as a mathematical discipline! In it, Bernoulli generalized and deepened Huygens' notions of probability, developed the combinatorics in detail and its application in hazardous games, then set forth the „law of great numbers“. He determined that „relative frequency“ slightly deviates from probability of an observed event, if the number of experiments is big enough.

He observed random experiments that had only two outcomes (Bernuolli's experiments). It was named „Bernuolli's scheme" after him – an independent repetition of an experiment in which certain event is emphasized.
7. Abraham de Moivre (1667-1754) – a French Hugenot, moved to London after Nantes' edict, and became an English mathematician. He developed and generalized ideas of Jacob Bernuolli, he wrote, among other things, „Study of the cases". He defined and elaborated on the notions of independent and conditioned probability, formulated and proved some theorems on addition and multuplication of probabilities. In this work, Moivre applies the „rules" of probability theory in order to determine a lifetime rent in agreements. In researching that problem, Moivre relied on „mortality tables" created by an astronomer Edmond Halley.

8. Georges Loves Leclerc (1707-1768) Comte de Buffon – a French naturalist and mathematician, whose greatest work is „History of nature, general and special". In this book, he included all that was known about the nature of the world. In his book „Probability theories" about the game of tossing a coin, he was the first to introduce differential and integral calculation. Buffon conducted a series of experiments in a series of coin tossing. He tossed a coin 4040 times and 1992 got the „amblem", so the relative frequency of this outcome is 0.493!! He was the first who set a problem: let's assume that a floor is made of parallel wooden boards of equal width. If we toss a needle on that floor, what are the chances that it will fall into the line between the boards? The interesting thing is that the solution of this problem can be used for determining an approximate value of the number Pi.

9. Pierre Simon de Laplace (1749-1827) a great French mathematician who gave contribution to many mathematical disciplines, one of the founders of probability theory as a serious mathematical discipline. His monumental work „Analytical probability theory" (1812) had 3 editions. Those were all of Lapace's works published together with the works of his predecesors, related to this „new" theory. He was the first who mathematically and philosophically deepened the problems related to probability. He layed foundations of studying statistics and successfully applied probability theory in assessment of „random" mistakes. This work was very inspirational for many mathematicians who were also dealing with probability theory. Laplace gave a classical definition of probability in his book, as well. $P(A)=m/n$ – the number of favorable events divided by the number of possible events, so it is necessary $0 \leq P \leq 1$ (Laplace's def.).

10. Carl Friedrih Gauss (1777-1855) – the „king" of mathematics, the one on the coins ordered by George V to be forged. He contributed to the development of all areas of mathematics, so the work of his „followers" brought to new mathematical

disciplines. He significantly improved the probability theory, especially in its applications (Gauss' law of probability distribution – normal distribution and Gauss' curve of distribution, that are of major importance in statistics, probability and life in general.

11. Simeon Denis Poisson (1781-1840) – a French mathematician, also significantly improved the probability theory, especially its applications, so many mathematical problems carry his name – both practical and theoretical ones (Poisson's law of probability distribution which has numerous applications – Poisson's distribution).

12. Adolph Lambert (1796-1894) a Belgian astronomer, mathematician, statistician and sociologist. Inspired by Laplace's work, he was among the first who applied the probability theory and statistics in sociology, thus making a kind of „social" physics. Different qualities in people, in a mass, are grouped around a single fictive person – an average person! In Brussels in 1853 there was The first international congress of statistics, at the initiative of Lambert, who founded The International Institute of Statistics after this, in London in 1885. He also founded serveral magazines and societies related to statistics.

13. Carl Pearson (1857-1936) – and English mathematician. The development path of statistics went from descriptional to mathematical, where Pearson, along with Quetelet, played a pioneer role. Based on Quetelet's works, Pearson founded a new branch – biostatistics or biometry, whose development would continue in the area of experimental therapeutics. Also, he introduced „analytical presentation of statistical data" (a curve representing statistical data – grequency curve) He conducted experiments with a dice – he rolled it 12000 times and god the head 6019 times– so the relative frequency is 0.505, which confirms Bernoulli's claims. In 1900, Pearson formulated and important x2 test.

14. (Ronald Aylmer Fisher (1890 – 1962) – an English biologist and statisticist. He marked a new era in area of statistical methodology. His theories made a scientific experiment in statistics incomparably more precise. Namely, Fisher's works on experimenting in biology were the foundation of general theory of planning experiments. His statistical designs became very influential and applied in agroculture, medicine and some fields of technology.

15. Andrei Nikolayevich Kolmogorov (1903-1988) – a famous Russian and one of the greatest mathematicians of the 20th century; a significant creator in many mathematical disciplines. He had been in charge of Department of the probability

theory and laboratory of statistical methods for a long time. The basic, but the most important significance has the book „Axiomatic approach to the probability theory". In 1933, in his book „Grundbegriffe der wahrscheillich Keitsrechnung" he gives 5 axioms – he makes an axiomatic base for the probability theory, using the functions theory and thus the probability becomes an „equal" branch of geometry or algebra, for example.

16. Finally, let's mention an American mathematician of Croatian origin (former Yugoslavia), among all these „founders" of the probability theory – Vilim Feller (1906-1970). He graduated from the University of Zagreb and was one of the leading experts in probability theory in his time. His book „Introduction to probability theory and its applications" in considered one of the 3 most important handbooks of the 20th century mathematics. This book was written at a highly scientific and methodological level and it contains a great number of examples of probability theory application in physics, biology and economy, moreover, many notions in probability carry his name (Feller's processes, Feller-Brown's movement…).

Jasna Fempl Madjarevic
Mathematical Institute
Str. Knez Mihailova 36, 11000 Belgrad
home: Vidicovacri Venac 27, 11000 Belgrad
email: tanjamadjarevic@gmail.com

Literature:

1. Andrej Nikolajevic Kolmogorov,
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1933)
2. W.C. Eells – The Mathematics Teacher, magazine vol. 55, number 7, 1962
3. Petar Vranjrevic - Statistika i verovatnoca (Statistics and probability)
– Skolska knjiga, Zagreb, 2006
4. PhD Vladimir Vranic – works of a professor of Construction faculty in Zagreb:
Secon edition, Tehnicka knjiga, Zagreb, 1965
5. Ranko Risojevic – Veliki matematicari (Great mathematicians),
NOLIT, Belgrade, third edition, 1991
6. M3 – May, a month of mathematics – center for science promotion,
Belgrade, 2012
7. PhD Ernest Stipanic – Putevima razvitka matematike
(Ways of mathematics development), Vuk Karadzic, Beograd, 1988.

LIFE DISTRIBUTIONS

May is the rainiest month of the year in these parts. In the months before, as well as in the months after May, the number of rainy days gets smaller and smaller. The distribution describing this is called a normal distribution and/or Gaussian by mathematicians. This distribution has the shape of a bell and it is simply fascinating how many natural processes comply with it.

In fact, most phenomena, which are following some random process, as well as the processes in which the disorder is increasing, the ones where something is worn out, warmed, stored or where it comes to spontaneous mixing of particles, follow a normal distribution in some way.

Therefore, if you pour the milk into the coffee carefully, milk particles will spread from one point and, in short period of time they will comply with Gaussian, before they occupy the whole volume. Live tissue, as skin, also grows in compliance with normal distribution. Nails and teeth, as well. This can be observed, even visually, as they are always thicker over the middle, i.e. they have the shape of the bell.

On the other hand, one can notice that stone staircases wear out themselves with age, by thinning over the middle in the shape of the bell; in money world, the logarithm of currency exchange rate follows normal distribution, equally as it is done by river banks in case of an outflow and in case of floods.

Errors in physical measurement, also mark distribution in one school classroom, as well as results of IQ test, will all be distributed by a normal distribution.

Even people will, completely unconsciously, respect this law. If you observe how the que in post offices or in Mac Donald’s restaurant is formed you will notice that most people always stand in front of cash registers which are located in the middle. On the other hand, sheep flocks and herds behave equally- by travelling to pasture they also follow the same distribution as the ones who will finally eat them in Mac Donald’s.

Milutin Milanković (1879-1958) --- a neglected mathematician who researched neglected but modern science

Harald Gropp, d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

0. Introduction

"My entire life has been spent along this mighty river. In my youth, in the morning I would watch the Danube tearing away parts of my father's land. I spent my student days in Vienna by it. In Belgrade, from Captain Misa's building I would often watch the Danube in spring and autumn. In exile, in Budapest I was comforted by it. Again in my old age here I am next to the Danube."

The neglected mathematician (and astronomer) Milutin Milanković can be called a man of the Danube (Donau) who throughout his life lived and worked in places along this river, even as a prisoner of war. From a biographical aspect the towns of Wien, Budapest, Dalj, and Beograd describe his life in non-chronological but geographical order. As such this paper is concerned with a scholar who did not follow the lines of disciplinary research. This may be one reason why he is not so much known.

Milutin Milanković combined his geographical knowledge with his ideas on different parts of science and the gap between the theoretical sciences and the experimental ones.

"The Danube has, far away, in Schwarzwald, two separate sources. There, at the altitude of 1000 meters, two rivers spring, the Breg and the Brigach, and after a short flow of about twenty kilometers they merge into one river which from that point on is known as the Danube. And just as the Danube, there is also the surging river of all our knowledge and sciences which has its two separate primordial

sources. The first is observation and the second contemplation, or as they are scientifically known empiricism and rationalism. All our sciences come from these two sources, those that are built on the foundation of observation and those created by contemplation".

A last characterization of Milanković is concerned with the political aspects of his life and his kind of finding ways to do his science even under very uncomfortable conditions.

"I lived in an empire, in a kingdom and in a republic, as a free citizen, enlisted in a marriage, army and state offices. I lived through two Balkan and two World wars, in warring country each time, I was on the battlefield and a prisoner in war camp, I rested in jails, languished while internated, suffered under hostile occupation. But beside all that, I enjoyed everything pleasant and beautiful that I found by looking for it, or by running into it by chance."

Three citations which may characterize the man, the scholar, and the eye witness with respect to Balkan and European history of his time: Милутин Миланковић (Milutin Milanković or for short M.M.).

He was “a Serbian mathematician, astronomer, climatologist, geophysicist, civil engineer and popularizer of science” (Wikipedia) and a historian of science (!). The aim of this short paper is to give a brief survey on his life and work. For further details see the references below.

1. Selected Works of Milutin Milanković

In order to show the scientific work in its development let us start with some titles of books and papers, some of them highlighted in bold script.

1905: Beitrag zur Theorie der Betoneisenträger

1914: Über die Verringerung der Wärmeabgabe durch die Marsatmosphäre

1920: Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire

1923: Reforma julijanskog kalendara (in Serbian Cyrillic)

1924: Das Ende des julianischen Kalenders und der neue Kalender der orientalischen Kirchen.

1928: Durch ferne Welten und Zeiten. Briefe eines Weltallbummlers. Leipzig 1936. (in Serbian already 1928)

1930: Mathematische Klimalehre und astronomische Theorie der Klimaschwankungen, in Handbuch der Klimatologie

1931: Stellung und Bewegung der Erde im Weltall, in Handbuch der Geophysik

1933: Drehbewegungen der Erde, in Handbuch der Geophysik

1933: Säkulare Polverlagerungen, in Handbuch der Geophysik

1936: Die Fahrt zur Venus. Ein seltsamer Ausflug mit Professor Milankovitsch, z.B. Aachener Anzeiger, Wolfenbütteler Zeitung

1941: Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem, Belgrad

1951: Zgodovina astronomije od njenih prvih začetkov do leta 1727, Ljubljana

1957: Astronomische Theorie der Klimaschwankungen. Ihr Werdegang und Widerhall

1995: Milutin Milanković 1879-1958. 1995 [translated and edited by his son Vasko M. from Serbian into English]

2. Short biography

1879, May 28 (or May 16 in the orthodox Julian calendar) birth in Dalj (Slawonia, Eastern Croatia, Austria-Hungary), private education by parents and a German "Gouvernante", 1889-1896 secondary school education in Osijek, 1896 student of civil engineering at TH Wien, **1904 Doctoral thesis**, afterwards worked for "Zementwarenfabrik Adolf Baron Pittel" and other firms near Wien, **1909 Prof. of applied mathematics (including theoretical physics and celestial mechanics) in Beograd**, 1911 Serbian citizenship, 1912 participation in the first Balkan War, summer of 1914 marriage, begin of honeymoon in Dalj, breakout of World War I, "Austro-Hungarian prisoner of war as a Serbian citizen in his birth town", **1915 - 1919 prisoner of war in Budapest working in the Hungarian Academy of Sciences**, 1915 son Vasko is born in Budapest, 1919 back in Beograd, 1920 first book in French on his main topic.

1920-1940 summers mainly in Austria in Kueb am Semmering and in Graz, **1923 congress of orthodox churches in Istanbul**, 1924 conference in Innsbruck, for the first time he meets Alfred Wegener (1880-1930), in the1920s and 1930s airfield constructions as a civil engineer, **1928 contributions to the "Handbuch der Klimatologie" (editor Köppen) and to the "Handbuch der Geophysik" (editor Gutenberg),** 1934 Second Interbalkan Mathematical Congress in Athens, 1936 INQUA (Quaternary Science) conference in Wien, 1939 begin of "Kanon der Erdbestrahlung…..", 1939 Third Interbalkan Mathematical Congress in Beograd (planned but cancelled because of **World War II**), **1941, 2 April "Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem" printed, 1941, 6 April begin of German air bombing in Yugoslavia.** Since 1946 books on history of astronomy, 1954, 17 Dec. Golden Doctor diploma in Wien, without M.M. present, 1955, 23 March last regular lecture in Beograd, 1955 June two lectures in Wien, 1955 member of Leopoldina (Halle), Sept. 1957 partial stroke, **1958, Dec.12: death in Beograd**

3. Named after Milanković:

In order to honour his scientific achievements the International Astronomical Union named in Brighton 1970 a moon crater Milanković (coordinates +170°, +77°) and in Sydney 1973 a Mars crater Milanković (+147°, +55°). The moon crater is situated on the "dark side" of the moon. Mars craters are only named after scholars whose research is directly involved with Mars which is certainly true in his case since already in 1914 he computed the temperature on the surface of Mars long before any space explorations. Of course, in 1982 also a minor planet (1605) was called Milanković, the former minor planet 1936 GA.

4. The astronomical theory of climate changes

The main scientific achievement of Milutin Milanković throughout his life is the development of an astronomical theory of climate changes. It discusses the effect of the insolation (solar radiation on earth) on the climate on earth dependant on the distance of the earth on its orbit around the sun. The orbital parameters such as the eccentricity or the obliquity of the ecliptic are not constant over the millennia but perturbed by the influence of other celestial bodies. It works out that there is a good correspondence between these theoretically obtained data in comparison to the experimentally obtained data in climatology in order to explain the climate changes of ice ages and warmer periods during the quaternary era, i.e. the last 600000 years, also called Milankovitch cycles. Of course, this theory can aslo be applied on other celestial bodies such as Mars, and Milanković did so successfully. Even more, the calculations can be done for future millennia. This is just one aspect why this theory can be called modern apart from its pioneering work as an interdisciplinary achievement.

5. Calendar reform and Easter dates

Only in 1923, Milanković as the leading Yugoslav astronomer got the task to take part in the orthodox calendar synod in Istanbul (Constantinople). He developed a revised orthodox calendar which is more exact than the Gregorian one but will differ from the Gregorian one only as late as 2800 (leap year or not). In the table below several calendars are compared to the value of the tropical year, given the average number of days per year and the error per year in minutes and seconds.

CALENDARS:			**error**
365.25000	days	Julian	11 min 15 sec
365.24250	days	Gregorian	26.75 sec
365.24222	days	Milanković	2.75 sec
365.24242	days	Iranian	20.20 sec
365.24219	**days**	**tropical year (now)**	

Also the Easter date was discussed in Istanbul in 1923. The solution was to celebrate Easter Sunday on the first Sunday after the first full moon in spring. No surprise ? Well, firstly this solution was not introduced by the many orthodox churches, and secondly, next year, i.e. 2019, Easter will not be celebrated as it should be, also not in the West. This will lead to three different Easter dates in 2019, the astronomical one (as it should be), the Western one, and the Eastern one. Of course, other feast days such as Ascension Day are likewise dependant on the Easter date.

EASTER DATES IN 2019:

	Easter	Ascension	Pentecost	Corpus Christi
astronomical	March 24	May 2	May 12	[May 23]
Western	April 21	May 30	June 9	(June 20)
Eastern	April 28	June 6	June 16	---

The revised Orthodox calendar was introduced by most European churches, but not by the Russian church and not by the Serbian church. Hence up to our time in Russia and in Serbia Christmas is celebrated on January 7. The calendar scientific investigations of Milanković in the spring of 1923 brought him great reputations but tragically not really great reforms, at least until not. Maybe in the future he shall succeed since his Easter proposal is identical with the decision of the World Council of Churches conference in Aleppo (Syria) of 1997. And still we shall celebrate Easter wrongly in 2019, wrongly in relation to the decision of the synod of Nikaia in 325.

6. Last but not least: Politics

There were not only a lot of political changes during the lifetime of Milanković but also thereafter. His home town Dalj in Slawonia had belonged to Austria-Hungary until World War I and became part of Yugoslavia until the disintegration of Yugoslavia which started around 1991. Since in this part of Croatia there was a big Orthodox minority living the city of Dalj (and also the birth house of Milanković) was heavily damaged. In 2009 the rebuilt home was transformed into a "*Kulturni i znanstveni centar Milutin Milanković*" in Dalj, Croatia, but in close cooperation with Serbia hoping for a more peaceful future.

The following description can be found in Wikipedia:

"Center is located in the birth house of scientist Milutin Milanković. Important but in general public neglected scientist."

As described in the title of my paper Milutin Milanković can be regarded as an important interdisciplinary scholar, neglected in the general public although (or perhaps because) he worked in a modern way trying to bridge gaps between sciences and cultures, although during his lifetime (and thereafter) he was deeply conflicted with political events which, however, influenced his scientific work not only in a negative way.

For further interest in Milanković (since this paper is certainly too short and schematic) see the references below, including hints to papers of the author which will be written in the near future, hopefully. The limited number of pages here and the still totally unacceptable life and work conditions of the author may excuse this strategy (compare my Miesenbach contribution of 2014). Last but not least, however, I mainly refer to the words of Milanković himself which the reader will find in the references below, words from a scientist, in a remarkably high quality of the German language.

References:

H. Gropp, Milutin Milanković (1879-1958) --- Kalendermacher, Klimaforscher und Weltallbummler, in: G. Wolfschmidt (ed.): Maß und Mythos, Zahl und Zauber: Die Vermessung von Himmel und Erde, Nuncius Hamburgensis 48 (2019) (to appear).

H. Gropp, Kalenderreformen im 19. und 20. Jahrhundert --- interkonfessionell, interdisziplinär, auch international ?, in: G. Wolfschmidt (ed.): Internationalität in der astronomischen Forschung des 18. bis 20. Jahrhunderts, Nuncius Hamburgensis 49 (2019)(to appear).

H. Gropp, The Gregorian calendar in Austria and Johannes Kepler (in preparation).

M.Milanković, Durch ferne Welten und Zeiten. Briefe eines Weltallbummlers. Leipzig 1936. [in Serbian already 1928].

M. Milanković, Astronomische Theorie der Klimaschwankungen. Ihr Werdegang und Widerhall. Lindau 1957.

V.Milanković, Milutin Milanković 1879-1958. 1995 [translated and edited by his son Vasko M. from Serbian into English].

Danuta Ciesielska (Warsaw)

What were *determinant*s used for?

A case study.

Abstract

In the 19th century lectures devoted to the theory of determinants were present in each mathematical university curriculum. Now determinants are a part of linear algebra and students and mathematicians generally have no idea that in the past *determinant* was a tool for solving problems in many fields of mathematics. In this paper I will present the classical functional determinants showing Wronskian and two results obtained by a Polish mathematician Władysław Kretkowski (1840-1910), who described a method of finding the equation of the sphere described on an *n*-dimensional simplex and presented a generalization of Jacobi and Bertrand results on functions of many variables.

Key word: functional determinats, Jacobian, Wronskian, *n*-dimensional simplex.

The extremely short history of Poland from 1795 to 1863

In 1795 the *Trzeci rozbiór Polski* [Third Partition of Poland][1] took place and as the result Poland finally lost independence until 1918. In this period many uprising took place, the most important were: *Powstanie listopadowe* [November Uprising] (1830–31), *Powstanie wielkopolskie* [Greater Poland Uprising] (1848) and *Powstanie styczniowe* Polish–Russian War (1863). The emigration of Polish intellectualists was the most important consequence. During the Great Emigration[2] many people emigrated abroad. Józef Maria Hoene-Wroński moved to France. Later after November Uprising prince Adam Jerzy Czartoryski[3], Antoni Norbert Patek[4], Frédéric Chopin and thousands of young Poles moved to West Europe, mostly to France and Switzerland. After January Uprising (1863-1864) many Poles[5] were executed and sent to Siberia, and thousands emigrated from Russia. Władysław Kretkowski, the hero of the article, as many Poles, decided to went to France for study.

[1] The Third Partition of Poland was the last and final of partitions of Polish–Lithuanian Commonwealth among three countries: Kingdom of Prussia, the Habsburg Austrian Empire, and the Russian Empire. The Greater Poland Voivodeship became a part of Prussia, the Lesser Poland and Ruthenian Voivodeships became a part of Austria, later called Galizia, and the rest come to Russia. More about history of Poland can be found in: Norman Davies, *God's Playground: A History of Poland*. Revised Edition ed. Oxford: Clarendon Press, 2005.

[2]The Great Emigratinon – it is a term for the emigration of thousand of Poles in the period 1830-1870

[3] Adam Jerzy Czartoryski (1770-1861), politician and writer. In the period 1800-1804 he was a Chairman of the Russian Council of Ministers, butlater, durign the November Uprising he was a President of the Polish National Government, and on the emigration the leader of Polish movement against Russia.

[4] Antoni Patek (1812-1877), watchmaker. He established, with Franciszek Czapek, the most known Swiss company Patek Philippe. He was a noble man, Prawdzic coat of arms. Durign the November Uprising he was awarded the Golden Cross of Virtuti Militari.

[5] According to official Russian information, 396 persons were executed and 18,672 were exiled to Siberia.

The (Polish) Society of Exact Sciences in Paris

Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu [the Society of Exact Sciences in Paris] was founded by Polish scholars and students who settled in Paris. The count Jan Działyński[6] was the President and the sponsor of the Society, Adam Prażmowski[7], Władysław Folkierski[8] served as vice-presidents and Władysław Gosiewski[9] as a secretary. The structure was very simple. The ordinary members were people who worked in Paris and the corresponding members were people outside of Paris[10]. The Society published books and the journal, originally written in Polish (no translations): W. Folkierski: *Rachunek różniczkowy* [Calculus] with a 56 pages chapter *Wyznaczniki* [Determinants] by Kretkowski; 1870, *Rachunek całkowy* [Integral calculus] 1873; W. Zajączkowski *Równania różniczkowe* [Differential equations], 1878; M. Baraniecki *Teorya wyznaczników* [Theory of Determinants] 1879; A. Sągajło, *Wykład algebry zupełny* [The complete course of algebra], vol.1 1873, vol. 2 1874; E. Sągajło *Geometria wykreślna* [Descriptive geometry] 1879.

[6] Jan Kanty Działyński, count (1829-1880), Polish national political activist, publisher and bibliofil.

[7]Adam Prażmowski (1821-1885), astronomer and the first Polsih astrophysicist, worked in Warsaw Astronomical Observatory. A member of the Academy of Arts and Sciences in Kraków.

[8] Władysław Folkierki (1841-1904), mathematician, engeaneer, professor of St. Marco Univeristy in Lima (Peru). Graduated from the Sorbonne and Ècole Imperiale Ponts et chausses in Paris. From 1892 he worked in Galizia as a constructor of railway lines.

[9] Władysław Gosiewski (1844-1911), mathematician, physicist and logician. A teacher in Warsaw, he founded (with Samuel Dickstein) journals “Prace matematyczno-fizyczne” and “Wiadomości Matematyczne”. A member of the Academy of of Arts and Sciences in Kraków.

[10] More about the Society of Exact Sciences in Paris in [10].

Figure 1. The members of the Society of Exact Sciences in Paris, 1870, PAUArt, nr inw. BZS.RKPS.6818.k.10

The Society of Exact Sciences in Paris in the period 1870-1882 published 12 voluminous of the journal *Pamiętniki Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu* [Memoirs of the Society of Exact Sciences], each approximately 250 pages. In the journal, 46 papers dedicated to mathematics were published. Some them were reports of the original research, some of them were just translations or reviews. For example, in 1878 Julian Karol Sochocki[11] from St. Petersburg published the paper *Wyznaczanie stałych mnożników we wzorach dla linijnej transformacji funkcyi Θ-summy Gaussa i prawo wzajemności symbolów Legendre'a*, vol. 10 (1878), pp. 1-37; the paper was translated by author. Let us mention a very important translation – Riemann's habilitation lecture *O hypotezach, które służą za podstawę geometrji*. This paper published in the volume 9 in 1879 was translated by Samuel Dickstein and annotated with comments by W. Gosiewski. Władysław Kretkowski published in the journal 8 papers: 4 on determinants, 2 on complex analysis, 1 on integral calculus, and 1 on multidimensional geometry with special use of determinants.

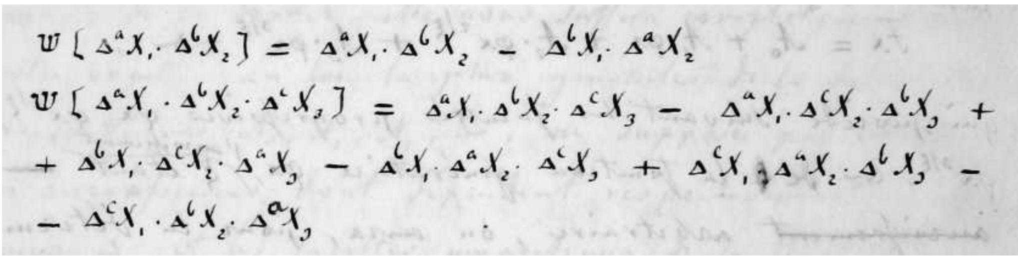
From Hoene-Wroński to Władysław Kretkowski via Jacobi and Bertrand

Józef Maria Hoene-Wroński[12] was born on August 23, 1776 in Wolsztyn (Great Poland). His father was well known architecture August Hoëné, who emigrated from Czech. Józef was attending school in Poznań (Posen). He ran from the family home and changed his name into

[11] Julian Karol Sochocki – transliteration from Russian Sokhotski (1842-1927), mathematician, profesor in St. Petersburg and Leningrad University. He is known from Sokhotski-Plemelj theorem, he proved Weierstrass-Casorati theorem as the first one. A member of the Academy of Arts and Sciences in Kraków and St. Petersburg Mathematical Society.

[12] More about Wroński see: [15] and [16].

Wroński. In the period from 1790 to 1794 he served for Polish army and Kościuszko uprising, in 1795-1797 for the Russian army (lieutenant-colonel). After sudden death of his father in 1797 Wroński was traveling a lot for studies. He visited Königsberg, Göttingen, Halle, London and finally he came to France. Wroński settled in Marseilles and in 1810 married one of his private student Viktoria Henrriete Sarrazin de Montferrier. From 1810 the couple lived in Paris. Józef was doing research in algebra (methods of solving algebraic equations), and continues fractions. Wroński worked also in analysis and differential equations. Pragacz [16] wrote: “In analysis he was especially interested in expanding functions in a *power series* and *differential equations*. Wroński’s most interesting mathematical idea was his general method of expanding a function $f(x)$ of one variable x into a series $f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + c_3 g_3(x)...$, when the sequence of functions $g_1(x), g_2(x),...$ is given beforehand, and $c_1, c_2,...$ are numerical coefficients to be determined.” Wroński called his method of finding this numerical coefficients *Loi suprême* [The Highest Law][13].



$$\text{ש}[\Delta^a X_1 \cdot \Delta^b X_2] = \Delta^a X_1 \cdot \Delta^b X_2 - \Delta^b X_1 \cdot \Delta^a X_2$$

$$\text{ש}[\Delta^a X_1 \cdot \Delta^b X_2 \cdot \Delta^c X_3] = \Delta^a X_1 \cdot \Delta^b X_2 \cdot \Delta^c X_3 - \Delta^a X_1 \cdot \Delta^c X_2 \cdot \Delta^b X_3 + \Delta^b X_1 \cdot \Delta^c X_2 \cdot \Delta^a X_3 - \Delta^b X_1 \cdot \Delta^a X_2 \cdot \Delta^c X_3 + \Delta^c X_1 \cdot \Delta^a X_2 \cdot \Delta^b X_3 - \Delta^c X_1 \cdot \Delta^b X_2 \cdot \Delta^a X_3$$

Figure 2. An extract from Wronski's paper [11].

Pragacz continued “he [Wroński] used certain determinants, which Thomas Muir in 1882 called *Wroński’s determinants*, or *Wrońskians*. At that time, Muir worked on a treatise on the theory of determinants. Looking through Wroński’s papers, and especially *Criticism of Lagrange’s theory of analytic functions*, Muir noticed that Wroński in a pioneering way introduced and systematically used “combinatorial sums”, denoted by the Hebrew letter Shin [ש] – in modern language called *determinants* – containing successive derivatives of the functions present: $fg' - f'g, fg'h'' + gh'f'' + hf'g'' - hg'f'' - fh'g'' - gf'h'', \ldots$.”

In nowadays mathematical notations Wronskian for the $n-1$ differentiable n real function $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ is a determinant

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & f_3' & \cdots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' & \cdots & f_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\text{”.}$$

Wronskian, until 1880, was studied by many eminent mathematicians, among them J.J. Sylvester, L. Fuchs, A. Cayley, G. Frobenius, F. Casorati and M. Pasch[14]. But it was G. Peano who as the first made a crucial observation on Wronskian. Maxim Bochner ([1], p 139) wrote about Peano’s observation:

„PEANO in M a t h e s i s, vol. 9 (1889), p. 75 and p. 110 seems to have been the first to point out that the identical vanishing of the Wronskian of *n* functions of a single variable is not in all cases a sufficient condition for the linear dependence

[13] Banach wrote very interestig arricle [5] on The Highest Law. The article was published posthumously.

[14] For the details see Muir, vol. 1 and 2.

of these functions. At the same time he indicated a case in which it is a sufficient condition, and suggested the importance of finding other cases of the same sort.

On two Kretkowski's papers

Władysław Kretkowski[15] was born on December 20, 1840 in the Kingdom of Poland. He was a noble, *Dołęga* coat of arms. He graduated from the well known real gymnasium in Warsaw. In Warsaw he met an inventor and constructor Stanisław Lilpop[16], Jan Pankiewicz[17] teach him mathematics.

In 1863 Kretkowski took part in the January Uprising. He participated in the battle of Nowa Wieś (April 26) and of Brodowo (April 29). During the battle of Brodowo more than 80 Poles were killed, including the commander for the Polish forces Leo Young de Blankenheim (1837-1863) and the son of Karol Libelt[18] (1807-1875) Karol junior; Kretkowski was here wounded.

[15] For Kretkowski's biography see [8].
[16] Stanisław Lilpop (1817–1866), manufacturer, and outstanding constructor of Jewish origin. He was a co-owner of *Fabryka Machin* [Factory of machines] (LRL) and director of *Fabryka Odlewów* [Casting factory]. He populariezed technik for the wide audience.
[17] Jan Pankiewicz (1816–1899), graduated from St. Petersburg University, teacher and editor of Orgelbrand's encyclopedia. He translated Lagrange's planimetry into Polish
[18] Karol Libelt (1807-1875) Polish philosopher, politician, wirter, president of Poznań Society of Friends of Learning. In 1844 in Poznań he published, in two volumens, *Wykład matematyki dla szkół gimnazyalnych* [Mathematical course for the secondary schools] and in 1838 an article "Filologia, filozofia i matematyka uważane jako zasadnicze umiejętności naukowego wychowania" [Filology, philosophy and mathematics regarded aa principal skill for scientific training].

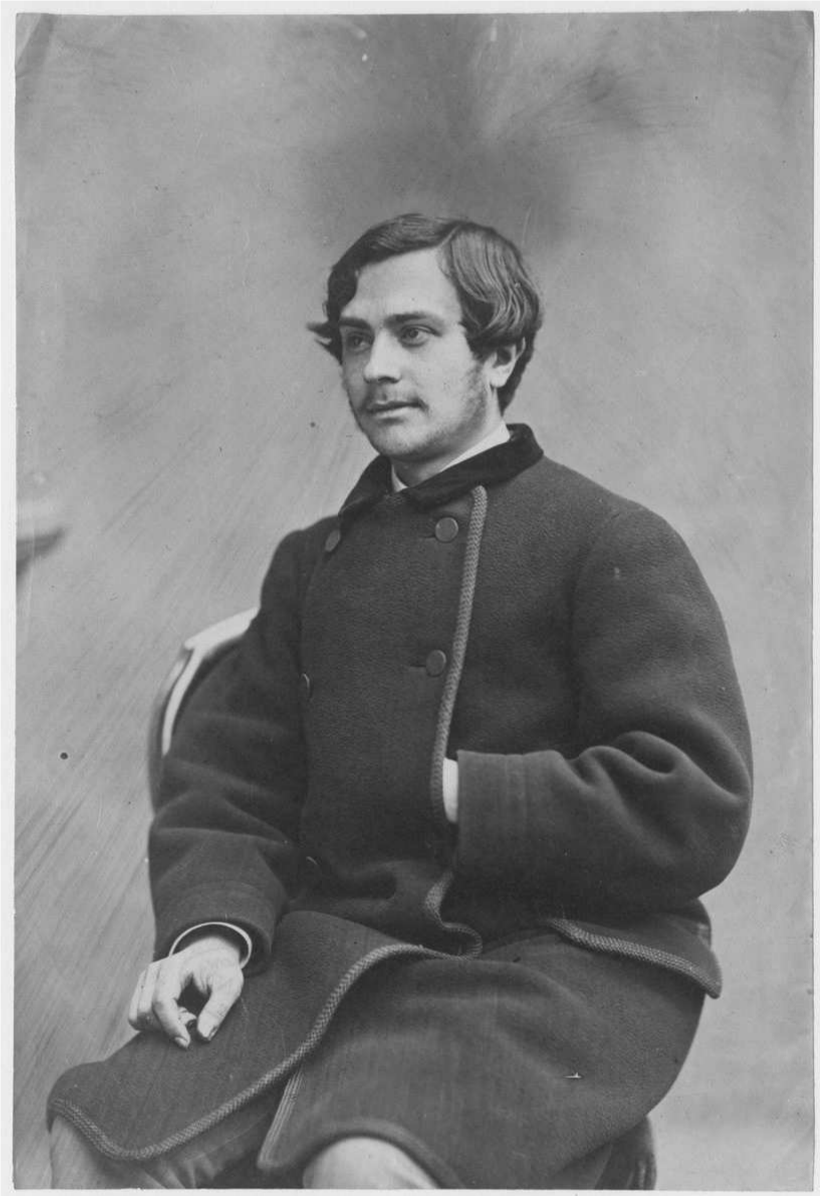


Figure 3 W. Kretkowski, 1863,
PAUArt, BZS.RKPS.6818.k.4.

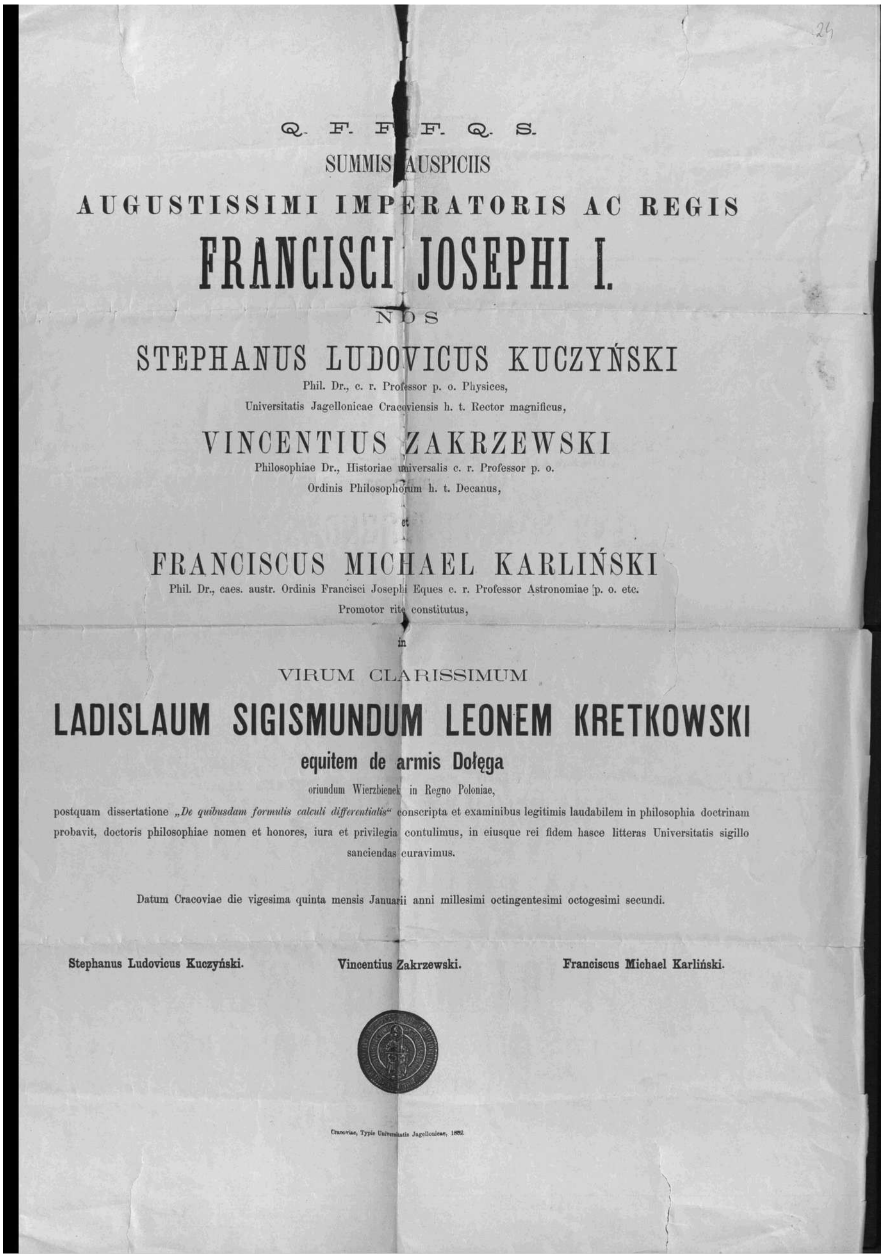
In the early 1864 Kretkowski emigrated to France. Until 1880 he was publishing in Polish under pseudonym Trzaska[19]. In 1867 Kretkowski graduated from *École Imperiale des Ponts et Chauseés in Paris* [Imperial School of Bridges and Roads] and in 1868 he graduated in mathematics from the Sorbonne with diploma in mathematics [baccalaureate]. From 1879 he was a private docent at the High Technical School [Wyższa Szkoła Techniczna] and from 1890 at Franz University in Lvov [c.k. Uniwersytet im. Franciszka I we Lwowie]. In 1882 he obtained PhD in mathematics from the Jagiellonian University[20]. He published more than 20 papers in mathematics, mostly in Polish. In his last will he donated[21] all his belongings for the

[19] "Trzaska" is the coat of arms of his mother Emilia Kretkowska née Chrząszczewska.

[20] Franz (Franciszek) Mertes wrote a one of the reviews of this thesis. His opinion was very favourable.

[21] The value of the fund donated by Kretkowski was equivalent to 150 kg of pure Gold.

mathematicians in Kraków for lectures on modern mathematics, and for scholarships for studies abroad.



Q. F. F. F. Q. S.

SUMMIS AUSPICIIS

AUGUSTISSIMI IMPERATORIS AC REGIS

FRANCISCI JOSEPHI I.

NOS

STEPHANUS LUDOVICUS KUCZYŃSKI

Phil. Dr., c. r. Professor p. o. Physices,

Universitatis Jagellonicae Cracoviensis h. t. Rector magnificus,

VINCENTIUS ZAKRZEWSKI

Philosophiae Dr., Historiae universalis c. r. Professor p. o.

Ordinis Philosophorum h. t. Decanus,

et

FRANCISCUS MICHAEL KARLIŃSKI

Phil. Dr., caes. austr. Ordinis Francisci Josephi Eques c. r. Professor Astronomiae p. o. etc.

Promotor rite constitutus,

in

VIRUM CLARISSIMUM

LADISLAUM SIGISMUNDUM LEONEM KRETKOWSKI

equitem de armis Dołęga

oriundum Wierzbienek in Regno Poloniae,

postquam dissertatione „*De quibusdam formulis calculi differentialis*“ conscripta et examinibus legitimis laudabilem in philosophia doctrinam probavit, doctoris philosophiae nomen et honores, iura et privilegia contulimus, in eiusque rei fidem hasce litteras Universitatis sigillo sanciendas curavimus.

Datum Cracoviae die vigesima quinta mensis Januarii anni millesimi octingentesimi octogesimi secundi.

Stephanus Ludovicus Kuczyński. Vincentius Zakrzewski. Franciscus Michael Karliński.

Figure 4. Kretkowski's PhD Diploma, Archive of the Jagiellonian Univeristy, [1].

I want to present two Kretkowski's results on determinats. The first one, in chronological order, is a generalization of C.J. Jacobi and J. Bertrand results on functions of many variables. It was published[22] in 1871 in the first volume of "Memories". Let us introduce the problem. Jacobi theorem on the determinants appeared in the paper *De determinantibus functionalibus* in 1841. In the paper, among many others, Jacobi proved that if (n - 1)–differentiable n real functions in n variables are related (algebraically), then the Jacobian is identically zero

[22] W. Trzaska, O pewném zastosowaniu wyznaczników funkcyjnych [On the some application of functional determinats], "Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych" [Memoirs of the Society of Exact Sciences], vol. 1 (1871), 113-122.

and the opposite: if $(n-1)$–differentiable n real functions in n variables are independent, then the Jacobian cannot be identically zero. That means that two differentiable functions $f(x,y), g(x,y)$, are related iff

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = 0.$$

In 1864 in the paper *Mémoire sue l'intégration des equations differentielles*[23] Bertrand presented an extension of the Jacobi theorem on an algebraic relation between n functions. Bertrand claimed that for the n functions in $n+h$ variables, a sufficient condition is that Jacobian of the n functions with respect to any n variables vanishes. Kretkowski in the paper *O pewném zastosowaniu wyznaczników funkcyjnych* [On some application of functional determinats] gave a definite extension of Jacobi's result. Muir in [13], p. 267 presented it as follows: "The theorem here dealt with is an extension of one noted by Bertrand in 1864. In order to suggest the mode of proof it may be conveniently formulated as follows: *The necessary and sufficient condition that the functions $u_1, u_2, \dots, u_n$ of the independent variables $x_1, x_2, \dots, x_m$ shall satisfy p relations independent of these variables is that the leading minor of the $(n-p)^{th}$ order in the n-by-m array*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-p}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-p+1}} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_{n-p}} & \frac{\partial u_2}{\partial x_{n-p+1}} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_3}{\partial x_{n-p}} & \frac{\partial u_3}{\partial x_{n-p+1}} & \cdots & \frac{\partial u_3}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_{n-p}} & \frac{\partial u_3}{\partial x_{n-p+1}} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

shall not vanish, but that all the minors of $(n-p+1)^{th}$ order obtained by bordering the said leading minor shall vanish. On putting $p=1$ and $m=n+h$ we have the case given by Bertrand, and on further putting $h=0$ we reach the fundamental case dealt with by Jacobi". Muir noticed that theorem by Kretkowski appeared in the Polish text-book[24] (chapter XII, p. 118) written by M. Baraniecki. This Kretkowski's result received a very good reviews. Władysław Zajączkowski [4] wrote in the opinion on results by Kretkowski: "Problem as in (1) belongs to the most general higher analysis and it was for the first time solved in the general. In the foreign papers you may find the same, the question is solved only for the special cases, namely, when functions between which one is looking for a relationship, are of the first degree. For this reason the paper (1) is regarded as a one of the most valuable."[25] In 1910 in Kretkowski's obiturary published in

[23] J. Bertrand, Mémoire sue l'intégration des equations differentielles, "Journal de Mathematiques" 7(1865), ser. 2, pp. 257-374.

[24] M. Baraniecki, *Teorya wynaczników. Kurs uniwersytecki*, nakł. Biblioteki w Kórniku, Paris 1878.

[25] „Zagadnienie, jak w (1) [*O pewném zastosowaniu wyznaczników funkcyjnych*], należy do najogólniejszej analizy wyższej i rozwiązane jest po raz pierwszy w całej ogólności. W publikacjach zagranicznych jest to samo, kwestya rozwiązania później i tylko dla przypadku szczególniejszego, mianowicie, kiedy funkcyje, między któremi szuka się związku, są stopnia 1go. Praca (1) uważana jest z tego powodu za jedną z najcenniejszych."

"Przegląd Techniczny" ([17]) we read: "In Gosiewski's opinion it is the most valuable Kretkowski's paper, which is not only a generalization but also a refinement of Bertrand's theorem."[26]

The second Kretkowski's paper which I want to present is *Rozwiązanie pewnego zadania z geometryi wielowymiarowej* [A solution of a problem in multidimensional geometry] appeared in 1880 in the last volume of "Memorie". Paper [12] is very short, just 3 pages, and presents an original method of finding the sphere described on n-dimensional simplex. Samuel Dickstein[27] presented in the article *O pracach z dziedziny geometryi wielowymiarowej* [On the articles devoted to the multidimensional geometry] ([9]) results obtained by Riemanna, Klein, Grassmann, Christofell, Jordan, and Veronese, and he mentioned Kretkowski's result. Kretkowski is one of two Poles mentioned in Dickstein's paper; the second one is Gosiewski and his comments on Riemann's habilitation lecture. Gosiewski's paper was not an original research paper, the only one is Kretkowski [12]. Kretkowski proposed there a method of a reduction of the system of the $n+1$ equations of second order in z_m:

$$0 = d^2 - \sum_{k=1}^{n+1} \left(z_m - z_{m,k}\right)^2 \text{ for } 1 \le m \le n$$

to the system of $n+1$ linear equations and finally to a problem of determinant. A problem stated by Kretkowski is, in fact, the question how to find in an algebraic way the coordinates $\left(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\right)$ of the centre of the sphere, which is described on the $n-1$ dimensional simplex with n vertices in the points of coordinates $\left(z_{1,k}, z_{2,k}, z_{3,k}, \dots, z_{n,k}\right)$ for $1 \le k \le n$.

Let us present Kretkowski's method in the planar case. The formulation of the problem: *For 3 non-collinear points* $A(x_1, y_1)$, $B = \left(x_2, y_2\right)$, $C = \left(x_3, y_3\right)$ *find the equation of the centre and the radius of the circumcircle*. To solve this problem it is sufficient to find the equation of the circumcircle. Typical way of a solution of the problem is to consider a system of three equations (for A, B, C) and next to calculate the unknown coordinate of the centre and radius of the circle. Kretkowski proposed a different way of solution. He was looking for the relation between equations. It is known that the circumcircle is the *locus* of undetermined points $K = (x, y)$ which satisfies the system of equations $d^2 = (s - x_k)^2 + (t - y_k)^2$ for $k = 1,2,3$ and $d^2 = (s - x)^2 + (t - y)^2$. This system of four equations of the second order is an algebraic condition for the fact that four points A, B, C, K are of the same distance d from the centre $S = (s, t)$, where d, s, t are unkown. The relation should be a second order polynomial equation involving only known quantities. Let us present the solution in modern language. We have the equation $d^2 = \|A - S\|^2 = \|B - S\|^2 = \|C - S\|^2 = \|K - S\|^2$. By polarization identity, we obtain the system of four equations:

$$\|A - S\|^2 = \|A\|^2 - 2\langle A, S\rangle + \|S\|^2$$
$$\|B - S\|^2 = \|B\|^2 - 2\langle B, S\rangle + \|S\|^2$$
$$\|C - S\|^2 = \|C\|^2 - 2\langle C, S\rangle + \|S\|^2$$

[26] "Zdaniem Gosiewskiego jest to najważniejsza z prac Kretkowskiego, stanowiąca nie tylko uogólnienie ale zarazem udokładnienie twierdzenia Bertranda."

[27] Samuel Dickstein (1851-1939), Polish mathematician of Jewish origin, editor and writer, worked at the Warsaw University . He was co-founder of "Prace matematyczno-fizyczne" and "Wiadomości matematyczne".

$$\|K - S\|^2 = \|K\|^2 - 2\langle K, S\rangle + \|S\|^2,$$

and the same in the coordinates:

$$0 = x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 s - 2y_1 t + s^2 + t^2 - d^2$$
$$0 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2 s - 2y_2 t + s^2 + t^2 - d^2$$
$$0 = x_3^2 + y_3^2 - 2x_3 s - 2y_3 t + s^2 + t^2 - d^2$$
$$0 = x^2 + y^2 - 2x\, s - 2y\, t + s^2 + t^2 - d^2.$$

Finally, we observe that it is the system of four linear equations in three variables: s, t and $s^2 + t^2 - d^2$. This system definitely has a solution (it is known from the classical geometry). It means that the determinant for this system is equal to zero. The determinant of this system of equation is

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & s^2 + t^2 - d^2 \\ x_2^2 + y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & s^2 + t^2 - d^2 \\ x_3^2 + y_3^2 & 2x_3 & 2y_3 & s^2 + t^2 - d^2 \\ x^2 + y^2 & 2x & 2y & s^2 + t^2 - d^2 \end{vmatrix}.$$

And finally we get the equations of the circle in variable x, y and known parameters $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ as follows:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x^2 + y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Additional Kretkowski's result is an observation that points A, B, C are not collinear iff the determinant $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ is not equal to zero.

W tym celu przekształćmy dany układ (1) na następujący

$$(3) \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=n} z^2_{\mu,\nu} = \left(d^2 - \sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_\mu^2\right) + \sum_{n=1}^{\mu=n} 2 z_n z_{n,\nu}; \qquad (1 \leqq \nu \overline{\overline{<}} n+1)$$

który jest pierwszego stopnia względem $n+1$ nieznanych

$$(4) \qquad \left(d^2 - \sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_\mu^2\right); \qquad 2z_\mu; \qquad (1 \leqq \mu \overline{\overline{<}} n).$$

ART. IV.

Figure 5. An extract from Kretkowski's paper [12].

In 1879 Kretkowski started making efforts to obtain a habilitation and doctorate at the University in Lvov. In the *Senat* opinion [3] Kretkowski's paper [12] received a very unfriendly opinion: “Professor Żmurko and Dr Fabian, who, as speakers, were ordered to evaluate the last publication of the dissertation entitled “A solution of a problem in multidimensional geometry” gave it a poor scientific value”.[28] Kretkowski’s efforts lasted many years and finally Kretkowski moved to Kraków, and Mertens suddenly left Kraków and moved to Graz. The story of Kretkowski's efforts is described in the details in Polish (see: [7]).

Bibliography

Archival records

[1] Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego [Archives of the Jagiellonian University], WF II 506. *Władysław Kretkowski*.

[2] DALO [State Archives of Lviv Oblast], fond 26 opis 5, sprawa 970. *W. Kretkowski*,

[3] DALO [State Archives of Lviv Oblast], DALO fond 6, opis7, sprawa 229. T. Stanecki, *Informacja dla Senatu z dnia 27 czerwca 1881r*

[4] DALO [State Archives of Lviv Oblast], DALO, fond 26, opis 5, sprawa 970, s.79. W. Zajączkowski, *Opinia z dnia 1 czerwca 1882r.*

Books and articels

[5] S. Banach, Uber das “Loi supréme von J. Hoene-Wroński”, “Bulletin Internatinal de l’Academie Polonaise des sciences et letters”, Série A, 1939(1946), 450-457.

[6] M. Bôcher, Certain cases in which the vanishing of the Wronskian is a sufficient condition for linear dependence, “Transactions of the American Mathematical Society” 2(1901), no 1, 139–149.

[7] D. Ciesielska, Sprawa doktoratu Władysława Kretkowskiego, “Antiquitates Mathematicae” 6 (2012), s. 7-37. **doi** 10.14708/am.v6i0.553

[8] D. Ciesielska, Władysław Kretkowski (1840–1910), “Kwartalnik Historii Nauki i Techniki” 59(2014), 4, 17–54.

[9] S. Dickstein, O pracach z dziedziny geometrii wielowymiarowej, “Prace matematyczno-fizyczne” 1(1888),129-136.

[10] W. Folkierski, Towarzystwo Nauk Ścisłych. Jego powstanie i rozwój, “Prace matematyczno-fizyczne” 6(1895), 151-176.

[11] J. M. Hoene-Wroński, *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, Blankenstein, Paris 1812.

[12] W. Kretkowski, Rozwiązanie pewnego zadania z geometryi wielowymiarowej, “Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych'” 12(1880), 3 pages.

[13] Th. Muir, *The Theory of Determinant in the historical order of development*, vol. III, The period 1861 to 1880, Macmillan, London 1920.

[14] Th. Muir, *The Theory of Determinant in the historical order of development*, vol. IV, The period 1881 to 1900, Macmillan, London 1923.

[28] „Prof. Żmurko i Dr Fabian, którym jako referentom polecono ocenienie ostatniej co do porządku publikacji rozprawy zatytułowanej „Rozwiązanie pewnego zadania geometrii wielowymiarowej“ przyznali jej mierną wartość naukową”.

[15] R. Murawski, Genius or madman? On the life and work of J. M. Hoene-Wroński, [in;] W. Więsław (ed.) *European mathematics in the last centuries*. Wrocław 2005, pp. 77-86.

[16] P. Pragacz, Notes on the life and work of Józef Maria Hone-Wroński, preprint, Mathematical Institute of Polish Academy of Sciences, 22 pages, available on line https://www.impan.pl/~pragacz/download/hwa.pdf In Polish: Życie i dzieło Józefa Marii Hoene-Wrońskiego, "Wiadomości Matematyczne" 43(2007).

[17] Wspomnienie pośmiertne, *Władysław Kretkowski,* Przegląd Techniczny 48/36(1910), s.440.

[18] W. Trzaska (W. Kretkowski), O pewném zastosowaniu wyznaczników funkcyjnych, "Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych" 1(1871), 113-122.

Danuta Ciesielska
Institute for the History of Science, Polish Academy of Sciences
ul. Nowy Świat 72, 00-330 Warsaw, Poland
E-mail: smciesie@cyfronet.krakow.pl

bei einem Vortrag

Originale und nachgebaute Rechentische, -tafeln und -tücher

ULRICH REICH, BRETTEN

Wo überall auf der Welt gibt es Rechentische, Rechentafeln bzw. Rechenbretter und Rechentücher? Richard Hergenhahn aus Unna in Westfalen, Peter Rochhaus aus Annaberg-Buchholz im sächsischen Erzgebirge und der Autor aus Bretten in Baden-Württemberg trugen ihre Sammlungsergebnisse zusammen und erstellten für den Adam-Ries-Bund Annaberg-Buchholz 1999 eine Broschüre, in der 28 Rechentische, zwei Rechenbretter und neun Rechentücher aufgeführt sind (siehe [Hergenhahn]).

Als Eldorado für Rechentische kann man die Schweiz und hier vor allem den französischsprachigen Teil, die Suisse romande, bezeichnen. In seinem Heimatland hat Alain Schärlig, Honorarprofessor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Lausanne, besonders intensiv recherchiert und seine Forschungsergebnisse in [Schärlig 2003] dargestellt.

Seitdem wurden einige weitere Rechentische aufgespürt. Der Autor teilt in diesem Beitrag seinen aktuellen Kenntnisstand mit. Außerdem wird auf einige besondere Nachbauten hingewiesen.

1. Was ist ein Rechentisch?

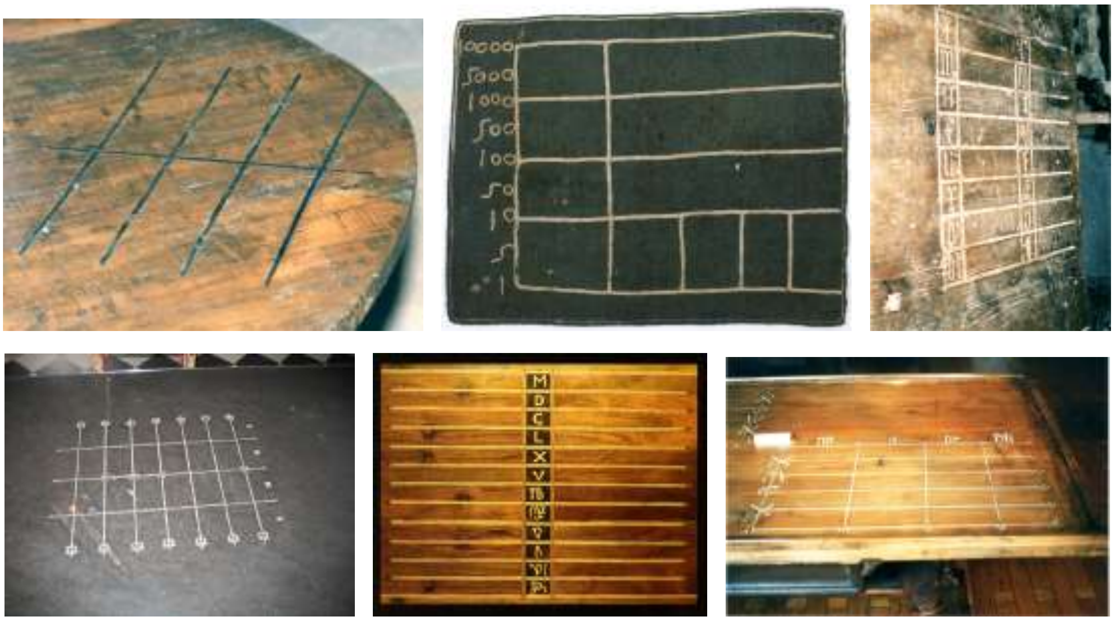


Abb. 1: Diverse Beispiele von fünf Rechentischen und einem Rechentuch

Aus diesen dargestellten Beispielen kann man erkennen, dass es bei Rechentischen, -brettern und -tüchern nichts Normiertes gibt. Die einzelnen Exemplare besitzen Linien, markierte Felder, römische Ziffern, indisch-arabische Zahlen, Währungseinheiten und / oder mehrere dieser Bezeichnungen.

Tische haben häufig mehrere Funktionen. So können je nach Beschaffenheit der Tischplatte als ganz alltägliche Tätigkeiten Kochtöpfe, Teller, Gläser, Bücher, Papierblätter usw. abgestellt oder abgelegt werden. Auch Rechentische können für einen solchen Gebrauch dienen. Uns interessieren hier Tische, an denen gezählt, gerechnet, Geld gewechselt oder auch gespielt worden ist.

2. Frühe Entwicklung von Rechentischen und Abaki

Älteste erhaltene Vorläufer der Rechentische und -bretter wurden in Griechenland gefunden. Besonders bekannt wurde die Salaminische Rechentafel aus dem 3. Jahrhundert v. Chr.. Erst ab etwa 1900 gab es weitere Funde, die zunächst kaum bekannt wurden. Nunmehr ist es das Verdienst von Alain Schärlig, der in Griechenland vor Ort recherchiert hat und in [Schärlig 2001] 28 steinerne Abaki auflisten konnte.

Bei den Griechen, Etruskern und Römern gibt es einige weitere Zeugnisse über Rechentische und Abaki. Sehr bekannt geworden ist die im archäologischen Museum von Neapel ausgestellte Dariusvase (etwa 340–320 v. Chr.) griechischen Ursprungs, auf der ein Rechentisch abgebildet ist. Den Etruskern wird eine Gemme zugeschrieben, die sich heute im Cabinet des Médailles der französischen Nationalbibliothek in Paris befindet. Etruskisch ist auch das Reliefgrab von Cerveteri östlich von Rom, in dem fragmentarisch recht viele Linien und verschiedene Ziffern eingeritzt sind [Schärlig 2006, S. 76–81]. Im Cabinet des Médailles in Paris kann ein römischer Handabakus aus dem ersten Jahrhundert besichtigt werden. Weitere ähnliche Stücke gibt es im Musée des antiquités Aosta, im Museo nazionale romano (Thermenmuseum) Rom und im Science Museum London. Schließlich soll noch auf eine gallo-römische Skulptur mit einem Abakus aus dem 3. Jahrhundert im Rheinischen Landesmuseum Trier hingewiesen werden.

Der dann folgende Zeitraum bis zum 15. Jahrhundert mit Persönlichkeiten wie Anicius Manlius Torquatus Severinus Boëthius (ca. 480–524) und Gerbert von Aurillac (ca. 945–1003), dem späteren Papst Sylvester II. (seit 999), soll hier nicht näher betrachtet werden, sondern übersprungen. Der Autor hat sich mit dieser Zeitperiode bisher nicht intensiver befasst.

3. Auflistung aller Rechentische, -tafeln und -tücher weltweit

3.1. Rechentische in Deutschland

Aus Dinkelsbühl stammen drei Rechentische, die alle auf das 16. Jahrhundert datiert werden. Ein Exemplar befindet sich dort im Haus der Geschichte, und die beiden anderen Tische sind als Dauerleihgaben im Germanischen Nationalmuseum Nürnberg und im Jüdischen Museum Berlin ausgestellt.

Zwei Rechentische aus dem 16. Jahrhundert stehen in der Alten Kanzlei des Rathauses in Lüneburg.

Ein Rechentisch, der im Besitz der Stadt Goslar ist, wurde zeitweise im Huldigungssaal gezeigt. Durch unsachgemäße Überarbeitung geriet er in einen sehr schlechten Zustand. Nun wird er im Magazin des Museums Goslar aufbewahrt.

In Münster ist ein Rechentisch als solcher kaum mehr erkennbar. Ein übereifriger Restaurator hat die vorhandenen Linien des Rechenschemas unglückseligerweise wegrestauriert.

Ein außergewöhnlicher Rechentisch befindet sich an historischer Stätte in Lutherstadt Wittenberg. Dort steht er in der Ordinandenstube der Stadt- und Pfarrkirche St. Marien und wurde 1996 wiederentdeckt. Dieser Tisch zeichnet sich durch seine vollkommen außergewöhnliche elliptische Form bei der recht großen Tischplatte aus, wohingegen die Tischplatten bei allen anderen Rechentischen von rechteckiger Form sind.

Abb. 2: Rechentisch der Stadt- und Pfarrkirche St. Marien in Lutherstadt Wittenberg

Der Tisch weist eine Höhe von 84 cm auf. Die Tischplatte ist 272 cm lang und 158 cm breit. Können aus dem Verhältnis zwischen der Länge und der Breite, d. h. dem Quotienten 272 cm / 158 cm, Schlüsse gezogen werden? Dieser Quotient ist annähernd $\sqrt{3}$. Ist dies Zufall oder Absicht? Der Autor vermeidet hieraus irgendwelche weitergehenden Deutungen, weist aber darauf hin, dass man bei Verbindung der Scheitelpunkte der Ellipse eine Raute mit den Winkeln 60° und 120° erhält bzw. zwei aneinander angefügte gleichseitige Dreiecke.

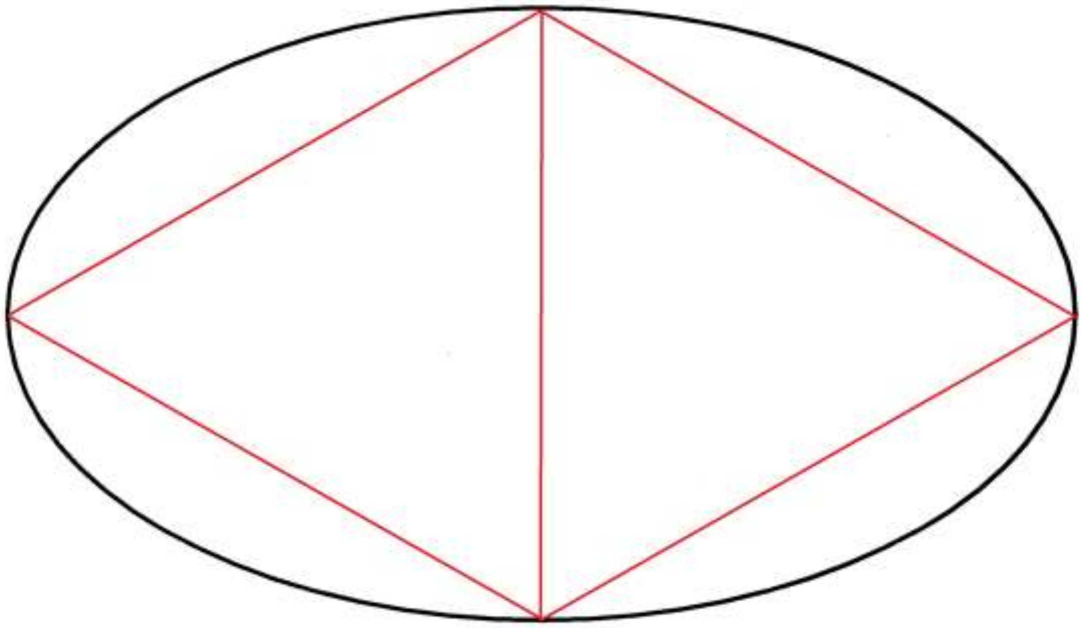


Abb. 3: Gleichseitige Dreiecke innerhalb der Ellipse bei maßstäblicher Darstellung des Rechentisches im Grundriss

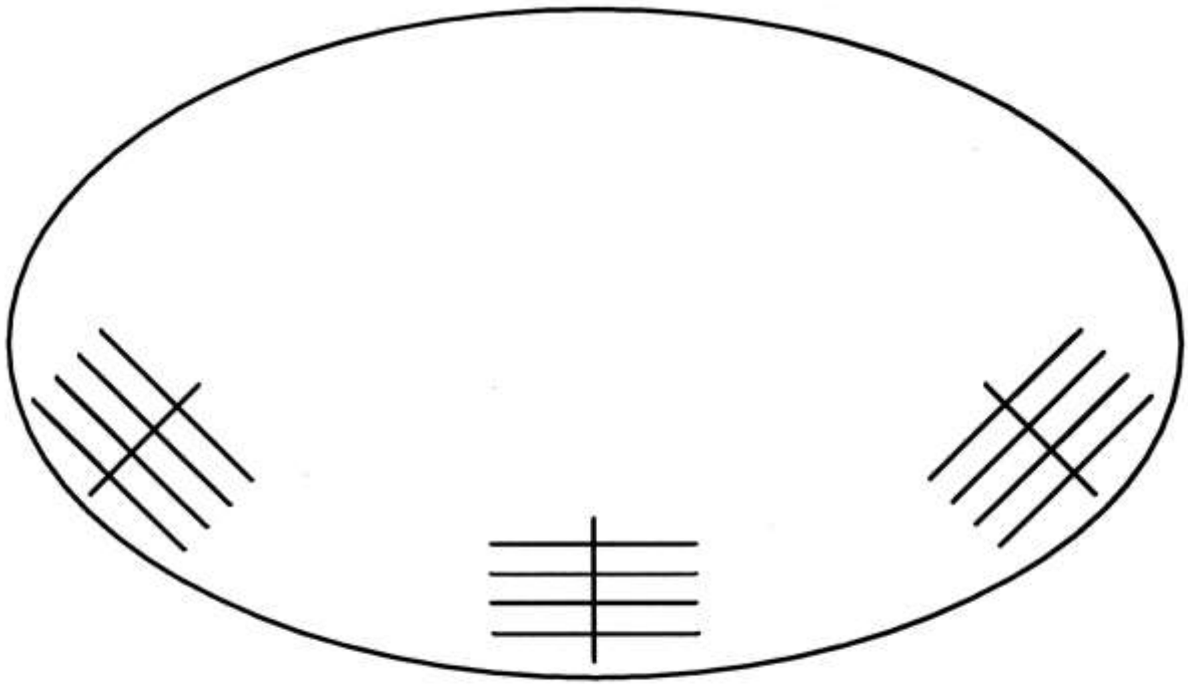


Abb. 4: Maßstäbliche Darstellung des Rechentisches im Grundriss

Der Tisch, der vermutlich aus Lindenholz ist, dürfte um 1570 entstanden sein. In ihn sind drei gleich große Rechentafeln eingearbeitet und zwar eine in der breiten Mitte (Hauptscheitel der Ellipse) und die beiden weiteren symmetrisch angeordnet fast an den Enden des Tisches. Die Mittellinien der Rechentafeln sind in rund 140 cm Abstand angelegt. Die Linien aus Mooreiche sind als Intarsien eingearbeitet.

Zu beklagen ist der Verlust von zwei Rechentischen, die es in Freising und in Wismar gegeben hat. Sie gelten seit den Kriegswirren des zweiten Weltkrieges als verschollen. Es ist gut vorstellbar, dass sie verbrannt sind. Genauso können wir annehmen, dass es viele weitere Rechentische gegeben hat, die wie andere Tische und sonstige hölzerne Gegenstände verheizt oder bei Bränden vernichtet worden sind.

Umgekehrt ist es aber auch heute noch möglich, weitere Rechentische aufzuspüren. So ist es dem Autor 2015 passiert, dass er bei einer Stadtführung im mainfränkischen Volkach im Schelfenhaus einen Rechentisch aus der Spätrenaissance wiederentdeckt hat [Reich]. Dieser Rechentisch wurde restauriert und ist nun im Volkacher Museum Barockscheune ausgestellt.

Zusammengefasst kann festgehalten werden, dass damit in Deutschland heute neun existierende Rechentische bekannt sind.

3.2. Rechentische in der Schweiz

Besonders gesegnet mit Rechentischen ist die Schweiz mit 18 Exemplaren. Davon befinden sich elf Rechentische, die hauptsächlich aus dem 17. Jahrhundert stammen, in der Suisse romande, der französischsprachigen Schweiz. Ein richtiges Eldorado für Rechentische ist im Kanton Waadt das Pays-d’Enhaut mit dem zentralen Ort Château-d’Œx. Hier sind sechs Rechentische bekannt, zwei im Musée du Vieux Pays-d'Enhaut in Château-d’Œx und vier im Privatbesitz. Im Kanton Wallis befinden sich je ein Rechentisch im Château Chillon in wunderschöner Lage am Genfer See, im Château Muzot bei Sierre, in dem der Dichter Rainer Maria Rilke von 1921 bis 1926 seine letzten Jahre verbracht hat, und im Rathaus von Sembrancher. Außerdem existieren in der Romandie noch ein Rechentisch im Musée d’art et d’histoire in Genf und ein weiterer in Neuchâtel in Privatbesitz. Der Tisch im Château Chillon diente auch oder vielleicht in der Hauptsache als Spieltisch, denn neben den Zeichen für die Münzrechnung in der Pfundwährung sind ein Schachbrett und ein Mühlespiel auf die Tischplatte aufgebracht.

In der deutschsprachigen Schweiz sind dem Autor sieben Rechentische bekannt und zwar drei in Basel (zwei im Historischen Museum und einer im Staatsarchiv Basel-Stadt), zwei im Landesmuseum Zürich und je einer im Rathaus Bremgarten und im Historischen Museum Schloss Thun. Sechs dieser Tische stammen aus dem 16. Jahrhundert, der mit reichen, geometrisch bestimmten Intarsien geschmückte Thuner Rechentisch aus der Zeit um 1700.

3.3. Weitere Rechentische weltweit

Zwei besonders schöne Rechentische kann man in Dänemark und in Frankreich bewundern. In Straßburg steht im Musée de l’Œvre Notre-Dame (Frauenhaus-Museum) ein Rechentisch aus Nussbaumholz mit Intarsien aus Elfenbein. Er ist auf etwa 1600 datiert.

Der Rechentisch in Kopenhagen, der sich im königlichen Schloss Rosenborg befindet, besteht aus schwarzem Marmor. Sein Entstehungsdatum kann auf die Zeit zwischen 1611 und 1629 eingegrenzt werden. Er gehörte dem dänischen König Christian IV. (1577–1648).

Einen Rechentisch, der aus der französischsprachigen Schweiz stammt, hat es nach Renmark in Südaustralien verschlagen.

3.4. Rechentafeln / -bretter und -tücher

Außer den 30 bisher aufgeführten Rechentischen gibt es noch weitere Gegenstände, mit denen das Rechnen auf den Linien vollzogen werden konnte. So sind in der Schweiz zwei Rechentafeln von 1732 bzw. 1536 bekannt, die sich im Musée du Vieux Pays-d'Enhaut in Château-d’Œx und im Historischen Museum Schloss Thun befinden, sowie ein Rechenbrett, das sich in privaten Händen befindet in Rossinière, einem Nachbardorf zu Château-d’Œx.

München kann stolz auf sieben Rechentücher aus grünem Wolltuch sein, die in der bayerischen Residenz aufbewahrt sind. Drei Tücher befinden sich im Bayerischen Nationalmuseum, zwei im Bayerischen Hauptstaatsarchiv und nochmals zwei im Münchener Stadtmuseum. Dem Autor ist außerdem ein wollenes Rechentuch aus dem ausgehenden 16. Jahrhundert bekannt, das im Städtischen Museum Überlingen am Bodensee besichtigt werden kann.

Zuletzt soll ein atlas-rotes Landsknechtsbarett, der sogenannte Rechenhut, aus dem 16. Jahrhundert erwähnt werden, das im Kunsthistorischen Museum Wien aufbewahrt wird. Es gehörte Herzog Wilhelm V. von Bayern (1548–1626), der es im Spiel an seinen Onkel Herzog Ferdinand II. von Tirol (1529–1595) verloren hatte. Auf den Deckel ist ein goldgelbes Linienschema zum Umgang mit der Pfundwährung vom Heller bis zu 10 000 Pfund gestickt. Danach wurde anscheinend um größere Geldbeträge gespielt.

4. Nachbauten

In den letzten Jahren wurden mehrere Rechentische nachgebaut. An erster Stelle sind das Adam-Ries-Museum Annaberg-Buchholz und das Heimatmuseum Bad Staffelstein zu nennen. Mir sind weitere Nachbauten im Arithmeum in Bonn, im Heinz Nixdorf MuseumsForum in Paderborn, beim Heimatverein Wittenberg und Umgebung und vom Stadtmuseum Ingolstadt bekannt. Recht verlässlich habe ich gehört, dass auch für eine Ausstellung an der Universität Trier ein Nachbau hergestellt worden sei. Man kann davon ausgehen, dass weitere Rechentische (nach-)gebaut worden sind. Ich kann mir vorstellen, dass dies beispielsweise an Werkrealschulen und für Schulmuseen geschehen ist.

Auch Rechentücher wurden vielfach nachgefertigt. Solche gibt es auch zum Verkauf in den Museen der drei Adam-Ries-Städte Bad Staffelstein, Erfurt und Annaberg-Buchholz.

Für die Herstellung von besonders naturgetreuen Rechentüchern möchte ich Frau Barbara Weidauer, Sömmerda, lobend erwähnen.

Ein weiterer Zufallsfund ist dem Autor auf Schloss Vianden im nördlichen Teil des Großherzogtums Luxemburg 2017 gelungen.

Abb. 5: Schloss Vianden (seit 11. Jahrhundert)

Es handelt sich um einen wunderschönen nachgebauten Rechentisch, den man auch bei genauerer Betrachtung noch für antik halten könnte. Für mich stellten sich nun die Fragen: Welcher Rechentisch diente als Vorlage für diesen Nachbau? Ist es ein bisher unbekannter Rechentisch in Luxemburg oder Umgebung? Der Sachverhalt klärte sich rasch auf. Diesen Rechentisch hatte Josy Bassing aus Vianden im Jahr 2013 angefertigt. Als Vorbild hatte ihm der Rechentisch gedient, der im Musée de L'Œuvre Notre Dame (Frauenhaus-Museum) in Straßburg steht.

Es werden nun Angaben im Detail zu diesem Rechentisch gemacht. Er besteht komplett aus Eichenholz. Der Tisch ist 108 cm lang und 52 cm breit. Bei einer Wulstbreite von 1,5 cm ist der Tisch innen 105 cm lang und 49 cm breit. Der Wulstrand steht 1 cm höher. Die Tischplatte besteht aus zwei Brettern gleichen Formates. Die Höhe des Tisches beträgt 73 cm.

Abb. 6: Rechentisch, nachgebaut von Josy Bassing, Vianden

Das Linienfeld besteht aus 0,5 cm dicken, weiß bemalten eingravierten Linien. Die Längslinien sind 61 cm lang. Diese Länge gliedert sich auf in ein 20,5 cm langes Feld, einen 0,5 cm breiten Querstrich, das zweite 19 cm lange Feld, einen zweiten 0,5 cm breiten Querstrich und ein drittes 20,5 cm langes Feld. Die beiden Querlinien sind 30 cm lang. Die drei Felder zwischen den 4 Längslinien sind (von oben nach unten) 9,4 cm, 9,2 cm und 9,4 cm dick. Die vier römischen Ziffern M, C, X und I sind etwa 5,5 cm groß. Die Abstände der weißen Linien von den Wülsten oben und unten sind jeweils 9 cm, auf den Seiten rechts und links jeweils 22 cm.

Die Tischplatte ist auf einer stabilen gedrechselten Säule befestigt, die auf vier Füßen von 40 cm Länge und 11 cm Breite steht, die rechtwinklig in die Längs- und Querrichtung des Tisches gehen.

Der Rechentisch steht im Schloss üblicherweise in einem Esszimmer oberhalb der Küche, findet aber bei Rechenvorführungen auch im Bankettsaal Verwendung.

5. Nachtrag: Der Zahltisch in Schloss Ambras bei Innsbruck

Eine neue Erkenntnis, die ich erst nach meinem Vortrag am 4. Mai 2018 in Miesenbach auf der Tagung gewonnen habe, soll nicht verschwiegen werden. Es gibt einen wunderschön ausgestalteten Zahl- und Rechentisch aus dem Jahr 1628 im habsburgischen Schloss Ambras, das aussichtsreich oberhalb von der Tiroler Landeshauptstadt Innsbruck gelegen ist.

Abb. 7: Schloss Ambras bei Innsbruck

Informationen über den als Zahltisch bezeichneten Tisch erhielt ich von Christa Binder und Peter Schmitt, der mir seine Fotos von einem Schlossbesuch am 27.9.2013 zur Verfügung stellte. Inzwischen konnte ich selber den in seiner Art einmaligen Tisch am 25. Mai 2018 in Augenschein nehmen. Der Tisch steht im obersten Stockwerk des Schlosses. Nach Angaben des Kunstmuseums Schloss

Ambras Innsbruck, das verwaltungsmäßig dem Kunsthistorischen Museum Wien zugeordnet ist, besteht er aus Kehlheimer Stein, Fichte, Esche, Ahorn, Obsthölzer, Eiche und Nuss. Dieser Zahltisch mit der Inventarnummer KK 2418 ist 79 cm hoch. Die Tischplatte hat die Maße 105 cm x 100 cm, die in die Platte eingelassene Glasscheibe ist 89 cm lang und 79 cm breit. Die Scheibe mit einem Metallrand schützt die darunter liegende Platte aus Kehlheimer Stein, in die ein mir bisher unbekannt gebliebener Maler Johann Christoph Paul Tscanno 1628 viele Details eingeätzt und hergestellt hat.

Der Tisch dürfte für verschiedenartige Finanzgeschäfte Verwendung gefunden haben. In den vier Ecken erblickt man als mathematische Hilfsmittel einen Kalender, der die Monate und Tage angibt, eine Umrechnungstabelle von Dukaten zu Rheinischen Gulden (8 Dukaten = 15 Rheinische Gulden) und Schillingen (1 Dukate = 15 Schillinge), eine Rechentafel mit mehreren Währungen (u. a. Dukaten, Gulden, Kreuzer, Schilling, Pfennig und Heller) und eine Zinstabelle, die von einem Pfennig bis 9000 Gulden die jährlich anfallenden Zinsen bei sechsprozentiger Verzinsung angibt.

Mehrere in den Stein eingeätzte Texte warnen vor den Sünden der Trunksucht und Völlerei und nehmen dabei nicht inhaltsgetreu in abgewandelter Form Bezug auf diverse nicht zu präzisierende Passagen im Alten Testament, insbesondere im vierten Buch Mose und im ersten Buch Samuel.

Einer der fünf Textteile ist in der Tischmitte in Spiralform von innen nach außen geschrieben. Er endet mit der Formulierung *„ ANNO SALUTIS HUMANÆ 1628 Durch Johann Christoph Paul. Toscanno, Maller zu Statt am Hof geetzt vnd gemacht.“*

6. Zusammenfassung

Wo findet man heute Rechentische? Sie gibt es – was auffallend ist – in touristisch attraktiven Orten, und sie stehen in Schlössern, Kirchen, Rathäusern, sonstigen öffentlichen Gebäuden, Museen und Archiven. Manche sind aber auch schwer zugänglich in Privatbesitz.

Rechentische sind eine Rarität und stellen daher einen größeren Wert dar. Weltweit sind mir heutzutage inklusive des Zahltisches von Schloss Ambras 31 noch existierende Rechentische bekannt. Außerdem existieren drei Rechentafeln bzw. -bretter, acht Rechentücher und ein Rechenhut.

Es ist vorstellbar, dass es etliche weitere historische Rechentische gibt, beispielsweise in Skandinavien, Großbritannien, den Beneluxländern, Frankreich, Spanien, Portugal, Italien oder in östlichen Ländern. Was Holz halt so an sich hat: Viele Rechentische sind verbrannt worden, zum einen sind sie in Kriegen zerstört worden, und zum anderen haben sie als Brennholz gedient.

7. AUFRUF

Der Autor würde sich freuen, wenn Ihnen, liebe Leser, ebensolche Funde glücken würden. Daher rufe ich Sie auf: Beachten Sie Tische genauer! Es könnte ein RECHENTISCH sein. Und melden Sie dann bitte Ihren Fund z. B. an den Adam-Ries-Bund Annaberg-Buchholz oder an den Autor!

8. Bibliographie

Richard Hergenhahn, Peter Rochhaus, Ulrich Reich: „Mache für dich Linihen…“: Katalog der erhaltenen originalen Rechentische, Rechenbretter und -tücher der frühen Neuzeit, Reihe „Der Rechenmeister“, Schrift Nr. 10 des Adam-Ries-Museums Annaberg-Buchholz, 56 Seiten, Annaberg-Buchholz 1999.

Ulrich Reich: Der Volkacher Rechentisch. In: Jahrbuch des Adam-Ries-Bundes, Band 7, Annaberg-Buchholz 2016, S. 21–24.

Alain Schärlig: Compter avec des cailloux. Le calcul élémentaire sur l’abaque chez les anciens Grecs [Rechnen mit Kieselsteinen. Das elementare Rechnen auf dem Abakus bei den alten Griechen], Presses Polytechniques et Universitaires Roman-des, 340 Seiten, Lausanne 2001.

Alain Schärlig: Compter avec des jetons. Tables à calculer et tables de compte du Moyen Age à la Révolution [Zählen mit Rechenpfennigen. Rechen- und Zahltische vom Mittelalter bis zur Revolution], Presses Polytechniques et Universitaires Roman-des, 288 Seiten, Lausanne 2003.

Alain Schärlig: Compter du bout des doigts. Cailloux, jetons et bouliers, de Périclès à nos jours [Rechnen mit den Fingerspitzen. Kieselsteine, Rechenpfennigen und Abaki, von Perikles bis in unsere Tage], Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 296 Seiten, Lausanne 2006.

Prof. Ulrich Reich, Kurpfalzstraße 14, D-75015 Bretten, ulrichreich44@gmail.com

Danuta Ciesielska & Joanna Zwierzyńska

L. & A. Birkenmajer Institute for the History of Science

Polish Academy of Sciences, Warsaw

On David Hilbert's Göttingen Lecture Course for Differential Equations[1]

Abstract

The Archives of the Polish Academy of Sciences in Warsaw holds lecture notes for a course in ordinary and partial differential equations taught by David Hilbert in Göttingen in 1912.

The notes, complete and clear, and penned in German by his then-student Wacław Staszewski (1892–1970), later a physicist with a PhD in physics granted by the Jagiellonian University in 1917, professor in Wilno, Toruń, and Lublin.

The article aims to provide an analysis of the lecture course in the light of the notes and a biographical outline of their author, Wacław Staszewski. We begin with drawing some parallels between David Hilbert's series of lectures and an analogous one, delievered by Kazimierz Żorawski (1866–1953) at the Jagiellonian University in Kraków in 1912/1913, that is, the university that Wacław Staszewski left in order to pursue his studies in Göttingen in the same year. Kazimierz Żorawski studied in Göttingen as well, however, about twenty years earlier.

Keywords: differential equations lectures notes, University in Göttingen, David Hilbert, Wacław Staszewski, Kazimierz Żorawski.

[1] This paper was supported by National Science Centre grant no. 2017/25/B/HS3/02420.

Historical Background

In 1815, the Kingdom of Poland/Congress Poland (in Polish: *Królestwo Polskie*/*Kongresowe*) was established by the Congress of Vienna, as a sovereign state of the Russian part of Poland. Officially, the Kingdom of Poland had considerable political autonomy – theoretically, it had an independent army, currency, budget, penal code, parliament (called Sejm). In fact, the Russian Emperors generally disregarded any restrictions of their power, therefore the Kingdom's independence did not last longer than fifteen years.

However, the situation led to a revolution, which started in 1905 and manifested itself with, among others, a boycott of Russian schools and a demand that Polish be a language of instruction. Nonetheless, there were many positive effects of the revolution – such as the implementation of Polish private education (i.e., the foundation of Polish private schools was rendered possible, with the Polish language of instruction, but with no official secondary school final exam – *Abitur*).

Wacław Staszewski – Biographical Outline

Wacław Staszewski was born on June 1, 1892, in Warsaw, in a modest apartment in a poor neighbourhood of Powiśle.[2] His father Franciszek at first worked in a big gardening company, and later opened his own florist shop. Wacław's mother Teodora worked as a florist; however, after the death of her husband in 1908 she ran the florist shop.

Wacław was initially taught at home. His education was conducted by two teachers who taught reading and mathematics (simple calculations) to him. When he was eight, the young boy was sent to spent a year in a preparatory school, where Russian was the language of instruction. Then Wacław attended a government (Russian) gymnasium, but after the Polish schools opened in 1905, he moved to a private school in the Kingdom of Poland, which

[2] This information can be found in his own diary, actually written by his sister, Henryka Królikowska, who ends the diary in the following way: "Remark: I have tried – from loose cards penned by my brother in the last period of his life, when his physical and mental health were gradually deteriorating (he also had problems with eyesight and memory) to arrange the text in a chronological order" (Staszewski 1968, p. 40, translation ours). The diary is one of the main sources confirming many details from Staszewski's life, and it particularly helpful in this section.

he graduated from in 1910 and then undertook studies at the Jagiellonian University in Kraków. The subjects studied included mathematics, physics, chemistry, and history of philosophy. Nonetheless, Wacław had a strong wish to move to Göttingen, but in order to do so he had to receive his secondary school certificate again, because German authorities did not accept high school diplomas from private Polish schools at that time.

Wacław Staszewski passed a government (Russian) secondary school final exam in 1911, in Lipawa (Libau) in Courland, Latvia.[3] In the autumn of 1911 he arrived in Göttingen, where he spent two academic years, that is, 1911/1912 and 1912/1913. Staszewski attended lectures delivered by David Hilbert, Felix Klein, and Emil Wiechert. Apart from that, he attended physical laboratory led by Eduard Riecke and Waldemar Voigt.[4]

In 1914 Staszewski returned to Kraków, to the Jagiellonian University, where under the supervision of Marian Smoluchowski and Władysław Natanson earned a PhD in physics in 1917.[5]

One may therefore ask a question why Wacław Staszewski, who truly wanted to study in Göttingen, and in order to achieve it made a decision to take another secondary school final exam, finally changed his mind and made his way back to the Jagiellonian University. In Göttingen Staszewski attended a lecture "Gültigkeitsgrenzen des zweites Hauptsatzes der Wärmetheorie [Limits of Validity of the Second Law of Heat Theory]," given by Marian Smoluchowski (1872–1917), Austrian-Polish physicist, pioneer of statistical physics. The lecture was presented in April 1913 at the invitation of the Wolfskehl Foundation.[6] Staszewski was so impressed by the lecture and personality of Marian Smoluchowski that when Smoluchowski took the position at the Jagiellonian University in 1913, Staszewski decided to arrive in Kraków with him. The topic of Staszewski's PhD thesis, *Measurements of an Electroosmotic Voltage in the Bad Conductors*[7] was given by Marian Smoluchowski. However, it is not his name on the PhD diploma but that of Władysław Natanson. Due to Marian Smoluchowski's sudden death just before the defence, Władysław Natanson took his duties as the supervisor.

---

[3] PAN, Archive records of Wacław Staszewski, j. a. 35, p. 15.
[4] Bogdan Adamczyk, Mieczysław Subotowicz, 1970 and Henryk Piersa, 1970.
[5] The year 1917 is the correct date of his PhD defense. Although, the incorrect date 1927 can be found in some sources, for example in *Wileński Słownik Biograficzny*, p. 387 and *Czy wiesz, kto to jest?* 1938, p. 694.
[6] The thesis was written in Polish language. The original title in Polish is the following: *Pomiary napięcia elektroosmotycznego w złych przewodnikach* (AUJ, Wacław Staszewski).
[7] Walter Moore, 2015, p. 100.

We should also note that we do not have any information about the reason for Staszewski's decision to start studies at the Jagiellonian University and his mid-semester leaving for Göttingen to pursue his studies there. Göttingen was, of course, the centre of science in Europe at that time, however, we cannot be really sure whether Staszewski had planned to go to Göttingen at the beginning (and attended lectures at the Jagiellonian University, for example to extend his knowledge and not to waste the year), or whether he learnt about Göttingen during his studies at the Jagiellonian University.

Later Wacław Staszewski became a professor of theoretical physics. He worked, among others, at the university in Toruń, Wilno and Lublin.[8]

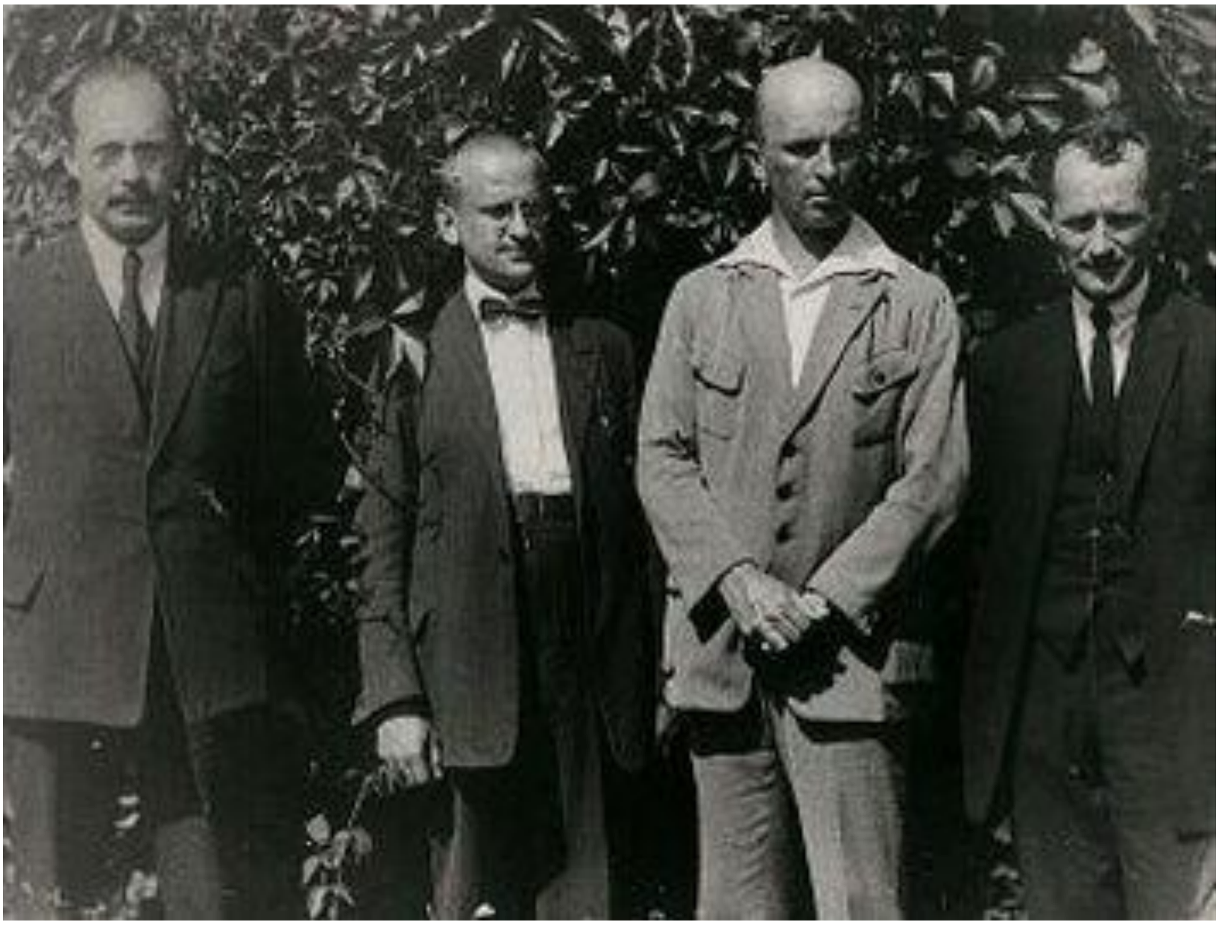


Figure 1: Wilno, June 1926. Professors of Vilnius Univesity, from left to right side: Józef Patkowski, Wacław Staszewski, Jan Weyssenhoff, Wacław Dziewulski.[9]

[8] Anita Chodkowska, 2004, p. 145.

[9] Library of the Mikołaj Kopernik University in Toruń, Professor of the Vilnius University, https://www.bu.umk.pl/DZS/usb/prof.htm

Notes in Differential Equations

The notes comprise three notebooks,[10] which is almost 200 numbered pages altogether; however, every two pages have one number. The first notebook contains the notes on ordinary differential equations, the second one – on both ordinary and partial differential equations, whereas the third one is the continuation of the second notebook and contains material on partial differential equations lecture.

The notes were taken in German by Wacław Staszewski himself. All the notebooks are complete and in perfect condition. The handwriting is very clear and easy to read. The notes were written in full sentences, with almost no corrections, and therefore we can assume that Wacław Staszewski rewrote them from some source (perhaps a blackboard rather than printed notes). We should also state that in Göttingen there still exists a typescript[11] from 1912, assigned to David Hilbert and with the title „Differential equations." However, in this paper we will not write about the difference which were noticed by us.

The Ordinary differential equations lecture contains three main parts: general information on ordinary differential equations, integration methods and methods of variational calculus. The first part is divided into three sections: introduction (however not stated officially, it is clear from the content that it is an introduction), second-order ordinary differential equations, and simultaneous ordinary differential equations.

The very first lines – and the very first definition – of the notes are the following:

1. Allgemeines über Differentialgleichungen.

Unter Differentialgleichunh verstehen wir Beziehungen zwischen den Veränderlichen, einer Funktion dieser Veränderlichen und Differentialquotienten nach den Veränderlichen, also

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0$$

ist eine Differentialgleichung (F ist eine bekannte Funktion). Man unterscheint gewönliche und partielle Differentialgleichungen.[12]

[10] APAN, Archive records of Wacław Staszewski, III-203, j.a. 38.
[11] Göttingen University Archive, David Hilbert, *Partielle Differentialgleichungen*.
[12] APAN, Archive records of Wacław Staszewski, III-203, j.a. 38, p. 2, right side.

In part two, Integration methods, we can find, among others: first-order linear differential equation, Bernoulli differential equation, Jacobi differential equation, Riccati differential equation, second-order differential equations.

The outline of the partial differential equations lecture course is the following: definitions & some examples, systems of differential equations, Legendre transformation, first-order linear differential equations, hyperbolical, elliptical, parabolic differential equations of the first order, integration methods.

Miscellanea

Mathematical content of the notes is, of course, the most significant one. However, what is also of considerable interest while analysing the text, we can find there many pieces of information about the way David Hilbert used to lecture and teach. Some selected miscellanea have been presented in this section.

David Hilbert does not only introduce material, but he also informs students, why he does it. He presents it directly in the introduction to variational calculus:

> *III Methode der Variationsrechnung*
>
> *Es gibt verschiedene Methoden, die die allgemeine Behandlung der Diff.-Gl. gestatten und zwar sehr ausgebildete, wie z. B. die der kontinui[e]rlichen Gruppen (Lie). Diese Methoden haben aber einen theoretischen Charakter: für die Anwendung auf Naturwissenschaften, eignet sich mehr die Methode der Variationsrechnung.*
>
> *Das Problem der Variationsrechnung ist folgendes: es ist F(y(x)) ein gewisser Ausdruck für eine Funktion y(x), die so zu bestimmen ist, dass der Ausdruck zu Minimum wird. In der Variationsrechnung wird also eine Funktion gesucht, während in der Diff-rechning sicht man einen Wert der Variablen, bei dem die gegebene Funktion zu Minimum bzw. Maximum wird. Das Problem der Variationsrechnung leuchtet am besten an einem Beispiel ein.*[13]

[13] APAN, Archive records of Wacław Staszewski, III-203, j.a. 38,8, p. 53 (both left and right side).

David Hilbert gives carefully thought-out examples; he makes sure that the student understands exactly what is being said, and at the same time does not engross entirely in tedious and unnecessary calculations:

> *Beispiel: Wir nehmen ein ganz triviales Beispiel, um auf komplizierte Berechnungen nich eingehen zu müssen.*
>
> *Es sei:*
>
> $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}.$$[14]

In the notes, there appears one word in Polish, that is, *dlaczego?* (*why?*):

> *Ich will zeigen, dass diese „Majorante" unserer Diff. Gl. eine Potenzreihe zur Lösung hat, die konvergiert.*
>
> *Die letzte Gleichunh kann ich auch so schreiben:*
>
> $$\frac{M}{\{1-(z+\ z_x+xz_x\}(1-x\}\{1-\ x^2\}\{1-y\}.}$$
>
> *(Dlaczego?)*[15]

Some Remarks about the Lecture Given by Kazimierz Żorawski

Kazimierz Żorawski (1866–1953) was a Polish mathematician and a rector of the Jagiellonian University (1917-1918). He studied in Warsaw (1884–1888), later in Leipzig and Göttingen (1888-1891 – twenty years before Staszewski) and Paris. He earned his PhD in 1891 in Leipzig. Its title was: *Über Biegungsinvarianten. Eine Anwendung der Lieschen Gruppentheorie* (supervisor: Marius Sophus Lie).

[14] APAN, Archive records of Wacław Staszewski, III-203, j.a. 38, p. 7, right side.
[15] APAN, Archive records of Wacław Staszewski, III-203, j.a. 38, p. 81, left side.

Figure 2: Kazimierz Żorawski as a rector, Kraków 1917, AUJ.

There exist notes from the seminar[16] in ordinary and partial differential equations, given by Kazimierz Żorawski the same year as David Hilbert's lecture. The notes are penned by Aleksander Birkenmajer.[17] We will proceed to compare both notes in Table 1.

Category	**David Hilbert's lecture**	**Kazimierz Żorawski's lecture**
Content	Almost modern	In old style
Examples	Easy calculations	Complicated calculations
Drawings	Many, astounding	None
Additional comments	Yes	No
In general	Much easier to understand and to follow	Much harder to understand and to follow

Table 1. The comparison of Hilbert's and Żorawski's lectures in 1912.

One may ask about the reasons of so profound differences between the lecture courses. Kazimierz Żorawski studied in Göttingen, but twenty years earlier.[18] We can assume that he used methods he was familiar with then.

[16] *Spis wykładów odbywać się mających…*
[17] BJ, Archives records of Aleksander Birkenmajer.
[18] Precisely, he attended – among others – the lecture taught in winter semester 1890 by Felix Klein: Gewönliche Differentialgleichungen, drittel Theil. Information about the lecture from *Verzeichnis der Vorlesungen auf der Georg-August-Universität zu Göttingen*, Göttingen 1891, p. 8. Information that Żorawski attended this lecture: University of Göttingen Archive, Nachlass F. Klein, E 7, Dozent manuel, Winter Semester 1890 – Winter Semester 1891. From this source we know that Żorawski attended to five Klein's lecture courses in summer semester of 1890 and winter semester of 1891, among others – about differential equations.

Summary

Wacław Staszewski's notes from David Hilbert's lecture course are an amazing source for historians of mathematics. They show both the mathematical content of the lecture and the style in which David Hilbert taught. Due to that, we can learn about mathematics known in Göttingen and taught by Hilbert there in 1911/1912; what is more, we can learn from the didactic techniques used by David Hilbert.

Acknowledgements

We would like to kindly thank Anita Chodkowska (Archives of the Polish Academy of Sciences in Warsaw), Renate Tobies (University of Jena), Katharina Habermann (Göttingen University), Philipp Kastendieck (Göttingen University), Annette Vogt (MPI for the History of Sciences, Berlin), Gabriela Marszołek (University of Silesia in Katowice) and Göttingen University Archive staff for their valuable comments and help.

References

Archiwal records

1. Archiwum Polskiej Akademii Nauk (APAN): Materiały Wacława Staszewskiego [Archive records of Wacław Staszewski], III-203, Notatki z wykładów prof. D. Hilberta wygłoszonych w Getyndze. Gewönliche Differentialgleichungen, z. I i II. Partielle Differentialgleichungen, z. 1. 1912–1913, p. rkp., k. 95, j. a. 38.
2. Archiwum Polskiej Akademii Nauk (APAN) Materiały Wacława Staszewskiego [Archive records of Wacław Staszewski], III-203. *Życie urozmaicone*. Pamiętnik Wacława Staszewskiego spisany na podstawie notatek twórcy spuścizny przez jego siostrę Henrykę Królikowską. Rkp., l., k. 40. j. a. 35.
3. Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego (AUJ), WF-II, 504 & 505, Wacław Staszewski.

It is also worth noticing that Alfred Rosenblatt also was in Göttingen in 1908/1909. He was interested in differential equations then and there is a high probability that he was attending the differential equations lecture course, given by Woldemar Voigt: Partielle Differentialgleichungen der Physik. Information about this course can be found in *Verzeichnis der Vorlesungen auf der Georg-August-Universität zu Göttingen während des Winterhalbjahrs 1908/09*, Göttingen 1908, p. 14.

4. Biblioteka Jagiellońska (BJ), Manuscripts, Przyb. 570/75. Papiery po Aleksandrze Birkenmajerze [Achives records of Aleksander Birkenmajer]. Kazimierz Żorawski, *Pewne rozdziały i ćwiczenia z teoryi równań różniczkowych zwyczajnych*.
5. Göttingen University Archive, David Hilbert, *Partielle Differentialgleichungen*. 1.2. Vorlesung WS 1912/13 (1904), Schrank 16205w°55, typescript.
6. Göttingen University Archive, Nachlass F. Klein, E 7, Dozent manuel, winter semester 1890 – winter semester 1891.

Printed materials

7. Bogdan Adamczyk, Mieczysław Subotowicz, Profesor dr Wacław Staszewski, „Postępy Fizyki” 21(1970), no. 4 , pp. 431–436.
8. Anita Chodkowska, Wacław Staszewski [in:] *Słownik biograficzny techników polskich*, Vol. 15, Warszawa 2004.
9. Walter Moore, *Schrödinger. Life and Thought*, Cambridge University Press, Cambridge 2015.
10. Henryk Piersa, Wacław Staszewski, [in:] Polski Słownik Biograficzny, online iPSB, available at *www.ipsb.nina.gov.pl/a/waclaw-staszewski*.
11. Henryk Piersa, Wspomnienie o profesorze Wacławie Staszewskim, „Zeszyty Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego" 13(1970), no. 3, pp. 95–96.
12. *Spis wykładów odbywać się mających na c.k. Uniwersytecie Jagiellońskim, półrocze letnie roku akademickiego 1911/1912*. Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1911.
13. *Verzeichnis der Vorlesungen auf der Georg-August-Universität zu Göttingen*, Göttingen 1891.
14. *Verzeichnis der Vorlesungen auf der Georg-August-Universität zu Göttingen während des Winterhalbjahrs 1908/09*, Göttingen 1908.
15. Wacław Staszewski, [in:] *Czy wiesz, kto to jest?* Ed. Stanisław Łoza, Warszawa 1938.
16. Wacław Staszewski, [in:] *Wileński Słownik Biograficzny*, ed. Henryk Dubowik, Leszek Jan Malinowski, Towarzystwo Miłośników Wilna i Ziemi Wileńskiej, Bydgoszcz 2002.

Sprachliche Schwierigkeiten beim Verständnis frühneuzeitlicher Textaufgaben – anhand von Beispielen aus Anton Neudörffers ungedruckter *Grosser Arithmetic*

Alfred Holl

1. Methoden zum Umgang mit sprachlichen Schwierigkeiten

Es soll in diesem Beitrag um Formulierungen kaufmännischer und unterhaltungsmathematischer Aufgaben aus der frühen Neuzeit gehen, die uns heute nur noch schwer oder gar nicht mehr zugänglich sind. Die systematische Erstellung eines Methodenkatalogs zur Rekonstruktion der genauen Semantik solcher Aufgaben würde ich im Sinne der Tagung als einen ‚weniger beachteten Teil der Mathematikgeschichte' ansehen. Insbesondere bei der Edition kommen aber derartige Methoden notgedrungen zum Tragen. Denn zu einer vollständigen Edition einer Textaufgabe gehört meines Erachtens neben dem Aufgabentext immer die intendierte oder wenigstens eine wahrscheinliche Lösung.

Um eine Lösung zu ermitteln, muss man in mehrfacher Iteration philologische und mathematische Methoden kombinieren, die nicht notwendig disjunkt sind:

<u>Philologische Methoden</u> (offene Liste)

Ermittlung von Druck- und Schreibfehlern in Text und ggf. Bearbeitung

Ermittlung unklarer Wortbedeutungen

Klärung von Homonymien (beispielsweise *Summe* ‚Summe' oder ‚Produkt')

Auflösung komplexer syntaktischer Strukturen (u. a. Bestimmung von Textreferenzen bei Demonstrativ- und Relativpronomina)

Rekonstruktion fehlender Wörter in einer syntaktischen Struktur

Rekonstruktion fehlender Zeilen in Reimen

Vergleich mit fast gleichen oder sogar mathematisch äquivalenten Aufgaben

<u>Mathematische Methoden</u> (offene Liste)

Erschließung frühneuzeitlicher mathematischer Fachtermini (mit sprachlichen Wörterbüchern und zeitgenössischen mathematischen Darstellungen)

Erschließung von Umrechnungsformeln für verschiedene Geld-, Maß- und Gewichtseinheiten (sog. „Resolvierungen")

Untersuchung von Bearbeitungen

Vorwärts- und Rückwärtsrechnung, wenn finaler Lösungswert angegeben

Zerlegung in Teilaufgaben

2. Anwendung: Edition von Aufgaben des Anton Neudörffer (1571-1628)

Seit 2017 arbeite ich zusammen mit einer kleinen Projektgruppe (Yvonne Stry, Rudolf Haller) an einer Thyssen-geförderten Edition von ca. 400 Textaufgaben aus der Hand des Nürnberg-Regensburger Rechenmeisters Anton Neudörffer (1571-1628). Sie sind der – soweit bekannt – gesamte erhaltene Bestand seiner *Grossen Arithmetic*, die nie vollständig im Druck erschien und die er erstmals 1616 in seiner *Anweisung in die Arithmetic* (S. 188) explizit ankündigte. Diese 400 Aufgaben wurden teils von Neudörffer (oder dem Verleger) vorab gedruckt, teils vom Regensburger Rechenmeister Georg Wendler (~1619-1688) handschriftlich überliefert. Sie sind glücklicherweise alle um 1650 von Wendler bearbeitet worden (Cgm 3789):

Abschnitt	Neudörffer	Wendler Cgm 3789
1. Appendix (*Fragmenta* des 1. Teils der *Grossen Arithmetic*)	*Arithmetic* ^{4}1627, ^{5}1634, S. 197-220 Aufgaben 1-86 plus 1 Nummeriert	fol. 77'-113 alle Aufgaben nicht nummeriert vollständig gelöst
2. Recreationis Exempla *Zugab-Exempel* (Auswahl des Verlegers aus der *Grossen Arithmetic*)	*Arithmetic* ^{5}1634, S. 232-237 Aufgaben 1-22 Nummeriert	fol. 113'-120 alle Aufgaben nicht nummeriert vollständig gelöst
3. *Grosse Arithmetic* (ungedruckt)	–	fol. 120'-215 Aufgaben [1]-[285] nicht nummeriert für die Edition nummeriert vollständig gelöst

Tab. 1: Überlieferung und Bearbeitung der *Grossen Arithmetic*

Für die Edition der *Grossen Arithmetic* ist es von unschätzbarem Wert, dass man eine zeitgenössische Lösung kennt. An die Notation von Wendlers Bearbeitung kann man sich leicht gewöhnen, eine ständige Herausforderung bildet aber deren Nebenrechnungscharakter, meist ohne verbindende Texte und ohne die explizite Angabe von Lösungsstrategien.

3. Beispiele schwer verständlicher Aufgaben

An dieser Stelle nenne ich fünf schwer verständliche Aufgabenmit einem kurzen Lösungskommentar.

Bruchrechnung

Wer mit den Brüchn kan recht gehn um,
Gibt nicht allein ein Practicum,
Sondern die andern exempl, als
Das seind die Regul Coss und Fals,
Werden jhm sein leicht zu solvirn,
Wenn einer sich will exercirn.
Darumb deren so manigfalt
Sein bschriben alhier fürgestalt.
Und nebn denen auch diß zur frist
Under andern nicht das gringste ist.
Erstlich vierthalbs thu bequemmen,
[Viertl eines Sibentheils nemmen]
Von einhalb folgender Summen [sc. Produkt]:
Sechs und dreissig recht genommen
Auß Vier und ein drittheil eins dritl.
Das kommende zeuch ohne mittl
Von drey einhalb Siben zwölfftheil.
Darnach mich bericht mit der weil,
Wann alles fleissig ist beschribn,
Wievil neunundneuntzig theil blibn?
(Cgm 3789, 182r, [222])

Lösungskommentar

$$\frac{(3\ 1/2)\ /\ 4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{4\ 1/3}{3} = \frac{234}{72} = 3\ 1/4$$

$$\frac{3\ 1/2}{7/12} - 3\ 1/4 = 2\ 3/4$$

Sei x die Anzahl der 99stel, die obigem Ergebnis entspricht.
Dann ist

$$2\ 3/4 = x/99$$

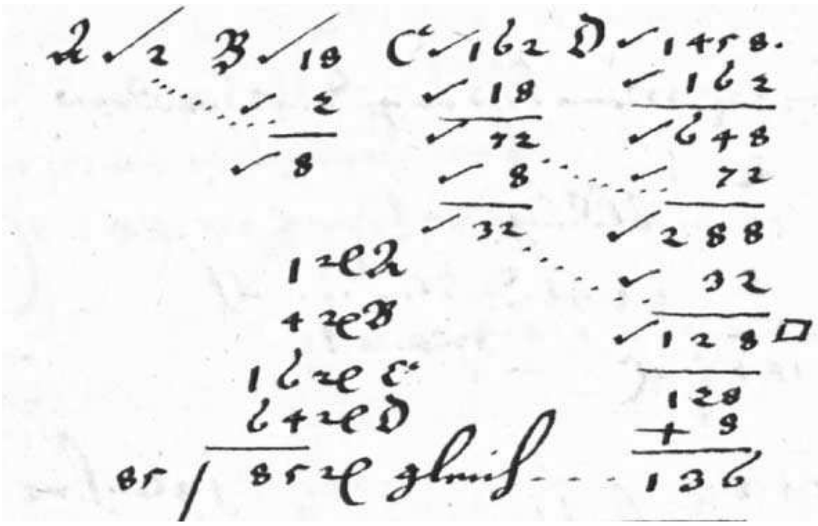
Es ergeben sich $1089/4 = 272\ 1/4$ Neunundneunzigstel.

Geometrische Folgen

Jtem 4 haben Gelt/ das verhelt sich in
proportione tripla, ists ersten/ so am wenigsten
√2 fl/ wann man zum Quadrat jhrs Geldes diffe=
rentz/ differentzen differentz 8 addirt/ so gibts ag=
gregat die Summa vierer Zahlen in proportio-
ne Quadrupla. Jst die Frag/ welche seyns? Fa=
cit 1 $^{3}/_{5}$. 6 $^{2}/_{5}$. 25 $^{3}/_{5}$. etc.
(Neudörffer, 1627, S. 205, Nr. 41; Cgm 3789, 91$^{\mathrm{v}}$)

Lösungskommentar

Seien $a = \sqrt{2},\ b = 3a,\ c = 3b,\ d = 3c$ die Geldbeträge der vier Personen.



Wenn man gemäß dem Schema aus der Handschrift rechnet, ergibt sich für die „Differenz der Differenzen der Differenzen“ der Geldbeträge folgender Ausdruck [fl]:

$$d - c - (c - b) - \big(c - b - (b - a)\big) = d - 3c + 3b - a = 3b - a =$$
$$= 3\sqrt{18} - \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

Nun kommen weitere vier Zahlen ins Spiel, die eine geometrische Folge mit Faktor 4 bilden: $x, 4x, 16x, 64x$.
Es soll gelten:

$$(8\sqrt{2})^2 + 8 = x + 4x + 16x + 64x = 85x$$

$$x = 1\,3/5$$

Die gesuchten Zahlen der zweiten geometrischen Folge sind somit
1 3/5, 6 2/5, 25 3/5 und 102 2/5.

Kegelmantel

[Reimversion]
Krieg gibts gnug in der gantzen Welt,
  Darzu braucht man auch vil der Zelt.
Drunter ist eins so Rot und Weiß,
  Dreissig drey Clafftr helts im umkreiß,
Von welchn biß obn an spitz hinan
  Siben Claffter man zehlen kann.
Darzu ghörn zwantzig Sechs stuck Zwilch,
  Dann Siben ein Viertl Eln billich.
Darauff einer mit fleiß thut fragn,
  Dennoch zwo Eln mehr, solt du sagn,
An die Clafftr, dann sie breit ist, gehn
  Deß gedachtn Zwilch, thus recht verstehn,
Wie breit dann der Zwilch auch sein mag?
  Dreissig Sechs Eln lang stuck ich sag.

[Prosaversion]
Jtem. Eines Zelts umbkreiß ist 33 Claffter und die leng
von der spitz biß zum umbkreiß 7. Die frag, weil man
26 stuck Zwilch und 7.4 Eln darzu verbraucht, wie breit
er gewest? Die Claffter per 2 Eln mehr, dann an der breite
gerechnet.
(Cgm 3789, 177r, [213])

Die Aufgabe existiert an gleicher Stelle in einer Reim- und einer Prosaversion, die man allerdings erst in moderne Sprache umformulieren muss, um die Aufgabe zu verstehen:

Angabe der Zeltmaße wie oben. Für das Zelt werden 26 Stück Zwilch von je 36 Ellen Länge und unbekannter Breite (in Ellen) sowie ein kleines Stück von 7 1/4 Ellen Länge und der gleichen unbekannten Breite verbraucht. Wie vielen Ellen ein Klafter entspricht, erhält man, wenn man zu der unbekannten Anzahl Ellen der Zwilchbreite 2 Ellen addiert.

Lösungskommentar

Kegelmantelfläche:

$$A = b \cdot \frac{r}{2} = 33 \cdot \frac{7}{2} \text{ Klafter}^2 = 115{,}5 \text{ Klafter}^2$$
$$= (115{,}5x^2 + 462x + 462) \text{ [Ellen}^2\text{]}$$

mit Zwilchbreite x Ellen und 1 Klafter = $(x + 2)$ Ellen

Zwilchfläche:

$$(26 \cdot 36x + 7\,1/4\,x)\ \text{Ellen}^2 = 943{,}25x\ \text{Ellen}^2$$

Durch Gleichsetzen von Kegelmantelfläche und Zwilchfläche ergibt sich die quadratische Gleichung

$$x^2 - 25/6\,x + 4 = 0$$

mit den Lösungen: 3/2 und 8/3.
Wendler wählt die Lösung 3/2 Ellen, weil sie eine passende Klafterlänge liefert: 1 Klafter $= (3/2 + 2)$ Ellen $= 7/2$ Ellen, was bei 1 Elle ≈ 50 cm einem Wert von 1,80 m für einen Klafter entspricht (Spannweite der Arme).

Proportionale Verteilung

Jtem, auff einer stattlichen Hochzeit befinden sich bey einem
Tanz 78 persohnen, als nemblich Ritter, deren theil oder
Nenner desselben ist noch sovil als an Burgern; der Frauen
und Jungfrauen aber thut an Zehler 3mal mehr; hergegen
der JungGesellen theil oder dessen Nenner ist umb
1 – denn der Burger; letzlich Edelleuth sein $^1/_6$. Wird hier
auff gefraget, der wievilste theil jhr jeder gewest, weil
16 Junggesellen vorhanden?
(Cgm 3789, 152^r, [118])

Lösungskommentar:

Die Mitgliederanzahlen der fünf Personengruppen sind nicht als Teile von 78 zu verstehen, sondern als Teile eines unbekannten Zählers y (vgl. Tropfke S. 557)

Ritter:	$y/2x$
Bürger:	y/x
(Jung-)Frauen:	$3y/x$
Junggesellen:	$y/(x-1) = 16$
Edelleut:	$y/6$
Summe:	78

$$y \cdot \frac{3(x-1) + 6(x-1) + 18(x-1) + 6x + x(x-1)}{6x(x-1)} = 78$$

$$x = 4;\ y = 48$$

Hieraus folgen die Mitgliederzahlen: 6, 12, 36, 16, 8.

Komplexer Warentausch

Jtem, zween wolln stechen alda.
Hat A Samet von Genua.
Damit er sich nicht thu verletzen,
Will er im stich die Eln setzen,
Nemblich was paar gilt, dessn quadrat
Radix zu viermal angschlagn hat.
Dabey sich recht mög befinen,
Zwantzig [an] hundert will gwinen.
Gleichwol das Zill auch zimblich weit,
Weil er gibt ein gantzes Jahr Zeit.
Begert darzu neben der Wahr
Den drittl, daß er bezahlt werd paar.
Der ander hat Meißnische tuch,
Gilts Stuckh zwantzig vier guldn mit fug.
Wills im stich übersetzn eben
Auch umb Sechs Guldn höher geben.
Damit der Erst nicht hab gewin,
Gibt er darzu Neun Mont termin,
Welches der andr dann gar sehr ant.
Frag Jch, was ein Eln gelt Contant?
(Cgm 3789, 201r, [259])

Lösungskommentar

Die im Folgenden verwendeten Formeln ergeben sich durch Vergleich von Wendlers Lösungen zu mehreren ähnlichen Aufgaben.

Seien A und B die beiden Tauschpartner.

Für A gilt:

Übersatzanteil	= Übersatz / (Referenzpreis · Zeit)
Referenzpreis	= (Barpreis – Cashbetrag) (1 + Gewinnanteil)
Übersatz	= Stichpreis – Cashbetrag – Referenzpreis
Barpreis:	x^2 [fl]
Stichpreis:	$4x$ [fl]
Zeit:	12 Monate
Cashanteil:	$1/3$
Cashbetrag:	$1/3 \cdot 4x = 4/3\,x$ [fl]
Gewinnanteil:	$20/100$
Referenzpreis:	$(x^2 - 4/3\,x)\,(1 + 20/100) = 6/5\,x^2 - 8/5\,x$ [fl]
Übersatz:	$4x - 4/3\,x - (6/5\,x^2 - 8/5\,x) = 64/15\,x - 6/5\,x^2$ [fl]

Übersatzanteil:

$$\frac{64/15\,x - 6/5\,x^2}{(6/5\,x^2 - 8/5\,x\,)\ \cdot\ 12\ \text{Monate}} = \frac{32/3 - 3x}{(3x - 4)\ \cdot\ 12\ \text{Monate}}$$

(da x als Preis nicht = 0 sein darf)

Für *B* gilt:

Übersatzanteil	= Übersatz / (Referenzpreis · Zeit)
Referenzpreis	= Barpreis
Übersatz	= Stichpreis – Referenzpreis
Barpreis	24 fl (= Referenzpreis)
Stichpreis:	24 fl + 6 fl = 30 fl
Zeit:	9 Monate
Übersatz:	30 fl – 24 fl = 6 fl
Übersatzanteil:	6 fl / (24 fl · 9 Monate) = 1/36 1/Monate

Die Übersatzanteile von *A* und *B* müssen gleich sein:

$$\frac{32/3 - 3x}{(3x - 4)\ \cdot\ 12} = \frac{1}{36}$$

$$32 - 9x = 3x - 4$$

Hieraus folgt $x = 3$ [fl].

$x^2 = 9$ [fl] ist der Barpreis des *A* für eine Elle Samt, $4x = 12$ [fl] der Stichpreis.

Literaturverzeichnis

Neudörffer, Anton: *Kunst: vnd ordentliche Anweisung inn die Arithmetic*. Nürnberg: Georg Leopold Fuhrmann 1616.

Neudörffer, Anton: *Künst- vnd ordentliche Anweisung in die Arithmetic. Editio IIII. Nürnberg/ Gedruckt vnd verlegt durch Simon Halbmayern/ Jm Jahr 1627*.

Neudörffer, Anton: *Künst- und ordentliche Anweisung in die Arithmetic. Editio V. Nürnberg/ Gedruckt und verlegt durch Jeremiam Dümlern/ Jm Jahr 1634*.

Tropfke, Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik*. Bd. 1: Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich und Helmut Gericke. Berlin, New York 1980.

Wendler, Georg: *Analysis vel resolutio*. [Nürnberg, Regensburg ~1645-~1663] (Cgm 3789).

Wendler, Georg: *Herrn Anthonij Neudörffers* […] *Apendix Zugab und künstliche bschluß Exempla Jtem absonderlicher auffgaben und kunst Exempla seiner grossen Arithmetic, Dergleichen niemals gesehen auch in druck nicht kommen sind, nach Geomet: Cossischen Arithmetischen aufgaben, und Künstlichen Regeln*. In: Wendler, Georg: *Analysis vel resolutio*, Cgm 3789, 77v-215r.

Eberhard Hopf between Germany and the US

Rita Meyer-Spasche,
Max Planck Institute for Plasma Physics, Boltzmannstr. 2
85748 Garching, Germany; meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de

Abstract

The curriculum vitae of Eberhard Hopf was not unique, but very unusual: He was one of the very few German scientists who moved from the US to Germany in 1936, and this though he had a secure position at MIT. He accepted a full professorship at U Leipzig in 1936 and at U Munich in 1944. From 1942 on he also did research which was considered very important for the war by the authorities in Berlin. Many people thus concluded that he must have been a Nazi. With the help of Richard Courant he returned to the US in 1947 and stayed there for the rest of his life.

The behavior of Hopf and also of Courant found dismay, disapproval and understanding in the math community. As a consequence, there are many falsified references to Hopf's work, but there is also enthusiastic praise of the high quality of his mathematical results.

Eberhard Hopf zwischen Deutschland und USA Eberhard Hopfs Lebenslauf war nicht einziartig, aber doch sehr ungewöhnlich: er war einer der wenigen deutschen Wissenschaftler, die 1936 von USA nach Deutschland umzogen, und dies obwohl er am MIT eine zeitlich nicht befristete Stelle hatte. 1936 folgte er einem Ruf an die Universität Leipzig und 1944 an die Universität München. Außerdem führte er ab 1942 Forschungen durch, die von der Obrigkeit in Berlin als sehr wichtig für den Krieg eingestuft wurden. Viele haben ihn deshalb für einen überzeugten Nazi gehalten. 1947 kehrte er mit der Hilfe von Richard Courant nach USA zurück und blieb dort bis zum Lebensende.

Dieses Verhalten von Hopf und auch von Courant stieß in der Mathematiker-Gemeinschaft auf Bestürzung, Missbilligung und auch auf Verständnis. Als Folge dessen gibt es viele verfälschte Zitierungen der Hopfschen Arbeiten, aber auch begeistertes Lob für die hohe Qualität seiner Ergebnisse.

1 Eberhard Hopf (1902-1983)

Eberhard Hopf was born in Salzburg in 1902. His father Friedrich Hopf was a chocolate manufacturer [MSS02]. He finished school in Berlin in 1920 and studied at the universities of Berlin (7 semesters) and Tübingen (one semester). In 1925/26 he finished his dissertation in mathematics in Berlin, with advisors *Erhard Schmidt (1876-1959)* and *Issai Schur (1875-1941)*. In 1927 he became *wissenschaftlicher Assistent* at the *Astronomisches Recheninstitut* of Berlin University. In 1929 he finished his habilitation and obtained the *venia legendi* for mathematics and astronomy. [Tob06] Also in 1929, he married *Ilse Wolf*, former fellow student of physics and daughter of the very influential musicologist *Johannes Wolf (1869-1947)* [MSS02], [Wikipedia articles on Wolf in 7 different languages, 2018-07-26]. Because of the economic situation it was very hard to find an adequately paid position in Germany. With a Rockefeller stipend he became an *International Research Fellow* at *Harvard Observatory* for 1930-1932. [RSS98, pp 38f], [Tob06]. During this time he met *Norbert Wiener (1894-1964)* of the neighboring MIT. Their famous joint paper appeared in 1931 [WiHo31]. When his stipend ended, he would have liked to go back to Germany, but letters from Berlin made clear that there were no positions available. So Norbert Wiener helped him in 1932 to get a position as assistent professor at the mathematics department of MIT.

End of January, 1933, the Nazis took over, and already in April 1933 they started to change the job situation at universities and elsewhere dramatically, by a series of laws about the *Berufsbeamtentum*: most persons who were of Jewish decent and/or politically engaged in the 'wrong' parties (especially social democrats and communists) lost their positions and later on also their pensions. In 1931, there were 197 mathematicians at German universities holding a *venia legendi*, in 1937 they were 138 (i.e. ca -30%). Among them were 97 full professors in 1931 and 68 in 1937, also ca -30%. The decay of the numbers of students was even more dramatic: in the summer semester (SoS) 1932 there were 4245 students of mathematics at German universities, in SoS 1939 there were 306, i.e. ca -92.8%. In physics, the decay was ca -74%. This was also the average of all disciplines of the math-nat sciences. The development at the German *Technische Hochschulen* was very similar [Schap90, p 17ff]; [RSS98, RSS09].

Thus there was suddenly a completely different situation: many excellent German-speaking mathematicians searched for positions in countries which they did not know, and whose language they often did not know either, and there were many open positions in Germany. Thus *Kurt Hohenemser (1906-2001)* probably was not the only one who wished that non-threatened Germans with positions abroad would return to Germany so that their positions abroad could be taken by some of those who were threatened by the Nazis (letter by Hohenemser in 1935 to von Karman [RSS09, section 7.S.2]). Though there was a reduction of university positions in Germany because of the decay of the numbers of students, many positions had to be filled again, and this turned out to be very difficult and tedious. At several universities there were two groups of approximately the same strengths: one group, mostly the professors who still held their positions, tried to find politically inactive, qualified mathematicians as successors, and the other group, the Nazis (organized in the *Dozentenschaft*), claimed that 'political merits' clearly made up for missing mathematical abilities. Sometimes the Dozentenschaft clearly won, for instance at U Berlin, where *Richard von Mises (1883-1953)* was replaced by a person without any mathematical abilities or merits (private communication, Lothar Collatz 1988; crushing expert reports by Oskar Perron and Ludwig Prandtl when that person was considered as successor of Caratheodory in 1939, see Litten 1994 [Lit94, pp 4-5]).

The search for a successor of *Leon Lichtenstein (1878-1933)* at U Leipzig lasted from 1933 to 1936 and ended with an offer of the chair to Eberhard Hopf in 1936, who accepted. The Leipzig side of this development was discussed in detail by Karl-Heinz Schlote [Schlo08]. Though there were very active Nazis among the students and in the Dozentenschaft at U Leipzig, finally the group of professors won, among them for instance *B.L. van der Waerden (1903-1996)* and *Werner Heisenberg (1901-1976).* The reaction of Eberhard Hopf at MIT to the offer from U Leipzig was discussed by Norbert Wiener [Wie56].

When Hopf got the invitation for Leipzig in the summer of 1936, he knew that he had to react very quickly: already three times (at U Bonn, U Göttingen and U Berlin) there had been intentions to appoint Hopf, but the Dozentenschaft made it impossible (e.g. *'as a student, he had a friend who was a communist'*). Hopf did not answer spontaneously to the offer from U Leipzig, but so fast that his opponents could not prevent his getting the chair, they only could delay it for several months: he received the offer for Leipzig in August 1936, he arrived in Leipzig in October 1936, assuming that he would become full professor immediately. Instead, he became administrator of the chair, and full professor during the next summer semester.

Officially, Hopf stayed at U Leipzig from 1936 to 1944, but actually the officials at Berlin deputed him in 1942 to work at the *Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug* in Ainring near Freilassing in Bavaria. It seems that he mostly did research in fluid dynamics and turbulence in Ainring.

In 1944 a long-lasting search for a successor of *Constantin Carathéodory (1873-1950)* at LMU Munich was ended by giving the chair to Hopf. This time the Dozentenschaft vetoed other candidates, but did not oppose Hopf. [Lit94]

Officially, Hopf held the chair in Munich until 1948. But actually, he wrote a letter to *Richard Courant (1888-1972)* on 23rd of June 1945, i.e. less than 2 months after the end of WWII in Germany, telling Courant that he suffered from *a lack of political insight* in 1936 when he moved from the

US to Leipzig [RSS09]. Courant offered him a position as a guest professor at Courant Institute for one year, in 1947-1948. With the blessing of Courant, Hopf became full professor at Indiana University in Bloomington in 1948. He stayed there until his death. Several times he visited Germany, e.g. U Erlangen and Oberwolfach.

In 1956 U Heidelberg offered him a chair. He thought about it and then he decided that he did not want to do *the same mistake for a second time* [RSS09]. What did he mean by this? Did he not see the differences between the Germany of 1936 and Western Germany of 1956? If yes, then he still suffered from a lack of political insight in 1956. Or did he rather feel that being with Nazi emigrants was the better place for doing good mathematics?

In 2002, on the occasion of his hundred's birthday, *Selected Works of Eberhard Hopf with Commentaries* appeared [MSS02].

2 Was Eberhard Hopf a Nazi?

A closer look at his behavior during Nazi time may give a clou. Wiener [Wie56] and Schlote [Schlo08] gave valuable informations and discussed directly the question: *Was Eberhard Hopf a Nazi?*. Both do not simply answer 'Yes'. Additional valuable informations were given by Siegmund-Schultze [RSS98, RSS09].

Hopf visited Germany in 1932. Back to the US, he wrote to his colleague Tamarkin, an immigrant from the Soviet Union:

'We were amazed how many Germans voted for Hitler. [...] Most of the people who voted for Hitler are dissatisfied with the general and their own situation. They follow anybody who promises them impossible things.' [letter of May 1, 1932 to Tamarkin [RSS98, p.75f]]

As mentioned in the previous section, there were four attempts of the Dozentenschaft to prevent an offer of a professorship to Hopf, three successful. Thus they did not consider him to be one of them.

As also mentioned in the previous section, Wiener discussed in detail Hopf's reaction to the offer from Leipzig. Let us start a bit earlier: the chair at U Leipzig became available in 1933 because Leon Lichtenstein died: Leon Lichtenstein was a cousin of Norbert Wiener's father, and Wiener visited him in Leipzig in 1924 and met him during the congress at Zürich in 1932. Short time later, Wiener received a desperate letter from Lichtenstein who was now in Poland, asking Wiener for a position in the US. Lichtenstein was mobbed so badly by some students and a newspaper in Leipzig that he fled to Poland and died there a few months later, in Aug 1933 [Wie56, pp. 85-86, 142, 150], [Schlo08, pp. 250-261]. Hopf knew Lichtenstein at least mathematically: he cited results of Lichtenstein in several of his papers, for instance in [Hopf27]. Thus Hopf was probably shocked as well when Wiener told him about Lichtenstein's problems. This could have been a reason to refuse the chair in Leipzig. In 1956 *Norbert Wiener (1894-1964)* remem-

bered about Hopf:
When Hopf got the offer from Leipzig, he first consulted the German emigrants at MIT and discussed with them the pros and contras and the current situation in Germany. Then he contacted Koebe in Leipzig and discussed with him the financial side of the offer. Then he decided to accept. Wiener's comment:
'Originally he was hostile to Hitler, or at least sympathetic to those on whom Hitler had wreaked his ill will. However, there were strong family influences pulling him to the Nazi side' [Wie56], [RSS09, sec. 7.S.3].

Since Wiener did not get specific about the family influences, we can only look at the context and speculate: Wiener emphasised that the social prestige of a German professor was much higher than that of any other professional in Germany, and also much higher than that of a professor at MIT. After Hopf had accepted the chair in Leipzig, he was very proud of becoming a professor: now he had reached the social status of his father-in-law, a few months after the birth of his daughter Barbara in April 1936.

From his time in Leipzig (1936-1942), nothing is known which shows him as an active Nazi - to the contrary, he sometimes ignored or even counteracted Nazi activities, but so mildly that he never got into trouble because of this.
* Together with others he tried to place *Ernst Hölder (1901-1990)*, son of Otto Hölder and PhD student of Leon Lichtenstein, in an adequate position at U Leipzig. This turned out to be impossible because two sisters were married to Jewish mathematicians. From 1939 to 1945 Hölder worked at a research institute and became full professor at U Leipzig in 1946. [Schlo08]
* There were many controversies between Hopf and *B.L. van der Waerden (1903-1996)* on the one side and *Paul Koebe (1882-1945)* on the other side. Koebe was much closer with the Nazis. For instance he tried to replace their custom of alternating directorship at the mathematical institute by the principle of leadership, i.e. the *Führerprinzip*, with himself as *Führer*, of course. [Schlo08, pp.250-261]
* In his paper of 1942 [Hopf42] which led to the term *Hopf bifurcation* later on, Hopf discussed in detail the connection of his results with the work of *Henri Poincaré*, thus ignoring the silly theory of Bieberbach et al about 'German Mathematics' versus 'French and Jewish Mathematics'. He dedicated this paper to Koebe.
* *But* it should not be forgotten that he did research in Ainring which was considered very important for the war [Schlo08].

Hopf's daughter Barbara Hopf Offenhartz (* 1936) remembered in 2017:
'My father was very anti-Nazi, so they made him feel that at every end of the spectrum. He was much too outspoken for his own good.' (Math for Science, [Off17]).
She is a scientist, she should know that *at every end of the spectrum* would include: he died in a concentration camp.

3 Neglect and praise of Hopf's work

In the McTutor entry on Eberhard Hopf we read: 'Hopf was never forgiven by many people for his moving to Germany in 1936 [...] As a result most of his work on ergodic theory and topology was neglected or even attributed to others in the years following the end of World War II.' [McTu]

Even today it is easy to find examples for this statement on serious websites like WoS [WoS] and Math Genealogy [MaGe]. Most of these inaccuracies look like 'normal inattentiveness', but there are too many of them. A few examples:
* the authors of the Wiener-Hopf paper [WiHo31] are given as N Wiener, *E Hope* [WoS];
* the title of Hopf's paper on the maximum principle [Hopf27] *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus* is translated as *Elementary comments into the solutions of partial differential comparisons of second place in elliptic typus* [WoS]. This title was clearly invented by a person familiar with the mathematical content of that paper: though there were weaker versions of maximum priciples before 1927, it was Hopf who pointed out that the maximum principle makes it possible to compare solutions if their differential equations can be compared;
* there were two dissertations at U Leipzig during E Hopf's time there, for which *Heinz Hopf (1894-1971)* of ETH Zürich is named as one of the referees in [MaGe], though their topics were much closer to the research of Eberhard Hopf:
1941 Heyne, Johannes, Statistik; v.d. Waerden, Hopf, Koebe (Tobies 2006 [Tob06]);
1942 Wintgen, Georg, Darstellungstheorie: B.L. van der Waerden, (Tobies 2006 [Tob06]).
The title of Hopf's most cited paper [Hopf50] (more than 1230 citations until January 2018) was misprinted by the journal - this misprint, however, was corrected in WoS [WoS]

Many mathematical subjects are named after a person who did related work, but there are no obvious rules. This was investigated in some detail in [MSp17]. A surprizing example treated there is the term *Hopf bifurcation.*

Though there are these neglects and suppressions of Eberhard Hopf's name, there is also enthusiastic praise:
* 'Hopf's great paper on the maximum principle [...] has the beauty and elegance of a Mozart symphony, the light of a Vermeer painting. Only a fraction more than five pages in length, it contains seminal ideas which are still fresh after 75 years.' James Serrin in an article commenting on Hopf's paper of 1927, [MSS02, pp 9-14].
* 'Hopf [...] was a founding father of ergodic theory and produced many beautiful and now classical results in integral equations and partial differential equations. [...] Hopf was not a prolific writer but a very large fraction

of his work remains at the core of the fields he worked in and he wrote with such elegance and clarity that they are of great use today.' Morawetz, Serrin, Sinai 2002, Foreword [MSS02].

References

[Hopf27] Hopf, Eberhard (1927): Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Sitzungsberichte Preussische Akademie Wissenschaften,* Berlin 1927, pp 147-152;
reprinted with commentary in [MSS02, p.3-8].

[Hopf34] Hopf, Eberhard (1934, repr. 1964): *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium,* Cambridge University Press, 104 pages, Series Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics Vol. 31,

[Hopf37] Hopf, Eberhard (1937, repr 1970): *Ergodentheorie,* Springer Verlag, 83 pages;

[Hopf42] Hopf, Eberhard (1942): Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems, Berichte der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Band XCIV, Sitzung vom 19. Januar 1942, pp.3-22,
reprinted in [MSS02], pp. 91-110, with a Commentary by Martin Golubitzky and Paul H. Rabinowitz
Howard, L.N., Kopell, N. (1976): A Translation of Hopf's Original Paper, pp. 163-193 and Editorial Comments, pp. 194-205 in [MMcC76]

[Hopf50] Hopf, Eberhard (1950): The Partial Differential Equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm Pure Appl Math 3, pp 201-230

[Lit94] Litten, Freddy (1994): Die Carathéodory-Nachfolge in München 1938-1944. *Centaurus. International Magazine of the History of Mathematics* 37, pp 154-172; see also
`http://litten.de/fulltext/cara.htm#8b`, access on 2018-Jan-04

[MMcC76] J.E. Marsden, M. McCracken (1976): *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer Verlag

[MaGe] The Mathematics Genealogy Project,
`https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/`

[MSp17] R. Meyer-Spasche: Hidden Authors, pp. 394- 429 in:
G. Wolfschmidt (ed.), *Festschrift - Proceedings of the Christoph J. Scriba Memorial Meeting - History of Mathematics.* Hamburg: tredition 2017, see also `http://www2.ipp.mpg.de/~rim/talks.html`

[MSS02] Morawetz, C.S., Serrin, J.B., Sinai, Y.G. (eds): *Selected works of Eberhard Hopf with Commentaries*, A.M.S., Providence, 2002

[McTu] O'Connor, J.J., Robertson, E.F. (eds.): MacTutor History of Math archive, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/`

[Off17] Math for Science: entry on the physical chemist Barbara Offenhartz, `http://math4science.org/barbara-offenhartz/`, accessed on 2018-02-06

[Schap90] Schappacher, Norbert, mit Martin Kneser (1990): Streiflichter auf das Verhältnis von Mathematik zu Gesellschaft und Politik in Deutschland seit 1890, unter besonderer Berücksichtigung der Zeit des Nationalsozialismus, pp. 1-82 In:
Fischer, Gerd et al (1990): *Ein Jahrhundert Mathematik*, Festschrift zum Jubiläum der DMV, Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden

[Schlo08] Schlote, Karl-Heinz: *Von geordneten Mengen bis zur Uranmaschine*, Zu den Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an der Universität Leipzig in der Zeit von 1905-1945. Verlag Harri Deutsch 2008

[RSS98] Siegmund-Schultze, Reinhard: *Mathematiker auf der Flucht vor Hitler*, Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Vieweg, Braunschweig 1998

[RSS09] Siegmund-Schultze, Reinhard: *Mathematicians fleeing from Nazi Germany*, Princeton University Press, 2009,

[Tob06] Tobies, Renate (2006): *Biographisches Lexikon in Mathematik promovierter Personen an deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen WS 1907/08 bis WS 1944/45*, Dr Erwin Rauner Verlag, Augsburg

[WiHo31] N. Wiener, E. Hopf (1931): Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin (1931) pp. 696-706

[Wie56] Wiener, Norbert: *I am a Mathematician*, London 1956
Mathematik – Mein Leben, Econ Verlag, Düsseldorf Wien, 1962

[WoS] Web of Science, `https://www.webofknowledge.com`

Versicherungsmathematik in Berlin - Lehre und Forschung an Hochschul-Einrichtungen zwischen 1900 und 1960
Insurance mathematics in Berlin - teaching and research activities (1900-1960)

Annette Vogt (Berlin)

Unter Versicherungsmathematik verstehen wir jenen Teil der angewandten Mathematik, dessen Gegenstand die Entwicklung von Modellen und statistischen Schätzungen ist, mit denen das Risiko, die Berechnung der Policen, die Kontrolle und das Risiko-Management ermöglicht werden. Es gibt die unterschiedlichsten Versicherungen, am bekanntesten (und ältesten) sind die Lebens-Versicherung sowie Renten- und Kranken-Versicherungen, außerdem gibt es Unfall-, Feuer-Versicherungen und viele weitere. Der professionelle Name ist meist der aus dem Englischen übernommene des Actuars (und actuarial science), im Deutschen ist der Begriff Versicherungsmathematiker üblich. Im Unterschied zur Versicherungsmathematik verstehen wir unter „actuarial science“ (Versicherungswissenschaft) die Wissenschaftsdisziplin, die die angewandte Mathematik nutzt bzw. die die mathematische Statistik anwendet, um das Risiko zu bestimmen - im Versicherungswesen, im Finanzwesen und in anderen Gebieten.

Seit dem 17. Jahrhundert wurden Sterbetafeln erstellt, die sowohl für Lebens- als auch für Rentenversicherungen benötigt wurden. Die moderne Actuarial-Wissenschaft benutzt nicht nur Methoden der mathematischen Statistik, sondern auch die der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Computerwissenschaften, der Finanzwissenschaft und der Ökonomie. Vorläufer der Actuarial-Wissenschaft gab es bereits im Römischen Reich, als die ersten Pensionsfonds und Sterbeversicherungen eingerichtet wurden. Die moderne Entwicklung begann im 17. Jahrhundert mit Johan de Witt (1625-1672) und seiner Publikation „Der Wert von Leibrenten im Vergleich zu Anleihen“ (1671), in der er die Wahrscheinlichkeitstheorie auf Fragen der Staatsfinanzen anwendete,[1] sowie mit den Arbeiten von John Graunt (1620-1674). Graunt war einer der ersten Demographen, ein Freund von William Petty (1623-1687), und er entwickelte frühe statistische Methoden. 1662 erschien erstmals sein Werk „Natural and Political Observations ... Bills of Mortality“ (1676 erschien die 5. Auflage), das zum Vorbild aller späteren Sterbetafeln (im Englischen life tables) wurde. Auch der englische Astronom Edmond Halley (1656-1742) beeinflußte die Entwicklung mit seiner Untersuchung über Lebenszyklen (1693, „life annuities“), bei denen er Sterbedaten analysierte, um die Lebensdauer berechnen zu können.

Mit der Zunahme der Versicherungen entstanden immer größere Versicherungs-

[1] Vgl. Craig Turnball. A history of british actuarial thought. Palgrave Macmillan, 2017.

gesellschaften, die ihre Policen immer weiter entwickelten. Katastrophen-, Unwetter-, Erdbeben- und andere Schäden wurden in das Geschäft mit aufgenommen, ein Spezialfall sind die Rückversicherungs-Gesellschaften. Auf Grund der Geschäftsbedingungen benötigen die Konzerne hinreichende Finanzreserven, so daß die moderne Versicherungsbranche auch eng mit der Finanzökonomie verbunden ist (wie kann am besten das Firmenvermögen langfristig und gewinnbringend angelegt werden - bei geringen Zinsen am Finanzmarkt kein triviales Problem). Da die Versicherungswissenschaft eng mit der Versicherungswirtschaft verwoben war und ist, ist eine Geschichte der Versicherungswissenschaft immer auch eine eher national geprägte Geschichte.

Der Vortrag konzentrierte sich deshalb auf Aspekte der Geschichte der Versicherungsmathematik in Deutschland mit einem Schwerpunkt auf Berlin. Am Beispiel Berlins und der drei akademischen Institutionen - Berliner Universität, Handels-Hochschule und Technische Hochschule - wurden die Bedingungen skizziert, unter denen Lehre und Forschung zur Versicherungsmathematik erfolgten. Neben der Übersicht über die angebotenen Lehrveranstaltungen wurden die Personen, die diese anboten, und ihre wissenschaftlichen Leistungen vorgestellt. Die Entwicklung wurde für die Jahre 1901 bis 1961 dargestellt, d. h. vom Beginn der Vorlesungs-Angebote in Versicherungsmathematik durch Ladislaus von Bortkiewicz (1868-1931) an der Berliner Universität bis zum August 1961 (dem Bau der Berliner Mauer), als der „Grenzgänger“ Paul Lorenz (1887-1973), der in Zehlendorf in Berlin-West wohnte und in Berlin-Ost an der Humboldt-Universität lehrte, wegen der Grenzschließung nicht mehr wöchentlich seine Kollegen Mathematiker in der „Professorenmensa“ an der Humboldt-Universität in Berlin-Ost treffen konnte.[2]

Erste Lehrangebote und Lehrbücher

An der Universität Göttingen lehrte von 1907 als a. o. Professor, erst 1921 wurde er ordentlicher Professor, bis zu seiner Vertreibung auf Grund der NS-Gesetze 1933 und seinem Exil in den USA der Mathematiker Felix Bernstein (1878-1956). Er leitete ein Seminar für Versicherungsmathematik und mathematische Statistik und gründete 1918 das Institut für Mathematische Statistik. Es war eines der ersten Einrichtungen, das dezidiert im Titel „Mathematische Statistik“ führte und spielte für die Verbreitung der neueren Entwicklungen in der mathematischen Statistik und der Wahrscheinlichkeitstheorie eine wichtige Rolle.

Im Jahr 1903 erschien in der ersten Auflage das Lehrbuch „Versicherungs-Mathematik“ (in der Sammlung Göschen) des Mathematikers Alfred Loewy

[2] Vgl. Dekan Heinrich Grell an Paul Lorenz, 8.3.1962, Brief zum 75. Geburtstag, wo H. Grell melancholisch an diese Treffen erinnerte, in: Archiv HU, PA Paul Lorenz, Bd. 1, Bl. 90.

(1873-1935), seit 1902 a.o. Professor und ab 1919 o. Professor an der Universität Freiburg i. Br. Eine 4. Auflage des Standardwerks erschien 1924. A. Loewy beschäftigte sich außerdem mit Anwendungen mathematischer Methoden in der Finanzökonomie und publizierte 1920 das Buch „Mathematik des Geld- und Zahlungsverkehrs". Eine „Krankenversicherungsmathematik" behandelte erstmals A. Loewy in einem Artikel für das „Versicherungslexikon" von Alfred Manes (1930, Spalte 931).

Das grundlegende Werk von Emanuel Czuber (1851-1925), von 1891 bis 1919 als o. Professor an der TH Wien tätig, „Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung" erschien erstmals wie Loewy's Buch 1903 als Band 9 der Reihe „G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften" in Leipzig und wurde bei den späteren Auflagen in zwei Bänden publiziert. E. Czuber behandelte speziell die Lebensversicherungs-mathematik, das Gebiet, das die Praktiker am meisten benötigten. Czuber's Buch wurde in den Kursen, die Ladislaus von Bortkiewicz in Berlin anbot - sowohl an der Handels-Hochschule als auch an der Berliner Universität - immer als das wichtigste Werk benannt. Für die Praktiker wurden außerdem spezielle Sterbetafeln und „Versicherungsmathematische Formelsammlungen" publiziert. Von C. Boehm und E. (Eduard) Rose, zwei Praktikern in der Versicherungsbranche, erschienen 1937 zwei Bände „Versicherungsmathematische Übungen". Der Autor Eduard Rose (1879- nach 1948) arbeitete im Gerling-Konzern in Berlin und hielt bis 1936 Lehrveranstaltungen an der Berliner Universität. Bis zum Frühjahr 1933 teilten sich er und Hilda Pollaczek-Geiringer (1893-1973) die „Übungen zur Versicherungsmathematik", wie dies in den Vorlesungsverzeichnissen genannt wurde.

Die Versicherungsmathematik war sowohl Bestandteil der Versicherungswissenschaft als auch der Mathematik sowie Teil der mathematischen Statistik. Wie der Titel von E. Czubers Lehrbuch es formulierte, handelte es sich dabei im wesentlichen um Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Probleme der Versicherungswissenschaft, zunächst vor allem auf Probleme der Lebensversicherungen, später kamen weitere Versicherungen hinzu, bei denen jeweils die Risikoabschätzungen und Gewinnerwartungen bzw. die Verluste der Versicherungs-Policen zu berechnen waren.

Die moderne Versicherungswissenschaft in Deutschland

Noch 1976 empfahl Peter Koch (1935-2015), langjähriger Versicherungsjurist und zuletzt Vorsitzender des Vorstands der Aachener Rückversicherungs-Gesellschaft sowie Autor mehrerer Standard-Bücher zur Geschichte der Versicherungswissenschaften in Deutschland (1998, 2012), als Einstiegsliteratur für Versicherungswissenschaftler das 1930 in der 3. Auflage erschienene

„Versicherungslexikon" von Alfred Manes, das zwischen 1909 und 1913 in der ersten Auflage erschienen war.[3]

Alfred Manes (1877-1963) gilt als einer der Begründer der modernen Versicherungswissenschaft, die International Insurance Society nahm ihn 1966 in ihre "Insurance Hall of Fame" auf und charakterisierte ihn als "a teacher, who changed an industry." Sein dreibändiges Lehrbuch „Versicherungswesen" (erstmals 1905 erschienen, die 5. Auflage erschien 1930-32) bildete für Jahrzehnte das Standardwerk, und Peter Koch nannte es 1976 „unübertroffen, wenn auch veraltet".[4] Alfred Manes erhielt 1906 an der neugegründeten Berliner Handels-Hochschule eine Professur, ab 1925 lehrte er auch als Professor an der Berliner Universität. An der Handels-Hochschule leitete er das versicherungswissenschaftliche Seminar bis 1933, das Dank seiner Aktivitäten eine ausgezeichnete Ausbildungsstätte mit einer vorzüglich ausgestatteten Bibliothek wurde. Er war seit 1902 Generalsekretär und später Vorstand des „Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft" (im Jahr 1899 gegründet) und von 1903 bis 1933 Herausgeber der „Zeitschrift für die gesamte Versicherungs**wissenschaft**". Die Zeitschrift wurde 1901 von diesem Verein gegründet, in der immer auch mathematische Beiträge publiziert wurden (und werden). Im Unterschied dazu hieß die 1877 von Neumann gegründete Zeitschrift „Zeitschrift für Versicherungs**wesen**" und erschien ab 1927 (ab dem 50. Jahrgang) unter dem Titel „Neumanns Zeitschrift für Versicherungswesen" als das offizielle Organ der deutschen Privatversicherung. Infolge der NS-Gesetze ab 1933 von seinen Positionen vertrieben, emigrierte Alfred Manes im Frühjahr 1935 aus Nazi-Deutschland und lehrte ab Oktober 1936 an mehreren Universitäten in Süd- und Mittelamerika, schließlich von 1946 bis 1950 an den Universitäten Bloomington (Indiana) und Bradley (Illinois) in den USA.

Alfred Manes bildete eine wichtige Brücke zwischen Versicherungswissenschaft und Mathematik, sowie zwischen der Universität Göttingen, wo er 1898 zum Dr. jur. promovierte und an der eines der ersten Seminare zur Statistik etabliert worden war, und der Berliner Universität, an der mit dem ebenfalls in Göttingen 1893 bei Wilhelm Lexis (1837-1914) promovierten Ladislaus von Bortkiewicz einer der wichtigsten Vertreter der mathematischen Statistik ab 1901 lehrte und wirkte. In München spielte Georg von Mayr (1841-1925), von 1866 bis 1879 und ab 1898 hier tätig, eine besondere Rolle. G. von Mayr wurde außerdem Vizepräsident und Ehrenmitglied des Internationalen Statistischen Instituts (ISI) und 1911 Gründungs-Vorsitzender der Deutschen Statistischen Gesellschaft.

[3] Koch (1976), S. 2.
Koch, Peter. Einführung in das Versicherungs-Schrifttum. Sonderheft zum Versicherungswirtschaftlichen Studienwerk, Studienplan B. Allgemeine Versicherungslehre. Wiesbaden: 1976.
[4] Koch (1976), S. 3.

Im Unterschied zur mathematischen Statistik war Berlin Dank des Wirkens von Alfred Manes bis 1933 ein Zentrum der Entwicklung der modernen Versicherungswissenschaft, einschließlich der dafür benötigten mathematischen Grundlagen. Einige der Studenten, die bis 1933 hier ihre Ausbildung erhielten, sollten nach 1945 diese Tradition - wenn auch eingeschränkt - wiederbeleben.

Statistik in Berlin

Im Unterschied zur Universität Göttingen, wo der Mathematiker Felix Bernstein das Seminar für Versicherungsmathematik und mathematische Statistik leitete und 1918 das Institut für Mathematische Statistik gründete, wurde an der Berliner Universität kein dezidiertes Seminar oder Institut für mathematische Statistik gegründet. Das Gebiet Versicherungsmathematik wurde an den verschiendenen Einrichtungen gelehrt - an der Handels-Hochschule ab 1906, an der Universität seit 1901 und auch an der Technischen Hochschule -, aber die Versicherungsmathematik blieb ein Nebenfach in den mathematischen Wissenschaften einerseits und in der Nationalökonomie andererseits. Diese Situation kann als Hybrid-Beziehung beschrieben werden, und sie bildete in Berlin ein Charakteristikum für Jahrzehnte. Das Fach mathematische Statistik bzw. angebotene Lehrveranstaltungen unter dieser Bezeichnung standen 1932 erstmals in den Vorlesungsverzeichnissen der Berliner Universität: im Winter-Semester 1932/33 bot Dr. Hilda Pollaczek, d. i. Hilda Pollaczek-Geiringer, einen solchen Kurs an.

Berlin war von der zweiten Hälfte des 19. bis Anfang des 20. Jahrhunderts ein Zentrum der klassischen Statistik, d. h. der Statistik als Teil der Gebiete Nationalökonomie bzw. Staatswissenschaften. Seine Vertreter Ernst Engel (1821-1896), Richard Boeckh (1824-1907) und August Meitzen (1822-1910) genossen auch internationale Anerkennung.Auch die nachgeborene Generation der Statistiker wie Franz Eulenburg (1867-1943), Rudolf Meerwarth (1883-1946) und Ernst Wagemann (1884-1956) leisteten Bedeutendes. Im Vergleich zu diesen Statistikern, die teilweise über praktische Erfahrungen in staatlichen statistischen Bureaus verfügten oder diese leiteten, wie Ernst Wagemann als Präsident des Statistischen Reichsamtes von 1923 bis 1933, arbeitete nur Ladislaus von Bortkiewicz zur mathematischen Statistik. Er bot auch jahrelang Lehrveranstaltungen zur Versicherungsmathematik an und benutzte hier vor allem das Standardwerk von E. Czuber.[5]

Im Unterschied zu Göttingen engagierte sich an der Berliner Universität kein Mathematiker für Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie in den Ver-

[5] Zu L. von Bortkiewicz vgl. Haerdle, Wolfgang K., Vogt, Annette B. Ladislaus von Bortkiewicz - Statistician, Economist and a European Intellectual. In: International Statistical Review, Vol. 83, Issue 1 (April 2015) (2015), pp. 17-35.

sicherungswissenschaften, es gab bis in die 1920er Jahre keine Lehrangebote dazu. Als 1921 der Mathematiker Richard von Mises (1883-1953) an die Berliner Universität berufen wurde, lehrte er in den Jahren von 1921 bis zu seiner Vertreibung 1933 weder zur Wahrscheinlichkeitsrechnung noch zur mathematischen Statistik. Die Privatdozentin (ab 1927) für angewandte Mathematik Hilda Pollaczek-Geiringer bot dagegen versicherungsmathematische Übungen und die oben erwähnte Lehrveranstaltung mathematische Statistik im Wintersemester 1932/33 an, ehe sie vertrieben wurde und ins Exil flüchten mußte.

An der Handels-Hochschule in Berlin wurden Veranstaltungen zur Statistik sowie zur Versicherungsmathematik und Versicherungswissenschaft ununterbrochen angeboten. Die Statistik lehrten in den ersten Jahren sowohl zwei Hochschulprofessoren als auch Praktiker, im einzelnen:
von 1906 bis 1914 mit Ignatz Jastrow (1856-1937) und von 1906 bis 1923 Ladislaus von Bortkiewicz die beiden Professoren;
von 1906 bis 1917 Johannes Rahts (1854-1933), Statistiker in Charlottenburg, der die „Sterbejahrmethode“ einführte, und von 1911 bis 1922 der Direktor des Statistischen Amtes in Schöneberg Robert René Kuczynski (1876-1947), der als Schüler von R. Boeckh insbesondere als Demograph bekannt wurde;
von 1919 bis 1933 lehrte Professor Franz Eulenburg (1867-1943) sowie von 1922 bis 1925 und 1929 bis 1945/46 Rudolf Meerwarth.[6]

R. Meerwarth war seit 1914 im Preussischen Statistischen Landesamt tätig, als er die ersten Lehrveranstaltungen anbot, und er hielt den Kontakt zur Handels-Hochschule auch dann weiter aufrecht, als er 1928 Professor an der Universität Leipzig wurde. Er hatte 1914 an der Technischen Hochschule Berlin habilitiert und habilitierte 1921 an der Berliner Universität. Er war ein Spezialist auf dem Gebiet der Wirtschaftsstatistik und publizierte mehrere Lehrbücher, 1920 „Einleitung in die Wirtschaftsstatistik“, 1925 „Nationalökonomie und Statistik. Eine Einführung in die empirische Nationalökonomie“ und 1939 „Leitfaden der Statistik“. Außerdem war er ab 1924 Mitherausgeber der Zeitschrift „Deutsches Statistisches Zentralblatt“. Eine internationale Anerkennung bedeutete seine Mitgliedschaft im Internationalen Statistischen Institut (seit 1927). Er wurde 1941 an die Berliner Universität berufen, im Mai 1945 wurde er provisorischer Dekan und als einer der wenigen nicht NS-Belasteten nach der Wiedereröffnung der Universität Prorektor.

Der a. o. Professor an der Berliner Universität ab 1919 Ernst Wagemann führte erfolgreich die Konjunktur-Statistik ein. Weder die Universität noch die Handels-Hochschule zeigten daran ein Interesse, und so gründete er 1925 das

[6] Vgl. die Übersicht über die Lehrenden an der Handels-Hochschule in: 25 Jahre Handels-Hochschule in Berlin, 1906-1931. Berlin 1931, S. 53.

Institut für Konjunkturforschung (das spätere DIW (Deutsches Institut für Wirtschaftsforschung)), das er bis 1945 leitete. Von 1923 bis 1933 war er außerdem Präsident des Statistischen Reichsamtes. Obwohl er 1933 Mitglied der NSDAP wurde, verlor er sein Amt als Präsident, blieb aber Direktor seines Instituts. Nach der Kapitulation ging er nach Chile (hier war er 1884 geboren) und lehrte von 1949 bis 1953 als Professor in Santiago de Chile, 1953 zog er in die Bundesrepublik Deutschland. E. Wagemann verfaßte mehrere Bücher, darunter „Narrenspiegel der Statistik. Die Umrisse eines statistischen Weltbildes“ (zuerst in Hamburg 1935 erschienen, erneut in München 1950), „Die Zahl als Detektiv. Vergnügliche Enthüllungen über Kunstgriffe, Faustregeln und andere Dienstgeheimnisse der Statistik“ (1938 erschienen, erneut München 1952) und „Berühmte Denkfehler der Nationalökonomie: ein kritisches Repetitorium“ (München 1951).

Als Ernst Wagemann 1929 ein Institut für Wirtschaftsstatistik in Berlin gründen wollte, das an der Handels-Hochschule eingerichtet und offen für Studierende aus allen Berliner Hochschulen sein sollte, scheiterten seine Pläne sowohl am Einspruch von L. von Bortkiewicz, den der Kurator der Handels-Hochschule Fritz Demuth (1876-1965) konsultierte, als auch am Streit über den künftigen Direktor des geplanten Instituts. Die Handels-Hochschule und ihr damaliger Rektor Franz Eulenburg wollten R. Meerwarth dafür gewinnen und keinesfalls E. Wagemann oder einen seiner Mitarbeiter in dieser Position. Letztlich beendeten diese Personal-Differenzen und die ersten Folgen der beginnenden Weltwirtschaftskrise das Ringen um das Institut.[7] Die Geschichte dieses fehlgeschlagenen Versuchs der Institutsgründung vermittelt jedoch Kenntnisse zum Stand der Statistik in Deutschland um 1929, den im Memorandum zur Gründung eingestandenen Rückstand bezüglich der Entwicklung in anderen Ländern und die neuen Anforderungen an die Statistik.
Nicht nur für die Entwicklung der Versicherungsmathematik bedeutete der Beginn des NS-Regimes einen gravierenden Bruch, und nicht nur für Berlin und Göttingen. Die meisten Vertreter dieser Disziplin wurden von ihren Lehr-und Arbeitsstätten vertrieben, es gelang ihnen, in sichere Exilländer zu entkommen.[8]

In Berlin wurde erst Anfang 1939 ein Institut für Versicherungswissenschaft gegründet, sechs Jahre nach der Vertreibung von Alfred Manes und der Schließung seines (kleinen) Instituts. Die Versicherungswirtschaft hatte dieses „Berliner Hochschulinstitut für Versicherungswissenschaft“, wie der offizielle Name lautete, finanziell ermöglicht, es sollte ein gemeinsames Institut von Universität, TH und Handels-Hochschule (seit 1937 Wirtschafts-Hochschule

---

[7] Vgl. Landesarchiv Berlin, A Rep. 200-02-03, Nr. 82 und A Rep. 200-02-03, Nr. 194.
[8] Für die Mathematiker unter ihnen vgl. Vogt, Annette. Vertreibung - Exil - Rückkehr? In: Bergmann, Birgit, Epple, Moritz (Hrsg.) Jüdische Mathematiker in der deutschsprachigen akademischen Kultur. Heidelberg et al: Springer Verlag, 2009, S. 200-222; englisch Springer Verlag 2012.

genannt) sein und die Ausbildungs-Kapazitäten bündeln. Die Gründungsziele und -aufgaben erinnern an den fehlgeschlagenen Versuch von 1929, ohne das darauf Bezug genommen wurde. Mit Beginn des Winter-Semesters 1938/39 begann die Tätigkeit des Instituts, die Eröffnung fand am 19.1.1939 statt.[9] Die offiziellen Leiter des Instituts für Versicherungsmathematik in diesem Hochschulinstitut waren von der Berliner Universität der angewandte Mathematiker Prof. Dr. Alfred Klose (1895-1953) und von der TH Berlin Prof. Dr. Anton Aloys Timpe (1882-1959). Lehrveranstaltungen bot u. a. auch Prof. Dr. Paul Lorenz (1887-1973) an, Privatdozent bzw. a. o. Prof. an der TH Berlin und mit Erfahrungen als Versicherungsmathematiker in der Praxis. Paul Lorenz war von 1926 bis 1927 mathematischer Mitarbeiter in der „Allianz- Lebensversicherungsbank A.g.“ in Berlin gewesen, 1927 bis 1932 Mathematiker im Deutschen Institut für Konjunkturforschung in Berlin (bei Ernst Wagemann), von 1932 bis 1934 Mathematiker bei der Lebensversicherungs-Gesellschaft Friedrich Wilhelm und von 1934 bis 1936 Chefmathematiker bei der Deutschen Beamtenversicherung, von 1937 bis 1944/45 war er freier Gutachter und versicherungstechnischer Berater.[10]

Wegen des bald darauf durch die Nazis begonnenen Krieges konnte dieses „Berliner Hochschulinstitut für Versicherungswissenschaft“ nur sehr eingeschränkt arbeiten und für die Ausbildung künftiger Versicherungsmathematiker wirksam werden. Einer der - ganz wenigen - Hilfsassistenten wurde ein ehemaliger Doktorand bei A. Klose, der zu diesem Zeitpunkt staatenlose Wassilij (Wassily) Höffding (Hoeffding, 1914-1991), "one of the founding fathers of nonparametric statistics", the "science of analyzing data without making unnecessarily restrictive assumptions about their origin." wie es im Nachruf der National Academy of Sciences heißen wird. Wassily Hoeffding, der nach der Kapitulation mit seiner Mutter und seinem jüngeren Bruder in die USA emigrierte, da sie als ehemalige russische Staatsbürger eine von den Besatzungsbehörden erzwungene „Rückkehr“ in die UdSSR befürchteten, arbeitete von 1947 bis zu seiner Emeritierung 1979 an der University of North Carolina, Chapel Hill.[11]

Statistik in Berlin nach 1945

Für die Entwicklung der mathematischen Statistik und der Versicherungsmathematik nach der Kapitulation der NS-Regierung und unter den Bedingungen

[9] Vgl. Landesarchiv Berlin, Rep. 200-02-03, Nr. 237 sowie Koch, Peter. Geschichte der Versicherungswissenschaft in Deutschland. Hrsg. vom Deutschen Verein für Versicherungswissenschaft e. V. aus Anlaß seines 100jährigen Bestehens. Karlsruhe: VVW, 1998.

[10] Vgl. Lebenslauf (3.5.1948), in: Archiv HU, Personalakte PA L 412, Bd. 1, Bl. 12-12R.

[11] Vgl. Fisher, Nicholas I. and Willem R. van Zwet. Wassily Hoeffding (1914-1991). In: National Academy of Sciences. Biographical Memoirs, Vol. 86, Washington: NAS Press, 2005, pp. 2-21, Zitat p. 3.

des in vier Besatzungssektoren geteilten Berlins spielte Paul Lorenz (Paul Louis Lorenz) eine bislang kaum beachtete Rolle. Er hatte 1915 an der Universität Freiburg i. Br. mit der Arbeit „Die Finanzsysteme in der Personenversicherung“ promoviert, 1931 an der TH Berlin habilitiert, war dort Privatdozent und lehrte ab 1939 an der Universität Berlin. Von Mai 1948 bis zur Emeritierung 1953 war er Professor mit Lehrauftrag für Versicherungsmathematik und mathematische Statistik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Humboldt-Universität. Auch nach seiner Emeritierung hielt er noch bis 1959 mehrere Lehrveranstaltungen in Statistik an der Medizinischen Fakultät der Humboldt-Universität (Mathematisch-statistische Methoden in der Medizin) sowie Lehrveranstaltungen „Statistische Methoden bei der Fertigungskontrolle“ an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät. In Berlin-West wohnend und in Berlin-Ost lehrend gehörte er zu den „Grenzgängern“, wie sie in jenen Jahren genannt wurden.[12]

An der FU Berlin - der „feindlichen Schwestern-Universität“ auf Grund des Kalten Krieges - hielt ab 1948 die Lehrveranstaltungen in Medizin-Statistik der Remigrant Karl Freudenberg (1892-1966). Er hatte 1926 bei L. von Bortkiewicz und R. von Mises promoviert und 1928 an der Medizinischen Fakultät habilitiert (auch hier war der hochgeachtete L. von Bortkiewicz einer der Gutachter gewesen, obwohl er nominell zur Philosophischen Fakultät gehörte). Karl Freundenberg emigrierte erst Anfang 1939 in die Niederlande, überlebte die Verfolgungen und kam 1947 in den Amerikanischen Sektor Berlins. Er war einer der wenigen Schüler von L. von Bortkiewicz, aber er hatte an der FU Berlin nur geringen Einfluß auf die Entwicklung des Fachs Statistik.

Paul Lorenz gehörte als Vermittler des Standards in der Statistik, insbesondere der mathematischen Statistik, von vor 1933 zu den wenigen, die nicht gänzlich die internationale Entwicklung verpaßt hatten. In der alten Bundesrepublik galt dies insbesondere für den ehemaligen Chuprov-Schüler Oskar Anderson (1887-1960), der seit 1942 in Kiel lehrte und ab 1947 in München. Oskar Anderson verfaßte einen der Nachrufe auf L. von Bortkiewicz, den er mehrfach besucht hatte.[13] Paul Lorenz kannte sowohl die neuere russisch-sprachige als auch die englische Literatur, und - unüblich zu jener Zeit - er verfügte über Russisch-

[12] Zur Humboldt-Universität zwischen 1946/48 und 1961 sowie den Streitigkeiten zwischen HU und FU Berlin vgl. Vogt, Annette. Die Berliner Humboldt-Universität von 1945/1946 bis 1960/1961. Berlin: MPI für Wissenschafts-geschichte, Preprint 425, 2012 (Langfassung) sowie Vogt, Annette. Vom Wiederaufbau der Berliner Universität bis zum Universitäts-Jubiläum 1960. In: Geschichte der Universität Unter den Linden. Hg. Heinz-Elmar Tenorth. Bd. 3, Sozialistisches Experiment und Erneuerung in der Demokratie - die Humboldt-Universität zu Berlin, 1945-2010. Berlin: Akademie Verlag, 2012, S. 125-250. (mit falschen Abbildungen, ohne Autorisierung)

[13] Vgl. Anderson, Oskar. Ladislaus von Bortkiewicz (1868–1931). In: Zeitschrift für Nationalökonomie, 3, S. 242-250.

Kenntnisse. Ob er sich 1954/55 mit Boris Vladimirovich Gnedenko (1912-1995) an der Humboldt-Universität getroffen hat, als dieser einen Aufenthalt als Gastprofes-sor wahrnahm, muß offen bleiben. Es könnte möglich gewesen sein, aber wegen der speziellen Bedingungen Berlins und des Kalten Krieges behielten alle Beteiligten ihr Wissen für sich.

Als besonderes Ereignis in den 1950er Jahren muß die internationale Tagung zur Wahrscheinlichkeitsrechung und mathematischen Statistik in Berlin-Ost hervorgehoben werden, die offiziell von der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (DAW) im Oktober 1954 veranstaltet wurde und bei der sich Vertreter aus Ost- und West-Deutschland, aus Ost (Sowjetunion) und West (Frankreich) trafen.[14] Für beide deutsche Teilstaaten galt, daß die mathematische Statistik als Disziplin seit dem Bruch 1933 unterentwickelt geblieben war, abgeschnitten von internationalen Entwicklungen und zurückgeblieben. Oskar Anderson und Paul Lorenz konnten Brücken zwischen dem „davor“ (vor 1933) und „danach“ (nach 1945) bauen, aber erst jüngere Mathematiker waren ab Mitte der 1950er Jahre in der Lage, fachlich an die modernen Entwicklungen anzuschließen. Welche Rolle dabei die Gastprofessuren spielten ist noch ein Forschungsdesiderat. In Berlin lehrten 1954/55 zwei Gast-Professoren die neuesten Entwicklungen - Emil J. Gumbel (1891-1966) an der FU Berlin in Dahlem (Berlin-West) und an der HU Berlin in Mitte (Berlin-Ost) Boris V. Gnedenko. Es ist nicht bekannt, ob sich beide in Berlin persönlich begegneten, aber es ist zu vermuten, daß sich Gumbel mit Gnedenko in Berlin-Ost traf. Das Vorwort zur russischen Ausgabe von Gumbels "Statistics of Extremes" (New York 1958) verfaßte B. V. Gnedenko.[15]

Prof. Dr. Annette Vogt
MPI für Wissenschaftsgeschichte, Boltzmannstr. 22, 14195 Berlin
vogt@mpiwg-berlin.mpg.de

[14] Vgl. Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechung und mathematische Statistik, herausgegeben von B. V. Gnedenko. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956.
[15] Vgl. Gumbel, Emil J. Statistics of Extremes. New York: Columbia Univ. Press, 1958; reprint 2004. Übersetzung ins Russische, erschienen Moskau: Verlag Mir (die Welt), 1965.

Originelle und kuriose Aufgaben der Unterhaltungs-mathematik aus dem 16. Jahrhundert

Stefan Deschauer

Einleitung

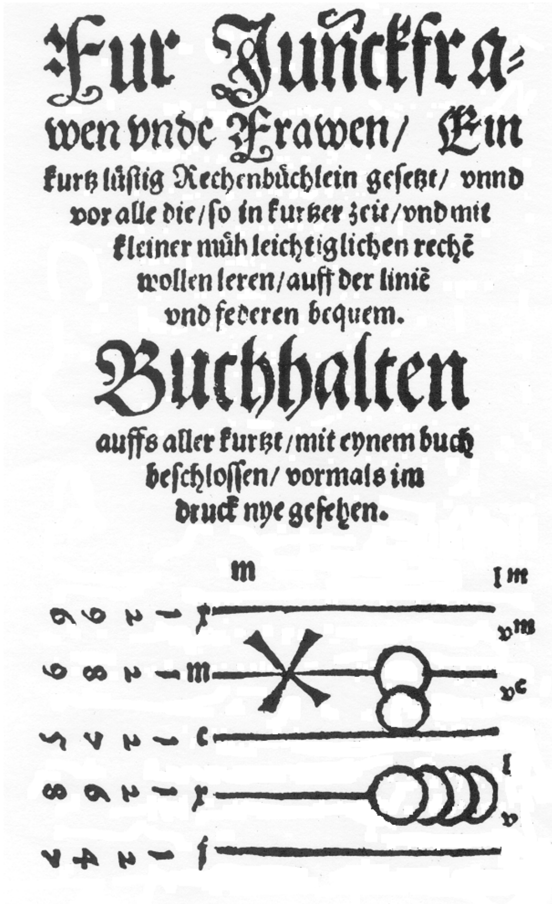
Aufgrund meiner langjährigen Beschäftigung mit mathematischen Texten insbesondere der frühen Neuzeit sind mir immer mal wieder Aufgaben begegnet, die wenig oder gar nicht bekannt sind, Originalität für sich beanspruchen können, teilweise sogar einen Platz im mathematischen Kuriositätenkabinett einnehmen und durchaus einen reizvollen mathematischen Hintergrund haben.
Es folgt eine kleine Zusammenstellung solcher Aufgaben, wobei ich auf geometrische Probleme der frühen Neuzeit bewusst verzichtet habe, da sie allgemein zu bekannt sind.
Zur Einstimmung wollen wir uns ein wenig mit den Frauen beschäftigen.

Zur Rolle der Frau

Item es het ein treger eine fraw / vnd wenn er allein trinckt an einer Tun bier / so het er 3 wochen genug / vnd wen die fraw mit im trinckt / so wirt sie / in 16 tagen aus / Ist die frag wen die fraw allein trunke / wie lang wurt das bier weren ... (VON ELLENBOGEN 1538, B v)

Die Überschrift gehört natürlich nicht zum Text. Wichtige Zusatzinformation: 1 Tag = 15 Stunden. Die Lösung soll interessierten Lesern und Hörern überlassen bleiben.

Darüber hinaus hat VON ELLENBOGEN einen (weiteren) bemerkenswerten Beitrag zur weiblichen Emanzipation geleistet: Er hat *togentsame Junckfrawen vnnd frawen* in seine Rechenschule aufgenommen – deshalb rechnete er schon im Voraus mit vernichtender Kritik (vgl. VON ELLENBOGEN 1540, A ij) – und das wahrscheinlich erste Rechenbuch für Mädchen und Frauen geschrieben.


Fur Junckfrawen vnde Frawen/ Ein kurtz lüstig Rechenbüchlein gesetzt/ vnnd vor alle die/so in kurtzer zeit/vnd mit kleiner müh leichtiglichen rechē wollen leren/auff der liniē vnd federen bequem.

Buchhalten

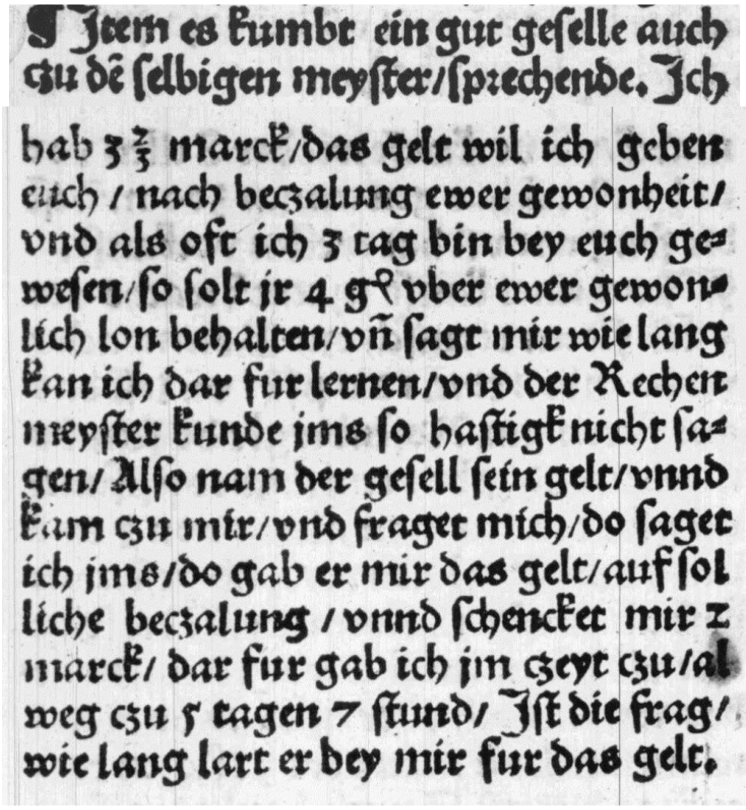
auffs aller kurtzt/mit eynem buch beschlossen/ vormals im druck nye gesehen.

Abb. 1: VON ELLENBOGENS Rechenbüchlein von 1540 (s. Linienschema), Titelblatt

Ein Schüler sucht den geeigneten Rechenmeister oder die Frage nach der Unterrichtszeit

Es folgt eine wirklich ungewöhnliche und interessante Aufgabe aus dem frühesten arithmetischen Druck im nördlichen deutschen Sprachraum (1524), außerdem eine typische ELLENBOGEN-Aufgabe, da der Autor (wie so oft) seine vermeintliche Überlegenheit gegenüber anderen Berufskollegen dokumentieren will.

Die Mark-Groschen- und die Tag-Stunden-Relation sind nicht angegeben. In Danzig galt damals 1 Mark (gering) = 20 Groschen, außerdem kann man durchaus von 1 Tag = 12 Stunden ausgehen. Diese Prämissen lassen sich aber nicht verifizieren, da der Autor die Lösung der Aufgabe nicht verraten hat. Trotz eines gewissen Interpretationsspielraums scheinen folgende Überlegungen schlüssig zu sein.



Item es kumbt ein gut geselle auch
czu dē selbigen meyster/sprechende. Ich
hab 3 $\frac{2}{3}$ marck/das gelt wil ich geben
euch / nach beczalung ewer gewonheit/
vnd als oft ich 3 tag bin bey euch ge-
wesen/so solt jr 4 gr vber ewer gewon-
lich lon behalten/vn̄ sagt mir wie lang
kan ich dar fur lernen/vnd der Rechen
meyster kunde jms so hastigk nicht sa-
gen/ Also nam der gesell sein gelt/vnnd
kam czu mir/vnd fraget mich/do saget
ich jms/do gab er mir das gelt/auf sol
liche beczalung / vnnd schencket mir 2
marck/ dar fur gab ich jm czeyt czu/al
weg czu 5 tagen 7 stund/ Ist die frag/
wie lang lart er bey mir fur das gelt.

Abb. 2 a, b: Die Frage nach der Unterrichtszeit (V. ELLENBOGEN 1524, a6/a6v)

Die $3\frac{2}{3}$ Mark dienen der genannten Überbezahlung des Rechenmeisters. VON ELLENBOGEN erhält 2 Mark für 5 Tage 7 Stunden; der Bonus von 4 Groschen ist darin bereits einmal enthalten, sodass der Autor sonst nur $1\frac{4}{5}$ Mark für 5 Tage 7 Stunden nimmt. Umrechnung auf 1 Tag: $\frac{108}{335}$ Mark; Umrechnung auf $3n$ Tage (mit n-fachem Bonus) und Maximalbedingung: $(\frac{324n}{335}+\frac{n}{5})$ Mark $\leq 3\frac{2}{3}$ Mark. Ergebnis: $n \leq 3\frac{166}{1173}$, das heißt $n=3$ ist maximal. Hierfür, also für 9 Tage, ergeben sich auf der linken Ungleichungsseite $3\frac{168}{335}$ Mark. Von $3\frac{2}{3}$ Mark bleiben $\frac{166}{1005}$ Mark übrig, für die die restliche Unterrichtszeit nach dem „Normalpreis“ zu berechnen ist: $\frac{83}{162}$ Tage. Gesamtergebnis: $9\frac{83}{162}$ Tage = 9 Tage $6\frac{4}{27}$ Stunden. Rundet man auf volle Stunden, so werden $\frac{4}{27}$ Stunden nicht genutzt, was $\frac{16}{201}$ Groschen entspricht.

Die Aufgabe lässt sich natürlich auch durch „intelligentes Probieren“ lösen: $3\frac{2}{3} : \frac{108}{335} > 11$ (Tage), der Preis für 11 Tage Unterricht übersteigt aber $3\frac{2}{3}$ Mark, ebenso der für 10 Tage. So kommt man zu 9 Tagen wie oben usw.

Die Feigen

Item ainer hat kinder / sagt nit wieuil / vnd hat einē korb mit feygen / sagt auch nit wieuil / vnnd so er yegklichem kind 12 feygen gibt / so bleiben 30 feygen über. Nu kumbt die muter / vnd nimbt den kindern die feygen alle wider / vnd thut sy wider in den korb / So kumbt der vatter / vnd tailt die feygen wider vnter die kinder / vnd gibt yegklichem kind 17 feygen / so zerrinnen jm noch 40 feygen / Nun ist die frag / wieuil der kinder / auch der feygē gwesen seind. (Grueber 1544, D vj$^{\text{v}}$–D vij)

Der (hier nicht vorgestellte) Lösungstext bietet folgendes Rechenrezept: $17-12=5,\ 30+40=70,\ 70:5=14$ (Anzahl der Kinder), $12\cdot 14=168,\ 168+30=198$ (Anzahl der Feigen)
Diese Rechenvorschrift entspricht, wie man leicht sieht, den auf die reinen Zahlen beschränkten Äquivalenzumformungen zur Lösung des zugehörigen linearen Gleichungssystems $f=12k+30,\ f=17k-40$ (*f*: Anzahl der Feigen, *k*: Anzahl der Kinder). Aber auch inhaltlich – ohne algebraischen Hintergrund und sogar auf Grundschulniveau – lässt sich die Lösungsmethode des Autors erschließen: 5 Feigen mehr pro Kind ergeben 70 Feigen Unterschied, 1 Feige mehr pro Kind führt also zu 14 Feigen Unterschied, daher sind es 14 Kinder und 198 Feigen.

Echo oder die vorgeburtlichen Erziehungskosten

Item ein knab fragte seinen Herren / wy alt er wer / Antwort der her / vnd vorsuchte jn / du bist so alt / als vil marck ich jerlichen hab vor dich ausgeben / das man dich erzogen hat / vnd so vil du mich 3 jar vber (= mehr als) *18 marck gestanden hast / so vil marck hastu mich 4 jar vber 16 mar. gekost / Antwort der knab / das ist Echo / ein widerhal / der nichts bedeut / Darum merke gar eben darauff wen dir was wirt furgeben / ob es müglich ist / aber* (es muss „ader“ heißen) *nicht / dan vil Exempl haben einen schein / das man sie machen kan / sein doch vnmüglich / Da sprach sein her / setz fur die 4 jar 15 / vnd*

fur die 16 mar. 174 Nu subtrahir von beiden seitten die kleinste zal / von der grossern / vnnd teils ab / so komt dir 13 marck / vnd in der proben komt itliches 21 ma. mer / vnnd wirt von etlichen Regula plurima genant.
Facit 13 jar alt der knab. (V. ELLENBOGEN 1538, C^{v})
Die 1. Aufgabe führt algebraisch betrachtet auf die Gleichung $3x-18=4x-16$ $(x=-2)$, sie ist daher nicht lösbar. Die 2. Aufgabe führt zu $3x-18=15x-174$ mit der Lösung $x=13$ (jährliche Ausgabe in Mark und Alter des Knaben). VON ELLENBOGEN hat aber nicht bedacht, dass ein 13-jähriger Junge seinem Herrn nicht 15 Jahre lang Kosten verursacht haben kann.
Von WIDMANN (1489, f. 113^{v}), stammt die Bezeichnung *Regula plurima*. Es handelt sich um ein Rechenrezept, das den Äquivalenzumformungen zur Lösung von Gleichungen des Typs $ax - b = cx - d$ entspricht, sofern *a*, *b*, *c*, *d* ��, (*a* > *c* � *b* > *d*) � (*c* > *a* � *d* > *b*) gilt.

Antipedes, ein „gesandtes Exempel"
Eine besondere Rolle spielen für von ELLENBOGEN die „gesandten Exempel", die er allesamt habe lösen können und von denen er einige (wie die nachfolgende, mit Lösung) in seine Rechenbücher aufgenommen hat. Da kann er sich lange über die Einsender „aus bösen Herzen" ereifern, also über die, die ihn glauben reinlegen zu können und ihm unterstellen, er könne die Aufgaben nicht lösen. Sie wollten ihn aus Hass zuschanden machen, was vor Gott dem Totschlag gleichkäme (vgl. 1 Joh 3, 15). Weiter schreibt er: *Wer sich an einen alten kessel thut reiben mus den rus empfahen / Ich wolte doch manchen wol beschmieren / aber es wer nicht brüderlich gehandelt* (VON ELLENBOGEN, Fragmente, ca. 1537, I ij^{v}–I iij).
Und nun folgt die Aufgabe:

Item 3 wechters des selbigen hern / kauffen auch 9 Ellen / zu einem rock / von den selbigen dreyerleyen farben / als 3 ellen blaw / vnd 3 ellen graw / vnd 3 ellen gel / vnnd vortragen den rock mit einander / den̄ alwegen mus nur einer mit dem rock ausreitten / vnnd die zwen der Burck hüten / Nu muste der erste alwegen eynen solchen rock haben / in $\frac{3}{4}$ *jars / dan jm geburt am meisten aus zureitten / der ander bedarff einen solchen rock in* $1\frac{1}{3}$ *jars / der drite in* $2\frac{2}{11}$ *jars* (d. h. jeder würde als alleiniger Träger den Rock nach den angegebenen

Zeiträumen abtragen) */ Ist die frage / wie vil mus yderman zu dem gewant geben / Machs also / vnd ist dz dritte gesante Exempl / setz inn die mitte der 9 ellen wert als 16 marck … Vnd mercke das Antipedes sein die leut / die vnter vns wonen / vnd keren die fusse gegen vns /* $^{v\bar{n}}$ *darum mustu auch in disser Regl / die zalen vorkeren also / die nenners setz oben / vnd die zelers vnten /*

$$Fa.\,ma.\,d\bar{e}\ \left\{\begin{array}{l} Ersten\ \ 8 \\ andern\ \ 4 \\ dritten\ \ 2 \end{array}\right\}\ \ \beta\ \ \left\{\begin{array}{c} 23 \\ 43 \\ 53 \end{array}\right\}\ d\ \left\{\begin{array}{c} 3\frac{39}{61} \\ 1\frac{41}{61} \\ 2\frac{42}{61} \end{array}\right\}$$

Nu fraget der Her / wie lang weret euch ein solcher rock / Mach einen Antipedischen gemeinen nenner / ist der zeler / vnd die erfunden $^{geaddirt\bar{e}}$ *zelers ist dein nenner / Also machs auch von den alte keirischen schiff / vnd dreyzappischem fas / vnd von den wolff / hunt / vnd fuchs.*

Fac. $\frac{24}{61}$ *jars / vnd macht auch so vil gelt.* (V. ELLENBOGEN 1538, C iij–C iij ^{v})

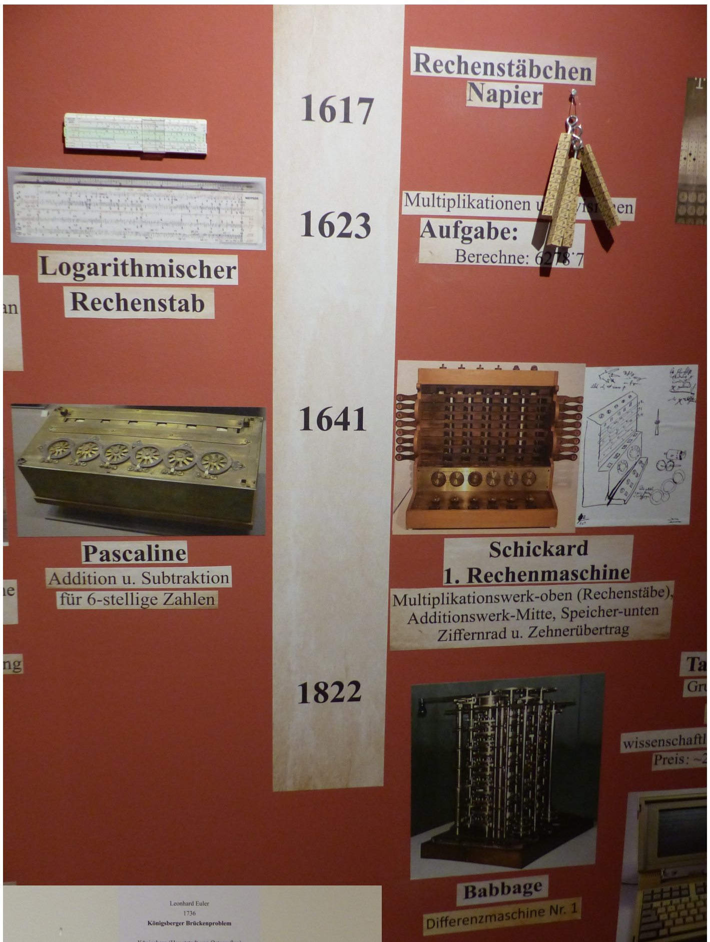
Die Angaben am Anfang stammen von einer anderen Aufgabe, in der der Rock ebenfalls 16 Mark kostet. Die Zahl der Ellen und die gleich verteilten Farben sind hier irrelevant. Um es vorwegzunehmen: VON ELLENBOGEN gibt die richtige Lösung an, aber der Lösungsweg lässt sich anhand des Textes nicht nachvollziehen. Auch muss man erst die zweite Frage beantworten, bevor man die Kosten für das Gewand aufteilen kann.

Die drei Wächter verschleißen pro Jahr $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{11}{24}$ Röcke (Zähler und Nenner sind „antipedisch“ vertauscht). Zusammen brauchen sie pro Jahr $2\frac{13}{24}$ Röcke, sodass 1 Rock $\frac{24}{61}$ Jahre hält. Auf diesen Zeitraum umgerechnet, verschleißen die drei $\frac{32}{61}$, $\frac{18}{61}$ bzw. $\frac{11}{61}$ Röcke. Gemäß diesen Anteilen sind die Kosten von 16 Mark umzulegen – siehe das Diagramm im Aufgabentext.

VON ELLENBOGEN verweist auf weitere Aufgaben dieser Art, die sich wieder bei WIDMANN (1489, f. 137–139) finden. Das „alte keirische“ Schiff ist aber eine Verballhornung: Das Schiff bei WIDMANN (1489, f. 138^{v}) fährt von „Alkeyer“ ab, also wohl von Kairo *(al-Qāhira).*

Literatur

Deschauer, St. (2002). Die Bücher des Danziger Rechenmeisters Erhart von Ellenbogen. Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz, Band 14 (S. 113–126).
Deschauer, St. (2012). Über eine Arithmetik des oberbayerischen Schulmeisters Leonhard Grueber (1544) – Plagiate "gründlich inbegriffen". In: Zeitläufte. Algorismus Heft 77 (S. 59–66). Augsburg: Erwin Rauner.
Deschauer, St. (2014). Über den frühesten arithmetischen Druck im nördlichen deutschen Sprachraum – Erhardt von Ellenbogens Rechenbüchlein von 1524. Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz Band 23 (S. 349–356).
von Ellenbogen, E. (1524). Ein Rechñ buchlein durch gantz vñ gebrochen Species auf die linien ader federen bequem. Danzig: Hans Weinreych
von Ellenbogen, E. (1536). Rechenbuch auff Preussische müntze / mas vnd gewichte / auff der linien vnd federn seer bequem / mit wenig worten viel begriffen / zu dem gmeinen handel vnd scharffer Rechnung verfertiget. Welscher Practica jnhalt / mit den dreien gesanten Exempeln vleissiglich beschlossen den 9. Weinmonat: Anno 1535. Wittenberg: Joseph Klug.
[von Ellenbogen (ca. 1537). Fragmente]
von Ellenbogen, E. (1538). Rechēbuch auff Preusische muntze / maß / vnd gewicht / auff der linien vnnd fedderen seer bequem / mit wenig worten / gar vil begriffen / zu dem gemeinem handl / vnd scharffer Rechnung verfertiget / durch den Canon, Echo, Conuersus, Antipedes, Falsus, Cecus. Buchhalten auch auff vnsere ganckhafftige müntze / in geselschaffter weise / gantz offen bar vnd auffs kurtz gesetzet. Danzig: Franz Rhode.
von Ellenbogen, E. (1540). Fur Junckfrawen vnde Frawen / Ein kurtz lüstig Rechenbüchlein / vnnd vor alle die / so in kurtzer zeit / vnd mit kleiner müh leichtiglichen rechē wollen leren / auff der liniē vnd federen bequem. Buchhalten auffs kurtzt / mit eynem buch beschlossen … Danzig (vermutlich Franz Rhode).
Grueber, L. (1544). Rechenbuechel der Linien vnnd Zyffer / auff die schwartze Müntz / für die anfahenden / mancherlay keüff betreffend / Durch Leonhardū Grueber / Burgerssune zu Öting / Camrer vnnd Lateinischer Schulmaister im Closter zu Sewn gepracticiert. Augsburg: Philipp Ulhart
Widmann, Johannes (1489). Behēde vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft. Leipzig: Conrad Kacheloffen.



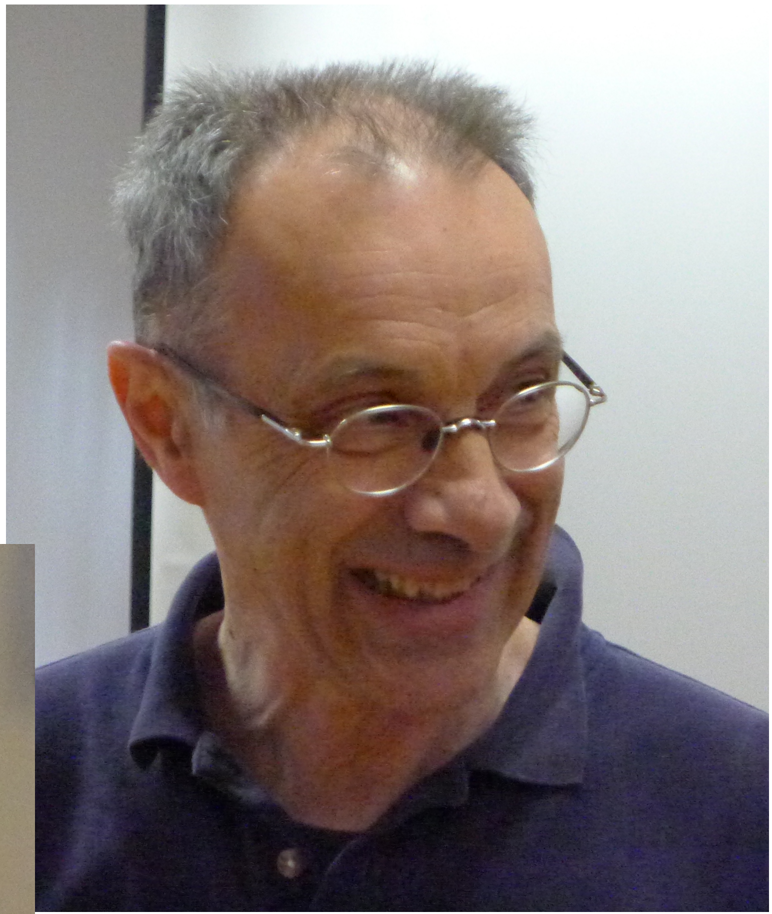
Photos:
Ulrich Reich

Lea Dasenbrock

Karl Kleine

Vlasta Moravcová

Philippe Séguin



Joanna Zwierzyńska

Inhaltsverzeichnis

Eine pdf-Version dieses Bandes (mit internen Links und mehr Farben) kann von www.mat.univie.ac.at/~schmitt/OeSGdM/ *bezogen werden*

* Martina Bečvářová (106)
Katedra aplikované matematiky, Fakulta dopravní, ČVUT v Praze,
Na Florenci 25, CZ 11000 Praha 1, Tschechien
becvamar@fd.cvut.cz

Christa Binder
Adolf-Gstöttner-Gasse 6/37, A 1200 Wien, Österreich
christa.binder@tuwien.ac.at

* Wolfgang Breidert (78)
Baumgartenstr. 9, D-76316 Malsch, Deutschland
Wolfgang.Breidert@gmx.de
(Marlene Breidert)

* Danuta Ciesielska (165 , 188)
L&A Birkenmajer Institute for the History of Science,
Polish Academy of Sciences,
ul. Nowy Swiat 72, PL 00-330 Warsaw, Poland
smciesie@cyfronet.krakow.pl

* Lea Dasenbrock (33)
Mathematisches Institut, Abteilung Didaktik
Augustusplatz 10, D 04109 Leipzig, Deutschland
Lea.Dasenbrock@math.uni-leipzig.de

* Sergui Demidov (134)
S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology of RAN
ul. Baltiiskaya 14, Moscow 125315, Russia
serd42@mail.ru

* Stefan Deschauer (224)
Hübnerstr. 15, D 01069 Dresden, Deutschland
Stefan.Deschauer@tu-dresden.de

* Stanisław Domoradzki (100)
Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Rzeszów
University of Rzeszów, 1 Prof Pigonia Str., PL 35-959 Rzeszów, Poland
domoradz@ur.edu.pl

* Gerlinde Faustmann (231)
Kaisersteing. 6, A 2700 Wiener Neustadt, Österreich
gerlinde.faustmann@aon.at

* Jasna Fempl-Madjarević (148)
MM Arhimedes and Math. Institute,
Vidikovački venac 27, RS 11000 Beograd, Serbien
tanjamadjarevic@gmail.com

* Hans Fischer (6)
Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt,
Mathematisch-Geographische Fakultät, D 85071 Eichstätt, Deutschland
hans.fischer@ku.de
(Evi Fischer)

* Menso Folkerts (83)
Meggendorferstraße 66, D 80993 München, Deutschland
Museumsinsel 1, D 80538 München, Deutschland
M.Folkerts@lrz.uni-muenchen.de

Detlef Gronau
Riglergasse 6/5, A 1180 Wien, Österreich
detlef.gronau@chello.at

∗ Harald Gropp (157)
Henkel-Teroson-Straße 20, D 69123 Heidelberg, Deutschland
`d12@ix.urz.uni-heidelberg.de`

∗ Alfred Holl (198)
Technische Hochschule Nürnberg, Fakultät Informatik,
Kesslerplatz 12, D 90489 Nürnberg, Deutschland
`alfred.holl@th-nuernberg.de`

∗ Karl Kleine (49)
Grete-Unrein-Straße 3, D 07745 Jena, Deutschland
`karl.kleine@eah-jena.de`

∗ Thomas Krohn (92)
Davidstraße 13, D 04109 Leipzig, Deutschland
`krohn@math.uni-leipzig.de`

∗ Winfried Mahler
Pestalozzistraße 11, D-07749 Jena, Deutschland
`winfried.mahler@web.de`

∗ Rita Meyer-Spasche (206)
MPI für Plasmaphysik, TOK, Geb. I1, Z. 3030
D-85748 Garching bei München, Deutschland
`meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de`

∗ Vlasta Moravcová (70)
Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova, Sokolovská 83, CZ 186 75 Praha 8, Tschechien
`morava@karlin.mff.cuni.cz`

Luboš Moravec
Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova, Sokolovská 83, CZ 186 75 Praha 8, Tschechien
`moravec@karlin.mff.cuni.cz`

∗ Christine Phili (23)
30 Esperou Straße, GR 14561 Kifisia, Athen, Griechenland
`xfili@math.ntua.gr`

∗ Marko Razpet (57)
Levstikova 6, SI 1230 Domžale, Slovenija
`Marko.Razpet@guest.arnes.si`

∗ Nada Razpet (63)
Levstikova 6, SI 1230 Domžale, Slovenija
`nada.razpet@guest.arnes.si`

∗ Ulrich Reich (177)
Kurpfalzstraße 14, D-75015 Bretten, Deutschland
`ulrichreich44@gmail.com`
(Gabriela Reich)

Michael von Renteln
Weiklesstraße 28a, D-76228 Karlsruhe, Deutschland
`von@renteln.de`
(Gisela von Renteln)

∗ Herwig Säckl
Traberweg 1, D-93049 Regensburg, Deutschland
`herwsaeckl@aol.com`
(Waltraut Säckl)

Karl-Heinz Schlote
Elie-Wiesel-Straße 55, D 04600 Altenburg, Deutschland
schlote@imai.uni-hildesheim.de

Peter Schmitt
Adolf-Gstöttner-Gasse 6/37, A 1200 Wien, Österreich
Peter.Schmitt@univie.ac.at

* Silvia Schöneburg-Lehnert (92)
Rosa-Luxemburg-Straße 15E, D 04103 Leipzig, Deutschland
schoeneburg@math.uni-leipzig.de

* Philippe Séguin (44)
23 rue Milton, F-54000 Nancy, France
philippe.seguin11@wanadoo.fr

Malgorzata Stawiska-Friedland *(Co-Autorin)* (100)
Mathematical Reviews, 416 Fourth St., Ann Arbor, MI 48103, USA
stawiska@umich.edu

* Renate Tobies (142)
Friedrich-Schiller-Universität,
Institut Geschichte der Naturwissenschaften
Kahlaische Str. 1, D 07745 Jena, Deutschland
renate.tobies@uni-jena.de

* Peter Ullrich (13)
Universität Koblenz-Landau, Campus Koblenz, Fachbereich 3:
Mathematik/Naturwissenschaften, Mathematisches Institut,
Universitätsstraße 1, D-56070 Koblenz, Deutschland
ullrich@uni-koblenz.de

* Annette Vogt (214)
Kleine Homeyerstr. 2A, D 13156 Berlin
MPI für Wissenschaftsgeschichte,
Boltzmannstraße 22, D-14195 Berlin, Deutschland
vogt@mpiwg-berlin.mpg.de

* Wiesław Wójcik (124)
Institute of Philosophy, Jan Długosz University of Częstochowa,
al. Armii Krajowej 34a, PL 42-200 Częstochowa, Poland
L&A Birkenmajer Institute for the History of Science, Polish Academy of Sciences,
ul. Nowy Świat 72, PL 00-330 Warsaw, Poland
wwoj@ihnpan.waw.pl

* Holger Wuschke (114)
Universität Leipzig. Math.Inst.Didaktik
Augustusplatz 10, D 04109 Leipzig, Deutschland
holger.wuschke@math.uni-leipzig.de

* Mykhailo Zarichnyi (100)
Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Rzeszów
University of Rzeszów, 1 Prof Pigonia Str., PL 35-959 Rzeszów, Poland
Faculty of Mechanics and Mathematics
Ivan Franko Lviv National University, 29000 Lviv, Ukraine
zarichnyi@yahoo.com

* Joanna Zwierzyńska (188)
L. & A. Birkenmajer Institute for the History of Science
Polish Academy of Sciences
ul. Nowy Świat 72, PL 00-330 Warszawa, Poland
joanna.zwierzynska@us.edu.pl