

Originelle und kuriose Aufgaben der Unterhaltungsmathematik aus dem 16. Jahrhundert

Stefan Deschauer

Einleitung

Aufgrund meiner langjährigen Beschäftigung mit mathematischen Texten insbesondere der frühen Neuzeit sind mir immer mal wieder Aufgaben begegnet, die wenig oder gar nicht bekannt sind, Originalität für sich beanspruchen können, teilweise sogar einen Platz im mathematischen Kuriositätenkabinett einnehmen und durchaus einen reizvollen mathematischen Hintergrund haben.

Es folgt eine kleine Zusammenstellung solcher Aufgaben, wobei ich auf geometrische Probleme der frühen Neuzeit bewusst verzichtet habe, da sie allgemein zu bekannt sind.

Zur Einstimmung wollen wir uns ein wenig mit den Frauen beschäftigen.

Zur Rolle der Frau

Item es het ein treger eine fraw / vnd wenn er allein trinckt an einer Tun bier / so het er 3 wochen genug / vnd wen die fraw mit im trinckt / so wirt sie / in 16 tagen aus / Ist die frag wen die fraw allein trunke / wie lang wurt das bier weren ... (VON ELLENBOGEN 1538, B v)

Die Überschrift gehört natürlich nicht zum Text. Wichtige Zusatzinformation: 1 Tag = 15 Stunden. Die Lösung soll interessierten Lesern und Hörern überlassen bleiben.

Darüber hinaus hat VON ELLENBOGEN einen (weiteren) bemerkenswerten Beitrag zur weiblichen Emanzipation geleistet: Er hat *togentsame Junckfrawen vnnd frawen* in seine Rechenschule aufgenommen – deshalb rechnete er schon im Voraus mit vernichtender Kritik (vgl. VON ELLENBOGEN 1540, A ij) – und das wahrscheinlich erste Rechenbuch für Mädchen und Frauen geschrieben.

Bemerkung.

Korrigierter Beitrag aus dem Band XIV (2018), 224–230, da bei der Konvertierung ins pdf-Format einige Zeichen falsch wiedergegeben wurden.

Fur Junckfräwen vnde Fräwen/ Ein
kurz lüftig Rechenbüchlein gefest/ vnd
vor alle die/so in kurzer zeit/vnd mit
kleiner müh leichtiglichen rechē
wollen leren/auff der liniē
vnd federen bequem.

Buchhalten
auffs aller kurze/mit eynem buch
beschlossen/ vormalis im
druck nye gesehen.

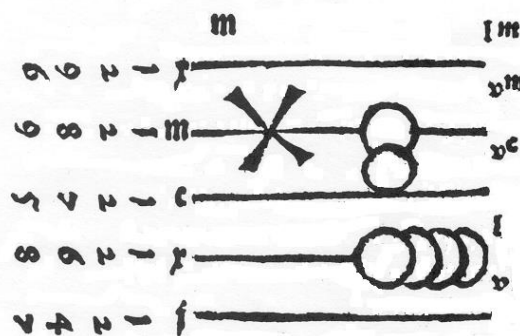


Abb. 1: VON ELLENBOGENS Rechenbüchlein von 1540 (s. Linienschema), Titelblatt

Ein Schüler sucht den geeigneten Rechenmeister oder die Frage nach der Unterrichtszeit

Es folgt eine wirklich ungewöhnliche und interessante Aufgabe aus dem frühesten arithmetischen Druck im nördlichen deutschen Sprachraum (1524), außerdem eine typische ELLENBOGEN-Aufgabe, da der Autor (wie so oft) seine vermeintliche Überlegenheit gegenüber anderen Berufskollegen dokumentieren will.

Die Mark-Groschen- und die Tag-Stunden-Relation sind nicht angegeben. In Danzig galt damals 1 Mark (gering) = 20 Groschen, außerdem kann man durchaus von 1 Tag = 12 Stunden ausgehen. Diese Prämissen lassen sich aber nicht verifizieren, da der Autor die Lösung der Aufgabe nicht verraten hat. Trotz eines gewissen Interpretationsspielraums scheinen folgende Überlegungen schlüssig zu sein.

Item es kumbt ein gut gefelle auch
 zu dē selbigen meyster/sprechende. Ich
 hab $3\frac{2}{3}$ marck/das gelt wil ich geben
 euch / nach bezalung ewer gewonheit/
 vnd als oft ich 3 tag bin bey euch ge-
 wesen/so solt jr 4 gr vber ewer gewon-
 lich lon behalten/vñ sagt mir wie lang
 kan ich dar fur lernen/vnd der Rechen
 meyster Kunde jms so hastigē nicht sa-
 gen/ Also nam der gefell sein gelt/vnnd
 kam zu mir/vnd fraget mich/do saget
 ich jms/do gab er mir das gelt/auf sol-
 liche bezalung / vnnd schencket mir 2
 marck/ dar fur gab ich jm zeyt zu/al-
 weg zu 5 tagen 7 stund/ Ist die frag/
 wie lang lart er bey mir fur das gelt.

Abb. 2 a, b: Die Frage nach der Unterrichtszeit (v. ELLENBOGEN 1524, a6/a6^v)

Die $3\frac{2}{3}$ Mark dienen der genannten Überbezahlung des Rechenmeisters.

VON ELLENBOGEN erhält 2 Mark für 5 Tage 7 Stunden; der Bonus von 4 Groschen ist darin bereits einmal enthalten, sodass der Autor sonst nur $1\frac{4}{5}$ Mark für 5 Tage 7 Stunden nimmt. Umrechnung auf 1 Tag: $\frac{108}{335}$ Mark;

Umrechnung auf $3n$ Tage (mit n -fachem Bonus) und Maximalbedingung:
 $(\frac{324n}{335} + \frac{n}{5})$ Mark $\leq 3\frac{2}{3}$ Mark. Ergebnis: $n \leq 3\frac{166}{1173}$, das heißt $n = 3$ ist maximal.

Hierfür, also für 9 Tage, ergeben sich auf der linken Ungleichungsseite $3\frac{168}{335}$ Mark. Von $3\frac{2}{3}$ Mark bleiben $\frac{166}{1005}$ Mark übrig, für die die restliche Unterrichtszeit nach dem „Normalpreis“ zu berechnen ist: $\frac{83}{162}$ Tage. Gesamtergebnis: $9\frac{83}{162}$ Tage = 9 Tage $6\frac{4}{27}$ Stunden. Rundet man auf volle Stunden, so werden $\frac{4}{27}$ Stunden nicht genutzt, was $\frac{16}{201}$ Groschen entspricht.

Die Aufgabe lässt sich natürlich auch durch „intelligentes Probieren“ lösen: $3\frac{2}{3} : \frac{108}{335} > 11$ (Tage), der Preis für 11 Tage Unterricht übersteigt aber

$3\frac{2}{3}$ Mark, ebenso der für 10 Tage. So kommt man zu 9 Tagen wie oben usw.

Die Feigen

Item ainer hat kinder / sagt nit wieuיל / vnd hat einē korb mit feygen / sagt auch nit wieuיל / vnnd so er yegklichem kind 12 feygen gibt / so bleiben 30

feygen über. Nu kumbt die muter / vnd nimbt den kindern die feygen alle wider / vnd thut sy wider in den korb / So kumbt der vatter / vnd tailt die feygen wider vnter die kinder / vnd gibt yegklichem kind 17 feygen / so zerrinnen jm noch 40 feygen / Nun ist die frag / wieuil der kinder / auch der feygē gwesen seind. (GRUEBER 1544, D vj^v-D vij)

Der (hier nicht vorgestellte) Lösungstext bietet folgendes Rechenrezept:
 $17 - 12 = 5$, $30 + 40 = 70$, $70 : 5 = 14$ (Anzahl der Kinder), $12 \cdot 14 = 168$,
 $168 + 30 = 198$ (Anzahl der Feigen)

Diese Rechenvorschrift entspricht, wie man leicht sieht, den auf die reinen Zahlen beschränkten Äquivalenzumformungen zur Lösung des zugehörigen linearen Gleichungssystems $f = 12k + 30$, $f = 17k - 40$ (f : Anzahl der Feigen, k : Anzahl der Kinder). Aber auch inhaltlich – ohne algebraischen Hintergrund und sogar auf Grundschulniveau – lässt sich die Lösungsmethode des Autors erschließen: 5 Feigen mehr pro Kind ergeben 70 Feigen Unterschied, 1 Feige mehr pro Kind führt also zu 14 Feigen Unterschied, daher sind es 14 Kinder und 198 Feigen.

Echo oder die vorgeburtlichen Erziehungskosten

Item ein knab fragte seinen Herren / wy alt er wer / Antwort der her / vnd versuchte jn / du bist so alt / als vil marck ich jerlichen hab vor dich ausgeben / das man dich erzogen hat / vnd so vil du mich 3 jar vber (= mehr als) 18 marck gestanden hast / so vil marck hastu mich 4 jar vber 16 mar. gekost / Antwort der knab / das ist Echo / ein widerhal / der nichts bedeut / Darum merke gar eben darauff wen dir was wirt furgeben / ob es müglich ist / aber (es muss „ader“ heißen) nicht / dan vil Exempl haben einen schein / das man sie machen kan / sein doch vnmüglich / Da sprach sein her / setz fur die 4 jar 15 / vnd fur die 16 mar. 174 Nu subtrahir von beiden seitten die kleinste zal / von der grossern / vnnd teils ab / so komt dir 13 marck / vnd in der proben komt itliches 21 ma. mer / vnnd wirt von etlichen Regula plurima genant. Facit 13 jar alt der knab. (V. ELLENBOGEN 1538, C^v)

Die 1. Aufgabe führt algebraisch betrachtet auf die Gleichung $3x - 18 = 4x - 16$ ($x = -2$), sie ist daher nicht lösbar. Die 2. Aufgabe führt zu $3x - 18 = 15x - 174$ mit der Lösung $x = 13$ (jährliche Ausgabe in Mark und Alter des Knaben). VON ELLENBOGEN hat aber nicht bedacht, dass ein 13-jähriger Junge seinem Herrn nicht 15 Jahre lang Kosten verursacht haben kann.

Von WIDMANN (1489, f. 113^v), stammt die Bezeichnung *Regula plurima*. Es handelt sich um ein Rechenrezept, das den Äquivalenzumformungen zur Lösung von Gleichungen des Typs $ax - b = cx - d$ entspricht, sofern $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $(a > c \wedge b > d) \vee (c > a \wedge d > b)$ gilt.

Antipedes, ein „gesandtes Exempel“

Eine besondere Rolle spielen für von ELLENBOGEN die „gesandten Exempel“, die er allesamt habe lösen können und von denen er einige (wie die nachfolgende, mit Lösung) in seine Rechenbücher aufgenommen hat. Da kann er sich lange über die Einsender „aus bösen Herzen“ ereifern, also über die, die ihn glauben reinlegen zu können und ihm unterstellen, er könne die Aufgaben nicht lösen. Sie wollten ihn aus Hass zuschanden machen, was vor Gott dem Totschlag gleichkäme (vgl. 1 Joh 3, 15). Weiter schreibt er: *Wer sich an einen alten kessel thut reiben mus den rus empfaen / Ich wolte doch manchen wol beschmieren / aber es wer nicht brüderlich gehandelt* (VON ELLENBOGEN, Fragmente, ca. 1537, I ij^v–I iij).

Und nun folgt die Aufgabe:

Item 3 wechters des selbigen hern / kauffen auch 9 Ellen / zu einem rock / von den selbigen dreyerleyen farben / als 3 ellen blau / vnd 3 ellen graw / vnd 3 ellen gel / vnnd vortragen den rock mit einander / deñ alwegen mus nur einer mit dem rock ausreiten / vnnd die zwen der Burck hüten / Nu musste der erste alwegen eynen solchen rock haben / in $\frac{3}{4}$ jars / dan jm geburt am meisten aus zureiten / der ander bedarff einen solchen rock in $1\frac{1}{3}$ jars / der drite in $2\frac{2}{11}$ jars (d. h. jeder würde als alleiniger Träger den Rock nach den angegebenen Zeiträumen abtragen) / Ist die frage / wie vil mus yderman zu dem gewant geben / Machs also / vnd ist dz dritte gesante Exempl / setz inn die mitte der 9 ellen wert als 16 marck ... Vnd mercke das Antipedes sein die leut / die vnter vns wonen / vnd keren die fusse gegen vns / vn̄ darum mustu auch in disser Regl / die zalen vorkeren also / die nenners setz oben / vnd die zellers vnten /

$$\text{Fa. ma. } d\bar{e} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ersten } 8 \\ \text{andern } 4 \\ \text{dritten } 2 \end{array} \right\} \beta \left\{ \begin{array}{l} 23 \\ 43 \\ 53 \end{array} \right\} d \left\{ \begin{array}{l} 3\frac{39}{61} \\ 1\frac{41}{61} \\ 0\frac{42}{61} \end{array} \right\}$$

Nu fraget der Her / wie lang weret euch ein solcher rock / Mach einen Antipedischen gemeinen nenner / ist der zeler / vnd die erfunden geaddirtē zellers ist dein nenner / Also machs auch von den alte keirischen schiff / vnd dreyzappischem fas / vnd von den wolff / hunt / vnd fuchs.

Fac. $\frac{24}{61}$ jars / vnd macht auch so vil gelt. (V. ELLENBOGEN 1538, C iij–C iij^v)

Die Angaben am Anfang stammen von einer anderen Aufgabe, in der der Rock ebenfalls 16 Mark kostet. Die Zahl der Ellen und die gleich verteilten Farben sind hier irrelevant. Um es vorwegzunehmen: VON ELLENBOGEN gibt die richtige Lösung an, aber der Lösungsweg lässt sich anhand des Textes

nicht nachvollziehen. Auch muss man erst die zweite Frage beantworten, bevor man die Kosten für das Gewand aufteilen kann.

Die drei Wächter verschleißten pro Jahr $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{11}{24}$ Röcke (Zähler und Nenner sind „antipedisch“ vertauscht). Zusammen brauchen sie pro Jahr $2\frac{13}{24}$ Röcke, sodass 1 Rock $\frac{24}{61}$ Jahre hält. Auf diesen Zeitraum umgerechnet, verschleißten die drei $\frac{32}{61}$, $\frac{18}{61}$ bzw. $\frac{11}{61}$ Röcke. Gemäß diesen Anteilen sind die Kosten von 16 Mark umzulegen – siehe das Diagramm im Aufgabentext. VON ELLENBOGEN verweist auf weitere Aufgaben dieser Art, die sich wieder bei WIDMANN (1489, f. 137–139) finden. Das „alte keirische“ Schiff ist aber eine Verballhornung: Das Schiff bei WIDMANN (1489, f. 138^v) fährt von „Alkeyer“ ab, also wohl von Kairo (*al-Qāhira*).

Literatur

Deschauer, St. (2002). Die Bücher des Danziger Rechenmeisters Erhart von Ellenbogen. Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz, Band 14 (S. 113–126).

Deschauer, St. (2012). Über eine Arithmetik des oberbayerischen Schulmeisters Leonhard Grueber (1544) – Plagiate „gründlich inbegriffen“. In: Zeitläufte. Algorismus Heft 77 (S. 59–66). Augsburg: Erwin Rauner.

Deschauer, St. (2014). Über den frühesten arithmetischen Druck im nördlichen deutschen Sprachraum – Erhardt von Ellenbogens Rechenbüchlein von 1524. Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz Band 23 (S. 349–356).

von Ellenbogen, E. (1524). Ein Rechñ buchlein durch gantz vñ gebrochen Species auf die linien ader federen bequem. Danzig: Hans Weinreych

von Ellenbogen, E. (1536). Rechenbuch auff Preussische müntze / mas vnd gewichte / auff der linien vnd federn seer bequem / mit wenig Worten viel begriffen / zu dem gemeinen handel vnd scharffer Rechnung verfertiget. Welscher Practica inhalt / mit den dreien gesanten Exempeln vleissiglich beschlossen den 9. Weinmonat: Anno 1535. Wittenberg: Joseph Klug.

[von Ellenbogen (ca. 1537). Fragmente]

von Ellenbogen, E. (1538). Rechēbuch auff Preussische müntze / maß / vnd gewicht / auff der linien vñnd fedderen seer bequem / mit wenig Worten / gar vil begriffen / zu dem gemeinem handl / vnd scharffer Rechnung verfertiget / durch den Canon, Echo, Conuersus, Antipedes, Falsus, Cecus. Buchhalten auch auff vnsere ganckhafftige müntze / in geselschaffter weise / gantz offen bar vnd auff's kurtz gesetzt. Danzig: Franz Rhode.

von Ellenbogen, E. (1540). Fur Junckfrawen vnde Frawen / Ein kurtz lüstig Rechenbüchlein / vnnd vor alle die / so in kurtzer zeit / vnd mit kleiner müh leichtiglichen rechē wollen leren / auff der liniē vnd federen bequem. Buchhalten auff's kurtzt / mit eynem buch beschlossen ... Danzig (vermutlich Franz Rhode).

Grueber, L. (1544). Rechenbuechel der Linien vnnd Zyffer / auff die schwartz Müntz / für die anfahenden / mancherlay keüff betreffend / Durch Leonhardū Grueber / Burger'ssune zu Öting / Camrer vnnd Lateinischer Schulmaister im Closter zu Sewn gepracticiert. Augsburg: Philipp Ulhart

Widmann, Johannes (1489). Behēde vnd hubsche Rechnung auff allen kauffmanschafft. Leipzig: Conrad Kacheloffen.