Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte

XIII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

Namenspatrone und Taufpaten
Wie mathematische Begriffe zu ihrem Namen kamen

Namesaints and Godfathers — *How mathematical concepts are baptized*

Tagung, 1. bis 7. Mai 2016, Miesenbach (Niederösterreich)

Kurzfassungen der Vorträge

Herausgeber:
Dr. Christa Binder *e-mail:* `christa.binder@tuwien.ac.at`
Institut für Analyis und Scientific Computing
Technische Universität Wien

Danksagung:
Ohne die großzügige Hilfe der folgenden Institutionen
wäre die Durchführung der Tagung nicht möglich gewesen.
Dafür herzlichen Dank.

International Commission on the History of Mathematics (ICHM)
Amt der Niederösterreichischen Landesregierung, Abteilung Kultur und Wissenschaft
Österreichische Mathematische Gesellschaft
Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien
anonyme Spender

Layout und Druckvorlage: Peter Schmitt

KULTUR NIEDERÖSTERREICH

Gefördert durch das Land Niederösterreich.

Wuschke Pogoda Krohn Schlote

Domoradzki Zarichnyi W.Breidert Deschauer Ullrich
M.Breidert Schöneburg Tobies N.Razpet
Voß Ciesielska Bečvářová Vogt

Schlote U.Reich
Folkerts
Gronau Baron Säckl Kohl Gropp *(verkehrt)*
Meyer-Spasche
Binder Čanak Fempl Holl

Inhaltsverzeichnis

Eine pdf-Version dieses Bandes (mit internen Links und mehr Farben) kann von www.mat.univie.ac.at/~schmitt/OeSGdM/ *bezogen werden*

Zur Tara-Rechnung in einigen Rechenbüchern der Neuzeit, insbesondere im Zweiten Rechenbuch von Adam Ries

Von Stefan Deschauer

1 Zum Tara-Begriff

Der Fachbegriff *tara* für Wertverlust, Minderung aus dem italienischen Handelsvokabular geht ursprünglich auf das arabische *ṭarḥ* (Abzug) zurück. Die Tara bezeichnet die Differenz von Brutto- und Netto-Gewicht einer Ware und wird üblicherweise mit dem Begriff „Verpackungsgewicht“ wiedergegeben, der aber zu kurz greift.

ADAM RIES behandelt in seinem Zweiten Rechenbuch von 1522 [RIES 1522a,b,c] in diesem Kontext Aufgaben, in denen Safran im Stumpf, Feigen im Korb, Waid und Butter im Kübel, Kalmus, Mandeln, Baumwolle, Schafwolle, Lorbeer, Nelken und Pfeffer im Sack, Öl und Seife im Lagel (Fässchen), Weinstein, Alaun, Unschlitt, Schweinefett und Seife im Fass sowie Hering und Honig in der Tonne gehandelt werden.

Bei Fässchen, Fass und Tonne kann man noch von Verpackungen im weiteren Sinn sprechen, aber zusammen mit Stumpf, Korb, Kübel und Sack liegen – treffender formuliert – handelsübliche Lieferformen oder Transportbehältnisse vor.

2 Dreisatzaufgaben im Kaufhandel bei ADAM RIES

Bei Weitem nicht bei allen oben genannten Aufgaben rechnet RIES mit Taren. Schauen wir uns einmal Nr. 89 an (Zählung nach [Ries 1522c], in modernisierter Fassung):

1 Stumpf Safran wiegt 48 Pfund 13 Lot 3 Quent. 1 Pfund kostet 3 Gulden 9 Schilling 6 Heller.

Ergebnis: 168 Gulden 5 Schilling $10\frac{23}{64}$ *Heller*

Setze an: 1 Pfund für 3 Gulden 9 Schilling 6 Heller – wie teuer kommen 48 Pfund 13 Lot 3 Quent? ...

[1 Gulden = 20 Schilling, 1 Schilling = 12 Heller, 1 Pfund = 32 Lot, 1 Lot = 4 Quent]

Die (hier übergangene) schriftlche Rechnung zu einer eigentlich harmlosen Dreisatzaufgabe war ziemlich mühsam, da die Größenbereiche nicht dezimal strukturiert und die Dezimalbrüche damals im westlichen Abendland damals noch nicht bekannt waren. Zudem erschwerte man sich die Arbeit dadurch, dass man auf sinnvolles Runden verzichtete. (Hellerbruchteile waren nicht im Umlauf.) Das Runden scheint mit der Berufsehre eines Rechenmeisters nicht vereinbar gewesen zu sein, der demonstrieren wollte, dass er bis ins Kleinste hinein korrekt und akribisch zu rechnen vermochte.

Bei dieser Aufgabe sieht man außerdem, dass die Tara (Stumpf) rechnerisch keine Rolle spielt. RIES rechnet hier nur mit den Netto-Gewichten, und auch wenn der Stumpf – vielleicht ein abgestumpftes Säckchen – nur ein geringes Gewicht haben mag, so müssen die Netto-Gewichte über die Differenzen von Brutto-Gewichten und Taren erst einmal ermittelt werden. Darüber erfährt man in der Aufgabe nichts.

3 Die erste Tara-Aufgabe im Zweiten Rechenbuch von Ries

Mit Nr. 90 beginnt die erste Dreisatzaufgabe, die eine zusätzliche Komplikation enthält, nämlich die Tara:

1 Stumpf Safran wiegt 38 Pfund 16 Lot und hat 9 Lot Tara. Man gibt $3\frac{2}{3}$ *Pfund für* $8\frac{3}{4}$ *Gulden ab.*

Ergebnis: 91 Gulden 4 Schilling $\frac{81}{88}$ *Heller*

Mach´s so: Ziehe die Tara ab und sprich danach: $3\frac{2}{3}$ *Pfund für* $8\frac{3}{4}$ *Gulden – wie teuer kommen 38 Pfund und 7 Lot?*

Interessant ist, dass es hier ebenfalls um einen Stumpf Safran geht, dessen Tara jetzt aber in die Rechnung mit einbezogen wird, obwohl sie nur ungefähr 0,73 % Anteil am Brutto-Gewicht hat.

4 Exkurs: Zur Fusti-Rechnung

Eng verwandt mit der Tara-Rechnung ist eine spezielle Form der sog. Fusti-Rechnung. Das italienische Wort *fusto* bedeutet so viel wie Stängel, Stiel, Halm, Stamm, und *fusti* bezeichnet seit dem Mittelalter die unreinen, minderwertigen Anteile einer Ware.

Besitzt nun eine Ware einen wertlosen, nicht mehr handelsfähigen Anteil, so kann dessen Gewicht – in Erweiterung des bisher betrachteten Tara-Begriffs – ebenfalls als Tara gedeutet werden. Hierzu ein Beispiel von Heinrich Schreiber (1521, 1544, C 7^r) – vgl. Tropfke (1980, S. 533):

Regula Fusti. Ich hab kaufft 6 cētner pfeffer / ie 1 cent. lauter vmb 50 flo(renen) rei(nisch). Hielt 1 cent. tara 5 lb. / Ist die frag wie tewer kompt der pfeffer.

Zu den klassischen Tara-Aufgaben gibt es keinen rechnerischen Unterschied, nur einen inhaltlichen.

Fusti-Aufgaben des (allgemeineren) Typs, bei denen der Fusti-Anteil noch verkaufsfähig ist, stehen in keiner direkten Verbindung zu den Tara-Aufgaben.

5 Die Tara – ein Geldwert

In der letzten und kompliziertesten Aufgabe (Nr. 163) seines Kapitels „Silber- und Goldrechnung“ im Zweiten Rechenbuch, in der es um Gold-Silber-Legierungen, Feingehalte und Preise geht, bezeichnet Adam Ries den Scheidelohn für den Metallurgen als Tara: *tara von eyner margk* (Gewichtseinheit) *zcu scheyden 6 ß* (Schilling) [Ries 1522a,b, F iiij^v]. Der Rechenmeister zeigt hier, wie flexibel er mit dem Tara-Begriff umgeht: Tara ist kein Gewicht mehr, sondern ein Geldwert! Weitere Beispiele hierzu finden wir im Zweiten Rechenbuch nicht.

6 Eine zweite Tara-Rechnung: „Tara auf den Zentner“

Etliche Rechenmeister der (frühen) Neuzeit behandeln aber neben der bisher dargestellten Tara-Rechnung (häufig mit *tara in den Centner* charakterisiert) auch noch eine andere Tara-Rechnung (*tara auff den Centner*). Dazu finden sich auch einige Aufgaben im Zweiten Rechenbuch von ADAM RIES (RIES 1522c, Nr. 100–102). Betrachten wir die Aufgabe Nr. 100:
4 Fässchen mit Öl wiegen 4 Zentner 13 Pfund, 3 Zentner 21 Pfund, 5 Zentner 16 Pfund und 3 Zentner 75 Pfund. Auf 1 Zentner kommen 11 Pfund Tara. 1 Zentner kostet 7 Gulden $1\frac{1}{2}$ *Ort …* (1 Ort = $\frac{1}{4}$ Gulden)
Die fehlende Frage im Text gilt natürlich dem Preis.
Nach der bisherigen Rechnung „Tara in den Zentner“ wären die Gewichte zu addieren (1625 Pfund), 11 Pfund Tara von jeweils 100 Pfund abzuziehen. Das Netto-Gewicht betrüge dann $1625\cdot(1-\frac{11}{100})$ Pfund = $1446\frac{1}{4}$ Pfund. Nun würde der Dreisatz folgen: 100 Pfund kosten $7\frac{3}{8}$ Gulden. Was kosten $1446\frac{1}{4}$ Pfund?
Ergebnis: 106 Gulden 13 Schilling $2\frac{5}{8}$ Heller
[1 Gulden = 20 Schilling, 1 Schilling = 12 Heller]
RIES setzt den Aufgabentext aber nach der Methode „Tara auf den Zentner“ folgendermaßen fort:
Ergebnis: 107 Gulden 19 Schilling $4\frac{6}{37}$ *Heller*
Mach´s so: Addiere, es werden 1625 Pfund. Die setze hinten. Ziehe die Tara nicht ab, sondern addiere sie zum Zentner, d. h. zu 100 Pfund. Es werden 111 Pfund. Die setze vorne, und was 1 Zentner netto [*lauter* in RIES 1522a,b; D vj^{v}] *kostet, nämlich* $7\frac{3}{8}$ *Gulden, setze in die Mitte. Danach schreibe als Brüche und gehe wie üblich vor. Dann steht:*

888 59 Gulden 1625

Dieser Dreisatz entsteht, indem man den Bruch im Dreisatz
111 (Pfund) — $7\frac{3}{8}$ Gulden — 1625 (Pfund)
mit 8 erweitert hat. Es ergibt sich das von RIES genannte Resultat.
Mathematisch lässt sich der Sachverhalt folgendermaßen darstellen:
Angenommen, x Pfund einer Ware kosten y Gulden. Was kosten z Pfund, wenn von jeweils 1 Zentner = 100 Pfund der Ware t Pfund Tara ($t < 100$) zu berücksichtigen sind?
„Tara in den Zentner“: Die Tara wird „hinten“ von z Pfund abgezogen und beträgt $z\cdot\frac{t}{100}$ Pfund. Der Preis für $z\cdot(1-\frac{t}{100})$ Pfund ist $\frac{y}{x}\cdot z\cdot(1-\frac{t}{100})$ Gulden.

„Tara auf den Zentner“: Die Tara wird „vorne“ auf x Pfund aufgeschlagen und beträgt $x \cdot \frac{t}{100}$ Pfund. Der Ansatz lautet nun: Wenn $x \cdot (1+\frac{t}{100})$ Pfund y Gulden kosten, was kosten z Pfund? Ergebnis: $\frac{y}{x} \cdot z \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{100}}$ Gulden

Man sieht, dass der Preis nach der 2. Tara-Rechnung um den Faktor $((1+\frac{t}{100})(1-\frac{t}{100}))^{-1}$ höher liegt als der Preis nach der ersten.

WILLIBALD PEER scheint der Erste zu sein, der sich zu beiden Methoden [PEER 1527a, D 2v/D 3; PEER 1527b, S. 126]:

Ein vnterricht / wie man den thara auff oder in cētner versteen sol.
Ist die gemain regel / so etwas aufgeben wirt zum centner sol man addirn / tregt ein kleyns mer / dadurch dz holtz bezalt wirt. Rechent man aber das vnter einem cētner schwer etlich pfundt holtz sein sol / oder darfür läßt abgeen / sol man solche gemelte pfunt von einem centner subtrahirn …

Erst in seinem Dritten Rechenbuch kommentiert ADAM RIES [RIES 1550, 25v] die beiden Tara-Rechnungen:

In diesen gesatzten exempel hastu was zu treglicher ist / In oder auff den Centner kauffestu den kauff vom tara in den ce / vorkauffstu aber / so mach den kauff vom Tara auff den Centner …

Das kann man geradezu als Aufruf zur Störung des Marktfriedens interpretieren. Noch hundert Jahre später bemerkt FRIDERICUS WEDEMEIER [1647, K vjv] zu den beiden Methoden im Umgang mit der Tara:

… vnd sihe dich wol für / das du in diesen beyden Wörtlein [sc. „in“ und „auf“] *nicht gröblich irrest / vnd dich selbst mit deiner Kauffhandlung betreugest vnd zu schaden bringest.* (K vjv)

7 Mathematische Bezüge zur Prozentrechnung

Es sei noch angemerkt, dass die für die beiden Tara-Rechnungen typischen Terme $1-\frac{t}{100}$ und $\frac{1}{1+\frac{t}{100}}$ in der Prozentrechnung eine wichtige Rolle spielen.

Dazu zwei Beispiele:

Eine Ware, die 120 € gekostet hat, wird um 20 % verbilligt. Wie viel kostet sie jetzt? (Grundaufgabe der Prozentrechnung)

Rechnung und Ergebnis: $120 \cdot (1-\frac{20}{100})$ € = $120 \cdot (1-\frac{1}{5})$ € = 96 €

Eine Ware kostet nach 20%iger Preiserhöhung 120 €. Wie viel kostete sie ursprünglich? („Vermehrter Grundwert“)

Rechnung und Ergebnis (abgesehen davon, dass man es auch erraten kann):

Sei w der ursprüngliche Preis. Dann gilt $w \cdot (1+\frac{1}{5})$ = 120 €, also $w = 120 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{5}}$ € = 100 €.

8 Tara-Rechnung und Rabatt-Rechnung

Rein mathematisch gesehen ist die Rechnung zum „Rabatt auf Hundert“ eine Verallgemeinerung der Rechnung „Tara auf den Zentner“ insofern, als bei ersterer noch ein Zeitfaktor ins Spiel kommt. (Zur Rabatt-Rechnung, speziell auch zu Rabatten „in Hundert“ und „auf Hundert“, vgl. TROPFKE [1980, S. 550 ff.].)
Dazu ein Beispiel aus einem anderen rigischen Rechenbuch:
JOHANN WOLCK (1703) erläutert zu Beginn seines Kapitels *Von Rabat-Rechnungen.* [S. 262–266] das Anliegen dieser Rechnung: *DAß ist / wann Hand-Schrifften* [griech. *Chirographum*: Schuldbrief, Schuldverschreibung – d. V.] */ Schulden oder Wahren / vor verfallener Zeit mit Abzug bahr bezahlet werden.*
S. 262, Nr. 1:
Einer kauffet eine Hand-Schrifft von 2860 Hollandische fl. [Gulden] */ über 8 Monat verfällig mit Rebatto* [sic] */ à 6 pro Cento de Anno, wie viel ist der Rebatt und die bahre Bezahlung? Antw: 2750 fl cont.* [*contante* = bar – d. V.] *und 110 fl Rabat.*
Der Lösungsweg fehlt.
Der Autor wird mit dem Dreisatz gerechnet haben, etwa so:
12 Monate — 6 % Rabatt — 8 Monate: 4 % Rabatt
4 % + 100 % = 104 %
104 % — 2860 Holl. Gulden — 100 %: 2750 Holl. Gulden
Allgemein sei K der ursprüngliche Preis, B die „contante Bezahlung“, R der Rabatt, p der Prozentsatz pro Jahr und i der Zeitraum (in Jahren). Dann gelten die Beziehungen

$$R = K - B,\ R = \frac{K}{1+\frac{100}{pi}} \text{ und } B = \frac{K}{1+\frac{pi}{100}}.$$

Auch in den anderen Aufgaben dieses Kapitels wird ausschließlich der Rabatt „*auf* Hundert“ bestimmt.

9 Wenn Rosinen nicht so sind, wie sie sein sollen – eine weitere Tara-Rechnung

Neben den beiden bisher behandelten Methoden der Tara-Rechnung stellt derselbe Autor sogar noch eine „dritte“ vor, die man wieder in die beiden Rechnungen „Tara in …“ und „Tara auf …“ unterteilen könnte. Sein einschlägiges Kapitel hierzu [S. 220–228] hat die Überschrift *Von Thara Rechnungen in dreyerley Art / abgefasset*.
Wie RIES in seinem Dritten Rechenbuch (siehe Abschnitt 7) löst WOLCK – methodisch geschickt – einige Aufgaben nach beiden bekannten Tara-Rechnungen. Der Unterschied zu den traditionellen Tara-Aufgaben besteht nun aber darin, dass Verpackungen, handelsüblichen Lieferformen oder Transportbehältnisse rechnerisch keine Rolle mehr spielen und die Tara nun dazu dient, eine minderwertige Ware abzuqualifizieren.
Dazu ein Beispiel [S. 223, Nr. 14 und S. 225 f., Nr. 26]:

Einer kaufft 1 Faß Rosinen / wiegt 7 Schlb 18 Llb / weiln selbe nicht allerdings / wie sie seyn solten / befunden / wird auff jedes Slb $1\frac{1}{2}$ Llb gegeben / à Slb lauter $24\frac{3}{4}$ Rthl. / was ist die Summa?

Antw: 181 Rthl. $79\frac{23}{43}$ Gr. (S. 223, „Tara auf …“)

Antw: 180 Rthl. $77\frac{73}{160}$ Gr. (S. 226, „Tara in …“)

[1 S(ch)lb (Schiffspfund) = 20 Llb (Lispfund), 1 Rthl. (Reichstaler) = 90 Gr. (Groschen)]

Der Preisnachlass für die insgesamt minderwertige Ware wird dadurch erzielt, dass man mit einem proportionalen Anteil des Gewichts „geeignet operiert“ (nach der Methode „Tara in …“ oder „Tara auf …“). Hingegen ist für die „Regula fusti“ eine Quantifizierung von hochwertiger und minderwertiger Ware erforderlich.

Literatur

Deschauer, Stefan: Die Rigischen Rechenbücher. Spiegel einer lokalen mathematischen Tradition im Ostseeraum. In: Algorismus, Heft 73, Augsburg 2010

Peer 1527a: Ain new guet Rechenbüchlein … Gemacht zu Wienn in Ostereich durch Willibaldum Peer … (Fridrich Peypus) Nürnberg 1527

Peer 1527b: Deschauer, Stefan: Ain new guet Rechenbüchlein von Willibald Peer. In: Rechenbücher und mathematische Texte der frühen Neuzeit (Schriften des Adam-Ries-Bundes, Band 11), Annaberg-Buchholz 1999, S. 121-127

Ries 1522a: Rechenung auff der linihen vnd federn in zal / maß / vnd gewicht / auff allerley handierung gemacht vnnd zu samen gelesen durch Adam Riesen vō Staffelstein Rechenmeyster zu Erffurdt im 1522. Jar. (Mathes Maler, Erfurt 1522)

Ries 1522b: Deschauer, Stefan (Hrsg.): Das 2. Rechenbuch von Adam Ries. Nachdruck der Erstausgabe Erfurt 1522 – mit einer Kurzbiographie, bibliographischen Angaben und einer Übersicht über die Fachsprache. Algorismus (hrsg. v. M. Folkerts), Heft 5, München 1991

Ries 1522c: Deschauer, Stefan: Das macht nach Adam Riese. Die praktische Rechenkunst des berühmten Meisters Adam Ries. Köln 2012

Ries 1550: Rechenung nach der lenge / auff den Linihen vnd Feder. Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones / Practica genant / Mit grüntlichem vnterricht des visierens. Durch Adam Riesen. Im 1550. Jar. [Kolophon:] Gedruckt zu Leipzig durch Jacobum Berwalt

Tropfke, Johannes (hrsg. v. K. Vogel / K. Reich / H. Gericke): Geschichte der Elementarmathematik, 4. Auflage, Band 1: Arithmetik und Algebra. Berlin / New York 1980

Wedemeier, Fridericus: New Wolgegründetes Rigisches Rechenbuch … (Gerhard Schröder) Riga 1647

Wolck, Johann: Rigisches Rechenbuch … (Georg Matthias) Riga 1703 [1. Auflage Riga 1688]

Summenformeln für endliche arithmetische und geometrische Reihen in Handschriften und frühneuzeitlichen Rechenbüchern im Regensburger Raum

Alfred Holl

In diesem Beitrag werden nur einzelne Beispiele herausgegriffen, Vollständigkeit kann nicht angestrebt werden.

1. Endliche arithmetische Reihen[1]

Die Summenformel für eine endliche arithmetische Reihe ist wesentlich älter als die Version von Carl Friedrich Gauß (1777-1855), nach dem sie normalerweise benannt wird. Da die Formel relativ leicht abzuleiten ist (Summe aus erstem und letztem Glied = Summe aus zweitem und vorletztem = Summe aus drittem und drittletztem etc.), hat man sie im Laufe der Geschichte sicher mehrmals aufgestellt.[2] Der Regensburger Rechenmeister Johann Kandler (~1535-1600) nennt sie 1578 im ältesten gedruckten Regensburger Rechenbuch in verbaler Form: *Solche vnnd dergleichen Arithmetische Progressiones kurtz in ein summa zubringen/ addir die erst zal zur letzten/ was kombt/ multiplicir mit dem halben theil der stett/ erzeigt sich die summa*.[3]

Kandler bringt dazu eine Textaufgabe, mit Lösung, aber ohne Lösungsweg: die ‚Prüfeninger Eierwette'. Sie wird hier nicht nur wegen ihrer Originalität angeführt, sondern auch weil Kandlers Nachfolger Georg Wendler (1619-1688) dazu eine handschriftliche Lösung in überraschender Form präsentiert.[4]

Die Geschichte spielt auf einer Wiese zwischen Regensburg und Prüfening (Ort eines nicht nur mathematikhistorisch berühmten Benediktinerklosters). Dort sind in einer Linie 37 Eier hintereinander im konstanten Abstand von 12 Schuh ausgelegt. Davor steht – 12 Schuh vom ersten Ei entfernt – ein Sammelkorb. Zwei Leute wetten nun darum, welcher Weg der kürzere sei: nach Prüfening und zurück zu gehen oder die Eier stückweise aufzuheben und jedes für sich

---

[1] Vgl. für den ganzen Abschnitt Holl, Textaufgaben mit Bezug zu Regensburg, 2016, S. 353-356.

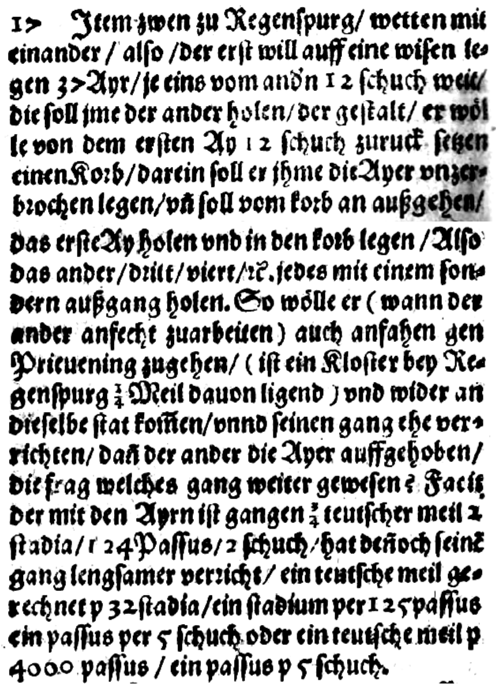
[2] So erscheint die Formel schon um 800 in der dem Alkuin zugeschriebenen lateinischen Aufgabensammlung *Propositiones ad acuendos iuvenes* (vgl. die Edition von Folkerts 1978, S. 70, Nr. 42, und die Erläuterungen auf S. 37f.). Im 15. Jh. tauchen arithmetische Reihen im *Algorismus Ratisbonensis* des Fridericus Amann im Kontext von Bewegungsaufgaben auf: *progressive vadere*, jeden Tag eine Meile mehr (Edition Vogel 1954, S. 43f., Nr. 53, 54, 55 (allgemeine verbalisierte Formel ohne spezielle Zahlenwerte), S 59f., Nr. 99).

[3] Kandler, *Arithmetica*, Ci'; ähnlich Wendler, *Arithmetica practica*, F1'.

[4] Wendler, *Kandlers «Arithmetica»*, 374v.

nacheinander in den Korb zu legen (Abb. 1). Der zweite Weg lässt sich durch Summation einer arithmetischen Folge (Progression), also durch eine endliche arithmetische Reihe, berechnen.[5]

Das zugrunde gelegte Längenmaß ist die deutsche Meile, definiert als die Länge von 4 Äquator-Bogenminuten, d.h. als der (360·15)-te Teil des äquatorialen Erdumfangs.



17 Item zwen zu Regenspurg/ wetten mit einander/ also/ der erst will auff eine wisen le= gen 37 Ayr/ je eins vom andern 12 schuch weit/ Die soll jme der ander holen/ der gestalt/ er woͤl le von dem ersten Ay 12 schuch zuruck setzen einen Korb/ darein soll er jhme die Ayer vnzer= brochen legen/ vnd soll vom korb an außgehen/ das erste Ay holen vnd in den korb legen/ Also das ander/ dritt/ viert/ etc. jedes mit einem son= dern außgang holen. So woͤlle er (wann der ander anfecht zu arbeiten) auch anfahen gen Prieuening zu gehen/ (ist ein Kloster bey Re= genspurg ¼ Meil dauon ligend) vnd wider an dieselbe stat kommen/ vnnd seinen gang ehe ver= richten/ dann der ander die Ayer auffgehoben/ die frag welches gang weiter gewesen? Facit der mit den Ayrn ist gangen ¾ teutscher meil 2 stadia/ 124 Passus/ 2 schuch/ hat dennoch seinen gang lengsamer verricht/ ein teutsche meil ge= rechnet per 32 stadia/ ein stadium per 125 passus/ ein passus per 5 schuch oder ein teutsche meil per 4000 passus/ ein passus per 5 schuch.

Abb. 1: ‚Prüfeninger Eierwette‘ (Kandler, *Arithmetica*, Xiii'-Xiv', Nr. 17)

Nach Prüfening und zurück ist es 2 · ¼ = ½ deutsche Meile, die der erste Wettstreiter zurücklegen muss.

Der zweite Wettstreiter (der ‚Eiersammler‘) muss 37 Gänge ausführen, genauso viele, wie er Eier holt. Sein erster Gang ist hin und zurück 2·12 Schuh = 24 Schuh lang. Jeder Gang zu einem Ei und zurück ist 2·12 Schuh länger als der zum vorhergehenden. Der 37. Gang zum letzten Ei und zurück ist 37·2·12 Schuh = 888 Schuh lang.

[5] Vgl. Tropfke 1980, Abschnitt 4.2.4.1 „Arithmetische Reihen“, S. 625-628; dieser spezielle Aufgabentyp wird dort nicht genannt. Vgl. Wendler, *Neudörffers «Grosse Arithmetic»*, 130v (fast gleiche Zahlenwerte, spielt in Regensburg ohne Bezug zu Prüfening) und 136r (silberne Knöpfe statt Eier, ohne Bezug zu Regensburg).

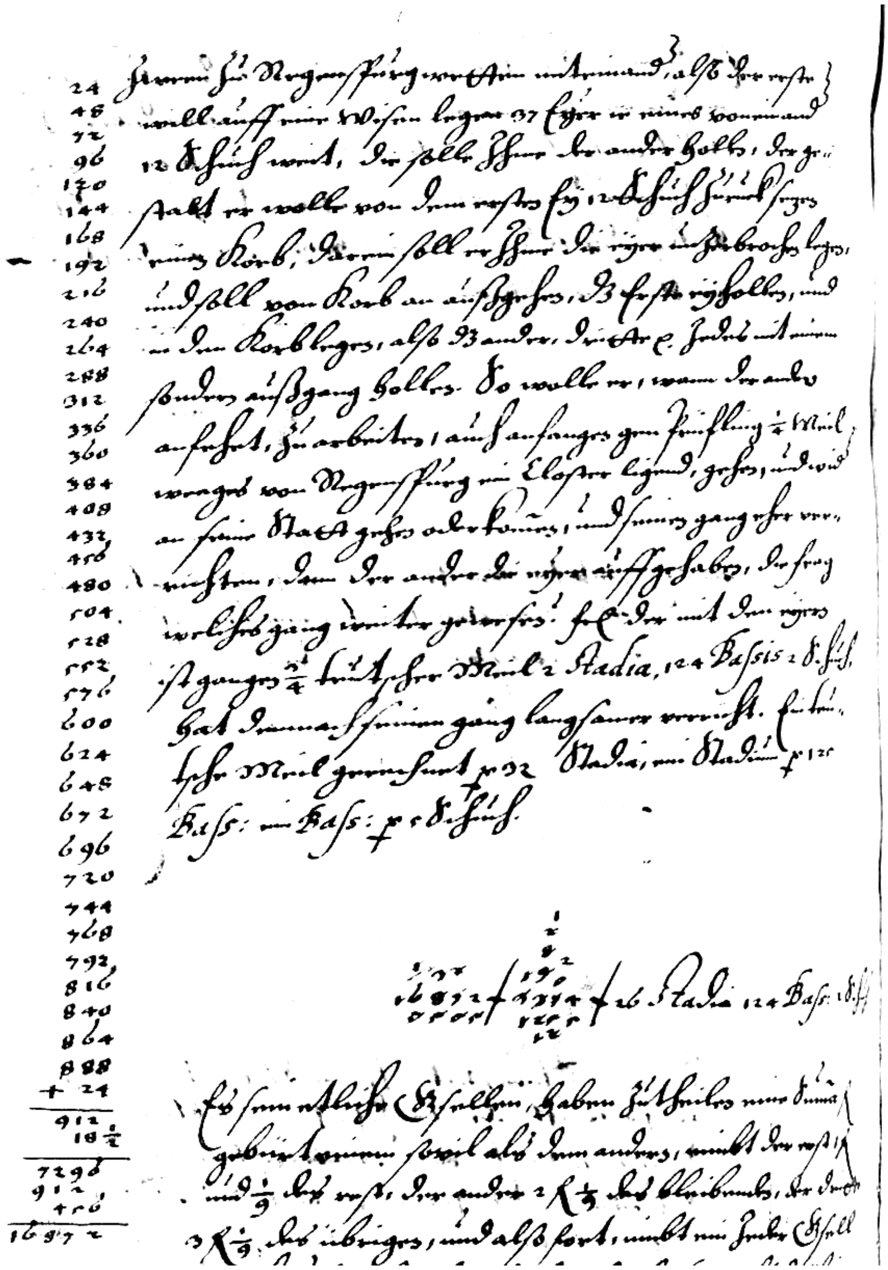


Abb. 2: Berechnung einer endlichen arithmetischen Reihe
(siehe Erläuterung im Text)
(Wendler, *Kandlers «Arithmetica»,* 374v)

Die Gänge zu den Eiern bilden eine arithmetische Folge mit erstem Element 24 und 37. Element 888. Ihre 37 Elemente schreibt Wendler in seiner Bearbeitung zunächst ohne ersichtlichen Grund explizit untereinander auf und addiert sie dann doch nach der Summenformel (Abb. 2).
Damit ergibt sich für den zweiten Weg:
(24 + 888) · 37/2 Schuh = 16872 Schuh
= ¾ deutsche Meile 2 Stadien 124 Passus 2 Schuh.[6]

[6] 1 deutsche Meile = 32 Stadien = 4000 Passus = 20000 Schuh.

Der erste Wettstreiter hat mit einer halben deutschen Meile den kürzeren Weg zurückzulegen und gewinnt damit die Wette.

2. Endliche geometrische Reihen[7]

Der Zusammenhang zwischen Multiplikation und Exponentenaddition, der bei geometrischen Reihen, Exponentialschreibweise und logarithmischem Rechnen eine wichtige Rolle spielt, wird schon früh deutlich. Das älteste mir bekannte Beispiel aus dem deutschsprachigen Raum stellt eine – auch wegen ihrer altertümlichen Ziffernformen[8] bemerkenswerte – Tabelle zur Multiplikation von Sexagesimalbrüchen dar. Sie findet sich in lateinischen Übertragungen des 12. Jh.s von al-Khwarizmis Einführung ins Quadrivium (*Liber ysagogarum*), u.a. im Clm 13021 (1163-1168) aus dem Kloster Prüfening. Beispiel und Erläuterung dazu lauten:

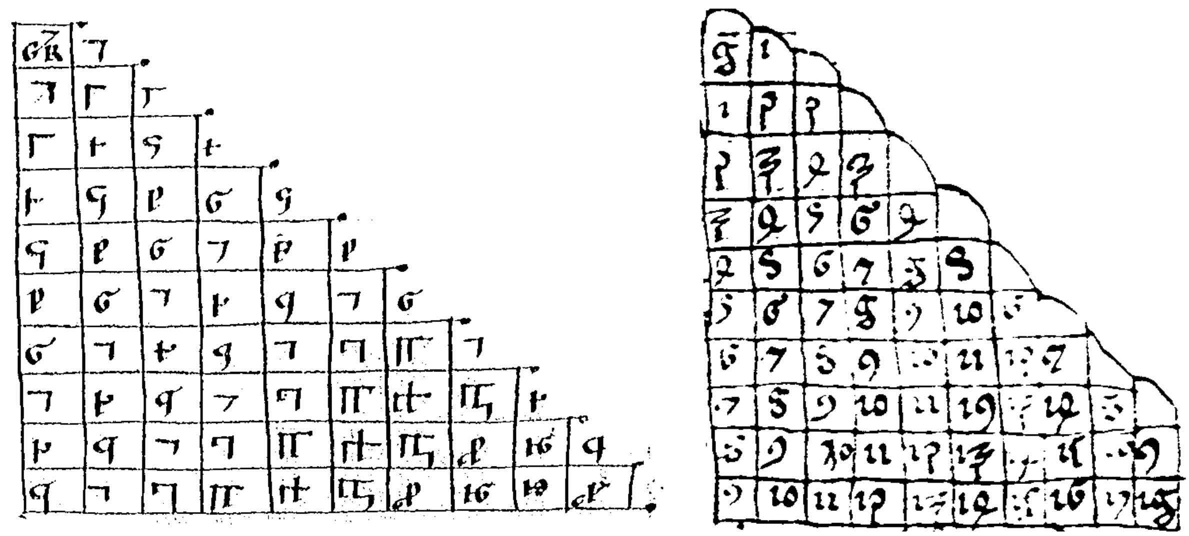


Abb. 3: Multiplikation von Sexagesimalbrüchen durch Addition der Exponenten, z.B. $(1/60)^2 \cdot (1/60)^3 = (1/60)^{2+3} = (1/60)^5$ (Clm 13021, 28ra; Cod. Paris. lat. 16208, 68ra)

12 minuta in 24 minuta ducta in 288 secunda decrescunt, et 14 minuta in 15 secunda 210 tertia fiunt […] *Harum minutiarum in se uel inter se collectarum summa sumit earundem minutiarum aggregatas denominationes.* ($12/60 \cdot 24/60 = 288/60^2$; $14/60 \cdot 15/60^2 = 210/60^3$. Das Ergebnis dieser mit sich selbst oder mit einander multiplizierten Brüche nimmt [als Benennung] ihre addierten Benennungen [„Exponenten“] an.)[9]

---

7 Vgl. für den ganzen Abschnitt Holl, Mathematisch äquivalente Textaufgaben, 2016, S. 359-363.

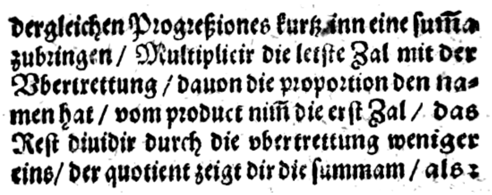
8 Zur Variationsbreite indisch-arabischer Ziffernformen im Mittelalter vgl. Burnett 2010. Die Schreibweise für *12* findet sich in Cappelli 1979, S. 422.

9 Zu Edition, Übersetzung und Parallelen vgl. Allard 1992, S. 39 und 237.

In seiner *Arithmetica* nennt Johann Kandler bereits 1578 die heute gebräuchliche Summenformel[10] sowie Ansätze zum Rechnen mit Exponenten. Die Formel für eine endliche geometrische Reihe, d.h. für die Partialsumme der Glieder einer geometrischen Folge (*Progreßion*), lautet:

$$aq^0 + \ldots + aq^n = a(q^{n+1} - 1)/(q - 1) = (aq^{n+1} - a)/(q - 1)$$

Kandler verwendet sie in der Form mit ausmultipliziertem *a* und beschreibt sie – ganz exakt – verbal, da es im 16. Jh. noch keine Exponentialdarstellung und kaum Buchstabenrechnen gibt; der Quotient der geometrischen Folge heißt bei ihm Übertretung (*Vbertrettung*) – ebenso wie die Differenz der arithmetischen (Abb. 4).



dergleichen Progreßiones kurtz inn eine summa zubringen/ Multiplicir die letste Zal mit der Vbertrettung/ dauon die proportion den na= men hat/ vom product nimm die erst Zal/ das Rest diuidir durch die vbertrettung weniger eins/ der quotient zeigt dir die summam […]

Abb. 4: Kandlers Berechnung der endlichen geometrischen Reihe
(Kandler, *Arithmetica*, Cii')

Besonders spannend ist Kandlers implizites Rechnen mit Exponenten. Er weist dem ersten Folgenglied ($aq^0 = a$) die *vbergeschribene Zahl* – in heutiger Sprache den Index – 0 zu, dem zweiten (aq^1) den Index 1 und damit allgemein dem *n*-ten Folgenglied den Index *n*. Der Index entspricht also genau dem Exponenten des jeweiligen Folgenglieds. Damit hat Kandler eine Möglichkeit, den Index des Produktes von Folgengliedern zu bestimmen. Multipliziert man nämlich das *n*-te und das *m*-te Folgenglied und dividiert durch das erste, so erhält man $aq^n \cdot aq^m / a = aq^{n+m}$, das *n*+*m*-te Folgenglied. Multiplikation entspricht Exponentenaddition. Das führt Kandler am Beispiel einer Dreierprogression aus, d.h. der Quotient der geometrischen Folge ist 3 (Abb. 5).[11]

Für einen sich mit Mathematik beschäftigenden Menschen mögen diese Regeln auf der Hand liegen.[12] Trotzdem ist es faszinierend, sie in dieser Präzision und Allgemeinheit in einem Druck des 16. Jh.s zu lesen. Für das Alltagsdenken hingegen ist das exponentielle Anwachsen einer endlichen geometrischen Reihe verblüffend und hat daher schon Mathematiker im Orient

---

[10] Kandler, *Arithmetica*, Cii'; ähnlich Wendler, *Arithmetica practica*, F3.

[11] Kandler, *Arithmetica*, Ciii'-iv.

[12] Geometrische Reihen erscheinen auch in den *Propositiones ad acuendos iuvenes*; die Lösung erfolgt durch Aufzählung der Zwischenergebnisse ohne allgemeine Formel (vgl. die Edition von Folkerts 1978, S. 51f., Nr. 13, S. 69, Nr. 41 und die Erläuterungen auf S. 37).

zu Geschichten inspiriert, bei denen die Vermutung, dass durch mehrfache Verdoppelung eines minimalen Betrags ein relativ geringer Preis entstünde, in die Irre führt.[13]

setz vber die erst progreßion Zal ein 0. vber die
ander 1. vber die drit 2. vber die viert 3/ etc. also:

0 1 2 3 4 5
1. 3. 9. 27. 81. 243.

WAñ du zwo zalen mit einander mul=
tiplicirst/ vñ mit der ersten kleinesten
diuidirest/ so zeygen dir die zwo zif=
fer vber den gemultiplicirten zalen/ so man sie
zusamen addirt/ die zal/ dahin der quotient
gehört/ als multiplicir 81. mit 243. kommet
19683. diuidirs mit der ersten zal/ so komen
19683. an die 9 zal der progreßion/ dann jhre
zwo vbergeschribene Zahlen/ als 4. vnnd 5.
machen 9.

Abb. 5: Kandlers ‚Exponentialrechnung':
setz vber die erst progreßion Zal ein 0. vber die ander 1. vber die drit 2. vber die viert 3/ etc. also:

0 1 2 3 4 5
1. 3. 9. 27. 81. 243.

WAnn du zwo zalen mit einander mul= tiplicirst/ vnd mit der ersten kleinesten diuidirest/ so zeygen dir die zwo zif= fer vber den gemultiplicirten zalen/ so man sie zusamen addirt/ die zal/ dahin der quotient geho͗rt/ als multiplicir 81 mit 243. kommet 19683. diuidirs mit der ersten zal/ so kommen 19683. an die 9 zal der progreßion/ dann jhre zwo vbergeschribene Zahlen/ als 4. vnnd 5. machen 9.

(Kandler, *Arithmetica*, Ciii'-iv)

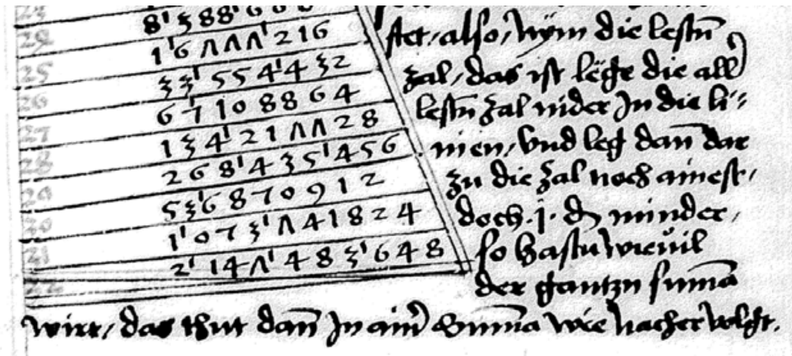
Die bekannte Version der ‚Schachbrettaufgabe' erscheint auch im *Algorismus Ratisbonensis*.[14] Ohne Angaben zur Berechnung, wie schon beim ersten

[13] Vgl. Tropfke 1980, Abschnitt 4.2.4.2.2 „Die Schachbrettaufgabe (Zweierprogression)", S. 630-633. So findet sich die Formel schon um 800 in der dem Alkuin zugeschriebenen lateinischen Aufgabensammlung *Propositiones ad acuendos iuvenes* (vgl. die Edition von Folkerts 1978, S. 70, Nr. 42, und die Erläuterungen auf S. 37f.).

[14] Amann, *Alg. Rat.*, Edition Vogel 1954, S. 141, Nr. 319; Curtze 1894, S. 398.

Beispiel, illustriert der *Algorismus Ratisbonensis* die Zweierprogression mit zwei weiteren. Eine Kuh wird nach ihren Klauen verkauft, sie hat an jedem Bein vier, also 16, die erste kostet einen Heller etc.[15] Ein Pferd wird nach seinen Hufnägeln verkauft, es hat an jedem Huf acht, also 32, der erste kostet wiederum einen Heller.[16]

Das Pferdebeispiel ist insofern interessant, als es mit den gleichen Zahlenwerten um 1480, etwa 30 Jahre nach dem *Algorismus Ratisbonensis* und etwa 100 vor Kandlers Rechenbuch, in der Handschrift des *Tegernseer Linienrechenbuchs* (Cgm 740) auftaucht und dort mit der speziellen Summenformel für die Zweierprogression beginnend mit 1 berechnet wird: $2^0 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1$ (Abb. 6). Allerdings ist die Formulierung, die den letzten Ausdruck wiedergibt, noch ziemlich ungelenk.[17]



[…] *also/ Nym die lesten*
zal/ das ist lëge die aller
lesten zal nider in die li=
nien/ vnd leg dann dar
zu die zal noch ainest/
doch .1. ϑ minder/
so hastu wieuil
der gantzn summa
wirt/ das thut dann In ainer Summa wie nacher volgt.

Abb. 6: Geometrische Zweierprogression im *Tegernseer Linienrechenbuch*:
In der Tabelle links steigend die Zweierpotenzen,
bei Nr. 25 etwa steht $16777216 = 2^{24}$.
(Cgm 740, 33v; Transkription nach Kaunzner 1970, S. 16)

Literaturverzeichnis

1. Quellen

Allard, André: Le calcul indien: Algorismus. Histoire des textes, éd. crit., trad. et comm. des plus anciennes versions latines du 12e siècle issues de l'arithmétique d'al-Khwârizmî. Paris 1992.

Amann, Fridericus: *Algorismus Ratisbonensis. Practica*. Edition in: Vogel, Kurt: Die *Practica* des *Algorismus Ratisbonensis*. Ein Rechenbuch des Benediktinerklosters St. Emmeram aus der Mitte des 15. Jahrhunderts nach den Handschriften der Münchner Staatsbibliothek und der Stiftsbibliothek St. Florian. München 1954 (= Schriftenreihe zur bayerischen Landesgeschichte 50).

---

15 Amann, *Alg. Rat.*, Edition Vogel 1954, S. 140, Nr. 317; Curtze 1894, S. 398.

16 Amann, *Alg. Rat.*, Edition Vogel 1954, S. 140, Nr. 318, und S. 125, Nr. 274; Curtze 1894, S. 398; ähnlich Wendler, *Neudörffers «Grosse Arithmetic»*, 193v (gereimt).

17 *Tegernseer Linienrechenbuch*, Cgm 740, 33v-34r; vgl. Kaunzner 1970, S. 15f.

Curtze, Maximilian: Mathematisch-Geschichtliches aus dem Clm 14908. In: Archiv der Mathematik und Physik 13 (1894), S. 388-406.

Kandler, Johann: *Arithmetica*. Regensburg: Johann Burger 1. Aufl. 1578 (ÖNB Wien 72.M.14); Lauingen: Jacob Winter 3. Aufl. 1605 (BSB München Math.p. 248).

Propositiones ad acuendos iuvenes. Edition in: Folkerts, Menso: Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen *Propositiones ad acuendos iuvenes*. Überlieferung, Inhalt, kritische Edition. Wien 1978 (= Österr. Akademie der Wiss., Math.-naturwiss. Klasse, Denkschriften, 116. Band, 6. Abhandlung).

Tegernseer Linienrechenbuch. Tegernsee ~1480 (Cgm 740). Edition in: Kaunzner, Wolfgang: Über die Handschrift Cgm 740 der Bayer. Staatsbibliothek München. München 1970 (= Veröffentlichungen des Forschungsinstituts des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik. Reihe C, Nr. 11).

Wendler, Georg: *Analysis vel resolutio*. [Nürnberg, Regensburg ~1645-~1663] (Cgm 3789).

Wendler, Georg: *Arithmetica practica*. Regensburg: Christoph Fischer 1667.

Wendler, Georg: *Kandlers «Arithmetica»* [Bearbeitung von Aufgaben]. *Corolarium Zugab und Bschluß Exempla Herrn Johann Kandlers gewesten Rechenmeisters in Regenspurg* und *Herrn Johann Kandlers Falsi durch Coss auffgelöst*. In: Wendler, Georg: *Analysis vel resolutio*, 368r-376r und 376v-382r.

Wendler, Georg: *Neudörffers «Grosse Arithmetic»* [Bearbeitung von Aufgaben]. *Herrn Anthonij Neudörffers Modist Schreib: und Rechenmeister Inspector Examinator Visitator der Teutschen Schreib: und Rechen Schulen in Nürnberg* […] *absonderlicher auffgaben und kunst Exempla seiner grossen Arithmetic, Dergleichen niemals gesehen auch in druck nicht kommen sind*. In: Wendler, Georg: *Analysis vel resolutio*, 120v-215r, Titel 1r.

2. Sekundärliteratur

Burnett, Charles: Indian numerals in the Mediterranian Basin in the twelfth century with special reference to the ‘Eastern forms’. In: Burnett, Charles: Numerals and Arithmetic in the Middle Ages. Farnham 2010 (= Variorum Collected Studies Series 967), V S. 237-288.

Cappelli, Adriano: Dizionario di abbreviature latine ed italiane. Mailand [6]1979.

Holl, Alfred: Mathematisch äquivalente Textaufgaben in unterschiedlichen Gewändern. In: Feistner, Edith; Holl, Alfred: Erzählen und Rechnen. Interdisziplinäre Blicke auf Regensburger Rechenbücher. Münster 2016, S. 357-374.

Holl, Alfred: Textaufgaben mit Bezug zu Regensburg. In: Feistner, Edith; Holl, Alfred: Erzählen und Rechnen. Interdisziplinäre Blicke auf Regensburger Rechenbücher. Münster 2016, S. 335-356.

Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1: Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich und Helmut Gericke. Berlin, New York 1980.

Eine indische approximative Berechnung der Quadratwurzel

Marko Razpet

Pädagogische Fakultät, Universität in Ljubljana

Einleitung

Wir geben zuerst drei Beispiele aus Geometrie, wo die Quadratwurzel vorkommt.

1. Die Umwandlung der Rechtecke in die flächengleichen Quadrate ist so alt wie die Geometrie selbst. Dabei trifft man an die Aufgabe Quadratwurzeln auszuziehen. Die Abbildung 1 zeigt, dass man nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck $AD'G$ die Seitenlänge $|BG|$ des Quadrates $BEFG$ durch Quadratwurzel berechnen kann: $|BG| = \sqrt{|AB| \cdot |BD'|}$.

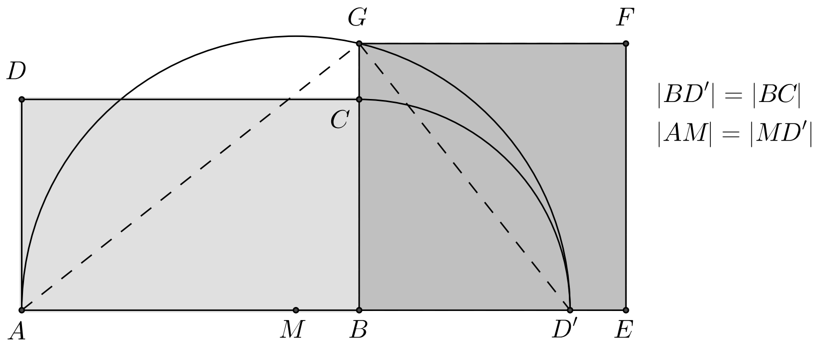


Abb. 1. Umwandlung eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat

2. Der Satz des Pythagoras braucht auch Quadratwurzel um eine von drei Seitenlänge des rechtwinkligen Dreiecks aus zwei bekannten Seitenlängen zu bestimmen, zum Beispiel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3. Ebenso hilft der Satz des Heron den Flächeninhalt eines Dreiecks aus den drei Seitenlängen durch eine Quadratwurzel zu berechnen.

Das babylonische Verfahren

Zuerst befassten sich Mathematiker mit Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen. Leider konnten sie nur Quadratwurzeln aus Quadratzahlen $(1, 4, 9, 16, \ldots)$ genau berechnen. Den Quadratwurzeln aus anderen natürlichen Zahlen mussten sie sich mit Brüchen annähern. Die weltbekannte Keilschrifttafel YBC 7289 zeigt uns im Sexagesimalsystem die Quadratwurzel aus 2 in der Gestalt $1\ 24'\ 51''\ 10'''$. Dieser

Wert beträgt 1,41421296 (unterstrichene Ziffern sind gültig) in unserem Dezimalsystem. Genauer ist $\sqrt{2} = 1,414213562$. Woher kommt dann diese ganz gute Näherung auf YBC 7289?

1. Es sei Q eine natürliche Zahl. Wenn $Q = \xi^2$ eine Quadratzahl ist, wo ξ ebenso eine natürliche Zahl ist, dann gilt $\sqrt{Q} = \xi$. Sonst nehmen wir eine natürliche oder rationale Zahl ξ_0 für die Startnäherung der $\sqrt{Q}$. Dabei ist Q/ξ_0 nicht gleich ξ_0, sonst hätten wir $\xi_0^2 = Q$, was nicht der Fall ist. Das heißt $\xi_0 \lessgtr \sqrt{Q}$ und damit $Q/\xi_0 \gtrless \sqrt{Q}$. Darum ist es günstig für die weitere Näherung ξ_1 der $\sqrt{Q}$ das arithmetische Mittel

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left(\xi_0 + \frac{Q}{\xi_0}\right)$$

zu nehmen. Die bekannte Relation zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel ergibt $\xi_1 > \sqrt{Q}$. Durch Iterationsverfahren mit der Formel $\xi_{n+1} = (\xi_n + Q/\xi_n)/2$ bekommen wir eine abnehmende Zahlenfolge $\xi_1, \xi_2, \ldots$, die gegen $\sqrt{Q}$ gut konvergiert.

Für $Q = 2$ und $\xi_0 = 3/2$ sind $\xi_1 = 17/12, \xi_2 = 577/408$. Davon haben wir die bekannte Näherung

$$\sqrt{2} \approx \frac{577}{408} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17},$$

im Sexagesimalsystem: $\sqrt{2} \approx 1\ 24'\ 51''\ (10 + 10/17)'''$. Der Unterschied mit dem Wert auf der Tafel YBC 7289 ist gering.

2. Die Näherungsformel der Quadratwurzel aus einer Nicht-Quadratzahl Q kann man auch mit anderen Methoden entwickeln. Es sei $Q = \xi_0^2 + q$, wo $\xi_0 = \lfloor\sqrt{Q}\rfloor$ ist, und q eine natürliche Zahl. Die Zahl ξ_0 ist die Startnäherung von $\sqrt{Q}$, die Zahl q kann $1, 2, \ldots, 2\xi_0$ sein. Aber q kann nicht $2\xi_0 + 1$ sein, denn Q ist keine Quadratzahl. Demnach gilt die Gleichung

$$\sqrt{Q} = \sqrt{\xi_0^2 + q} = \xi_0 + a_0$$

mit einer positiven Zahl $a_0 < 1$. Davon folgt die Relation

$$Q = \xi_0^2 + q = (\xi_0 + a_0)^2 = \xi_0^2 + 2a_0\xi_0 + a_0^2 \approx \xi_0^2 + 2a_0\xi_0,$$

also

$$Q = \xi_0^2 + q \approx \xi_0^2 + 2a_0\xi_0.$$

Das bedeutet, dass $q = Q - \xi_0^2 \approx 2a_0\xi_0$ und damit $a_0 \approx (Q - \xi_0^2)/(2\xi_0)$. Am Ende haben wir wieder die bekannte rationale Näherung:

$$\sqrt{Q} = \sqrt{\xi_0^2 + q} \approx \xi_0 + \frac{q}{2\xi_0} = \xi_0 + \frac{Q - \xi_0^2}{2\xi_0} = \frac{1}{2}\left(\xi_0 + \frac{Q}{\xi_0}\right).$$

Dieses Resultat wurde bereits in Mesopotamien zur Zeit von Hammurapi I. (ca. 1750 v. Chr.) benutzt, Heron von Alexandria beschrieb es im 1. Jahrhundert. Die Inder, die ca. 300 v. Chr. $\sqrt{10}$ als eine Näherung für π nahmen, benutzten vielleicht dieselbe Methode, denn sie hatten einen sehr guten Wert für einen Kreisumfang.

3. Zum gleichen Resultat kommen wir auch mit der Hilfe der Reihenentwicklung mit zwei Gliedern:

$$\sqrt{\xi_0^2 + q} = \sqrt{\xi_0^2\left(1 + \frac{q}{\xi_0^2}\right)} = \xi_0\sqrt{1 + \frac{q}{\xi_0^2}} \approx \xi_0\left(1 + \frac{q}{2\xi_0^2}\right) = \xi_0 + \frac{q}{2\xi_0}.$$

4. Die Newton–Raphson Methode, benannt nach Isaac Newton und Joseph Raphson, auch die Tangentenmethode (Abbildung 2), führt uns zum gleichen Resultat.

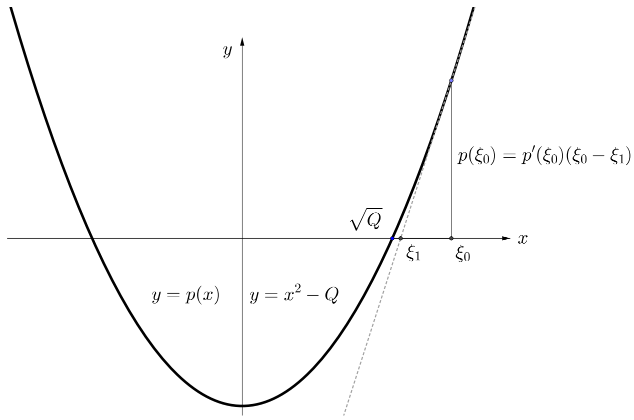


Abb. 2. Zur Tangentenmethode

Wenn ξ_0 die Näherung der positiven Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^2 - Q$ ist, so ist die weitere Näherung

$$\xi_1 = \xi_0 - \frac{p(\xi_0)}{p'(\xi_0)}.$$

Die Vereinfachung ergibt wieder

$$\xi_1 = \xi_0 - \frac{\xi_0^2 - Q}{2\xi_0} = \frac{1}{2}\left(\xi_0 + \frac{Q}{\xi_0}\right).$$

Führen wir eine Funktion f, die bei gegebenem $Q > 0$ für $x > 0$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{Q}{x}\right)$$

definiert ist, ein. Ihr Graph ist konvex, sie besitzt eine schräge Asymptote $y = x/2$, eine senkrechte Asymptote $x = 0$ und ein lokales Minimum im Punkt $(\sqrt{Q}, \sqrt{Q})$. Die Funktion f ist stetig, unendlich oft differenzierbar, auf $(0, \sqrt{Q})$ streng monoton fallend und auf $(\sqrt{Q}, \infty)$ streng monoton steigend (Abbildung 3, links).

Es ist klar, dass $\xi_1 = f(\xi_0)$ eine Näherung für $\sqrt{Q}$ ist. Wenn wir ξ_1 anstatt ξ_0 nehmen, bekommen wir die weitere Näherung $\xi_2 = f(\xi_1)$ usw. Mit dieser Methode finden wir eine unendliche Folge $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ der Näherungen für $\sqrt{Q}$, wobei die Glieder mit rekursiver Relation $\xi_{n+1} = f(\xi_n)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ bestimmt sind. Die Folge $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ist mit $\sqrt{Q}$ nach unten beschränkt und fallend. Für $n = 1, 2, \ldots$ gilt nämlich $\xi_{n+1} < \xi_n$, was aus

$$\xi_n - \xi_{n+1} = \xi_n - f(\xi_n) = \xi_n - \frac{1}{2}\left(\xi_n + \frac{Q}{\xi_n}\right) = \frac{\xi_n^2 - Q}{2\xi_n} > 0$$

folgt. Die Folge $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, die wir mit Iterationsverfahren bekamen, ist nach einem Grundsatz konvergent. Ihr Grenzwert ξ genügt der Gleichung $\xi = f(\xi)$, was bedeutet, dass ξ ein Fixpunkt der Funktion f ist. Eine einfache Rechnung gibt uns $\xi = \sqrt{Q}$. Das heißt: wenn wir das obige Iterationsverfahren rechtzeitig unterbrechen, bekommen wir $\sqrt{Q}$ mit gewünschter Genauigkeit.

Aus der Gleichung

$$\xi_{n+1}^2 - Q = \left(\frac{\xi_n^2 - Q}{2\xi_n}\right)^2$$

finden wir die Abschätzung

$$|\xi_{n+1}^2 - Q| = \frac{|\xi_n^2 - Q|^2}{4\xi_n^2} < \frac{|\xi_n^2 - Q|^2}{4Q},$$

woher kommen wir zum Schluss, dass im Glied ξ_{n+1} zweimal so viel genaue Dezimalen für $\sqrt{Q}$ gibt wie in ξ_n, wenn wir Glieder $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ in Dezimalform schreiben. Bemerken wir, dass das beschriebene Iterationsverfahren für die Berechnung der $\sqrt{Q}$ für jede positive Zahl Q gut funktioniert, und zwar unabhängig von der Auswahl der Startnäherung $\xi_0 > 0$. Die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ist je besser desto näher ist ξ_0 bei $\sqrt{Q}$. Jedenfalls ist das uralte babylonische Verfahren des Wurzelziehens sehr schnell und darum ist es nicht zu wundern, dass es in der Praxis noch kurz vor der Erscheinung der Taschenrechner und Computer viel benutzt wurde. Dafür genügte irgendein Rechner, der Grundoperationen beherrschte.

Kann man das Iterationsverfahren, das uns zu guten Näherungen der $\sqrt{Q}$ führt, beschleunigen? Betrachten wir zum Beispiel die Teilfolgen $\xi_0, \xi_2, \xi_4, \ldots$ und $\xi_0, \xi_3, \xi_6, \ldots$, die ebenso zu $\sqrt{Q}$ konvergieren wie die Folge $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$. Im ersten Beispiel sind die Glieder

$$\xi_2 = f(\xi_1) = f(f(\xi_0)), \xi_4 = f(\xi_3) = f(f(\xi_2)), \ldots$$

und im zweiten Beispiel

$$\xi_3 = f(\xi_2) = f(f(\xi_1)) = f(f(f(\xi_0))), \xi_6 = f(\xi_5) = f(f(\xi_4)) = f(f(f(\xi_3))), \ldots.$$

Wenn wir die Kompositionen $g = f \circ f$ und $h = g \circ f = f \circ f \circ f$ und Folgen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ und $y_0, y_1, y_2, \ldots$ durch Relationen $x_n = \xi_{2n}$ und $y_n = \xi_{3n}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ einführen, dann können wir schreiben:

$$x_{n+1} = g(x_n),\ y_{n+1} = h(x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Die Zahl $\xi = \sqrt{Q}$ ist offenbar Fixpunkt der Funktionen g und h, die neuen Folgen, die aus der Startnäherung ξ_0 herauskommen, konvergieren zu ξ. Die Ausdrücke für f und g können wir berechnen:

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{x^4 + 6Qx^2 + Q^2}{4x(x^2 + Q)},$$

$$h(x) = g(f(x)) = \frac{x^8 + 28Qx^6 + 70Q^2x^4 + 28Q^3x^2 + Q^4}{8x(x^2 + Q)(x^4 + 6Qx^2 + Q^2)}.$$

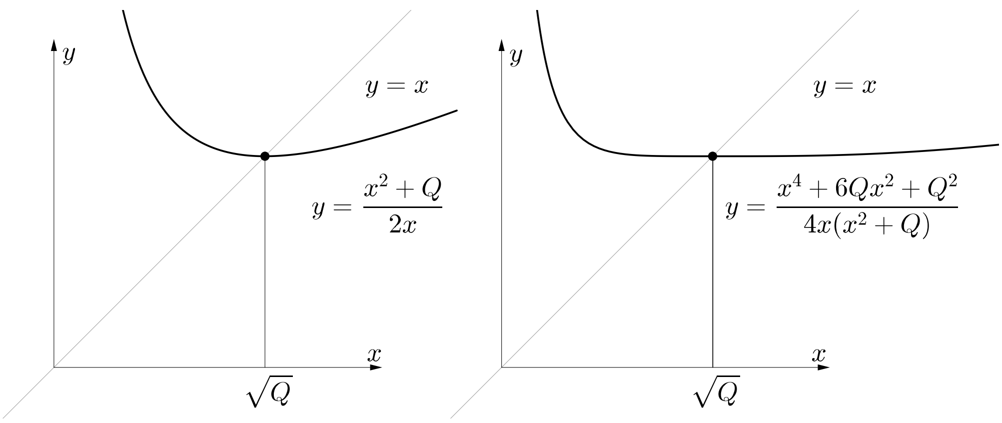


Abb. 3. Graphen der Funktionen f und g

Wie ist es mit der Konvergenzgeschwindigkeit? Im ersten Beispiel haben wir die Abschätzung

$$|x_{n+1}^2 - Q| = |\xi_{2n+2}^2 - Q| < \frac{|\xi_{2n+1}^2 - Q|^2}{4Q} < \frac{|\xi_{2n}^2 - Q|^4}{(4Q)^3} = \frac{|x_n^2 - Q|^4}{(4Q)^3},$$

also

$$|x_{n+1}^2 - Q| < \frac{|x_n^2 - Q|^4}{(4Q)^3}.$$

Das heißt, auf jedem Schritt wird die Anzahl der richtigen Dezimalen vervierfacht. Ebenso haben wir die Abschätzung

$$|y_{n+1}^2 - Q| < \frac{|y_n^2 - Q|^8}{(4Q)^{10}}.$$

Das heißt, auf jedem Schritt wird die Anzahl der richtigen Dezimalen verachtfacht. Die schnelle Konvergenz der Folgen zu $\sqrt{Q}$ können wir aus den Graphen der Funktionen erklären. In der Umgebung des Fixpunktes hat die Folge der Funktionen $f, f \circ f, f \circ f \circ f, \ldots$ immer kleinere Ableitungen, ihre Graphen sind konvex und werden flächer und flächer. Abbildung 3 stellt Graphen der Funkcionen f und $f \circ f$ dar.

Wir könnten dieses Verfahren noch mit längeren Kompositionen fortsetzen, aber sie werden kompliziert. Polynome in Zählern und Nennern bei allen diesen rationalen Funktionen haben immer höhere Grade. Jede Funktion besitzt ein Minimum in $(\sqrt{Q}, \sqrt{Q})$, die schrägen Asymptoten ihrer Graphen sind Geraden $y = x/2, y = x/4, y = x/8, \ldots$ und ihre gemeine senkrechte Asymptote ist $x = 0$. Zum Beispiel nehmen wir $Q = 10$ und $\xi_0 = x_0 = 3$. Auf 50 Dezimalen genau ist

$$\sqrt{10} = 3,16227766016837933199889354443271853371955513932521.$$

Mit Hilfe der Funktion f bekommen wir (genaue Dezimalen sind unterstrichen):

$$\xi_1 = \underline{3,16}666666666666666666666666666666666666666666666666,$$

$$\xi_2 = \underline{3,1622}8070175438596491228070175438596491228070175438,$$

$$\xi_3 = \underline{3,1622776601}6984208093048154366498771199844270871353.$$

Hier wurden genaue Brüche als rationale Näherungen für $\sqrt{10}$ berechnet, und dann zur Dezimalform umgewandelt. Die Zähler und Nenner wurden dabei größer und größer.

Mit Hilfe der Funktion g geht alles noch schneller. Die Zähler und Nenner der Brüche wurden dabei riesiger und riesiger. Die ersten Näherungen in Dezimalform schauen so aus:

$$x_2 = \underline{3,162277660168379331998893}88273862756431936955366020,$$

$$x_3 = \underline{3,16227766016837933199889354443271853371955513932521}.$$

Die Funktion h gibt uns y_2 für $\sqrt{10}$ auf 99 Dezimalen genau.

Das Bakhshali-Verfahren

Schreiben wir:

$$f(x) = x - \frac{x^2 - Q}{2x}.$$

So haben wir

$$\xi_1 = f(\xi_0) = x_0 - \frac{x_0^2 - Q}{2x_0} = x_0 + a_0,\ a_0 = \frac{Q - x_0^2}{2x_0}$$

und

$$\xi_2 = f(\xi_1) = \xi_1 - \frac{\xi_1^2 - Q}{2\xi_1}.$$

Mit ein wenig mehr Rechnen bekommen wir

$$\xi_2 = x_0 - \frac{x_0^2 - Q}{2x_0} - \frac{\left(x_0 - \frac{x_0^2 - Q}{2x_0}\right)^2 - Q}{2\left(x_0 - \frac{x_0^2 - Q}{2x_0}\right)},$$

$$\xi_2 = x_0 + \frac{Q - x_0^2}{2x_0} - \frac{\left(\frac{Q - x_0^2}{2x_0}\right)^2}{2\left(x_0 + \frac{Q - x_0^2}{2x_0}\right)}.$$

Die Relationen $x_0 = \xi_0$, $x_1 = \xi_2$ und $a_0 = (Q - x_0^2)/(2x_0)$ geben uns die Form:

$$x_1 = \xi_2 = x_0 + a_0 - \frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)}.$$

Die Summe der ersten zwei Glieder auf der rechten Seite ist uns bekannt. Sie ist die babylonische Näherung ξ_1 für $\sqrt{Q}$. Aber das obige Resultat ist keine Neuigkeit. Wir finden es in dem so genannten *Bakhshali-Manuskript*, das in Ruinen eines steinernen Zaunes im Dorf Bakhshali 80 km nordöstlich von Peshawar in heutigem Pakistan im Jahr 1881 ein Bauer gefunden hat. Das Manuskript ist nicht vollständig, es besteht in jetziger Form aus 70 bruchstückhaften Blättern aus Birkenrinde, es ist in Sanskrit in einer alten indischen Schrift geschrieben. Wahrscheinlich geht es um eine Kopie aus späteren Jahrhunderten des in der Zeit zwischen 100 und 400 n. Chr. enstandenden Textes. Das Manuskript befindet sich jetzt in der Bodleian Library in Oxford. Es enthält meistens gelöste Aufgaben aus Algebra und Arithmetik, mit Dezimalsystem und Brüchen. Es braucht seltene Symbole, meistens sind Probleme, ihre Lösungen und Bemerkungen in Worten beschrieben.

Für uns ist der folgende Text besonders wichtig:

Im Falle einer Nicht-Quadratzahl subtrahiere die nächste Quadratzahl; dividiere den Rest mit verdoppelter Quadratwurzel aus diesem. Eine Halbe des Quadrates dividiere mit der Summe der Quadratwurzel und des Bruches und subtrahiere sie von ihr. Du bekommst die Näherung der Quadratwurzel der Nicht-Quadratzahl. Die Nicht-Quadratzahl ist um das Quadrat der abgezogenen Zahl weniger als das Quadrat der Näherung.

Im ersten Teil des obigen Textes steckt eigentlich die früher beschriebene Nährerung x_1 für $\sqrt{Q}$, der letzte Satz bedeutet aber

$$Q = x_1^2 - \left(\frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)}\right)^2 .$$

Diese Relation wird aud diese Weise hergeleitet:

$$x_1^2 - \left(\frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)}\right)^2 =$$

$$= \left(x_1 + \frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)}\right) \cdot \left(x_1 - \frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)}\right) =$$

$$= (x_0 + a_0) \cdot \left(x_0 + a_0 - \frac{a_0^2}{x_0 + a_0}\right) = (x_0 + a_0)^2 - a_0^2 =$$

$$= x_0^2 + 2x_0 a_0 = x_0^2 + 2x_0 \cdot \frac{Q - x_0^2}{2x_0} = Q.$$

Leider ist es nicht bekannt, wie die alten Inder zu diesen Resultaten kamen. Sie schrieben keine Beweise auf. Es ist auch nicht bekannt, kannten sie das Iterationsverfahren.

Das Bakhshali-Iterationsverfahren würde auf die folgende Weise gehen: Wir wählen die Startnäherung x_0 für $\sqrt{Q}$ aus. Danach berechnen wir $a_0 = (Q -$

$x_0^2)/(2x_0)$ und für $n = 0, 1, 2, \ldots$ gehen wir mit der Rekursion

$$x_{n+1} = x_n + a_n - \frac{a_n^2}{2(x_n + a_n)}$$

weiter, wobei

$$a_n = \frac{Q - x_n^2}{2x_n}.$$

Nach allem, was wir bisher bewiesen haben, gilt es

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{Q}, \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Vielleicht war einem indischen Mathematiker die babylonische Näherung für $\sqrt{Q}$ bekannt. Er addierte noch ein kleines Glied μ dazu und rechnete es aus. Heutzutage würden wir schreiben:

$$\sqrt{Q} = \sqrt{x_0^2 + q} = x_0 + \frac{q}{2x_0} + \mu.$$

Das Quadrieren ergibt uns

$$x_0^2 + q = \left(x_0 + \frac{q}{2x_0}\right)^2 + 2\mu\left(x_0 + \frac{q}{2x_0}\right) + \mu^2.$$

Für μ ist das eine quadratische Gleichung, derer Auflösung wieder ein Wurzelziehen verlangt. Um dem auszuweichen, vernachlässigen wir μ^2 im Vergleich mit den übrigen Gliedern:

$$x_0^2 + q \approx \left(x_0 + \frac{q}{2x_0}\right)^2 + 2\mu\left(x_0 + \frac{q}{2x_0}\right),$$

$$x_0^2 + q \approx x_0^2 + q + \left(\frac{q}{2x_0}\right)^2 + 2\mu\left(x_0 + \frac{q}{2x_0}\right).$$

Wir sehen sofort, dass es günstig ist

$$\mu = -\frac{\left(\frac{q}{2x_0}\right)^2}{2\left(x_0 + \frac{q}{2x_0}\right)}$$

zu setzen; so haben wir

$$\sqrt{x_0^2 + q} \approx x_0 + \frac{q}{2x_0} - \frac{\left(\frac{q}{2x_0}\right)^2}{2\left(x_0 + \frac{q}{2x_0}\right)},$$

was mit $a_0 = q/(2x_0)$ die Bakhshali-Näherung ergibt:

$$\sqrt{x_0^2 + q} \approx x_0 + a_0 - \frac{a_0^2}{2(x_0 + a_0)} = x_1.$$

Es ist auch ganz möglich, dass jemand zweimal nacheinander die babylonische Methode benutzte und kam nach Vereinfachungen zum beschriebenen Bakhshali-Verfahren.

Schlussworte

Die Leute denken oft, dass in altem Indien nur das Dezimalsystem und zehn Zeichen für die Ziffern und sonst nichts anderes entdeckt wurde. Tatsächlich bestand das mathematische Wissen seit der Antike in allen Richtungen zwischen Europa, dem Mittleren Osten, Indien und China. Berechnungen mit Dezimalzahlen und das Wurzelziehen sind eigentlich sehr alt. Sie sind in alten indischen Manuskripten, die viele konkrete Aufgaben mit linearen und quadratischen Gleichungen enthalten. Indische Mathematiker haben viele Sachen sogar früher als Europäer entdeckt, zum Beispiel, die Sinus– und Kosinusfunktion, eine recht gute Näherungsformel für die Sinusfunktion, Potenzreihe für die Arkustangensfunktion und Lösungen einiger Pellschen Gleichungen. Als Beispiel beschrieben wir das Verfahren des Wurzelziehens näher, was vielleicht nicht allen gut bekannt ist. Dabei haben wir auch ein paar Namenträger in der mathematischen Nomenklatur kennengelernt.

Literatur

[1] D. H. Bailey, J. M. Borwein, *Ancient Indian Square Roots: An Exercise in Forensic Paleo-Mathematics.*

`http://www.davidhbailey.com/dhbpapers/india-sqrt-encyc.pdf` (18. 11. 2015)

[2] M. N. Channabasappa, *On the Square Root Formula in the Bakhshali Manuscript*, Indian J. History Sci. **11** (1976), N. 2, S. 112–124.

[3] A. F. R. Hoernle, *On the Bakhshali Manuscript*, Bibliolife, Charleston; faksimilierte Ausgabe der Erstausgabe bei Alfred Hölder in Wien 1887.

[4] S. A. Shirali, *The Bakhshali Square Root Formula*, Resonance (2012), September, S. 884–894.

Philipp Melanchthon und seine Verdienste um die Mathematik

ULRICH REICH, BRETTEN

Der Humanist und Reformator Philipp Melanchthon (1497–1560) war zwar kein Mathematiker, hat sich aber stark und nachhaltig für eine Förderung der Mathematik insbesondere an den Universitäten und Lateinschulen eingesetzt. Nach dem Wiener Vorbild ließ er auch an der Universität Wittenberg zwei Lehrstühle für die Mathematik einrichten und – was ein Glücksfall war – mit den beiden hervorragenden Männern Rheticus und Reinhold besetzen. Melanchthon schrieb viele Vorworte zu wissenschaftlichen Werken, insbesondere auch zu Büchern über die Arithmetik, Algebra, Geometrie, Astronomie und Geographie. Außerdem vermittelte er viele Mathematiker an Lateinschulen und an die ersten Gymnasien, auf deren Gründung Melanchthon einen entscheidenden Einfluss gehabt hatte.

Begibt man sich auf eine mathematische Spurensuche bei Melanchthon, stößt man rasch auf ein Druckwerk mit dem Titel *Mathematicarum Disciplinarum tum etiam Astrologiae Encomia per Philip. Melanch.*, zuerst gedruckt 1537 in Straßburg bei Kraft Müller (Crato Mylius) (1503–1547) und als zweite Auflage 1540 in Lyon von Sebastian Gryphius (1492–1556). Man muss aber die Hoffnung auf ein mathematisches Werk begraben, denn es sind nur drei Briefe abgedruckt, die als Vorreden veröffentlicht wurden.

1. Reden und Vorworte

„Melanchthons Eintreten für die Förderung der mathematischen Wissenschaften zur Steigerung ihrer Akzeptanz im öffentlichen Bewusstsein wird vor allem durch das Faktum dokumentiert, dass er eine Vielzahl von bekannten zeitgenössischen mathematischen [lateinischen] Lehrbüchern mit einem Vorwort oder mit einer Einleitung versehen hat.“[1] Nun werden Melanchthons bedeutendste Zeugnisse zur Arithmetik und zur Geometrie vorgestellt. Darin haben neben pythagoräischem Überlieferungsgut platonische bzw. neuplatonische Gedanken und religiöse Überlegungen sehr breit in Melanchthons Erörterungen und Auffassungen über die Mathematik und ihren Bildungswert Platz gefunden.[2]

[1] Aubel 2008, S. 174.
[2] Siehe auch Aubel 2008, S. 180.

1.1. Arithmetik

1.1.1. *Praefatio in arithmeticen* 1536

Die ausführlichste Abhandlung über die Arithmetik ist *Praefatio in arithmeticen.*[3] Diese Universitätsrede hat Georg Joachim Rheticus (1514–1574) – das kann mit großer Wahrscheinlichkeit angenommen werden – als seine Antrittsrede 1536 an der Universität Wittenberg gehalten. Die Frage nach dem Verfasser dieser Rede ist nicht zweifelsfrei geklärt. Lange Zeit wurde Melanchthon als Autor angesehen, bis Stefan Deschauer 1999 in der Estnischen Akademischen Bibliothek in Talinn die Handschrift einer bislang unbekannten Rheticus-Vorlesung wieder aufgefunden hat. Danach kann nicht mehr die Meinung aufrechterhalten bleiben, dass Melanchthon als alleiniger Verfasser dieser Oratio in Frage kommt. Vielmehr ist wohl davon auszugehen, dass Melanchthon und Rheticus im Gespräch den Inhalt der Rede abgestimmt haben und Rheticus sie schließlich verfasst hat.[4] Von Rheticus stammt der mathematische Inhalt, und auf Melanchthon gehen insbesondere die Passagen zurück, in denen Bezug auf die griechischen Philosophen Platon und Aristoteles sowie auf die römischen Dichter Horaz, Lukrez und Vergil genommen wird.

1.1.2. Vorwort zu Georg von Peuerbachs *Elementa Arithmetices* 1534

Neben der oben erwähnten Universitätsrede verfasste Philipp Melanchthon mehrere Vorworte zu Arithmetikbüchern.

Hier ist in zeitlicher Reihenfolge zunächst ein Brief zu nennen an Justus Jonas den Jüngeren (1525–1567), den Sohn des gleichnamigen Reformators Justus Jonas (1493–1555). Dieser Brief ist als Vorwort von 2 ½ Seiten erstmalig 1534 abgedruckt in dem Buch mit dem Titel *Elementa Arithmetices,*[5] das sich inhaltlich auf Georg von Peuerbach (1423–1462) bezieht. Der Brief ist ebenfalls gedruckt in mehreren späteren Auflagen, so Wittenberg 1536, Venedig 1539 und Frankfurt / Main 1544.

1.1.3. Vorwort 1533 zu Michael Stifels *Arithmetica Integra*

Eines der bedeutendsten mathematischen Werke des 16. Jahrhunderts stellt das Buch *Arithmetica Integra* dar. Michael Stifel (1486/7–1567) hat es verfasst, und es wurde 1544 von Johannes Petrejus (1497–1550) in Nürnberg gedruckt. Das Buch behandelt als eines der frühesten Werke neben der Arithmetik auch die

---

[3] CR 11, 284 - 292. Deutsche Übersetzung von Weng 2012, S. 80–90.
[4] Nähere Angaben siehe Deschauer 2003, V–IX.
[5] Nähere Angaben zu Justus Jonas dem Jüngeren und dem Briefinhalt (MBW 2, 1756 und CR 3, Sp. 93 f.) siehe Karin Reich 2012, S. 41–42.

Algebra. Stifel führt erstmalig in der Mathematik den Begriff Exponent ein und legt damit die Basis für die Entwicklung der Logarithmen. Das Buch beginnt mit einem Vorwort, das Philipp Melanchthon verfasst hat.[6]

Philippus Melanthon grüßt den Leser.

Nicht einmal, wenn ich hundert Zungen und hundert Münder hätte, könnte ich aufzählen, bei wie vielen Dingen die Zahlen von Nutzen sind. Und so sind augenfällig und offensichtlich die Vorzüge, die nicht nur die Zahlen bringen, sondern auch die Kunst, die lange und komplizierte Rechnungen mit bewundernswerter Gewandtheit ausführt und erklärt, so dass ich meine, dass es niemand gibt, und sei er noch so dumm, welcher nicht die Zahlen bewundert und die Rechenkunst selbst für vortrefflich hält. Wenn ich eine lange Lobrede über diese Vorzüge anstimmte, würde ich mich ebenso benehmen, wie wenn ich, wie die Griechen sagen, mitten am hellen Tag ein Licht anzünden würde. Es ist aber für einen wissbegierigen Menschen zu erkennen, welchen Nutzen die Arithmetik insbesondere denjenigen bringt, die in den übrigen Bereichen der Philosophie eine wahrhafte und vollkommene Lehre entwickeln wollen. Wenn man nämlich allgemein sagt, der Anfang sei schon die Hälfte des Ganzen, so wird dies am meisten in Teilen der Philosophie gewahr. Es gibt nur einen Zugang zu dem vortrefflichsten Teil der Philosophie, den himmlischen Bewegungen, dies ist die Kenntnis der Arithmetik. Und diese besitzt eine so große Kraft, dass auch jemand, der nur mittelmäßig in Arithmetik geübt ist, leicht das übrige durchschaut und begreift. So besitzt derjenige, der die Arithmetik mittelmäßig verstanden hat, mehr als die Hälfte dieser ganzen Philosophie. Diesen so großen Nutzen mögen diejenigen, die mit edlem Wesen versehen sind, aufmerksam betrachten, die Sinne zur Liebe dieser Kunst entfachen und sich vorbereiten, die übrigen Künste zu begreifen. Weiterhin wenden wir vielfach in der Naturlehre und auch viel in der Geschichte diese sehr gründliche Lehre von den Zahlen an. Schließlich ist es für einen Wissenschaftler schändlich, diese Kunst zu vernachlässigen, die Quelle und Beginn der gesamten vernünftigen Überlegung ist, die erstmalig eins und viele unterscheidet und diese ordnet, eine Erkenntnis, durch die sich der Mensch eigentlich vom Vieh unterscheidet. Deshalb müssen tüchtige und gelehrte Männer sich mit größter Macht anstrengen, diese Lehre in die Schulen zurückzurufen, damit nach Vertreibung jener aufgeweichten und geschwätzigen Sophistik, die die Dialektik und die Physik unterdrückt hatte, nunmehr wieder die Beschäftigung der alten und reinen Philosophie gedeihe.

[6] Von diesem Vorwort gibt es zwei deutsche Übersetzungen:
Bauer, Eitel, Schöttle, Schwär, Thiel und Vöhringer 1989, S. 87.
Knobloch und Schönberger 2007, S. 9–10.

Diese sorgfältige Beschäftigung wird dem Staat auf vielerlei Weise von Nutzen sein. Denn Männer, die an einfache und reine Lehre gewöhnt sind, urteilen richtiger, suchen in den Wissenschaften das Sichere und halten nicht verbissen am Unsicheren fest. Es ist auch dies ein großer Vorzug, dass diese Gewohnheit selber zur Wahrheitsliebe führt, die gute Männer hervorbringt und sie gewissenhaft auch im weiteren Leben an Mäßigung gewöhnt. Was ist aber für die Menschheit zuträglicher, als dass diejenigen, welche wegen ihrer Gelehrsamkeit dem Staat an die Spitze gestellt werden, wahrheitsliebend und maßvoll sind? So werden sich die Schulen gut und vortrefflich um das Menschengeschlecht verdient machen, wenn sie der Jugend die wahre, nützliche, reine Lehre vorsetzen und sie zugleich zur Wahrheitsliebe, zur Sorgfalt und zur Mäßigung im Leben unterweisen. Deshalb ist auch die Anstrengung vieler zu loben, die in dieser unserer Zeit alte Schriften herausgeben und anschaulich jene Wissenschaften darstellen, die die Quellen der Philosophie enthalten, oder neue drucken lassen. In diesem Sinne glaube ich, Michael Stifels Buch über die Arithmetik der studentischen Jugend empfehlen zu müssen, weil es zur Übung nützlich sein wird, dann aber auch sehr viel Licht bei der Untersuchung der Sachverhalte in der Lehre bringen wird. Lebe wohl!
Wittenberg, am ersten Januar 1543.

1.1.4. Vorwort 1544 zu *Isagoge arithmetices* von Joachim Ammonius

Ein weiteres Mal hat Melanchthon ein Vorwort geschrieben für ein kleines, nur 32 Seiten umfassendes lateinisches Rechenbuch mit dem Titel *Isagoge arithmetices collecta et edita per Iochimvm Ammonivm Nissensem*. Verfasser des 1544 in Wittenberg bei Georg Rhau (1488–1548) gedruckten Rechenbuches ist Joachim Ammonius bzw. Ammon, ein Rechenmeister aus Neiße, der wenig bekannt ist. Das Rechenbuch ist ausführlich in [Karin Reich 2014] beschrieben. Darin befindet sich eine komplette Übersetzung des Melanchthon-Vorwortes von Eberhard Knobloch.

Es ist zu vermuten, dass Melanchthon nur deshalb ein Vorwort zu diesem Büchlein geschrieben hat, weil es 1544 an der Universität Wittenberg ausnahmsweise bei dem „Arithmeticus“ Johannes Fischer Verwendung fand. [7] Die Standardlektüre war allerdings das Arithmetikbuch *Arithmeticae practicae methodus facilis* von Rainer Gemma Frisius (1508–1555), das im Zeitraum von 1542 bis 1621 mindestens 26 Auflagen in Wittenberg erlebt hatte.[8]

[7] Siehe Schöneburg 2007, S. 40 und vi.
[8] Ulrich Reich 2005.

1.2. Geometrie

1.2.1. Vorwort 1536 zu *Elementale Geometricum* von Johannes Vögelin

Nun wenden wir uns den Vorworten zu, die Melanchthon über die Geometrie geschrieben hat.

Der aus Heilbronn gebürtige Johannes Vögelin (um 1490–1549)[9] ließ im Jahr 1528, dem Jahr seiner Berufung zum Professor an der Universität Wien als Nachfolger von Georg Tannstetter (1482–1535), sein erstes gedrucktes Werk herstellen, das Buch mit dem Titel *ELEMENTALE GEOMETRICVM, EX EVclidis Geometria*. Es war ein preiswertes Exzerpt aus den sechs ersten Büchern der Elemente Euklids und war an Lateinschulen und den Artisten-fakultäten der Universitäten im christlichen Abendland weit verbreitet. Das Buch erlebte viele Auflagen, die in weit verstreuten Städten Europas (beispielsweise in Wien, Venedig, Paris und Kopenhagen) gedruckt worden sind. Besondere Beachtung fand die Auflage 1536 mit dem Titel *Elementa Geometriae ex Euclide singulari prudentia collecta à Ioanne Vægelin professore Mathematico in schola Viennensi.* Diese Ausgabe, gedruckt bei Joseph Klug (um 1490–1552) und teilweise zusammengebunden mit Georg Peurbachs *Arithmeticae Practica*, zeichnete sich aus durch das ausführliche Vorwort Melanchthons (13 Seiten), der seinen Beitrag dem 1536 in Wittenberg öffentlich disputierenden Johannes Wilhelm Reiffenstein (um 1520–1575) gewidmet hatte.[10]

1.2.2. Vorwort zur Euklid-Ausgabe 1537 Basel

Das Vorwort zu Vögelins Euklid-Buch findet Verwendung ein Jahr später im August 1537 in der Basler lateinischen Euklidausgabe mit dem Titel *Euclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum Lib. XV. […].* Dieses bedeutende Buch druckte Johannes Herwagen (1497–1558) erstmalig 1537 und in einer weiteren Auflagen 1546. Sein Sohn Johannes Herwagen d. J. (um 1530–1564) stellte 1558 einen weiteren Nachdruck her.

Melanchthons Vorwort wendet sich an die heranwachsenden Studierenden: „PHILIPPVS MELANC[H]THON STVDIOSIS ADOLESCENTIBVS. S. D.“ Es ist in dieser Anrede verändert, gegenüber Vögelins Büchlein („libellus“) an das umfangreiche Werk angepasst. („liber“), und in einer Anrede im Text steht „vos adolescentes adhortor“ anstelle „mi Ioannes et tui similes adhortor“. Auf

[9] Ulrich Reich 2014.
[10] Ulrich Reich, Gerhard Weng 2016.

die oben geschriebene persönliche Ansprache an Reiffenstein verzichtet Melanchthon komplett.

Zum Abschluss der Reden und Vorworte zur Arithmetik und Algebra kann in Matthias Aubels Worten festgehalten werden: „Geometrie und Arithmetik bildeten für Melanchthon die grundlegenden Fächer zum Einstieg in das Studium der Philosophie und der Astronomie, der aus seiner Sicht höchsten mathematischen Kunst, die sich nach seiner Überzeugung die Kenntnis der Himmelskörper und die Untersuchung ihrer Bewegungen zur Aufgabe stellt und die Erkenntnis ermöglicht, in Gott den Baumeister der uns umgebenden Welt und der ihr zugrunde liegenden Ordnung zu erblicken.“[11]

Bibliographie

Ammon(ius), Joachim: *Isagoge arithmetices.*Wittenberg: Rhau 1544.

Aubel, Matthias: *Michael Stifel. Ein Mathematiker im Zeitalter des Humanismus und der Reformation.* In: Algorismus, Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften. Hg. Menso Folkerts. Heft 72. Augsburg: Dr. Erwin Rauner 2008.

Bauer, Siegfried, Eitel, Stephanie, Schöttle, Lothar, Schwär, Annette, Thiel, Michael und Vöhringer, David: 1989. *Michael Stifel: Arithmetica Integra.* In: Stadtarchiv Esslingen am Neckar (Hg.): Esslinger Studien, Zeitschrift 28. Sigmaringen: Jan Thorbecke 1989: S. 75–129.

Corpus Reformatorum (CR), Serie I: Philipp Melanchthon, Opera Quae Supersunt Omnia, herausgegeben von Karl Gottlieb Bretschneider und Heinrich Ernst Bindseil, Halle (Saale), Bände 1–28, 1834–1860.

Deschauer, Stefan: *Die Arithmetik-Vorlesung des Georg Joachim Rheticus Wittenberg 1536. Eine kommentierte Edition der Handschrift X-278 (8) der Estnischen Akademischen Bibliothek.* In: Algorismus, Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften. Hg. Menso Folkerts, Heft 42. Augsburg: Dr. Erwin Rauner 2003.

Melanchthon, Philipp: *Mathematicarum Disciplinarum tum etiam Astrologiae Encomia per Philip. Melanch.*, 1. Auflage Straßburg: Mylius 1537, 2. Auflage Lyon: Gryphius 1540.

Melanchthons Briefwechsel (MBW). Kritische und kommentierte Gesamtausgabe, im Auftrag der Heidelberger Akademie der Wissenschaften herausgegeben von Heinz Scheible, seit Band T 11 von Christine Mundhenk. Stuttgart-Bad Cannstatt: Verlag Frommann-Holzboog 1977 ff.

[11] Aubel 2008, S. 181.

von Peuerbach, Georg: *Elementa Arithmetices.* Wittenberg: Rhau 1534.

Reich, Karin: *Philipp Melanchthon im Dialog mit Astronomen und Mathematikern. Ausgewählte Beispiele.* In Franz Fuchs (Hg.): Pirckheimer Jahrbuch für Renaissance- und Humanismusforschung 26. *Mathematik und Naturwissenschaften in der Zeit von Philipp Melanchthon.* Wiesbaden: Harrassowitz 2012, S. 27–58.

Reich, Karin: *Joachim Ammonius' „Isagoge arithmetices" und Melanchthons Vorwort (1544).* In: Rainer Gebhardt (Hg.): *Arithmetik, Geometrie und Algebra in der frühen Neuzeit.* Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz 23. Annaberg-Buchholz: Adam-Ries-Bund 2014, S. 115–127.

Reich, Ulrich: *Über hundert Auflagen: Das Arithmetikbuch des Gemma Frisius (1508–1555).* In Gebhardt, Rainer (Hg.): *Arithmetische und algebraische Schriften der frühen Neuzeit*, Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg Buchholz 17, Annaberg-Buchholz: 2005, S. 323–339.

Reich, Ulrich: *Johannes Vögelin (um 1490–1549) aus Heilbronn, letzter Vertreter der 2. Wiener mathematischen Schule*, S. 88–96. Im Tagungsband Miesenbach 2014.

Reich, Ulrich, Weng, Gerhard: *Philipp Melanchthon „Vorrede zu Elementale Geometricum von Johannes Vögelin".* In Frank, Günter (Hg.): Fragmenta Melanchthoniana. Humanismus und Reformation, Band 6, Ubstadt-Weiher: verlag regionalkultur 2016, S. 68–76.

Schöneburg, Silvia: *Zur mathematischen Lehrtätigkeit an der Universität Wittenberg im 16. und frühen 17. Jahrhundert, dargestellt unter besonderer Berücksichtigung des Wittenberger Mathematikers Ambrosius Rhodius (1577 - 1633)*. Halle (Saale): Univ., Diss. 2007.

Stifel, Michael: *Arithmetica Integra*. Nürnberg: Petrejus 1543/44.

Stifel, Michael: *Vollständiger Lehrgang der Arithmetik.* Nachwort von Eberhard Knobloch, deutsche Übersetzung von Eberhard Knobloch und Otto Schönberger. Würzburg: Königshausen & Neumann 2007.

Vögelin, Johannes: *Elementa Geometriae Ex Evclide.* Wittenberg: Rhau 1536.

Weng, Gerhard: *Vorrede zur Arithmetik des Georg Joachim Rheticus oder Rede über den Nutzen der Arithmetik*. In: Beyer, Michael, Kohnle, Armin, Leppin, Volker (Hg.): *Melanchthon deutsch.*, Band 4. Leipzig: Evangelische Verlagsanstalt 2012, S. 80–90.

Prof. Ulrich Reich, Kurpfalzstraße 14, D-75015 Bretten, ulrichreich44@gmail.com

Die Clebsche Diagonalfläche in der Korrespondenz Darboux – Klein

Renate Tobies, Friedrich-Schiller-Universität Jena

Algebraische Geometer schmücken ihre homepage gern mit dem Modell der *Clebschen Diagonalfläche*. Diese spezielle Fläche dritten Grades mit 27 reellen Geraden (*Clebsch diagonal cubic surface*) wird heute auch als *Klein's icosahedral cubic surface* bezeichnet, eine nicht-singuläre kubische Fläche, die Clebsch 1871 definierte und Klein 1873 in sein Klassifikationssystem einordnete.[1] Es wird gezeigt, wie Alfred Clebsch (1833-1872) diese Fläche definierte, welche Modelle dafür gebaut wurden und wie das Thema in der Korrespondenz zwischen Gaston Darboux (1842-1917) und Felix Klein (1849-1925) enthalten ist. Es wird an ausgewählten Beispielen demonstriert, wie sich die *Clebsche Diagonalfläche* in weiterer Literatur spiegelt.

1 Definition von Clebsch

Clebsch definierte die nach ihm benannte Fläche in einem Aufsatz, mit dem er beabsichtigte, die Fruchtbarkeit algebraischer Methoden für das Auffinden rein geometrischer Resultate zu demonstrieren. In Abschnitt "Eine specielle Fläche 3ter Ordnung" (Clebsch 1871, S. 331f.) betrachtete er

$$\Sigma \xi^3 = 0 \qquad (3),$$

wobei ξ lineare Funktionen von *a, b, c, d, e* sind und als Pentaederkoordinaten im Raum interpretiert werden. Die Beziehungen zwischen den *x, y* (Punktepaare der Ebene) und den ξ wurden durch fünf Gleichungen bestimmt. Er definierte diese spezielle Fläche (3), die einem Pentaeder in bestimmter Weise geometrisch zugeordnet ist, zunächst geometrisch:

"*Die Fläche (3) enthält ganz die 15 Diagonalen der Vierseite, welche auf jeder Fläche des Pentaeders durch die vier andern Flächen ausgeschnitten werden*." (Ebd., S. 332)

Er erläuterte das algebraisch und führte aus:

"Denn für die Fläche des Pentaeders, etwa $\xi_5 = 0$, verwandelt sich die Identität in: $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0$;

daher stellen die Gleichungen

$$\xi_1 + \xi_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \xi_3 + \xi_4 = 0$$
$$\xi_1 + \xi_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \xi_2 + \xi_4 = 0$$
$$\xi_1 + \xi_4 = 0 \quad \text{oder} \quad \xi_2 + \xi_3 = 0$$

[1] Vgl. hierzu: https://en.wikipedia.org/wiki/Clebsch_surface

in Verbindung mit $\xi_5 = 0$ die Diagonalen des auf $\xi_5 = 0$ ausgeschnittenen Vierseits dar. Die Gleichung der Fläche aber verschwindet wirklich identisch, wenn zugleich $\xi_1 + \xi_2 = 0$, $\xi_3 + \xi_4 = 0$, $\xi_5 = 0$ gesetzt wird; daher gehört jede solche Diagonale der Fläche an. Aber diese ist dadurch auch völlig definirt, denn zwei eigentliche Flächen 3^{ter} Ordnung können nicht eine Curve 15^{ter} Ordnung gemein haben, ohne ganz zusammenzufallen. Vielmehr kann man das folgende als Satz aussprechen:

Die Diagonalen der Vierseite, welche von der Fläche eines Pentaeders je auf der fünften ausgeschnitten werden, liegen auf einer Fläche 3^{ter} Ordnung.

Ich werde diese specielle Fläche deswegen die Diagonalfläche des Pentaeders nennen. Man sieht, dass auf dieser Fläche sofort 15 der 27 Geraden bekannt sind. Und zwar liegen sie in folgender Weise:

Von den durch die 15 Diagonalen gegebenen Geraden der Diagonalfläche bilden fünfmal 3 ein Dreieck (die Pentaederflächen), zehnmal aber gehen drei durch einen Punkt (Pentaederecke) und liegen zugleich in einer Ebene." (Clebsch 1871, S. 332-333)

Clebsch erklärte die Besonderheit dieser Diagonalfläche, "dass es 10 Punkte giebt ["Eckardt-Punkte", s.u.], in denen *drei* Gerade der Fläche sich schneiden, was sonst nicht der Fall ist", zog Verbindungen zur Hesseschen Fläche sowie zu Punkten, die Jacob Steiner (1796-1863) Asymptotenpunkte genannt hatte. Clebsch betonte, dass hier Probleme zusammenfließen, die bei anderen Flächen als getrennte Probleme behandelt werden müssen. Er folgerte:

"Die Lösung der Gleichung 27^{ten} *Grades, von welcher die 27 Geraden der Fläche abhängen, erfordert bei der Diagonalfläche nur die Lösung der beim Pentaeder auftretenden Gleichung* 5^{ten} *Grades und die Bestimmung von fünften Wurzeln der Einheit."* (Ebd., S. 333)

Danach lieferte er den Beweis dafür, wie die 27 Geraden mit Hilfe einer Gleichung 5^{ten} Grades gefunden werden können (ebd., S. 334ff.).

Bereits der wissenschaftliche Nachruf auf Clebsch, verfasst von Brill, Gordan, Klein, Lüroth, A. Mayer, Max Noether und Von der Mühll (von Klein zusammengeführt), verweist auf die wichtigsten Vorgänger für Clebsch' diesbezügliche Erkenntnisse: das "englische Kleeblatt: Cayley, Sylvester, Salmon" (so genannt in: Klein 1926, S. 157) mit zwei Hauptergebnissen: erstens Arthur Cayley (1821-1895) und George Salmon (1819-1904), die zeigten, dass auf einer kubischen Fläche genau 27 Geraden liegen (nicht notwendig reell); zweitens Sylvester, auf den die Entdeckung des Pentaeders der Flächen dritter Ordnung und dessen Beziehungen zur Hesseschen Fläche zurückgehen. (Clebsch 1874, S. 16ff). In einer Fußnote hatte Klein beigefügt:

"*Für eine besondere Fläche dritter Ordnung, die von ihm sogenannte Diagonalfläche, hat Clebsch einen Zusammenhang zwischen den beiden Problemen nachgewiesen (Math. Ann. Bd. IV. Zur Theorie des Fünfseits etc.) und im Anschlusse hieran hat Klein eine Methode gefunden, bei den Flächen mit 27 reellen Geraden die Ebenen des Pentaeders näherungsweise zu construiren (Berichte der Erlanger phys. med. Societät. Juni 1873)." (Clebsch 1874, S. 17)

2 Modelle der Clebschen Diagonalfläche

Clebsch regte an, Modelle dieser kubischen Fläche zu bauen. Christian Wiener (1826-1896), neben Clebsch Professor für darstellende Geometrie an der TH Karlsruhe, fertigte ein Modell der F_3 mit 27 reellen Geraden aus Gips. Dieses weithin bekannt gewordene Modell lernte Klein 1868 bei einem Mathematiker-Treffen auf der Bergstraße kennen, das jedoch "noch ganz unsymmetrisch[e], durch empirische Konstruktion" hergestellt worden war (vgl. Klein 1922, S. 3).

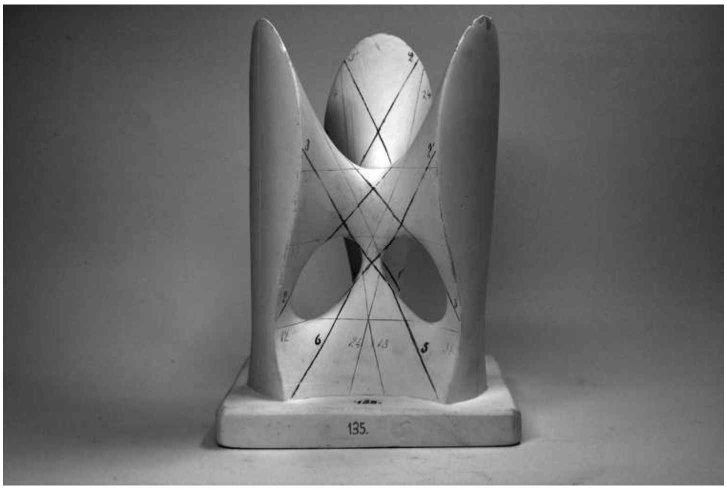


Abb. 1: Göttinger Sammlung Mathematischer Modelle, Modell 135, Konstrukteur A. Weiler

Nach Clebschs Angaben konstruierte Adolf Weiler (1851-1916)[2] ein (viel benutztes) Modell der *Clebschen Diagonalfläche* (Abb. 1), auf der Tradition seines Lehrers Wilhelm Fiedler (1832-1912) basierend, der bereits 1865 ein Stabmodell dafür gebaut hatte (vgl. Meyer 1928, S. 1504). Clebsch präsentierte Weilers Modell am 14. August 1872 in einer Sitzung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, wo auch Klein schon über die Tragweite seines verallgemeinerten Verfahrens sprach, das er anknüpfend an Weilers Modell gewonnen hatte. (Clebsch/Klein 1872; Klein 1873, S. 568; Klein 1922, S. 4)

Carl Friedrich Rodenberg (1851-1933) – dessen Dissertation "Das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung beim Auftreten von Singularitäten" (Göttingen: E. A. Huth, 1874) noch auf Clebschs Anregung fußte – schloss Weilers Modell in seine Serie von 26 Gips-Modellen ein (Meyer 1928, S. 1505), die der Verlag

[2] Weiler, am 27.12.1851 in Winterthur geboren, studierte Mathematik an der ETH Zürich. Nach dem Diplom 1871 erteilte er Privatunterricht, ging im Frühjahr 1872 nach Göttingen und beteiligte sich u.a. am gemeinsamen Seminar von Clebsch und Klein. Weiler sprach hier am 4. Juni 1872 über "Cremona. Ueber Linienflächen vierten Grades" (Klein 1872, S. 9-10) und promovierte 1873 in Erlangen mit einem Thema "Über die verschiedenen Gattungen der Komplexe 2. Grades", *Math. Ann.* 7 (1874), S. 145-207, an Kleins Dissertation anknüpfend. Nach einer Tätigkeit als Mathematik-Dozent wurde Weiler Assistent bei Fiedler an der Universität Zürich, habilitierte sich 1891 und erhielt 1899 eine a.o. Professor; er starb an einem Schlaganfall am 1. Mai 1916. Nekrolog mit Foto in: *Rektoratsrede und Jahresbericht*, April 1916 bis Ende März 1917, Zürich: ART. Institut Orell Füssli, S. 54-55.

Ludwig Brill seit 1882 vertrieb (seit 1899 Verlag Martin Schilling, Leipzig): Abb. 2. Auf Weilers Modell basierte auch die Skulptur, die am 9. Juni 1999 im Rahmen des Kolloquiums zu Kleins 150. Geburtstag an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf eingeweiht wurde. Dabei stützten sich die Konstrukteure auf die Beschreibung dieses Modells in (Clebsch/Klein 1872; Kaenders 1999).

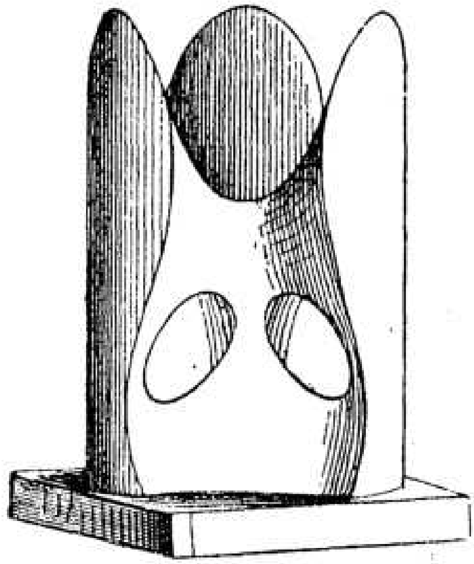


Abb. 2: Modell der Clebschen Diagonalfläche nach Weiler/Rodenberg, in (Schilling 1911, T. II, S. 116)

Gemäß Kleins Wunsch lieferte Weiler ebenfalls ein Modell für eine Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten (Abb. 3), die Klein seinem verallgemeinerten Modell zugrunde gelegt hatte (Klein 1873, S. 554).

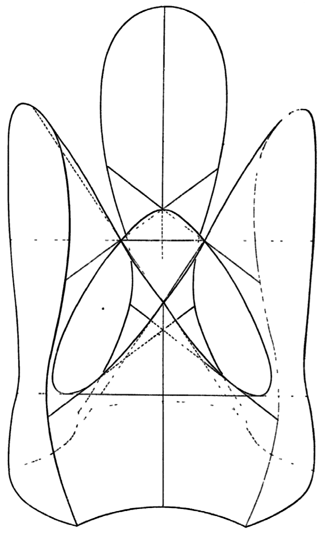


Abb. 3: Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten, Zeichnung von A. Weiler, publiziert in Klein (1873, Tafel I, nach S. 462); auch in Klein (1922, S. 15)

Klein zeigte, dass dieses Modell alle Flächen dritter Ordnung repräsentiert, wie daraus neue Flächen abgeleitet werden können und wie seine Klassifikation mit derjenigen von Ludwig Schläfli (1814-1895) korrespondierte. Klein leitete aus seinem Modell auch die Flächen mit 27 Geraden her, darunter die Clebsche Diagonalfläche. In "§ 10 Von der Diagonalfläche" seiner Arbeit von 1873 hob Klein den folgenden Satz hervor:

"[…] *die Diagonalfläche ist, abgesehen von den 10 auf ihr liegenden Pentaerdereckpunkten, überall hyperbolisch gekrümmt*." (Klein 1873, S. 569)

Die 10 Pentaedereckpunkte beschrieb Klein als "isolirte Punkte der parabolischen Curve der Fläche", in denen jede Tangente dreipunktig berührt. "Jeder durch denselben durchgelegte ebene Schnitt der Fläche hat dort eine Wendung. Drei unter den Tangenten sind vierpunktig berührend; im Falle der Flächen dritten Grades müssen sich also in einem solchen Punkte, wie es bei der Diagonalfläche in der That geschieht, drei Gerade der Fläche kreuzen." (Ebd.)

3 Briefwechsel Darboux – Klein

In den 1870er Jahren forschten weitere Geometer zu diesem Thema. In Frankreich verfasste Gaston Darboux (1842-1917) regelmäßig Übersichten über die neueren Arbeiten zur algebraischen Geometrie für das von ihm begründete *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*. Er referierte darin auch über die in Deutschland publizierten Arbeiten. Darboux war, wie Clebsch (und Klein), an der Verbindung von Geometrie und anderen mathematischen Gebieten interessiert. In seiner Arbeit "Sur une classe remarquable des courbes et surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires" (1873) führte Darboux pentasphärische Koordinaten ein, was in engem Kontext mit den damaligen Untersuchungen von Klein und Lie stand (vgl. Hilbert 1935, S. 367; Rowe 1989).

Darboux war wie Klein vom Wert mathematischer Modelle für geometrische Forschung und Lehre überzeugt und regte u.a. an, dass Joseph Caron (1849-1924) Direktor für graphische Arbeiten an der École Normale Supérieure in Paris 1872 wurde. Caron fertigte bis zum Jahre 1915 mehr als 80 mathematische Modelle aus Holz an; darunter auch ein Modell der F_3 mit 27 reellen Geraden (Abb. 4).[3] Darboux stellte in einem Brief an Klein vom 9. Mai 1880 eine darauf bezogene Frage, die auf den ersten Blick ungewöhnlich erscheint. Im Folgenden wird der gesamte Brief abgedruckt.[4] Die hier relevante Frage steht an Ende:

Verehrter Herr Klein

Meine Antwort hat etwas auf sich warten lassen, da ich wünschte, Ihnen die kleine Arbeit zu schicken, um die Sie mich gebeten hatten. Sie werden sie zusammen mit diesem Brief erhalten. Vielleicht wird sie Ihnen ein bisschen lang erscheinen; aber alles was die Prinzipien angeht, ist so schwierig zu verfassen, dass es nahezu unmöglich ist, sich kurz zu fassen.

---

[3] Vgl. Apéry 2013.

[4] Übersetzung aus dem Französischen von Tina Richter (2015); vgl. dort auch die Kommentare zu den anderen im Briefe angesprochenen Aspekten.

Während der Zeit, in der ich Ihnen nicht geschrieben habe, führten mich meine eigenen Studien dazu, Ihre schönen Arbeiten zu lesen oder vielmehr zu überfliegen. Ich habe genug davon gesehen und verstanden, um zu glauben, dass sie den größten Einfluss auf den Fortschritt dieses Wissenschaftszweiges ausüben werden. Ich verstehe, warum Sie mich nach Informationen zu den Arbeiten Liouvilles gefragt haben. Sie werden alles, was er gemacht hat, in seinem Journal und in den Berichten finden; in seinen Vorlesungen hat er nicht einmal all das vorgetragen, was er veröffentlicht hat.

Eine der Sachen, die mich bei der Lektüre Ihrer Arbeiten aufhalten, ist die Anwendung der Riemannschen Flächen. Ich gestehe, dass ich gehofft hatte, dass man sie endgültig aufgeben würde und ich habe sie nicht mit der Sorgfalt studiert, die sie verdienen. Einer der Punkte, die Sie entwickeln, die mich am glücklichsten machen, ist die Theorie elliptischer Funktionen, bei der der Ausdruck unter der Wurzel nicht auf Normalform gebracht wurde. Ich habe immer gedacht, dass wenn die Normalform sich in vielen Problemstellungen durchsetzt, es auch viele gibt, in denen sie unnützlich und sogar schädlich ist; es gibt eine große Menge an Theorien, die bei der Wiederaufnahme unter diesem Aspekt gewinnen würden, und insbesondere diejenige der Transformationsformeln. Herr Laguerre hat einige Artikel zu diesem Thema im Bulletin de la Sociéte Mathématique veröffentlicht; aber anscheinend hat er nicht alles zu diesem Thema gegeben, was er besessen hat.

Ich weiß nicht, ob Sie die denkwürdige Diskussion, die sich in der belgischen Akademie zu einer Frage geometrischer Orte ereignet hat, gelesen haben, in die Ihr Name verwickelt ist. Herr Folie spricht anscheinend der Entdeckung eines eher banalen Prinzips sehr viel Wichtigkeit zu, das nur für die daraus zu schließenden Folgerungen interessant erscheint.

Wir haben hier mit Herrn Caron einen sehr geschickten Mann, der auf meinen Rat hin eine kubische Fläche durch 27 reelle Geraden ausgearbeitet hat. Sein Entwurf ist wunderschön, alle Überprüfungen waren erfolgreich. Er hat seine Fläche aus Gips und Holz gefertigt. Nun hat die Fläche aber drei Löcher; ich glaube dass die Fläche, deren Fotografie ich sah, nur zwei Löcher hatte. Gibt es also mehrere Flächen mit 27 reellen Geraden?

Ihr ergebener

G. Darboux

Joseph Caron publizierte im Jahre 1880 eine Arbeit "Sur l'épure des 27 droites d'une surface du troisième degré dans le cas où ces droites sont réelles" im *Bulletin de la Société de Mathématiques de France* 8 (1880), S.73-74. Diese Arbeit enthält allerdings keinerlei Abbildungen und keine Verweise auf Literatur. Im Beitrag von Apéry (2013) ist das in Abb. 4 dargestellte Modell enthalten, welches Darboux vorgelegen haben wird.

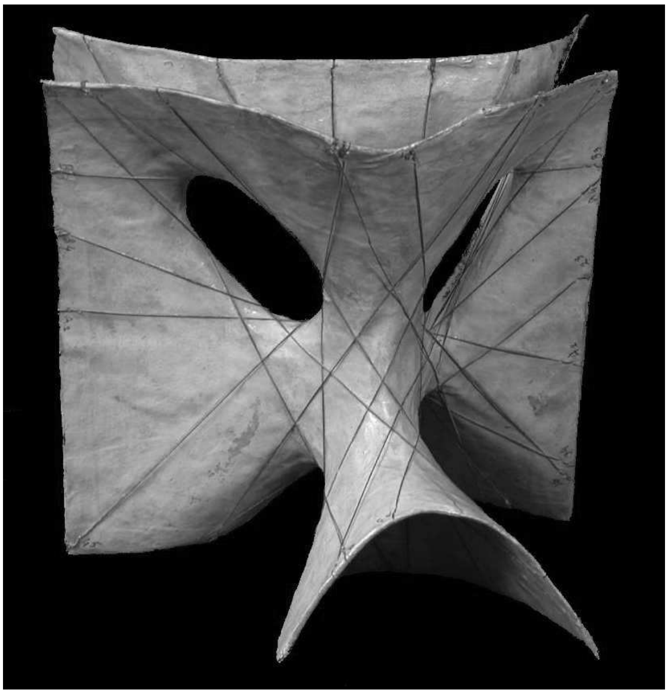


Abb.4: Joseph Caron, Modell einer F_3 mit 27 reellen Geraden
Quelle: Apéry 2013.

Obgleich Darboux die Arbeiten der deutschen Geometer verfolgt hatte, kannten er und Caron die in den *Mathematischen Annalen* publizierten Ergebnisse wohl doch nicht (hinreichend). Dies, obwohl Klein in seinen Briefen an Darboux wiederholt neuere Ergebnisse zum Feld angedeutet hatte. So hieß es z.B. in Kleins Brief vom 3. Februar 1872:

Ich habe ein Modell einer Flaeche dritter Ordnung mir ueberlegt, welches die 27 Geraden in uebersichtlicher Gruppirung zeigt. Ausgefuehrt habe ich dasselbe noch nicht, denke es aber gelegentlich zu thun. [BParis]

Im Brief vom 21. März 1872 an Darboux schrieb Klein erneut darüber und erklärte seine Klassifikation der Flächen dritter Ordnung, wie sie schließlich in die Arbeit (Klein 1873) einfloss:

Goettingen 21. Maerz 1872

Mon cher M. Darboux!

[…]

Durch die Curven dritter Ordnung komme ich auf Flaechen dritter Ordnung. Ich habe mich in der letzten Zeit etwas mit ihnen im Sinne anschaulich-geometrischer Forschung beschäftigt und bin dahin gekommen: die Flaechen dritter Ordnung nach ihrer gestaltlichen Mannigfaltigkeit zu uebersehen und zu classificiren. Ich modellire z.B. die verschiedenen Arten F_3 ohne Knotenpunct; es gibt, wenn wir Alles zu einer Art rechnen, was collinear ist, fuenf Arten. Dieselben sind bez. vierfach, dreifach, zweifach, einfach, nullfach "zusammenhängend" im Sinne des in der Functionentheorie ueblichen Terminus. Diese Eintheilung entspricht der nach der Realitaet den Geraden: es koennen alle 27, oder 15, oder 7, oder bez. 3 und 3 Gerade reell sein. (Schlaefli) […]. [BParis]

In selben Briefe setzte Klein mit anderen Themen fort und in nachfolgenden Briefen kam er nicht darauf zurück. Seine Berufung nach Erlangen zum Oktober 1872, die Ausarbeitung des "Erlanger Programms", der frühe plötzliche Tod von Clebsch und die Konzentration darauf, Clebsch' wissenschaftlichen Nachruf zu verfassen, hinderten Klein zunächst daran, das Thema abzuschließen. Er beendete die schriftliche Fassung der Ideen, die er schon im Sommer 1872 hatte, mit der erwähnten Arbeit "Flächen dritter Ordnung" am 6. Juni 1873. Darin befindet sich auch eine Fußnote, die sich auf die von Darboux angefragte Zahl der "Löcher" (Durchgänge) in einem Modell der Fläche mit 27 Geraden bezieht:

"Ein Modell einer Fläche mit 27 Gerade zeigt eine Reihe von 'Durchgängen' oder 'Oeffnungen'. Auf den Partieen der Fläche, welche an diese Durchgänge angrenzen, verlaufen eben die Geraden einer der 10 Doppelsechsen. Jede solche Doppelsechs giebt zu einem 'Durchgange' Veranlassung; ob derselbe aber in dem Modelle ohne Weiteres sichtlich ist, hängt einmal von der Beziehung zum Unendlich-Weiten ab, die man bei der Construction des Modell's zu Grunde gelegt hat, dann aber auch davon, welche Seite der im Endlichen gelegenen Partie der Fläche man als äussere, welche als innere betrachten will." (Klein 1873, S. 575; Klein 1922, S. 38)

Klein beantwortete Darboux' Frage am 29. Mai 1880 sehr konziliant, verwies auf seine eigene Arbeit, auf die Bestätigung seiner Ergebnisse und weitere Fortschritte mit analytischen Mitteln:

"In Beantwortung des Briefes vom 9. Mai bemerke ich vor Allem, dass es nur eine Art F_3 mit 27 Geraden gibt. Das Wiener'sche Modell hat auch 3 Oeffnungen, nur sieht man auf der Photographie deren bloss 2. Uebrigens finden Sie die ganze Theorie in Bd. 6 der math. Annalen von mir exponirt, dann in Bd. 8 von Zeuthen bestätigt, dann endlich in Bd. 14 von Rodenberg analytisch vervollständigt. Herr Caron, dessen Notiz ich im Bulletin de la Société Mathématique gesehen habe, kennt diese Publicationen vermuthlich nicht?" [BParis]

Der im Zitat erwähnte Beitrag Hironymus G. Zeuthens (1839-1920) "Sur les surfaces cubiques" erschien als erster Artikel in Band 8 der *Mathematischen Annalen*. Zeuthen nahm dort auf die Diagonalfläche in einer Fußnote Bezug: "La *surface diagonale* dont les propriétés conduisent M. Klein à celles des surfaces générales. Dans ce cas la courbe parabolique ne consiste qu'en points isolés." (Zeuthen 1875, S. 2) Beim Wiederabdruck von Klein (1873) in den *Gesammelten Abhandlungen* ist Zeuthens Arbeit im Anschluss an die eben zitierte Fußnote mit den "Durchgängen" beim Modell genannt (Klein 1922, S. 38).

Carl Rodenberg hatte sein (oben genanntes) Dissertationsthema für die *Mathematischen Annalen* (1879) erweitert und die Modifikationen untersucht, die das Pentaeder einer F_3 beim Auftreten von Singularitäten erleidet; auch umgekehrt betrachtete er die zu vorgegebenem Pentaeder zugehörigen F_3 (vgl. dazu Meyer 1928, S. 1505). Er ging von einem Satz Felix Kleins aus, der besagt: "[…] dass alle Flächen ohne Singularitäten und derselben Schläfli'schen Art durch continuirliche Aenderung der Constanten in einander übergeführt werden können, ohne dass hierbei Knoten auftreten." (Rodenberg 1879, S. 46; Klein

1873, S. 561ff.). Rodenberg führte die Fläche mit 27 reellen Geraden in andere über, indem er die Koeffizienten allmählich änderte, wobei die trennenden Gebiete mit einem Knoten zu passieren waren (vgl. Rodenberg 1879, S. 52). Als Ausgangspunkt diente ihm die "Diagonalfläche von Clebsch" (ebd., S. 52ff.). Sein Ansatz war eine analytische Bestätigung der Resultate, die Klein durch geometrische Kontinuitätsbetrachtungen erhalten hatte (vgl. Klein 1928, S. 224).

Rodenberg gehörte, wie Weiler, zu den Teilnehmern des Seminars "über verschiedene, hauptsächlich geometrische Gegenstände", das Klein und Clebsch im Sommersemester 1872 abhielten (Klein 1923, S. *4*). Hier sprach Rodenberg am 28. Mai über eine Arbeit von Friedrich Emil Eckardt, die zu der heute noch gebräuchlichen Bezeichnung Eckardt-Punkte (bzw. – ebenen) führte.[5] Am 2. Juli referierte Rodenberg in diesem Seminar Clebsch' Arbeit über die Knotung der Hesseschen Fläche, insbesondere der Oberfläche 3. Ordnung (vgl. Klein 1872, S. 7-8; 18-19). Am selben Tag trug Christoph Ernst über "Ludwig Schläflis Eintheilung von Flächen 3. Ord[nung] nach ihren Singularitäten und die Abbildung der allgemeinen F_3" vor (ebd. S. 16-18) vor. Das Seminar war insgesamt eine gute Basis für Kleins Erkenntnisse (Clebsch/Klein 1872), die in seine Klassifikationsarbeit von 1873 einflossen.

4 Clebsche Diagonalfläche in späteren Arbeiten

Der Begriff *Clebsche Diagonalfläche* ist zentral in der algebraischen Geometrie, findet sich auch aktuell in Lehrbüchern und auf web-Seiten algebraischer Geometer. Hier sei hervorgehoben, wie Klein wiederholt darüber schrieb und wie sich der Begriff in Enzyklopädien und historischen Arbeiten niederschlug.

Felix Kleins dritte Auflage von Band III der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (auf einer Vorlesung vom SS 1901 beruhend) behandelt den Gegenstand im Abschnitt "Von der Versinnlichung idealer Gebilde" (Klein 1928, bes. S. 220-230). Dabei wird auf Klein (1873) und auf eine Erweiterung verwiesen, die Klein mit seinem letzten Assistenten Hermann Vermeil (1889-1959) gewann und die als Zusatz I in Band 2 von Kleins Gesammelten Abhandlungen einfloss (Klein 1922, S. 11-62). Dabei handelte es sich um die Lö-

[5] F. E. Eckardt (Realschullehrer, Reichenbach, Vogtland): "Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere zur Theorie der Flächen 3[ten] Grades mit 4 Doppelpunkten und der Steiner'schen Flächen, sowie zur Lehre von den Raumcurven", *Math. Ann.* 5 (1872), S. 30-49. Eckardt zeigte, dass eine bestimmte auf einen Tetraeder bezogene "Ebene und die 5 zu den übrigen Tetraederkanten gehörigen entsprechend gebildeten Ebenen sich sämmtlich in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten den reciproken Werthen von den Coordinaten des gegebenen Punktes proportional sind" (Eckardt 1872, S. 31). Das Tetraeder war Startpunkt für die Konstruktion der Diagonalfläche. Hinsichtlich der Anleitung zu Weilers Modell hieß es 1872: "Das Pentaeder war so gewählt, dass zunächst ein steiles Tetraeder mit horizontaler Basis gebildet war, welches durch eine Drehung von 120° um eine Verticalachse in sich selbst überging; die fünfte Ebene war die Basis parallel gelegt, und gleichweit von der spitze wie von der Basis entfernt." (Zitiert nach Kaenders 1999, S. 19).

sung des bisher offenen Problems, "wann der Durchgang eines kanonischen Knotens d_2 mit reellem Mantel durch einen bipolaren Punkt mit reellen Hauptebenen eine neue Flächenart liefert. Man gelangt *nur* bei der F_3 mit drei d_2 und einem "Stiel" zu einer neuen Art, wenn sich eine *ungerade* Anzahl der d_2 durch die bipolare Form ändert." (Meyer 1928, S. 1506)

In der *Elementarmathematik* ist Weilers Modell der Clebschen Diagonalfläche abgebildet (Klein 1928, S. 228), und es wird nochmal erklärt: "Was hat diese Fläche Besonderes, und woher ihr Name?" (Klein 1928, S. 229) Das soll wiederholt zitiert werden: "*Der Name "Diagonalfläche" kommt davon, dass die Fläche in jeder der fünf Pentaederflächen diejenigen drei Diagonalen des Vierseits enthält, welches aus der Pentaederebene von den übrigen vier Pentaederebenen ausgeschnitten wird.* (Ebd, S. 229) Damit sind 3 x 5 = 15 Geraden der Fläche nachgewiesen. Der Herausgeber der dritten Auflage, Friedrich Seyfarth (1891-1960), fügte dazu eine Fußnote an, in der er die Existenz der übrigen zwölf Geraden analytisch erklärte (ebd.), wobei er sich auf Kleins Vorlesung über Flächentheorie und Raumkurven von 1907 stützte.

In Kleins *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* ist der Gegenstand in Kapitel 4 "Die Entwicklung der algebraischen Geometrie über Möbius, Plücker und Steiner hinaus", Unterabschnitt "Die parallellaufende Entwicklung der Algebra; die Invariantentheorie" eingeordnet (Klein 1926, S. 155-167). Klein fasste das Thema hier wie folgt zusammen:

"1849 entdecken Salmon und Cayley die Existenz von 27 *Geraden auf der F_3*, die eine wunderbare Kombination bilden: jede von ihnen wird nämlich von 10 anderen geschnitten (Cambridge and Dublin Journal Bd. 4). Auch diese können alle reell sein und werden äußerst anschaulich repräsentiert auf der von Clebsch 1872 gefundenen *Diagonalfläche*. Auf das Sylvestersche Pentaeder bezogen, lautet ihre sehr einfache Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + u^3 = 0$.

Übrigens hängt die F_3 und ihre Geradenkonstellation nun auf eigentümliche Weise zusammen mit den 28 Doppeltangenten einer ebenen C_4, wie Geiser (Math. Ann. Bd. 1, 1868) zuerst bemerkte. Die Beziehung ist folgende: wenn man die F_3 von einem ihrer Punkte O aus auf eine beliebige Ebene projiziert, so entsteht als Umriß eine ebene C_4, deren 28 Doppeltangenten durch folgende von O ausgehende Ebenen ausgeschnitten werden: die Tangentialebene der F_3 in O und die 27 Verbindungsebenen von O mit den Geraden der F_3." (Klein 1926, S. 167)

In der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, geprägt maßgeblich durch Klein (vgl. Tobies 1994), erschienen auf *Clebschs Diagonalfläche* Bezug nehmende Beiträge erst nach Kleins Tod. Den unvollendet hinterlassenen Beitrag von Kleins Doktor-Schüler Karl Rohn (1855-1920) schloss der italienische Mathematiker Luigi Berzolari (1863-1949) ab; von ihm stammen insbes. die Abschnitte über spezielle Raumkurven (vgl. Rohn/Berzolari (1928, S. 1229). Die *Clebsche Diagonalfläche* wird im Abschnitt "Rationale Raumkurven 5., 6. und 7. Ordnung" im Kontext mit Kleins späteren Arbeiten zum Ikosaeder betrachtet:

"Eine bemerkenswerte, obwohl besondere R_6^0 hat *F. Klein*[6] gefunden bei der Untersuchung der geometrischen Deutung der Gleichung 5. Grades; später haben sie von neuem *C. F. Geiser* und *E. Ciani* bei der Untersuchung der Konfiguration angetroffen, die durch ein vollständiges Pentaeder bestimmt wird. Diese Konfiguration wird von einer Gruppe G_{120} von 120 Kollineationen in sich transformiert, die holoedrisch isomorph zur totalen Gruppe von fünf Elementen ist und eine alternierende Untergruppe G_{60} besitzt, die eine ikosaedrische Gruppe ist. Es existieren eine und nur eine (nicht ausgeartete) Fläche 2. Grades und eine und nur eine einzige kubische Fläche, die in bezug auf die G_{120} invariant sind. Die erste ist diejenige, auf der die zehn Paare von *Hesse*schen Punkten der Tripel von Eckpunkte des Fünfflachs liegen, die zu einer Kante gehören. Die andere ist die *Clebsche Diagonalfläche des Pentaeders*, so genannt, weil sie durch die 15 Diagonalen des Pentaeders geht: die zwölf übrigen Geraden der Fläche bilden eine Doppelsechs und sind die sechs invarianten Geradenpaare der sechs in G_{120} enthaltenen Untergruppen 10. Ordnung." (Ebd., S. 1393)[7]

Edgardo Ciani (1864-1942) zeigte später, dass unter den irreduziblen Kurven der ersten sechs Ordnungen zwei einzige invariant in Bezug auf G_{60} sind, aber nicht bezüglich G_{120}, und dass dies zwei rationale Raumkurven 6. Ordnung sind, die projektividentisch sind. (Vgl. ebd.)

In einem weiteren *Encyklopädie*-Beitrag gab Franz Meyer (1928) einen ausführlichen Überblick über die historische Entwicklung der Haupteigenschaften der allgemeinen F_3 und über den systematischen Ausbau der Theorie, wobei er sowohl Kleins Verfahren mit der "Auflösung von Knotenpunkten" als auch dessen gruppentheoretische Behandlung der Flächen diskutierte, dies im Unterabschnitt "17. Gestaltliche Verhältnisse der Flächen. Modelle. F. Kleins Auflösung von Knotenpunkten." Über die gruppentheoretische Behandlung des Problems hatte Klein am 13. April 1887 in der Société mathématique de France vorgetragen. Eine ausführlichere Ausarbeitung der Ergebnisse sandte er mit Brief vom 22. September 1887 an Camille Jordan (1838-1922), der dies in Liouvilles Journal unter dem Titel "Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique" brachte.[8]

---

[6] Hier wird auf Kleins, F.: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung vom fünften Grade* (Leipzig: Teubner, 1884), S. 167, verwiesen.

[7] Hieraus ergab sich dann auch die Bezeichnung: *Klein's icosahedral cubic surface.* In Kleins *Gesammelten Mathematischen Abhandlungen*, Bd. 2, wurde das Ergebnis als Zusatz II zur Arbeit von 1873 aufgenommen.

[8] Dazu führte Meyer (1928, S. 1519-1524) im Abschnitt "22. Gruppentheoretische Behandlung der Fläche, besonders ihrer 27 Geraden, nach Klein und Burkhardt sowie von Coble" aus. Klein entwickelte die Prinzipien, die das Problem in ein anderes überführen (Die Gruppe der f_{27} ist isomorph mit der des Problems der Dreiteilung der hyperelliptischen Funktionen vom Geschlecht zwei.) in einem Brief an C. Jordan, publiziert in *Journal de mathématiques pures et appliquées* 4 ser., tome 4 (1888) 169-176, und Klein 1922, S. 473-479. Detailliert ausgeführt wurde das daraufhin von Heinrich Burkhardt (1861-1914) sowie Arthur Byron

Meyers Ausführungen über "Juels topologische Flächen 3. Ordnung" sollen hier zitiert werden, da sie die *Clebsche Diagonalfläche* umfassen, wenngleich hier z.T. erneut etwas wiederholend dargestellt wird:

"Gestützt auf eine Reihe, auf seine Veranlassung von *F. Neesen*[9] (1872) und *A. Weiler* (1873) verfertigter Modelle der F_3 mit vier reellen Knoten wird von *F Klein* zunächst bei gegebenen 27 reellen Geraden eine angenäherte Konstruktion des Pentaeders hergeleitet. Insbesondere wird die (auch in der Theorie der f_5[10]) auftretende "Diagonalfläche von Clebsch diskutiert, die die 15 Diagonalen der fünf Penteadervierseite enthält, von der Weiler ein Modell hergestellt hatte.

Vor allem aber gelingt es Klein, aus eben jener speziellsten F_3 durch den einfachen Prozeß des *'Verbindens'* resp. '*Trennens'* der in einem Knoten anstoßenden F_3–Äste, die fünf Arten von singularitätenfreien F_3 herzuleiten, des weiteren auch – mit eventueller Hinzunahme eines Durchganges durch einen biplanaren Knoten mit imaginären Hauptebenen – die sämtlichen 'Arten' von *Schläfli* mit reellen Knoten. Die Individuen ein und derselben Art lassen sich, ohne Grenzübergänge, durch Variieren der Koeffizienten der F_3-Form ineinander überführen." (Meyer 1928, S. 1504-1505). Meyers Encyklopädiebeitrag beschrieb, welches offene Problem bei der Klassifikation der F_3 Klein und Vermeil lösten (ebd, S. 1506, und s.o.). Meyer betonte zudem, dass sich Klein noch einer anderen, elementareren Methode bediente, um die F_3-Arten zu untersuchen: "der Projektion der Fläche von einem singulärem Punkt aus", womit es ihm gelungen sei, "alle Fragen nach den verschiedenen Gestaltenarten zu beantworten" (ebd.).

An die *Clebsche Diagonalfläche* knüpften auch jüngere Arbeiten an. Es wurden sowohl weitere mathematische Fortschritte im Gebiet erzielt, als auch aus mathematikdidaktischer bzw. –historischer Sicht der Blick darauf gerichtet. Die folgenden Beispiele müssen sich auf eine Auswahl beschränken. Friedrich Hirzebruch (1976) bewies die Isomorphie zwischen einem bestimmten Modell einer Modulfläche, die zu einer gewissen Kongruenzgruppe der Hilbertschen Modulgruppe für $Q\ (\sqrt{5})$ gehört, und der von Hirzebruch als "berühmt" bezeichneten *Clebschen Diagonalfläche*, die Felix Klein (Zusatz II, in Klein 1922, S. 56-62) mittels des Ikoseaders beschrieben hatte (Hirzebruch 1976).

In Gerd Fischers Buch *Mathematische Modelle* ist die Clebsche Diagonalfläche im Beitrag von Wolf Barth und Horst Knörrer über kubische Flächen behandelt (Barth/Knörrer 1986, S. 11). Die spanische Mathematikerin Irene Polo-Blanco befasste sich ausgehend von ihrer Dissertation (Groningen 2007) mit diesem Gegenstand (Polo-Blanco; Jaap 2008). In Italien, wo algebraische Geometrie ebenfalls eine gute Tradition besitzt, beziehen sich jüngere Arbeiten gleichfalls auf die Clebsche Diagonalfläche: *Superficie diagonale (Diagonalfläche) di Clebsch* (Paladino/Paladino 2007, S. 33). François Lê, ein Doktorstudent

---

Coble (1877-1966); auch weitere Klein-Schüler arbeiteten auf diesem Gebiet: Alexander Witting, Dissertation, Göttingen 1887. Vgl. dazu auch Meyer (1928, S. 1519ff.).

[9] Friedrich Neesen (1849-1923).

[10] Meyer verwies hier in einer Fußnote auf Kleins Ergebnisse im Ikosaederbuch (Klein 1884, S. 166).

von Catherine Goldstein in Paris, arbeitete detailliert zu diesem Gegenstand, wobei er die Abbildung der Clebschen Diagonalfläche aus Fischer (1986) entnahm (Lê 2013, S. 27; 2015, S. 285).

Bibliographie

[UBG] Nachlass Felix Klein: Cod. Ms. Klein VIII 496-510 (Darboux an Klein).

[BParis] Bibliothèque de l' Institut de France, Faculté des Sciences de Paris, MS 2719, Lettres de Klein.

Apéry, François (2013): *Caron's wooden mathematical objects* (2013) http://www.math-art.eu/ Documents/pdfs/ Cagliari2013/Actes2013-apery.pdf, eingesehen 4.2.2016.

Barth, Wolf; Knörrer, Horst (1986): "Algebraische Flächen". In: Gerd Fischer (Hg.), *Mathematische Modelle. Kommentarband*. Berlin: Akademie-Verlag, S. 7-24.

Bauer, Laura A. (2011): The 27 Lines on a Cubic Surface. https://www.math.washington.edu/Undergrad/Handbook/Senior%20Theses/LauraABauer_June2011.pdf

Clebsch, Alfred (1871): "Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5ten Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits. *Math. Ann*. 4, S. 284–345.

Clebsch (1874). "Rudolf Friedrich Alfred Clebsch. Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen, von einigen seiner Freunde." *Math. Ann*. 7, S. 1-55.

Clebsch, Alfred; Klein, Felix (1872): "Über Modelle von Flächen dritter Ordnung". *Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen* 20, S. 402-404 (v. 14.8.1872).

Fischer, Gerd (1986): *Mathematische Modelle*. Braunschweig: Vieweg.

Hilbert, David (1935): "Gaston Darboux", in: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3. Springer: Berlin, S. 365-369 (*Göttinger Nachrichten* 1917, S. 71-75).

Hirzebruch, Friedrich (1876): Hirzebruch, Friedrich (1976) *Die Hilbertsche Modulgruppe für* $Q\ (\sqrt{5}\,)$ *und die kubische Diagonalfläche von Clebsch und Klein.* Working Paper. SFB Theoretische Mathematik, Bonn. Publiziert in russ. Übers. durch Yu. I. Manin, in: *Uspehi Mat. Nauk* 31 (1976), no. 5(191), 153-166. Vgl. http://hirzebruch.mpim-bonn.mpg.de/203/

Kaenders, Rainer (1999): "Die Diagonalfläche aus Keramik". *DMV-Mitteilungen* 4/99, S. 16-21.

Klein, Felix (1928): *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Bd. 3: *Präzisions- und Approximationsmathematik*, ausgearbeitet von C. H. Müller. Berlin: Julius Springer [3]1928.

Klein, Felix (1872): Protokollband 1 seiner Seminare. Math. Institut der UB Göttingen.

Klein, Felix (1873): "Ueber Flächen dritter Ordnung (Dazu gehörig mehrere lithographirte Tafeln)". *Math. Ann.* 6, S. 551-581. (Erlangen, den 6. Juni 1873); auch in Klein, F. (1922), S. 11-62 (hier: leicht geändert, d.h., Beweise verbessert, auf neuere Literatur verweisend und die Abbildungen in den Text eingebunden sowie mit Zusätzen im Anhang versehen).

Klein, Felix (1921, 1922, 1923): *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bde. I, II, III. Berlin: Springer.

Klein, Felix (1926): *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil I*. Berlin: Springer.

Lê, François (2013): « Entre géométrie et théorie des substitutions : une étude de cas autour des vingt-sept droites d'une surface cubique ». *Confluentes Mathematici*, 5 (1), 2013, p. 23-71.

Lê, François (2015): *Vingt-sept droites sur une surface cubique: rencontres entre groupes, équations et géométrie dans la deuxième moitié du XIX^e siècle.* Thèse de doctorat, dirigée par Catherine Goldstein, Université Pierre et Marie Curie.

Meyer, Franz (1928): "Spezielle algebraische Flächen". *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Bd. III.2.2. Hälfte B, C 10. Leipzig: B.G. Teubner, S. 1437-1777.

O'Connor, J. J.; Robertson, E. F.: *History topic: Cubic surfaces.* http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PrintHT/Cubic_surfaces.html

Palladino, Nicla; Palladino, Franco (2007): "I modelli matematici costruiti per l'insegnamento delle matematiche superiori pure e applicate". *Ratio Mathematica* 19, pp. 31-88.

Polo-Bianco, Irene (2007): *Theory and history of geometric models*. PhD thesis, Universidad de Groningen.

Polo-Blanco, Irene; Top, Jaap (2008): "Explicit Real Cubic Surfaces". *Canadian Mathematical Bulletin* 51, pp. 125-133.

Richter, Tina (2015): *Analyse der Briefe des französischen Mathematikers Gaston Darboux (1842-1917) an den deutschen Mathematiker Felix Klein (1849-1925).* Wissenschaftliche Hausarbeit zur Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien im Fach Mathematik. Friedrich-Schiller-Universität Jena.

Rodenberg, Carl (1879): "Zur Classification der Flächen dritter Ordnung". *Math. Ann.* 14, S. 46-110. (Im December 1877)

Rohn, Karl†; Berzolari, L. (1928): "Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen". *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Bd. III.2.2. Hälfte A, C 9. Leipzig: B.G. Teubner, S. 1229-1436.

Rowe, David E. (1989): "The Early Geometrical Works of Sophus Lie and Felix Klein". In: Rowe, D. E./McCleary, J. (eds.): *The History of Modern Mathematics*. Vol. I. Boston. Academic Press, S. 209-273.

Rowe, David E. (2013): "Mathematical models as artefacts for research: Felix Klein and the case of Kummer surfaces". *Mathematische Semesterberichte* 60, S. 1-24.

Schilling, Martin (1911): *Katalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht.* 7. Auflage. Leipzig: Verlag von Martin Schilling. (mit Raumkurven 3. Ordnung nach Klein, S. 151; Wärmeströmung in einem Stabe und einem Ringe nach Klein, S. 40; Gipsmodellen von Flächen 3. Ordnung nach Rodenberg, S. 44-70;

Schläfli, Ludwig (1872): "Quand'è che dalla superficie generale di terz' ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale?" *Annali di Matematica pura ed applicata* (2) 5, S. 289ff.

Schläfli, Ludwig (1875): "Correzione alla Memoria intitolata: Quand'è che dalla superficie generale di terzo ordine si stacca un pezzo rientrante?" *Annali di Matematica pura ed applicata* (2) 7, S. 193-196. (Beginnt mit Bezug auf F. Kleins Arbeit von 1873)

Schläfli, Ludwig (1956): *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Basel: Birkhäuser (Springer).

Shafarevich, Igor R. (1983): "Zum 150. Geburtstag von Alfred Clebsch". *Math. Ann.* 266, S. 135-140.

Tobies, Renate (1994): "Mathematik als Bestandteil der Kultur – Zur Geschichte des Unternehmens *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*". In: *Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte* 14 (1994) S. 1-90.

Tobies, Renate (2015): "Klein und Lie über die Mathematik in Frankreich im Jahre 1870", in: Ch. Binder (Hg.), *Mathematik – Verschollen und Gefunden* (XII. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik, Miesenbach 4.-10. Mai 2014), Wien, S. 24–31.

Zeuthen, Hieronymus G. (1875): "Études des propriétés de situation des surfaces cubiques". *Math. Ann.* 8, S. 1-30. (Copenhagen, 12 avril 1874)

Neumannsch oder nicht – das ist die Frage

Karl-Heinz Schlote (Universität Hildesheim)

Dem Tagungsthema entsprechend möchte ich mich mit einigen mit dem Namen Neumann verknüpften Begriffen beschäftigen. Neumannsch ist vieles in der Mathematik: In dem klassischen zweibändigen „Mathematischen Wörterbuch“ von Josef Naas (1906-1993) und Hermann Ludwig Schmid (1908-1956) sind es acht Begriffe, in dem neueren sechsbändigen, von Guido Walz herausgegebenen „Lexikon der Mathematik“ sind es drei und bei einigem Stöbern findet man sogar deutlich mehr. Hier eine kleine Auswahl: Es gibt das Neumannsche (im Folgenden kurz N.) Prinzip, die N. Reihe, die N. Randwertaufgabe, das Neumann-Yakuwa-Potential, die N. Gleichung, das N. Rechnermodell, die N. Vermutung, das N. Axiomensystem, die Neumann-Architektur, die Neumannschen Linien, die N. Funktion, die N. Stabilitätsanalyse, die N. Formel, den Neumann-Flaschenhals, die Highmann- Neumann- Neumann-Erweiterung . Natürlich ist es nicht nur eine Frau oder ein Mann mit Namen Neumann, die oder der hinter all diesen Begriffen steht. Stellvertretend seien als Kandidaten genannt: Franz (Ernst) Neumann (1798-1895), Carl (Gottfried) Neumann (1832-1925), Ernst (Richard) Neumann (1875-1955), Janos (John) von Neumann (1903-1957), Bernhard (Hermann) Neumann (1909-2002), Hanna Neumann (1914-1971) und Peter (Michael) Neumann (geb. 1940). Die Reihe ließe sich noch fortführen.
Im Folgenden sollen die Begriffe Neumannsche Reihe, Neumannsche Randwertaufgabe und Neumann-Yukawa-Potential betrachtet werden. Mit Neumann ist hier in jedem Fall Carl Neumann gemeint. Deshalb soll zunächst dessen Leben und Werk kurz vorgestellt werden. Anschließend wird für jeden der drei Begriffe die heutige Definition vorgestellt, um dann durch eine Analyse der Originalarbeiten Carl Neumanns zu versuchen, den historischen Ausgangspunkt sowie die Namenszuschreibung aufzuklären und zu entscheiden, ob die Namensgebung sachgemäß ist.

Carl Neumann und die mathematische Physik

Carl Neumann wurde am 7. Mai 1832 in Königsberg als Sohn des dortigen Universitätsprofessors für Physik und Mineralogie, Franz Neumann, geboren. In Königsberg erhielt Carl Neumann seine Schulbildung und studierte auch dort. Insbesondere besuchte er das mathematisch-physikalische Seminar, für das die Universität schon damals sehr bekannt war. C. G. J. Jacobi (1804-1851) und sein Vater hatten das Seminar 1834 gegründet und Letzterer führte es nach Jacobis Wechsel nach Berlin zusammen mit Friedrich Richelot (1808-1875) weiter. Das Seminar ist wegen seines stimulierenden Einflusses auf die Entwicklung von mathematischer und theoretischer Physik durch die dort vermittelte Verbindung von Mathematik und Physik berühmt. Carl Neumann ist von diesen neuen Ideen zur Behandlung physikalischer Fragestellungen wesentlich beeinflusst worden. 1855 legte er in Königsberg das Oberlehrerexamen ab und wurde 1856 mit einer Arbeit zur Anwendung hyperelliptischer Integrale zur Lösung eines mechanischen Problems bei F. Richelot promoviert. Zwei Jahre später habilitierte er sich unter Eduard Heine (1821-1881) in Halle mit der mathematischen Behandlung des Faraday-Effektes (d. h. der durch Magnetismus verursachten Drehung der Polarisationsebene des Lichtes) und wirkte dort als Privatdozent. 1863 erhielt er eine a. o. Professur, doch wechselte er kurze Zeit später an die Universität Basel, 1865 nach Tübingen und 1868 nach Leipzig, wo er über 42 Jahre als Ordinarius wirkte. Nach der Emeritierung setzte er seine Forschungen fort und starb hoch betagt am 23.März 1925 in Leipzig.

In seinen Forschungen lieferte Carl Neumann wichtige Beiträge zur Theorie der Abelschen Funktionen, zur Potentialtheorie und zur mathematischen Physik. Für das erstgenannte steht vor allem sein 1865 erschienenes Lehrbuch „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale", mit dem er vielen Mathematikern einen Zugang zu den Riemannschen Ideen erschloss. Die beiden anderen Gebiete sind sehr eng mit seinen Vorstellungen zum Verhältnis von Mathematik und Physik verbunden, die er in den 1860er Jahren bei seiner Beschäftigung mit physikalischen Fragen entwickelte und in den Antrittsvorlesungen 1865 in Tübingen und 1868 in Leipzig klar darlegte. Als Ziel der mathematischen Physik formulierte er, den einzelnen physikalischen Theorien ausgehend von wenigen, nicht weiter erklärbaren Grundvorstellungen einen möglichst einfachen, streng logischen Aufbau zu geben. Diese Grundvorstellungen bezeichnete er als Prinzipien und verglich sie mit den Axiomen in der Mathematik, wobei er die den Prinzipien im Gegensatz zu den Axiomen stets anhaftende Unsicherheit betonte. Die mathematische Physik sollte nun diese Prinzipien in einer mathematisch handhabbaren Weise formulieren, daraus in logisch korrekter Weise Schlussfolgerungen ableiten und die Folgerungen in einer experimentell überprüfbaren Form präsentieren. Der Vergleich mit den experimentellen Daten konnte dann Hinweise für weitere theoretische bzw. experimentelle Arbeiten liefern. Die Umsetzung seiner allgemeinen Vorstellungen hat Neumann an nahezu allen wichtigen Teilgebieten der damaligen Physik sehr detailliert demonstriert, wobei speziell der Aufbau der Elektrodynamik noch eine herausragende Stellung einnahm.

In diesem Prozess sah Neumann auch die notwendigen Aufgaben der Mathematiker, die hinsichtlich der Verbesserung der mathematischen Methoden zu leisten waren, und hat dazu intensiv beigetragen. Zu nennen sind hierzu etwa die Lösung des Dirichlet-Problems (1. Randwertaufgabe) für die Ebene mit Hilfe des von ihm eingeführten logarithmischen Potentials $\int \log\left(\frac{1}{r}\right)\rho\, d\omega$ und vor allem sein konstruktiver Existenzbeweis für die Lösung des Dirichlet-Problems mit Hilfe der Methode des arithmetischen Mittels, auf den noch zurückzukommen sein wird.

Neumann hat mit seinen Beiträgen zur Verbesserung der Methoden der mathematischen Physik sowie durch seine sehr stark mathematisch geprägten Auffassungen zur theoretischen und mathematischen Physik und deren Exemplifizierung am Aufbau physikalischer Theorien die Entwicklung der mathematischen Physik wesentlich beeinflusst und wichtige Impulse zur genaueren Bestimmung und Unterscheidung der beiden Disziplinen geliefert. Längere Zeit sind im 19. Jahrhundert die Begriffe mathematische und theoretische Physik synonym verwendet worden.

Die Neumannsche Randwertaufgabe

Die drei genannten Begriffe gehören alle in das Gebiet der Potentialtheorie und mit Bezug auf Neumann ist dies die klassische Potentialtheorie. Ihre Aufgabe kann vereinfacht beschrieben werden als die Bestimmung einer Funktion, des sog. Potentials, als Lösung der Poisson- bzw. Laplace-Gleichung bei vorgegebener Masse- bzw. Ladungsverteilung. Aus diesem Potential lässt sich dann durch Gradientenbildung für jeden Punkt (im Raum bzw. in der Ebene) das entsprechende Kräftefeld berechnen. Ein zentrales, allgemein bekanntes Problem der Potentialtheorie ist die Randwertaufgabe erster Art (oder Dirichlet-Problem). In diesem Fall ist die Masseverteilung in dem Körper (Gebiet) nicht bekannt, dafür aber die Werte des Potentials auf dem Rand, d. h. es muss die Laplace-Gleichung gelöst werden, wobei die Lösungsfunktion u vorgegebene Randwerte annehmen soll: $\Delta u = 0$, $u_{\partial(G)} = f$. Der allgemeine Existenzbeweis für die Lösung des Dirichlet-Problems war dann unter Verwendung des sog. Dirichlet-Prinzips geführt worden, doch blieb die Lösung der Aufgabe für konkret vorgegebene Gebiete eine wichtige und schwierige Aufgabe für die Mathematiker jener Zeit. Auch Neumann hat sich damit intensiv beschäftigt und hat in mehreren Arbeiten die Lösung der Randwertaufgabe erster Art für spezielle Formen des Gebiets G behandelt. 1864 leitete er beispielsweise seine Arbeit mit der Feststellung ein:

„In der theoretischen Physik treten uns häufig Probleme entgegen, bei denen es sich, was ihre mathematische Behandlung anbelangt, um die Integration der Gleichung $\Delta W = 0$, d. i. um die Ermittelung einer Function W handelt, welche der Gleichung $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}=0$ Genüge leistet. ...

<u>Problem. Es soll eine von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z abhängende Function W gefunden werden, welche</u>

I. <u>innerhalb eines gegebenen Körpers der Gleichung $\Delta W = 0$ Genüge leistet, welche</u>

II. <u>innerhalb dieses Körpers, ebenso wie $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ und $\frac{\partial W}{\partial z}$, überall eindeutig und stetig ist, und welche endlich</u>

III. <u>an der Oberfläche des Körpers einen beliebig gegebenen Werth besitzt.</u>

Eine allgemeine Lösung dieses Problems scheint bei dem gegenwärtigen Zustande der Mathematik mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verknüpft zu sein. ...

Es schien mir der Mühe werth, zu untersuchen, ob es nicht vielleicht möglich wäre, eine Methode zu finden, durch welche die Lösung des Problems, wenn auch nicht für <u>beliebige</u> Körper, so doch wenigstens für alle <u>Rotationskörper</u> ermöglicht wird.“ (/Neumann 1864/, S. III f. Hervorhebungen im Original)

Im Mittelpunkt von Neumanns Forschungen stand also zunächst die Lösung des Dirichlet-Problems. Die nach ihm benannte Randwertaufgabe, meist als Randwertaufgabe zweiter Art bezeichnet, formulierte Neumann dann in seiner Monographie „Untersuchungen über das Logarithmische und Newtonsche Potential“ von 1877. Sie fordert (in moderner Terminologie) für ein beschränktes Gebiet G im n-dimensionalen euklidischen Raum mit zweimal stetig differenzierbaren Rand ∂G die harmonischen Funktionen zu bestimmen, deren Ableitung in Richtung der äußeren Normalen von G auf dem Rand vorgegebene Randwerte f annimmt. Bei Carl Neumann war G stets ein zwei- bzw. dreidimensionales Gebiet und auch in dieser Form war die Lösbarkeit dieser Aufgabe keineswegs aufgeklärt. Im Original heißt es:

„Vierte Aufgabe: Auf oder <u>innerhalb</u> σ sollen irgend welche Massen ausgebreitet werden, deren Potential U auf der <u>äussern</u> Seite von σ der Bedingung $\partial U/\partial N = f$ entspricht, wo die f <u>vorgeschriebene</u> Werthe bezeichnen.“ (Neumann 1877, S. 218, unterstrichene Worte im Original gesperrt geschrieben) σ bezeichnet eine geschlossene, konvexe Fläche, N die äußere Normale an diese Fläche. Zuvor hatte Neumann als zweite Aufgabe das analoge Problem für die innere Normale formuliert, wobei er als notwendige Bedingung noch forderte, dass für die Randwerte ∫ f dσ = 0 gelten muss. (denn nach der Greenschen Formel gilt $\int_{\partial G} f\, d\sigma = \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial N}\, d\sigma = \int_G \Delta u\, dv = 0$.)

Es ist jedoch recht schwierig zu ermitteln, wer die Bezeichnung Neumannsche Randwertaufgabe oder Neumannsches Randwertproblem erstmals geprägt hat und wann dies geschehen ist. Der Grund dafür ist der, dass sich um die Wende zum 20. Jahrhundert eine ganze Reihe von Arbeiten mit der ersten und zweiten Randwertaufgabe beschäftigten und in diesem Zusammenhang von der Neumannschen Methode oder vom Neumannschen Potential die Rede ist, aber nicht explizit von der Neumannschen Randwertaufgabe. Auch Otto Hölder (1859 – 1937) benutzte 1925 in seinem Nachruf auf Carl Neumann die Bezeichnung nicht, obwohl er ausdrücklich die Lösung der Randwertaufgabe zweiter Art durch Neumann hervorhob. Drei Jahre später verwendete jedoch Josef Lense (1890-1985) in seinem Artikel über partielle Differentialgleichungen im dritten Band des „Handbuchs der Physik“ den Begriff wie selbstverständlich ohne Kommentar. Auf einen weiteren Ausgangspunkt für die Bezeichnung wird im Zusammenhang mit der Neumannschen Reihe und einer Arbeit von Henri Poincaré (1854 – 1912) eingegangen.

Die Neumannsche Reihe

Der Begriff der Neumannschen Reihe wird heute in der Funktionalanalysis verwendet und bezeichnet eine unendliche Reihe I + A + A² + A³ + … = $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ (A^0 = I = Identische Abbildung) eines linearen stetigen Operators A auf einem normierten Raum X: x → Ax. Diese Reihe wird im Raum L(X, X) der linearen, beschränkten Operatoren, die den Raum X in sich abbilden, betrachtet. L(X, X) ist, versehen mit der Operatornorm $\|A\| = inf\{M > 0\, mit \|Ax\| \le M\|x\| für\ alle\ x \in X\}$, wieder ein normierter Raum, in dem man die Konvergenz der Neumannschen Reihe I + A + A² + A³ + … = $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ betrachtet. Dazu ergeben sich die beiden grundlegenden Aussagen: Wenn die Neumannsche Reihe konvergiert, dann existiert der zu (I – A) inverse Operator und es gilt $(I - A)^{-1}$ = I + A + A² + A³ +… Die Neumannsche Reihe konvergiert, wenn X ein Banachraum ist und die Operatornorm von A kleiner 1 ist.

In dieser abstrakten Form ist die Aussage nicht in den Arbeiten von Carl Neumann enthalten. Ja, auch das Wörterbuch von Naas und Schmid führt drei Versionen der Neumannschen Reihe an. Bleibt die Frage: In welcher Form tritt die Reihe dann bei Neumann auf und wo? Die Antwort ist relativ leicht, da es sich um eine der wichtigsten, ja wohl die bedeutendste Arbeit von Neumann handelt, um die „Untersuchungen über das Logarithmische und Newtonsche Potential“ von 1877, in denen er einen detaillierten Beweis für die Lösung der ersten Randwertaufgabe unter Vermeidung des Dirichlet-Prinzips gab. In diesem Beweis konstruierte er die Iteration von Funktionen $W_n(x)$ durch

$$W_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial v} W_{n-1}\, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos \vartheta}{r^2} W_{n-1}\, d\sigma$$

mit x ein beliebiger Punkt der Ebene, σ die Oberfläche (Rand) des Gebietes, auf und innerhalb der eine Massebelegung vorgegeben ist, r der Abstand von x zu dem Flächenelement dσ von σ, ν die innere Normale, ϑ der Winkel zwischen der Normalen und dem Radiusvektor r und $W_0 = f$ die vorgegebenen Randwerte auf σ.
Bezüglich der Integrale bezog sich Neumann auf die Theorie der Doppelbelegung, d. h. unter anderem dass $W_n(x)$ als Funktion von x beim Übergang von einem Punkt außerhalb des Gebietes zu einem Randpunkt bzw. zu einem Punkt innerhalb des Gebietes (und umgekehrt) jeweils einen Sprung aufwies, also eine Unstetigkeit. Zu diesen Funktionen W_n bestimmte Neumann die entsprechenden Randwerte und betrachtet die Reihe $\Phi = -(W_0 + W_1 + W_2 + \ldots)$. Das weitere Vorgehen Neumanns war unter Verzicht auf die genauen technischen Details das Folgende: Zur Untersuchung der Reihenkonvergenz führte er zunächst eine sog. Konfigurationskonstante λ für das jeweils betrachtete Gebiet G ein, die er unter gewissen Bedingungen an das Gebiet als < 1 nachwies. Nach umfangreicheren Rechnungen konnte er dann die Funktionen $W_n(x)$ abschätzen durch: $|W_n(x)| \leq D(f)\lambda^n$ für x im Außengebiet bzw. auf dem Rand von G und D(f) die Schwankung der Randwerte f auf dem Rand von G. Daraus folgt die Konvergenz der Reihe Φ und Neumann zeigte, dass dann die Reihe $C - (W_0 + W_1 + W_2 + \ldots)$ für jeden Punkt x außerhalb von G das gesuchte Potential liefert, das auf dem Rand die gegebenen Werte f annimmt. Dabei ist C eine Konstante, die als Grenzwert der im Beweis konstruierten Folge (f_n) der Randwerte von $W_n(x)$ bestimmt wurde.
In dieser Form ist die Verbindung der von Neumann durchgeführten Konstruktion einer Reihe mit der eingangs angeführten Operatorenreihe wohl deutlich zu sehen und kann als berechtigt bezeichnet werden.
Es gibt aber noch eine zweite Version. Diese geht auf Henri Poincaré zurück. In seiner Arbeit „La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet“ (Poincaré 1896/97) gab Poincaré folgende Verallgemeinerung des Problems, das er dann Neumannsches Problem nannte: Seien F eine Funktion, die für jeden Punkt einer geschlossenen Fläche S gegeben ist, und λ ein Parameter. Gesucht ist das Potential W einer Doppelschicht, das die Bedingung $V - V' = \lambda(V + V') + 2F$ erfüllt (dabei bezeichnen V und V' die Werte des Potentials W in einem inneren bzw. äußeren Punkt in der entsprechenden Umgebung von S). Er vermerkte, dass das Dirichlet-Problem dann nur ein Spezialfall des Neumannschen Problems wäre. In Anlehnung an das Vorgehen von Neumann konstruierte Poincaré das gesuchte Potential W in Form einer von λ abhängigen Potenzreihe: $W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots$ und entsprechend $V = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \ldots$ und $V' = V'_0 + \lambda V'_1 + \lambda^2 V'_2 + \ldots$ Schließlich sei noch $V + V' = 2U$ und $V_i + V'_i = 2U_i$. Poincaré setzte die Reihenentwicklungen in die obige Bedingungsgleichung ein, führte einen Koeffizientenvergleich durch und erhielt als Folgerung, dass die W_i in der Reihenentwicklung von W sukzessiv berechnet werden konnten und jeweils Potentiale einer Doppelschicht sind mit der Belegungsdichte $\frac{F}{2\pi}$ für W_0 und $\frac{U_i}{2\pi}$ für W_{i+1}. Er vermerkte, dass aus den Darlegungen von Carl Neumann die Konvergenz der Reihe der Funktion W für $|\;| \leq 1$ und ein konvexes Gebiet S folgte, und dehnte dann den Beweis auf gewisse nicht konvexe Gebiete aus. Die Reihenentwicklung für W wurde dann vielfach, auch von Poincaré (Poincaré 1896/97, S. 244), ebenfalls als Neumannsche Reihe bezeichnet. Otto Hölder hat diesen Umstand in seinem Nachruf auf Carl Neumann sicher zu Recht kritisiert. Hölder hob gleichzeitig in diesem

Zusammenhang hervor, dass durch Poincarés verallgemeinertes Problem, er spricht auch vom Neumann-Poincaréschen Problem, eine Brücke zur Fredholmschen Integralgleichungstheorie geschlagen werden kann, doch auch diese Betrachtungsweise lag Neumann eher fern.
Der Vollständigkeit halber sei noch die dritte, bei Naas/ Schmid angeführte Form der Neumann-schen Reihe erwähnt: Es handelt sich um die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k J_{+k}(x)$ wobei die $J_k(x)$ bzw. $J_{\square}(x)$ (ν nicht ganzzahlig) Zylinderfunktionen bezeichnen. Derartige Reihenentwicklungen einer stetigen Funktion (der komplexen Veränderlichen z) nach Besselschen Funktionen hat Neumann mehrfach betrachtet, ausführlich 1867 in seiner Monographie „Theorie der Besselschen Funktionen".

Das Neumann-Yukawa-Potential

Die Geschichte des Neumann-Yukawa-Potentials beginnt mit Isaak Newton (1643 – 1727) und seiner Gravitationstheorie. Ausgehend von einer gleichmäßig verteilten statischen Massendichte im unendlichen dreidimensionalen Euklidischen Raum leitete er dabei sein Gravitationsgesetz her. Bereits Newton soll dann bemerkt haben, dass diese Annahme einer gleichmäßigen unendlichen Masseverteilung zu Widersprüchen führt. Diese äußern sich u. a. darin, dass über lange Zeiträume betrachtet die tatsächliche Bewegung der Himmelskörper von der mittels der Newtonsche Gravitationstheorie berechneten Bewegung geringfügig abweicht. Newton soll sich vergeblich um die Lösung dieses Problems bemüht haben und in den nachfolgenden Jahrhunderten gab es immer wieder Versuche, den Makel zu beseitigen. Einige der Erscheinungen, wie die Periheldrehung der Merkurbahn, konnten dann mit Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie befriedigend erklärt werden. Doch auch Albert Einstein (1879 – 1955) hat ja viele Jahre mit dem Problem gerungen, dass ein materieerfüllter Kosmos nicht statisch sein konnte. Seinen Lösungsversuch mit der Einführung einer kosmologischen Konstanten in die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie (Einstein 1917) soll er nach dem Übergang zu einem dynamischen Universum als die" größte Eselei" seines Lebens bezeichnet haben. Für eine kurze historische und fachliche Darstellung sei auf die Arbeit von Alex Harvey und Engelbert Schucking (Harvey/ Schucking 2000) verwiesen.
Auch Neumann hat sich intensiv mit der Newtonschen Physik, insbesondere dessen Gravitationstheorie, auseinandergesetzt. Sein Ausgangspunkt waren aber weniger die kosmologischen Überlegungen und die dabei aufgetretenen Probleme, sondern der grundlegende, konstruktive Aufbau der Physik ausgehend von einigen allgemeinen Prinzipien. Eines dieser Grundprinzipien war das Fernwirkungsprinzip, an dem auch Neumann keinerlei Zweifel hatte, das aber in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts auf Grund der neuen Erkenntnisse zur Elektrizitätslehre und zum Magnetismus Gegenstand heftiger Diskussionen wurde. Gelehrte wie James Clark Maxwell (1831 – 1879), Michael Faraday (1791 – 1867) oder Hermann von Helmholtz (1821 – 1894) lehnten es ab und plädierten für eine Theorie der Nahwirkungen. Neumann verteidigte die Fernwirkungstheorie und verfasste dazu u. a. 1896 die Monographie „Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen" (Neumann 1896). Die vorgebrachten Einwände waren für ihn Anlass das Prinzip der Fernwirkung nochmals einer genauen Analyse zu unterziehen. Er

zweifelte nicht an der Gültigkeit des Prinzips, sondern an der Korrektheit der daraus gezogenen Folgerungen:
„Wenn wir nämlich auch das Newton'sche *Princip* der Fernwirkungen festhalten, so können wir doch nicht gut annehmen, dass diese Fernwirkungen durchweg und in aller Strenge dem Newton'schen *Gesetz* entsprechen sollten. …
In Anbetracht aller im Laufe der Zeit gegen das Newton'sche Gesetz erhobenen Einwände und Bedenken muss sich dem Mathematiker unwillkürlich das Bedürfnis aufdrängen, neben dem Newton'schen Gesetz noch andere Gesetze der Fernwirkung in Betracht zu ziehen, kurz *die Theorie der Fernwirkungen in möglichst grosser Allgemeinheit zu entwickeln, – nicht etwa in der Hoffnung, dass eine solche Theorie sofort zu physikalisch wichtigen Aufschlüssen führen werde, sondern nur in dem Bestreben, den ganzen Kreis der hierher gehörenden Vorstellungen zu ordnen, zu erweitern und vielleicht für künftigen Gebrauch nutzbar zu machen.*“ (Neumann, 1896, S.VI f., Hervorhebungen im Original)
Aus der Analyse elektrischer Erscheinungen leitete Neumann noch die zusätzliche Bedingung ab, dass die gesuchte mathematische Beschreibung die Existenz eines elektrostatischen Gleichgewichtszustandes garantieren müsse. Dies schränkte die Wahl der möglichen Potentialfunktionen deutlich ein und er konnte aber zeigen, dass nicht nur die Potentialfunktion

$$\phi(r)=\frac{1}{r}$$

, sondern „dass alle mit jenem Princip *verträglichen* Gesetze von folgender Gestalt sein müssen:

$$\phi(r)=\frac{Ae^{-\alpha r}}{r}+\frac{Be^{-\beta r}}{r}+\frac{Ce^{-\gamma r}}{r}+\ldots$$

wo α, β, γ, … und A, B, C, … Constanten sind.“ (Neumann 1896, S. IX)
In einem weiteren Schritt wies er dann nach, dass unter der Annahme einer solchen Potentialfunktion und, dass alle Konstanten α, β, γ, … positiv sind sowie die Konstanten A, B, C, … alle einerlei Vorzeichen haben, die Existenz des besagten Gleichgewichtszustandes folgte. Im Weiteren widmete sich Neumann der detaillierten Analyse der Fälle einer ein- bzw. zweigliedrigen Exponentialfunktion, d. h. wenn die obige Potentialfunktion φ nur aus dem ersten Glied bzw. den ersten beiden besteht. Dieses eingliedrige Potential trat zeitgleich auch in einer Arbeit des Astronomen Hugo von Seeliger (1849 – 1924) auf, stand aber in den folgenden Jahren nicht weiter im Blickpunkt der Physiker und Astronomen. In den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts tauchte es plötzlich in der Elementarteilchenphysik in den Arbeiten des Japaners Hideki Yukawa (1907 – 1981) zur Mesonen-Theorie, die die Wechselwirkung von Protonen und Neutronen erklärte, wieder auf. Heute ist es sowohl in Arbeiten zur allgemeinen Relativitätstheorie und zu relativistischen Feldtheorie, als auch zur Teilchenphysik als Yukawa- oder als Neumann-Yukawa-Potential gegenwärtig.
Für eine genauere Erforschung der Begriffsgeschichte des Neumann-Yukawa-Potential ergeben sich hier eine ganze Reihe von Fragen, die in diesem kurzen Beitrag offen bleiben müssen. Dies betrifft etwa den Verbreitungsgrad und der Begriff geprägt wurde. Soweit es ermittelt werden konnte, ist der Name Yukawa-Potential gebräuchlicher, was auch angemessener ist. Neumann und Seeliger haben beispielsweise nicht aufgeklärt, ob und welche physikalische Bedeutung die einzelnen Konstanten haben. Die verschiedenen physikalischen Zusammenhänge spielten für sie keine große Rolle, was aber auf Grund des historischen Entwicklungsstandes nicht verwunderlich ist.

Literatur:

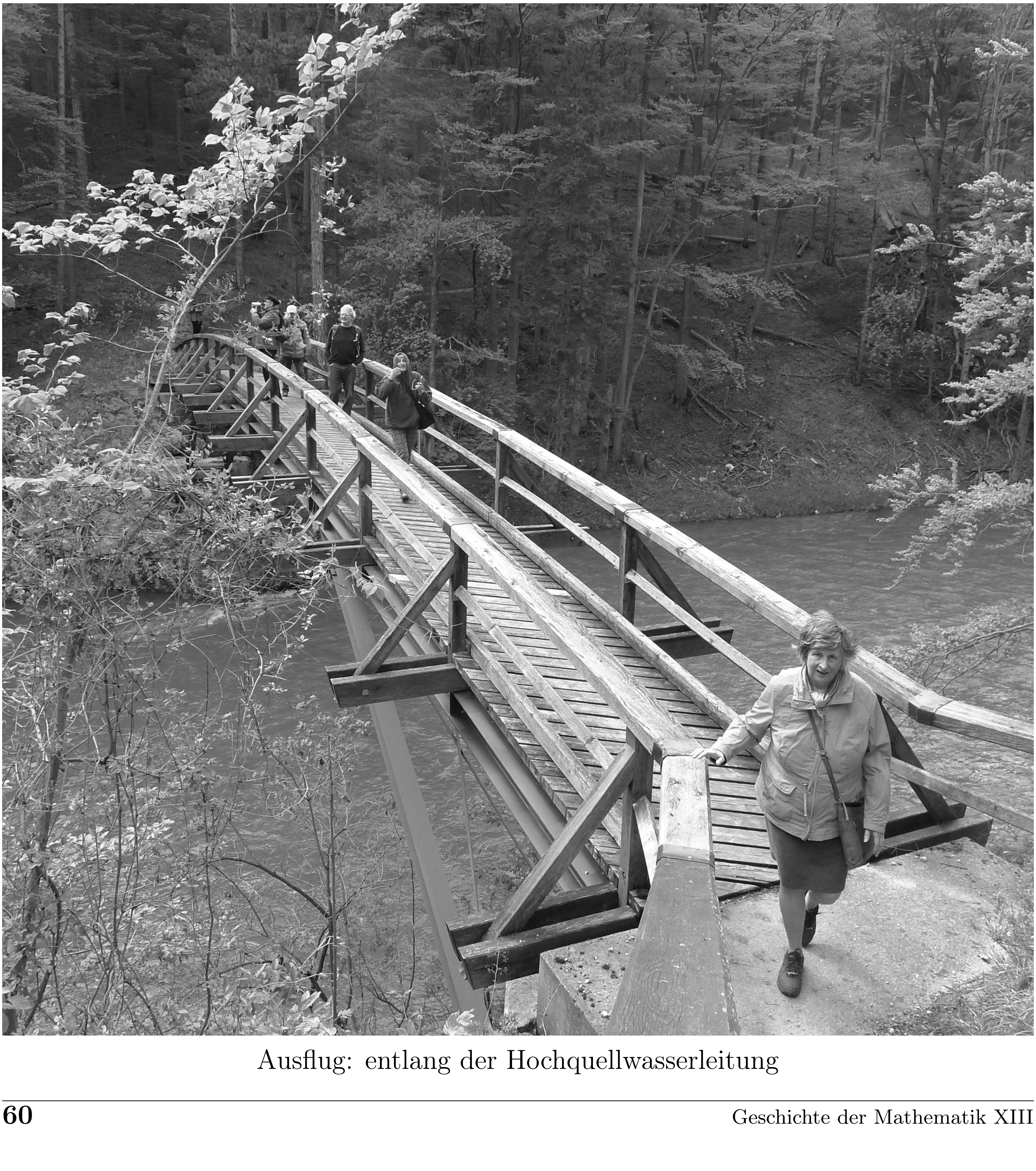
Einstein, Albert: Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. Berlin (1917), S. 142 – 152
Harvey, Alex; Schucking, Engelbert: Einstein's mistake and the cosmological constant. Amer. Journal of Physics 68 (2000), S. 723 – 727
Hölder, Otto: Carl Neumann. Nachruf gesprochen am 14. November 1925. Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss., Math.-physische Kl. 77 (1925), S. 154 – 180
Lense, J.: Partielle Differentialgleichungen. In: Geiger, H.; Scheel, Karl (Hrsg.): Handbuch der Physik. Bd. III: Mathematische Hilfsmittel in der Physik. redigiert von H. Thirring. Springer, Berlin 1928
Neumann, Carl: Theorie der Elektricitäts- und Wärmevertheilung in einem Ringe. Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses, Halle 1864
Neumann, Carl: Theorie der Besselschen Functionen, ein Analogon zur Theorie der Kugelfunctionen. Teubner, Leipzig 1867
Neumann, Carl: Ueber die Entwickelung beliebig gegebener Functionen nach den Besselschen Functionen. Journal reine u. angewandte Mathematik 67 (1867), S. 310 – 314
Neumann, Carl: Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential. Teubner, Leipzig 1877
Neumann, Carl: Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen (mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen). Teubner, Leipzig 1896
Poincaré, Henri: La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta mathematica 20 (1896/97), S. 59 – 142
Seeliger, Hugo von: Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz. Sitzungsber. Königl. Bayrische Akad. Wiss. München, math.-nat. Cl. 26 (1896), S. 373 – 400
Yukawa, Hideki: On the interaction of elementary particles. I. Proc. Physico-Math. Soc. Japan, 3rd ser., 17 (1935), S. 48 – 57

Marlene Breidert, Gabriela Reich, Gisela von Renteln

```
"Some remarks on the classification of  surface.

Who is the author of the theorem  about the complete classification of surface?
Moebius? Von Dyck? Dehn and Heegaard? Maybe someone else?
On the basis of the original articles we will try to give the correct answer
and show the origins of certain terms.

Zdzis?aw Pogoda
```



Ausflug: entlang der Hochquellwasserleitung

Bézout's Theorem.

On the history of the research on the number of common points of two algebraic curves

Danuta Ciesielska (Warsaw)

Abstract

In the paper an early history of the Bézout theorem on algebraic curves is given. Effective methods on eliminations of one variable from the system of two algebraic variables from Euler's papers: *Demonstration sur le nombre des points, ou deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper* (Euler 1750), *Nouvelle methode d'eliminer les quantites inconnues des equations* (Euler 1766), *De intersectiones curvarum* and *Construction of Equations* (*Introductio in analysin infinitorum*, Euler 1748) are presented as well as Bézout's result from the paper *Reserchers sur le degré des équations résultantes...* (Bézout 1764) is sketched. Additional information on the homogenous coordinates, multiplicity of the intersection and Halphen's final proof of the Bézout theorem (Halphen 1872) are mentioned.

Introduction. The problem of the number of common points of two algebraic curves is connected with the name of a French mathematician Étienne Bézout (1730-1783). However, he neither presented the statement on the number nor proved the so-called Bézout's theorem. Bézout's theorem plays a fundamental role in computer algebra and effective algebraic geometry. It

2010 AMS Subject Classification: A01A45, A01A50.

Keywords: Theory of elimination, system of algebraic equations, Bézout, Euler, 17th, 18th, 19th century.

gave the theoretical base for the intersection theory[1] and for the theory of eliminations[2].

Who set the postulate? Was Bézout the very first who set the claim on the number of common points of two algebraic curves? No, he wasn't. It seems that it was sir Isaac Newton (1642-1727). In 1665 he wrote:

> *For e^y number of points in w^{ch} two lines may intersect can never be greater y^n rectangle of y^e of their dimensions. And they always intersect in soe many points, excepting those w^{ch} are imaginary onely.* (Newton, May 30, 1665; p. 498, see: Stillwell 2010, p. 119)

Throughout the paper we will call that postulate *Newton's postulate* or *Newton's claim*. We should mention that Newton in his research considered any curve, also transcendental one, but in this claim he concentrated on the algebraic ones. He was correct in the estimations of the number of common points of two algebraic curves. He was right – some of common points of two algebraic curves may be "imaginary"[3], but some of common points are hidden much further than in the complex domain. To illustrate the problem, let us consider two parallel lines. By *Newton's postulate* the number of common points of those lines is one, but two equations of these parallel lines give impossible condition and no (real or imaginary) root, and as a result the

[1] *As early as in the eighteenth century Euler and Étienne Bézout studying the case of plane curves claimed that two algebraic curves of degree m and n, which have no common component intersect in mn points. To make this statement true it is necessary to use complex numbers and consider points at infinity to extend the affine plane to projective plane, as well as to assign an appropriate multiplicity to each point of the intersection. In the nineteenth century the research on the theory of intersection was significantly developed by Hermann Schubert and Hyeronimus van Zeuthen. Their main interests were in enumerative geometry, ie. a branch of algebraic geometry in which certain geometrical objects, restricted in such a way that the number of solutions is finite, are considered.* (Teoria dell'intersezione, Wikipedia.it., translated by Krzysztof Maślanka).

[2] *This field is at least as old as Bézout's theorem – Ce domaine est au moins aussi ancien que le théoreme de Bézout* (Théorie de l'élimination, Wikipedia.fr.).

[3] For example, any two intersecting circles in the plane have two *real* and two *imaginary* common points.

conclusion that parallel lines have no common points in the (affine) plane[4]. This shows that one should extend the affine plane to the projective plane and consider special points called *points at infinity.* The last problem is to assign an appropriate multiplicity to each common point of two curves. To illustrate it, consider any line which is tangent to a parabola. By *Newton's postulate*, such curves have two common points, but the system of corresponding equations have only one real root (do not have any imaginary root) and no common points at infinity. This shows the necessity of counting the multiplicities of common points in a similar way to counting the multiples of the root of polynomials.

Descartes in *La Géométrie* presented an effective geometrical method for the solution of any given fifth and sixth degree equation and he started (in the Western World) consideration in elimination problem. The very first results in this field are due to Newton and Colin Maclaurin (1698-1746). Isaac Newton in *Arithmetica universalis* (Newton 1722) proposed an effective method of elimination of one variable from the system of two algebraic equations in two variables of degree at most 4. This method was later discussed by Leonhard Euler in the paper *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des equations* (Euler 1766). However, Colin Maclaurin preceded Newton. Maclaurin in *Geometrica organizaa sive descripto linearum curvarum universalis* (Maclaurin 1720) presented an effective methods of solving such systems. Both propositions, Newton's and Maclaurin's, were more theoretical than practical. A Swiss mathematician Gabriel Cramer (1704-1752) in *Introduction à l'analyse des linges courbes algébriques* (Cramer 1750) proposed a new method of solving systems of algebraic equations and his results on this topic gave the base for the theory of determinants.

Euler's early results. In the celebrated *Introductio in analysin infinitorum* (Euler 1748, translated by Blaton) Euler proposed a method of solving

[4]It is amazing that Newton in his consideration ignored the problem of two parallel lines.

the system of two algebraic equations in two variables. In chapters *On the intersection of curves* and *Construction of Equations* are the first Euler's consideration on the problem of elimination. We have to stress that Euler started his work with very interesting comment:

> 457. *In the previous chapters we have frequently considered curves intersected by a straight line, we have shown that second order lines cannot to be intersected by a straight line in more than two points, that third order lines have no more than three intersections, and fourth order lines no more than four intersections, and so forth. Since we will investigate in this chapter the intersection of any two curves, we should begin this account with straight lines and investigate those points at which any given straight line intersects a given cure. In this way we will prepare the way for the mutual intersections of given curves, which information is very useful for the construction of equations of higher degree. We will pursue this topic more fully in the next chapter.* (Euler 1748, English translation by Blaton 1990, p. 287)

Analyzing this text, we realize that Euler's result on the number of common points of two plane algebraic curves had a form of an inequality. He estimated this number, for the line and any plane algebraic curve, by the order of the curve. However, Euler did not claimed that this numbers – common points of the straight line and plane algebraic curve and the order of this curve – are equal. In paragraphs 458–473 he examined specific curves, for example a circle and a parabola. He was also looking for an effective method of determination of the coordinates (real or complex) of common points of two algebraic curves.

> 474. *Now that we have considered these problems, we would like to show more clearly how the intersection of two given curves should be found. [...] Elimination is carried out in the same way no matter*

> *what the power of x may be.* (Euler 1748, E102a, translated by Blaton 1990, pp. 290-291)

Next Euler discussed the problem of the elimination in details and later, in paragraphs 747–483, he presented a method of elimination of the variable y from the system of algebraic equations in two variables x and y. He started with two equations of the first degree in y, and in the following paragraph he increased the degree of the second equations up to the 4. In the paragraph 479 he considered two equations of the second degree, and subsequently in the next paragraphs degrees 2 & 3, 3& 3 and 4 & 4. We will present Euler's method in the contemporary notation. Let P, Q, R and p, q, r, s be polynomials of the variable x. Consider the system of equations:

$$Py^2 + Qy + R = 0$$

$$py^3 + qy^2 + ry + s = 0.$$

For the elimination of variable y from the system, he multiple the first equation by $py^2 + ay + b$, and the second by $Py + A$[5]. Next he equate *coefficients* and get the system of 5 equations

$$\begin{aligned} Pp &= Pp \\ Pa + Qp &= pA + qP \\ Pb + Qa + Rp &= qA + rP \\ Qb + Ra &= rA + sP \\ Rb &= sA. \end{aligned}$$

He omitted the first equation which is an identity. It is clear that this is a system of 4 linear equations with *variables*: A and a, b and *coefficients*: P, Q, R and p, q, r, s. This system is solvable when *adjoint matrix*:

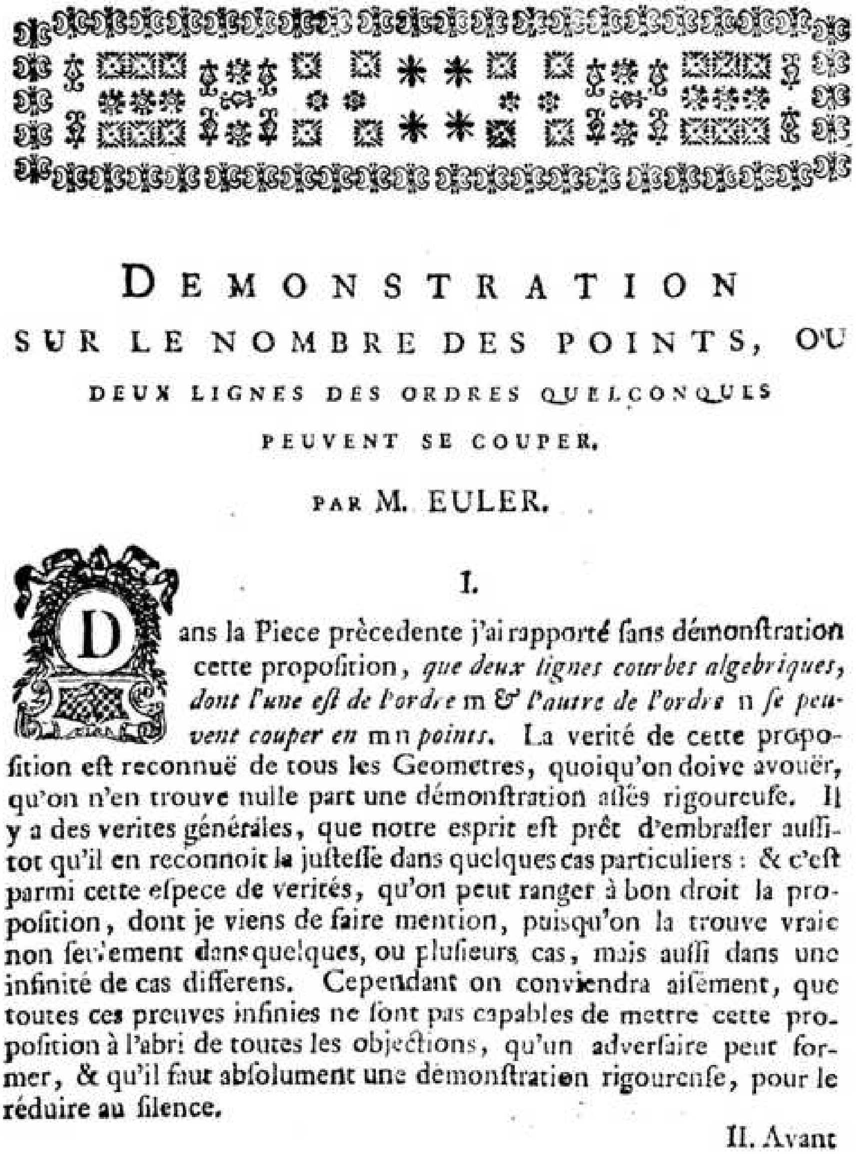
[5] Polynomials a, b and A are auxiliary polynomials in x.

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} p & P & 0 & qP - Qp \\ q & Q & P & rP - Rp \\ r & R & Q & sP \\ s & 0 & R & 0 \end{pmatrix},$$

is singular, which means that $\det \mathfrak{A} = 0$. So, we get the algebraic equation[6]: $p\left(R^2\,(rP - Rp) - Q\,R\,sP\right) - P\,(-q\,R\,sP + s\,P\,sP + (r\,R - s\,Q)\,(rP - Rp)) - (qP - Qp)\left(q\,R^2 - Q\,(r\,R - s\,Q) - s\,P\,R\right) = 0$, which gives the relations between P, Q, R and p, q, r, s in which there is no variable y. Euler's comment on elimination one the variable from the system of any two algebraic equations of an arbitrary degree presented in the last two paragraphs of the paper *Intersection of the curves* (Euler 1748, Blaton translation pp. 308-311) are extremaly interesting part of the paper. Euler sums up his considerations: *Just as we found an equation whose roots provided the location of points of intersection for two given equations, so conversely the intersection of two curves can be used to find the roots of equations.* (Euler 1748, E 102, translated by Blaton, p. 312). Some pages later he added: *However, it can happen that this very arc of the curve has no intersection, even though the abscissa corresponding to some point of the arc is a true root. This can occur since this root corresponds to a complex intersection, or to an intersection of some other branch of the curve. For this reason we will delay no more on this question, which is more a curiosity, than something useful, since we have discussed in sufficient detail all of the truly fundamental facts of all the construction of this kind.* (Euler 1748, E 102, translated by Blaton, pp. 328, 329).

Euler's paper *emonstration sur le nombre des points.* The paper *A Proof Concerning the Number of Points where Two Curves of Arbitrary Order May Intersect* (Euler 1750, translated by Marshall) is rather short (the

[6]Calculated by free software Maxima.



DEMONSTRATION

SUR LE NOMBRE DES POINTS, OU DEUX LIGNES DES ORDRES QUELCONQUES PEUVENT SE COUPER.

PAR M. EULER.

I.

Dans la Piece prècedente j'ai rapporté ſans démonſtration cette propoſition, *que deux lignes courbes algebriques, dont l'une eſt de l'ordre* m *& l'autre de l'ordre* n *ſe peuvent couper en* mn *points.* La verité de cette propoſition eſt reconnuë de tous les Geometres, quoiqu'on doive avouër, qu'on n'en trouve nulle part une démonſtration aſſés rigoureuſe. Il y a des verites générales, que notre esprit eſt prêt d'embraſſer auſſitot qu'il en reconnoit la juſteſſe dans quelques cas particuliers : & c'eſt parmi cette eſpece de verités, qu'on peut ranger à bon droit la propoſition, dont je viens de faire mention, puisqu'on la trouve vraie non ſeulement dans quelques, ou pluſieurs cas, mais auſſi dans une infinité de cas differens. Cependant on conviendra aiſément, que toutes ces preuves infinies ne ſont pas capables de mettre cette propoſition à l'abri de toutes les objections, qu'un adverſaire peut former, & qu'il faut abſolument une demonſtration rigoureuſe, pour le réduire au ſilence.

II. Avant

Figure 1: Title page of *Demonstration sur le nombre des points*

title page of the paper: Figure 1). It is noteworthy because of Euler's comments about points at infinity. Euler wrote: *First, one may point out, that the number of intersections of two curves, one of which is of order m, the other of order n, does not necessarily $= mn$, but it can very often be smaller. Thus it may occur, that 2 straight lines do not intersect at all when they are parallel: and that a straight line intersects a parabola in only one point, and that 2 conic sections intersect each other at only 2 points, or at no point at all. Thus the meaning of our proposition is that the number of the intersections can never be greater than mn, although it is very often smaller; and thus we may consider either that some intersections extend towards infinity, or that they become imaginary. So that in counting the intersections to infinity, the imaginary ones as well as the real ones, one may say, that the number of intersections is always $= mn$.* (Euler 1750, translated by Marshall translation, pp. 1–2) and he stated *Newton's postulate* in the form of the inequality[7]. The discussion of the example of two parallel lines shows that Euler was looking for the intersections at infinity. Probably he was able to eliminate at least one gap in *Newton's proposition.* Moreover, in this paper Euler noted that some algebraic curves could have infinitely many common points[8]. Euler wrote about this fact twice *Yet there may occur some cases, where the number of intersections is infinite, if one wishes to consider the coincidence of 2 equal and similar lines as an infinite number of intersections. This case will occur therefore, if the 2 equations, which describe the 2 lines, are the same, or if they have equal factors* (Euler 1750; E148, translated by Marshall, p. 2) and almost the same text a page later. In paragraphs 16–25 Euler presented a new method of elimination. We will show it in the example (Marshall's translation, paragraph 22, pp. 12–13). Consider two equations:

[7]This form is the most popular form of contemporary Bézout's theorem.

[8]This common part is described by the common factor of two polynomials, like $x^2 - 1$ and $(x-1)^2$ have the common factor $x - 1$.. The situation where two curves have common factor must be eliminated from the considerations.

$$\begin{aligned} yy - Py + Q &= 0 \\ yy - py + q &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

where P, Q, p and q are polynomials in variable x. Denote by A, B and a, b the roots of the polynomials (1). Euler noticed that 'elimination equations' has a form:

$$(A^2 - pA + q)(B^2 - pB + q) = 0,$$

or a form:

$$A^2B^2 - pAB(A + B) + q(A^2 + B^2) - ppAB - pa(A + B) + qq = 0.$$

Putting $AB = Q$ and $A + B = P$ (by Viète formula), he got the relation: $AA + BB = PP - 2Q$, and eventually:

$$Q^2 - pPQ + aPP - 2Qp + ppQ - pqP + qq = 0.$$

This method is more efficient than the previous one and the use of the Viâte's formula is brilliant.

Euler's paper *New method to eliminate the unknown quantities in equations.* The paper *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des equations* (Euler 1766)[9] is the only one in which Euler introduced Newton's name and presented his results from *Arithmetica universalis* (Newton 1722). In the 4th paragraph Euler wrote *[...] we find in the Arithmetica universalis of Mr. Newton some formulas appropriate to this purpose, with the help of which the elimination can be easily done, even when the quantity to eliminate rises, in the two equations, up to four dimensions.* (Euler 1766,

[9] *The paper was written in 1752 and according to C. G. J. Jacobi [...] a treatise with approximately the same title was presented to the Berlin Academy on February 10, 1752 and the manuscript of the printed treatise can be found in the archive of the Berlin Academy* (Euler Archive).

E310, translated by Doucet, p. 2). And some pages later he added: *Given two indeterminate algebraic equations, find the determinations necessary for these equations to obtain two common roots* (Euler 1766, E 310, translated by Doucet, p. 11). In paragraphs 5–9 Euler described Newton's algorithm. Main Euler's result is contained in paragraphs 22–23, where he illustrated a new and a shorter method of determining a resulting polynomial. The method is as follows: let $P_1(x,y) = z^3 + Pzz + Qz + R$ and $P_2(x,z) = z^4 + pz^3 + qzz + rz + s$ (where P, Q, R and p, q, r are polynomials in variable x) in variable z. Find relations between *coefficients* P, Q, R and p, q, r sufficient for common roots or common factor of these two polynomials. Introduce auxiliary terms $z+\alpha$ and $z+\beta$ and rewrite $P_1(x,z) = z^3 + Pzz + Qz + R = (z+\alpha)(z+\beta)(z+A)$ and $P_2(x,z) = z^4 + pz^3 + qzz + rz + s = (z+\alpha)(z+\beta)(zz+az+b)$ and finally eot the equation $(z^3+Pzz+Qz+R)(zz+az+b) = (z^4+pz^3+qzz+rz+s)(z+A)$. Comparing coefficients at the same powers of variable z we get the system of equations:

$$\begin{aligned} P + a &= p + A \\ Q + aP + b &= q + Ap \\ R + aQ + bP &= r + Aq \\ aR + bQ &= s + Ar \\ bR &= As. \end{aligned}$$

Eventually we get a relations:

$$\begin{aligned} 0 &= ss + 2Rs(P-p) - PQs(P-p) + Qs(Q-q) + R(P-p)(Pr-rP) \\ &\quad +R(Q-q)(R-r) \\ 0 &= Pss + Rs(Q-q) + PRs(P-p) + R(P-p)(Qr-Rq) + Qs(R-r) \\ &\quad -QQs(P-p) + R(R-r)^2. \end{aligned}$$

The presented method is universal for the polynomials of any degree, and Euler did noticed it *[...] it will not be difficult to find the conditions un-*

der which two equations of arbitrary degree will acquire three common roots. ((Euler 1766, E 310, translated by Doucet, p. 13).

Bézout's method of eliminations. Bézout in the paper *Reserchers sur le degré des équations résultantes...* (Bézout 1764) described a new algorithm for the elimination of one variable from a system of equations of two variables. In fact, he reduced problem of solving a system of algebraic equations to solving a system of linear equations[10]. To illustrate Bézout's methods, we will follow Wimmer's presentation of it in a modern way (Wimmer 1990). Let F i G be polynomials of variables x and y, both of degree 4 in y. Denote

$$F = f_0 + f_1 y + f_2 y^2 + f_3 y^3 + f_4 y^4$$

$$G = g_0 + g_1 y + g_2 y^2 + g_3 y^3 + g_4 y^4$$

where f_i and g_i for $i = 0, 1, 2, 3, 4$ are polynomials of variable x; and $f_4 \neq 0$, $g_4 \neq 0$. Bézout's modification is following:

$$\begin{aligned}
F^{(1)} &= f_1 + f_2 y + f_3 y^2 + f_4 y^3 \\
F^{(2)} &= f_2 + f_3 y + f_4 y^2 \\
F^{(3)} &= f_3 + f_4 y \\
F^{(4)} &= f_4 \\
G^{(1)} &= g_1 + g_2 y + g_3 y^2 + g_4 y^3 \\
G^{(2)} &= g_2 + g_3 y + g_4 y^2 \\
G^{(3)} &= g_3 + g_4 y \\
G^{(4)} &= g_4.
\end{aligned}$$

[10]Later, in a modified version of this method Sylvester and Cayley used determinants. In those time the names: *Bézout matrix* and *bézoutian* for a special square matrix associated with two polynomials and the determinant of this matrix were introduced.

Next we define:

$$\begin{aligned} B^{(1)} &= FG^{(1)} - GF^{(1)} \\ B^{(2)} &= FG^{(2)} - GF^{(2)} \\ B^{(3)} &= FG^{(3)} - GF^{(3)} \\ B^{(4)} &= FG^{(4)} - GF^{(4)}. \end{aligned}$$

The determinant of the matrix of the defined system of equations is a polynomial in one variable x. And this main achievement is *The next step in generalization was to determine the degree of the éliminant, or equation for common points satisfying two simultaneous equations of any orders, m and n.* (White 1909).

Bézout realized that his algorithm can be generalized to the case of equations any degree. Unfortunately, for methodological shortage his consideration had to be limited. He wrote it in words full of bitterness *However, to solve this task, I invite the lucky ones, who have more time, which we have, than I am* (Bézoute 1764, following Wimmer's translation, Wimmer 1990, p. 32). Stillwell wrote: *Unfortunately, it was not realized until the 19th century that projective geometry and analytic geometry needed each other. Until then, projective geometry developed without coordinates and all attempts to prove Bézout's theorem —- notably by Maclaurin (1720), Euler (1748b), Cramer (1750), and Bézout (1779) – foundered for want of a proper method for counting points at infinity. As a result, Bézout's theorem, which turned out to be the main achievement of the theory of construction of equations, was not properly proved until long after the theory itself had been abandoned* (Stillwell 2010, pp. 119–120).

The elimination of methodological obstacles and the final result. In 1799, young Gauss published a proof of the Fundamental Theorem of

Algebra, but it has a topological gap[11], which was not noticed in those timet. As the result the degree (algebraic and complex) of the resultant of two given equations give us the number of common points of the corresponding plane curves. So the first obstacle to the general result on the number of common points of two plane algebraic curves was removed. But this result did not make *Newton's postulate* to be strictly true.

In the early 19th century German mathematician August Ferdinand Möbius (1790-1868) in 1827 in the work *Der barycentrische Calcül* introduced coordinates appropriate for the projective plane. This coordinates, called *homogenous* are used to locate the point of intersection located in the *infinity.* White in the paper *Bézout's theory of resultants and its influence on geometry* presented the role of homogenous coordinates to the theory of eliminations: *By eliminating one variable from two equations one has as éliminant the equation of a cone with vertex at infinity. Treat this in homogeneous coordinates, and we have a cone with vertex at any point, and containing the curve in such a way that on each generator there lies a single point of the curve* (White 1909). To illustrate the application of Möbius coordinate let consider an equation $p(X,Y)=0$ of the algebraic plane curve. For $Z\neq 0$, consider $p\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$. Denote $\det p = n$. Then $z^n p\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$ is a *homogenous equation* of the curve. To see the applications of this method fix: $X+Y=0$ and $X+Y+1=0$. Homogenous equations are $x+y=0$ and $x+y+z=0$, and the common "point" of two parallel lines is $(0,0,\lambda)$ (λ is a parametr), which is one "point at infinity" connected with the direction of two parallel lines. It is noteworthy that before Bézout's theorem was eventually proved, Plücker[12] presented the

[11]Smale stated *...I wish to point out what an immense gap Gauss' proof contained. It is a subtle point even today that a real algebraic plane curve cannot enter a disk without leaving. In fact even though Gauss redid this proof 50 years later, the gap remained. It was not until 1920 that Gauss' proof was completed. In the reference Gauss, A. Ostrowski has a paper which does this and gives an excellent discussion of the problem as well...* in: Smale, S.: 1981. The Fundamental Theorem of Algebra and Complexity Theory, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4, no 1.

[12]Plücker, J. (1847). Note sur le théorème de Pascal. J. reine angew. Math. 34, 337–340. Gesammelte Mathematische Abhandlungen, pp. 413-–416.

excellent proof of Pascal's theorem by showing that it is an easy consequence of Bézout's theorem.

Some historians of mathematics say that the problem of the multiplicity of common roots of two algebraic occured in Descartes' *La Geometrie* but with no doubt the definition of the multiplicity of the intersection of two algebraic curves was developed until the early twentieth century. Satisfactory and effective definition where given in the second half of the nineteenth.

Eventually, in 1872 a French mathematician Georges-Henri Halphen (1844-1989) in the paper *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre* (Halpen 1872) presented a valid general proof of *Newton's postulate* on the number of common points of two plane algebraic curves.

Conclusion. The story continues. At the beginning of the twentieth century Francesco Severi (1879-1961) and Beniamino Segre (1903-1977) and next John Arthur Todd (1908-1994) studied the case of submanifolds, which generalize the concept of a curve. In 1930 André Weil (1906-1998), Oscar Zariski (1899-1986) and others initiated the first renewal of algebraic geometry and gave more rigorous basis to the intersection theory. Elimination theory evoluated and those *ancient techniques* used by Newton, Euler, Bézout and others were replaced by *Gröbner basis*[13] technique introduced by an Austrian mathematician Bruno Buchberger(1942-).

References

[1] Bézout, É.: 1764. Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens qu'on doit employer pour trouver ces équations. *Histoire de l'Académie royale des sciences, Mémoires de Mathématique et Physique pour la meme année*, 288–338, Paris (published 1797).

[13] For basic on the theory see Buchberger 2001, and for applications Cox et all 1996.

[2] Buchberger, B.: 2001. *Gröbner Bases: A Short Introduction for Systems Theorists Research Institute for Symbolic Computation.* University of Linz, A4232 Schloss Hagenberg, Austria (on-line: http://www.risc.jku.at/people/buchberg/papers/2001-02-19-A.pdf)

[3] Ciesielska, D.: 2013. Twierdzenie Bézouta o przecięciu krzywych algebraicznych w pracach Eulera, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 5, pp. 39–50.

[4] Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: 1996. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York. ISBN 978-1-4419-2257-1.

[5] Cramer, G.: 1750. *Introduction 'a l'analyse des linges courbes algebriques*, Freres Cramer & Cl. Philbert, Geneve.

[6] Euler, L.: 1748. *Introductio in analysin infinitorum*, vol. 2. This book is numbered E102 in Eneström's index of Euler's work. English translation: *Introduction to analysis of the infinite*, Book II, by J. D. Blanton, Springer, New York 1990.

[7] Euler, L.: 1750. Demonstration sur le nombre des points, ou deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper, *Memorier de l'academie des sciences de Berlin* 4 (1748), pp. 234–248. This article is numbered E148 in Eneström's index of Euler's work. English translation: A proof concerning the number on points in which two lines of arbitrary orders may intersect. Translated by Winifred Marshall, edited by Robert E. Bradley. The Euler Archive, 2005.

[8] Euler, L.: 1766. Nouvelle methode d'eliminer les quantites inconnues des equations, *Memorier de l'academie des sciences de Berlin* 20, pp. 91–104. This article is numbered E310 in Eneström's index of Euler's work. English translation: New method to eliminate the unknown quantities in equations. Translated by Tood Doucet. The Euler Archive.

[9] Halphen, G.-H.: 1872-1873. Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre, *Bulletin de la Société Mathématique de France* 1, pp. 11–33. ISSN: 0037-9484

[10] Kirwan, F.: 1992, *Complex Algebraic Curves*, Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 052141251X

[11] Maclaurin, C.: 1720. *Geometrica organizaa sive descripto linearum curvarum universalis*, G. & J. Innys, Londini.

[12] Newton, I.: 1722. *Arithmetica universalis: sive de compositione et resolutione arithmetica liber*, Londyn.

[13] Stillwell, J.: 2010. *Mathematics and its history*, Third Edition, Springer UTM, New York Berlin Heidlberg. ISBN 978-1-4419-6052-8.

[14] Wimmer, H.K.:1990. On the History of the Bezoutian and the Resultant Matrix, *Linear Algebra and its Applications* 128, pp. 27–34.

[15] White, Henry S.: 1909. Bezout's theory of resultants and its influence on geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society,* 15, 1909, pp. 325–338.

Danuta Ciesielska,
L.&A. Birkenmajer Institute for the History of Science,
Polish Academy of Sciences, ul. Nowy Świat 72, 00-330 Warsaw, Poland
e-mail: `smciesie@cyfronet.krakow.pl`

Christa Binder, Nada Razpet, Wolfgang Breidert

Mathematatik und Musik in der organischen Chemie

M.Čanak, J. Fempl Madjarević

1. Einleitung

Chemie ist eine Wissenschaft, die den Aufbau, die Eigenschaften und die Umwandlung von Molekülen jeglicher Stoffe erforscht. Ein Teilgebiet der Chemie, die organische Chemie, wird manchmal populär als die Chemie des Kohlenstoffes und seiner Verbindungen definiert. Auf der Grundlage dieses Sachverhaltes suchen und finden wir das Vorkommen der Musikstrukturen und der mathematischen Dimensionen in der organischen Chemie.

Im weiteren Vortrag werden wir uns auf die Kohlenwasserstoffe begrenzen. Das sind chemische Verbindungen, die in ihrem Molekül nur Kohlenstoff- und Wasserstoffatome enthalten. Zum leichteren Verständnis der Grundidee werden wir eine neue Begrenzung auf die sogenannten Alkane einführen. Das sind Verbindungen mit ausschließlich einfachen Verknüpfungen (Einfachbindungen) und ohne funktionelle Gruppen, sodass sie eine geringe chemische Reaktivität zeigen.

Die allgemeine Summenformel der Alkane lautet:

$$C_nH_{2n+2}$$

in der *n* eine natürliche Zahl darstellt. Das erste Glied dieser Reihe ist Methan, es folgen Ethan, Propan, Butan und weitere (siehe Darstellung auf den nächsten Seiten).

Jedes Glied dieser Reihe unterscheidet sich vom nächsten durch einen Kohlenstoff- und zwei Wasserstoffatome, d.h. durch die CH_2 - Gruppe, die als Methylengruppe bezeichnet wird. Das bedeutet, dass die Alkane eine homologe Reihe bilden, in der jedes einzelne Glied ein Homolog ist. Dem Pentan folgen Hexan, Heptan, Oktan, Nonan, Decan, Undecan, Dodecan und weitere.

Wolfgang Breidert, Nada Razpet, Marko Razpet, Annette Vogt

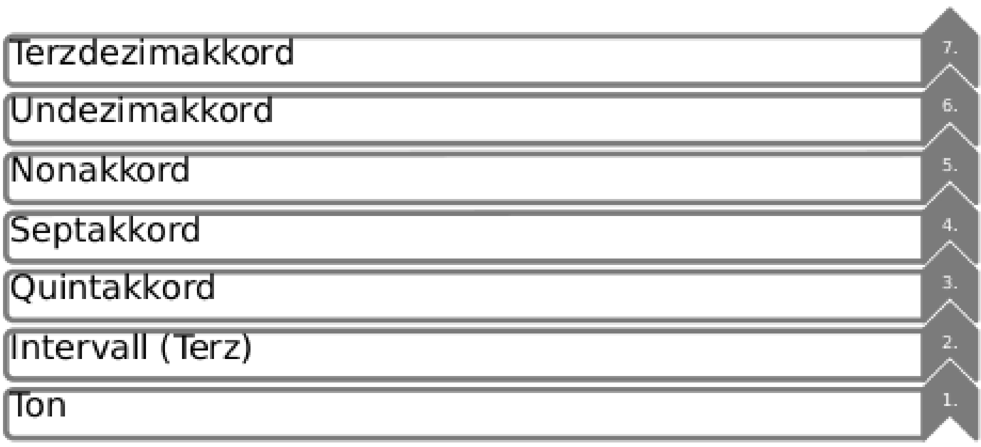
1

2. Musik und Akkordbasis des Kohlenwasserstoffes

Während ein Zusammenklang zwei oder mehr Töne, die in irgendeinem Verhältnis zueinander stehen, bezeichnet, meint und bezeichnet man mit einem Akkord einen Zusammenklang von drei unterschiedlichen Tönen, die nach bestimmten Aufbauprinzipien aufgrund eines Grundintervalls organisiert sind. Die traditionelle Harmonie besteht aus Akkorden, die ausschließlich im Terzabstand aufgebaut werden und wenn wir uns auf die großen und kleinen Terzen beschränken (siehe [1]), dann bekommen wir durch ihre Schichtung sogenannte diatonische Akkorde. Ein Akkord, der sich aus drei Tönen zusammensetzt, wird Dreiklang genannt, aus vier Tönen ist es ein Vierklang, aus fünf - ein Fünfklang. In der neueren Harmonieentwicklung, seit des Impressionismus des 19. Jahrhunderts werden auch Sechs- und Siebenklänge mit einbezogen, während der achte Akkordton eigentlich eine Wiederholung des ersten wäre (nur um zwei Oktaven höher).

Die Grundform eines Dreiklangs ist der Quintakkord, eines Vierklangs der Septakkord, eines Fünfklangs der Nonakkord, eines Sechsklangs der Undezimakkord und eines Siebenklangs der Terzdezimakkord.

In seiner Schrift (siehe [2]) hat Rudolf Wille ein hierarchisches Modell des Terzaufbaus der Akkorde entwickelt. Die Akkorde der siebenstufigen diatonischen Skala hat er als eine Untermenge der Zahlenmenge {1, 2, 3,4, 5, 6, 7} ausgedrückt und dann eine komplexe Arbeitstabelle und den entsprechenden hierarchisch orientierten Graph zusammengestellt. Die Scheitelpunkte des Graphs sind die einzelnen Akkorde und die gerichteten Kanten gründen auf der Relation: ein Akkord ist in dem anderen enthalten. Beispiel: "Ein Quintakkord ist im Septakkord enthalten". Auf der graphischen Darstellung ist der gerichtete Grundweg dieses Graphs zu sehen.



Auf dieser Hierarchie basiert zum Teil auch die musikalische Interpretation der Kohlenwasserstoffe, insbesondere der Alkane. Es wird der Termin "homologe Alkanreihe" benutzt.

2

In seiner Monografie [3] hat D. Kolk detailliert einige Beziehungen zwischen der Chemie und der Musik dargestellt. Auf der anderen Seite ist im Buch [4] von M. Čanak besonders die Rede vom universellen Oktavgesetz. Aus beiden Quellen geht die Anwesenheit des Oktavgesetzes in der Chemie hervor, es ist aber erst durch das Erscheinen des Periodensystems der Elemente von Mendelejew zum vollen Ausdruck gekommen. Die Oktavtöne werden durch die Edelgase representiert, zwischen ihnen liegen die weiteren Elemente, bzw. Töne. Die Natur hat das Temperieren so durchgeführt, dass die zweite und dritte Oktave je acht Elemente enthalten, die vierte und fünfte je achtzehn usw.

In diesem Sinne gehen wir von den Kohlenwasserstoffen in der homologen Alkanreihe aus, wobei die Kohlenstoffatome die Bedeutung der Akkordtöne tragen, die die Grundharmonie und den Zusammenklang schaffen, während die Wasserstoffatome als benachbarte Töne außerhalb der Akkorde in der melodischen Aufwärtsbewegung interpretiert werden.

Das erste Glied der homologen Alkanreihe ist Methan CH_4. Dem Kohlenstoff C wird der Ton *g*, aus dem zwölftönigen temperierten System, zugeordnet. Den Wasserstoffatomen H ordnen wir nacheinander die Töne *as, a, b, h,* in Halbtonschritten der Aufwärtsbewegung, zu. Aufgrund dessen entspricht dem Methan der unten dargestellte Zusammenklang der Töne (Bild 1).

Bild 1

$$\begin{array}{ccccc} & & H & & \\ & & | & & \\ H & - & C & - & H \\ & & | & & \\ & & H & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} & & as & & \\ & & | & & \\ a & - & g & - & h \\ & & | & & \\ & & b & & \end{array}$$

Das zweite Glied der homologen Reihe ist Ethan C_2H_6. Dem zweiten Kohlenstoffatom, der an die Stelle des früheren Wasserstoffatoms H tritt und der dem Ton *h* zugeordnet wurde, wird jetzt der gleiche Ton zugeordnet und den anderen Wasserstoffatomen folgende Töne: *c, des, d* in weiterer Aufwärtsbewegung. So entspricht dem Ethan C_2H_6 folgender Zusammenklang der Töne (Bild 2):

$$\begin{array}{ccccccc} & & H & & H & & \\ & & | & & | & & \\ H & - & C & - & C & - & H \\ & & | & & | & & \\ & & H & & H & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccccc} & & as & & c & & \\ & & | & & | & & \\ a & - & g & - & h & - & d \\ & & | & & | & & \\ & & b & & des & & \end{array}$$

Bild 2

In diesem Zusammenklang dominiert die große Terz <u>*g - h*</u>.

Das dritte Glied der homologen Reihe ist Propan C_3H_8 . Dem dritten Kohlenstoffatom, der an die Stelle des früheren Wasserstoffatoms *H* tritt und der dem Ton *d* zugeordnet wurde, wird jetzt der gleiche Ton zugeordnet und den anderen Wasserstoffatomen folgende Töne: *es, e, f* in weiterer Aufwärtsbewegung. So entspricht dem Propan C_3H_8 folgender Zusammenklang der Töne (Bild 3):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & H & & H & & H & & \\ & & | & & | & & | & & \\ H & - & C & - & C & - & C & - & H \\ & & | & & | & & | & & \\ & & H & & H & & H & & \end{array}$$

Bild 3

$$\begin{array}{ccccccccc} & & as & & c & & es & & \\ & & | & & | & & | & & \\ a & - & g & - & h & - & d & - & f \\ & & | & & | & & | & & \\ & & b & & des & & e & & \end{array}$$

In diesem Zusammenklang dominiert der Dur Dreiklang <u>*g - h - d.*</u> Wir bemerken, dass der Zusammenklang des Ethans im Zusammenklang des Propans enthalten ist, so wie die große Terz *g - h* im Dur Dreiklang *g - h - d*. Mehr noch, wenn wir uns auf der homologen Alkanreihe weiterbewegen, erleben wir eine Ausweitung und Expansion. Wir haben das Gefühl, als ob diese Reihe lebendig ist, Musik schafft, wächst und sich entwickelt. Wir bemerken auch, dass der Dur Dreiklang zu den wichtigsten Dreiklängen der klassischen musikalischen Harmonie und Tonalität gehört.

Gleichermaßen können wir unsere Betrachtungen zu den nächsten Gliedern der homologen Reihe, wie Butan, Pentan, Hexan, Heptan und Oktan, fortsetzen. Dabei werden wir einfachheitshalber nur das betrachten, was im musikalischen Sinne mit dem Kohlenstoff geschieht, weil das für uns am wichtigsten ist.

Dem vierten Kohlenstoffatom entspricht der Ton f, sodass sich dem Butan der Septakkord <u>*g - h - d - f*</u> anschließt. Pentan erweitert sich zum Nonakkord *g - h - d - f - a*, Hexan zum Undezimakkord *g - h - d - f - a - c* und Heptan zum Terzdezimakkord *g - h - d - f - a - c - e.* Hier könnten wir unsere Betrachtungen aus der Sicht der Musik im Sinne des hierarchischen Modells von Rudolf Wille beenden. Die Einführung eines neuen Akkordtons g beim Oktan würde den Terzkreis (um zwei Oktaven höher) schließen und alle Töne der siebenstufigen diatonischen Skala, die akkordisch aufgebaut ist, umfassen.

Eine weitere Bewegung entlang der Elemente der homologen Reihe, wie Nonan, Decan, Undecan, Dodecan... würde eine periodische Wiederholung der Töne der homologen musikalischen Reihe *g, h, d, f, a, c, e, g...* mit einer Periode aus zwei Oktaven darstellen.

Nun ist es möglich das Thema vereinfacht zu betrachten und folgende Abbildung einzuführen. Dem Methan CH_4 ordnen wir den Ton *g* und den eindimensionalen Vektor (g) zu. Dem Ethan C_2H_6 die große Terz *g - h* und den zweidimensionalen Vektor (g, h). Dem Propan C_3H_8 wird der Durdreiklang *g- h - d* und der dreidimensionale Vektor (g, h, d) zugeordnet. Dem Butan C_4H_{10} entspricht der dominante Septakkord *g - h - d - f* und der vierdimensionale Vektor (g, h, d, f). Im Allgemeinfall entspricht dem n - Glied der homologen Reihe ein n- dimensionaler Vektor.

Diese Dimensionalität bezeichnet im musikalischen Sinne die Tatsache, dass n-Instrumente im Orchester gleichzeitig n-Mal unterschiedliche Töne produzieren. Beim Kohlenwasserstoff

4

werden Kohlenstoffatome der Grundreihe mit 1, 2, 3, 4, ... gekennzeichnet. Mathematisch kann diese Dimensionalität auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

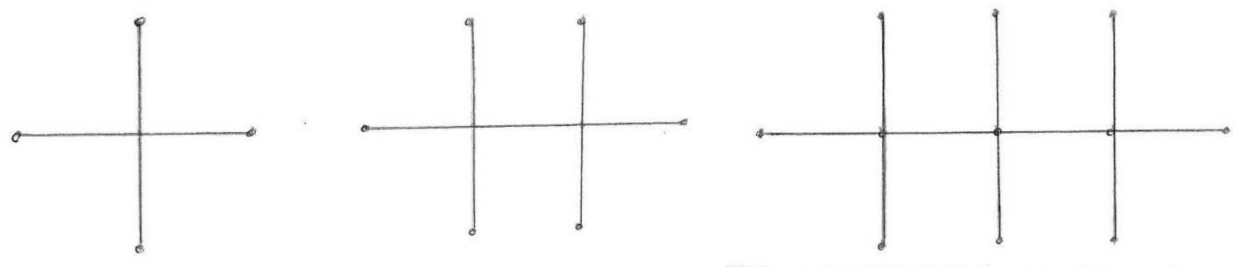
Methan: CH_4 $\rightarrow$ z = 4 x_1
Ethan: C_2H_6 $\rightarrow$ z = 3 x_1 +3 x_2
Propan: C_3H_8 $\rightarrow$ z = 3 x_1 +2 x_2 +3 x_3
Butan: C_4H_1 $\rightarrow$ z = 3 x_1 +2 x_2 +2 x_3 +3 x_4
Pentan: C_5H_1 $\rightarrow$ z = 3 x_1 +2 x_2 +2 x_3 +2 x_4 +3 x_5 u.s.w.

Die Komponenten x_k kennzeichnen einzelne Kohlenstoffatome und der Koeffizient davor stellt die Anzahl der Wasserstoffatome dar, die mit dem entsprechenden Kohlenstoffatom verbunden sind. Dem Alkan $C_n H_{2n+2}$ würde die n-dimensionale Hyperfläche

z= 3 x_1 +2 x_2 +2 x_3 +...+2 x_{n-1} +3 x_n

und musikalisch ein n-Dreiton in der Terzschichtung entsprechen.

Dies ist der Anfang der Geschichte über die Beziehung zwischen der Musik und der Chemie. Den Ton verbinden wir mit dem chemischen Element, und die Tonzusammenklänge und Akkorde mit den chemischen Verbindungen. Diesbezüglich hat es sich als angemessen gezeigt, bei den Verbindungen mit den Alkanen und ihren homologen Reihen zu beginnen. Das ist auch aus der Sicht der Graphentheorie gerechtfertigt. Den ersten drei Elementen der homologen Reihe entsprechen folgende Graphen:



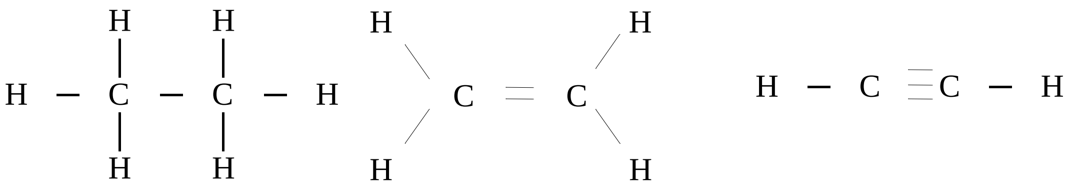
Methan Ethan Propan

Bild 4

Alle Knoten sind vierten oder ersten Grades, was der vierwertigen Valenz des Kohlenstoffes und der einwertigen Valenz des Wasserstoffes entspricht. Auf diese Weise ließe sich eine komplexe paralelle Beziehung zwischen den chemischen Verbindungen und den musikalischen Zusammenklängen und Akkorden weiterbauen. Die Musik wird durch die musikalischen Bewegungen und dem Wechsel der Harmonien im Melodieverlauf lebendig. Dem entsprechen dazugehörende chemische Reaktionen.

3. Das mathematische Modell des Kohlenwasserstoffs

Das mathematische Modell des allgemeinen Gliedes der homologen Alkanreihe ist eine lineare Funktion mit n Variablen: $z = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + ... + 2x_{n-1} + 3x_n$. Was ist mit anderen Wasserstoffen? Betrachten wir als Beispiel drei nahestehende Verbindungen: Ethan, Ethen und Ethin.



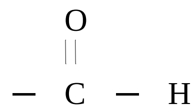
Ethan Ethen Ethin

$z = 3x_1 + 3x_2$ $z = 2x_1 + 2x_2$ $z = x_1 + x_2$

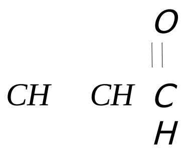
Bild 5

Die Koeffizienten 2 in der linearen Funktion des Ethens weisen darauf hin, dass eine Zweifachbindung zwischen den Kohlenstoffatomen vorliegt, und die Koeffizienten 1 in der linearen Funktion des Ethins, dass eine Dreifachbindung besteht, sie stehen in Korrelation zur Valenz des Kohlenstoffes.

Betrachten wir noch das Beispiel der Aldehyde mit der Charakteristik



Während dem Propan $CH_3\ CH_2\ CH_3$ die Funktion $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$ entspricht, entspricht der Verbindung Propanol dieselbe Funktion, was nicht wundern sollte.

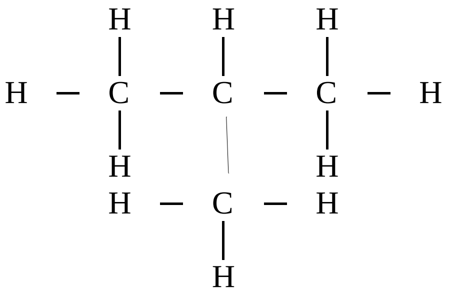


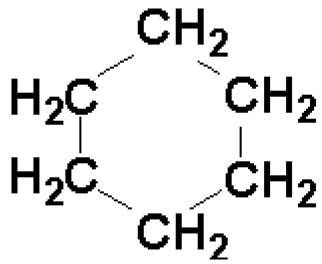
Einer Funktion können viele unterschiedliche chemische Verbindungen entsprechen. Diese Funktion beschreibt die Konfiguration der Kohlenstoffatome. Mit jedem Kohlenstoffatom können mehrere unterschiedliche Atome oder Moleküle unterschiedlicher Elemente verknüpft werden.

Entsprechungen finden wir in der Musik bei der Musikform "Thema mit Variationen". Ein und demselben musikalischen Thema werden mehrere unterschiedliche, oft komplexe Variationen beigefügt. Das Grundskelett (das Thema) bleibt in jeder von ihnen gleich. Es sei angemerkt, dass der Begriff "Skelett" auch in der Graphentheorie wichtig ist.

6

Ein viel größeres Problem bei der mathematisch-musikalischen Interpretation stellen folgende Beispiele des Kohlenwasserstoffs dar:

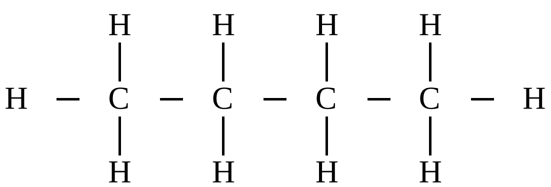




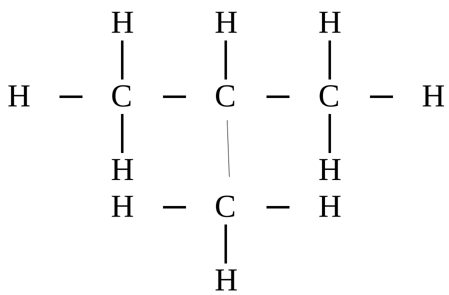
Isobutan C_4H_{10} Cyclohexan C_6H_{12} Bild 6

Über dieses Thema wird in einer der zukünftigen Abhandlungen die Rede sein. Hervorheben sollte man folgendes:

Aus der Einleitung in die Algorithmentheorie ist bekannt, dass Algorithmenstrukturen bedingt in lineare und zyklische aufgeteilt werden können und lineare weiter in einfache und verzweigte. In bisherigen Betrachtungen hatte die Anordnung der Kohlenstoffatome eine linienförmige Struktur. Beim Isobutan haben wir eine verzweigte und beim Cyclohexan eine zyklische Struktur.
Isobutan führt uns zum Problem der Anzahlbestimmung der Isomere einer Verbindung. Isomere sind chemische Verbindungen, dessen Moleküle aus denselben Atomen bestehen, die sich aber in der Verknüpfungsstruktur der Atome unterscheiden. So zum Beispiel kann man sich für die Verbindung C_4H_{10} folgende zwei Strukturformeln denken:



Butan



Isobutan Bild 7

Da der Kohlenstoff vier Valenzelektronen hat und der Wasserstoff nur einen, lautet das Problem: Wie viele nicht isomorphe verbundene Graphen mit vier Knoten vierten Grades und zehn Knoten ersten Grades gibt es? Unmittelbar kann man erkennen und überprüfen, dass alle Lösungen auf dem Bild oben gegeben sind (es gibt zwei).

Wenn man weiter in diese Richtung geht, zeigt es sich, dass sich die Zahl der Strukturformeln, bzw. der Graphen um eine Molekülformel vergrößert, wenn sich die Zahl der Kohlenstoffatome im Molekül vergrößert. Dementsprechend gibt es für $C_5 H_{12}$ drei Strukturformeln, bzw. Graphen, oder drei Isomere (Bild 8).

```
                                                            C
                                                            ||
C — C — C — C — C      C — C — C — C                C — C — C
                                |                           |
                                C                           C
```

Bild 8

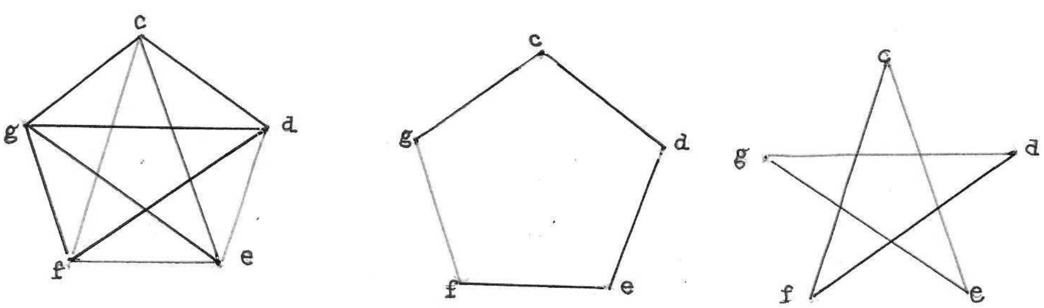
Für die Molekülformel $C_{40} H_{82}$ zeigen Ausrechnungen, dass es theoretisch möglich ist, über 62 Billionen unterschiedlicher Strukturformeln zu schreiben.

Die Folgerung ist eindeutig. Dem mathematischen Modell z= 3 x_1 +2 x_2 +...+2 x_{n-1} +3 x_n und der entsprechenden Molekülformel $C_n H_{2n+2}$ entsprechen mehrere Strukturformeln, Graphen und Verbindungen.

4. Noch ein Beispiel der Beziehung zwischen der Musik, der Graphentheorie und der Chemie

Bisher sind wir auf die zwölftönige temperierte und die diatonische siebenstufige Tonleiter gestoßen. In diesem Beispiel lernen wir auch die chinesische Pentatonik kennen.

Es ist bekannt, dass der Komplementgraph Ā eines Graphen A die gleiche Knotenmenge besitzt wie der Ursprungsgraph, aber zwei Knoten bei Ā sind nur dann mit einer Kante verbunden, wenn diese Kante bei A nicht besteht.



8

Bild 9Der musikalische Graph K_5 der Tonleiter der chinesischen Pentatonik kann in zwei untergeordnete Graphen K_5^0 und seinem Komplement K_5^0 zerteilt werden. Wird der erste K_5^0 orientiert, stellt er die übliche, stufige Tonbewegung auf dieser Tonleiter dar. Der komplementäre Graph K_5^0, in der Form eines fünfzackigen Sterns, stellt die zweite Möglichkeit dar, wie alle Töne der Leiter umlaufen werden können; gleichzeitig ist er auch analog zum Quintenzirkel der zwölftönigen temperierten Tonleiter. Diese Tonleiter wird bei Tasteninstrumenten eingesetzt und bei ihnen kann man zwei musikalische Bewegungen, mit denen alle Töne erfasst werden, erkennen: die Bewegung auf der Tonleiter und die auf dem Quintenzirkel.

Dieses Beispiel zeigt, dass komplementäre Graphen auch in anderen Tonsystemen eingesetzt werden können um sie in elementare musikalische Bewegungen zu zerlegen.

Andererseits sind der Graph K_5 und seine untergeordneten Graphen K_5^0 und K_5^0 auch bei den sogenannten reaktionären Graphen in der Chemie bedeutend. (siehe [5]).

Literaturverzeichnis

[1] M. Čanak, "Über den Terzenaufbau der Akkorde", VII Öster. Symposium zur Geschichte der Mathematik, Miesenbach 2004, S. 40 - 48

[2] R. Wille, "Musiktheorie und Mathematik", Salzburger Musikgespräch1984 unter Vorsitz von Herbert von Karajan, Springer - Verlag, 1984, S. 4 - 31

[3] D. Kolk, "Zahl und Qualität", Schriften über Harmonik, Nr. 19, Bern, 1995

[4] M. Čanak, "Matematika i muzika", Zavod za udžbenike, Beograd, 2009

[5] G. Jones, E. Lloyd, "Gruppi avtomorfizmov nekotorih himičeskih grafov" (prevod sa engleskog), Chemical applications of topology and graph theory, Georgia, USA, 1983.

Autoren:

Prof. Dr. Miloš Čanak
Anschrift:
11000 Belgrad, Brzakova 4
Serbien
E-Mail:
miloscanak12@yahoo.com

Prof. Jasna Fempl - Mađarević
Anschrift:
11000 Belgrad, Vidikovački venac 27
Serbien
E-Mail:
jasnafm@gmail.com

ON ALGEBRA IN LWÓW IN THE YEARS 1870–1940

STANISŁAW DOMORADZKI, MAŁGORZATA STAWISKA, AND MYKHAILO ZARICHNYI

ABSTRACT. We focus on algebra in Lwów (Lvov) in the years 1870–1940. We argue that, while algebra was not developed up to the level comparable with that of other areas, especially functional analysis in the peak years of the Lwów School of Mathematics, it nevertheless occupied an important place in the research and teaching of the mathematical community of Lwów.

1. INTRODUCTION

Algebra has continually played an important role in world mathematics since the Antiquity, but Poland did not have a strong tradition in this area, with the prominent exception of the achievements of Józef Maria Hoene-Wroński (1776-1853). Some authors maintain that algebra was poorly developed in the 19th and early 20th century in the occupied Polish territories and then in the independent Republic of Poland. In this note we focus on algebra in Lwów (Lvov) in the years 1870–1940. We argue that, while algebra was not developed up to the level comparable with that of other areas, especially functional analysis in the peak years of the Lwów School of Mathematics, it nevertheless occupied an important place in the research and teaching of the mathematical community of Lwów. During the Autonomy of Galicia, it was well represented in the academic curricula and textbooks. The teaching and research in algebra in Lwów was revived after 1918 by Eustachy Żyliński. Notable results in the interwar period were also obtained by Stefan Banach, Józef Schreier, Stanisław Ulam, Stefan Kaczmarz, Andrzej Turowicz and Stanisław Mazur.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 01A Secondary 12-03, 20-03.

1

2. Modern algebraic notions in Lwów curricula in the years 1870-1918

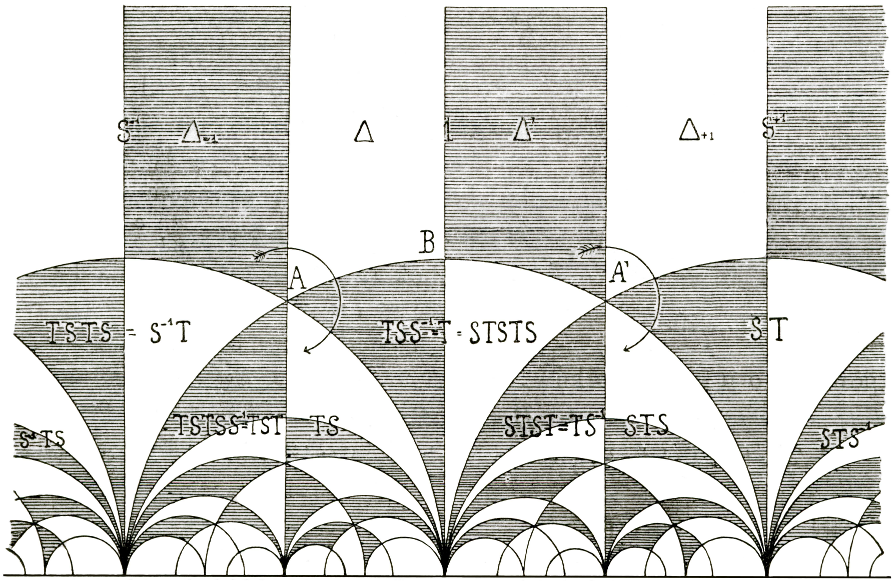
At the turn of the 19th and 20th centuries, algebra was taught in Lwów by Oskar Fabian (a physicist), Józef Puzyna, Władysław Kretkowski, Władysław Zajączkowski, Placyd Dziwiński and Jan Rajewski. Kretkowski published the first linear algebra textbook in Polish and possessed study notes in Galois theory (see [3] for details). Zajączkowski published an academic textbook "The Principles of Higher Algebra" (1884), which, among other things, presented the theory of determinants and of algebraic equations and contained Bezout's theorem and Abel-Ruffini theorem (see [4]). Dziwiński lectured on algebra at the Lvov Polytechnic School and authorized the publication of his lecture notes (1885-86). He treated theory of determinants and their application to solving linear equations and to continued fractions.

Importance of algebra at the Polytechnical school in Lwów can be seen from, e.g., the program in Algebra (academic year 1878/79), which included the following topics: Evolution of the concept of number. Concept of function and classification of functions. Algebraic equations. Expansion of determinate and indeterminate equations of the first degree. Essential information about determinants. Continuous fractions. General properties of algebraic equations and their transformations. Solving equations in two variables. Solving equations of degree 2, 3, 4. General theorems about the number of roots between given bounds. Methods of computing approximate root values of algebraic and sequent equations. Elimination theory. Concept of discriminant. Fundamental properties of quadratic forms.

The theory of substitutions included the following topics: General information of substitutions. Circular substitutions. Similar and exchangeable substitutions. System of conjugate substitutions. Simple and complex groups. Special cases of the theory of substitutions. Applications of the theory of substitutions to algebraic equations.

The theory of dual forms included the following topics: Binary forms, their invariants and covariants. The geometrical explanation of algebraic forms. Resultant and discriminant. Forms of the second, third and fourth order. Systems of forms. Typical forms.

More information concerning teaching of algebra at the Polytechnical school in Lwów can be found in [5].



A picture from Puzyna's monograph "Theory of analytic functions".

There is a wealth of material in algebra in the monograph on analytic functions (1898, 1900) by Józef Puzyna, a professor at the Lwów University. As expected, there is a proof of the fundamental theorem of algebra and of the equality between the degree of a rational function and the number of its "roots" (in particular, zeros and poles, counting with multiplicities). There is also detailed discussion of symmetric functions, permutation groups and their subgroups (however, a general notion of group is not defined in the monograph), Galois type of a function, symmetry groups of regular polygons and polyhedra, resultants and discriminants, binary forms, elements of the theory of invariants, and finally the modular group. Note that Puzyna's knowledge of algebra was based on his education in Germany. In particular, he attended lectures of Kronecker and Fuchs. In J. Puzyna's library, one can find notes from L. Fuchs' lectures "Theory of algebraic curves" written by J. Puzyna. Note also that Puzyna's monograph is a subject of considerations in the papers [6], [10].

3. Some works in algebra by Lwów mathematicians in 1870-1918

This period did not bring significant original results in algebra by Lwów mathematicians, even though there was some activity in this area. S. Dickstein (1851-1939), the Editor of "Prace Matematyczno-Fizyczne" (since 1888) and "Wiadomości Matematyczne" (since 1897), united the community of Polish mathematicians. In 1891 he published in Warsaw the underrated, very important monograph "Pojęcia i metody matematyki. Teoria dzialań" ("Concepts and methods of mathematics. The theory of operations "). This treatise was the first part of a broadly conceived work (for various reasons, the following volumes have not been published). Wawrzyniec Żmurko (1824-1889) attempted to construct a three-dimensional counterpart of the field of complex numbers, unaware of impossibility of such a construction and of earlier work by William Hamilton, whose own failed attempt led to the construction of quaternions. Lucjan Emil Böttcher (1872-1937) tried to apply the theory of continuous groups of transformations to the study of iteration of rational functions, also an impossible task in general. He also studied properties of some functional determinants analogous to Wrońskians, with difference operators instead of differential ones, and wrote an expository paper on expansion of an algebraic function into a fractional power series (see [7], [8]).

4. Revival of algebra in Lwów after 1918

We focus here on the person of Eustachy Żyliński (1889-1954). See also [15].

Żyliński played an important role in the development of algebra in Lwów, but was not a representative of the Lvov school. He studied at the Imperial St. Vladimir's University in Kiev (Russian Empire) in the years 1907-1911. He got the master's degree there in 1914 (an equivalent of the PhD in Western universities). The title of his thesis was "On the field of p-adic rational numbers". He is considered to be the student of Dmitry Alexandrovich Grave, who was the founder of the Kiev school of algebra.

During World War I, Żyliński served first in the Russian Army as an officer, then in the Polish I Corps in Russia, which later became a part of the newly created Polish Army. In February 1919 he came to Warsaw. He was released from the army in September 1919. On October 1 he became an extraordinary professor of mathematics at the Jan Kazimierz University in Lwów, taking up the chair left vacant by the death of Józef Puzyna. Another chair, vacated by the move of Wacław Sierpiński to Warsaw, was soon taken by Hugo Steinhaus.

Żyliński came to Lwów with several years of teaching experience at the academic level: in the Polish University College, Ukrainian State University, Higher Private Technical Institute (all in Kiev), Officers' School for Armed Forces in Communications (Zegrze, Poland). His courses at the Jan Kazimierz

University in the years 1920-40 included, among others, algebra and related subjects: algebraic number theory, group theory, invariant theory, hypercomplex numbers. He conducted seminars in algebra and number theory as well as in group theory. There was also a pro-seminar (lower-level seminar) in algebra and number theory, loosely connected with Żyliński's course in theoretical arithmetic, which was nominally led by him, but actually was run by Marceli Stark, then a junior assistant in the Mathematical Institute.

Żyliński achieved his best results in the number theory and logic. Some of his number-theoretical studies have an algebraic character ("Zur Begründung der Idealtheorie", C. R. Soc. Sci. Varsovie 24, 87-92, 1932). He also worked in group theory ("Sur les diviseus normaux des groupes", Bulletin Acad. Polonaise 1924, A, 259-261) and linear algebra ("Un théorème sur l'irréductibilité de déterminants", Bull. Acad. Polonaise, A, 1921, 101-104; "Sur quelques espaces linéaires", Bulletin Acad. Polonaise 1934, 208-211) as well as in real analysis, differential equations and graph theory.

Żyliński disseminated his ideas in algebra through his published papers, academic courses and seminars and conference talks. In collaboration with Stanisław Ruziewicz he also wrote a 3-part high school textbook in algebra (1926-28) and a first-year academic textbook in algebra and number theory (1927). He did not have PhD students who would continue his mathematical interests. He officially served as a supervisor of PhD degrees of Juliusz Paweł Schauder (1924) and Władysław Orlicz (1928), who worked closely with Stefan Banach and Hugo Steinhaus. However, in 1940 (already under the Soviet occupation) he supervised the master's thesis of Andrzej Alexiewicz on "General theory of continuous algebraic operations" (later Alexiewicz specialized in functional analysis).

5. Results in algebra by mathematicians of the Lwów School

In this section we outline some results of mathematicians in Lwów in the period between two world wars which are connected to algebra.

In 1924 Stefan Banach and Alfred Tarski published their famous paper [1] on paradoxical decomposition of a solid ball in the 3-dimensional Euclidean space. This result does not directly belong to algebra. However, it relies on the paradoxical decomposition of the free group with two generators and on the existence of a group of rotations in the 3-space isomorphic to such a group [14].

In 1932 Józef Schreier defended his PhD thesis at the Lwów University, "On finite basis in topological semigroups" (Stefan Banach was his supervisor). Together with Stanisław Ulam he published several papers on properties of topological (semi)-groups. A review of Schreier's scientific activity can be found in [16].

The paper [13] is devoted to review of Schreier's results in the theory of topological (semi)groups. Some of them concerned the notion of basis in a topological (semi)group. In his thesis, Schreier proved that the automorphism group of a compact connected oriented surface has a finite basis. Ulam and Schreier proved that $C([0,1]^m)$, $m > 1$, has a basis consisting of 5 elements.

In "The Scottish book" S. Ulam formulated the following problem: does the group $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ admit a a locally compact group topology? This problem was solved only in 1967. Summing up, one has to emphasize high level of topological algebra in the Lwów School of Mathematics.

In 1937 Stefan Kaczmarz found an iterative algorithm for solving systems of linear equations, which nowadays has many practical applications.

Many results in functional analysis are tightly connected to algebra. Stanisław Mazur proved that there are exactly three real Banach division algebras: the field of real numbers $\mathbb{R}$, the field of complex numbers $\mathbb{C}$, and the division algebra of quaternions $\mathbb{H}$. The Gelfand-Mazur theorem says that every complex Banach algebra, with unit 1, in which every nonzero element is invertible, is isometrically isomorphic to the field of complex numbers. Joint deep results of Mazur and Andrzej Turowicz on subalgebras of algebras of continuous functions remained unpublished (see [17]).

The lack of algebraic considerations in functional analysis is considered by some authors as a drawback of the Lwów School of mathematics (as an example, it is noted that the Banach algebras were defined outside of Poland). In the list of references below, we added some publications that can be used to complete our short overview.

References

[1] S. Banach, A. Tarski, Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, Fund. Math. 6 (1924), 244–277.

[2] L. Bazylevych, I. Guran, M. Zarichnyi, Lwów period of S. Ulam's mathematical activity, Technical Transactions 2015, Fundamental Sciences, Issue NP 2(2015), p. 33–39.

[3] D. Ciesielska, Teoria Galois w spuściźnie Kretkowskiego. in: J. Bečvař, M. Bečvářova (eds.). 34. mezinárodni konference Historie Matematiky, Matfyzpress, Praha, 2014, 81–88.

[4] D. Ciesielska, Zasady algebry wyższej Władysława Zajączkowskiego, in: J. Bečvář, M. Bečvářova (ed.), 35. mezinarodne konference "Historie Matematiky", Univerzity Karolovy v Praze, Praha 2014, s. 131–138.

[5] S. Domoradzki, The Growth of Mathematical Culture in the Lvov area in the Autonomy period (1870-1920), Matfyzpress, Prague 2011, 331 pp.

[6] S. Domoradzki, Riemann surfaces in Puzyna's monograph: Teorya funkcyj analitycznych, Technical Transactions 2015, Fundamental Sciences, Issue NP 2(2015), 93–98.

[7] S. Domoradzki and M. Stawiska: Lucjan Emil Böttcher and his Mathematical Legacy, in: Mathematics Without Boundaries. Surveys in Pure Mathematics, (eds.) Themistocles M. Rassias, Panos M. Pardalos, Springer 2014, pp. 127–161.

[8] S. Domoradzki, M. Stawiska, M. Zarichnyi, Lucjan Böttcher (1872-1937): a forgotten Polish mathematician and his influence on modern mathematics, Mathematik – Verschollen und Gefunden (ed. Ch. Binder), XII Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, Wien 2014, s. 222–226.

[9] S. Domoradzki and M. Zarichnyi, On beginnings of topology in Lvov, Technical Transactions 2015, Fundamental Sciences, Issue NP 2(2015), p. 143–152.

[10] S. Domoradzki and M. Zarichnyi, On some aspects of the set theory and topology in J. Puzyna's monumental work, Technical Transactions, 2014, Fundamental Sciences, Issue 1 NP (7), 2014, p. 85–97.

[11] R. Duda, Pearls from a Lost City: The Lvov School of Mathematics. (History of Mathematics, 40.) Translated by Daniel Davies. xi + 231 pp., illus., figs., bibl., index. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2014.

[12] R. Duda, Katedry matematyczne i ich obsada na Politechnice Lwowskiej do 1945 r., Antiquit. Math., Vol. 8(1) 2014, 47–74.

[13] I. Guran, Ya. Prytula. Józef Schreier, "On finite base in topological groups", Mat. Stud. 39 (2013), 3–9.

[14] Hausdorff, F. Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen, Math. Annalen, 75(1914), 428–434.

[15] L. Maligranda, Eustachy Żyliński (1889-1954), Antiquit. Math. 3 (2009), 171–211.

[16] L. Maligranda, Działalność naukowa Józefa Schreiera. Wiad. Mat. 50 (2014), no. 1, 45–68.

[17] A. Turowicz, On a proof of the Weierstrass-Stone theorem. (Polish) Wiadom. Mat. 31 (1995), 149–150.

UNIVERSITY OF RZESZÓW, POLAND
E-mail address: domoradz@ur.edu.pl

MATHEMATICAL REVIEWS, 416 FOURTH ST., ANN ARBOR, MI 48103, USA
E-mail address: stawiska@umich.edu

IVAN FRANKO NATIONAL UNIVERSITY OF LVIV, UKRAINE
E-mail address: zarichnyi@yahoo.com

Vortrag

Mathematics at the German University in Prague

Martina Bečvářová[1]

1. German University in Prague from 1882 until 1920

The *German University in Prague* was established in 1882 by dividing the old and well-known Prague University. It was founded as a school favoured by Vienna government. It was given better buildings, larger part of libraries, all seminars and better organized places than the *Czech University in Prague,* which was established in the same year. Therefore, it did not need to compete with the Czech University and to demonstrate the significance of its professional activities.

At the end of the 19th century the importance of the Czech mathematical community was increasing, because of the growth in the number of the Czech teachers and students. On the other hand, the number of German students was decreasing, because most of the German professors considered Prague to be merely a temporary place on the way to Vienna or Germany. Gradually, the German University in Prague got into a position of isolation and it acquired a character of a provincial school.

After creation of Czechoslovakia (1918) the *German University in Prague* was not abolished; on the contrary, it became an equal, recognized and respected state university not subdued, oppressed or financially restrained by the new republic. Actually, it was the only official state minority university in the inter-war Europe divided into states based on supranational principle. It maintained its position until the beginning of World War II.

2. Mathematics at the German University in Prague (1882–1920)

From 1882 until 1920, mathematics was regularly taught at the *Faculty of Arts* by two professors (one full professor and one extraordinary professor), sometimes also by one or two private docents and one assistant. The minimal lecture duty of professor was to teach 5 lecture hours per week. They usually listed course lectures in three to four year cycle in the scope of 3 to 5 hours per week which they completed by facultative lectures and seminars in the scope of

[1] Professor RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D., Department of Applied Mathematics, Faculty of Transportation Sciences, Czech Technical University in Prague, Na Florenci 25, 110 00 Prague, and Department of Mathematics Education, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, Sokolovská 83, 186 75 Prague, Czech Republic, mail: becvamar@fd.cvut.cz.

2 to 4 hours per week. Low number of professors and private docents and large scope of compulsory lectures did not provide sufficient space for a larger thematic diversity of lectures compared to large universities abroad. Only two professors taught almost entire spectrum of university mathematics, i.e. they did not specialize in a narrow circle of lectures and themes such as nowadays. Versatility was preferred over narrow and deep specialization within filling professor vacancies. The period was highly stabile on the point of view of teaching from the perspective of its themes as well as personal occupancy of mathematical fields.

In the first period, mathematics was lectured by professors Heinrich Jacob Karl **Durège** (1821–1893), Anton **Puchta** (1851–1903), Georg Alexandr **Pick** (1859–1942), Karl **Bobek** (1855–1899), Anton Josef **Gmeiner** (1862–1927), Josef **Grünwald** (1876–1911), Gerhard Hermann Waldemar **Kowalewski** (1876–1950), private docents August Leo Otto **Biermann** (1858–1909) and Seligman **Kantor** (1857–1902), German pedagogues from the German Technical University, i.e. Wilhelm **Weiß** (1859–1904), Wilhelm Johann Eugen **Blaschke** (1885–1962), Paul Georg **Funk** (1886–1969) and Karl **Mack** (1882–1943)). But only, G. A. Pick, G. H. W. Kowalewski, K. Mack and P. G. Funk connected their lives with Prague and raised a number of high school teachers of mathematics and also several mathematicians. But only professors H. J. K. Durège, G. A. Pick and G. H. W. Kowalewski were the significant persons of Prague-German mathematics. Others (for example A. Puchta, A. J. Gmeiner, A. L. O. Biermann, W. J. E. Blaschke) approached Prague only as a temporary transfer station within the journey to better positions in the Austro-Hungarian Monarchy or Germany and worked in Prague only for a short time. Others (for example A. L. O. Biermann, K. Bobek, J. Grünwald) died young or for many reasons left their positions early after their nominations, but they were not so many creative mathematicians and their education and approach to mathematics were rather representative of the 19th century.

3. German University in Prague from 1920 until 1939

The *Faculty of Science of the German University in Prague* (founded in 1920) was relatively small but significant scientific and pedagogical workplace in Europe. It attracted German-speaking students from the Czech and Slovak countries who, just at the beginning of the 20th century, were headed to Berlin, Dresden, Vienna and Budapest because diplomas from German, Austrian or Hungarian universities had to be validated or completed by other Czechoslovak state exams. It attracted foreign Jewish students and democratically thinking students from Lithuania, Latvia, Ukraine, Hungary, and Poland, and – since the mid 1930s – also from Germany. Rather low school fees and costs of living in Prague and its good accessibility played a positive role in its development. The renown of certain professors (e.g. L. Berwald, R. Carnap, C. I. Cori, Ph. Frank, A. Kirpal, A. Lampa, K. Löwner, A. Naegle, G. A. Pick, E. G. Pringsheim, and F. Spina) also played an appreciable role.

The period from 1920 until 1939 saw some national, religious, economic and social problems resulting not only from economic crisis but in particular from increasing strength of fascism, increase in domestic conflicts between liberal and social democratic groups (supported also by German speaking multicultural and Jewish circles) on one hand and national and anti-Semitic groups on the other hand. In spite of these problems, this was the time of the largest bloom and boom of the German mathematical community in Prague – the time when the Prague German mathematics was at its peak and when its results achieved worldwide fame and recognition.

However, it is necessary to emphasize that the German mathematical community was not directly affected by the abovementioned negative phenomena until 1939, because most pedagogues in the high schools and other members were Jewish or had democratic mindsets. People of various nationalities (German-speaking citizens of Czechoslovak Republic, Austrians and Germans, other European and American citizens), people of different religion (Catholics, Protestants, Jews and people without religion), people of various political affiliation (democrats, communists, Sudeten German Party members, Zionists and people with no interest in politics), people of varied social background and with different relation to Czech countries or Czechoslovakia actively and effectively collaborated with one another. For them, the most important thing was their love for mathematics, mathematical studies, results and achievements, which fascinated, filled and associated them much more than other matters could divide them.

4. Mathematics at the German University in Prague (1920–1939)

Shortly before the First World War the situation in the German Prague mathematical community changed significantly because in a short period a group of young, energetic, talented professors, docents, assistants and students educated at foreign universities who belonged to the world's best arrived in Prague at their young age.

The 1920s and 1930s when mathematics was taught at the *Faculty of Science* is the period of the creation of the *University Mathematical Institute*, i.e. the period of the biggest bloom of the German mathematical community in Prague. Professors G. A. **Pick**, Ludwig **Berwald** (1883–1942), Karl **Löwner** (1893–1968), Arthur **Winternitz** (1893–1961) and Rudolf **Carnap** (1891–1970), assistants and private docents Walter **Fröhlich** (1902–1942), Heinrich **Löwig** (1904–1995), Max **Pinl** (1897–1978), Ernst **Lammel** (1908–1961), Otto **Varga** (1909–1969) and Alfred Eduard **Rössler** (1903–?) operated among the regular staff of the Mathematical Institute. P. G. **Funk** and K. **Mack**, professors at the German Technical University in Prague, gave special optional lectures (on applied mathematics) or basic lectures on descriptive geometry at the German University. L. Berwald and K. Löwner connected their lives with Prague and Prague-German mathematical community and became its natural and respected leaders. On one hand development of staffing was put into direct context with development of mathematics, on the other hand it was put into direct context with social problems, in particular with rising fascism at the Faculty of Science and subsequent forced emigration, respectively removal of leading Jewish and democratically thinking professors and docents (L. Berwald, G. A. Pick, W. Fröhlich (death in concentration camps or ghettos), P. G. Funk (imprisoned in the ghetto), H. Löwig (a total deployment and work in the "work camps"), M. Pinl (imprisoned for political beliefs), K. Löwner, A. Winternitz and R. Carnap (emigration abroad), O. Varga (moving to Slovakia, later to Romania, later to Hungary)).

However, it is necessary to emphasize that the Mathematical Institute was not directly affected by the above mentioned negative effects until 1939. Its members (in particular L. Berwald and K. Löwner) tried to help colleagues in every way who had to abandon their positions in Germany, and students who had not been able to finish their studies properly in their homelands.

In the second observed period the number of professors increased (professors and private docents, assistants and "pedagogic force" hired from technical university for teaching geometry and applied mathematics newly arrived), however, the number of students also increased as well as number of compulsory weekly hours. This is the reason why it was not possible even in this period to offer a larger variety and selection of themes significantly beyond basic subject matter required to pass teacher qualification exam (the main goal of university mathematics teaching was to prepare future high school teachers). Teaching duty was around 10 hours per week, two full professors in the so called basic course alternated in two up to three year cycle.

Thank survived archival material, it can be indicated that newly appointed (associate) professors and newly appointed private or honoured docents listed new, probably more demanding and more interesting lectures which reacted to current results of world mathematics only for the first two or four semesters after their arrival at the University. However, these efforts did not receive adequate response and interest from students. From the archival materials it is clearly saw the high stability and natural personal continuity of the Mathematical Institute at the German University in Prague.

5. German University in Prague from 1939 until 1945

At the end of the summer of the year 1938, the escalation of conflicts between certain German professors and Czechoslovak government exploded. Some German specialists and professors left Prague and went to the centres of Nazis as for example Vienna and Münich and waited there for Adolf Hitler's instructions what to do. At the end of 1938 and at the beginning of 1939 (before the German Nazis came to Prague) Jewish professors, private docents, assistants and students as well as democratically thinking people were excluded out of the German University in Prague, were dismissed from their positions and lost their rights to teach and to do research, or to study. On the 15th March 1939 the Nazi occupation of Czech lands and Moravia started. In the spring of 1939, the German University in Prague was officially renamed and obtained the name the *Deutsche Karls-Universität in Prag*.

On the 1st September 1939, it was directly subordinated to the Reichsministry of Education in Berlin and on the 4th November 1939, it was proclaimed to be *Reichsuniversität*. Teaching at the German University in Prague took place until the end of World War II, but this school was out of interest of German scientists as well as Berlin's authorities. In May 1945, the German University in Prague was abolished by new Czechoslovak authorities.[2]

6. Mathematics at the German University in Prague (1939–1945)

The Nazi coming to Prague was a huge tragedy for mathematicians and mathematics at the German University in Prague where in the summer semester 1938/1939 only two non-Jewish teachers could continue to lecture (one young docent and one young assistant before habilitation). In the period of World War II German mathematical community in Prague had been in deep personal and professional crisis and because of war events it was headed to its unavoidable fall and termination in 1945. During all wartime, there were unremittingly complicated situation within staffing of mathematical "departments", difficult acquisition of new pedagogues and related significantly reduced teaching of mathematics.

During six war years, many full or extraordinary professors or docents taught mathematics at the German University in Prague – Wilfried Hans (Johann) Henning **Petersson** (1902–1984), Hans Johann Albert **Rohrbach** (1903–1993), G. H. W. **Kowalewski**, O. **Varga**, Theodor Johannes Werner

[2] On 17th November 1939, the Czech University (Charles University) and all other Czech higher-education institutions were closed by Nazis, originally for three years. However, they remained closed until the end of World War II.

Zech (1907–1971), Ernst Max **Mohr** (1910–1989), Gerhard Karl Erich **Gentzen** (1909–1945), Karl Peter Heinrich **Mahrun** (1904–1976) and Theodor Karl **Vahlen** (1869–1945)). Josef **Fuhrich** (1897–?), E. **Lammel**, K. **Mack** and A. E. **Rössler**, pedagogues at the German Technical University in Prague, gave also basic or special optional lectures at the German University in Prague.

Instability of staffing of the mathematics section and very low variety of lectures are a typical feature for the third observed period – the war period. Continuity of pre-war teaching had been completely destroyed. Frequent changes of pedagogues did not allow establishing deeper mutual professional contacts, they did not lead to professional growth of beginning assistants and docents and they did not allow influencing students in long-term perspective and influencing their future professional focus. Atmosphere of these times affected lives of students and pedagogues who had not sought personal contacts and because of fear of denunciation, repressions and problems they had maintained almost no friendly relationships (outside lectures). In comparison to the period of World War I and interwar period, there was a significant "internal isolation" of mathematicians when everyone acted, taught and researched on his own. This situation was also caused by the fact that a very non-homogenous group of people had met in Prague (active Nazi followers, people who worked in Prague rather as a "punishment", people hiding their personal problems (e.g. non-Aryan origin, health indisposition), young careerists, talented mathematicians separated from normal life and very uneducated in politics and also naive). The more or less obligatory involvement of mathematicians in war research (calculations for V2 rockets, decipherment and coding, meteorological observations and measuring, e.g. E. M. Mohr, H. J. A. Rohrbach), their activities in NSDAP (e.g. G. K. E. Gentzen, T. K. Vahlen), respectively conflicts with the Nazi ideology (e.g. E. M. Mohr, M. Pinl, G. H. W. Kowalewski, O. Varga, T. J. W. Zech) can not be also forgotten. The extraordinary role and courage of H. J. A. Rohrbach, who was the director of the University Mathematical Institute during the war and who was able to save a number of colleagues and students from being sent to the front, total deployment and one person also from death could be also highlighted.

References

[1] M. Bečvářová: *Matematika na Německé univerzitě v Praze v letech 1882 až 1945* [Mathematics at the German University in Prague from 1882 until 1945], Karolinum, Praha, 2016.[3]

[3] The book is based on the studies of various funds of the Archive of the Charles University in Prague, the Archive of the Czech Technical University in Prague, the National Archive of the Czech Republic (Prague), the Archive of the Academy of Sciences of the Czech Republic (Prague), the State Archive of the Austrian Republic (Vienna) and the State Archive of the German Republic (Berlin).

[2] M. V. Šimůnek, A. Kostlán: *Disappeared Science. Biographical Dictionary of Jewish Scholars from Bohemia and Moravia − Victims of Nazism, 1939–1945*, edition Studie in the History of Sciences and Humanities, volume 29, Centre for the History of Sciences and Humanities, Institute of Contemporary History of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Pavel Mervart – Kabinet dějin vědy ÚSD AV ČR, v. v. i, Červený Kostelec – Praha, 2013.

[3] R. Tobies: *Biographisches Lexikon in Mathematik promovierter Personen an deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen WS 1907/08 bis WS 1944/45*, Algorismus, Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften herausgegeben von Menso Folkerts, Heft 58, Augsburg, 2006.

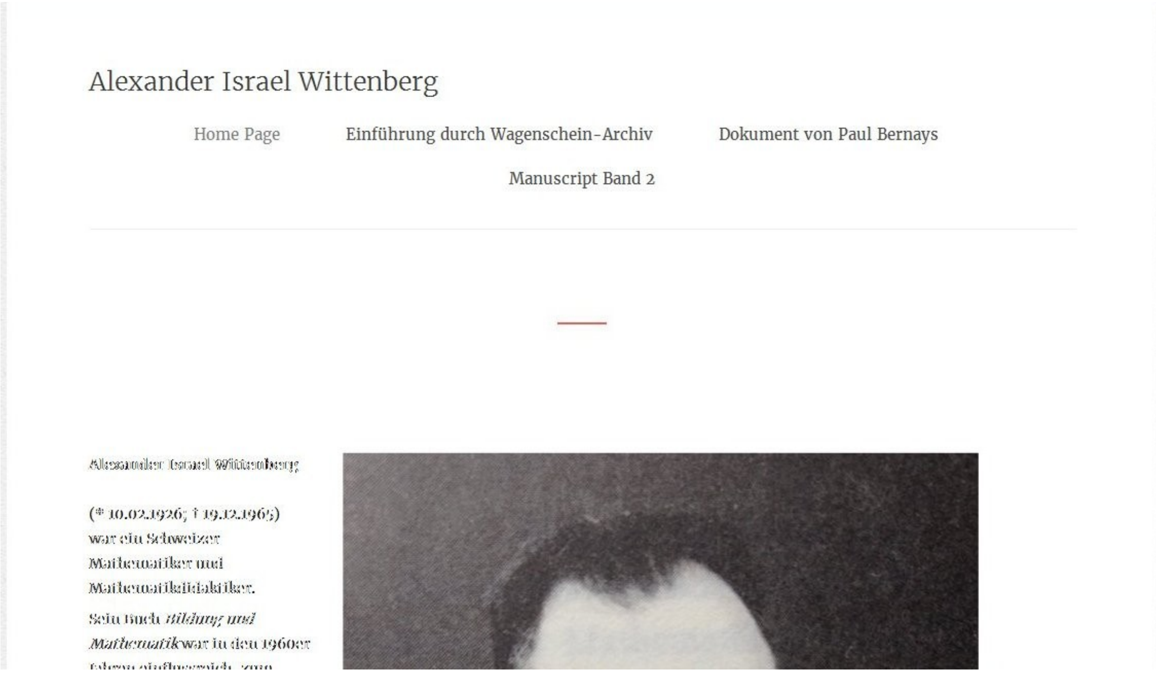
[4] M. Toepell: *Mitgliedergesamtverzeichnis der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1890–1990*, München, 1991.

The readers could find these chapters: German University in Prague from 1882 until 1945, Mathematics from 1882 until 1920, Mathematics from 1920 until 1939, Mathematics from 1939 until 1945, List of pedagogues, List of lectures and seminars from 1882 until 1920 with comments, List of lectures and seminars from 1920 until 1939 with comments, List of lectures and seminars from 1939 until 1945 with comments, Doctoral procedures on mathematics from 1882 until 1945 with comments and analysis, Habilitation procedures on mathematics from 1882 until 1945 with comments and analysis, Teacher qualification examinations on mathematics with comments and analysis, Some other professional activities of the Prague German mathematical community (Mathematische Kränzchen in Prag, Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen – "Lotos" in Prag, Deutsche physikalisch-mathematische Gesellschaft in Prag, Jednota českých matematiků a fysiků), Recollections of university pedagogues and former students, Illustrations.

DIE NEUE WITTENBERG-HOMEPAGE

http://www.a-i-wittenberg.ch

…und so fängt sie an:



1. Home Page

Alexander Wittenberg wird kurz vorgestellt.

2. Einführung durch Wagenschein-Archiv

Dieser Punkt gibt eine kurze Erklärung, warum es diese Home-Page gibt und welche Wünsche und Hoffnungen mit ihr verbunden sind

3. Dokument von Paul Bernays

und eine Erläuterung, wer Paul Bernays war.

4. Manuscript Band 2

Dies ist die eigentliche Hauptsache.

Hier noch einige Ergänzungen zum Internet-Text:

Zu Punkt 3:

Wer war Paul Bernays (1888-1977) und was hat er mit Wittenberg zu, tun? Zuerst: er war der Referent bei Wittenbergs Promotion – Doktor-

Arbeit „Vom Denken in Begriffen“ (Bei Wikipedia steht fälschlicherweise Co-Referent) Er stammt aus einer alten deutschen jüdischen Familie wie Wittenberg, nur war sein Vater Schweizer, er wuchs in Deutschland auf, ebenso wie Wittenberg. Er hatte wissenschaftliche Kontakte mit Polya, Hilbert, Weyl, Born, Klein, Nelson , Einstein, später noch mit Emmy Noether und B.L.v.d. Waerden. Er habilitierte sich für Mathematik und Philosophie, dies hätte Wittenberg vielleicht auch noch getan. In den Jahren 1933/34 ging Bernays nach Zürich an die ETH. .Dort wurde Wittenberg sein Schüler, der die best-mögliche Diplomarbeit bei Bernays lieferte. Er beantragte ein Stipendium für Wittenberg, damit dieser von seinen Assistentenfunktionen befreit sei und seine geplante Arbeit beenden könne. (Wittenberg würde mit dieser Arbeit einen wesentlichen Beitrag zu einem der Grundlagengebiete der Mathematik liefern, schrieb Bernays an Wolfgang Pauli, den Vorstand der Stipendien-Kommission).

Zu Punkt 4:

Das Manuskript von „Bildung und Mathematik“ Band 2 gliedert das Buch in zwei Teile

Die gymnasiale Aufgabe

Alexander Wittenberg

Die Einführung (A) hat drei Unterabteilungen,
Der Hauptteil (B) hat deren vier

In der Einführung geht es im Wesentlichen um die Pflichten des Erziehers und die Aufgaben, denen er verpflichtet ist (moralisch-ethischer Art, keine reine Stoff-Vermittlung). Er lässt sich immer von einer „freien Gesellschaft“ (engl. free society) leiten. Wittenberg meint damit keine Staatsform, sondern fasst den Begriff viel weiter.
Im Teil B wird Wittenberg konkreter in seinen Forderungen und im Teil B3 sagt er Dinge, die leider heute noch immer gültig sind. Ich fand diesen Teil besonders aufregend.

Das war ein knapper Überblick über die Homepage. Aber wie kam dieses Manuskript ins Wagenschein-Archiv?
Ende des letzten Jahrhunderts hatten die Professoren Reeken und Scholz von der Universität Wuppertal Kontakt zu Frau Wittenberg in Kanada. (Sie hatten sich dazu der Geschäftsbriefe zwischen Frau Wittenberg und dem Klett-Verlag nach Wittenbergs Tod aus dem Wagenschein-Archiv bedient). Durch diesen Kontakt bekamen sie allerhand von Frau Wittenberg geschickt, z. B: zwei Taschenbücher in englisch und französisch, Skizzen/Notizen von Vorträgen deutsch und englisch und zwei Manuskripte in deutsch.
Damit alles einen festen, angemessenen Platz hätte, an dem man es auch vermuten würde, schlug Herr Scholz vor, die ganze Sendung von Frau Wittenberg ins Wagenschein-Archiv nach Goldern zu geben. Wagenschein und Wittenberg waren befreundet, Wagenschein hatte sehr gehofft, in Wittenberg einen jüngeren Mitstreiter zu haben. So kam 2013/2014 ein Paket von der Größe eines Männer-Schuhkartons von Wuppertal ins Wagenschein- Archiv. Ich räumte erst mal alles mit einigen Dingen aus dem Archiv in 2 Archivkartons und stellte sie weg. Auch die Titel der beiden Manuskripte rissen mich nicht vom Hocker. „Ja, bei

Gelegenheit würde ich mir das Material mal anschauen“ waren so meine Gedanken… und damit waren die Kartons erst mal weg.
Voriges Jahr im Sommer nahm ich mir die Manuskripte endlich vor, zuerst den Einstein, das interessierte mich mehr als „Die gymnasiale Aufgabe“. „Einstein“ war 1957 verfasst, „eine Studie in Weltanschauung“ für Marlyse. Es ist ein sehr persönliches Werk von einem Menschen gleichen Glaubens geschrieben (Wittenberg war praktizierender Jude), mit viel Einfühlungsvermögen und seiner Frau zugedacht. Die Manuskripte waren also im Wagenschein-Archiv, und wie sollten wir damit umgehen? Benutzer nur einsehen lassen oder auch auf Wunsch Kopien anfertigen? Wittenberg wollte es ja von Klett veröffentlichen lassen. Der Verlag –und mit ihm Emanuel Röhrl– hatte sich verpflichtet, den ganzen Nachlass Wittenbergs, auch den literarischen, zu veröffentlichen. Ach, solche Überlegungen hatten noch Zeit, jedenfalls müsste ich den Archivbesucher, der sich mit dem Einstein beschäftigen wollte, etwas genauer kennen. Nicht gerade hochmotiviert fing ich dann an, „Die gymnasiale Aufgabe“ zu lesen. — Ich las und las, legte es nur zu den Mahlzeiten aus der Hand. Das war ja die Fortsetzung von „Bildung und Mathematik“, wie Wittenberg es im Band 1 auf Seite 46 angekündigt hatte, nur hatte er sich nicht, wie ich fälschlicherweise gehofft hatte, die Algebra vorgenommen. Ich las dort noch mal auf Seite 46 die Zeile 15 genau nach. „ohne klare Einsicht darein, worauf es in dem Fach eigentlich ankommt, …können nur unzulängliche und stümperhafte Bestimmungen der Unterrichtsziele für dieses Fach zustandekommen. (…die volle Tragweite dieser Bemerkung wird offenbar werden, wenn wir in einem weiteren Bande die Lehrerausbildung und die geistigen Beziehungen zwischen Gymnasium und Universität erörtern werden) und schämte mich dann doch ein wenig ob meiner Erwartungen und Enttäuschungen. Aber die Lektüre machte

alles wett. Ich plapperte dauernd Sätze vor mich hin wie „das ist genau das“ oder „das muss unter die Leute“. Wem konnte ich, außer meinem Mann, von dem Manuskript erzählen und wen von den Fachleuten konnte ich dafür gewinnen? Wagenschein war der Einzige, dem Frau Wittenberg die Bearbeitung dieses Buches rückhaltlos anvertraut hätte, bedenkenlos.

Er lehnte ab, aus Altersgründen wie er vorgab, (Wahrscheinlich war er mit der Herausgabe seiner eigenen gesammelten Schriften total ausgelastet.) Emanuel Röhrl bremste auch etwas, indem er bemerkte, dass trotz aller Begeisterung der Mathematik-Lehrer im Verlag eine ansehnliche Menge von Exemplaren von „Bildung und Mathematik“ auf Halde lag. So kam mir die Idee, einen jüngeren Didaktiker, der zwar schon etwas zu sagen hätte, seine Fachkollegen anstecken könne, aber noch nicht mit seinem Lebenswerk beschäftigt sei, zu suchen. Auch müsse er eine Affinität zu Wagenschein/Wittenberg haben. Spontan fiel mir Harald Bierbaum, Mitarbeiter bei Peter Euler in Darmstadt, ein. Ja, und die Erlaubnis von Familie Wittenberg musste her. Die Postadresse war in der Korrespondenz , in Wuppertal hatte man sie auch benutzt. Lebte Frau Wittenberg noch? Notfalls könnte ich den Brief ja auch an die Tochter schreiben (Avivah Wittenberg-Cox). So, und wie formulierte ich den Brief? Jedenfalls brauchte ich für den Brief länger als für das Durchlesen des Manuskripts. Im September 2015 ging er auf dem Postweg weg:

08.09.2015

Sehr geehrte Frau Wittenberg,

dieser Brief ist an Frau Marlyse Wittenberg gerichtet, da ich aber nicht weiß, ob sie überhaupt in der Lage ist, diesen Brief zu lesen, richte ich ihn auch an die Tochter. Und ich schreibe auf deutsch, englisch kann ich nicht so gut ausdrücken, was ich meine. Die Antwort kann ruhig englisch sein. Deswegen also nochmals

Sehr geehrte Frauen Wittenberg,

vor knapp 2 Jahren erhielt ich von Prof: Erhard Scholz (Wuppertal) Bücher und die Manuskripte Ihres Vaters, die Ihre Mutter Prof: Reeken (Wuppertal)gegeben hatte, anlässlich eines kleinen Vortrages, den ich bei den Mathe-Historikern hielt. (Manuskript des Vortrages liegt bei.) Ich las jetzt erst das damals erhaltene Manuskript zu „Das Gymnasium“, also Band 2 zu „Bildung und Mathematik“. Ich verstehe sehr genau, warum es Herrn Wittenberg so wichtig war, das Buch so weit wie möglich zu beenden und ich glaube ein wenig nachempfinden zu können, warum nichts daran geändert werden sollte. Herr Scholz teilte mir nicht mit, welche Vereinbarungen mit Frau Wittenberg getroffen wurden, er fand es nur gut, wenn alles Material von Wittenberg an einem Platz sei. Im Wagenschein-Archiv sind Briefe von Wittenberg an Wagenschein und umgekehrt. Deswegen gab er das Material ins Wagenschein-Archiv, er meinte, dort würde man es am ehesten suchen. Und ich stellte fest, dass die Vorschläge, die Herr Wittenberg in dem Manuskript macht –leider– nach wie vor höchst aktuell sind. Sie sind so aktuell, dass sie unbedingt unters pädagogische Fachpublikum sollten.

Deswegen komme ich mit einer Bitte an Sie. In Wuppertal ist nichts für die Öffentlichkeit passiert, ich weiß im Augenblick auch keinen Pädagogen, der unternehmensfreudig wäre und jung genug, es zu wagen und gleichzeitig alt genug, um damit Kollegen anzustecken. Aber man könnte das Manuskript –mit den entsprechenden Vorbemerkungen– so im Internet veröffentlichen, dass alle Zugang haben und einer vielleicht „anbeißt“. Da bietet sich die Homepage des Wagenschein-Archivs direkt an: martin-wagenschein.de Dürften wir das tun?

Dazu eine knappe Information zum Wagenschein-Archiv. Es wird von meinem Mann (Klaus Kohl) und mir verwaltet. Ich habe die Lehrerausbildung in Mathematik und Physik. Physik und Pädagogik studierte ich bei Wagenschein. Wir blieben seit damals in persönlichem Kontakt. Mein Mann stieß als „Schwarzhörer" zu Wagenscheins Übungen und Seminaren, wenn er seine Freundin besuchte. Durch Wagenschein verließ ich den Hessischen Staatsdienst in Deutschland und ging mit meinem Mann zusammen an die Ecole d'Humanité, Besuche bei Wagenscheins in Trautheim fanden weiterhin statt. Seine letzten Seminarjahre nahm ich auf Wagenscheins ausdrücklichen Wunsch auf Band auf. Wagenscheins persönlicher Nachlass kam bei seinem Tod an die Ecole d'Humanité, fünf Hochschulprofessoren waren für die „Hardware" zuständig, mein Mann und ich für die Verwaltung. Natürlich fragten wir Wagenschein zu Lebzeiten, wie er sich die Führung seines Archivs vorstelle, fragten soviel wie möglich, ohne die Etikette zu verletzen… und sperrten die persönlichen Briefe nach seinem Tod für 15 Jahre..Von den 5 Professoren ist noch einer im aktiven Hochschuldienst, Professor Christoph Berg in Marburg, sein Kind ist die „Lehrkunst" nach Wagenschein. Sämtliche Computerarbeiten fürs Archiv macht mein Mann, so kann ihm auch niemand dreinreden. Natürlich haben wir uns an der Archivschule Marburg das nötige Fachwissen besorgt. Seit letzten Juli unterrichte ich nicht mehr und bin nur noch fürs Archiv tätig.

Diese lange Rede nur, damit Sie eine kleine Vorstellung haben, in wessen Hände Sie die Erlaubnis geben würden, das Manuskript „Das Gymnasium" ins Netz zu stellen, nur dies.

Falls es Interessenten für den „Einstein" gäbe, dürfte ich Kopien weitergeben oder nur im Archiv einsehen lassen?

Ich würde mich freuen, von Ihnen etwas zu hören, vielleicht von dem Wesen, über das Herr Wittenberg am 8. März 1965 an Wagenschein schrieb: „ …das Töchterlein fiel bei Freunden die Treppe runter, musste mit 13 Stichen genäht werden, war gleich wieder munter, ein Mordskerl!"

Viele Grüße aus der Schweiz

Hannelore Eisenhauer

Wagenschein-Archiv

Postfach 134, 6085 Hasliberg Goldern /Schweiz

Ich hielt weiterhin Kontakt mit Harald Bierbaum . Grundsätzlich war er sehr interessiert, konnte aber keine feste Zusage machen. Außer in Darmstadt hatte er auch noch Verpflichtungen in Österreich. Trotzdem diskutierte er eifrig mit Klaus Kohl und mir, wie wir das Vorhaben umsetzen könnten und das Manuskript unter die Leute bringen. Meine Idee, es von der Homepage des Wagenschein-Archivs aus zu veröffentlichen, fanden sie grundsätzlich gut . Wenn Wagenschein 1965 Wittenbergs zweites Buch nicht bearbeiten wollte, könnte er doch wenigstens die Homepage für ihn hergeben. Es gab aber auch noch andere Ideen. Die verrückteste war die von Klaus Kohl: „Wer sucht Wittenberg schon bei Wagenschein, wenn er sich nicht auskennt. Er sollte eine eigene Homepage bekommen“ und schaute gleich nach: „A. I. Wittenberg ist noch frei. Also, wer macht’s?“ Harald Bierbaum hatte keine Zeit, Klaus Kohl war mit Wagenschein schon mehr als ausgelastet, kam eigentlich nur Hannelore Eisenhauer in Frage. Aber ich kann so etwas nicht.— Abwarten, nicht gleich nein sagen. Erst verfasste ich einmal den Vorspann zur Manuskript-Veröffentlichung. Mir schwebte vor, das Manuskript als Punkt 5 auf die Wagenschein- Homepage zu bringen., denn in der Zwischenzeit war auch von Frau Wittenberg die Erlaubnis zur Veröffentlichung gekommen. (Bei der Ankunft der E-Mail wurde ein grauer Sonntag zu einem Freudentag)
Hier ist es

Marlyse@yorku.ca
17.October 2015 20:36

Dear Hannelore Eisenhauer,Thank you for your letter from 08/09/2015. I am Marlyse, Avivah does not know German and I have not written anything in German in the last 60 or so years; this is why I write in English.

> I was very surprised to receive your letter, as all that is so very long ago! You mention what happened to Avivah when she was 3, she is 54 years old now but still a “Mordskerl” in a Way!
> As for what you propose about publishing my husbands Manuskript on the Internet in the “homepage des Wagenschein-Archives” it is an excellent idea I think. Yes, we then can hope that somebody “anbeisst” one way or another. I don’t know what to tell you apropose the “Einstein”, Kopien oder nur im Archiv einsehen? I think, I’ll leave it to your own judgement.
> Here in Toronto we have the last mild and pleasant days before winter sets in. I remember 1955, my first year in Switzerland and the coldest winter of the last 100 years, I think, it prepared me for Canada!
> Many thanks again for your nice letter.
> Sincerely yours, Marlyse Wittenberg.

Ich erzählte Clemens Hauser, Dozent am Lehrerseminar St Michael in Zug von all den Überlegungen. (In seinen letzten Arbeitsjahren unterrichtete er nicht mehr angehende Lehrer, sondern war an einer Kantonsschule tätig. das Lehrerseminar Zug wurde aufgelöst.) Er kannte also das, was Wittenberg beschrieb aus der Praxis, von beiden Seiten. Von all unseren Ideen fand er die mit der eigenen Homepage toll, und… als nicht mehr beruflich so ganz aktiv gebundener Mensch und aus dem Vorstand der Schweizer Wagenschein-Gesellschaft, bot er auch gleich an, etwas Zeit dafür zu erübrigen und die Homepage zu erstellen. Er würde sie vorerst mal selbst bezahlen, vielleicht würde dann später die Wagenschein-Gesellschaft die Kosten übernehmen. Diese Veränderung teilte ich Frau Wittenberg mit, sie war einverstanden.
Jetzt hoffe ich wie Frau Wittenberg, dass „jemand anbeißt“. Wie wir uns das wünschen, lasen Sie ja schon im Punkt 2 der Homepage.

CONNECTION BETWEEN "THE CHILDREN OF INVERSION – GOLDEN SECTION AND CONTINUED FRACTIONS" AND THEIR MELODY

Jasna Fempl Mađarević and Miloš Čanak, Belgrade

There has been to this day a lot of research in mathematics on two apparently very different structures and their use in various areas of science and art. These **„divine" creations**, as they were rightfully called, are SECTIO AURAE and KETTENBRÜCHE (golden section and continued fractions). And while the explanation of the former – DIE GOLDENE SCHNITTE- can be found as early as 365 – 300 BCE, in the second book of Euclid's *Elements*, there is no reliable evidence and there is even contradictory information on when the latter first appears.[1]

In order to understand the essence of the golden section and continued fractions, we must demonstrate that the **inversion** is present in both structures – that it is their „common factor". In fact, **inversion is their central part**. **Sectio aurae and Kettenbrüche are connected through the use of inversion and they can even be reproduced in a melody, i.e. they can be played! Ergo, we will use a different perspective – inversion – in order to understand the real significance of the golden section and continued fractions.**

But first let us explore what is known about these structures related to inversion – refer to [2] – its treatment in mathematics. It must be noted that even without a mathematical interpretation, inversion is present everywhere around and inside us, which is why some believe it has a divine origin! It can be used for the best possible purpose, if one becomes adept in this skill and masters its capacities. It is particularly important when a problem is encountered – in mathematics or in other areas – which cannot be solved, since it extends beyond our abilities! We must then look for the answer in the "inverted space" (where it is easier to find the solution) and afterwards, go back to the "original space". Refer to [2] to see how this is applied in mathematics, and also the following function:

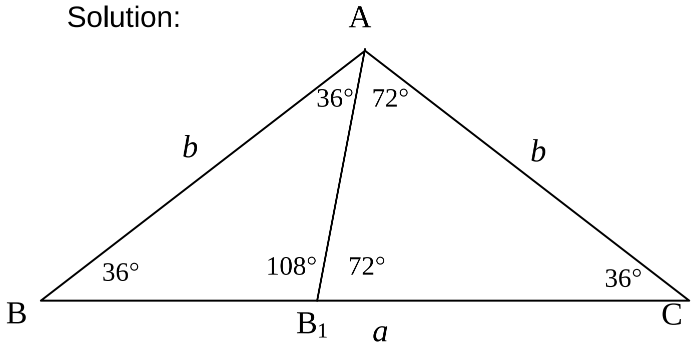
$$f(x) = y = \log_a^x \Leftrightarrow a^y = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = a^x$$
$$a \in (0,1) \cup (1,\infty)$$

The following example in geometry shows the presence of inversion in the golden section and continued fractions, and their mutual connection:

Example 1: Determine the ratio of the base and the sides of an isosceles triangle with the apex angle of 108º.

1 Concerning the chronology of the appearance of continued fractions in mathematics, "The Theory of Branched Continued Fractions and its Use in Numerical Analysis" by V. Skorobogatkov – Moscow 1983 records the 2000-year-old tradition of studying continued fractions, while a monograph by W. B. Jones and W. J. Thron "Continued Fractions" – translation to Russian, Moscow 1985, states that "there is no information" that the ancient Greeks used Euclid's algorithm for producing continued fractions!

Solution:



$$B_1 \in BC \,/\, BB_1 = b$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{a}{b} = \frac{CB_1 + B_1C}{B_1B} = 1 + \frac{CB_1}{B_1B} = 1 + \frac{1}{x_1}$$

$$\left(x_1 = \frac{B_1B}{CB_1} = \frac{AC}{CB_1} \right)$$

$$\Delta AB_1C \sim \Delta ABC$$

The angles of the triangle ABC are 108º, 36º and 36º. If we have Formula (b/a maximum once, since we must have a<2b), then Formula. The triangle AB_1C is proportional to the triangle ABC. In the first step, we have determined the ratio a/b of the triangle base and its side. In the next step, we have the same task: x_1 is the ratio of the triangle AB_1C base and its side! This process is endless and can be formulated as Formula or it can be shown that Formula (this is in accordance with the notation of continued fractions).

$$\frac{a}{b} \square \left[1;1,1,1,\ldots\right] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} \quad or \quad \frac{b}{a} \quad as \quad \left[0,1,1,1,\ldots\right]$$

It can be seen in this first encounter with the continued fractions that they were “born” of inversion and that “**role changing**” is an important attribute of the inversion. The shorter side of the bigger triangle becomes the base of the similar, smaller triangle, in which a **new**, smaller side appears, ready to take over a **new** role.[2]

The example also indicates the occurrence of the golden section, which immediately leads us to believe that the inversion is of a **divine origin** – it is part of this **divine proportion**, which can, in turn, be found in **science, art and nature**. It is there that the inversion plays an **essential role**!

Today the dominant approach to these structures is the **algebraic** one, but the “number”, the golden section, is still seen as a line AB (which implies the geometric approach), divided by a point S, so that the entire line AB is to its longer segment as the longer segment is to the shorter segment.

$$AB = a$$

$$AS = x$$

$$SB = a - x$$

$$a : x = x : (a - x) \Leftrightarrow a(a - x) = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$${}_1x_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{-a\left(\mp\sqrt{5} + 1\right)}{2}$$

[2] The inversion is evident in life as well: a son w
daughter will become a mother – **the very existence and development of humanity** is based on this!

The proper solution is $x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \approx 0{,}618a$

In a special case, if we take a “unit” line for a, then x≈0,618, which means that the point S “divides” the line AB so that AS≈0,618a ($AS > \frac{a}{2}$!)

A “positive” solution to the previous quadratic equation leads us to the concept of **quadratic irrationals and periodic continued fractions**, which play an important role and have different **variations** in their application, some of which are shown below:

$$\Phi = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$$

Therefore, Φ≈1,618, and this is the ratio of the whole and the bigger segment and the ratio of the bigger and the smaller segment (role change).

The previous example (using an isosceles triangle) also demonstrates the following:

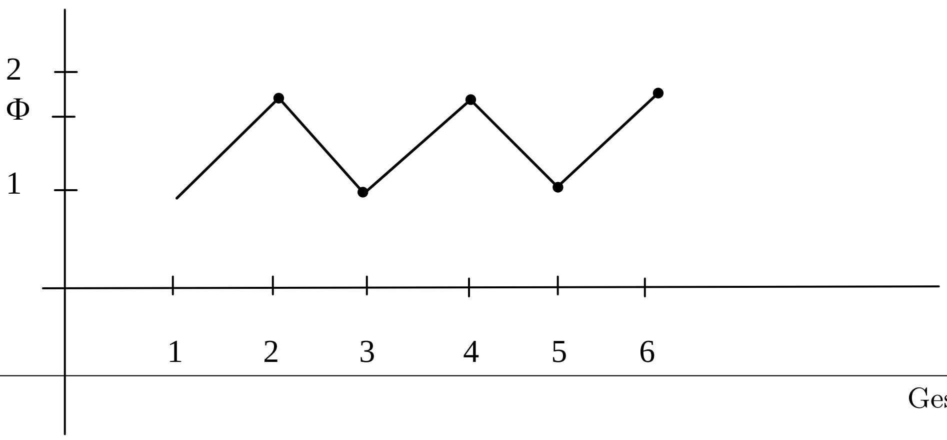
$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} \qquad or \qquad \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}+2-1}{2} =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{5}-1}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{5}+1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{5}-1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{\cfrac{\sqrt{5}-1}{2}}} = \ldots$$

Thus the sectio aurae is expressed using only ones and an infinite continued fraction, where inversion is dominant. If a sequence of convergents (partial fractions) is formed for the continued fraction, we will have the following:

Figure 2



which is a sequence of **approximations of the number Φ**. The odd terms are the increasing **subsequence**, while the even terms are the decreasing subsequence, and they both converge to Φ, in line with the convergence theorem for continued fractions with positive terms.

If we start going through all **the possible mathematical characteristics of the golden section** and its occurrence in science, art and nature, we run the risk of wandering into a dense jungle of information written on thousands of pages by some of the greatest minds and scholars in history! However, if keep to the **"road sign"**, i.e. the **essence hidden inside the golden section, and that is the inversion**, then we will never be lost! **The inversion will be our "Ariadne's thread".**

Before we go back to the issue of the connection between music and continued fractions, let us take a look at some of the basic facts about and the definition of continued fractions (refer to [1]).

A continued fraction may be finite, e.g.

$$1+\frac{2}{2+\frac{5}{3}}=\left[1,\frac{2}{2},\frac{5}{3}\right]=1+\frac{2|}{|2}+\frac{5|}{|3}=1+\frac{2}{2}+\frac{5}{3}$$

If we look at the **sequence** of finite continued fractions obtained from the "general case", taking only a **finite number of terms**, then for $k \in N$, we have $R_k=\frac{P_k}{Q_k}=\left[a_0,\frac{b_1}{a_1},\frac{b_2}{a_2},...\frac{b_k}{a_k}\right]$. If there is a value of the continued fraction in the general case, then it is defined as $R=\lim_{k\to\infty}R_k$. The fraction R_k is the k^{th} approximant, or k^{th} convergent of the continued fraction, as written in the general form:

$$a_b+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_{3+...}}}} \quad (*)$$

For $P_0=a_0$, $Q_0=1$, $P_1=1$, $Q_{-1}=0$, recurrence relations are proved by induction.

$$P_k=a_kP_{k-1}+b_kP_{k-2} \quad (k=1,2,...)$$

$$Q_k=a_kQ_{k-1}+b_kQ_{k-2}$$

If ω_k are **arbitrary numbers**, $\omega_k \neq 0$, then we can apply an **equivalence transformation** of the continued fraction (*), by multiplying with ω_k so that we get

$$\left[a_0;\frac{\omega_1 b_1}{\omega_1 a_1},\frac{\omega_1\omega_2 b_2}{\omega_2 a_2},\frac{\omega_2\omega_3 b_3}{\omega_3 a_3},...\right] \quad (**)$$

If S_k and T_k are the numerator and denominator in the k[th] convergents of the continued fraction (**), we get $S_k = \omega_1\omega_2...\omega_k P_k$ *and* $T_k = \omega_1\omega_{2...}\omega_k Q_k$

It is obvious that in the equivalence transformation of the continued fraction, the value of the k[th] convergent is **invariant (equal)**, i.e. $\frac{S_k}{P_k} = \frac{P_k}{Q_k} = R_k$

Using the equivalence transformation with a special selection of numbers ω_k, a continued fraction may be reduced so that all partial denominators or all partial numerators equal 1.

So far, the continued fractions with real and positive terms have generated the greatest interest. They have a very important "fork property", exhibited in the following characteristics:

1) Every convergent with an odd index is greater than the adjacent convergents (the previous and the next one). Every convergent with an even index is less than the adjacent convergents
2) The difference between adjacent convergents **decreases in absolute value** (if the index increases)
3) The exact value of the finite continued fraction K is between two adjacent convergents
4) The absolute error when replacing the number K with convergent $\frac{P_n}{Q_n}$ is:

$$\Delta_n = \left| R - \frac{P_n}{Q_n} \right| \le \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n}{Q_n \cdot Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^{\ 2}}$$

These characteristics are evident from Figure 2 and are expressed by inequalities:

$$\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \frac{P_5}{Q_5} > \ldots \frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}} > \ldots$$

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \ldots \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \ldots$$

$$\frac{P_{2i-1}}{Q_{2i-1}} > \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} \quad (i = 1, 2, \ldots k = 0, 1)$$

Continued fractions are present and play an important role in such basic phenomena as the **oscillation and vibration!**

Finally, going back to the question raised earlier (from the subject title), **if the continued fractions can be played, the answer is positive – yes, it is possible!**

Let us first reduce the continued fraction to the form in which all partial numerators equal 1, which means:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{...a_n}} \quad \left(a_{0,}a_{1,}a_2, \ldots a_n \in R^+\right)$$

Since a musical melody contains a **finite** number of tones, we will limit ourselves to the **finite continued fractions**. A corresponding sequence to a sequence of n tones will be the sequence of n positive real numbers, representing the frequencies of these tones. For these numbers we choose **convergents** of that continued fraction we want to play! We determine the tones whose frequencies correspond to those convergents and then we play them on a musical instrument. In this process a **diatonic scale** is used.
The invention of the diatonic scale is often attributed to **Didymos**, 63 BCE. If the movable bridge of a monochord, or a finger on a violin string, is placed so that 4/5 of the string length oscillate, a **major third** is produced. The reciprocal value 5/4 is the corresponding frequency number. The major third interval plays a major role in the construction of the diatonic scale. Based on the known frequency numbers $v(c)=1 \quad v(e)=\frac{5}{4} \quad v(f)=\frac{4}{3} \quad v(g)=\frac{3}{2} \quad v(c')=2$, a simple calculation gives us the **numerical frequency values**:

Minor second: $v(f):v(e)=\frac{16}{15}$

Major seventh: $v\left(c'\right):v\left(h\right)=\frac{16}{15}\Rightarrow v\left(h\right)=\frac{15}{8}$

Major sixth: $v\left(a\right)=v\left(f\right)\cdot\frac{5}{4}=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{3}$

Major second: $v(d):v(c)=v(g):v(f)\Rightarrow v(d):1=\frac{3}{2}:\frac{4}{3}\Rightarrow v(d)=\frac{9}{8}$

The following table is produced using the calculation:

Notes	C	D	E	F	G	A	H	C’
Frequency in relation to “C”	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Frequency in relation to the lower tone		9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

For the C major triad, made up of C-E-G, we have the numerical proportion 4:5:6. The same proportion applies to G-H-D’ and the subdominant triad F-A-C’.
Example: Play the golden section.

The golden section in form of a continued fraction:
$$\Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

Its convergents are: $1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\dots$, which means quotients of consecutive Fibonacci numbers. A musical melody is finite and consists of a sequence of n tones, whose frequency numbers are the first n terms of the above sequence. What are those tones?

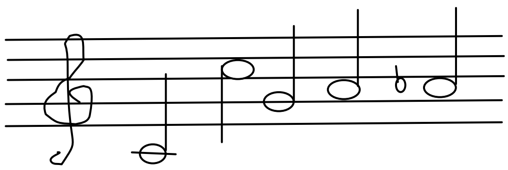
As shown in the table above, for the first four numbers, those are: C, C', G and A. What about **the golden section** itself? Its numerical value is Φ=1,618… If this number is rounded to one decimal, we will have Φ≈1,6. On the other hand, in the classical system of tones, there is only one tone in between G and A, and that is AS, a **minor sixth** in relation to C. A minor sixth is the sum of a fifth and a minor second. The frequency number of a fifth is 3/2, and the frequency number of a minor second is 16/15. A corresponding form to the addition of musical intervals is the "multiplication" of their frequency numbers. This means that $v(as)=\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8}{5}$. Therefore, AS corresponds to the fifth convergent.

This brings us to a very important and subtle limit on the way to the golden section **number**, and that is the human ear frequency range limit, or the limit of the human ear to distinguish the difference in the pitch of adjacent tones. Even a person who has a good ear for music will reach this limit, sooner or later.

Let us now imagine we are sitting at the piano, tuned to **equal temperament**. The smallest musical interval to be played is the **semitone, half-step, or the minor second**. Since the last two tones in the sequence were A and AS, this is the end of the story. The approximate value of the golden section is 8/5=1,6, which is quite close to Φ=1,618… and is an excellent approximation with a view to the limits of the human ear.

However, the number 1,6 is **not** the accurate value of the golden section. There is a more accurate value from the sequence of convergents 13/8, 21/13, 34/21… But how can we play them? Technically, it **is** possible, for instance on a violin, where there is direct contact between the string and the finger. When a tone is produced, a finger in point Φ produces vibrations (the so-called vibrato effect) which gradually diminish and eventually disappear. The impression is similar to that of looking at a child swinging in a park, while the swing gradually loses speed. Many scholars of different periods were deeply aware of the limitations of human senses. That is why the history of civilization and science is filled with efforts to invent and improve devices which help overcome these limitations, such as the **microscope, binoculars, acoustic resonators, measuring and medical devices** etc. The human ear cannot distinguish higher convergents for the continued fraction which corresponds to the golden section, or any other with positive real terms, transformed into tones, but modern acoustic devices can!

This leads us to the fascinating conclusion that **<u>a continued fraction with positive terms is not only a mathematical expression, but at the same time a notation of a music melody</u>**. For instance, a musical notation



which is easy to play, corresponds to the continued fraction $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}$.

Further contemplations in this direction lead us to **Pythagorean mysticism – a belief that mathematics is a living thing and that music is hidden in other mathematical concepts**. If we leave the area of mathematics for a moment to take a look at **the flora**, in particular a pine cone and a sunflower, a careful examination and counting of the left and right spirals on these plants reveals the presence of consecutive Fibonacci numbers, which implies the presence of the golden section, and, in turn, music, as we have already mentioned ("Sve bilo je muzika"[3]).

Some might revolt at the idea of **silent music – is it not above all related to the hearing aid?** We must think of the famous example of **Beethoven**, who composed many of his works when he was already completely deaf, relying only on his **absolute pitch** to **identify** the structure of the tones born of his **rich musical invention** and **fix it in a musical notation!**

Let us conclude by saying that these two well-known mathematical concepts with multiple applications both in mathematics and art on the one hand (section aurae), and physics and its practical uses on the other (continued fractions) together form a harmonic core of life. They are tightly related through inversion, and although they may be perceived as two utterly different concepts at first glance, they carry within themselves a "melody" and therefore reveal the harmony and beauty of nature and the purpose of life. It is up to those who feel all the perfection of mathematics and its relationship to music to delve into and interpret the golden section and continued fractions with admiration and an informed, mathematically and musically-based view of the world, and to search for a deeper meaning of studying these two concepts in mathematics, thus providing them with "a soul", embodied not only in their "technical part", but also in their "inner experience", which can be revealed through their music!

REFERENCE

(Jedna priča o verižnim razlomcima-Mogu li se oni odsvirati? Vrnjačka Banja 2015)
1. M. Čanak: "Historische Entnicklung und Annendung der Kettenbrüche", I Osterreichisches symposium zur Geschichte der Mathematik, Neuhofen 1986, s. 26-30
2. M. Čanak , J. Fempl: Das Geheimnis der Apollonischen Berührungsprobleme", XII Osterreichisches symposium zur Geschichte der Mathematik, Miesenbach 2014, s. 44-58.
3. W. Jones, W. Thron, "Continued fractions", Colorado 1980.
4. V. Skorobogatko, "Teorija vetvjaščihsja cepnih drobei i ee primenenie" Moskva, Nauka, 1983.
5. Prof. dr. Miloš Čanak: Matematika i muzika, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd
6. M. Čanak: Istorijski razvoj i primena verižnih razlomaka, Osterreichisches symposium zur Geschichte der Mathematik

Jasna Fempl Mađarević
11000 Beograd, Vidikovački venac 27
Serbien
e-mail: jasnafemplmađarević@gmail.com
MD Arhimedes: arhimed1@eunet.rs

[3] "Music was everywhere" - a song written and performed by a famous Yugoslav singer and songwriter Arsen Dedić

HERON und seine Wurzeln

Gerd Baron, TU-Wien

Quadratwurzeln

Für Quadratwurzeln stellt uns Heron sein berühmtes Näherungsverfahren zur Verfügung.

Die Annäherung $\sqrt{N} \approx \frac{a + \frac{N}{a}}{2}$ wird als Schritt in einer Iteration aufgefasst. Es wird also a durch die verbesserte Näherung ersetzt. Es ist bekannt, dass dies eine Vorwegnahme des Newtonschen Verfahrens für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ darstellt.

Kubikwurzeln
Wie sollte dies bei Kubikwurzeln aussehen?

Schauen wir uns das Verfahren geometrisch an. Wir betrachten N als Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten a und b, also ab=N und verwandeln es in ein quadratähnlicheres mit einer Seite (a+b)/2.

Bei Kubikwurzeln wäre eine Analogie durch Quader mit Seitenlängen a, b und c (abc=N) und ersetzen einer dieser Seiten durch (a+b+c)/3. Man müsste nachschauen, in welchem der Intervalle [a,b], [b,c] oder [a,c] der neue Wert liegt.
Damit geht die Idee der einfachen Iteration (mit nur einem Wert) verloren. Es wird komplizierter. Vor allem braucht man zwei Startwerte.
Aber mit a=b, $a^2c=N$ geht es wieder. Allerdings ist eine Anwendung dieser Methode vor Newton nicht gesichert.

Heron hat in seiner erst 1896 entdeckten Metrika eine ganz andere Formel, ein ganz anderes Verfahren präsentiert.

In [1] LEMMERMEYER findet man es so beschrieben.

Es sei $a^3<N<(a+1)^3$ und $d_1=N-a^3$ sowie $d_2=(a+1)^3-N$.
Dann ist $\sqrt[3]{N} \approx a + \frac{(a+1)d_1}{(a+1)d_1 + ad_2}$.
Gleichzeitig wird betont, dass man nicht weiß, wie Heron auf diese Formel gekommen ist.

Eine exakte Antwort ist unmöglich. Denn erstens hat er keine Formel angegeben, sondern nur ein Verfahren angedeutet. Und dies nur an einem Zahlenbeispiel demonstriert. Selbst wenn er eine Formel angegeben hätte, wäre ihr Ursprung, also ihre Grundidee weiter im Dunkeln geblieben. Trotzdem wollen wir es versuchen.

VERALLGEMEINERUNG
Wir wollen die Deutung des Verfahrens für Kubikwurzeln gleich auf in [a,b] streng monotone (wachsende) Funktionen f(x) erweitern.

Die Aufgabe und die Lösung lauten also:
Aufgabe: Es sei $Y \in [f(a),f(b)]$ gegeben. Gesucht ist eine Näherung von $X \in [a,b]$ mit Y=f(X).
Lösung: Es sei nun $d_1=Y-f(a)$ und $d_2=f(b)-Y$.

Dann gilt $X \approx a + \dfrac{bd_1}{bd_1 + ad_2}(b - a) = \dfrac{ad_2}{bd_1 + ad_2} \cdot a + \dfrac{bd_1}{bd_1 + ad_2} \cdot b$

Im Sinne der griechischen (Ingenieur-)Mathematik mit den Vertretern Archimedes und Heron, ist ad_2 eine Fläche, die eines Rechtecks mit den Seiten a (parallel zur x-Achse) und d_2 (parallel zur y-Achse). Sie wird multipliziert mit der x-Koordinate (Abstand zur Drehachse) a/2 des Schwerpunkts. Daher ist das Volumen des bei der Drehung um die linke Seite des Rechtecks (y-Achse) entstehenden Drehzylinders proportional zu $ad_2 \cdot a$. Analoges gilt für das Produkt $bd_1 \cdot b$ mit demselben Proportionalitätsfaktor 1/2.

Die Summe $ad_2 \cdot a + bd_1 \cdot b$ ist proportional (mit demselben Proportionalitätsfaktor) zum Volumen der zweistöckigen Torte mit der Trennfläche in der Höhe d_1. Es ist also zu erwarten, dass der Schwerpunkt der Vereinigung der beiden Rechtecke näher zu (X/2,Y) liegt als die Schwerpunkte der einzelnen Rechtecke. Mit seinem Abstand c/2 von der Drehachse liefert er das Volumen $(ad_2+bd_1) \cdot c$ mit demselben Proportionalitätsfaktor. Aus den Gesetzen für Volumina von Drehzylindern ist nun $(ad_2+bd_1) \cdot c = ad_2 \cdot a + bd_1 \cdot b$, also

$$X \approx c = \frac{ad_2}{bd_1 + ad_2} \cdot a + \frac{bd_1}{bd_1 + ad_2} \cdot b.$$

Mit $f(x)=x^3$ und $b=a+1$ erhält man die Heronsche Formel der Metrika. Man braucht ja nur noch die Terme mit a zusammenzufassen, erhält seinen Faktor 1 und das Korrekturglied frei Haus geliefert.

Das in der Metrika vorgerechnete Beispiel Kubikwurzel aus 100 lautet:

$$\begin{aligned} 125 - 100 &= 25 \\ 100 - 64 &= 36 \\ 5 \times 36 &= 180 \\ 180 + 100 &= 280 \\ 180/280 &= 9/14 \\ 4 + 9/14 &= 4\frac{9}{14} \end{aligned}$$

Diese Berechnung der Kubikwurzel aus 100 mit dem Ausgangswert a=4 liefert also zunächst die Seiten $d_2=25$ und $d_1=36$. Als nächstes die Fläche des unteren Rechtecks $(a+1)d_1=180$. Mit $4\times25=100$ als Fläche des oberen Rechtecks (im Kopf gerechnet) ergibt sich die Gesamtfläche der beiden Rechtecke als 180+100=280. Der Korrekturanteil durch das untere Rechteck ist also 180/280=9/14.

Anwendung der Verallgemeinerung auf die Quadratwurzel

Wählt man als $f(x)=x^2$, sucht also die Quadratwurzel, so liefert dieses Verfahren mit $d_1=N-a^2$ und $d_2=b^2-N$ die Näherung

$$\sqrt{N} \approx \frac{ad_2}{ad_2 + bd_1} \cdot a + \frac{bd_1}{ad_2 + bd_1} \cdot b = \frac{a(b^2 - N)}{a(b^2 - N) + b(N - a^2)} \cdot a + \frac{b(N - a^2)}{a(b^2 - N) + b(N - a^2)} \cdot b$$

Also nach Vereinfachung $\sqrt{N} \approx \dfrac{(a+b)N}{ab+N}$

Wird b so gewählt, wie praktisch in der (heronischen vulgo babylonischen) Methode für die Quadratwurzel, also ab=N, erhält man auch die dortige Näherung $\sqrt{N} \approx \frac{\left(a+\frac{N}{a}\right)N}{N+N} = \frac{a+\frac{N}{a}}{2}$

Wählt man andererseits wie bei den Kubikwurzeln b=a+1 erhält man $\sqrt{N} \approx \frac{(2a+1)N}{a(a+1)+N}$

wobei wegen $a^2<N<(a+1)^2$ also a=[√N] ist.

Für N=3 (und daher a=1) erhält man hier √3≈1,8 während das andere (heronsche) Verfahren die Näherung √3≈2 liefert.

Für N=2016 erhält man √2016≈ 179424/3996=4984/111≈44,90090090 gegenüber √2016=44,89988864 mit einem absolutem Fehler von 0.001012261045 (relativer Fehler 0,00002254481411) gegenüber √2016≈ 3952/88=494/11≈ 44,90909090 mit einem mehr als neun Mal so großem absolutem Fehler von 0,009202269235 (relativer Fehler 0,0002049508253).

Heron hätte also mit der Übertragung seiner Methode für die Kubikwurzeln auf die Quadratwurzeln seine eigene, also auch die alte babylonische Methode drastisch verbessert.

Eine andere Idee zur Übertragung der Kubikwurzelmethode auf die Quadratwurzeln ist die folgende. Statt von den dreidimensionalen Größen der Volumina von Zylindern von den Mantelflächen aus, so haben wir die Formeln

$$\sqrt{N} \approx \frac{d_2}{d_2+d_1}\cdot a + \frac{d_1}{d_2+d_1}\cdot b = \frac{\left(b^2-N\right)}{\left(b^2-N\right)+\left(N-a^2\right)}\cdot a + \frac{\left(N-a^2\right)}{\left(b^2-N\right)+\left(N-a^2\right)}\cdot b$$

Also nach Vereinfachung $\sqrt{N} \approx \frac{(b-a)(N+ab)}{b^2-a^2} = \frac{N+ab}{a+b}$ ..

Wählt man ab=N, so erhält man $\sqrt{N} \approx \frac{2N}{a+b} = \frac{N}{\frac{a+b}{2}}$, also das Komplement zum Heronschen Wert.

Wählt man wieder b=a+1 und $a = \lfloor N \rfloor$, so erhält man $\sqrt{N} \approx \frac{N+a(a+1)}{2a+1}$, also das Komplement zum neuen Wert.

Moderne Interpretation

Eine „moderne“ Interpretation der Formel benötigt nicht die geometrische Einkleidung in Rotationskörper, sie arbeitet mit Massenbelegungen und den Schwerpunkten von Strecken. Wählen wir eine Dichtefunktion (Masseverteilung), die nur von der Abszisse abhängt, also die Form ρ(u) für den Punkt (u,v) hat, so geht unsere obige Verallgemeinerung über in:

Es sei Y∈[f(a),f(b)] gegeben. Gesucht ist eine Näherung von X∈[a,b] mit Y=f(X).
Es sei d_1=Y–f(a) und d_2=f(b)–Y.

$$X \approx a + \frac{\rho(b)d_1}{\rho(b)d_1+\rho(a)d_2}(b-a) = \frac{\rho(a)d_2}{\rho(b)d_1+\rho(a)d_2}\cdot a + \frac{\rho(b)d_1}{\rho(b)d_1+\rho(a)d_2}\cdot b$$

Spezielle Funktionen f(x)

Ist f(x) eine Potenzfunktion, wie bei uns $f(x)=x^3$, so bietet sich für ρ(u) auch wieder eine Potenzfunktion an. Bei Heron also ρ(u)=u.

Die nächste ungerade Potenz $f(x)=x^5$ liefert aber mit $\rho(u)=u^2$ weit bessere Resultate.
Ebenso bei $f(x)=x^7$ mit $\rho(u)=u^3$.
Sind das echte Überraschungen!?.

Wählen wir zur Berechnung von w mit $w^n=N$ die beiden Näherungen a und b mit $a=w(1-\delta)$ und $b=w(1+\varepsilon)$ mit $a^k b^{n-k}=N=w^n$, so muß bei kleinen δ>0 und ε>0 die Relation $k\delta=(n-k)\varepsilon$ gelten.
Damit in die Formel

$$w \approx \frac{a^j\left(b^n - a^k b^{n-k}\right)a + b^j\left(a^n - a^k b^{n-k}\right)b}{a^j\left(b^n - a^k b^{n-k}\right)a + b^j\left(a^n - a^k b^{n-k}\right)b} = \frac{a^{j+1}b^n - a^{j+k+1}b^{n-k} + a^n b^{j+1} - a^k b^{n+j-k+1}}{a^{j1}b^n - a^{j+k}b^{n-k} + a^n b^j - a^k b^{n+j-k}}$$

$$w \approx \frac{w^{n+j+1}}{w^{n+j}} \cdot \frac{(1-\delta)^{j+1}(1+\varepsilon)^n - (1-\delta)^{j+k+1}(1+\varepsilon)^{n-k} + (1-\delta)^n(1+\varepsilon)^{j+1} - (1-\delta)^k(1+\varepsilon)^{n+j-k+1}}{(1-\delta)^{j1}(1+\varepsilon)^n - (1-\delta)^{j+k}(1+\varepsilon)^{n-k} + (1-\delta)^n(1+\varepsilon)^j - (1-\delta)^k(1+\varepsilon)^{n+j-k}}$$

Daher muß Zähler minus Nenner ungefähr Null sein.

$$\left((1-\delta)^j(1+\varepsilon)^n - (1-\delta)^{j+k}(1+\varepsilon)^{n-k}\right)\left((1-\delta)-1\right) + \left((1-\delta)^n(1+\varepsilon)^j - (1-\delta)^k(1+\varepsilon)^{n+j-k}\right)\left((1+\varepsilon)-1\right)$$
$$-\left((1-\delta)^j(1+\varepsilon)^n - (1-\delta)^{j+k}(1+\varepsilon)^{n-k}\right)\delta + \left((1-\delta)^n(1+\varepsilon)^j - (1-\delta)^k(1+\varepsilon)^{n+j-k}\right)\varepsilon$$

Die konstanten und linearen Terme in δ und ε verschwinden.
In zweiter Näherung haben wir die Bedingung

$$-\left((1-j\delta)(1+n\varepsilon) - \left(1-(j+k)\delta\right)\left(1+(n-k)\varepsilon\right)\right)\delta + \left((1-n\delta)(1+j\varepsilon) - (1-k\delta)\left(1+(n+j-k)\varepsilon\right)\right)\varepsilon$$

$$-\left(-j\delta + n\varepsilon + (j+k)\delta - (n-k)\varepsilon\right)\delta + \left(-n\delta + j\varepsilon + k\delta - (n+j-k)\varepsilon\right)\varepsilon =$$
$$= -k\delta(\delta+\varepsilon) - (n-k)\varepsilon(\delta+\varepsilon) \approx 0$$

Würfelverdoppelung

Wählt man den Originalaltar mit 10 m (oder andere Einheiten) Seitenlänge und als Ausgangseinschluß a=12 , b=13 so erhält man die Näherung für die Seitenlänge des neuen Altars $\sqrt[3]{2000} \approx 12.59932203$ gegenüber 12.59921049 dem „echten Wert“.

Bei der Verdopplung eines Cubus mit 10 m Seitenlänge beträgt der Fehler nach der heronschen Kubikwurzelmethode 1/10 mm.

Bei Verwendung des a.a.b=N Verfahrens mit a=12 m wird die Näherung für die Seitenlänge 12.59824046 m. Der absolute Fehler beträgt hier bereits 1 mm.

[1] Franz LEMMERMEYER Mathematik à la Carte
Springer Spektrum 978-3-662-45269-1 (2015) S. 73

JProf. Dr. Silvia Schöneburg, Holger Wuschke

Der mittelalterliche Zahlenkampf – Ein Spiel kommt zu seinem Namen

Vor 30 Jahren erschien das Werk „Das mittelalterliche Zahlenkampfspiel“ von Arno Borst, welches den Diskurs über die Rithmomachie zusammenfasste, erweiterte und neu intendierte. So setzten sich in dieser und in der nachfolgenden Zeit einige interessierte (Mathematik-)Historiker mit dem Zahlenkampf auseinander (vgl. Illmer 1987, Folkerts 1992, 1993, 2001, Mebben 1997, 1999, Moyer 2001, Núñez Espallargas 2004, Holl 2005, …) und trugen damit zu einer sehr guten Aufarbeitung der kulturhistorischen und mathematischen Hintergründe bei. Dabei wurden auch die verschiedenen Namensgebungen und Deutungen des Zahlenkampfes von seinen Ursprüngen als *altercatio* oder *conflictus* (bei Asilo) über *numerorum conflictus* und *Rithmachia/Rithmimachia* (Zeit nach dem Lütticher Anonymus) bis zur *Arithmomachia* (bei Abraham Ries) gefunden.

In diesem Beitrag wird diskutiert, inwiefern die Abwandlung des Namens *Rithmomachie* zum Begriff der *Arithmomachie* Ansätze in der historischen Bedeutung des Zahlenkampfes geben können.

1. Begriffe des Zahlenkampfes

Da der Begriff der Rithmomachie eine Schöpfung des Mittelalters ist, existieren unterschiedliche Schreibweisen. Das Wort selbst setzt sich aus den griechischen Wörtern ὀ ἀριθμός (Zahl/Anzahl/Zählung) oder ὀ ῥυθμός (Teile/Proportion) einerseits und ἡ μάχη (Schlacht/Kampf) andererseits zusammen. Dass es sich um einen Kampf handelt ist eindeutig. *„Handelt es sich also um eine Arithmomachie, einen Zahlenkampf, oder eine Rhythmomachie, einen Proportionenkampf?“*[1]

Durch die griechischen Wortstämme in der Bezeichnung geben Smith und Eaton in ihrem Aufsatz von 1911 an, *„that the origin of the game is to be sought in the Greek civilization, and perhaps in the later schools of Byzantium or Alexandria.“*[2] Dies kann jedoch nicht durch Quellen bestätigt werden.

Die Bezeichnung *„numerorum conflictus“* durch den Lütticher Anonymus[3] (um 1070) wird maßgeblich für die griechische Übersetzung *„Rithmachia, alsbald zu Rithmimachia ausgeweitet.“*[4] Evans belegt diese Bezeichnung erstmals in Lehrwerken des 11. beziehungsweise 12. Jahrhunderts.[5]

Welche Bedeutung dem Begriff zukommt, wird in einem gesonderten Abschnitt geklärt (3. Von der Rithmomachie zur Arithmomachie), da dies erst in einer kulturhistorischen Auseinandersetzung mit dem Ursprung und Gebrauch des Zahlenkampfspieles möglich sein wird. Allerdings ist eine Betrachtung und Bemerkung zur Orthografie bereits an dieser Stelle notwendig, da auch in den wissenschaftlichen Beiträgen zum Thema unterschiedliche Schreibweisen erkennbar sind und sich durch die verschiedenen Schreibweisen teilweise Klassifizierungen und Zusammenhänge ausmachen lassen.

„In den ältesten Darstellungen kommt noch überhaupt kein Name vor.“[6] Asilo, der Ideengeber des Spieles, bezeichnet den Zahlenkampf in seinem Schreiben von 1030 mit

---

[1] Holl (2005), S. 42.
[2] Smith/Eaton (1911), S. 74.
[3] Vgl. Borst (1986), S. 340, c. 1.
[4] Ebd., S. 113.
[5] Vgl. Evans (1976), S. 262.
[6] Folkerts (2001²), S. 333.

„altercatio" oder *„conflictus"*[7]. Es folgt der bereits erwähnte Lütticher Anonymus mit seiner Bezeichnung *„numerorum conflictus"*. In der nachfolgenden Zeit gibt es folgende namensverwandte Bezeichnungen des Zahlenkampfes:

- ***Rithmachia*** (Werinher von Tergernsee [um 1080])
- ***Rithmimachie*** (Borst [1986, 1990], Folkerts [1992², 2001²])
- ***Rithmomachia*** (Evans [1976], Moyer [2001], Richards [1943], Smith/Eaton [1911])
- ***Rithmomachie*** (Holl [2005])
- ***Ritmomachie*** (Ende 13. Jh. Frankreich)
- ***Rhythmomachie*** (Breidert [1973], Wappler [1892])
- ***Rythmomachie*** (Libri [1865²])
- ***Rhytmomachia*** (Zedler [1738])
- ***Rythmomachia*** (Bossière [1554/56], Fortolf [1130], Selenus [1616], Núñez Espallargas [2004])
- ***Rhythmimachia*** (Klopsch [1967], Rosenthal [1794])

Richards führt in seinem Aufsatz auf, dass sich die Schreibweisen mit einem Ry oder Rhy zu Beginn des Wortes eher auf ἀριθμός zurückgehen, während sich die Bezeichnungen mit einem i nach dem R von dem griechischen Wort ῥυθμός ableiten:

> *„The spelling Rhythmimachia is incorrect and seems to imply a misunderstanding of the word; this is derived from* ἀριθμός *(number), but it has been confused with rhythm. The correct spelling is Rithmomachia, which is better than Rithmachia, the spelling in […] other variations, such as Rithmimachia and Rithmachya. "*[8]

Mit Abraham Ries und seiner deutschen Übersetzung und Bearbeitung des französischen Textes von Bossière und des englischen Textes von Shirwood bekommt der Zahlenkampf die Bezeichnung *Arithmomachia*, welche eindeutig auf das Wort ἀριθμός zurückgeht. Diese Bezeichnung wird in der deutschen Sprache und der weiteren Überlieferung übernommen. So taucht sie auch in den Enzyklopädien des 18. Jahrhunderts[9] auf. Hier lässt sich auch erstmals die Bezeichnung *Lythmomachia* nachweisen. Das L könnte ein falsch transkribiertes Fraktur-R sein.

Im ausgehenden 18. Jahrhundert bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts wird die Rithmomachie nicht mehr als solche bezeichnet, sondern als *„Das pythagoräische oder arithmetische Schachspiel"*[10] oder nur als *„Das arithmetische Schachspiel"*[11] bezeichnet und somit dem Schachspiel untergeordnet.

2. Grundidee des Spieles (nach Asilo)

a. Spielsteine und ihre Bewegung

In seinem Entwurf eines Zahlenkampfspieles ist Asilo eindeutig, dass es ein Spiel für zwei Spieler ist. Ein Spieler hat ein gerades Heer, der andere Spieler hat ein ungerades Heer. *„Der*

[7] Vgl. Borst (1986), S. 61, 330 c. 1 und 333 c. 10.
[8] Vgl. Smith (1943), S. 91.
[9] Vgl. Rosenthal (1794); Zedler (1738).
[10] Vgl. Allgaier (1796).
[11] Vgl. Waidder (1837).

Gegensatz zwischen Gleich und Ungleich, zwischen geraden und ungeraden Zahlen bestimmte die Spielidee. Sie zielte indes nicht auf einen Krieg zwischen Weiß und Rot oder zwischen Rund und Eckig."[12] Anschließend werden die restlichen Steine durch *multiplex*, *superparticulares* und *superpartiens* der geraden Zahlen 2, 4, 6, 8 und der ungeraden Zahlen 3, 5, 7, 9 erzeugt. Dies sind proportionale Erweiterungen von Zahlen, die aus der Zahlenlehre des Boethius stammen[13].

Ein *multiplex* ist ein Vielfaches einer Zahl. So sind beispielsweise *duplum* (das Doppelte), *triplum* (das Dreifache), *quadruplum* (das Vierfache) usw. multiplices. Eine Zahl ist jedoch auch ohne Veränderung ein *multiplex* zu sich selbst, weil sie mit 1 multipliziert sich selbst erzeugt.

Superparticulares sind die sogenannten überteiligen Zahlen, da sie zur Zahl einen Bruchteil (ausschließlich Stammbrüche) ihrer selbst hinzufügen. So ist ein *sesqualter* beispielsweise das Anderthalbfache einer Zahl, also $(1 + 1/2)$ · Zahl. Dabei ist die 1 in der Klammer die Zahl selbst. Ein weiteres Beispiel sind die *sesquitertii*, welche zu einer Zahl den dritten Teil ihrer selbst hinzufügen, also $(1 + 1/3)$ · Zahl. Der Name der *superparticulares* leitet sich aus dem Nenner der Stammbrüche ab.

Die *superpartientes* sind nicht nur überteilige, sondern übermehrteilige Zahlen. Dies liegt daran, dass die Zahl wiederum um einen Bruchteil ihrer selbst ergänzt wird, dieses Mal jedoch nicht um einen Stammbruch, sondern um ein Vielfaches des Stammbruches. Das Vielfache der Zahl ist nahezu das Doppelte der Zahl, es wird lediglich ein Stammbruch abgezogen, so dass sich folgende Bildungsvorschrift für *superpartiens* ergibt:

$$\left(2-\frac{1}{m}\right) \cdot \text{Zahl} = \left(1+\frac{m-1}{m}\right) \cdot \text{Zahl}$$

Ausgehend von diesen drei Proportionen setzen sich die Spielsteine des geraden Heeres wie folgt zusammen[14]:

multiplex	$1 \cdot 2 = \mathbf{2}$	$1 \cdot 4 = \mathbf{4}$	$1 \cdot 6 = \mathbf{6}$	$1 \cdot 8 = \mathbf{8}$
	$2 \cdot 2 = \mathbf{4}$	$4 \cdot 4 = \mathbf{16}$	$6 \cdot 6 = \mathbf{36}$	$8 \cdot 8 = \mathbf{64}$
superparticularis	$(1 + 1/2) \cdot 4 = \mathbf{6}$	$(1 + 1/4) \cdot 16 = \mathbf{20}$	$(1 + 1/6) \cdot 36 = \mathbf{42}$	$(1 + 1/8) \cdot 64 = \mathbf{72}$
	$(1 + 1/2) \cdot 6 = \mathbf{9}$	$(1 + 1/4) \cdot 20 = \mathbf{25}$	$(1 + 1/6) \cdot 42 = \mathbf{49}$	$(1 + 1/8) \cdot 72 = \mathbf{81}$
superpartiens	$(1 + 2/3) \cdot 9 = \mathbf{15}$	$(1 + 4/5) \cdot 25 = \mathbf{45}$	$(1 + 6/7) \cdot 49 = \mathbf{91}$	$(1 + 8/9) \cdot 81 = \mathbf{153}$
	$(1 + 2/3) \cdot 15 = \mathbf{25}$	$(1 + 4/5) \cdot 45 = \mathbf{81}$	$(1 + 6/7) \cdot 91 = \mathbf{169}$	$(1 + 8/9) \cdot 153 = \mathbf{289}$

Für das ungerade Heer ergibt sich folgende Zusammensetzung:

multiplex	$1 \cdot 3 = \mathbf{3}$	$1 \cdot 5 = \mathbf{5}$	$1 \cdot 7 = \mathbf{7}$	$1 \cdot 9 = \mathbf{9}$
	$3 \cdot 3 = \mathbf{9}$	$5 \cdot 5 = \mathbf{25}$	$7 \cdot 7 = \mathbf{49}$	$9 \cdot 9 = \mathbf{81}$
superparticularis	$(1 + 1/3) \cdot 9 = \mathbf{12}$	$(1 + 1/5) \cdot 25 = \mathbf{30}$	$(1 + 1/7) \cdot 49 = \mathbf{56}$	$(1 + 1/9) \cdot 81 = \mathbf{90}$
	$(1 + 1/3) \cdot 12 = \mathbf{16}$	$(1 + 1/5) \cdot 30 = \mathbf{36}$	$(1 + 1/7) \cdot 56 = \mathbf{64}$	$(1 + 1/9) \cdot 90 = \mathbf{100}$
superpartiens	$(1 + 3/4) \cdot 16 = \mathbf{28}$	$(1 + 5/6) \cdot 36 = \mathbf{66}$	$(1 + 7/8) \cdot 64 = \mathbf{120}$	$(1 + 9/10) \cdot 100 = \mathbf{190}$
	$(1 + 3/4) \cdot 28 = \mathbf{49}$	$(1 + 5/6) \cdot 66 = \mathbf{121}$	$(1 + 7/8) \cdot 120 = \mathbf{225}$	$(1 + 9/10) \cdot 190 = \mathbf{361}$

[12] Borst (1986), S. 61 f.

[13] Vgl. Boethius/Oosthour, Henricus/Schilling, Johannes (1999): *Anicii Manlii Severini Boethii Det arithmetica*, Turnhout, S. 57 ff.; Illmer (1990); Richter/Schöneburg (2016).

[14] Vgl. Núñez Espallargas (2004), S. 293.

Die Spielsteine der *multiplex* sind in den späteren Bearbeitungen kreisförmig, die der *superparticularis* dreieckig und die der *superpartiens* quadratisch[15]. Asilo selbst gibt in seiner Ausführung bereits an, wie die entsprechenden Steine ziehen dürfen: „*His ita dispositis, ex alterutra parte alternatim trahuntur omnes species multiplicis in ante, retro, dextrorsum, sinistrorsum, angulariter in campum secundum, superparticularis in tercium, superpartientis in quartum.*“[16] Bei diesen Bewegungen wird mit dem eckigen Zug (*angulariter*) wahrscheinlich eine Ecke[17] im Sinne Boethius gemeint sein, die rechtwinklig und nicht diagonal[18] entsteht[19].

Bleibt bei der Bewegungsbeschreibung zu klären, was *in campum secundum*, *tercium* und *quartum* bedeutet bzw. ob das eigene Feld bei dieser Zählweise mitgezählt wird oder nicht. Ausgehend davon ergeben sich zwei Zugmöglichkeiten: Zum einen eine Variante, in der die Startposition nicht mitgezählt wird und zum anderen eine Möglichkeit, in welcher das Ausgangsfeld mitgezählt wird. Borst gibt dazu an, dass wahrscheinlich die zweite Variante, in der das Ausgangsfeld mitgezählt, wird von Asilo intendiert wurde[20]. Damit können die *multiplices* nicht um die Ecke gehen und ziehen ein Feld links, rechts, vor oder zurück, die *superparticulares* ziehen zwei und die *superpartientes* ziehen drei Felder, wie in den Abbildungen 1 bis 3 mit den grauen Feldern dargestellt.

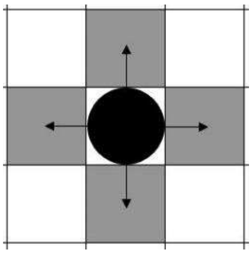


Abbildung 1: In campum secundum (mit zählendem Ausgangsfeld)

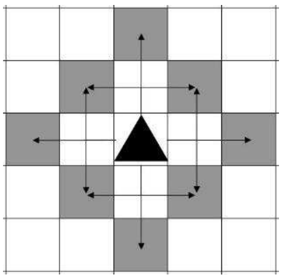


Abbildung 2: Bewegungsmöglichkeiten eines superparticularis

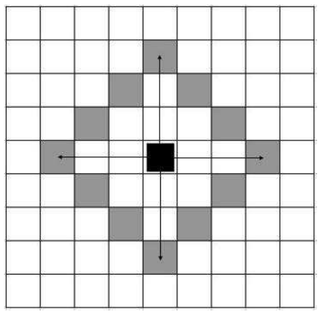


Abbildung 3: Bewegungsmöglichkeiten eines superpartientis

Jeder Spieler hat jedoch noch einen besonderen Spielstein: die Pyramide. Im geraden Heer ist die 91 eine Pyramide und im ungeraden Heer die 190. Sie heißen Pyramiden, da sie im pythagoräischen Sinne als räumliche Zahlen aus einzelnen Quadraten als figurierte Zahlen gebildet werden[21]. So ist die 91 eine quadratische Pyramide mit Basis 36 und Spitze 1 und die 190 ein Pyramidenstumpf mit Basis 64 und oberer quadratischer Fläche 16 (wie in Abbildung 4 dargestellt).

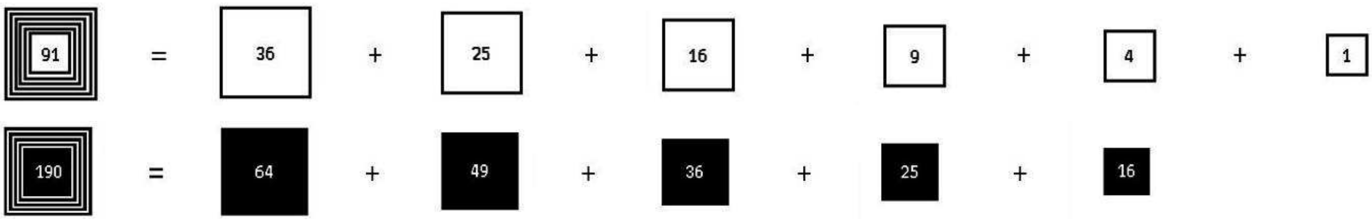


Abbildung 4: Die weiße und schwarze Pyramide

---

[15] Die Formen werden deshalb jetzt beschrieben, damit in den nachfolgenden Abschnitten die Regeln besser visualisiert werden können.
[16] Borst (1986), S. 332 c. 6.
[17] Peiper bezeichnet dies mit dem Wort „übereck“. Vgl. Peiper (1880), S. 207.
[18] So wie Evans es bezeichnet in Evans (1976), S. 267 f.
[19] Vergleichbar beim Schach mit dem Turm, der auch rechtwinklige Ecken bildet im Gegensatz zum Läufer. Vgl. Borst (1986), S. 68.
[20] Auch dies ist im Sinne der boethianischen Lehre. Vgl. Borst (1986), S. 69.
[21] Im pythagoräischen Sinne bestehen alle Zahlen in ihrer Gesamtheit aus der Einheit 1.

Nach ihrer Bildungsvorschrift sind sowohl die 91 als auch die 190 *superpartientes*. Sie beinhalten jedoch in ihrer Gesamtheit auch *multiplices* und *superparticulares*. Daher dürfen die Pyramiden entweder 1 Feld, 2 Felder oder 3 Felder ziehen.

In den nachfolgenden Bearbeitungen wird darauf verwiesen, aus welchen *multiplices*, *superparticulares* und *superpartientes* die Pyramide besteht. Dies führt zu einer Darstellung, wie in Abbildung 5, welche aus dem Text von Bossière von 1556 entnommen wurde[22]. Der Satz *„Numeri sub Pyramidibus collocandi“* verdeutlicht, warum sowohl die Pyramide des geraden (*parium*) Heeres, als auch die Pyramide des ungeraden (*imparium*) Heeres die Zugmöglichkeiten aller Spielsteine haben.

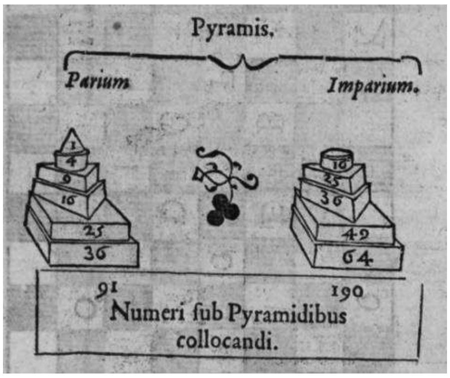


Abbildung 5: Pyramidendarstellung von Bossière

In späteren Ausgaben wird sie auch als König[23] oder Turm[24] bezeichnet. Dieser Begriff kann darauf zurückgeführt werden, dass die Rithmomachie immer mehr mit dem Schachspiel verglichen wird und da die Pyramide ein besonderer Spielstein ist, der Sieg oder Niederlage des gesamten Spiels ausmacht, ist der Begriff König treffend. In der Gangart wird die Pyramide jedoch mit einer Dame verglichen.

b. Regeln zum Schlagen/Steinraub

Asilo gibt außerdem Auskunft darüber, wie Spielsteine weggenommen[25] werden können und welche Siegesbedingungen bei der Rithmomachie gelten. Ein gegnerischer Stein kann auf vier Arten geraubt werden[26]:

1. *eruptio*[27]: Wenn ein Stein multipliziert mit den dazwischenliegenden Feldern zum gegnerischen Stein dessen Zahl ergibt[28].

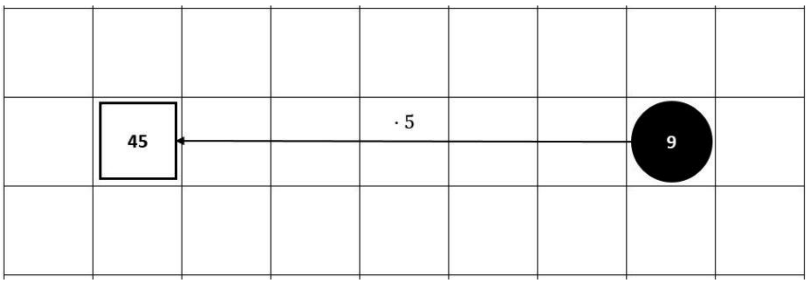


Abbildung 6: Die 9 schlägt die 45 aufgrund dieser Regel.

[22] Vgl. Buxerius (1556), S. 43v.
[23] Vgl. Fulke/Lever (1563), in: Moyer (2001), S. 150; Ries (1562), S. 6v ff.
[24] Vgl. Selenus (1616), S. 450 ff.
[25] Auch wenn die Bezeichnung „geschlagen“ bei militärisch orientierten Brettspielen (wie Schach) üblich ist, so trifft hier eher die Bezeichnung „wegnehmen“ (*auffere*) zu, da die gegnerischen Spielsteine hinterher noch verwendet werden können. Vgl. Borst (1986), S. 69 ff.
[26] Die Betitelung der Regeln sind nicht von Asilo, sondern der späteren Bearbeitung von Bossière entnommen.
[27] Bezeichnung von Buxerius (1556), S. 37v verwendet durch Folkerts (2001²), S. 335 und Richards (1943), S. 94.
[28] *„Et si per hos legitimos tractus aliquem contrariae partis numerum ita offendant, ut quantitas interiacentium camporum per illos ducta eundem efficiat, auferant.“* aus Borst (1986), S. 332 c.7.

2. *fraus/insidiae*[29]: Wenn zwei Steine des Spielers einen gegnerischen Stein in der Mitte haben – sowohl in einer Linie, als auch im Winkel – und ihre Summe oder Produkt dem gegnerischen Zahlenwert entspricht[30].

3. *congressus*[31]: Wenn in einem regulären Zug zwei gleichzahlige Steine aufeinandertreffen[32].

4. *obsidio*[33]: Wenn ein gegnerischer Stein so umzingelt wird, dass er sich im nächsten Zug nicht mehr bewegen kann. Diese Regel gilt nur für die *multiplices* 2, 4, 6, 8 und 3, 5, 7, 9 (die nicht aus anderen zusammengesetzten Spielsteine) der einzelnen Heere[34].

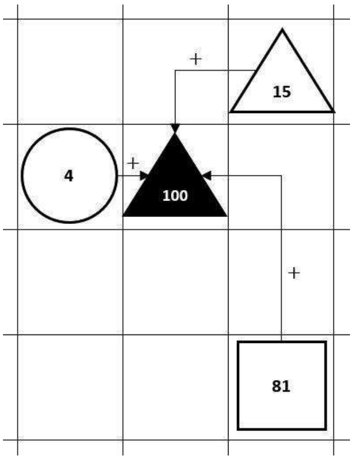


Abbildung 7: Die 100 wird durch die 4, 15 und 81 additiv geraubt.

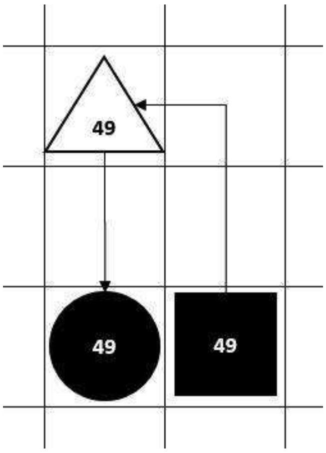


Abbildung 8: Auf diese Weise kann die schwarze 49 die weiße schlagen und umgekehrt.

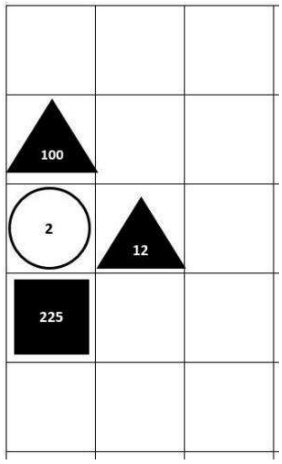


Abbildung 9: Die 2 kann sich nicht mehr bewegen und wird so geraubt.

Außerdem kann eine ganze Pyramide geraubt werden, sofern ihre Basis getroffen wird[35]. Diese Regel ist insofern sinnvoll, als dass die 190 oder 91 sonst nicht notwendigerweise durch andere Züge geschlagen werden kann.

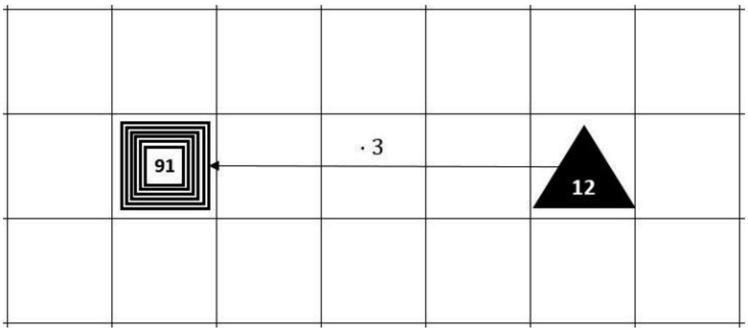


Abbildung 10: Die 12 kann aufgrund der ersten Regel die 36 als Basis der Pyramide treffen.

[29] Bezeichnung von Buxerius (1556), S. 37r verwendet durch Folkerts (2001²), S. 334 und Richards (1943), S. 94.

[30] *„Aut si contrarius numerus in angulis aut in lateribus circumponatur his partibus, quae in se multiplicatae aut iunctae reddant eiusdem summam, auferatur.“* aus Borst (1986), S. 332 c. 7.

[31] Bezeichnung von Buxerius (1556), S. 37v verwendet durch Folkerts (2001²), S. 334 und Richards (1943), S. 94. Wobei diese Regel lediglich auf die Quadratzahlen 9, 16, 25, 36, 49 und 81 zutrifft.

[32] *„Quicumque numerus in suo legitimo tractu alium eiusdem quantitatis offendat, auferat.“* aus Borst (1986), S. 332 c. 7.

[33] Bezeichnung von Buxerius (1556), S. 38r verwendet durch Folkerts (2001²), S. 335 und Richards (1943), S. 94.

[34] *„Soli primi et incompositi vagentur tuti, nisi ita undique sint circumsaepti adversariis, ut per legitimum tractum non possint evadere. Quoties hoc eveniat, totiens auferantur.“* aus Borst (1986), S. 333 c. 9.

[35] *„Non solummodo his basibus LXIIII et XXXVI pyramides auferantur, sed quicumque numeri cum quantitate spaciorum multiplicati easdem bases efficiant, pyramides auferant.“* aus Borst (1986), S. 333 c. 8.

JProf. Dr. Silvia Schöneburg, Holger Wuschke

c. Siegbedingungen

Für den Sieg müssen sämtliche Spielsteine ihre Ausgangsposition verlassen haben. Außerdem müssen *„im Lager des Gegners eine arithmetische oder harmonische Reihe (medietas) aus drei Steinen errichte[t]“*[36] werden. Besonders interessant ist dabei, dass für die harmonische Reihe (außer bei 9, 15, 45, welche alle im geraden Heer vorhanden sind) immer mindestens ein gegnerischer Stein benötigt wird[37].

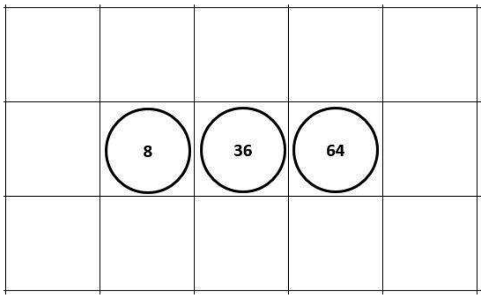


Abbildung 11: Beispiel für ein arithmetisches Mittel

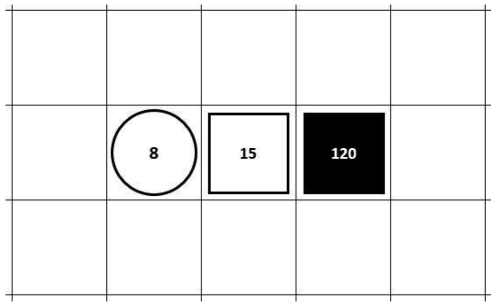


Abbildung 12: Beispiel für ein harmonisches Mittel

Hierbei wurde in Asilos Beschreibung nicht von der geometrischen Proportionalität gesprochen, dies wird erst in der späteren Spielbeschreibungen von Hermann von Reichenau zu finden sein. So fügt Hermann folgende Bedingung ein: *„Qui sic non possit venire ad victoriam, perfectam et maximam conetur ponere armoniam. Quae quatuor existens terminis XII, VIIII, VIII, VI, ternas in se retinet medietates et insuper omnium musicarum simphoniarum proportiones.“*[38] Die Reihen dürfen nach Hermann auch nicht über eine Ecke gelegt werden, sondern nur in einer Linie.

3. Von der Rithmomachie zur Arithmomachie

Wie bereits anhand der vorherigen Ausführungen deutlich geworden ist, erfuhr die Rithmomachie im Laufe der Zeit einige Abwandlungen und Ergänzungen. Diese gingen auch mit einer Änderung des Namens einher (vgl. Kapitel 1). So findet sich beispielsweise in der ersten deutschsprachigen Bearbeitung des Spiels von Abraham Ries (1533/34 – 1604), dem zweiten Sohn des bekannten Rechenmeisters Adam Ries, der Begriff der Arithmomachie[39]. Hat das Spiel damit einen Bedeutungswandel von Proportionenkampf zum Zahlenkampf vollzogen? Eine genauere Betrachtung der Handschrift, die sich mit der Signatur Mscr. Dresd. 433 in der sächsischen Landesbibliothek in Dresden befindet, soll dies beleuchten.

Die *„Arithmomachia“* (1562) von Abraham Ries gliedert sich in zwei Teile, wobei der erste, Blatt 2 bis Blatt 21 umfassende, Teil der Handschrift eher theoretisch ausgerichtet ist. In der Tradition Asilos beginnt Ries mit einer ausführlichen und recht anschaulichen Darstellung zur Erzeugung und Aufstellung der Spielsteine auf dem Spielfeld (Blatt 3-13), an welche sich die Zug- und Schlagregeln anschließen. Die Ausführungen werden mit Erläuterungen zu den verschiedenen Siegpositionen (arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel sowie der *„maxima vnd perfecta“*[40] Harmonie) beschlossen. Insgesamt besticht der erste Teil durch

---

[36] Borst (1986), S. 74. *„Tali altercatione alternorum tractuum, omnibus motis a primae positionis locis, qui victoriam desideret, in campis adversarii festinet medietates ponere, armonicam, arithmeticam.“* aus ebd. S. 333 c. 10.

[37] *„Armonici autem non ex altera parte inveniuntur omnes, sed duo tantum. Tercius per praedam debet adquiri.“* aus ebd. S. 334 c. 12.

[38] Ebd., S. 338 c. 9.

[39] Vgl. Ries (1562), S. 2r.

[40] Ries (1562), S. 20v.

eine zwar theoretische, aber mit zahlreichen Beispielen untermauerte Darstellung, die den Schwerpunkt auf die Proportionenlehre des Boethius setzt. Bei dem zweiten Teil der Handschrift, beginnend bei Blatt 26, handelt es sich um eine fast ausschließlich beispielgebundene Erläuterung des Spiels. Den Ausgangspunkt bildet das Spielbrett mit den aufgestellten Spielsteinen.[41] Beispielgebunden erfolgt auch die Erklärung der Spielzüge und der Schlagregeln (Blatt 27 – Blatt 40) sowie der Siegpositionen. Abraham Ries zählt zunächst eine Vielzahl an Möglichkeiten auf, wie das gerade Heer gewinnen kann, dann die Siegpositionen des ungeraden Heers (Blatt 41 – Blatt 44).

Neben der generellen Zweiteilung der Handschrift in einen eher theoretisch und einen eher praktisch, für den unmittelbaren Spieleinsatz, ausgerichteten Teil unterscheiden sich beide auch in der Art der Harmonien. So gibt es bei Ersterem *„die Möglichkeit, eine Harmonie aus vier Steinen zu bilden, die alle drei Harmonien – arithmetische, geometrische und musikalische – enthält. Bei der Zweiten ist es möglich, in einer musikalischen Harmonie einen gegnerischen Stein einzubauen.“*[42]

„Der Zanck streith krig / vnd Kampf, zwischen den geraden und vngeraden Tzalen“[43], wie Ries seine Abhandlung selbst bezeichnet, zeichnet sich durch zwei Besonderheiten aus. Zum einen, dass sich die Spielsteine nicht nur in ihrer Form, sondern auch in ihrer Farbe unterscheiden. So sind die runden Steine weiß, die dreieckigen rot und die viereckigen Steine schwarz.[44] Zum anderen sind die Zahlen des einen Heeres rot geschrieben[45], die anderen mit schwarzer Tinte[46], um die gegnerischen Parteien unterscheiden zu können. Dass Ries nicht der erste war, der solch eine farbliche Unterscheidung der Spielsteine vorgenommen hat, zeigt eine Analyse der vermutlich von Ries für seine Abhandlung zugrunde gelegten Quellen. Am interessantesten hat sich dabei die Sammelhandschrift Mscr. Dresd. C 80 erwiesen, in der neben einer Vielzahl von arithmetischen Schriften, eine Arithmetik des Boethius, die Proportionenlehre von Nicole Oresme sowie ein vollständiger Text der Regensburger Anonymus, Auszüge aus dem Text von Shirwood und die Rithmomachie von Pseudo-Bradwardine enthalten ist. Ries könnte u.a. durch seinen Vater Adam Ries, der im Besitz von C 80 war, mit dieser Sammelhandschrift in Kontakt gekommen sein[47]. Die von Mebben durchgeführte detaillierte Untersuchung der Handschriften konnte einige Gemeinsamkeiten, aber auch Unterschiede mit der Schrift von Abraham Ries aufzeigen.[48] So findet sich beispielsweise die Unterteilung in einen theoretischen und einen praktischen Teil ebenso wie die Farbgebung der Steine bereits in dem Text des Regensburger Anonymus. Den Titel hingegen scheint Ries von Shirwood übernommen zu haben. Insgesamt scheint Ries, *„die Vorteile aus den Regeln zu vereinen und für seine Zwecke […] zu gebrauchen.“*[49]

[41] Vgl. Ries (1562), S. 26v.
[42] Mebben (1997), S. 46.
[43] Ries (1562), S. 26r.
[44] Vgl. ebd., S. 7r.
[45] Vgl. ebd., S, 7v.
[46] Vgl. ebd., S. 13r.
[47] Vgl. Mebben (1999), S. 67.
[48] Einige wesentliche Erkenntnisse, die Mebben in seiner Untersuchung gewonnen hat, schildert er in seinem Aufsatz *„Die Arithmomachia des Abraham Ries“*. Vgl. Mebben (1999), S. 67ff.
[49] Mebben (1999), S. 70.

JProf. Dr. Silvia Schöneburg, Holger Wuschke

„Handelt es sich also um eine Arithmomachie, einen Zahlenkampf, oder eine Rhythmomachie, einen Proportionenkampf?“[50] Dieser Frage ist bereits Holl 2005 nachgegangen und soll nun mit Hilfe der Handschrift von Abraham Ries untermauert werden. Wird der erste Teil der Handschrift von Ries betrachtet, zeigt sich die ursprüngliche Intention des Spiels, die Auseinandersetzung mit der Proportionenlehre des Boethius. Hier steht die Herleitung der Zahlen auf den Steinen durch ihre Verhältnisse zueinander im Vordergrund. Im zweiten Teil der Handschrift wird diese Komponente vollkommen außen vorgelassen. Der Schwerpunkt liegt nunmehr auf den Rechenfertigkeiten, eine tiefer gehende Auseinandersetzung mit der Proportionenlehre ist weder nötig, noch an dieser Stelle erwünscht. Das Üben der Rechenfertigkeiten steht im Zentrum, wie folgende abschließende Worte von Ries bezeugen[51]:

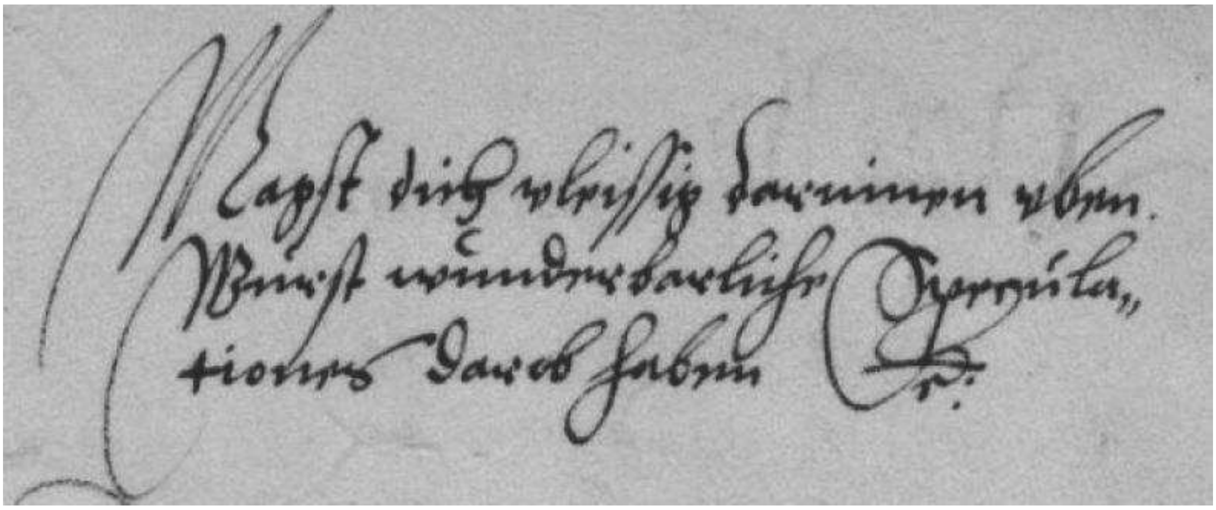


Abbildung 13: „Magst dich vleissig drinnen vben. / Wurst wunderbarliche Specula= / tiones darob haben. (Namenszeichen)“

Holl bringt die ganze Diskussion abschließend auf den Punkt: *„Das Spiel selbst trug von Anfang an das Potenzial zu einer Arithmomachie in sich.“*[52] Je, nachdem unter welchen Blickwinkel das Spiel betrachtet und zu welchem Zweck es eingesetzt wird, lässt sich eine andere Funktionalität zuordnen, so dass obige Frage nicht eindeutig geklärt werden kann. Die Rithmomachie trägt sowohl Elemente eines Proportionenkampfes als auch eines Zahlenkampfes in sich.

Literatur:

- Allgaier, Johann Baptist (1796): *Der Anweisung zum Schachspiel zweyter Theil*, mit Anhang über „Das pythagoräische oder arithmetische Schachspiel“, Wien.
- Borst, Arno (1986): *Das mittelalterliche Zahlenkampfspiel*, Heidelberg.
- Breidert, Wolfgang (1973): *Rhythmomachie und Globusspiel. Bemerkungen zu zwei mittelalterlichen Lehrspielen*, in: Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft 10, Mainz.
- Buxerius, Claudius (1556): *Nobilissimus et antiquissimus ludus Pythagoreus (qui Rythmomachia nominatur) in utiliatatem et relaxationem studiosorum comparatus ad veram et facilem proprietatem et rationem numerorum assequendam*, Paris.

[50] Holl (2005), S. 42.
[51] Ries (1562), S. 44r.
[52] Holl (2005), S. 44.

- Evans, Gillian Rosemary (1976): *The rithmomachia: a mediaeval mathematical teaching aid?*, in: Janus (Leiden), Jg. 63, Heft 4, S. 257-273.
- Folkerts, Menso (1993): *Die Rithmachia des Werinher von Tegernsee*, in: Folkerts, Menso (Hrsg.): Vestiga mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard, Amsterdam, S. 107-142.
- Folkerts, Menso (1992²): *Rithmimachia*, in: Ruh, Kurt et. Al. (Hrsg.): Die deutsche Literatur des Mittelalters. Verfasserlexikon, Berlin/New York, Band 8, Sp. 86-94.
- Folkerts, Menso (2001²): *Rithmimachie*, in: Folkerts, Menso/Knobloch, Eberhard/Reich, Karin (Hrsg.): Maß, Zahl und Gewicht. Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung, Wiesbaden, S. 333-346.
- Holl, Alfred (2005): *Spiel mit Zahlen – Kampf mit Zahlen? Das mittelalterliche Zahlenkampfspiel Rithmomachie in seiner Regensburger Fassung um 1090*, Växjö.
- Klopsch, Paul (1967): *Pseudo-Ovidus De vetula. Untersuchungen und Text*, Leiden-Köln.
- Libri, Guillaume (1865²): *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*, Band 4, Halle.
- Mebben, Peter (1997³): *Rithmomachie – Ein aus dem Mittelalter überliefertes Zahlenspiel. Neu entdeckt für die Schule*, Staatsexamensarbeit, Meppen.
- Mebben, Peter (1999): *Die Arithmomachia des Abraham Ries und weitere neuzeitliche Überlieferungen der Rithmomachie*, in: Board Games Studies, Issue 2, S. 60-79.
- Moyer, Ann Elizabeth (2001): *The Philosophers' Game. Rithmomachia in Medieval and Renaissance Europe*, University of Michigan.
- Núñez Espallargas, José M. (2004): *La arithmética de Boecio y la rithmomaquia: teoria y práctica del juego medieval de los sabios*, in: Anuario de estudios medievales, Jg. 34, Heft 1, S. 279-306.
- Peiper, Rudolf (1880): *Fortolfi Rythmomachia*, in: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 3 [= Zeitschrift für Mathematik und Physik Supplement, Jg. 25], S. 167-227.
- Richards, John F. C. (1943): *A new manuscript of a rithmomachia*, in: Scripta Mathematica, Jg. 9, S. 87-99, 169-183, 256-264.
- Richter, Karin/Schöneburg, Silvia (2016): Rithmomachie – Spielend rechnen wie im Mittelalter, in: Der Mathematikunterricht, Jg. 62, Heft 2, Dresden, S. 5-21.
- Ries, Abraham (1562): *Arithmomachie*, in: cod. Dresd. C 433, Dresden.
- Rosenthal, Gottfried Erich (1794): *Brettspiel, arithmetisches, Lythmomachia, Rhythmimachia, Arithmomachia*, in: Encyklopädie der reinen Mathematik und praktischen Geometrie, Gotha, S. 379-383.
- Selenus, Gustavus (August II. Fürst von Braunschweig-Wolfenbüttel) (1616): *Das Schach- oder König-Spiel, angefüget Rythmo-Machia*, Leipzig.
- Smith, David Eugene/Eaton, Clara C. (1911): *Rithmomachia, the great mediaeval number game*, in: The American mathematical monthly, Jg. 18, S. 73-80.
- Waidder, S. (1837): *Das Schachspiel in seinem ganzen Umfange nach allen Schriftstellern auf eine leichtfaßliche Weise dargestellt*, mit Teil C „Das arithmetische Schachspiel", Wien.
- Wappler, Emil (1892): *Bemerkungen zur Rhythmomachie*, in: Zeitschrift für Mathematik und Physik, Historisch-litterarische Abteilung, Jahrgang 37, Heft 1, S. 1-17.
- Zedler, Johann Heinrich (1738): *Lyhtmomachia, Rhytmomachia oder Arithmomachia*, in: Großes Vollständiges Universal-Lexicon, Band 18, Halle/Leipzig, Sp. 1589-1593.

Malfatti's problem

Nada Razpet, University of Ljubljana, Faculty of Education, Slovenia
nada.razpet@guest.arnes.si

Some problems appear in reviews in waves. At the first appearance, for various reasons, no particular interest is awaken. Then, a wave is triggered. Decades of study follow and then problems are left to oblivion. Later, there is a renewed interest for reasons like anniversaries or congresses which makes the problem attractive again. One of such problems is the Malfatti's problem. After a long period, in 2007 at the 200th anniversary of the death of Gianfrancesco Malfatti, several papers appeared in which partial translations of Malfatti original work [1] or alternative ways in solving the problems are found [2].

We want to consider in more detail a geometrical solution of the Malfatti's problem. In doing so, we will make use of the computer program GeoGebra. Of course, we will have to limit ourselves to some of the authors as there are many who devoted their time and efforts to solving this problem.

Gianfrancesco Malfatti (1731 - 1807)

Gianfrancesco Malfatti was born on September 26, 1731 in a small locality of Ala in Trentino, Italy, and died on October 9, 1807 in Ferrara. He attended a Jesuite school in Verona and later the College of San Francesco Saverio in Bologna; among his teachers, we find Vincenzo Riccati, F. M. Zanotti and G. Manfredi. He returned to Ferrara in 1754 and in 1771 he became professor in a renewed university in this city. He studied various branches of mathematics: algebra, geometry, probability theory as well as calculus. He also took part in social life of that time. In 1782, he was one of the founders of the "Società Italiana delle Scienzé", later to become the Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL. He played a major role in creating of the Enciclopedia Italiana (1779). But he is best-known for a problem which he published in 1803 and bears his name, although it may be not completely justified as he was not the first to pose it.

Malfatti's problem

In his treatise "Memoria sopra un problema stereotomico", published 1803, Malfatti posed the following problem: *Dato un Prisma retto triangolare di qualunque materia come di marmo, cavare da esso tre Cilindri dell' altezza del Prisma e della maggior grossezza possibile correspettivamente, e in conseguenza col minor avanzo possibile di materia avuto riguardo alla voluta grossezza. [3]*

The English translation the problem reads: "Given a right triangular prism of any sort of material, such as marble, how shall three circular cylinders of the same

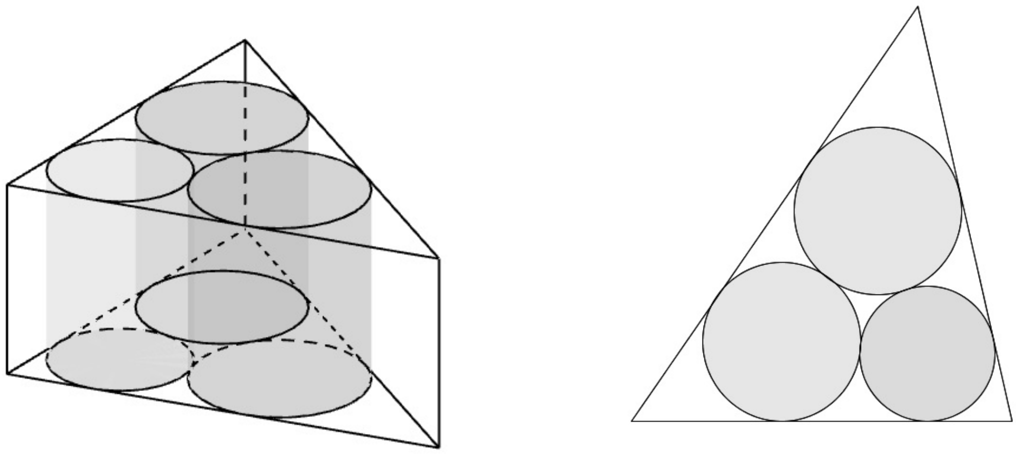


Figure 1: Malfatti's problem and Malfatti's triplet.

height as the prism and of the greatest possible volume of materials be related to one another in the prism and leave over the least possible amount of material? [4]

Later, he wrote without proof ([1]): "...observed that the problem reduces to the inscription of three circles in a triangle in such a way that each circle touches the other two and at the same time two sides of the triangle ..."

Malfatti erroneously thought that with the construction of circles as shown in Fig. 1 (right-hand side) he found the solution to his problem which, however, is not correct.

In the literature, the Malfatti's marble two-dimensional problem usually takes the following form: "Given a triangle, find three non-overlapping circles inside it of total maximum area." The problem is a part of the today's so-called "packing problems".

Malfatti was not the first to consider this problem. It is reported that as early as in 1384, Giglio di Cecco da Montepulciano studied the same problem. His original manuscripts are kept in Biblioteca Comunale degli Intronati in Siena.

Hundred years before Malfatti, in 1703, Jacob Bernoulli (1654–1705) was reported to have solved the problem for an isosceles triangle.

The problem of circles inscribed in a triangle is found also among the problems of Japanese temple geometry (sangaku problems).

Sangaku problems and Malfatti

Naonobu Ajima (1732 - 1798)

He is considered one of the greatest Japanese mathematicians of the 18th century. His work is distinguished for originality. He left 42 books, unfortunately only in manuscript [4]. One year after Ajima's death, his student Kusaka Makota (1764

- 1839) started to prepare a collection of his works for publication, but unfortunately this never happened. In a work entitled Fukyū Sanpō or Masterpieces of Mathematics, there is also the Malfatti problem which Ajima studied thirty years before Malfatti.

The problem was formulated by Ajima in the following way:

How do you inscribe three mutually tangent circles in a triangle?

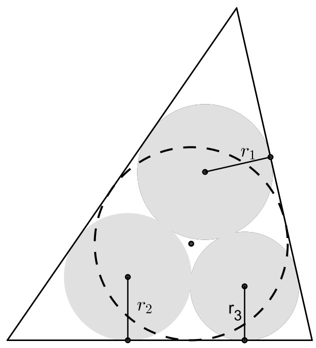


Figure 2: Sangaku problem.

The complete calculation made by Ajima is long and complicated and it refers to one of the previous solved problems. In a short recapitulation, it goes approximately as follows [4]:

Given a triangle ABC with an inscribed circle of radius r, then according to Heron's formula for the area of a triangle:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

where s is the semiperimeter.

Let $p \equiv r-(s-a)+\sqrt{r^2+(s-a)^2}$, $q \equiv r(a-p)$, and $t \equiv \sqrt{q^2-p^2(s-b)(s-c)}$; then Ajima shows

$$r_1 = \frac{q+t}{2(s-c)}, \qquad r_2 = \frac{q-t}{2(s-b)}, \qquad r_3 = \frac{r_1(b-\frac{t}{r}+c)^2}{(2r_1-p)^2}.$$

Ajima also gave an example: If $a = 507$, $b = 375$, and $c = 252$, then $r_1 = 64$, $r_2 = 56.25$, and $r_3 = 36$.

Ōmura Kazuhide (1824-1891)

In his book Sanpō Tenzan Tebikigusa (Algebraic Methods in Geometry), published in 1841, Omura solved the reverse problem:

...r_1, r_2, and r_3 are the radii of three circles that touch each other externally (Fig. 2). Construct a triangle that inscribes the circles and find the radius r of the triangle's inscribed circle (incircle) in terms of r_1, r_2, and r_3

Before solving the problem, he wrote: This is a long problem, but the solution is relatively straightforward.

The radius of the incircle is r, than

$$r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}$$

Conference in Hong Kong 2015

On April 11, 2015, at a conference in Hong Kong, Chan Yip-Cheung spoke about Malfatti's problem in connection with the Chinese mathematics of the 19th century [2]. He mentioned that at distinguished Chinese universities collected and sometimes published students' assignments, seminar papers and projects (called *keyi*) together with the remarks of professors. Some of the more difficult problems (so-called *nanti*) were published in the Peking Magazine, the readership were invited to find the solution. Solutions had to be sent to the School of Astronomy and Mathematics where they were refereed and then, together with comments, published in the magazine. This way, in the 5th volume of the Peking Magazine (December 1872), the following problem was offered [2]:

"A plane triangle (acute, right or obtuse) contains thee circles of different radii that touch each other. We want to fix the centers of the three circles. What is the method?"

An award, the Chinese translation and a translation of Euclid's Elements were offered for the solution of the problem. The solution received was published in the 8th volume (March, 1873), later a comment and a supplement to the solution were published in the 12th volume (July, 1873), together with the remarks and supplements of a professor at the School of Astronomy and Mathematics.

Let us mention that in a book on *keyi* written by students of Longcheng Shuyuan (Academy of the Dragon City), two papers on the three circles inscribed in a triangle were published in 1897 with two different solutions and the accompanying comment of the professor [2]. Of particular interest for the Chinese was the solution using a hyperbole as in the 19th century this conic section was not known in China. It is not possible to fix the exact time when Malfatti's problem appeared in China, probably two or three decades later than in Europe, in the time when Chinese mathematicians started to study the Euclide's Elements.

Back to Europe

Joseph Diaz Gergonne (1771-1859)

In 1810, J. D. Gergonne started to publish his own review *Annales de Gergonne*. In the first volume, he published two problem asking the readership to send solutions. The first problem referred to the shortest distance between three cities, the other read:

"To a given triangle, to inscribe three circles such that each of them touches the two others and two sides of the triangle."

In a footnote, Gergonne observed that the case of an isosceles triangle had been posed and solved by Jacob Bernoulli [5].

The solution to the first problem arrived quickly and was published in the next volume of the review. No response came, however, for the second problem. He (Gergonne) therefore tried to find the solution himself. In the 10th volume, he published an algebraic solution, but he was not sure if it was possible to solve the problem by a compass and a ruler alone. Then M. Bidone, professor at the Academy of Turin, sent him a letter informing him that the problem was published already by Malfatti and outlined briefly the solution.

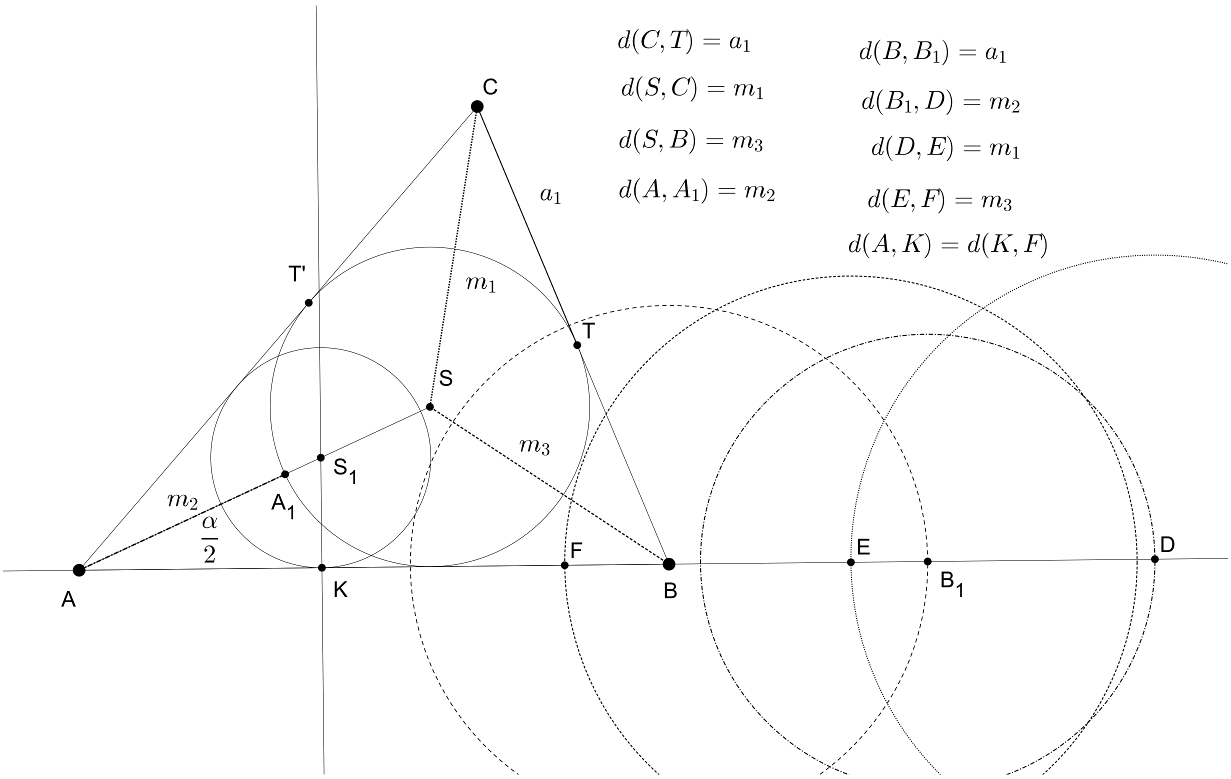


Figure 3: The Gergonne construction of the Malfatti's circles

With the information of Bidone, Gergonne found the solution and published it in the review in 1811 [5]. The original construction of the solution is long and hard to follow (it was published in [5]). For this reason, we prefer to use today's designation of vertices, edges and angles. The construction is obvious from the figure 3.

At first, we trace the lines bisecting the internal angles of the triangle and inscribe the circle. We prolong the edge AB through the vertex B (Fig. 3). We draw the circle with the center in the point B with radius a_1 (denoting it as $K(B, a_1)$). Then we successively draw the circles $K(B, a_1)$, $K(B, m_2)$, $K(D, m_1)$, $K(E, m_3)$ and also draw the perpendicular bisector of the segment (A, K). The intersection of the perpendicular bisector of the segment AK with the angle bisector of α is the center of the first circle (S_1). We appropriately repeat the procedure on the prolongations of the other two edges of the circle.

Malfatti's construction

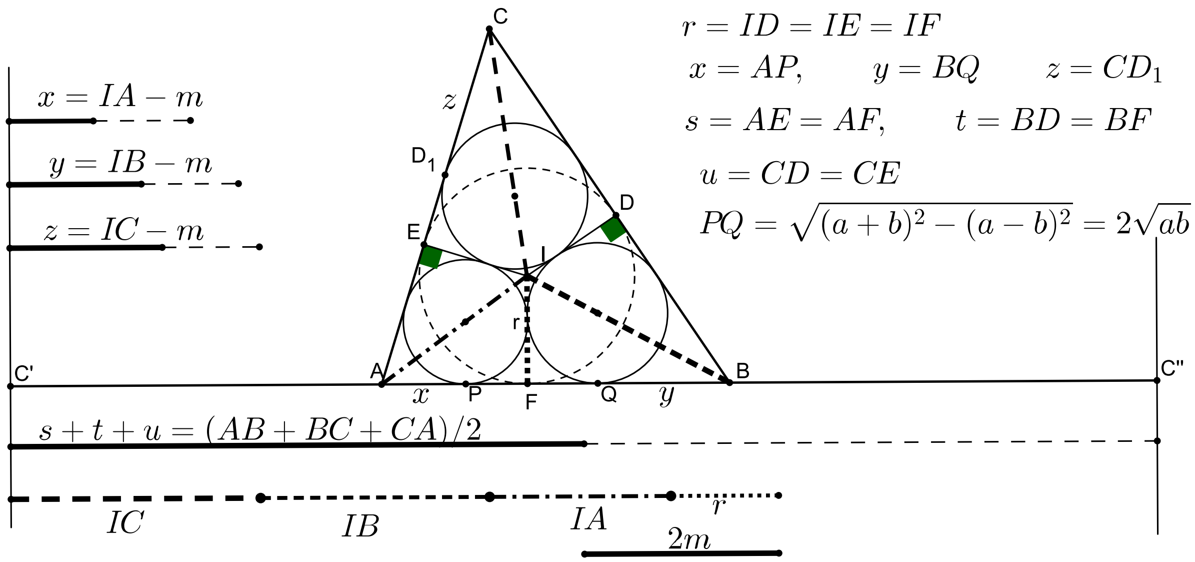


Figure 4: Malfatti's construction

Malfatti first expressed the radii of the circles algebraically, then used the expressions for the construction. The precise derivation is found in [7]. The notation is given in Fig. 4. To construct the circles, the lengths of the sections x, y and z are needed. Malfatti got the following expressions for them:

$$
\begin{aligned}
2x &= s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}, \\
2y &= s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}, \\
2z &= s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2}.
\end{aligned}
$$

Since $IA = \sqrt{r^2 + s^2}$, $IB = \sqrt{r^2 + t^2}$, and $IC = \sqrt{r^2 {+}^2}$ and $s + t + u$ is semiperimeter of $\triangle ABC$ we let $2m = IA + IB + IC + r - (AB + BC + CA)/2$ get

$$x = IA - m, \qquad y = IB - m, \qquad z = IC - m.$$

In Fig. 4 it is shown how the construction is made.

Jacob Steiner

In 1826, Jacob Steiner presented his geometrical solution ([8], Fig. 5).

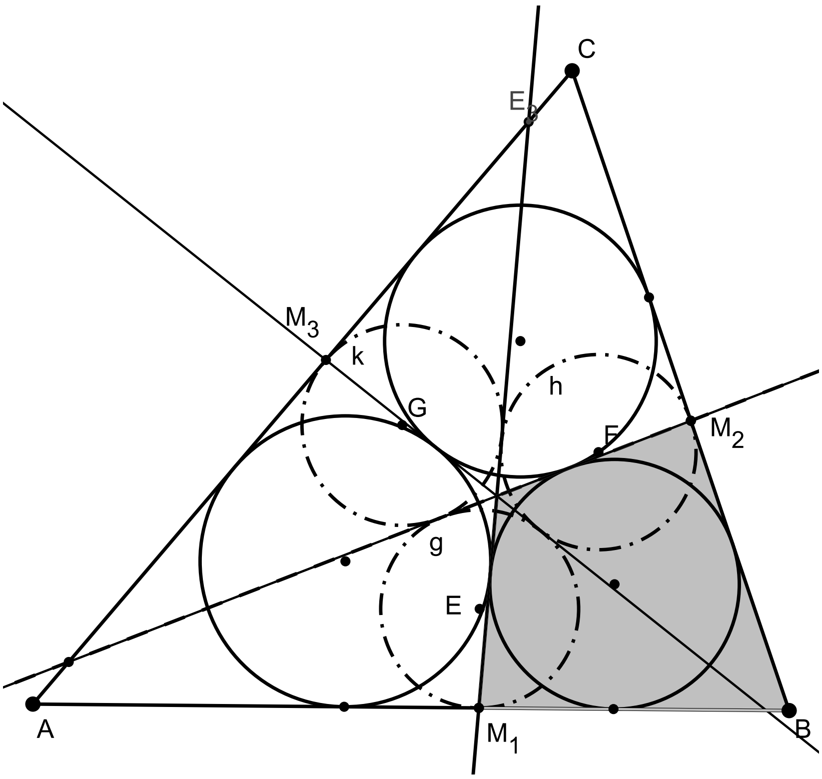
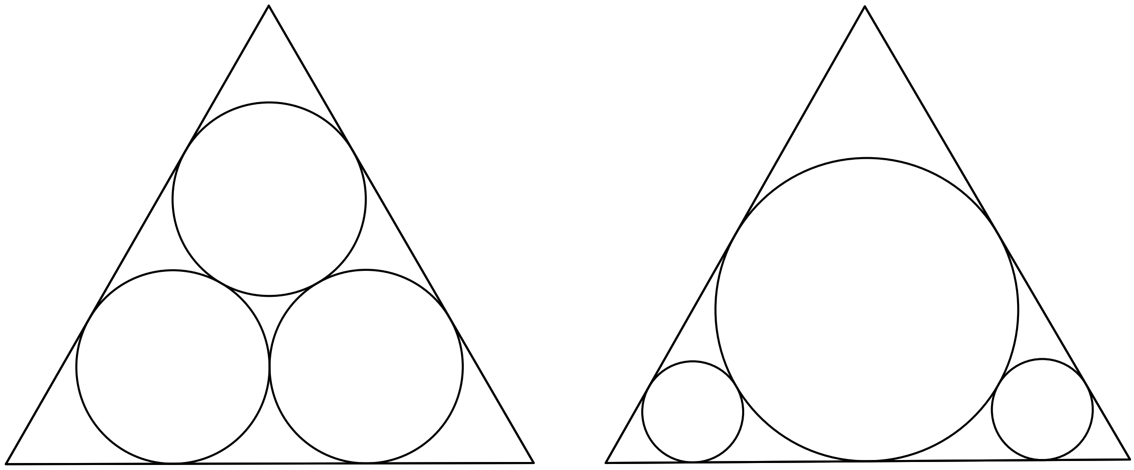


Figure 5: Steiner's construction of Malfatti's problem.

In Steiner's solution, we first find the center (S) of the inscribed circle to the triangle ABC. Then circles are inscribed into the triangles ABS, BSC and CAS. Steiner assumed without proof [7] that the common tangent of the circles h and k passes through the point of contact of the circle and the edge AC, i.e. the point M_1. He drew the other two tangent lines through M_2 and M_3. The intersection of these tangent lines is the point S_1. Then he inscribed the circle into the quadrilateral $M_1S_1M_2B$. He repeated the same procedure for the other two quadrilaterals. Later, the correctness of the procedure was proved (see for example Carrega, 1981). However, the proof is long and complicated.

The correct solution to Malfatti's problem

In 1930, Lob and Richmond noticed that the Malfatti solution is not valid for an equilateral triangle. A simple calculation shows that the whole surface of the area of the circles on the right-hand side exceeds the Malfatti solution shown on the left-hand side (Fig. 6).



$$\frac{\pi\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} = 0,729 \qquad \frac{11\pi}{27\sqrt{3}} = 0,739$$

Figure 6: Lob and Richmond construction of Malfatti's problem.

35 years later, in 1965, Howard Eves found out that the Malfatti solution does not hold for a long and narrow triangle [6]; the solution on Fig. 7 is better.

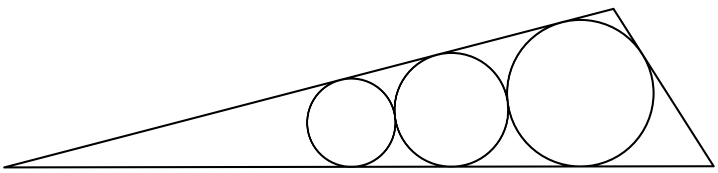


Figure 7: Eves' solution of Malfatti's problem.

In 1967 Goldberg [10] showed that Malfatti circle never produces the greatest area. In 1994 Los and Zalgaller [11] proved the result systematically, reducing all 14 combinatorially non-identical, rigid configurations of three circles in a triangle. They found out that from all the 14 possibilities, only two cases have to be considered. They are shown on Fig. 8.

We can check the finding using GeoGebra. We take γ to be the biggest angle in the triangle and that it is constant; then also the sum $\alpha + \beta$ is constant. We inscribe a circle in the triangle, then the other circles as in Fig. 9. Changing the

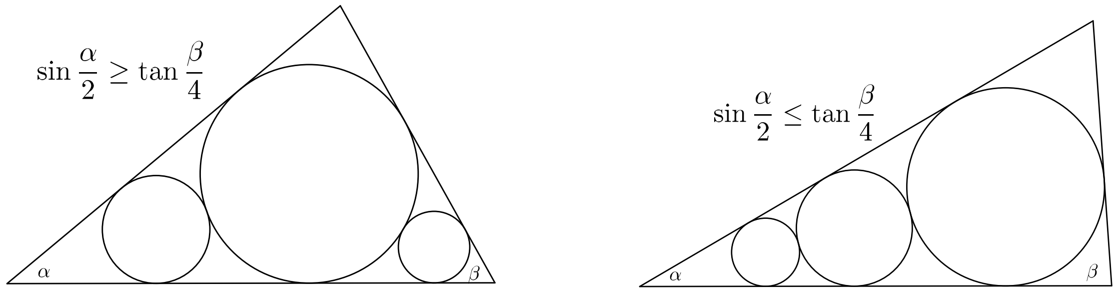


Figure 8: The case on the left wins if $\sin(\alpha/2) > \tan(\beta/4)$.

position of the vertex C we also change the angles α and β, but not their sum. The program draws the graph of the function $f_1(\sin(\alpha/2), S_1)$ and $f_2(\tan(\beta/4), S_2)$, respectively, where S_1 is the sum of the areas of three circles inscribed in the angle α, and S_2 is the sum of area of the biggest circle and the two adjacent ones. The points marked on the graph correspond to the values of the angles α and β. In the case on the figure, it holds that $\sin(\alpha/2) < \tan(\beta/4)$ and correspondingly $S_1 > S_2$.

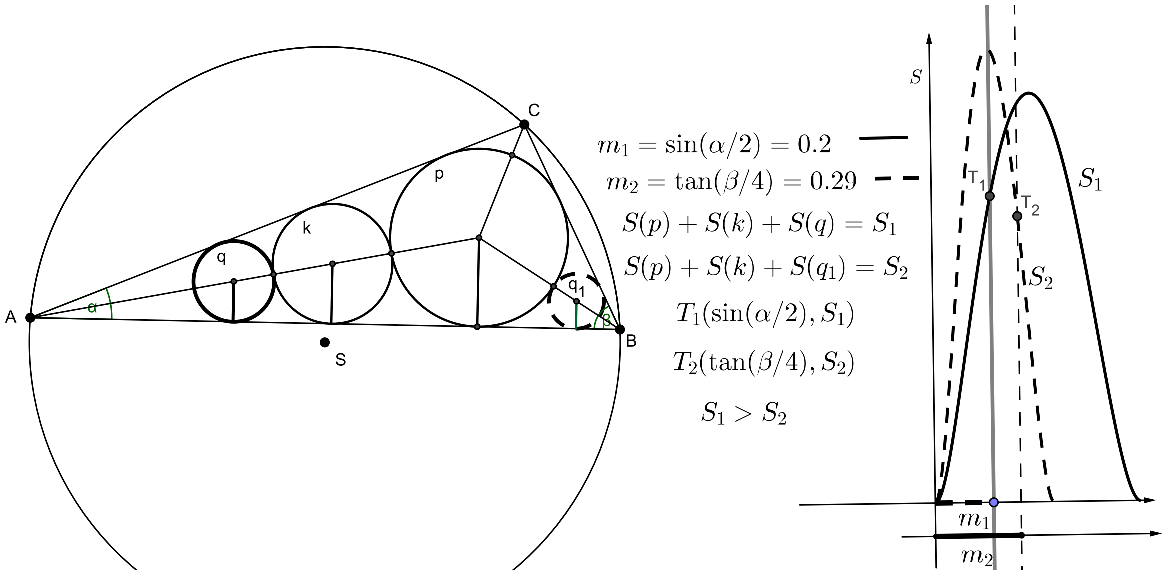


Figure 9: The full curve shows the sum of the areas of three circles inscribed in the angle α (S_1), the dashed curve shows the area of the biggest circle and the two adjacent ones (S_2). The sum $\alpha + \beta$ is constant, γ is the biggest angle in the triangle.

The moral of the story

A nice geometrical sketch can easily confuse us. Sometimes, it appears that a result is so obvious that it does not need a serious consideration or discussion. But anybody can err, and therefore any result, including very "obvious" ones, has to be checked. We found out that mathematicians were for a long time busy constructing circles, but they did not check the solutions. But we also demonstrated that nowadays solutions can be checked using computational programs. This, of course, is not sufficient, the correctness of a solution should still be proved.

References

[1] M: Andreatta, A. Bedzek, J. P. Boronski, *The Problem of Malfatti: Two Centuries of Debate*, The Mathematical Inteligencer, Springer, 2010.

[2] Chan Yip-Cheung, Siu Man-Keung, *The Malfatti Problem in nineteenth-century China*, *hkumath.hku.hk/.../MalfattiProblem_ChanSiu_June4.pdf*

[3] Gianfrancesco Malfatti, *Memoria sopra un problema stereotomico*, Mem. Mat. Fis. Soc. Ita. Sci 10, No. 1, 235-244, 1803.

[4] Fukagawa Hidetoshi, Ton Rothman, *Sacred Mathematics, Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, 293-295, 2008.

[5] J. Lorent, Not set in stone: nineteenth-century geometrical construction and Malfatti Problem, BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 27:3, 169-180, DOI: 10.1080/17498430.2012.676962

[6] David Acheson, *1089 and all that, A journey into mathematics*, Oxford University Press, 104-106, 2002.

[7] G. E. Martin, *Geometric constructions*, New York, Berlin, Heidelberg, Springer, 92-95, 1998

[8] A. Ostermann, G. Wanner, *Geometry by its History*, Springer, 121- 123, 2012.

[9] H. Lob, H. W. Richmond, *On the solution to Malfatti's problem for a triangle*, Proc. Lond. Mat.. Soc, 2, **30**, 287-304, 1930.

[10] Michael Goldberg, *On the original Malfatti problem*, Mathematics Magazine **40**, 241-427, 1967.

[11] V. A. Zalgaller, G. A. Los, *The solution of Malfatti's problem for a triangle*, Journal of the Mathematical Science, **72**, No. 4, 3163-3177, 1994.

A BRIEF OVERVIEW OF THE DEVELOPMENT OF TRIGONOMETRY

Jasna Fempl Mađarević

It was astronomy, whose principles were familiar to even the ancient cultures, that necessitated the emergence of trigonometry, primarily spherical trigonometry. It is thus likely that even the Babylonians and Egyptians possessed certain knowledge of trigonometry, useful for the navigation at sea, and also useful to the Egyptians for building the tall pyramids.

However, the beginnings of scientific trigonometry trace back to the Greeks. *Aristarchus of Samos* (around 300 BCE), the "father of astronomy", used a right-angled triangle to calculate the ratio of the distance between celestial bodies, whereas *Hipparchus of Nicaea* (around 150 BCE) studied the dependence of chords on the central angle with a given radius of the circle. He made the tables of chord lengths depending on the central angle.

Around 150 CE *Ptolemy of Alexandria* (the founder of the geocentric system) compiled and presented all that was known in trigonometry at the time in a treatise on astronomy, known by its Arabic name "Almagest". Ptolemy also made the tables of chords (to five decimals places) depending on the central angle, in 30' intervals. For centuries, "Almagest" was the supreme treatise for the study of trigonometry.

Then (around 500 CE) trigonometry was further advanced in India. Indian mathematicians were the first to use the half-chord, instead of the entire chord, in relation to the central angle, thus arriving at the sine function. While the Greeks used only the right-angled triangles in trigonometry, the Indians also dealt with the oblique triangles, by dividing them to right-angled triangles.

Later the Arabs continued to develop these concepts. The tangent and cotangent were first introduced by an Arab mathematician and astronomer *Albatenius* (around 900 CE). He amended Ptolemy's tables by replacing the chords with half-chords.

The Persians were the first to formulate the sine law (around 1000 CE) and in the XIII century started treating trigonometry as a separate mathematical discipline. Until then, trigonometry had only been considered and treated as a branch of astronomy.

Trigonometry spread in Europe via the Arabs, but the translations were sometimes misleading and sources were scarce. That is why trigonometry had to be to a large extent rebuilt. A prominent figure in this work was a scientist from Vienna *Johann Müller* – Regiomontanus (around 1450 CE), who was the first in Europe to write a comprehensive treatise on trigonometry, entitled "De triangulis omnimodis libri quinque". He amended the Arab tables of trigonometric functions, making a shift from the sexagesimal to the decimal system. These tables were later improved. *Rheticus* (1514 – 1576), a pupil of Nicolaus Copernicus, compiled tables of trigonometric functions to ten decimal places for angles in 10'' intervals, for the purpose of angular astronomical measurements. Rheticus would be the first to use the ratio of trigonometric functions of complementary angles, as is still done to this day.

Rheticus' tables were later edited by *Pitiscus* (1561 – 1613), who calculated trigonometric functions at 10'' intervals that were accurate to 15 decimal places.

The French mathematician *Viète* (around 1600 CE) developed the law of cosines and simplified the law of tangents, already produced in a more complex form by *Fink* (in 1583). He introduced the idea of representing known and unknown quantities by letters (variables), advancing mathematics to new levels.

After the invention of logarithms, in addition to tables of trigonometric functions (natural numbers), tables of logarithms of these functions were also made. The first such tables were prepared by an Englishman, *Henry Briggs* (1556 – 1630).

Certainly the one figure most responsible for introducing a simplified and systematic approach to trigonometry as we know it today is a Swiss mathematician *Euler* (1707 –

1783), one of the most eminent and prolific mathematicians in history. He was the first to consider arbitrary angle trigonometric functions and abstract numbers trigonometric functions. He was mostly responsible for establishing the analytical treatment of trigonometric functions, by considering them as numbers. He also introduced the complex numbers trigonometric functions and the theory of infinite series. In general, Euler demonstrated in his works the multiple benefits of studying trigonometric functions, leaving behind the application of these functions in geometry.
One of our great mathematicians *Ruđer Bošković* (1711 – 1787) also worked on important areas in spherical trigonometry, while a Slovenian mathematician *Jurij Vega* published at the end of the 18th century a well-known handbook of logarithm tables of natural numbers and trigonometric functions to ten decimal places, entitled “Thesaurus logaritmorum completus”.

Jasna Fempl Mađarević
11000 Beograd, Vidikovački venac 27
Serbien
e-mail: jasnafemplmađarević@gmail.com
MD Arhimedes: arhimed1@eunet.rs

REFERENCE:

1. The short history of trigonometric- Radmilo Dimitrijevic, Belgrade, 1952.
2. Istorija matematike- Milan Bozic, MISANU, Belgrade, 2002.

bei Tisch: Menso Folkerts

Wie die Logarithmen zu ihrem Namen kamen.

Detlef Gronau *

Zusammenfassung

JOHN NAPIER (1550 - 1617) führte in seinem Werk *"Mirifici Logarithmorum canonis descriptio, Eusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica Mathematica,* Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, Edinburgi 1614" den Namen ***Logarithmus*** ein. Allerdings ist die Funktion die Napier in diesem Büchlein tabelliert hat doch weit entfernt von einer der Funktionen die wir heute unter dem Namen Logarithmen kennen.

Auch die Funktion die JOST BÜRGI (1552 - 1632) in seinem Werk mit dem Titel *"Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen/ sambt gründlichem unterricht/ wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/ und verstanden werden sol.* Gedruckt/ In der Alten Stadt Prag/ bey Paul Sessen/ der Löblichen Universität Buchdruckern/Im Jahr/ 1620" aufgestellt hat, entspricht nicht einem Logarithmus in heutigem Sinn.

Beide, Napier und Bürgi gelten unbestritten als Erste die die logarithmische Rechenmethode entwickelt haben, deren Prinzip dann zu damaliger Zeit und über Jahrhunderte das Rechnen wie Multiplikation, Division und Wurzelziehen wesentlich vereinfachte.

Erst Johannes Kepler jedoch hat in seinen logarithmischen Schriften *"Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos, Marburg 1624"* und *"Supplementum Chiliadis logarithmorum. Marburg 1625"* eine grundlegende Theorie der *Funktion der natürlichen Logarithmen* aufgestellt, wobei er wesentliche Schritte von nachfolgenden Mathematikern wie L. Euler (1707 - 1783) und A.L. Cauchy (1789 - 1857) vorweggenommen hat. Kepler hat in den "Chilias" die wichtigsten Aussagen über den natürlichen Logarithmus, die heute zum Standardwissen in der Theorie der Funktionalgleichungen gehören, dargestellt.

* *Adresse:* Riglergasse 6/5, A – 1180 Wien. Mail: `detlef.gronau@chello.at`

1 Anfänge des logarithmischen Rechnens

Das Prinzip der Logarithmen wurde im 16. Jahrhundert entdeckt. Am Beginn stehen wohl die Werke von Michael Stifel, Simon Jacob und Mauritius Zons.

1.1 Michael Stifel; Arithmetica integra, 1544

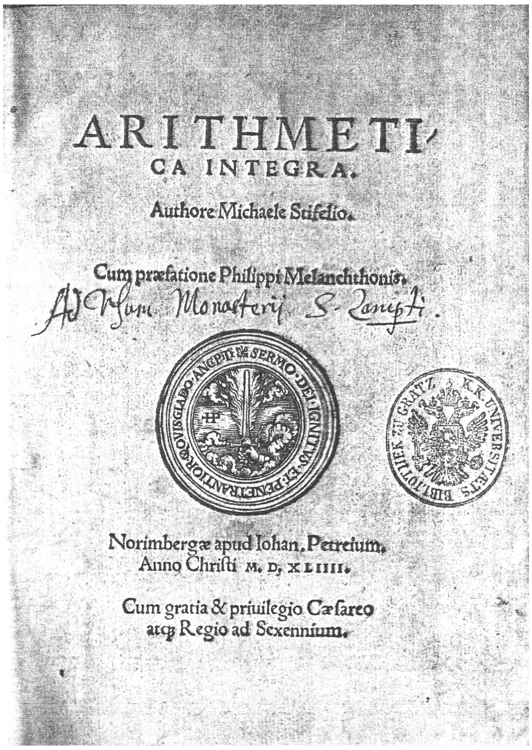


Abbildung 1: Für die Oper“ Stiffelio” von G. Verdi gilt Michael Stifel als ein mögliches Vorbild.

In seiner *Arithmetica integra*, Nürnberg 1544, Seite 249 verso, führt Michael Stifel Reihen von Potenzen von 2 an, sogar auch eine mit negativen Exponenten:

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Man kann dies als eine Logarithmentafel für Logarithmen zur Basis 2 im Bereich zwischen $\frac{1}{8}$ und 64 betrachten.

Stifel schreibt weiter:

> Poſſet hic fere nouus liber integer ſcribi de mirabilibus numerorum, ſed oportet ut me hic ſubducã, & clauſis oculis abeã. Repetam uero unum ex ſuperioribus, ne fruſtra dicar fuiſſe in campo iſto. Sed ſententia inuerſa repetam quod mihi repetendum uidetur.
>
> ¶ Qualiacunqꝫ facit progreſſio Geometrica multiplicãdo & diuidendo, talia facit progreſſio Arithmetica addendo & ſubtrahendo.

„Man könnte ein ganz neues Buch über die wunderbaren Eigenschaften dieser Zahlen schreiben, aber ich muß mich an dieser Stelle bescheiden und mit geschlossenen Augen daran vorübergehen“. Und weiter: „Addition in der arithmetischen Reihe entspricht der Multiplikation in der geometrischen Reihe, ebenso Subtraktion in jener der Division in dieser. Die einfache Multiplikation bei den arithmetischen Reihen wird zur Multiplikation in sich [d.h. Potenzierung] bei der geometrischen Reihe. Die Division in der arithmetischen Reihe ist dem Wurzelausziehen in der geometrischen Reihe zugeordnet, wie die Halbierung dem Quadratwurzelausziehen“ (Tropfke [13], p. 171 ff.).

1.2 Simon Jacob, 1510? – 1564

„Ein New und Wolgegründt Rechenbuch auff den Linien wie Ziffern samt der Welschen Practic“, Frankfurt am Main 1565, ist ein Rechenbuch, das von seinem Bruder *Pangratz Jacob von Coburg* posthum herausgegeben wurde. Auch hier findet man die Begriffe *arithmetische Progression* und *geometrische Progression*.

Er führt auch auf (Seite 14 verso) ein Beispiel an:

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.	384.	768.

also die Folge $3 \cdot 2^n$, $n = 0, ..., 8$. Er erklärt auch (auf Seite 15) die Beziehung zwischen arithmetischer und geometrischer Progression: „**So merck nun / was in Geometrica progreßione ist Multipliciern / daſ ist in Arithmetica progreßione Addiern / und waſ dort ist Dividiern / das ist hie Subtrahiern / und was dort mit sich ist Multipliciern / ist hie schlecht Multipliciern / Letztlich was dort ist Radicem extrahiern / das ist hie schlechts Dividiern mit der zal die der Radix in Ordnung zeigt / ...**“

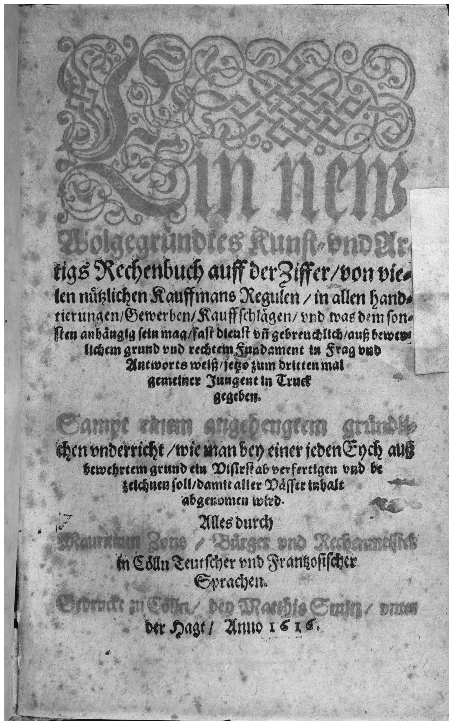
1.3 Mauritius Zons

„Ein new Wolgegründtes Kunst- und Artig Rechenbuch auff der Ziffer / von vielen nützlichen Kauffmans Regulen / ... Sampt einem angehengten gründlichen underricht / .. Alles durch Mauritius Zons / Bürger und Rechenmeister in Cölln ... Gedruckt zu Cölln / bey Matthis Smitz / unter der Hagt / Anno 1616.“

Auch hier werden Progressionen eingeführt: „**Wie vielerley sind Progressiones ? Zweyerley / Nemlich Arithmetica und Geometrica**“ und es werden die Eigenschaften dieser Progressionen beschrieben.

103
Ein New vnd Wolgegründt Rechenbuch/auff den Linien vñ Ziffern/ sampt der Welschen Practic vnd allerley vortheilen/neben der extraction Radicum, vñ von den Proportionen/mit vilen lustigen Fragen vñ Auffgaben/rc. Deßgleichen ein vollkomner Bericht der Regel Falsi/mit neuwen Inuentionibus/Demonstrationibus/ vnd vortheilen/so biß anher für vnmüglich geschetzt/ gebessert/dergleichen noch nie an tag kommen. Vnd dann von der Geometria/ wie man mancherley Felder vnd ebne/auch allerley Corpora/Regularia vnd Irregularia/messen/Aream finden vñ rechnen sol. Alles durch Simon Jacob von Coburg/ Bürger vnd Rechenmeister zu Franckfurt am Main/mit fleiß zusammen getragen/ vnd jetzt erstmals getruckt.

Mit Röm. Keyser. Mt. Gnad vnd Freyheit nicht nachzutrucken.
Getruckt zu Franckfurt am Mayn/1565.



Ein new Wolgegründtes Kunst- vnd Artigs Rechenbuch auff der Ziffer/von vielen nützlichen Kauffmans Regulen/in allen handtierungen/Gewerben/Kauffschlägen/ vnd was dem sonsten anhängig sein mag/fast dienst vñ gebreuchlich/auß bewerlichem grund vnd rechtem Fundament in Frag vnd Antworts weiß/jetzo zum dritten mal gemeiner Jungent in Truck gegeben.

Sampt einem angehengtem gründlichen vnderricht/wie man bey einer jeden Eych auß bewehrtem grund ein Visirstab verfertigen vnd bezeichnen soll/damit aller Vässer inhalt abgenomen wird.

Alles durch Mauritium Zons / Bürger vnd Rechenmeister in Cölln Teutscher vnd Frantzosischer Sprachen.

Gedruckt zu Cölln/ bey Matthis Smitz/ vnter der Hagt/ Anno 1616.

Abbildung 2: Simon Jacob, *Ein New und Wolgegründt Rechenbuch*; Mauritius Zons, *Ein new Wolgegründtes Kunst- und Artig Rechenbuch.*

1.4 Gemeinsames Prinzip

Ihnen allen ist das folgende Prinzip gemeinsam: Es wird einer

$$\text{“arithmetischen Reihe”}\ x_n = n \cdot s$$

eine

$$\text{“geometrische Reihe”}\ y_n = z \cdot q^n$$

jeweils für $n = 0, 1, 2, \cdots$ gegenüber gestellt.

Auch Bürgi und Napier verwendeten dieses Prinzip.

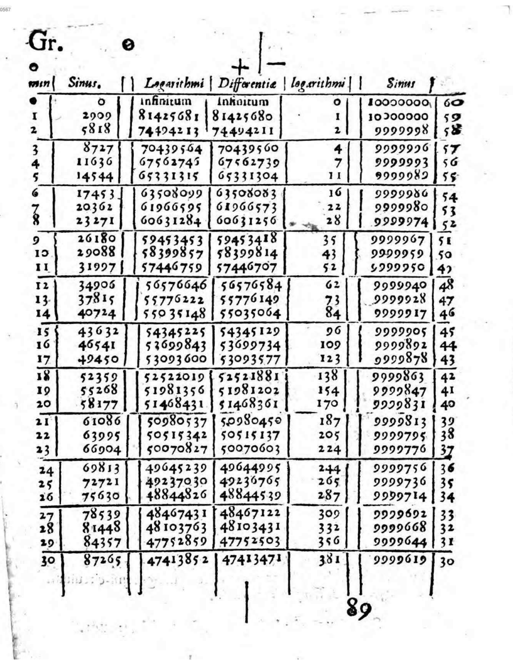
Bürgi bezieht sich auf *Simon Jacob* und *Mauritius Zons*. Er schreibt in seinem *"gründlichen Unterricht"* über arithmetische und geometrische Progressionen **„wie auch von etlichen Arithmeticis Somon Jakob** [und] **Moritius Zons und andere ist berürt worden"**

Es ist auch sehr wahrscheinlich, dass John Napier von Stifels *Arithmetica integra* beeinflusst wurde (J.E. Hofmann [5], S. 30).

2 Die Tafeln von Napier und Bürgi

Beide Tafeln, die von Napier und die von Bürgi, ja sogar die von Henry Briggs, sind in der Rara-Sammlung der Bibliothek der Karl-Franzens-Universität Graz vorhanden.


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, & expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, &c. Scoto.
EDINBURGI, Ex officinâ ANDREÆ HART Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

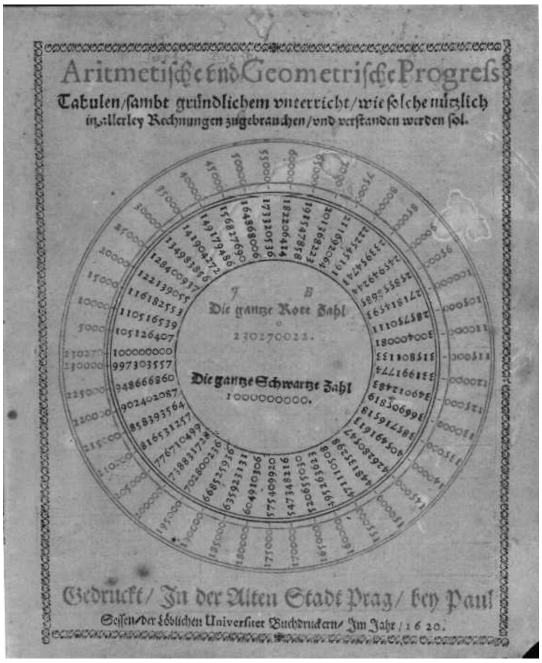

Gr. 0

min	Sinus.	Logarithmi	Differentiæ + | −	logarithmi	Sinus	
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51
10	29088	58399857	58399814	43	9999959	50
11	31997	57446759	57446707	52	9999950	49
12	34906	56576646	56576584	62	9999940	48
13	37815	55776222	55776149	73	9999928	47
14	40724	55035148	55035064	84	9999917	46
15	43632	54345225	54345129	96	9999905	45
16	46541	53699843	53699734	109	9999892	44
17	49450	53093600	53093577	123	9999878	43
18	52359	52522019	52521881	138	9999863	42
19	55268	51981356	51981202	154	9999847	41
20	58177	51468431	51468361	170	9999831	40
21	61086	50980537	50980450	187	9999813	39
22	63995	50515342	50515137	205	9999795	38
23	66904	50070827	50070603	224	9999776	37
24	69813	49645239	49644995	244	9999756	36
25	72721	49237030	49236765	265	9999736	35
26	75630	48844826	48844539	287	9999714	34
27	78539	48467431	48467122	309	9999692	33
28	81448	48103763	48103431	332	9999668	32
29	84357	47752859	47752503	356	9999644	31
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30

89

Abbildung 3: John Napier *Mirifici Logarithmorum*, 1614

Insbesondere sind die Tafeln von Bürgi äußerst selten und von besonderem Wert, da sie neben dem "Danziger Exemplar" die einzige bekannte Ausgabe sind, die auch einen (handgeschriebenen) "gründlichen Unterricht", also eine Benützungsanleitung enthalten.



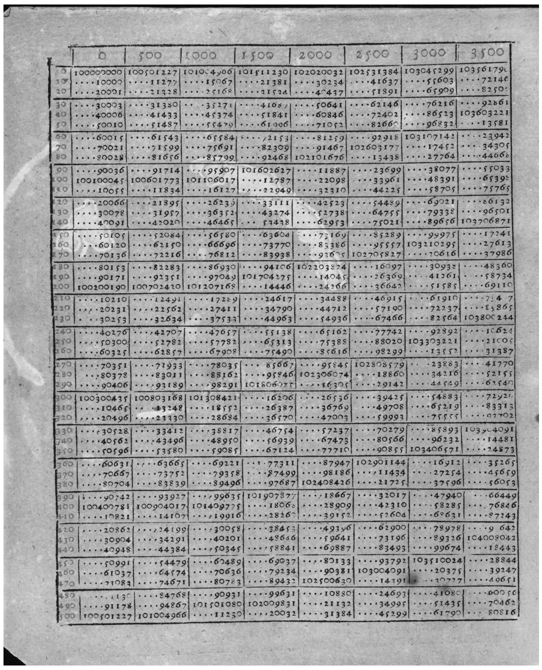


Abbildung 4: Jost Bürgi, *Progresstabulen*, 1620.

2.1 Arithmetische und geometrische Reihe

In der *arithmetischen Reihe:* $x_n = n \cdot s,\ n = 0, 1, ...$ und der *geometrischen Reihe:* $y_n = z \cdot q^n,\ n = 0, 1, ...$ sind die Zahlen s, z und q jeweils fest gewählte Konstanten. Bürgi nimmt in seiner Tabelle die Konstanten

$$s = 10,\ z = 10^8 \ \text{ und } \ q = 1 + 10^{-4}, \tag{1}$$

Napier wählt

$$s = 1 + 0.5 \cdot 10,\ z = 10^7 \ \text{ und } \ q = 1 - 10^{-7}. \tag{2}$$

Beide nennen ihre Reihen “arithmetische Reihe” und “geometrische Reihe”.

Napier nennt die Zahl x_n den “Logarithmus” von y_n, das heißt

$$\lambda o\gamma o\nu\ \alpha\rho\iota\theta\mu\grave{o}\varsigma.$$

Bürgi nennt x_n die “rote Zahl” von y_n. Bei ihm kommt das Wort Logarithmus nicht vor.

2.2 Die Funktionen

Die Funktion L die durch die Beziehung zwischen der arithmetischen Reihe

$$x_n = n \cdot s$$

und der geometrischen Reihe

$$y_n = z \cdot q^n$$

festgelegt wird, ist definiert durch $L(y_n) := x_n$, also

$$L\left(z \cdot q^n\right) = n \cdot s$$

Setzt man nun $y := z \cdot q^n$ und löst n in Abhängigkeit von y auf, dann verwenden wir am besten den *natürlichen Logarithmus* ln und erhalten so $n = \ln\left(y/z\right) / \ln q$, also

$$L(y) = \frac{s \cdot \ln\left(\frac{y}{z}\right)}{\ln q}. \qquad (3)$$

2.3 Napiers und Bürgis "Logarithmen"

Setzt man nun in (3) die von Bürgi gewählten Konstanten (1) bzw. Napiers Kontanten (2) ein, erhält man die jeweils tabellierten Funktionen, nennen wir sie die "Bürgischen Logarithmen" L_B, bzw. die "Napierschen Logarithmen" L_N mit:

$$L_B(y) = 10^5 \cdot \left(\ln\left((1+10^{-4})^{10000}\right)\right)^{-1} \cdot \ln\frac{y}{10^8},$$

näherungsweise:

$$L_B(y) \approx 10^5 \cdot \ln\left(\frac{y}{10^8}\right),$$

und

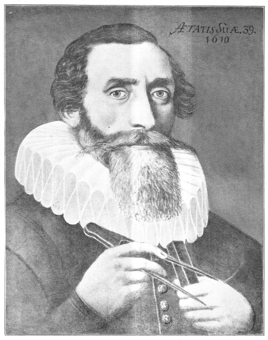
$$L_N(y) = 10^7 \cdot s \cdot \left[\ln\left((1-10^{-7})^{10^7}\right)\right]^{-1} \cdot \ln\frac{y}{10^7},$$

näherungsweise:

$$L_N \approx 10^7 \cdot \ln\frac{10^7}{y}. \qquad (4)$$

3 Nun kommt Kepler

Johannes Kepler ist 1600 aus Glaubensgründen aus Graz vertrieben worden. Er wurde Mitarbeiter von Tycho Brahe in Prag. Im September 1601 erhielten Tycho Brahe und Kepler in einer Audienz bei Kaiser Rudolf II. den Auftrag, neue Planetentafeln herzustellen, die auf Vorschlag Brahes *"Rudolphinische Tafeln"* genannt werden sollten, eine Aufgabe, die erst 26 Jahre später erfüllt werden sollte. Als Tycho Brahe am 24. Oktober 1601 starb, wurde Johannes Kepler von Kaiser Rudolph zum *Kaiserlichen Mathematiker* ernannt und mit der Sorge für die Instrumente und unvollendeten wissenschaftlichen Arbeiten Tycho Brahes beauftragt.



Johann Kepeler geboh.
den 27 Dezember 1571
zu Weil der Stadt
gestorben zu Regensburg
den 5ten November 1630.

3.1 Rudolphinische Tafeln

Die Arbeit an den Rudolphinischen Tafeln verzögerte sich immer wieder, nicht nur wegen Erbstreitigkeiten mit den Nachkommen Tycho Brahes. Johannes Kepler wurde sogar von den Ständen von Oberösterreich bedeutet, dass er die Arbeiten am "Fassrechnen" einstellen solle und wichtigere Dinge, wie die Rudolphinischen Tafeln und die Landmappen vollenden möge. Wohl im Gegenzug schrieb Johannes Kepler in einem Bericht im Jahre 1616 an die Stände, dass er die Tafeln "in praxi" fertig habe. Dem war wohl nicht ganz so; denn es sollten sich der Fertigstellung ganz neue Hindernisse in den Weg stellen.
Die ursprüngliche Fassung der Rudolphinischen Tafeln war auf der *prostaphairetischen* Rechenmethode aufgebaut. Diese Methode, vom Nürnberger Pfarrer Johannes Werner (1468-1528) entdeckt und von Tycho Brahe wiederentdeckt, führt die Multiplikation von Sinusgrößen auf mehrere Additionen, unter Ausnutzung der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen zurück. Inzwischen wurde das wesentlich einfachere Rechenverfahren mittels *Logarithmen* entwickelt.

Johannes Kepler erfuhr erst im Frühjahr 1617 von Napiers neuen Rechenmethode. Er hatte zwar von Bürgi, mit dem er die Jahre 1605 bis 1612 gemeinsam in Prag verbrachte, und mit dem er auch nachweislich wissenschaftliche Kontakte hatte, mit Sicherheit schon vor dem Erscheinen der Progress Tabulen (1620) von dessen Methode gehört. So schreibt er dann später in den Rudolphinischen Tafeln, wo er die Napierschen Logarithmen preist, in bezug auf diese: *"Diese logistischen Apices waren es auch, die Jost Bürgi viele Jahre vor der Napierschen Publikation den Weg zu genau diesen Logarithmen gewiesen haben."* Kepler fährt dann aber fort: *"Allerdings hat der Zauderer und Geheimtuer das neugeborene Kind verkommen lassen, statt es zum allgemeinen Nutzen groß zu ziehen"* ([10], S. 48). Sonst nimmt Kepler in den Rudolphinischen Tafeln keinen weiteren Bezug auf Bürgis Logarithmen und erwähnt auch nicht dessen Progress Tabulen.

Er hatte zwar nie die persönliche Bekanntschaft mit Napier gemacht, jedoch die mit seinen Werken, zunächst mit seiner "Descriptio", einer Art Benutzungsanleitung, in die er in den Jahren 1617 bis 1619 immer nur kurzen Einblick hatte. Weiters kam auch noch eine deutschsprachige Version der Napierschen Tabellen im Jahr 1618 auf den Markt, allerdings nur mit 5- statt mit 7-stelligen Tabellen. Kepler musste nun einsehen, dass er nicht umhin kann, die Rudolphinischen Tafeln auf logarithmisches Rechnen umzuschreiben. Allerdings war er genötigt, die Napierschen Tafeln für seinen Zweck umzuschreiben. Zunächst nur nach der Form, später auch in der Theorie, die ihm vorerst im Unklaren bleibt.

Keplers ehemaliger Lehrer Michael Mästlin aus Tübingen, mit dem Kepler über all die Jahre regen Kontakt gepflegt hat, übt heftige Kritik an Napiers Logarithmen und daran, dass Kepler sie einfach so übernehmen wolle und schreibt: *"Ich halte es unwürdig eines Mathematikers, mit fremden Augen sehen zu wollen und sich auf Beweise zu stützen oder als solche auszugeben, die er nicht verstehen kann. [...] Deshalb mache ich mir ein Kalkül nicht zu eigen, von dem ich glaube oder annehme, dass er bewiesen sei, sondern nur von einem, von dem ich es weiß."*

Das Ergebnis all dieser Diskussionen, die *Chilias Logarithmorum* (Tausende von Logarithmen), ist jedoch nicht nur eine *theoretische Begründung der Napierschen Logarithmen*, sondern eine eigenständige Theorie der Funktion des *natürlichen Logarithmus* wie er vorher nicht bekannt war.

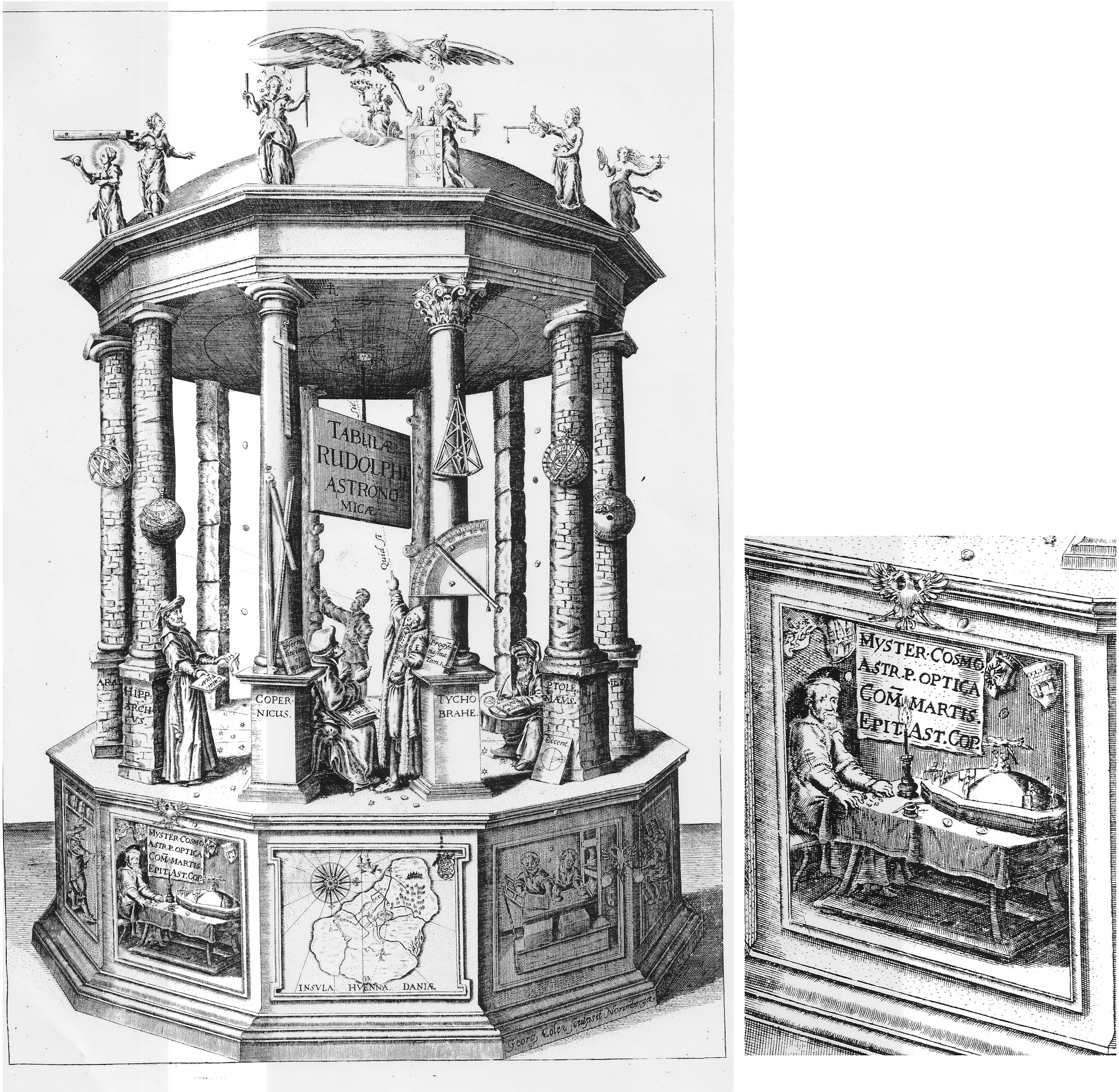
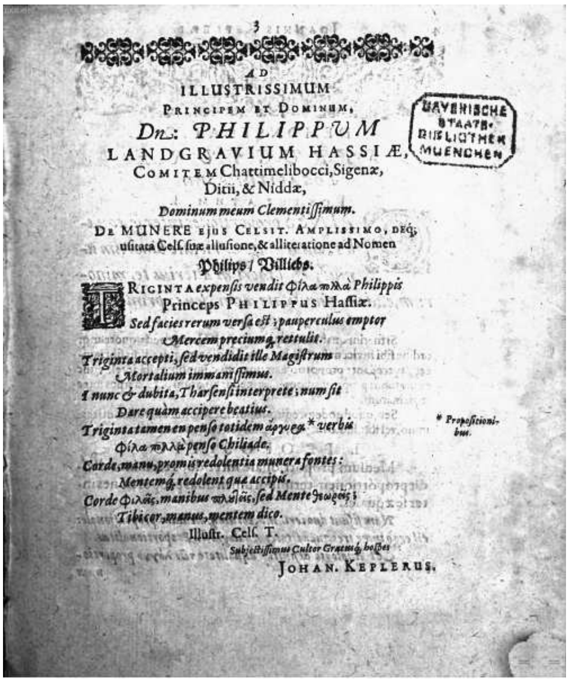


Abbildung 5: Tabulae Rudolphinae, Ulm 1627. Frontispiz mit einem Ausschnitt, der zeigt, wie Kepler konzentriert an der Kuppel arbeitet die den Tempel krönt. Er stellt sich damit selbstbewusst als Vollender des astronomischen Tempels dar.

3.2 Chilias logarithmorum

Die Chilias Logarithmorum sind in den Gesammelten Werke von Johannes Kepler, herausgegeben von Franz Hammer, [8], [9] und im Nachbericht von Hammer [4] ausführlich dokumentiert. Eine französischsprachige Teilübersetzung bietet Charles Naux [12].

Joannis Kepleri
IMP. CÆS. FERDINANDI II.
MATHEMATICI
CHILIAS
LOGARITHMORUM
AD TOTIDEM NUMEROS
ROTUNDOS,
Præmissâ
DEMONSTRATIONE LEGITIMA
Ortus Logarithmorum eorumq; usus
QUIBUS
NOVA TRADITUR ARITHMETICA, SEU
COMPENDIUM, QUO POST NUMERORUM NOTITIAM
nullum nec admirabilius, nec utilius solvendi pleraq; Problemata
Calculatoria, præsertim in Doctrina Triangulorum, citra
Multiplicationis, Divisionis, Radicumq; extractionis, in Numeris prolixis, labores molestissimos,
AD
Illustriß. Principem & Dominum,
Dn. PHILIPPUM
Landgravium Hassiæ, &c.
Cum Privilegio Authoris Cæsareo.
MARPURGI,
Excusa Typis CASPARIS CHEMLINI.
clɔ Iɔc XXIV.



AD
ILLUSTRISSIMUM
PRINCIPEM ET DOMINUM,
Dn.: PHILIPPUM
LANDGRAVIUM HASSIÆ,
COMITEM Chattimelibocci, Sigenæ,
Ditii, & Niddæ,
Dominum meum Clementissimum.
DE MUNERE ejus CELSIT. AMPLISSIMO, deq;
usitata Cels. suæ allusione, & alliteratione ad Nomen
Philips / Billichs.
TRIGINTA expensis vendit φίλα πολλὰ Philippis
Princeps PHILIPPUS Hassiæ.
Sed facies rerum versa est; pauperculus emptor
Mercem preciumq; retulit.
Triginta accepti, sed vendidit ille Magistrum
Mortalium immanissimus.
I nunc & dubita, Tharsensi interprete; num sit
Dare quàm accipere beatius.
Triginta tamen en penso totidem ἀργυρ.* verbis
φίλα πολλὰ penso Chiliade.
Corde, manu, promis redolentia munera fontes:
Mentemq; redolent quæ accipis.
Corde φιλῶς, manibus πολλῶς, sed Mente ...;
Tibicen, manus, mentem dico.
Illustr. Cels. T.
Subjectissimus Cultor Gratusq; hospes
JOHAN. KEPLERUS.
* Propositionibus.

Abbildung 6: *Chilias logarithmorum*
Titelblatt: *Johannes Kepler, kaiserlicher Mathematiker des Ferdinand II,* Chilias logarithmorum, *Marburg 1624. Mit einer Widmung an den Landgrafen von Hessen, Philipp.*

In der Widmung in Form eines Gedichtes bedankt sich Kepler beim Landgrafen Philipp[1]) für die dreißig Geldstücke (*"triginta expensis"*) und verspricht dafür dreißig Propositionen zu geben.

In Folgenden wird ein kurzer Abriss des mathematischen Gehaltes von Keplers *Chilias Logarithmorum* gegeben:

[1]Philipp III., 1581 - 1643, Landgraf von Hessen-Butzbach.

3.3 Demonstratio stuctura logarithmorum

Kepler beginnt als erstes mit einem Postulat:


4 JOANNIS KEPLERI

DEMONSTRATIO
STRUCTURÆ
LOGARITHMORVM.
POSTULATUM I.
OMNES proportiones inter se æquales, quacunq; varietate binorum unius, & binorum alterius terminorum, eadem quantitate metiri seu exprimere.

Postulatum I

Omnes proportiones inter se aequales, quacunque varietate bino rum unius, et binorum alterius terminorum, eadem quantitate metiri seu exprimere.

Erklärung: Kepler geht hier einen ganz neuen, man kann sagen revolutionären Weg. Er ist zwar in der klassischen Mathematik des Euklid verhaftet und darin wohl bewandert. Er definiert aber hier auf völlig neue Weise eine Funktion, er sagt ein *"Maß"* (*mensura*) für die Proportionen, d.h. auf den heute so genannten positiven reellen Zahlen (gegeben durch Brüche unabhängig von der Darstellung durch Zähler und Nenner).

3.4 Das Maß

Dass dieses Maß, nennen wir es M, *additiv* ist, also

$$M(x \cdot y) = M(x) + M(y)$$

erfüllt, wird von Kepler stillschweigend vorausgesetzt, aber immer wieder verwendet, gleich schon hier:

I. Propositio

Medium proportionale inter duos terminos dividit proportionem terminorum in duas proportiones inter se aequales.

Erklärung: Die mittlere Proportionale (medium proportionale) von zwei Zahlen a und b ist die Zahl c die die Bedingung $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ erfüllt, somit $c = \sqrt{a \cdot b}$, also das *geometrische Mittel* von a und b. Insbesondere gilt $\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$. Als Folge davon gilt für das Maß wie es Proposition I sagt.

$$M\left(\frac{a}{b}\right) = M\left(\frac{a}{c}\right) + M\left(\frac{c}{b}\right) = 2 \cdot M\left(\frac{a}{c}\right), \tag{5}$$

also

$$M(x^2) = 2 \cdot M(x). \tag{6}$$

3.5 Exemplum sectionis

Hier gibt Kepler ein Beispiel, wie man das Maß näherungsweise berechnet.

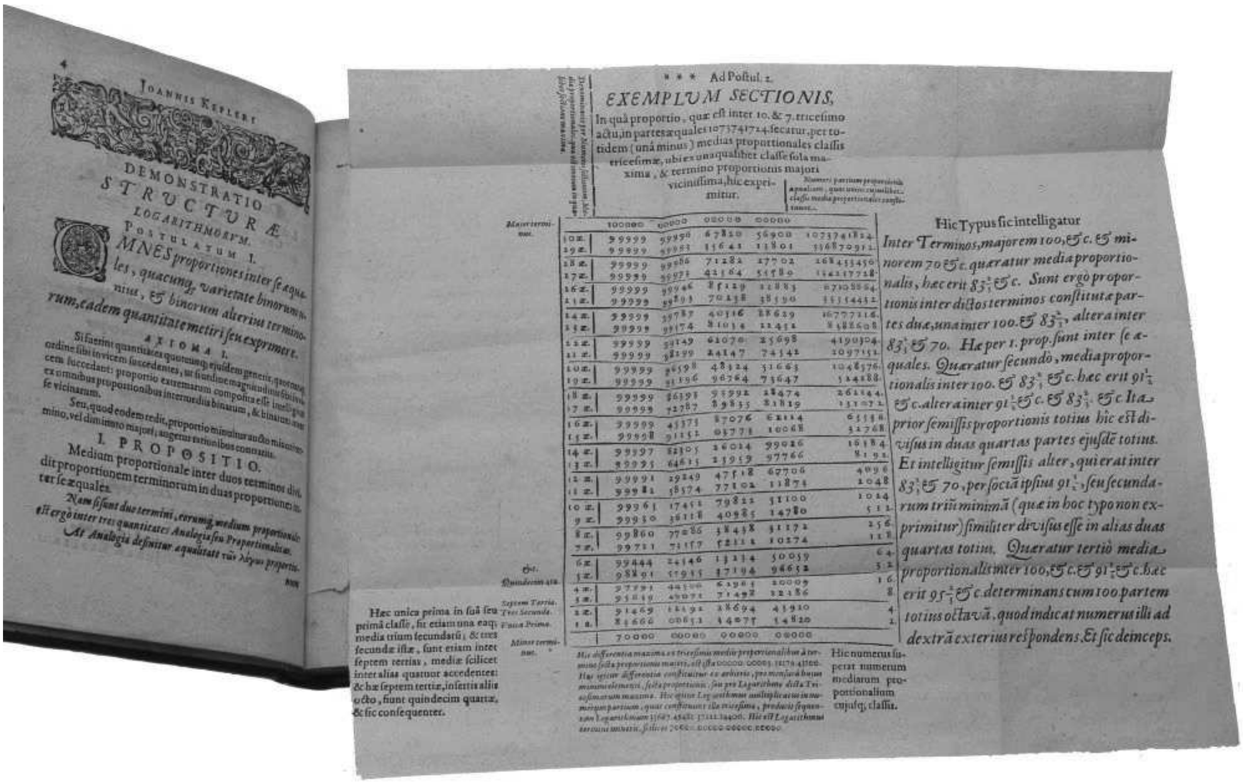


Abbildung 7: Im Original der Chilias [7] ist das Exemplum als Faltblatt eingeklebt.

Kepler zeigt wie man das Maß der Proportion

$$\frac{1\,00000\,00000\,00000\,00000}{70000\,00000\,00000\,00000} = \frac{10}{7}$$

durch fortgesetzte mittlere Proportionale berechnen kann. Es wird sich herausstellen, dass das Maß M bis auf eine Zehnerpotenz gleich dem natürlichen Logarithmus ist.

3.6 Die einzelnen Rechenschritte Keplers:

Kepler verwendet ein rekursives Verfahren: Setze $z = 1\,00000\,00000\,00000\,00000$ und $a = \quad 70000\,00000\,00000\,00000$. Dann ist $x_1 = 83666\,00265\,340755\,47978$, siehe Abbildung 8, die mittlere Proportionale von z und a und es gilt nach (5):

$$M(z/a) = 2 \cdot M(z/x_1).$$

EXEMPLUM SECTIONIS

in quâ proportio, quae est inter 10. et 7. tricesimo actu in partes aequales 10737 41824. secatur, per totidem (unâ minus) medias proportionales classis tricesimae, ubi ex unaqualibet classe sola maxima, et termino proportionis majori vicinissima, hic exprimitur.

Denominatio per Numeros sectionum mediae proportionalis, quae est omnium in qualibet sectione maxima.					*Numeri partium proportionis aequalium, quas unius cujuslibet classis mediae proportionales constituunt.*
	100000	00000	00000	00000	
30 ae.	99999	99996	67820	56900	1073741824.
29 ae.	99999	99993	35641	13801	536870912.
28 ae.	99999	99986	71282	27702	268435456.
27 ae.	99999	99973	42564	55589	134217728.
26 ae.	99999	99946	85129	12883	67108864.
25 ae.	99999	99893	70258	38590	33554432.
24 ae.	99999	99787	40516	88629	16777216.
23 ae.	99999	99574	81034	22452	8388608.
22 ae.	99999	99149	62070	25698	4194304.
21 ae.	99999	98299	24147	74542	2097152.
20 ae.	99999	96598	48324	51665	1048576.
19 ae.	99999	93196	96764	73647	524288.
18 ae.	99999	86393	93992	28474	262144.
17 ae.	99999	72787	89835	81819	131072.
16 ae.	99999	45575	87076	62114	65536.
15 ae.	99998	91152	03773	10068	32768.
14 ae.	99997	82305	26024	99026	16384.
13 ae.	99995	64615	25959	97766	8192.
12 ae.	99991	29249	47518	67706	4096.
11 ae.	99982	58574	77102	11873	2048.
10 ae.	99965	17452	79822	51100	1024.
9 ae.	99930	36118	40985	14780	512.
8 ae.	99860	77086	38438	31172	256.
7 ae.	99721	73557	52112	10274	128.
6 ae.	99444	24546	13234	50059	64.
5 ae.	98891	57955	37194	96652	32.
4 ae.	97795	44506	62963	20009	16.
3 ae.	95639	49075	71498	12386	8.
2 ae.	91469	12192	28694	43920	4.
1 a.*	83666	00265	34075	54820	2.
	70000	00000	00000	00000	

* Haec unica prima in suâ seu primâ classe fit etiam una eaque media trium secundarum; et tres secundae istae sunt etiam inter septem tertias, mediae scilicet inter alias quatuor accedentes: et hae septem tertiae, insertis aliis octo, fiunt quindecim quartae, et sic consequenter.

Hic numerus unitate superat numerum mediarum proportionalium cujusque classis.

Hic Typus sic intelligatur:

Inter Terminos, majorem 100 etc. et minorem 70 etc. quaeratur media proportionalis, haec erit $83\frac{2}{3}$ etc. Sunt ergò proportionis inter dictos terminos constitutae partes duae, una inter 100. et $83\frac{2}{3}$, altera inter $83\frac{2}{3}$ et 70. Hae per 1. prop. sunt inter se aequales. Quaeratur secundò, media proportionalis inter 100. et $83\frac{2}{3}$ etc. haec erit $91\frac{1}{2}$ etc. rursumque erunt partes inter se aequales, una inter 100 etc. et $91\frac{1}{2}$ etc. altera inter $91\frac{1}{2}$ etc. et $83\frac{2}{3}$ etc. Ita prior semissis proportionis totius hîc est divisus in duas quartas partes ejusdem totius. Et intelligitur semissis alter, qui erat inter $83\frac{2}{3}$ et 70, per sociam ipsius $91\frac{1}{2}$, seu secundarum trium minimam (quae in hoc typo non exprimitur) similiter divisus esse in alias duas quartas totius. Quaeratur tertiò media proportionalis inter 100 etc. et $91\frac{1}{2}$ etc. haec erit $95\frac{2}{3}$ etc. determinans cum 100. partem totius octavam, quod indicat numerus illi ad dextram exterius respondens. Et sic deinceps.

etc.
Quindec. Quartae
Septem Tertiae
Tres Secundae
* Vnica Prima

Hic differentia maxima ex tricesimis mediis proportionalibus à termino sectae proportionis majori, est ista 00000.00003.32179.43100. Haec igitur differentia constituitur ex arbitrio pro mensurâ hujus minimi elementi sectae proportionis, seu pro Logarithmo dictae Tricesimarum maximae. Hic igitur Logarithmus multiplicatus in numerum partium, quas constituunt illae tricesimae, producit sequentem Logarithmum 35667.49481.37222.14400. Hic est Logarithmus termini minoris, scilicet 70000.00000.00000.00000.

36 Kepler IX

Abbildung 8: Exemplum aus den Ges. Werken [8].

Weiters rekursiv: ist x_{n+1} die mittlere Proportionale von z und x_n, dann

$$\begin{aligned} M(z/x_n) &= 2 \cdot M(z/x_{n+1}), \quad \text{somit} \\ M(z/a) &= 2^n \cdot M(z/x_n). \end{aligned} \tag{7}$$

Kepler rechnete bis $n = 30$. Dann kommt sein **Trick:** Er setzt $M(z/x_{30}) = z - x_{30} = 00000\,00003\,32179\,43100$. Damit kommt er zum Ergebnis

$$\begin{aligned} M(z/a) &= 2^{30} \cdot (z - x_{30}) \\ &= 35667\,49481\,37222\,14400. \end{aligned}$$

Hic differentia maxima ex tricesimis mediis proportionalibus à termino sectae proportionis majori, est ista 00000.00003.32179.43100. Haec igitur differentia constituitur ex arbitrio pro mensurâ hujus minimi elementi sectae proportionis, seu pro Logarithmo dictae Tricesimarum maximae. Hic igitur Logarithmus multiplicatus in numerum partium, quas constituunt illae tricesimae, producit sequentem Logarithmum 35667.49481.37222.14400. Hic est Logarithmus termini minoris, scilicet 70000.00000.00000.00000.

Abbildung 9: Ausschnitt aus dem Exemplum Abb. 8, worin der Wert des Maßes von 10/7 angegeben ist.

Die eingerahmte Zahl in Abbildung 9 ist die von Kepler berechnete Näherung des Maßes von 10/7 und stimmt mit dem entsprechenden Logarithmus in immerhin 8 Stellen überein.

$$\ln(10/7) = 0.35667\,49439\,38732\,37891.$$

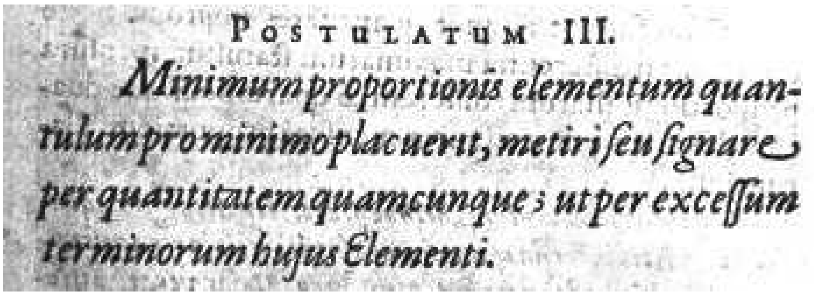
In der Tabelle in Abbildung 8 haben sich beim fortgesetzten Wurzelziehen einige Rechenfehler eingeschlichen. Bei richtiger Rechnung hätte Kepler den Logarithmus von 10/7 auf 10 Stellen genau erhalten.

3.7 Keplers Bedingung

Kepler postuliert in Postulat 3 (Abb. 10), falls x_n, das ja gegen z konvergiert, nahe genug bei z liegt, dass dann das Maß $M(z/x_n)$ gleich (d.h. angenähert gleich) der Differenz $z - x_n$ gesetzt wird.

$$\begin{aligned} M(z/x_n) &\approx z - x_n, \qquad (8) \\ \text{somit } M(z/a) &\approx 2^n \cdot (z - x_n). \end{aligned}$$

Auf diese Weise hat Kepler im Exemplum Sectionis das Maß von 10/7 berechnet.


POSTULATUM III.

Minimum proportionis elementum quantulum pro minimo placuerit, metiri seu signare per quantitatem quamcunque; ut per excessum terminorum hujus Elementi.

Abbildung 10: Postulat 3 aus den Chilias [7], Seite 5

Diese Bedingung, nämlich $M(z/x_n) \approx z - x_n$ für $n \to \infty$ bedeutet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(z/x_n)}{z - x_n} = 1,$$

und unter Berücksichtigung von $M(1) = 0$, $z - x_n = x_n \cdot (z/x_n - 1)$ und $x_n \to z$ für $n \to \infty$ bedeutet dies

$$\lim_{x\to 1} \frac{M(x) - M(1)}{x - 1} = z,$$

das heißt, M ist an der Stelle 1 differenzierbar und

$$M'(1) = z.$$

3.8 Keplers Theorem

Damit hat Kepler folgenden Satz konstruktiv bewiesen:

Theorem: *Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Funktionalgleichung*

$$f(x^2) = 2 \cdot f(x), \tag{3}$$

differenzierbar in $x = 1$, dann ist f durch

$$f'(1) = z \tag{3'}$$

eindeutig bestimmt und von der Form

$$f(x) = z \cdot \ln(x).$$

Beweis: (Skizze) Die Funktion $f(x) = z \cdot \ln(x)$ ist eine Lösung von (3) und (3').

Andererseits gilt analog zu Keplers Formel (7) für jede Lösung f von (3):

$$f(x) = 2^n \cdot f(x^{1/2^n}) = 2^n \cdot (x^{1/2^n} - 1) \cdot \frac{(f(x^{1/2^n}) - f(1))}{(x^{1/2^n} - 1)}.$$

Wegen $\sqrt[n]{x} \to 1$ für $n \to \infty$, folgt durch Grenzübergang

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot (x^{1/2^n} - 1) \cdot f'(1),$$

Damit ist der Wert von f an jeder Stelle $x \in (0, \infty)$ eindeutig bestimmt, also ist $f(x) = z \cdot \ln(x)$ die einzige Lösung von (3) und (3'). □

3.9 Die Definition

Nach 20 Propositionen und mehreren Corollarien erfolgt dann in [7], S.17 die Definition des Neperschen Logarithmus in der Auslegung von Kepler:

Definitio

Mensura cujuslibet proportionis inter 1000. et numerorum eo minorem, ut est definita in superioribus, expressa numero, apponatur ad hunc numerum minorem in Chiliade, dicaturque LOGARITHMVS ejus, hoc est, numerus (αριθμὸς) *indicans proportionem* (λόγον) *quam habet ad 1000. numerus ille, cui Logarithmus apponitur.*

Definition

Das Maß einer beliebigen Proportion zwischen 1000 und einer dazu kleineren Zahl, wie es im vorhergehenden definiert wurde, ausgedrückt als Zahl und dieser kleineren Zahl in der Chilias zugeordnet, wird deren LOGARITHMUS genannt, das ist, die Zahl, die die Proportion anzeigt, welche jene Zahl zu 1000 hat, wird als deren Logarithmus zugeordnet.

Kommentar:

Der Nepersche Logarithmus einer Zahl x in der Auslegung von Kepler, sei mit L_K bezeichnet und wird in dieser Definition durch

$$L_K(x) := M\left(\frac{1000}{x}\right)$$

definiert. Dass hier Kepler nach unseren Begriffen so lange um den Brei herumredet, liegt wohl darin begründet, dass er hier ganz neue, wie bereits erwähnt, revolutionäre Wege beschritten hat, nämlich Beziehungen zwischen Proportionen und Zahlen aufzustellen. Kepler hat ohne die richtigen Werkzeuge zu haben (wie etwa den Funktionsbegriff oder vollständige Induktion), hervorragende mathematische Ergebnisse erbracht. So jammert er selbst an einer Stelle im Anhang zu den CHILIAS: "In ungewohnten Situationen haben wir Mangel an Worten." *("At cùm in re insolatâ laboremus penuria vocabulorum")*

Nachdem das Maß M bis auf Zehnerpotenzen, nämlich den Faktor z, gleich dem natürlichen Logarithmus ist, kommt man zur *Keplerschen Auslegung des Napierschen Logarithmus*

$$L_K(x) = z \cdot \ln\left(\frac{z}{x}\right),$$

wobei hier $z = 1000$, und in den Tabellen dann $z = 10^7$ ist. Damit ist der Keplersche "Logarithmus" ungefähr gleich dem Napierschen Logarithmus (4):

$$L_N \approx 10^7 \cdot \ln \frac{10^7}{y}.$$

Der eigentliche **Keplersche Logarithmus** ist aber nicht die Keplersche Auslegung des Napierschen Logarithmus L_K sondern seine **"mensura"** also sein ***Maß***

$$M(y) = z \cdot \ln(y).$$

4 Die weitere Entwicklung der Logarithmen

4.1 Die weitere Entwicklung der Logarithmentafeln

Henry Briggs (1561 – 1630), Professor für Geometrie in London und Oxford, lernte die Napierschen Logarithmen um 1614/15 kennen. Er schlug Änderungen vor (nämlich dass der Logarithmus von 10 gleich 1 sein soll), die auf den Logarithmus zur Basis 10, auch *Briggscher Logarithmus* genannt, führten. Sie hatten den Vorteil, dass man die Umrechnung der Dezimalstellen und inbesondere die Reduktion der Zahlen auf den Tabellenbereich leichter durchführen kann.

Kepler erhielt von seinem Freund Gunther ein Buch über die dekadischen Logarithmen. Er schrieb 1623 (die CHILIAS waren schon längst fertiggestellt aber noch nicht gedruckt) an Gunther(Tropfke [14], S. 317):: *“Wenn es mir möglich ist, will ich jedoch versuchen, die Heptacosias, die ein Bestandteil der Rudolphinischen Tabellen werden soll, mit geringstem Arbeitsaufwand nach Euren* [dekadischen] *Logarithmen umzugestalten.”* Doch schließlich, nachdem 1624 Keplers *CHILIAS* gedruckt vorlag, entschied sich Kepler, doch auf die dekadischen Logarithmen zu verzichten. So schreibt dann Briggs an Kepler: *“Eurem soeben erschienenen Buch über die Logarithmen anerkenne ich den Scharfsinn und lobe den Fleiß. Hättet Ihr jedoch auf den Erfinder Merchiston gehört und wäret Ihr mir gefolgt, dann hättet Ihr meiner Meinung nach denen, die am Gebrauch der Logarithmen ihre Freude haben, einen besseren Dienst erwiesen.”* Die auf Grundlage der Neperschen Logarithmen berechneten Rudolphinischen Tafeln mit ihrer weitreichenden Bedeutung in der Astronomie und Navigation bewirkten ihrerseits, dass die ansonsten durch die dekadischen Logarithmen sehr schnell veralteten Napierschen bzw. Keplerschen Logarithmen noch unverhältnismäßig lange weiterlebten. Sie wurden 1631 von Keplers Schwiegersohn Jakob Bartsch neu herausgegeben. Obwohl diese Ausgabe viele Fehler enthielt, wurde sie mit Rücksicht auf die Benützbarkeit der Rudolphinischen Tafeln noch 1700 wieder aufgelegt.

4.2 Die weitere Entwicklung der Logarithmen

Ab 1636 gelang Pierre Fermat (1601 – 1665) die Quadratur der höheren Hyperbeln und Parabeln der Form

$$y = ax^m,\ y = \frac{a}{x^m} \ \text{ und } \ y^n = ax^m,\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Er hat dabei für $y = x^k$ die Formel (geschrieben in heutiger Notation)

$$\int_0^x y^k dy = \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

wobei k eine beliebige ganze oder auch gebrochene Zahl sein kann, entdeckt. Diese Formel versagt jedoch bei $k = -1$.

Für diesen Fall fand 1630 (veröffentlicht 1647) der Jesuitenpater Gregorius a Santo Vincentio (1584 in Brügge – 1669 in Gent) eine Lösung (Naux [12], II, S. 21f.): *Wenn die Abszissen einer Hyperbel in geometrischer Progression wachsen, dann bilden die Flächen eine arithmetische Progression.* Das führte auf die Logarithmen.

4.3 Hyperbolischer Logarithmus

Gregorius selbst scheint die Tragweite seiner Entdeckung aber nicht erkannt zu haben. Sein Freund und Mitbruder Alfonso Anton de Sarasa (1618 – 1667) erst nützte dieses Ergebnis aus, um Logarithmen zu berechnen: *"Unde hae superficies supplere possunt locum logarithmorum datorum"* (Daher können diese Flächen den Platz gegebener Logarithmen ausfüllen).
Damit haben wir den sogenannten *"hyperbolischen Logarithmus"*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

der nichts anderes als der heute sogenannte *natürliche Logarithmus ist.* Isaac Newton (1643 – 1727) und auch Nicolaus Mercator (eigentlich Kauffmann, 1620, Eutin – 1687, Paris) führten die sogenannte "logarithmische Reihe" ein:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \ .$$

4.4 Leonhard Euler

Erst bei Leonhard Euler (1707, Basel – 1783, St. Petersburg) und zwar in seiner *Introductio in Analysis Infinitorum, 1748* findet man die Definition: *"Wenn $a^z = y$ ist, so heißt dieser Wert z, sofern er als Funktion von y betrachtet wird, der* **Logarithmus** *von y. Die Lehre von den Logarithmen setzt also voraus, dass eine bestimmte Konstante an der Stelle von a eingesetzt wird, die deshalb die* **Basis** *der Logarithmen heißt."*
Es ist daher der Logarithmus zur Basis a die Umkehrung der Funktion $x \mapsto a^x$, d.h.:

$${}_a\log(y) = x \iff a^x = y.$$

Mit dieser Definition lassen sich auch Logarithmen von komplexen Zahlen einführen. Damit konnte Euler ein Problem von Leibniz und Bernoulli lösen: Zu jedem komplexen Numerus gibt es bei gegebener Basis unendlich viele komplexe Werte des Logarithmus.

4.5 Die Cauchyschen Funktionalgleichungen

Die logarithmische Funktionalgleichung wird dann von AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, (21. 8. 1789 – 22. 5. 1857) in seinem *Cours d'analyse de L'École Polytechnique, Vol. 1, Analyse algébrique V*, Paris 1821, systematisch behandelt. Sie ist eine der vier sogenannten *Cauchyschen Funktionalgleichungen*:

$$\begin{array}{rclcrcl} f(x+y) & = & f(x)+f(y) & \quad & f(x+y) & = & f(x)\cdot f(y) \\ f(x\cdot y) & = & f(x)+f(y) & \quad & f(x\cdot y) & = & f(x)\cdot f(y) \end{array}$$

die weiterhin in der Theorie der Funktionalgleichungen ausführlichst und in allen möglichen Verallgemeinerungen untersucht wurden.

Der Keplersche Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Funktionalgleichung

$$f(x^2) = 2 \cdot f(x), \tag{3}$$

die differenzierbar in $x = 1$ ist, ist erst im 20. Jahrhundert von verschiedenen Autoren (z.B. Aczél [1], Kuczma [11]) wiederentdeckt worden, wobei diese sicher nicht vom historischen Vorgänger Kepler gewusst haben.

Abbildungsnachweis

Bayerische StaatsBibliothek digital MDZ: Abb. 3. rechts, Abb. 6. und folgende, Abb. 7., Abb. 10.
Kepler, Ges. Werke [6]*:* Abb. 8., Abb. 9.
Keplers Traum vom Mond, Leipzig 1898: Portrait Johannes Keplers aus dem Benediktinerstift Kremsmünster, Seite 8.
Sondersammlungen an der UB Graz: Abb. 1. und folgende, Abb. 2., Abb. 3. links, Abb. 4., Abb. 5.,
Staatsoper Wien: Abb. 1.

Literatur

[1] ACZÉL, JÁNOS: *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* Academic Press, New York and London, 1966.

[2] CASPAR, MAX: *BIBLIOGRAPHIA KEPLERIANA. Ein Führer durch das gedruckte Schrifttum von Johannes Kepler.* C.H.Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München MCMXXXVI.

[3] Gronau, Detlef: *Die Logarithmen, von der Rechenhilfe über Funktionalgleichungen zur Funktion.* Tagungsbericht der Sektionstagung der Fachsektion Geschichte der Mathematik der DMV, Calw/Nordschwarzwald, 1997. Erschienen in: Michael Toepell (Hrsg.): Mathematik im Wandel. Anregungen zu einem fächerübergreifenden Mathematikunterricht, Band 2. div verlag, Franzbecker, Hildesheim - Berlin, 2001, 127 – 145.

[4] Hammer, Franz: *Nachbericht zu den logarithmischen Schriften von Johannes Kepler.* In: Johannes Kepler, Gesammelte Werke Bd 9, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1960, 461-483.

[5] Hofmann, Joseph E.: *Michael Stifel. Leben, Wirken und Bedeutung für die Mathematik seiner Zeit.* Sudhoffs Arch., Geschichte Med. Naturwiss. Pharm. Math., Beih. No.9, 42 S. (1968).

[6] Kepler, Johannes: *GESAMMELTE WERKE, Band IX, Mathemat. Schriften*, bearbeitet von Franz Hammer. C.H.Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München MCMLX.

[7] Kepler, Johannes: *Chilias logarithmorum*, Marburg 1624, in: `MDZ-Reader _ Band _ Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos _ Kepler, Johannes.htm`

[8] Kepler, Johannes: *Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos.* Marburg 1624. In: Gesammelte Werke Bd 9, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1960, 275-352.

[9] Kepler, Johannes: *Supplementum Chiliadis logarithmorum.* Marburg 1625. In: Gesammelte Werke Bd 9, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1960, 353-426.

[10] Kepler, Johannes: *Tabulae Rudolphinae.* Ulm 1627. In: Gesammelte Werke Bd 10, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1969.

[11] Kuczma, M.: *Functional equations in a single variable.* PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa 1968.

[12] Naux, Charles: *Histoire des logarithmes de Neper a Euler.* Tome 1, Librairie A. Blanchard, Paris 1966.

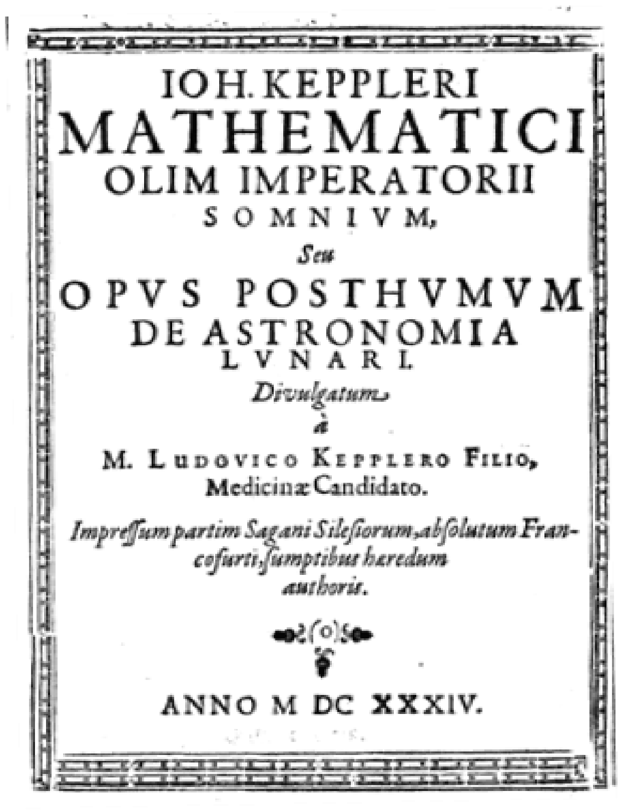
[13] Tropfke, Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik.* 2. Aufl. Band 2: Allgemeine Arithmetik, Walter de Gruyter Berlin- Leipzig 1921.

[14] Tropfke, Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik.* 4. Aufl. Band 1: Arithmetik und Algebra, Walter de Gruyter Berlin- New York 1980.

Meere, Berge, Dämonenstädte – Johannes Keplers frühneuzeitliche Gedanken zur Mondtopographie

Thomas Krohn (Leipzig)

Von Johannes Keplers Wirken als bedeutendem Mathematiker und Astronomen des frühen 17. Jahrhunderts ist heute vor allem sein Beitrag zur Präzisierung des heliozentrischen Weltbilds in Erinnerung geblieben. An erster Stelle stehen hier die drei Planetengesetze, von denen Kepler die ersten zwei im Jahr 1609 in der *Astronomia Nova* und das dritte 1619 in der Schrift *Harmonice mundi* veröffentlichte. Weitere bis heute bekannte Arbeiten waren die *Rudolphinischen Tafeln* zur Bestimmung von Himmelsörtern von 1627 und einige bedeutende Arbeiten im Bereich der Optik, wie etwa das Werk *Dioptrice* von 1611.



IOH. KEPPLERI
MATHEMATICI
OLIM IMPERATORII
SOMNIVM,
Seu
OPVS POSTHVMVM
DE ASTRONOMIA
LVNARI.
Divulgatum
à
M. LUDOVICO KEPPLERO FILIO,
Medicinæ Candidato.
Impressum partim Sagani Silesiorum, absolutum Francofurti, sumptibus hæredum authoris.
ANNO M DC XXXIV.

Titelblatt der Schrift von 1634 (VD 17:39:122771R)

Keplers über mehrere Jahrzehnte entstandenes Werk *Somnium sive astronomia lunaris* – eine mystische Gedankenreise zum Mond sowie sehr phantastisch anmutende Beschreibungen der Mondoberfläche durch die Worte eines Mond-Dämons – von 1634 hingegen ist selbst der Wissenschaftsgeschichtsforschung lange Zeit verborgen geblieben und hat eine große Aufmerksamkeit bis heute nicht bekommen.

Im folgenden Beitrag wird sich zeigen, dass es sich bei näherer Betrachtung jedoch bei diesem Werk nicht nur um die – dem Titel nach – träumerische Erzählung einer Mondreise handelt, sondern – auch unter heutigen wissenschaftlichen Maßstäben – um ein permanent sehr deutliches Eintreten für die Sinnhaftigkeit der direkten Naturerfahrung und -beobachtung innerhalb des wissenschaftlichen Begründens des noch unbekannten mathematisch-astronomischen Phänomens des Aufbaus und der Beschaffenheit der Oberfläche des Erdtrabanten.[1]

[1] Eine ausführliche Nachzeichnung der Entstehungsgeschichte des *Somniums*, seiner Veröffentlichung und den bedeutenden Auswirkungen auf Keplers eigene Familiengeschichte wird mitsamt der Einbettung in den zeitgenössisch-astronomischen Mond-Forschungskontext beschrieben in KROHN 2015.

1. Der Mond als Forschungsgegenstand bis zur Frühen Neuzeit

Aus den Zeiten der griechischen Antike[2] existieren die ersten erhaltenen Zeugnisse einer intensiven Beschäftigung mit dem Mond nicht nur als bloßes Phänomen am Himmel, sondern als eine tiefere philosophische Auseinandersetzung mit ihm und seinen Eigenarten als Objekt an der Sphäre. Dabei konkurrierten mehrere Lehrmeinungen miteinander, die ihrerseits alle sinnvoll in ihren jeweiligen gesamtastronomischen Kontext eingebettet waren, jedoch keine davon unumstößlich nachgewiesen werden konnte.

Die verschiedenen Vorstellungen, die vor allem den helleren und dunkleren Gebieten der Mondoberfläche zugewiesen wurden und nebeneinander existierten, zeigen sich eindrucksvoll in dem Werk *De facie in orbe lunae* (*Das Mondgesicht*) des griechischen Gelehrten Plutarch (um 45 bis um 125 n. Chr.). Die Schrift beinhaltet ein fiktives Streitgespräch zwischen Anhängern verschiedener philosophischer Schulen dieser Zeit, wobei Plutarch selbst einige Rollen in diesem Gespräch annimmt, in welchem die vielfältigen Ansichten aufgezeigt und auf ihre Sinnhaftigkeit diskutiert werden:[3]
Die verbreitete aristotelische Ansicht für die Erklärung der hellen und dunklen Flächen der Mondoberfläche war die Annahme einer spiegelglatten Oberfläche,[4] welche die Topographie der Erde wiederspiegelte. Der Mond selbst war demnach ideal und makellos wie die anderen Himmelskörper und zeugte von der Harmonie des Kosmos. Eine weitere Erklärung der Mondflecken war, dass der Mond eine Mischung aus den Elementen Feuer und Luft sei, und, je nachdem was gerade überwiege, die jeweilige Stelle eher heller oder dunkler sei.
Die sich schließlich behauptende Meinung zur Beschaffenheit der Oberfläche in diesem Gespräch äußert Plutarchs, *daß der Mond, ebenso wie die Erde, große Vertiefungen enthält und von Gründen und Schluchten durchschnitten ist, die Wasser oder dunkle Luft enthalten*."[5]
Sogar die mögliche Bewohnbarkeit des Mondes wollte Plutarch nicht absprechen, auch wenn man Beweise dafür von der Erde aus nicht sehen könne. Der Mond wird auf diese Weise letztendlich etwas sehr erdähnliches mit einer gewissen feuchten Beschaffenheit der unebenen Oberfläche mit Bergen und Schluchten und einer Luftschicht, wodurch es auch zu erdtypischen Witterungseinflüssen mit Wind, Wolken und Regen kommen könne.[6]

---

[2] Selbstverständliche spielte der Mond als nach der Sonne hellstes Objekt am Himmel mitsamt seinem einzigartigen Phasen- und Helligkeitswechsel bereits zu allen Zeiten der frühen Kulturen eine besondere Rolle, von denen es durch Zeugnisse in Form von Handstücken wie die *Himmelsschiebe von Nebra*, durch Großbauten-Anlagen wie die Kreisanlangen von *Stonehenge* oder *Goseck*, aber auch in Form der frühen Lunarkalender der verschiedenen Kulturkreise wie etwa in Ägypten.

[3] Die erdachte Unterhaltung ist ausführlich nacherzählt und kommentiert in EBNER 1906 und in Auszügen in interpretiert in GÜNTHER 1911, S. 22–36.

[4] Vgl. hierzu auch BREDEKAMP 2015, S. 95–96.

[5] EBNER 1906, S. 16.

[6] Vgl. EBNER 1906, S. 17–19, sowie S. 47–53.

So rationell diese Begründungen vor 2000 Jahren auch waren, ohne weitere Beobachtungshilfen waren in der Folgezeit keine weiteren Fortschritte bezüglich der Gegebenheiten auf der Mondoberfläche möglich. Zudem prägte über die folgenden Jahrhunderte bis zur Frühen Neuzeit der in sich abgeschlossene aristotelische Kosmos die Beschäftigung mit der Wissenschaft. Der Mond war im ptolemäischen Weltbild (wie auch die Sonne) ein idealer die Erde umlaufender Himmelskörper wie die restlichen Planeten, die Frage nach einer etwaigen erdähnlichen Beschaffenheit musste nicht diskutiert werden.

Damit war auch im 17. Jahrhundert die Problematik der Ursache und Beschaffenheit der unterschiedlich hell erleuchteten Gebiete des Mondes eine noch ungeklärte Fragestellung in der Astronomie. Allerdings war um 1608 das Teleskop[7] erfunden wurden und Galileo Galilei (1564–1642) konnte damit als erster einen großen Beitrag zur tieferen Kenntnis der Beschaffenheit der Mondoberfläche leisten. Die ersten ausführlichen Ergebnisse der Beobachtungen mit dem Fernrohr schrieb Galilei bereits 1610 im *Sidereus Nuncius* nieder, hierunter auch die des Mondes, wo Galilei die dunkleren Flächen als vergleichsweise ebene Tiefländer und die helleren Gebiete als Bergländer deutete.[8] Auf das möglicherweise Vorhandensein von Wasser ging Galilei insofern kurz ein, als dass die großen dunkleren Gebiete der Oberfläche des Mondes (das „Mondgesicht“) von Wasser bedeckte Flächen sein könnten.[9]
Nach Galilei beschäftigten sich in der Folgezeit zahlreiche europäische Astronomen mit dem Mond und seinem vermeintlichen Aufbau, unter anderem der Danziger Mathematiker Johannes Hevelius (1611–1687) in seiner *Selenographia* von 1644 oder aber Giovanni Battista Riccioli (1598–1671) im *Almagestum novum*[10] aus dem Jahr 1651.
Während Hevelius und Riccioli ähnlich wie Galilei zuvor dem Meer-Gedanken anhingen, den dunkleren Stellen der Oberfläche also Wasserflächen zuwiesen und damit die bis heute geläufige Bezeichnung „Mare“ für diese Mondregionen maßgeblich prägten, zeigte sich der niederländische Astronom Christiaan Huygens (1629–1695) in seiner Schrift *Cosmotheoros*, erschienen erst 1699, überzeugt, dass es sich bei den Flecken zwar um ausgedehnte Ebenen, nicht aber um Meere handeln könne, da er kleine Vertiefungen mit Schattenwurf in ihrem Inneren beobachtet hatte, was für Meere untypisch sei.[11]
Besonders hinsichtlich der Mondflecken, der „Maculae lunares“, existierten demnach zahlreiche unterschiedliche Ansichten nebeneinander.

[7] Einen sehr ausführlichen Eindruck in die Geschichte des Fernrohrs bietet VAN HELDEN 1977.
[8] Vgl. hierzu GALILEI 1610, Bl. 7^{r}–16^{r}, v. a. Bl. $8^{\mathrm{r–v}}$ sowie ab Bl. 13^{r}.
[9] Als Begründung gab Galilei an, dass auch auf der Erde aus der Entfernung die Wasserflächen dunkler als die Kontinente erscheinen würden. Vgl. GALILEI 1610, Bl. 9^{r}.
[10] Zu finden sind sie im 4. Buch des Bandes 1.1. Besonders aufschlussreich ist in diesem Zusammenhang das 8. Kapitel „*De Lunae Figura, & Quid in ea sint Maculae Antiquae ac Novae, & Quantae magnitudinis, Deq. Lunae Asperitatibus, Montibus &c.*“
[11] Vgl. HUYGENS 1703, S. 81–82, wobei es sich um die deutsche Übersetzung *Herrn Christian Hugens [etc.] Cosmotheoros Oder Welt-betrachtende Muthmassungen* handelt.

2. Johannes Keplers Gedankenreise zum Mond: *Somnium*

Der Mond und dessen Eigenschaften waren für Johannes Kepler innerhalb seiner vielfältigen astronomischen Untersuchungen im eigentlichen Sinn kein zentrales Forschungsfeld, sondern wurden von ihm interessiert zu verschiedenen Zeiten seines Lebens immer wieder bearbeitet. Den Beginn dazu legte kurz nach seinem Studium in Tübingen im Jahr 1593 eine Disputation des späteren Juristen Christoph Besold (1577–1638), deren Thesen Kepler geschrieben hatte. Die konkreten Inhalte zur Mondoberfläche sind nicht erhalten geblieben,[12] Kepler spricht aber im *Somnium* dann von „etwa 20 Thesen“. Den ersten Kontakt mit Plutarchs Schrift *Mondgesicht* hatte Kepler nach eigenem Bekunden im Jahr 1595.[13]

Den Zeitpunkt für den Entschluss, eine eigene Geschichte einer Mondreise zu verfassen, gibt Kepler mit 1605 an,[14] fertiggestellt wurde das Manuskript dann 1609, als sich eine Abschrift dann auch sehr schnell im württembergischen Raum verbreitete.[15] Diese Erzählung begleitend wurden in den Jahren 1620 bis 1630 nach und nach von Kepler sehr ausführliche Fußnoten[16] zu seiner Mondreise verfasst, die zusammen mit der eigentlichen Erzählung und einem weiteren „Geographischen Anhang“ erst 1634 nach seinem Tod posthum herausgegeben wurden.
In insgesamt drei miteinander verflochtenen Erzählebenen werden im *Somnium* die Reise zum Mond und das dortige Leben durch die Worte eines Mond-Dämons (dieser selbst nennt sein Heimat *Levania*) dargestellt. Neben der sehr anschaulichen Reisebeschreibung des Mond-Dämons bilden erstens die sichtbaren astronomischen Gegebenheiten für die dort lebenden Mondbewohner (im Sinn der kopernikanischen Astronomie!) und zweitens die Beschreibung der Topographie der Oberfläche die beiden Schwerpunkte der Erzählung.[17]
Während bereits Plutarch die Anwesenheit von Wasser als wahrscheinlich und die Existenz von Leben als prinzipiell möglich bezeichnet hatte, geht Kepler gedanklich weiter und entwirft einen Mond mit einer Atmosphäre, klimatisch erdähnlichen Wettervorgängen und intelligenten Bewohnern, die in der Lage sind, sich ihre Umwelt zu ihrem Vorteil zu formen.

---

[12] Dass es damals um das Relief ging, vermutlich auch schon um das Wachstum von eventuellem Leben auf dem Mond, belegen spätere Aussagen Keplers, vgl. LANGNER/KEPLER 2012, S. 90f. (Note 207).

[13] Vgl. LANGNER/KEPLER 2012, S. 27–28 (Note 2), und KGW, Bd. 11.2 (1993), S. 475.

[14] Vgl. LANGER/KEPLER 2012, S. 41 (Note 49).

[15] Dieser Zeitraum vor 1609 ist auch deswegen sehr bemerkenswert, als dass diese frühen Teile des *Somniums* noch vor der Erfindung des Teleskops niederschrieben wurden, die neuartigen Erkenntnisse aus etwa Galileis *Sidereus Nuncius* noch gar nicht berücksichtigen konnten.

[16] Es entstand auf diese Weise in der Folgezeit ein umfangreicher Zusatz an astronomischen Erläuterungen, wobei Kepler – unterstützt durch eine Reihe illustrierender geometrischer Zeichnungen – einen Bogen spannt von den Hintergründen seiner Wahl des Schauplatzes der Erzählung, über eine Würdigung Tycho Brahes und dessen Observationsleistungen, Hintergründe zu den beschriebenen Reisestrapazen zum Mond, bis zum Hauptteil, dem astronomischen Zusammenspiel der drei Himmelskörper und den beschriebenen Auswirkungen auf Tageslänge, Jahreslänge, Jahreszeiten, Anomalien, Sichtbarkeit der Erde u. a.

[17] Vgl. für diesen Schwerpunkt in Keplers *Somnium* – welcher an dieser Stelle nicht thematisiert werden kann – die Darstellung in KROHN 2015, S. 45–51.

Die Aussagen[18] von Kepler basieren ursächlich stets auf den astronomischen und geographischen Vorrausetzungen des Mondes und sind daher in der Regel streng rationale Analogieschlüsse in einer auf Bedingungen aufbauenden gedanklichen Abfolge, jedoch aus heutiger Sicht trotzdem voller Spekulationen.[19] Kepler vergleicht die verschiedenen sich zeigenden Erscheinungen der Mondoberfläche mit Entsprechungen auf der Erde:

1. die großen dunklen Flächen (die Mare), welche die tiefliegenden Teile der Oberfläche darstellen, bei denen es sich um sumpfige und feuchte Gebieten handele, wobei der Grad der Schwärze der Flächen ihre Feuchtigkeit symbolisiere,
2. die kleineren erkennbaren runden Flächen (die Krater), die die Städte der Mondbewohner darstellen, vergleichbar mit den irdischen Städten, Dörfern und Gärten, in denen die Mondbewohner in einem festen Wohnsitz leben,
3. gerade Linien innerhalb der größeren Strukturen (meist der Mare) als Verbindungs- und Verkehrswege zwischen den Siedlungspunkten.

Vor allem die kreisförmigen Städte beschreibt Kepler genauer und begründet seine Ansicht erneut mithilfe der beobachtbaren Gegebenheiten auf der Mondoberfläche.

> „*Die Art der Einrichtung ist die folgende: in der Mitte des zu befestigenden Platzes rammen sie einen Pfahl ein, an diesen Pfahl binden sie Taue, je nach der Geräumigkeit der zukünftigen Festung, lange oder kurze, das längste misst 5 deutsche Meilen. Mit dem so befestigten Tau laufen sie zum Umfang des künftigen Walles hin, den das Ende des Taues bezeichnet. Daraufhin kommen sie in Masse zusammen, um den Wall aufzuführen.*“[20]

Letztendlich handelt es sich bei den Aussagen Keplers zum Leben auf dem Mond zwar um sehr spekulative Worte, jedoch sind sie allesamt geschlussfolgert aus den sich zeigenden topographischen Vorrausetzungen des Mondes und ihren Entsprechungen auf der Erdoberfläche und daher für die Frühe Neuzeit mit einer bemerkenswerten logischen Strenge versehen, die Zustände auf dem Erdtrabanten allein mithilfe der durch das Observieren bestätigten Gegebenheiten zu begründen. Auf diese Weise zeigen auch die aus heutiger Sicht phantastischen Beschreibungen Keplers zur Mondbiologie, ausgedrückt durch den Mond-Dämon, Keplers fortschrittliche Sichtweise auf das naturwissenschaftliche Experiment: der herausgehobene Stellenwert des Beobachtens als maßgebliche Grundlage für die daraus resultierende Theorie.

---

[18] Sie sind erst ganz am Ende des eigentlichen Traums begonnen und werden später in einem eigenen Teil, der *Appendix geographica*, erweitert und inhaltlich ausgeführt.

[19] Vgl. hierzu die Bewertung in KGW, Bd. 11.2 (1993), S. 483 und S. 486–487.

[20] GÜNTHER/KEPLER 1898, S. 157.
Auf diese Weise lässt sich eine ringförmige Stadt anlegen, die weitere Vorteile mit sich bringe, denn erstens gebe es vom gegenwärtigen Sonnenstand unabhängig immer Schatten an einer Stelle, zweitens sei durch den Erdaushub rings um den Wall das Gebiet tiefer gelegt und damit schiffbar. Gleichzeitig diene dieser Graben als Entwässerung für die feucht-sumpfigen Gebiete, die damit für den Ackerbau tauglich seien.

3. Ein kurzes Fazit

Eine große Aufmerksamkeit hat Johannes Keplers *Somnium – sive astronomia lunaris* bis heute nicht bekommen, obwohl es bei näherer Betrachtung ein sehr deutliches Eintreten für die direkte Naturerfahrung innerhalb des Begründens von noch unbekannten Phänomenen ist. Und sich damit ganz harmonisch in Keplers wissenschaftliches Lebenswerk einreiht:

> „*Wohl war es Keplers Absicht, die cyclopischen Sitten seiner Zeit, d. h. die einäugigen Ansichten derer, die nicht mit offenen Augen sehen wollen]...] zu geisseln, und zumal in der poetischen Einleitung bringt er diese löbliche Absicht in geistsprühender Weise zur Ausführung, aber in der Hauptsache ist das Buch eine in schönste Form gekleidete, eminent astronomische Offenbarung, das hohe Lied der copernicanischen Lehre!*“[21]

Kepler nutzte die Möglichkeit, durch die fiktive Traumerzählung und die damit einhergehende Standortverlagerung auf den Mond, die irdischen Grenzen der Denkinhalte zu umgehen und sich sowohl auch in dieser Schrift demonstrativ für die tägliche und jährliche Erdbewegung auszusprechen, als auch auf ganz natürliche und „erdähnliche“ Weise die Entstehung und Bearbeitung der Mondoberfläche durch dortige Bewohner zu thematisieren.
Wie es trotzdem zu dieser weitgehenden Nichtbeachtung des *Somniums* kam, kann nur vermutet werden. Möglicherweise liegt es an der Eigenart, dass hier Keplers Ideen von Physik, Astronomie und Philosophie mit viel Phantasie verschmolzen, indem die im heutigen Sinn „strenger wissenschaftlichen“ und für einen Gelehrten wie Johannes Kepler üblicheren Daten, Erklärungen, Zeichnungen und Herleitungen sich in die träumerisch-dunkle Geschichte des Dämons von Levania einfügen. Auch liegt der Zeitpunkt der posthumen Herausgabe im Jahr 1634 nicht nur in der Hochzeit des 30jährigen Krieges in Europa, sondern auch in einer Zeit, in der das wissenschaftliche Wirken Keplers bereits abgeschlossen war.

Literaturverzeichnis

BREDEKAMP, H. (2015): Galileis denkende Hand: Form und Forschung um 1600 (= Galileo's O, Band 4), Berlin [u.a.]: De Gruyter.

EBNER, E. (1906): Geographische Hinweise und Anklänge in Plutarchs Schrift "De facie in orbe lunae" (= Münchner geographische Studien, Nr. 19), München: Ackermann.

GALILEI, G. (1610): Siderius nuncius, magna longeque admirabilia spectacula pandens, [...] sunt observata in Lunae facie, fixis innumeris, Lacteo Circulo, stellis nebulosis [...] circumvolutis, quos [...] Medicea sidera author nuncupandos decrevit, Venedig: Baglionus.

GÜNTHER, L./KEPLER, J. (1898): Keplers Traum vom Mond, Leipzig: Teubner.

[21] GÜNTHER/KEPLER 1898, S. XIV.

GÜNTHER, S. (1911): Vergleichende Mond- und Erdkunde, Braunschweig: Vieweg.

HUYGENS, C. (1703): Herrn Christian Hugens [etc.] Cosmotheoros Oder Welt-betrachtende Muthmassungen von denen himmlischen Erd-Kugeln und deren Schmuck [etc.] Geschrieben an seinen Herrn Bruder Herrn Constanin Hugens / Weyland Der Königl. Maj. von Groß-Britannien geheimen Rath. Aus dem Lateinischen ins Teutsche Übersetzt, Leipzig: Friedrich Lanckischens Erben.

KGW – KEPLER GESAMMELTE WERKE, 1937ff., Körperschaft: Kommission für die Herausgabe der Werke von Johannes Kepler der Bayerischen Akademie der Wissenschaften im Auftrag der Deutschen Forschungsgemeinschaft, bislang 21 Bände.

KROHN, T. (2015): Somnium - Johannes Keplers Traum vom Mond. – In: GEORG-CANTOR-VEREINIGUNG DER MARTIN-LUTHER-UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG [Hrsg.](2015): Georg Cantor Heft (17), Halle (Saale), S. 37–58.

LANGNER, B./KEPLER, J. (2012): Der Traum, oder: Mond-Astronomie: somnium sive astronomia lunaris, mit einem Leitfaden für Mondreisende, Berlin: Matthes & Seitz.

RICCIOLI, G. B. (1651): Almagestvm Novvm: Astronomiam Veterem Novamqve Complectens Observationibvs Aliorvm, Et Propriis Nouisque Theorematibus, Problematibus, ac Tabulis promotam, In Tres Tomos Distribvtam Qvorvm Argvmentvm Sequens pagina explicabit, Band 1.1 und 1.2 erschienen, Bologna: Benatius.

VAN HELDEN, A. (1977): The Invention of the Telescope. – In: American Philosophical Society [Hrsg.]: Transactions of the American Philosophical Society, Volume 67, No. 4, S. 1–72, Philadelphia.

Anschrift des Verfassers

Dr. Thomas Krohn
Universität Leipzig
Mathematisches Institut, Abteilung Didaktik
Augustusplatz 10
04109 Leipzig
Deutschland
E-Mail: thomas.krohn@mathematik.uni-leipzig.de

Zum Riemann-Integral: davor und danach

Hans Fischer, Eichstätt

Die folgende Begründung von Jean Dieudonné [1960/1971, 149] für die Vernachlässigung des Riemann-Integrals in seinen *Grundzügen der modernen Analysis* ist mittlerweile ein „Klassiker“:

> Man darf wohl annehmen, daß dieser Begriff, wäre er nicht mit einem so klangvollen Namen verknüpft, schon viel früher übergangen worden wäre; denn bei allem schuldigen Respekt vor dem Genius Bernhard Riemanns ist sich jeder aktive Mathematiker völlig darüber im klaren, daß diese „Theorie“ heutzutage in der allgemeinen Maß- und Integrationstheorie bestenfalls die Bedeutung einer halbwegs interessanten Übungsaufgabe besitzt. Nur der sture Konservatismus akademischer Tradition konnte das Riemannsche Integral als vollwertigen Bestandteil der Analysisvorlesung erhalten, lange nachdem es seine historische Bedeutung überlebt hatte.

Riemann [1854/1867] führte in der ersten von zwei Habilitationsschriften den Integralbegriff nicht von einem allgemein theoretischen Standpunkt aus ein, sondern zweckbezogen. Möglichst ohne größere theoretische Umwege sollte offenbar das „neue“ Integralkonzept zur Erschließung von Bedingungen für die Darstellbarkeit einer „beliebigen“ und insbesondere einer Funktion mit möglicherweise mehr als endlich vielen Unstetigkeitsstellen durch ihre Fourierreihe dienen [Laugwitz 1999]. Dieser Umstand erklärt, warum Riemann bei seiner Begriffserklärung gegen das bereits seit der Antike bestehende Gebot zur begrifflichen Sparsamkeit und Kürze verstieß.

Sei f eine beliebige, wie aus dem Kontext hervorgeht, beschränkte Funktion auf dem endlichen Intervall $[a, b]$.
Definition: Wenn für alle Zerlegungen

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b = x_n$$

und für alle $0 < \varepsilon_i < 1$ *(i=1, ..., n) gilt, daß*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k + \varepsilon_{k+1}(x_{k+1} - x_k)) \tag{1}$$

sich einer festen „Grenze“ A nähert, wenn alle Differenzen $x_{j+1} - x_j$ *„unendlich klein“* [Riemanns Ausdrucksweise] *werden, so ist* $\int_a^b f(x)dx := A$.

Ausgehend von dieser Definition ergab sich Riemanns Kriterium für die Integrierbarkeit, welches sinngemäß so lautet:
Kriterium: Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Funktion R-integrierbar ist, daß für alle Zerlegungen die Summen

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\omega(f; x_k, x_{k+1})$$

mit zunehmender Feinheit der Zerlegungen gegen 0 konvergieren. Dabei ist

$$\omega(f; x_k, x_{k+1}) := \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) - \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$$

die bereits von Riemann [1854/1867, 226] so bezeichnete „Schwankung“ der Funktion im jeweiligen Ieilintervall.

Das Kriterium konnte alsdann direkt auf die in der Theorie der Fourierreihen vorkommenden Integrale angewendet werden.

Das R-Integral hat einen direkten Vorläufer, den von Cauchy [1823, 122–125] in seinen Vorlesungen an der École Polytechnique vorgestellten Integralbegriff. Cauchy zeigte, daß für stetige Funktionen f über einem endlichen Intervall $[a, b]$ die Summen

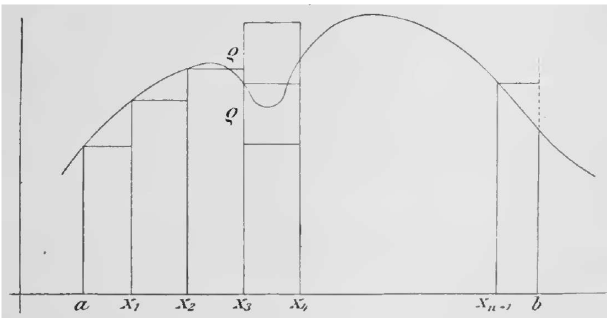
$$\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)f(x_k) \tag{2}$$

für beliebige und sich immer weiter verfeinernde Zerlegungen einen eindeutigen Grenzwert haben, den er als „bestimmtes Integral“ bezeichnete. Die Definition folgte also erst auf einen Existenzsatz. Um diesen Satz zu beweisen, bediente sich Cauchy der Eigenschaft, daß bei stetigen Funktionen f mit zunehmender Verfeinerung der Zerlegung von $[a, b]$ die Unterschiede zwischen Summen gemäß (1) und gemäß (2) immer kleiner werden. So wurde die Konvergenz von allen möglichen Summen (1) gegen einen eindeutigen Grenzwert zunächst zum wesentlichen Charakteristikum für die Integrierbarkeit stetiger Funktionen. Was Riemann bei seiner Integraldefinition machte, war folglich „nur“, von einer Schlüsselstelle in der bekannten Argumentation Cauchys auszugehen, um auch Funktionen betrachten zu können, die allgemeiner als (stückweise) stetige Funktionen sind. Cauchys Argumentation ist nur dann unangreifbar, wenn man vorher eingesehen hat, daß auf einem kompakten Intervall stetige Funktionen gleichmäßig stetig sind. Unterstellt man ihm aber wie Laugwitz [1987] Überlegungen, die aus seinem spezifischen Umgang mit unendlich kleinen Größen heraus auf gleichmäßige Stetigkeit hinauslaufen, so wäre dies kein Problem.

Im Gegensatz zu Cauchy hat Dirichlet die gleichmäßige Stetigkeit als Voraussetzung für die Cauchy-Integrierbarkeit in seinen Vorlesungen explizit bewiesen, wie man besonders schön aus der Edition seiner 1854er-Vorlesung über bestimmte Integrale ersehen kann, die 1904 von Gustav Arendt herausgegeben worden ist. Die gleichmäßige Stetigkeit folgt hier als Konsequenz aus dem Zwischenwertsatz. In der Folge wird dann das Integral durch eine „geometrische Betrachtung“ erläutert, wie aus dem Bild weiter unten ersichtlich. Zu jedem positiven $\rho > 0$ sind wegen der gleichmäßigen Stetigkeit für alle hinreichend feinen Zerlegungen die einzelnen Treppenstufen zwischen Rechtecken der Längen $f(x_i) + \rho$ und $f(x_i) - \rho$ eingeschlossen. Man ist sofort an die antike Exhaustionsmethode erinnert, insbesondere, weil Dirichlet, so wie die alten Griechen, in den folgenden Ausführungen zunächst von der Existenz eines Flächeninhalts A ausgeht, für den dann natürlich gelten muß

$$\rho(b - a) + A \geq \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)f(x_k) \geq A - \rho(b - a),$$

woraus wegen der beliebigen Kleinheit von ρ sofort die Konvergenz der Cauchysumme gegen A folgt.



[Dirichlet 1854/1904, 9]

Dieser „anschaulichen“ Erläuterung fügt Dirichlet [1854/1904, 13–17] allerdings auch noch eine „rein analytische“ Überlegung hinzu, die „von aller Geometrie entkleidet“ ist, und in der tatsächlich (aufgrund der bereits bei Cauchy vorkommenden Kombination zweier verschiedener Zerlegungen) die Existenz eines gemeinsamen Grenzwerts für alle Reihen (2) (aufgrund des heute so genannten Cauchyschen Konvergenzkriteriums) gezeigt wird.

Dirichlets Ausführungen können als frühe Ausprägung des Programms verstanden werden, wie es von Felix Klein in einer Reihe von Vorträgen und Artikeln ab 1873 (s. [Klein 1922]) vorgestellt worden ist. In diesem Programm propagiert er (s. besonders [1895]) die wechselseitige Rückkopplung zwischen „vollständiger logischer Durchdringung“ einerseits und „Anschauung“ andererseits. Kleins Ideen sind als Reaktion auf die zunehmenden Abstrahierungs- und Formalisierungstendenzen der zeitgenössischen Mathematik zu verstehen, jedoch betont auch er die Auffassung, bislang nicht hinterfragte, intuitive Vorstellungen, wie etwa die des Flächeninhalts, einer grundlegenden Revision zu unterziehen. Diese ist nach seiner Meinung vorzugsweise durch Rückgriff auf die arithmetischen Grundlagen zu erreichen, daher die Bezeichnung „Arithmetisierung“. Die andere Seite seines Programms, die „Anschauung“ besitzt bei Klein ein breites Bedeutungsspektrum, von sinnlicher Wahrnehmung – nicht nur im Visuellen – bis hin zu einer rein gedanklichen Referenz auf modellhafte Vorstellungen. Sie ist nicht nur heuristisches Hilfsmittel, sondern auch substantieller Bestandteil der mathematischen Erkenntnis, der gemeinsam mit der logischen Durchdringung weiterzuentwickeln ist. Bereits bei Dirichlet finden sich entsprechende Ansätze. Seine anschaulich-geometrische Betrachtung gestattet eine bessere Erfassung der Bedeutung der gleichmäßigen Stetigkeit für die Konvergenz der Treppensummen, die „Existenz“ des Flächeninhalts kann jedoch nur mit analytischen oder eben „arithmetischen“ Mitteln angegangen werden. Dirichlets Meisterschaft in der Anwendung der Anschauung kommt besonders deutlich bei seinen Erläuterungen zum Gebietsintegral [1854/1904, 224–226] zum Vorschein. Im Lichte geometrisch-physikalischer Ideen erläutert er Aspekte, etwa zum verschwindenden Inhalt des Rands des Integrationsgebiets, wie sie in arithmetisierter Form erst viel später, präzise durch Jordan [1892], vorgebracht wurden.

Abgesehen von Dirichlet erleben wir in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts beim Integralbegriff zunächst eine vollständige Abkehr von geometrischen Betrachtungen, wie sie bereits bei Cauchy auftritt und dann auch im Rahmen des R-Integrals nicht nur vom Urheber selbst, sondern auch von praktisch allen Beitragenden vollzogen wird. Ab ca. 1870, verstärkt ab 1875, also 8 Jahre nach der Publikation in den Abhandlungen der Akademie in Göttingen, aber noch vor Erscheinen der „Werke“ von Riemann, setzten eine Reihe von Modifikationen und Verfeinerungen ein (strenger Beweis des Riemannschen Kriteriums, Obersumme, Untersumme, Oberintegral, Unterintegral, Versuche zur Charakterisierung unstetiger, aber integrierbarer Funktionen insbesondere im Zusammenhang mit Fourierreihen), die von mehreren Autoren (Hankel, du Bois-Reymond, Smith, Thomae, Darboux, Volterra, Ascoli, Dini, Peano) unabhängig voneinander und teilweise fast gleichzeitig unternommen wurden [Hawkins 1970; Knobloch 1983; Pier 1996]. Es kam sogar zu einem heftigen Prioritätsdisput, in den mehr oder weniger direkt Peano, Ascoli, Volterra und Darboux verwickelt waren [Peano 1895]. Aus all diesen Beiträgen läßt sich eindrucksvoll das Ringen um begriffliche Klarheit in der Analysis, die Verbreitung der „Weierstraßschen“ Epsilontik, aber auch einiges über den unzureichenden Informationsfluß und ein dementsprechend mangelhaftes Zitationsverhalten zur damaligen Zeit ersehen.

Riemanns ursprüngliche Definition ist ein Pleonasmus. Für **alle** Zerlegungen und für **alle** möglichen Zwischenwerte muß sich derselbe Grenzwert ergeben. Bei der üblichen, Riemanns Pragmatismus geschuldeten, Begriffserklärung des R-Integrals wird unnötig viel verlangt: Eine beschränkte Funktion ist bereits genau dann R-integrierbar, wenn sie ein Integral im „primitiveren“ Cauchyschen Sinne besitzt. Dieses Ergebnis wurde freilich erst 1915 erzielt (Gillespie) und hatte auf die weitere Entwicklung keinen Einfluß. Immerhin machte etwa Peano, beginnend mit [1883], systematisch Gebrauch von den Begriffen Supremum (limite superiore) und Infimum, was zu einer gewissen Vereinfachung beim R-Integral führte (z.B. Oberintegral als Infimum aller Obersummen). Damit gelang auch ein überschaubarer Beweis für das auch heute gern gebrauchte Kriterium, das die Betrachtung nur spezieller Zerlegungen gestattet.
Eine Funktion ist auf $[a, b]$ genau dann R-integrierbar, wenn es zu jedem positiven ε eine Zerlegung gibt, sodaß der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme bezüglich dieser Zerlegung kleiner als ε ist.

In dem eben erwähnten Beitrag betonte Peano zwar einerseits die Unzulänglichkeit der geometrischen Intuition für strenge Beweise, andererseits stellte er – wenn auch in skizzenhafter Form – eine direkte Verbindung zwischen Integral und Flächeninhalt her. In diesem Zusammenhang gelang die Definition des letzteren Begriffs in einer knappen Formulierung, die sinngemäß lautet:
Vom Flächeninhalt einer Figur kann man nur dann sprechen, wenn das Supremum der Flächeninhalte aller einbeschriebenen Polygone gleich dem Infimum der Flächeninhalte aller umbeschriebenen Polygone ist.
Mit dieser Definition war prinzipiell (eine genaue Diskussion des Inhaltsbegriffs bei allgemeinen Polygonen stand noch aus) eine begriffliche Einheit zwischen R-Integral und dem Flächeninhalt der durch die Ordinatenabschnitte des Integranden gebildeten Figur hergestellt.

Wohl unabhängig von Peano führte Jordan [1892] eine ähnliche und äquivalente Begriffsbildung für den Flächen- und Rauminhalt ein, die heute noch als „Jordanmaß“ bezeichnet wird. Im Gegensatz zu Peano nutzte Jordan diese Begriffsbildung auch explizit zu einer strengen Behandlung von mehrdimensionalen Gebietsintegralen, die in ihrer recht abstrakten, mengentheoretischen Darstellung als wichtige Vorlage für Lebesgues Arbeiten diente. Aber es war ausgerechnet Lebesgue [1902], der wiederum die geometrische Anschauung an vielen Stellen seiner wegweisenden Dissertation herausstrich und, freilich auf der Basis der „neuen“ Mengenlehre, zur Re-Geometrisierung des Integralbegriffs kam, indem er — wesentlich ausgefeilter als etwa Peano — Integrale als Maße bzw. Inhalte von Ordinatenmengen auffaßte. Lebesgue zeigte auch die Bedeutung des Jordanmaßes (und damit letztlich des R-Integrals) für die Inhaltsgrundlegung in der Geometrie auf und trug so wesentlich zur Klärung einer ab Ende des 19. Jahrhunderts verstärkt behandelten Frage der Axiomatik des Inhaltsbegriffs (s. zu diesem Thema [Hlawka 1978]) bei. Hierzu betrachtete er beschränkte „Gebiete“ („domains“), d.h. einfach zusammenhängende offene Mengen des $\mathbb{R}^2$, die im Inneren von geschlossenen und ansonsten doppelpunktfreien stetigen Kurven (Jordankurven) liegen. Von der auf diesen Gebieten definierten „Fläche“ („aire“) m forderte er Invarianz gegenüber Kongruenz sowie die Annahme des Wertes 1 für ein bestimmtes Normquadrat. Für den Fall, daß ein Gebiet D die Vereinigung zweier disjunkter Gebiete D_1 bzw. D_2 und des gemeinsamen „Randbogens“ dieser beiden Gebiete sei, wurde schließlich verlangt, daß $m(D) = m(D_1) + m(D_2)$. Aufbauend auf Hadamards Diskussion des Flächeninhalts von Polygonen [1898] und seiner eigenen Theorie des heute so genannten Lebesgue-Maßes war beinahe „klar“, daß die Inhaltsfunktion m eindeutig bestimmt ist, wenn die betrachteten Gebiete „quadrierbar“ („quarrable“), d.h. Peano-Jordan-meßbar sind. Lebesgue [1903; 1905] konnte sogar zeigen, daß im Falle eines positiven Lebesgue-Maßes der Randkurven der betrachteten Gebiete immer noch die – aber nicht mehr eindeutig bestimmte – Existenz einer Inhaltsfunktion gewährleistet ist. Da die Forderung nach Eindeutigkeit des Flächeninhalts bezüglich einer bestimmten Normierung eine anschauliche Selbstverständlichkeit ist, belegen seine Überlegungen damit klar die dominierende Stellung des Peano-Jordan-Inhalts, also letztlich des R-Integrals, für geometrische Betrachtungen.

Ein weiteres – überraschendes – Beispiel für die Bedeutung des (abstrakten) Peano-Jordan-Maßes findet sich in der Wahrscheinlichkeitstheorie: Die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen sind nur dann im strikten Sinne (d.h. mehr als nur „fast sicher“) durch Grenzwerte relativer Häufigkeiten von Zufallsfolgen mit bestimmten Regellosigkeitseigenschaften (sogenannten „Kollektivs“) darstellbar, wenn sie Peano-Jordan-meßbar bezüglich einer gewissen Klasse von „Grundmengen“ sind [Tornier 1933].

Die Geschichte des R-Integrals ist ein besonders treffendes Beispiel für die Konkretisierung des Programms von Felix Klein in einem historischen Prozeß. Die zunächst betriebene Untersuchung aufgrund der (topologischen) Eigenschaften der reellen Zahlen erfolgte ohne Rückgriff auf geometrische Betrachtungen. Damit wird auch die naheliegende, von Vielen geäußerte Ansicht widerlegt, daß das R-Integral durch die Exhaustionsmethode der „alten Griechen“ motiviert worden sei. Geometrische Anschauung in verschiedener Ausprägung kam in der Folge aber wieder ins Spiel, da sich die neue Begriffsbildung (nach geeigneten Modifikationen) auch besonders tragfähig für die Untersuchung des geometrischen Inhaltsbegriffs erwies. So kann entgegen Dieudonnés Ansicht auch heute noch das R-Integral mit Fug und Recht einen festen Platz im Lehrgefüge der Mathematik für sich beanspruchen.

Literatur:

Cauchy, A.L. 1823. *Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal.* Wiederabdruck in OC (2) 4, 1899.

Dieudonné, J. 1960/1971. *Grundzüge der modernen Analysis.* Braunschweig: Vieweg. Erstausgabe 1960 in Englisch.

Dirichlet, P.G. Lejeune 1854/1904. *G. Lejeune-Dirichlets Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen.* Braunschweig: Vieweg.

Gillespie, D.C. 1915. The *Cauchy* definition of a definite integral. *Annals of Mathematics (2)* **17**, 61-63.

Hadamard, J. 1898. *Leçons de géométrie élémentaire (géométrie plane).* Speziell: note D. Paris: Colin.

Hawkins, T. 1970. *Lebesgue's Theory of Integration.* Madison/London: Univ. Wisconsin Press.

Hlawka, E. 1978. Zur Geschichte des Inhaltsbegriffes. *Schriftenreihe der ÖMG zur Didaktik der Mathematik*, Heft 2. `http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/`

Jordan, C. 1892. Remarques sur les intégrales définies. *Journal de mathématiques pures et appliquées (4)* **8**, 69–99.

Klein, F. 1895. Über Arithmetisierung der Mathematik. *Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.* Wiederabdruck in [Klein 1922, 232–240].

Klein, F. 1922. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. 2, R. Fricke & H. Vermeil (Hsg.), Berlin: Springer.

Knobloch, E. 1983. Von Riemann zu Lebesgue — zur Entwicklung der Integrationstheorie. *Historia Mathematica* **10**, 318–343.

Laugwitz, D. 1987. Infinitely Small Quantities in Cauchy's Textbooks. *Historia Mathematica* **14**, 258–274.

Laugwitz, D. 1999. *Bernhard Riemann 1826–1866, Turning Points in the Conception of Mathematics.* Basel: Birkhäuser.

Lebesgue, H. 1902. Intégrale, longeur, aire. *Annali di matematica pura ed applicata (3)* **7**, 231-359.

Lebesgue, H. 1903. Sur le problème des aires. *Bulletin de la Société Mathématique de France* **31**, 197–203.

Lebesgue, H. 1905. Sur le problème des aires. *Bulletin de la Société Mathématique de France* **33**, 273–274.

Peano, G. 1883. Sull'integrabilità delle funzioni. *Atti della Accademia delle science di Torino* **18**, 439–446.

Peano, G. 1895. Sulla definitione di integrale. *Annali di matematica pura ed applicata (2)* **23**, 153–157.

Pier, J.-P. 1996. *Histoire de l'intégration.* Paris: Masson.

Riemann, B. 1854/1867. Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. *Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **13**. Wiederabdruck in *Gesammelte mathematische Werke*, S. 213–252. Leipzig: Teubner 1876.

Tornier, E. 1933. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Acta Mathematica* **60**, 239–380.

Statistik versus Stochastik: Zur Begriffsgeschichte der beiden Termini

Annette Vogt (Berlin)

Im Vortrag wurde die Begriffsgeschichte der „Statistik“ mit seinen mehrfachen Bdeutungen und der „Stochastik“ skizziert. Erstens wurden Definitionen von Statistik, mathematischer Statistik und Stochastik vorgestellt. Zweitens wurde ein Überblick über diese Definitionen gegeben, wie sie gegenwärtig als Beschreibungen (als Eigenbeschreibungen) der betreffenden Universitäts-Institute bzw. -Lehrstühle existieren. Drittens wurde die besondere Bedeutung zweier Definitionen hervorgehoben, die 1713 und 1917 publiziert wurden.

Auch wissenschaftliche Begriffe haben eine Geschichte, und auch auf sie lassen sich die „W-Fragen“ der Geschichte - was, wann, wo, wer, warum - anwenden. Wie für die Wissenschafts- bzw. Mathematikgeschichte allgemein gilt auch hier, daß sich die Herausbildung bestimmter Begriffe erst unter Berücksichtigung der jeweiligen historischen Kontexte näher bestimmen läßt. Untersucht man, wie heute (im Jahr 2016) Lehrstühle in der Mathematik bezeichnet werden, fallen bestimmte Veränderungen sofort auf: mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeits-Rechung bzw. -Theorie kommen kaum noch vor, stattdessen Stochastik, sogar „mathematische Stochastik“, was m. E. eine Tautologie ist. Diese Veränderungen der Selbstdefinition von Instituten bzw. Lehrstühlen an den Universitäten spiegeln die Entwicklung der Disziplin bzw. Spezialdisziplin Wahrscheinlichkeitstheorie und die Veränderungen auf dem Gebiet der mathematischen Statistik der vergangenen Jahrzehnte wider.
Aus der Geschichte wissenschaftlicher Disziplinen ist bekannt, daß eine Disziplin etabliert ist, wenn mindestens diese drei Bedingungen erfüllt sind:
- es gibt Zeitschriften zu diesem Gebiet,
- es gibt Lehrstühle dieser Disziplin an Universitäten,
- es gibt Lehrbücher, und es finden Konferenzen und Tagungen statt.[1]

Auch für die Disziplinen Statistik und Stochastik lassen sich diese Bedingungen verifizieren, und die Bezeichnungen der Lehrstühle und Institute an den Universitäten reflektieren die Entwicklungen dieser Disziplinen.

1. Definitionen von Statistik, mathematischer Statistik und Stochastik

Unter Statistik wird allgemein die Sammlung, Analyse, Interpretation und Darstellung sowie die Organisation von Daten bzw. Datenmengen verstanden. Sie wird auch die „Wissenschaft vom Staat“ genannt. Die Daten stammen aus den unterschiedlichsten Bereichen eines Staates bzw. einer Gesellschaft (z. B.

---

[1] Vgl. Guntau/Laitko (1987).
Guntau, Martin und Laitko, Hubert (Hgg.) Der Ursprung der modernen Wissenschaften: Studien zur Entstehung wissenschaftlicher Disziplinen. Berlin: Akademie-Verlag, 1987.

Daten zur Bevölkerungsentwicklung), der Ökonomie (Daten zur Produktion und Konsumtion, zu Handel und Verkehr), aus den Naturwissenschaften (anfangs insbesondere aus den Agrarwissenschaften), aus der Medizin, der Polizei, der Pädagogik, dem Sport usw. Während die Bevölkerungs-, Militär- und Steuerstatistik zu den ältesten Daten-Erhebungen gehören, wurden statistische Erhebungen in vielen anderen Bereichen erst ab Mitte des 19. Jahrhunderts relevant und erfuhren seither eine ungeheure Ausbreitung. [2] Mit der fortschreitenden Nutzung der Computer und dem internet ist „Big Data" im 21. Jahrundert nicht mehr „science fiction" sondern wird zunehmend Realität - mit allen Segnungen und Gefahren, darunter der Daten-Sicherheit.

Demgegenüber wird Stochastik auch die „Mathematik des Zufalls" genannt, denn wesentlicher Bestandteil der Stochastik ist die Wahrscheinlichkeitstheorie, eine mathematische Theorie mit einer mindestens 300jährigen Geschichte.

Zur Statistik gehören alle Aspekte der Erhebung von Daten, darunter die Planung, Sammlung und Auswertung von Stichproben sowie die Auswahl dieser Stichproben und das Design der Experimente. Man unterscheidet zwischen deskriptiver (die Aufsummierung von Daten, das Erstellen von Index) und inferentieller (Variationen, Randbedingungen) Statistik. Das Hauptmerkmal für die deskriptive Statistik bilden die Verteilungen, während bei der inferentiellen Statistik die Wahrscheinlichkeitstheorie bzw. die mathematische Statistik zur Anwendung kommen.

Die mathematische Statistik ist die Anwendung mathematischer Methoden auf die Statistik, d. h. für einen langen historischen Zeitraum hauptsächlich die Anwendung auf Probleme der „Wissenschaft vom Staat" (Bevölkerungs-, Sozial-, Wirtschaftsstatistik sowie Kriminal- und Medizin-Statistik). Waren es anfangs einfache mathematische Methoden aus der Algebra und Analysis, kamen seit Ende des 19. Jahrhunderts Methoden aus der Wahrscheinlichkeits-

---

[2] Zur Geschichte der Statistik vgl. Th. M. Porter (1996), Stephen M. Stigler (1986, 1999), A. Desrosières (1998), zum Vergleich zwischen England und Frankreich vgl. Libby Schwebber (2006), zur Entwicklung in Deutschland vgl. Touze (2007) und Grohmann et al (2011). Porter, Theodore M. Trust in Numbers: The persuit of objectivity in science and public life. Princeton: Princeton Univ. Press, 1996. - Stigler, Stephen M. The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press, 1986 (2nd 1990). - Stigler, Stephen M. Statistics on the Table. The History of Statistical Concepts and Methods. Cambridge et al: Harvard Univ. Press, 1999 (2nd 2002). - Desrosières, Alain. The politics of large numbers: A history of statistical reasoning. Harvard Univ. Press, 1998. - Schwebber, Libby. Disciplining Statistics: Demography and vital statistics in France and England, 1830-1885. Duke Univ. Press, 2006. - Tooze, Adam. Statistics & German State 1900-1945: The making of modern economic knowledge. Cambridge: 2007 (Studies in modern economic history, vol. 9). - Grohmann, Heinz, Walter Krämer, Almut Steger (ed.s) Statistik in Deutschland. 100 Jahre Deutsche Statistische Gesellschaft. Heidelberg et al: Springer, 2011.

theorie und der stochastischen Analysis hinzu. Einen wichtigen Bestandteil der mathematischen Statistik bilden die Untersuchungen zur Verteilung gewisser Ereignisse und die Darstellung durch spezielle Verteilungs-Funktionen. Zu der Bernoulli-, Poisson- und Gauss-Verteilung (auch Normalverteilung genannt), kamen im 20. Jahrhundert weitere Verteilungen hinzu, darunter Mitte des 20. Jahrhunderts die Gumbel-Verteilung für die Untersuchung seltener Ereignisse.

Mit der Zunahme des Schwierigkeitsgrades mathematischer Methoden erfuhr die Anwendung mathematischer Verfahren die Ablehnung traditionell arbeitender Statistiker und Staatswissenschaftler. Die Durchdringung der Statistik mit mathematischen Methoden, auch Mathematisierung der Statistik genannt, erfolgte in den einzelnen Staaten zu unterschiedlichen Zeiten. Für den deutschen Sprachraum galt ab Mitte der 1920er Jahre, daß diese Länder bei der Mathematisierung der Statistik erheblich gegenüber den Entwicklungen in England und in den USA zurückgefallen waren.

Die Stochastik untersucht und beschreibt Ereignisse oder Gesamtheiten von Ereignissen, die nicht vorhersehbar sind. Deshalb wird sie oft auch die „Mathematik des Zufalls“ genannt. Stochastische Prozesse sind eines der Hauptuntersuchungsgebiete in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Diese stochastischen Prozesse kommen in vielen naturwissenschaftlichen Disziplinen (in der Physik, Biologie, in den Computerwissenschaften) vor, spielen aber auch in der Ökonomie, im modernen Finanzwesen und den Ingenieurwissenschaften eine wichtige Rolle. Mit der Zunahme der Untersuchungen stochastischer Prozesse in den Anwendungsgebieten erfuhr die Benennung der dazu gehörigen mathemtischen Theorie - der Wahrscheinlichkeitstheorie -, eine Umbenennung. Aus den Lehrstühlen für Wahrscheinlichkeitstheorie an den Universitäten wurden Lehrstühle für Stochastik. Ein weiterer Grund für die Umbenennungen war die nach 1945 erfolgte Durchsetzung der englischen Sprache als dominierender Wissenschaftssprache und die Durchsetzung der im anglo-amerikanischen Sprachraum entwickelten Terminologie. Seit der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts setzte sich Englisch als Konferenz- und Publikations-Sprache durch. Für Wissenschaftshistoriker ist solch ein Prozeß nicht neu, bis zum 18. Jahrhundert gab es schon einmal eine dominierende Sprache in den Wissenschaften - das Latein. Die Veränderungen zugunsten des Englischen (bzw. des Amerikanischen) als gemeinsamer Sprache der Mathematiker, Statistiker und Stochastiker spiegelt sich in der Literatur anschaulich wider. Nach 1945 dominierten in zunehmendem Maße die Publikationen in englischer Sprache. Damit einher gingen die Veränderungen in der Begriffsbildung, und während noch Anfang der 1930er Jahre „mathematische Statistik“ in der oben gegebenen Weise definiert und als Term benutzt wurde, kommt dieser Begriff heute kaum noch vor. Demgegenüber wurde noch bis in die 1990er Jahre überwiegend Wahrscheinlichkeitstheorie statt Stochastik verwendet.

Als Beispiel seien die Definitionen skizziert, wie sie in dem Standardwerk „Mathematisches Wörterbuch“ (in 2 Bänden), herausgegeben von Josef (Joseph) Naas (1906-1993) und Hermann Ludwig Schmid (1908-1956), zu finden sind. Die Edition erschien in 3 Auflagen (1. Aufl. 1961, 3. Aufl. 1967), wurde von international anerkannten Autoren unter der Leitung von J. Naas und H. L. Schmid erarbeitet und entstand am 1946 gegründeten Institut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften (DAW) zu Berlin, der späteren Akademie der Wissenschaften (AdW) der DDR in Berlin (-Ost). Die beiden Bände erschienen identisch in beiden deutschen Teil-Staaten, aber in unterschiedlichen Verlagen (in der DDR beim Akademie-Verlag).
Der Artikel zur Statistik begann mit der Unterteilung in deskriptive Statistik, mathematische Statistik und „Universitätsstatistik“ (die Wissenschaft vom Staat). Ausführlich wurde die Geschichte derselben und die Inhalte beschrieben sowie grundlegende Literatur angegeben. Für die Mathematik wurden die folgenden drei Typen beschrieben: deskriptive Statistik (Kollektivmasslehre), mathematische Statistik als angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie sowie die statistische Physik, insbesondere die Quantenstatistik. Außerdem wurden „statistical decision functions“ erläutert.[3] Demgegenüber wurde kein Artikel zur Stochastik verfaßt, Stochastik erschien nur als Begriff „stochastischer Prozess“, und es wurde auch keine Literatur dazu angegeben.[4] Die umfangreichen Literaturangaben zum Artikel „Statistik“ enthielten fast ausschließlich Titel in englischer Sprache, die angegebenen Autoren waren die bis in die 1960er Jahre maßgebenden Vetreter des Fachs, d. h. die Autoren des Artikels kannten die wichtigsten Arbeiten und deren Vertreter sehr genau. Um 1967 - dem Zeitpunkt der 3. Auflage des „Mathematischen Wörterbuch“ - wurde mathematische Statistik noch als angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie verstanden, existierte dieser Begriff in klarer Abgrenzung sowohl zur Statistik (der „Wissenschaft vom Staat“) als auch zur statistischen Physik, und Stochastik war noch kein eigenständiger Begriff. Man untersuchte stochastische Prozesse, ordnete sie aber (noch) dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie zu.

2. Benennungen von Lehrstühlen bzw. Instituten für Statistik, mathematische Statistik und Stochastik in der Gegenwart

Dank der Entwicklung und Verbreitung des internet existieren heute an allen Universitäten für die einzelnen Fakultäten, Institute und Lehrstühle eigene homepages, die eine Eigendarstellung präsentieren. Unabhängig von graphischen, stilistischen und Design-Qualitäten interessierte bei der Analyse, wie und in welcher Weise die Lehrstühle und Institute aktuell (im Mai 2016) benannt und welche Definitionen gegebenenfalls verwendet wurden. Die

[3] Vgl. Naas, J., H. L. Schmid (Hrsg.) Mathematisches Wörterbuch, Berlin: Akademie-Verlag, 1967, Bd. 2, S. 633f.
[4] Vgl. ebenda, Bd. 2, S. 648-649.

Benennung von Instituten und Lehrstühlen ist bei wissenschaftshistorischen Analysen immer ein Indiz für den Entwicklungsstand von Gebieten bzw. Disziplinen. Wenn ein allgemeiner Konsens in der Wissenschaftlergemeinschaft über Gegenstand, Aufgaben und Methoden des betreffenden Gebietes besteht bzw. sich herausgebildet hat, spiegelt sich dieser Entwicklungsstand in der Benennung von Lehrstühlen und Instituten wider, d. h. die Benennungen folgen einer Entwicklung und setzen sich nach allgemeiner Akzeptanz durch.

Die Untersuchung der Benennung von Lehrstühlen und Instituten wurde im April und Mai 2016 im internet für die Stichworte „Statistik", „mathematische Statistik" und „Stochastik" sowie „statistics", „mathematical statistics" und „stochastics" durchgeführt. Berücksichtigt wurden die Universitäten und TU in der Bundesrepublik Deutschland und der Republik Österreich. Außerdem wurde eine Liste aller Universitäten und TU analysiert, die die DMV für Studierende unter dem Motto „Mathe studieren" zur Verfügung stellt. Hier waren für jede Universität und TU die einzelnen Institute aufgelistet.[5]

Im einzelnen gibt es fast an jeder Universität Institute für Statistik, an mehr als 10 Universitäten kombiniert als „Institut für Statistik und Ökonometrie", an anderen gehört die Statistik als Abteilung zu einem Institut für angewandte Mathematik. Es existieren auch vereinzelt Lehrstühle für mathematische Statistik. Die TU Dortmund bildet eine Ausnahme - hier gibt es eine Fakultät für Statistik mit insgesamt 11 Lehrstühlen, darunter 3 zur „mathematischen Statistik in Anwendungen" sowie den Lehrstuhl für Wirtschafts- und Sozialstatistik, den Walter Krämer (geb. 1948) einnimmt, ein bekannter Autor kritischer Bücher zur Statistik.[6] Auf seiner homepage steht folgende „Warnung vor Wikipedia" für seine Studenten:
„Zitate aus der **deutschen Wikipedia** sind ab jetzt in akademischen Abschlussarbeiten an meinem Institut nicht mehr erlaubt. Anders als die englische wird die deutsche Wikipedia von Ideologen dominiert. Außerdem steckt sie in vielen Artikeln zu Wirtschaftswissenschaften und Statistik voller Fehler. Generell ist das Niveau von Artikeln zur Statistik weit unterhalb einer Bachelorarbeit an unserer Fakultät. Walter Krämer"[7]

Es gibt ebenfalls fast an jeder Universität Institute für Stochastik, und es existieren interessante Kombinationen, die erst seit ca. 2000 bestehen. So gibt es die Kombination Stochastik und Modelle (Univ. Bochum), Stochastik und

5 Vgl. „Mathe studieren!", https//dmv.mathematik.de (10 S., Zugriff 15.4.2016).
6 Vgl. Krämer, Walter. So lügt man mit Statistik. Frankfurt/M., New York: Campus Verlag, 1995 (6. überarb. und erweiterte Aufl., Reihe Campus). Vgl. auch Bosbach, Gerd und Jens Jürgen Korff. Lügen mit Zahlen. Wie wir mit Statistiken manipuliert werden. München: Heyne Verlag, 2012 (2. Aufl.).
7 Vgl. Homepage, TU Dortmund, Fakultät für Statistik, Lehrstuhl für Wirtschafts- und Sozialstatistik, Prof. Dr. Walter Krämer (Zugriff 15.4.2016).

Optimierung (Univ. Halle/S.) oder Stochastik und Wirtschaftsmathematik (TU Wien), aber auch ein Institut für Mathematische Stochastik, m. E. eine Tautologie, an der Univ. Hannover, auf dessen homepage diese Definition zu finden ist:
„Stochastik ist ein Sammelbegriff für die Gebiete *Wahrscheinlichkeitstheorie* und *Mathematische Statistik*. Kurz: **Stochastik ist die Mathematik des Zufalls**.“[8]

3. Zur Geschichte des Begriffes Stochastik und ihre 2 Namensgeber

Wir zeigen, daß es historisch zwei Namensgeber gewesen sind, die den Begriff „Stochastik“ einführten.
Bei der Beschäftigung mit Ladislaus von Bortkiewicz (1868-1931), der von 1901 bis zu seinem Tod 1931 an der Berliner Universität lehrte sowie von 1906 bis 1923 auch an der Handels-Hochschule Berlin, fällt auf, daß er einer der wenigen Statistiker in Deutschland gewesen ist, der die internationale Entwicklung der Statistik aufmerksam verfolgte und rezipierte.[9] Die Zunahme mathematischer Methoden, „mathematischer Denk- und Darstellungsformen“, wie er es nannte, hielt er für wichtig. Deutlich konstatierte er bereits 1927 ein Zurückbleiben deutscher Statistiker im internationalen Vergleich und begründete dies mit deren Ablehnung mathematischer Methoden.

In seinem Gutachten für die Habilitation von Charlotte Lorenz (1895-1979) im Januar 1927 schrieb er:
„Die deutsche Wissenschaft hat zur Theorie der Preisindexzahlen manches beigetragen. Aber diejenigen unter ihren hierher gehörenden Leistungen, die bis auf den heutigen Tag einen internationalen Ruf geniessen, liegen weit zurück (Laspeyres, Pasche, Soether, Leher). Etwa seit der Mitte der 80er Jahre des vorigen Jahrhunderts beginnt die Periode einer entschiedenen Vorherrschaft Englands und Amerikas auf diesem Gebiete. Und wenn Deutschland da ins Hintertreffen gekommen ist, so erklärt sich dies nicht zuletzt durch die Aversion der deutschen Nationalökonomen und Statistiker gegen jede Art mathematischer Behandlung der einschlägigen Probleme. Denn gerade in der Theorie der Preisindexzahlen sind Engländer und Amerikaner seit geraumer Zeit dazu übergegangen, von mathematischen Denk- und Darstellungsformen recht ergiebigen Gebrauch zu machen (Edgeworth, Walsh, Irving Fisher), und ihre

---

[8] Vgl. homepage des Instituts für Mathematische Stochastik, Leibniz-Universität Hannover (Zugriff 15.4.2016), kursiv und fett im Original.
[9] Zu Ladislaus von Bortkiewicz (LvB) vgl. Härdle/Vogt (2015).
Härdle, Wolfgang Karl und Annette B. Vogt. Ladislaus von Bortkiewicz - Statistician, Economist and a European Intellectual. In: International Statistical Review 83 (2015), 1, pp. 17-35.

Bemühungen in dieser Richtung wurden eben bislang deutscherseits fast ausnahmslos ignoriert.“[10]

Bevor 1920 mit Richard von Mises (1883-1953) ein weiterer herausragender Mathematiker an die Berliner Universität berufen wurde, hielt L. v. Bortkiewicz auch Vorlesungen zur Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Probleme der Statistik. 1917 erschien sein Buch „Die Iterationen. Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie.“[11] Es umfaßte 205 Seiten, aber er verwies nur auf einer Seite auf die von ihm verwendete Literatur, insgesamt nannte er nur 12 Werke, darunter 3 Arbeiten des heute kaum noch bekannten Philosophie- und Psychologieprofessors Karl Marbe (1869-1953), den er ausführlich kritisierte[12], allein das ganze 6. Kapitel war dieser Auseinandersetzung gewidmet.

Bemerkenswert waren seine Anforderungen an die Leser, einerseits behandle sein Buch elementare Dinge und so setze er beim Leser (nur) die „Beherrschung der niederen Algebra“ voraus und (sic) „lediglich noch die Vertrautheit mit den Anfangsgründen der Wahrscheinlichkeitstheorie“ (Vorrede S. III). Dies dürfte 1917 jedoch ein strenge Voraussetzung gewesen sein.

Als wesentlicher Bestandteil der Wahscheinlichkeitstheorie galt für L. v. Bortkiewicz die „Lehre von den Ergebnissen wiederholter Versuche“ (ebd.), und die Wiederholungen eines bestimmten Erfolges nannte er „Iterationen“. Er verwies ausdrücklich auf Heinrich Bruns (1848-1919), den Mathematiker und Astronomen, der die wahrscheinlichkeitstheoretische Forschung betreibe und die Iterationen als „Sequenzen“ bezeichne, der sich aber - im Unterschied zu L. v. Bortkiewicz - „an den Mathematiker vom Fach“ (ebd.) wende. Die Bruns’sche Methode und seine seien kompatibel. Für den bedeutendsten Spezialisten „auf dem Gebiet der reinen und der angewandten Wahrscheinlichkeitstheorie“ hielt er den seit 1891 an der TH Wien lehrenden Mathematiker Emanuel Czuber (1851-1925), dessen Werk „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung“ (Leipzig 1902/03) er explizit angab (3. Aufl. 1914 und 2. Auflage 1910). Desweiteren nannte er die Publikation „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ von Andrej Andreevich Markov (Markoff, 1856-1922) in der deutschen Übersetzung (1912), die Arbeit von Siméon D. Poisson (1781-1840) aus dem Jahr 1837 sowie das in Russisch publizierte Buch seines Freundes Aleksandr Aleksan-

---

[10] Ladislaus von Bortkiewicz, Gutachten zum Habilitationsverfahren von Charlotte Lorenz, 17.1.1927, in: Archiv HU, Phil. Fak. 1242, Bl. 225R.

[11] Vgl. LvB (1917).

Bortkiewicz, L. von. Die Iterationen. Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin: Verlag Julius Springer, 1917.

[12] K. Marbe hatte 1899 sein Buch „Naturphilosophische Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitslehre“ publiziert und darin ebenfalls den Term „Iterationen“ verwendet; vgl. LvB (1917), Vorrede S. IV und Kapitel 6.

drovich Chuprov (Tschuprow, 1874-1926) „Studien zur Theorie der Statistik" (St. Petersburg 1910).[13]
Vor allem (und alphabetisch zuerst) nannte L. v. Bortkiewicz aber Jacob Bernoulli (1654-1705), dessen posthum erschienenes Buch „Ars Conjectandi" (Basel 1713) von ihm einen bedeutenden Platz eingeräumt bekam, denn er betonte ausdrücklich, daß er die Bezeichnung „Stochastik" von Jacob Bernoulli übernommen habe. In seinem Vorwort schrieb er:
„Was aber den Ausdruck ‚*Stochastik*' anlangt, so bedarf er keiner Rechtfertigung. Denn er findet sich - und zwar in dem von mir beigelegten Sinne - schon in *Jacob Bernoullis* ‚Ars conjectandi'." (S. X)

So definierte L. v. Bortkiewicz die Statistik: „Statistik ist nichts anderes als eine auf ‚Massenbeobachtung' und Summierung ihrer Ergebnisse beruhende Erkenntnis empirischer Vielheiten."[14] Vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitstheorie werden die betreffenden empirischen Vielheiten „unter die Herrschaft des ‚Zufalls' gestellt und wird die dadurch bedingte Unbestimmtheit und Unberechenbarkeit ... überwunden, daß man sie aus hinreichend zahlreichen Elementen bestehen oder in hinreichend großer Zahl auftreten läßt."[15] Daran anschließend definierte er Stochastik: „Die an der Wahrscheinlichkeitstheorie orientierte, somit auf das ‚Gesetz der großen Zahlen' sich gründende Betrachtung empirischer Vielheiten möge als *Stochastik* (...) bezeichnet werden."[16] Er verwies auf den griechischen Ursprung des Wortes, das zielen, mußmaßen bedeute, und er verwies auf Jacob Bernoullis Publikation von 1713. Dazu bemerkte er: „Somit bedeutet ‚Stochastik' auch für *Bernoulli* soviel wie *angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie*; nur daß er in bezug auf die in Betracht kommenden Anwendungen einen antiquierten (sic) Standpunkt vertritt."[17] Danach ist Stochastik „Wahrscheinlichkeitstheorie in ihrer Anwendung" bzw. angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie, und diese kann mit der mathematischen, „der wahrscheinlichkeitstheoretisch fundierten" Statistik zusammenfallen.[18] Erst diese „mit der stochastischen Auffassungsweise" durchdrungene

---

[13] Alle Angaben in „Verzeichnis der beim Zitieren gebrauchten Abkürzungen (sic)", in: LvB (1917), ohne Seitenzahl. Zu Chuprov und der Freundschaft mit LvB vgl. Sheynin (1996, 2005).
Sheynin, Oscar. A. A. Chuprov: Life, Work, Correspondence. Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht, 1996 (Reihe Angewandte Statistik und Ökonometrie, Heft 38) (Transl. from the publ., Moscow 1990 (in Russian), by O. Sheynin) - Sheynin, Oscar. V. I. Bortkevich, A . A. Chuprov. Perepicka (1895-1926) (in Russian) Sostavitel' O. B. Sheynin. (Correspondence, compiled by O. B. Sheynin) Berlin 2005.
[14] LvB (1917), S. 1.
[15] LvB (1917), S. 3.
[16] Ebenda, kursiv im Original.
[17] Ebenda, Fußnote 2, S. 3, kursiv im Original.
[18] Ebenda, Fußnote 3, S. 3.

Statistik gewinne dadurch „einen höheren theoretischen Wert“ und „auch eine größere praktische Bedeutung“.[19]

Das Buch von L. v. Bortkiewicz, 1917 erschienen, ist für heutige Leser eine interessante Primärquelle, aber die von ihm eingeführten Bezeichnungen, z. B. „Sytagmatik“ und „Sylleptik“, erschweren den Zugang zu seinem Werk. Für unsere Fragestellung nach der Begriffsgeschichte von „Statistik“ und „Stochastik“ bildete das Buch „Die Iterationen“ gleichsam den Anfangs- und den Schlußpunkt dieser Begriffsgeschichte. In der Publikation von 1917 wird an die Einführung des Begriffes Stochastik durch Jacob Bernoulli (publiziert 1713) erinnert und das Verhältnis der Begriffe Stochastik und Statistik zueinander bestimmt. In gewisser Weise hat sich an der Verschränkung der beiden Begriffe in den letzten 100 Jahren wenig geändert. Aber zu den von L. v. Bortkiewicz genannten „empirischen Vielheiten“ sind neue hinzugekommen, darunter ökonomische und finanzmathematische. Diese Entwicklung einer „mathematisierten Ökonomie“ spiegelt sich in den Eigenbeschreibungen der Lehrstühle und Institute an deutschen und österreichischen Universitäten und TU anschaulich wider.
Diese Entwicklung führte auch dazu, daß der Mathematiker Emil Julius Gumbel (1891-1966) mit der nach ihm benannten Verteilung (Gumbel distribution) nicht mehr nur unter Mathematikern, Hydrologen und Meteorologen bekannt ist und tradiert wird sondern auch unter Wirtschafts- und Finanzmathematikern. Gumbels Forschungen zur Extremwerttheorie wurden in jenen Jahren von L. v. Bortkiewicz angeregt, als dieser an seinem Buch „Iterationen“ arbeitete und der junge Dr. Gumbel an seinen Seminaren teilnahm.[20] E. J. Gumbel verfaßte sowohl einen berührenden Nachruf auf seinen akademischen Lehrer als auch einen Beitrag für die „International Encyclopedia of the Social Sciences“, der posthum erschien.[21] Er hatte immer betont, daß er die Anregungen für seine Beschäftigung mit der Extremwerttheorie L. v. Bortkiewicz verdankte.

[19] LvB (1917), S. 3.

[20] Vgl. die Anwesenheitsliste im Seminar, „Statistisches Konservatorium“, im WS 1915/16, in: Archive Uppsala, Bortkiewicz Papers, box 36; abgedruckt in Härdle/Vogt (2015), figure 3, p. 22.

[21] Vgl. Gumbel (1931, 1968).
Gumbel, E. J. Nachruf auf Ladislaus von Bortkiewicz. In: Deutsches statistisches Zentralblatt, Bd. 23, No. 8 (1931), Spalten 231-236 (Bibliographie der Werke von LvB, Spalten 233-236).
- Gumbel, E. J. Bortkiewicz, Ladislaus von. In: International Encyclopedia of the Social Sciences 2, New York, 1968, pp. 128-131 (Bibliography of LvB, pp. 130-131).

“Quarta pars terrae” und “Novus mundus” --- Wer erfand Amerika und wer entdeckte die Projektion?

Harald Gropp

d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

1. Abstract

This short selection of remarks, tables, and citations is meant to be an aid for the participants of the Miesenbach meeting in May in order to follow my talk. The language of my talk and of the final paper is not yet decided. The rest of these remarks here, however, will be given in German.

2. Einleitung

Es handelt sich um einige Bemerkungen zur Geschichte der Kartographie und auch zur Geschichte der Entdeckungen in der Zeit um 1500, auch als Beitrag zur Geschichte der Mathematik.

Dabei werden hier nur einige Mosaiksteine geschildert werden können aus dem großen Geschehen vor 500 Jahren. Wurden Amerika und die Projektion entdeckt oder erfunden? Der Fokus wird liegen auf Martin Hylacomylus (1507), Friedrich Peypus (1524) und Lorenz Fries (1525) und natürlich den davor- und dazwischenliegenden Entdeckungen vor allem der Portugiesen und Spanier. Begleiten werden uns auf dieser Reise über Meere und auf Karten zwei kritische Betrachter, die vor 200 Jahren (Alexander von Humboldt) und vor 100 Jahren (Stefan Zweig) lebten. Da es in unserer Tagung um Taufpaten und Namen für Begriffe gehen soll, werden hier vor allem die Begriffe der „vierte Teil der Erde“, eine „neue Welt“ und die „andere Hemisphäre“ thematisiert werden. Vor etwas mehr als 500 Jahren war den meisten Europäern höchstens ein Viertel der Erde bekannt, nämlich die nördliche Hemisphäre der alten Welt, die drei Kontinente Europa, Asien und Afrika nördlich des Äquator. Die Portugiesen erreichen den Äquator erst 1473.

„Navigare necesse est. Im Anfang war das Gewürz“, „Amerika braucht sich seines Taufnamens nicht zu schämen“(Stefan Zweig).

3. Entdeckungsgeschichte 1 – Cabral war nicht der Erste

Die Reisen der Wikinger und wahrscheinlich vieler anderer vor 1492 werden hier nicht aufgeführt. Allein schon die Darstellung von „noch nicht erforschten Gebieten“ auf europäischen Karten lässt aber den Schluss zu, dass unsere Kenntnis der frühen Entdeckungsreisen noch lückenhaft ist.

Verträge zwischen Spanien (Kastilien) und Portugal : (1493 Papst und Spanien, Bulle Inter Caetera), 1494 Tordesillas (22°W von Cabo Verde), 1524 Badajoz - Elvas (Verhandlungen), 1529 Zaragoza. Wo ist der anti raya, der Antimeridian von Tordesillas?

„Entdeckung Südamerikas“: Vorgeschichte?, Duarte Pacheco Pereira(?), Amerigo Vespucci(?), Vicente Yáñez Pinzón(?), Pedro Álvarez Cabral(!)

Cristóbal Colón, 14.8.02 Honduras; seine 4 Reisen Aug.92-März93/Sept.93-Juni96/Mai98-Nov.00/Mai 1502-Nov.1504

4. Amerigo Vespucci (1451 Firenze, 1512 Sevilla)

Amerigo Vespucci: 1491 nach Sevilla als Banker, 1508 Piloto mayor in Sevilla

Reisen von Vespucci: Mai 97 bis Okt. 98 (nicht allgemein akzeptiert?), Mai 99 bis Sept. 00, unter de Hojeda (E), mit de la Cosa; Mai 01 bis Sept. 02 unter Coelho(P), bis 50°S (dabei 1.1.1502 Rio de Janeiro), Mai 03 bis Juni 04 für P (?)

Mundus Novus (ital. 1502 Brief an Lorenzo Pietro di Medici, ist verloren; 1503 Paris, lat., dann übersetzt in deutsch, franz., ndl., ital.):*Therefore, as I have said from Lisbon whence we started, which is thirty-nine and a half degrees distant from the equator, we sailed beyond the equator through fifty degrees, which added together make about ninety degrees, which total inasmuch as it makes the fourth part of a great circle according to the true system of measurement transmitted to us by our ancients, it is evident that we sailed over a fourth part of the world.“*

Toby Lester (2010): The fourth part of the world, niederländisch: Het vierde werelddeel, deutsch: Der vierte Kontinent.

„mundus novus”: andere Sterne, kein Indien, China, Japan

„The Antarctic pole is not figured with a Great and a Little Bear as this Arctic pole of ours is seen to be, nor is any bright star to be seen near it”

“In that hemisphere I saw things incompatible with the opinions of philosophers”

5. Martin Hylacomylus (ca. 1472 Wolfenweiler, 1520 Saint-Dié)

Herzog René von Lothringen, Sizilien und Jerusalem unterstützt in St.-Dié eine Forschergruppe.

Ptolemäustradition: 1 Weltkarte und 26 Regionalkarten, später tabulae modernae zusätzlich, 1513, 1520 (47 Karten), 1522 (50 Karten). Waldseemüller (=Waltzemüller= Hylacomylus) und Matthias Ringmann (1482-1511):

25.4.1507 Editio princeps, 1513 Ptolemäus, 1516 Carta marina (ohne Text)

1507: Cosmographiae Introductio: 9 Kapitel, Quatuor Americi Vesputii Navigationes (frz.->lat. von Jean Basin de Sandaucourt), 2 Widmungen an Kaiser Maximilian von Ringmann (Buch und Karte) und Waldseemüller (Karte und Globus), Waldseemüller-Karte (von 1000 Exemplaren heute 1 bekannt, 2003 nach USA verkauft, gefunden auf Schloss Wolfegg 1900 von Joseph Fischer S.J. aus Feldkirch, Facsimile 1907 von Fr. von Wieser), Waldseemüller-Globus.

6. Das Jahr 1516

Wir könnten fast jedes Jahr ein 500jähriges Jubiläum feiern in diesen Jahren, in diesem Jahr 2016 Carta Marina (1516) von Waldseemüller.

Politische Geschichte: Ferdinand von Aragon stirbt am 23.1.1516. Der Enkel Carlos (1500-1558) wird spanischer König, 1519 König des Reiches (nach dem Tod des anderen Grossvaters Maximilian, 1530 Kaiser). Endgültige Verbindung von Spanien mit Habsburg.

7. Entdeckungsgeschichte 2 – Karibik und Golf von Mexiko

Zunächst beherrschen die Spanier nur einige Inseln, dann 1513 mit Ponce de Leon und 1519 mit Alonso Álvarez de Pineda Erkundung der Küste von Florida bis Yucatán, vor allem Eroberung des Aztekenreichs durch Cortés

8. Hernán Cortés (1485 Medellin (Spanien), 1547)

16.8.1519-13.8.1521 Eroberung von Tenochtitlan

Briefe Cortés an Carlos, König von Spanien: 10.7.19 Veracruz; 30.10.20 (6.11.22 Sevilla), 15.5.22 (30.3.23 Sevilla), 15.10.24 aus Tenochtitlan

2. Brief (1522 Sevilla, spanisch; März 1524 Nürnberg, lat.; 1525 Venezia, ital.)

9. Friedrich Peypus (1485 Herrnstadt, ca. 1535 Nürnberg)

Buchdrucker und Buchladenbesitzer in Nürnberg, unterstützte schon seit 1518 „illegal“ die Reformation durch Druckschriften. 1524: Praeclara de Nova maris Oceani Hyspania Narratio …, including a map of the Aztec capital and the Gulf of Mexico.

“The splendid narrative of Ferdinand Cortes about the New Spain of the Ocean Sea, transmitted to the most sacred and invincible, always august Charles, Emperor of the Romans, King of the Spaniards, in the year of the Lord 1520,… above all about the famous city of Temixtitan and its diverse wonders, which will wondrously please the reader.”

10. Entdeckungsgeschichte 3 – Die Erkundung des Pazifiks – (und der wirkliche erste Weltumsegler)

1513 Balboa (Panama) (E), 1511 Malacca (Malaysia) (P), 1513 Moluccas (Magellan) (P), 1519-1522 Reise (siehe unten, del Cano zurück Okt. 1522 (E)

Verhandlungen in Badajoz: anti raya 3°W von Molukken, 1529 Zaragoza: 17°O von Molukken

11. Fernão de Magalhães (1480 Sabrosa,1521 Mactan)

20.9.1519 Sevilla, 29.11. Brasilien, 13.-27.12. Rio, 10.1.1520 Rio de la Plata, 27.11. Pazifik, 6.3.1521 Marianen, Guam, 31.3. Philippinen, 27.4. Tod von Magellan auf Mactan (Phil), Dez. 1521 bis Feb. 1522 Timor, erst Versuch zurück nach Panama, dann doch um Afrika, 11.6.1522 Cabo Verde Inseln, 8.9.1522 Sevilla, Okt. 1522 del Cano in Valladolid.

Quellen: Max. Transylvanus, De Moluccis Insulis (1523, Interviews von Seeleuten), Pigafetta (1525) als „Überlebender“.

12. Lorenz Fries (ca. 1490, ca. 1532)

Nach Tod von Ringmann und Waldseemüller erst wieder 1522 Ptolemäus-Ausgabe in Strassburg durch Lorenz Fries (Arzt aus Metz), Fries 1519 bis ca. 11.5.1525 in Strassburg, geht wegen Reformation als Arzt und Astrologe nach Metz. Fries publiziert 1525 eine weitere Ptolemäus-Edition mit 50 Karten.

TABULA MODERNA ALTERIUS HEMISPHAERII, nr.51, 37 cm x 52 cm, von Lorenz Fries, 1525, nie gedruckt, erst wieder aufgetaucht 2009 auf einer Auktion, publ. von Frederik Muller (2011), erste Karte des Pazifik in einer Ptolemäusausgabe, fast 500 Jahre verschollen und unbekannt, u.a. Messico (zum ersten Mal), Terra Vespucii (für Tierra del Fuego), Insel Solol (Japan-Zipangu fehlt). vergleichbar Tabula tartarie (Auktion Mai 2010).

Innerhalb von 18 Jahren war nun auch die andere Hemisphäre entdeckt oder erfunden, die „westliche“ oder die „spanische“ oder die „aquatische“.

13. Noch einige Ideen am Ende

Alexander von Humboldt, “el segundo descubridor de America” und “the inventor of nature” (according to a book (2015) by Andrea Wulf, 2016 auch in deutsch “Die Erfindung der Natur, die Abenteuer des Alexander von Humboldt, der verlorene Held der Wissenschaft”)

“Sólo lo que se idea es lo que se ve; pero lo que se idea es lo que se inventa” (Martin Heidegger, 1954,auf spanisch).

“El historiador que descubrió la ‘invención’ de América”

Round-Trip of an Algorithm

Rita Meyer-Spasche,
Max Planck Institute for Plasma Physics, Boltzmannstr. 2
85748 Garching, Germany; meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de

Abstract In this article we will discuss the development of an algorithm which is today best known in Numerical Analysis under the name *Inverse Iteration*, for the computation of one eigenvalue of a general complex matrix. It was invented, however, by engineers for the stability analysis of mechanical structures, i.e. for the computation of that eigenvalue of a two-point boundary value problem at which instability occurs. In later years, when the stability analysis of plasma configurations became important which are governed by quasilinear partial differential equations, the matrix method was adapted to these boundary value problems, probably without knowledge about its origin at ordinary boundary value problems. It thus performed a round-trip *boundary value problems - matrices - boundary value problems* within ca 80 years. During these approximately 80 years - from 1893 to 1970/1977 - computational methods were dramatically improved. This, of course, is also true for the treatment of boundary value problems accompanying the application of the algorithm.

Zusammenfassung: In diesem Artikel wird die Entwicklung eines Algorithmus diskutiert, der heute vor allem unter dem Namen *Inverse Iteration* in der Numerik bekannt ist, zur Berechnung eines Eigenwertes einer beliebigen komplexen Matrix. Er wurde jedoch von Ingenieuren zur Stabilitätsanalyse von mechanischen Strukturen erfunden, d.h. zur Berechnung desjenigen Eigenwertes eines zwei-Punkt-Randwertproblems, bei dem Instabilität auftritt. Später, als die Stabilitätsanalyse von Plasmakonfigurationen wichtig wurde, die durch quasilineare partielle Differentialgleichungen beschrieben werden, wurde die für Matrizen übliche Methode auf diese Randwertprobleme verallgemeinert: vermutlich ohne Wissen um die Ursprünge dieser Methode für Randwertprobleme. Der Algorithmus machte also eine Rundreise *Randwertprobleme - Matrizen - Randwertprobleme* in ca 80 Jahren. In diesen etwa 80 Jahren – von 1893 bis 1970/1977 – wurden numerische Methoden dramatisch verbessert. Dies gilt natürlich auch für die numerische Behandlung von Randwertproblemen, die die Anwendung des Algorithmus begleitet hat.

1 Introduction

In a recent article this author wrote:

> We will not discuss here historical differences of names in dependence on scientific discipline or country. [...] We will also not discuss here the round-trip of an algorithm which changed its name when used in different mathematical applications – this case will be treated elsewhere [MSp16b].

Considering the examples (Gauss elimination, Hopf bifurcation, Zorn's lemma) treated in that article, there seems to be general international and interdisciplinary agreement about their names today. Here we will look at the round-trip of the algorithm and see a very different picture. We will observe a number of changes of names: *Engesser method, Vianello method, Stodola method, Engesser-Vianello method*, *Stodola-Vianello method*; *Iterationsverfahren, Vektoriteration, von-Mises-Iteration, Power method*; *Gebrochene Iteration, Inverse Iteration*; *Continuation method, Fortsetzungsverfahren.* Many of these names are still in use today.

In passing, we will also observe that the use of the terms Eigenwert – charakteristische Zahl and Eigenlösung – Eigenvektor got changed during the same years.

During the approximately 80 years of this development - from 1893 to 1970/1977 - computational methods were dramatically improved [MSp16a]. This, of course, is also true for the numerical treatment of boundary value problems accompanying the application of the algorithm. For easier reading we discuss the various versions of the algorithm in a unified language, using the terms of today.

2 Engesser/Stodola/Vianello Method

It is well known, at least to engineers and architects, that mechanical structures bend, buckle or break if they are overloaded. This can even be caused by their own weight if their shape is inappropriate. Already in 1744 *Leonhard Euler (1707-1783)* gave a formula for the *critical load* of a rod as a function of the mechanical properties of the rod, i.e. for the maximum load that does not cause buckling. This is known as *Euler's Buckling Formula* [Gau08, p.22]. In German, the critical load for a rod is called *Euler'sche Knicklast.*

Around 1900 it became very important for engineers and architects to compute in an efficient way the critical loads of the structures they designed. Mathematically speaking, the simplest case consists in computing the smallest eigenvalue of the parameter-dependent ordinary boundary value problem

$$y'' = -\frac{P}{EJ_x} y \qquad \text{with 2 given boundary conditions.} \tag{1}$$

In 1893 the engineer *Friedrich Engesser* published the following method [Eng93]: guess the buckled shape $y_0(x)$ by engineer's intuition and solve a short sequence of linear boundary value problems

$$y''_{\nu+1} = -\frac{P}{EJ_x} y_\nu, \qquad \text{with 2 given boundary conditions,} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

2

with known r.h.sides $y_\nu(x)$. If $y_0(x)$ is a good guess, only very few iterations will be needed to find the solution $y(x) = y_{\nu+1}(x)$. How much $\mu = y_\nu(x)/y_{\nu+1}(x)$ depends on x is a measure for the quality of the solution.

In 1898 the engineer *Luigi Vianello* published [Via98] essentially the same iteration scheme, with a different, a graphical, integration method for the linear boundary value problems (2). Probably in 1903 *Aurel Stodola* published a similar iteration scheme, combined with a graphical method, for solving the free vibration problem of a rotating shaft, i.e. for computing an eigenvalue (a critical rotational frequency) for a 4th order ordinary boundary value problem:

> A similar method was used by Vianello to solve buckling problems, and Delaporte describes a related method in "Revue de mécanique" 1903, vol III, p. 517 [Sto24, p. 381ff]. [1]

The first edition of Stodola's book appeared in 1903.

This iteration method was also applied to other engineering problems involving ordinary eigenvalue problems, and several authors investigated its convergence properties, sometimes calling it Vianello's method, sometimes Stodola's method [Poh21, Ko27]. Since all three authors were important personalities and wrote important text books on different problems in structural mechanics [Eng92, Via05, Sto24], all three were cited as inventors of the method.

Friedrich Engesser (1848-1931) was professor at Technische Hochschule Karlsruhe (Karlsruhe Institute of Technology). *Aurel Stodola (1859-1942)* was professor at ETH Zürich. *Luigi Vianello (1862-1907)* was born near Venice. His place of birth belonged to the Austrian-Hungarian Empire at the time of his birth. He studied engineering in Northern Italy and then took jobs with German companies. Most of the time he worked with *Siemens & Halske* on the construction of railways. He was concerned with the construction of the S-Bahn in Berlin (particularly with 'Gleisdreieck') and with the Schwebebahn in Wuppertal.

Today, the names *Engesser-Vianello method* and *Stodola-Vianello method* seem to dominate among structural engineers. In 1955 Kollbrunner and Meister commented on this: Engesser invented the method, Vianello made it popular [KoM55, p.31].

3 From 'Vianello's Method' to 'Inverse Iteration'

This part of the development lasted from 1929 until ca 1950.

3.1 Vianello's Method – Iterationsverfahren – Power Method

In part 2 of their paper *Praktische Verfahren zur Gleichungsauflösung* [MPG29-2], *Richard von Mises (1883-1953)* and *Hilda Pollaczek-Geiringer (1893-1973)* discussed in 1929 the application of Vianello's method to symmetric real $n \times n$ matrices A. They proved convergence in the case of these matrices and remarked that their proof

[1] Citations in English of sentences from publications in German were translated by the present author.

is analogous to the proof by Koch and more or less also to the proof by Pohlhausen [Ko27, Poh21], though Pohlhausen treated a generalised matrix eigenvalue problem $Bx = \lambda Ax$, with special non-singular real $n \times n$ matrices A and B.

v.Mises/Pollaczek-Geiringer considered the vector iterations

$$z^{\nu+1} = \mu^\nu A z^\nu, \qquad A = A^t, \quad z^o \text{ and all } \mu^\nu \text{ given}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

which converge to the eigenvalue λ of smallest modulus and the associated eigenvector *(Eigenlösung - eigensolution)* of

$$x = \lambda A x, \qquad \text{i.e.} \quad \lambda^{-1} x = Ax, \tag{4}$$

if that eigenvalue is positive and simple (i.e. has multiplicity one) and if there is no negative eigenvalue with the same modulus (their Theorem 11). Then they considered more complicated cases: higher multiplicity of the eigenvalue with smallest modulus; positive as well as negative eigenvalues of smallest modulus; and also, how to compute higher eigenpairs (λ, x) if those of smaller modulus are known.

Also, they give an example how to compute the smallest eigenvalue of a self-adjoint two-point boundary value problem[2]

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda k(x) y(x) = 0, \qquad y(a) = y(b) = 0, \tag{5}$$

combining discretization by the Ritz method with their *Iterationsverfahren*, i.e. with the iterations (3) on the discrete system.

In the following years, this 'Iterationsverfahren' for solving the matrix eigenvalue problem was considered and further developed by several authors, always giving the v.Mises/Pollaczek-Geiringer paper as reference.

In his important, much read book of 1950 on matrices, *Zurmühl (1904-1966)* called the solutions (λ, x) of equation (4) eigenvalues and eigenvectors *(Eigenvektoren)*, and the solutions (μ, x), $\mu = 1/\lambda$, of

$$Ax = \mu x \tag{6}$$

characteristic numbers *(charakteristische Zahlen)* and eigenvectors [Zu50, p.285ff], probably following the already existing convention about eigenvalues of differential equations and characteristic values of the equivalent integral equations. Today, we call the μs the eigenvalues of matrix A, and the λs the eigenvalues of A^{-1}. We will not investigate here when and by whom these changes of names were introduced.

Zurmühl considered the iteration

$$z^{\nu+1} = A z^\nu, \qquad z^o \text{ given}, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{7}$$

or rather

$$z_*^\nu = \frac{1}{z_j^\nu} z^\nu, \qquad z^o \text{ given}, \qquad j = 1, \dots, n \tag{8}$$

$$z^{\nu+1} = A z_*^\nu, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, \dots, \tag{9}$$

[2] In this case all eigenvalues are positive, and the smallest eigenvalue is always simple.

4

where the z_j^ν are the components of z^ν, for solving

$$\mu x = Ax, \qquad \text{i.e.} \qquad x = \mu^{-1} Ax. \tag{10}$$

This is a considerable simplification of the Iterationsverfahren by v.Mises/Pollaczek-Geiringer, though the division by the components z_j^ν in eq. (8) might lead to division by zero. It thus got soon replaced by a division by some norm $||z^\nu||$.

3.2 The Basic Idea of a Proof of Convergence

Assume that the non-singular real $n \times n$ matrix A is symmetric, i.e. $A \in I\!R^{n\times n},\ A = A^t$. Then there exist n real numbers $\mu_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ and n vectors $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I\!R^n$ which are pairwise linearly independent and perpendicular, i.e. $x_i \perp x_j$ for $i \neq j$, which satisfy

$$\mu_i x_i = Ax_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Assume that $\mu_1 \gg \mu_2 \geq \mu_3 \ldots \geq \mu_n > 0$.
Now *let* $z^o \in I\!R^n,\ z^o \neq 0$ be given. Then there exist coefficients $c_i \in I\!R$ such that

$$z^o = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n,$$

and thus

$$\begin{aligned} z^1 &= Az^o = \mu_1 c_1 x_1 + \mu_2 c_2 x_2 + \ldots + \mu_n c_n x_n, \\ &= Az^o = \mu_1 \left(c_1 x_1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} c_2 x_2 + \ldots + \frac{\mu_n}{\mu_1} c_n x_n \right), \\ z^\nu &= A^\nu z^o = (\mu_1)^\nu \left(c_1 x_1 + (\frac{\mu_2}{\mu_1})^\nu c_2 x_2 + \ldots + (\frac{\mu_n}{\mu_1})^\nu c_n x_n \right), \qquad \nu = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{11}$$

Since $(\mu_i/\mu_1)^\nu$ tend to zero for $i = 2, \ldots, n$ and $\nu \to \infty$, we see that non-zero $z_i^{\nu+1}/z_i^\nu$ converge to μ_1 for $i = 1, \ldots, n$, and that the z^ν are parallel to x_1 for large enough ν.

Now it is obvious that the convergence behavior is changed very much if μ_1 is not positive, simple and dominant. Assume, for instance, that the eigenvalue with largest modulus is negative: then we see from equations (11) that the sequence $\{z^\nu\}_{\nu=o}^\infty$ is alternating. More complicated are the cases $\mu_1 = \mu_2$ or $\mu_1 \approx \mu_2$ or $\mu_n = -\mu_1 < 0$ or $\ldots$. Even much more complicated patterns are produced by the iterations if the matrix A is real but not symmetric. In that case eigenvalues and eigenvectors may be complex, and real iterations produce real results that are hardly understandable without looking at them in the framework of complex numbers. A very complete, very impressive analysis of all different cases that are possible for non-symmetric matrices was published by *Helmut Wielandt (1910-2001)* [Wie44a] in 1944 (sic!).

Today, a variety of other methods for computing eigenvalues is available. Thus using this elementary iteration scheme does make sense only if it is known in advance that $\mu_1 \gg \mu_i > 0,\ i = 2, \ldots, n$ and if only (μ_1, x_1) are needed. In such cases, this iteration method (called *Power Method, Power Iteration - Potenzmethode* today) is quite efficient.

3.3 Further Development of Names and Methods

As already mentioned, the name first used for the application of this iterative method to matrices was *Iterationsverfahren* [Wie44a, Zu50]. In later years, the names *von-Mises-Iteration*[3] and *Vektoriteration* became common in the German numerical-analysis community, see various textbooks in German, particularly editions 2-4 of Zurmühl's book. In the 5th edition in 1986, the co-author Sigurd Falk of the late Rudolf Zurmühl used the name *Potenziteration nach von Mises* [Zu50]. Each of the seven editions of that book was a revised and enlarged version of the previous one, so the historical development may be observed more closely by comparing the various editions. In English, the names *Power Method* (numerical analysis) and *Power Iterations* (Markov chains) became common, and that probably led to the names *Potenzmethode* and *Potenziteration*.

The changes of the names of the algorithm is only a side-effect and indicates that the computation of eigenpairs is an important problem in many applications. Thus it is not surprizing that the power method was a germ for a rich family of algorithms which are taylored for different patterns of spectra. Already in 1944 (sic!) Helmut Wielandt introduced an algorithm which he called *Gebrochene Iteration* [Wie44b], today mostly called *Inverse Iteration*, both in German and in English. This is essentially the power method applied to the inverse of the matrix. It turns out that this reformulation has big advantages, see subsection 3.4 and the review article by Kerner [Ke89].

Algorithms adapted to matrices with eigenvalues and eigenvectors which are difficult to separate are for instance *Krylov subspace iterations*, *Lanczos iterations* and the *Arnoldi method*. With these methods, the difficult task of separating clustering eigenvalues and their eigenvectors is replaced by computing the subspaces spanned by those eigenvectors, and the sets of the related eigenvalues. For more information, see any modern textbook on matrix computations, for instance the one by Demmel, Dongarra et al [BDD00].

3.4 Gebrochene Iteration – Inverse Iteration

As we have seen in subsection 3.2, the iterations of the Power method converge in general (i.e. if all necessary assumptions are satisfied) to the eigenvalue of largest modulus, and the sequence of vectors is unbounded if $|\mu_1| > 1$. For one of the most important applications, however, for the solution of the stability problem, convergence to the eigenvalue of smallest modulus is needed. This led to the development of *Inverse Iteration*: the Power method for A^{-1}, with normalization of the iterates. As already mentioned, it was introduced by Wielandt under the name *Gebrochene Iteration* [Wie44b]. In today's formulation for real matrices:
Let $A \in I\!R^{n\times n}$ and $z^o \in I\!R^n$ be given; iterate

$$z_*^\nu \; := \; \frac{z^\nu}{||z^\nu||},$$

[3] This is an example both for the *Matthew-Effect*: 'The more famous person in a group gets all the credit' [Mer68] and of the *Mathilda-Effect*: 'Women are more often not mentioned for their achievements than men' [Ros93].

$$Az^{\nu+1} = z_*^\nu, \qquad \mu^{\nu+1} = \frac{(z^{\nu+1})^t A z^{\nu+1}}{(z^{\nu+1})^t z^{\nu+1}}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

for solving

$$Ax = \mu x, \qquad |\mu| < |\mu_i|, \; i = 2, \ldots n \tag{13}$$

Its big advantage over the power method: if a first guess $\tilde{\mu}$ for the desired eigenvalue μ is known, A may be replaced by the shifted matrix $B = A - \tilde{\mu}E$, where E is the identity matrix. Thus B is nearly singular, and the largest eigenvalue of B^{-1} is huge in comparison to all other eigenvalues. Thus convergence is very fast.

4 Inverse Iteration on Partial Differential Equations

Using a physicists intuition, Lackner [La70] generalized Inverse Iteration for application to nonlinear eigenvalue problems of type

$$Lu = \alpha f(u) \text{ in } D \subset I\!R^2, \qquad u|_{\partial D} = g, \tag{14}$$

where L are a linear differential operator and f a nonlinear operator $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ some Banach function space. A simple model problem was

$$-\Delta u = \lambda e^u \text{ in } D \subset I\!R^2, \qquad u|_{\partial D} = 0. \tag{15}$$

The equations depend on several parameters which are not shown here. Treatment of these parameters was a problem: it was not clear which ones should be fixed and which ones should be left free to obtain a formulation that made sense both mathematically and physically and led to convergence of the iterations [La70, p.3184], [HL75, p.141]: such equations may have any number of solutions, depending on outer and inner parameters [MSp81, MSp99].

In the case of eq. (15) Hagenow-Lackner got satisfactory results with:
$M, \alpha^o \in I\!R$, $g, u_*^o \in \mathcal{B}$ given, $||u_*^o|| = M$, iterate

$$Lu^{\nu+1} = \alpha^\nu f(u_*^\nu), \qquad u^{\nu+1}|_{\partial D} = g, \tag{16}$$

$$u_*^{\nu+1} := u^{\nu+1}\frac{M}{||u^{\nu+1}||}, \qquad \alpha^{\nu+1} = \alpha^\nu \frac{M}{||u^{\nu+1}||}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

5 Continuation Method

All uncertainties about the treatment of parameters in the iterations were eliminated in a paper by *Herbert B. Keller (1925-2008)* [Ke77]:
Let $\mathcal{B}$ be a Banach space as before, rewrite

$$Lu = \lambda f(u) \text{ in } D \subset I\!R^2, \qquad u|_{\partial D} = g, \tag{18}$$

as $G(u, \lambda) = 0$. Introduce an additional condition on the solutions $N(u, \lambda)$. Make sure that system is solvable by introducing an additional parameter s:

$$G(u(s), \lambda(s)) = 0, \qquad N(u, \lambda, s) = 0. \tag{19}$$

$N(u, \lambda, s) = ||u|| - s$: This is the normalization of eqs. (17) with $s = M$.

$$N(u, \lambda, s) = ||du/ds||^2 + |d\lambda/ds|^2 \tag{20}$$

This condition defines arclength of the solution branch $(u(s), \lambda(s))$ if certain assumptions on eqs. (19) are satisfied. In the existence theorems for solutions of eqs. (19) [Ke77], the norm N is defined according to (20). In practical computations, a numerical approximation to arclength is much more convenient [Ke77, MK80]. The method was applied successfully to various parameter-dependent systems of partial differential equations, see for instance the very involved solution branches displayed in [MSp99], and the references therein.

6 Acknowledgement

The author is very grateful to all who improved this work by their criticism, questions and remarks, and to Christa Binder and Peter Schmitt for organizing the meeting and these proceedings.

References

[BDD00] Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe and H. van der Vorst (eds): *Templates for the solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide*, SIAM, Philadelphia, 2000

[Eng93] Engesser, Friedrich (1893): Über die Berechnung auf Knickfestigkeit beanspruchter Stäbe aus Schweiß- und Guß-Eisen, Z. öst. Ing.- und Archit.-Ver. (1893), Heft 38, S. 506

[Eng92] Engesser, Friedrich (1892-93): Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. Teil 1 1892, Teil 2 1893, Springer Verlag Berlin, Heidelberg GmbH

[Gau08] Gautschi, Walter (2008): Leonhard Euler: His Life, the Man, and His Works, SIAM REVIEW vol. 50, No. 1, pp. 3-33

[HL75] Hagenow, Karl-Ulrich von, Lackner, Karl (1975): Computation of Axisymmetric MHD equilibria. *Proceedings of the Seventh Conference on Numerical Simulation of Plasmas*, Courant Institute, New York University, June 2-4, 1975

[Ke77] Keller, Herbert B. (1977): Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, pp. 359-384 in: Rabinowitz, P.H., ed: *Applications of Bifurcation Theory*, Wiley, New York,N.Y., 1977

[Ke89] Kerner, Wolfgang (1989): Large-scale complex eigenvalue problems, Journal of Computational Physics 85, pp. 1-85

[Ko27] Koch, J.J.: Bestimmung höherer kritischer Drehzahlen schnell laufender Wellen, pp. 213-218 in: Meissner, Ernst (ed.): Verhandlungen des 2. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik / Comptes Rendus du 2^{ieme} Congrès Internationale de Mécanique Appliquée / Proceedings of the 2^{ND} International Congress for Applied Mechanics, Zürich 12.-17. September 1926, Orell Füssli Verlag Zürich und Leipzig, 1927

[KoM55] Kollbrunner, Curt F.; Meister, Martin (1955): *Knicken -Theorie und Berechnung von Knickstäben; Knickvorschriften*, Springer Verlag

[La70] Lackner, Karl (1970): Deformation of a magnetic dipole field by trapped particles, Journal of Geophysical Research *75*, 3180-3192

[Mer68] Merton, Robert K. (1968): The Matthew Effect in Science, *Science 149*

[MSp16a] Meyer-Spasche, Rita (2016a): Some remarks on the impact of computers on mathematics and physics, to appear in: *Vom Abakus zum Computer*, G. Wolfschmidt, ed., Proceedings of the Scriba Memorial Meeting – History of Mathematics, Hamburg, 12. - 13. Mai 2015, Nuncius Hamburgensis, Band 21, in preparation

[MSp16b] Meyer-Spasche, Rita (2016b): Hidden Authors, to appear in: *Scriba Memorial Meeting - Geschichte der Mathematik*, G. Wolfschmidt, ed., Proceedings of Tagung der Fachsektion *Geschichte der Mathematik* der *Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Sunderhof, 14.-17. Mai 2015 Nuncius Hamburgensis, Band 36, in preparation

[MSp99] Meyer-Spasche, Rita (1999): *Pattern Formation in Viscous Flows*, Birkhäuser Verlag, ISNM vol. 128, Basel, Boston, Berlin

[MSp81] Meyer-Spasche, Rita (1981): Numerical approximation of boundary value problems having several solutions, pp.97-121 in: *Metodi Matematici nella Dinamica dei Fluidi e dei Gas Ionizzati,* Seminario Fisico Matematico Trieste, Universita di Trieste

[MK80] Meyer-Spasche, Rita, Keller, Herbert B. (1980): 'Computations of the axisymmetric flow between rotating cylinders'. Journal of Computational Physics 35 (1980), 100-109

[MPG29-2] R. v. Mises, H. Pollaczek-Geiringer (1929b): Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, Teil 2, ZAMM *9*, 152-164

[Poh21] Pohlhausen, Ernst: Berechnung der Eigenschwingungen statisch-bestimmter Fachwerke, ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 1, (1921), 28-42

[Ros93] Rossiter, Margaret W. (1993): The Matthew-Matilda-Effect in Science, Sage Publ., London 23, pp. 325-341

[Sto24] Stodola, Aurel: *Dampf- und Gas-Turbinen*, 5. Auflage 1924, *Steam and Gas Turbines*, P. Smith, New York, 1945

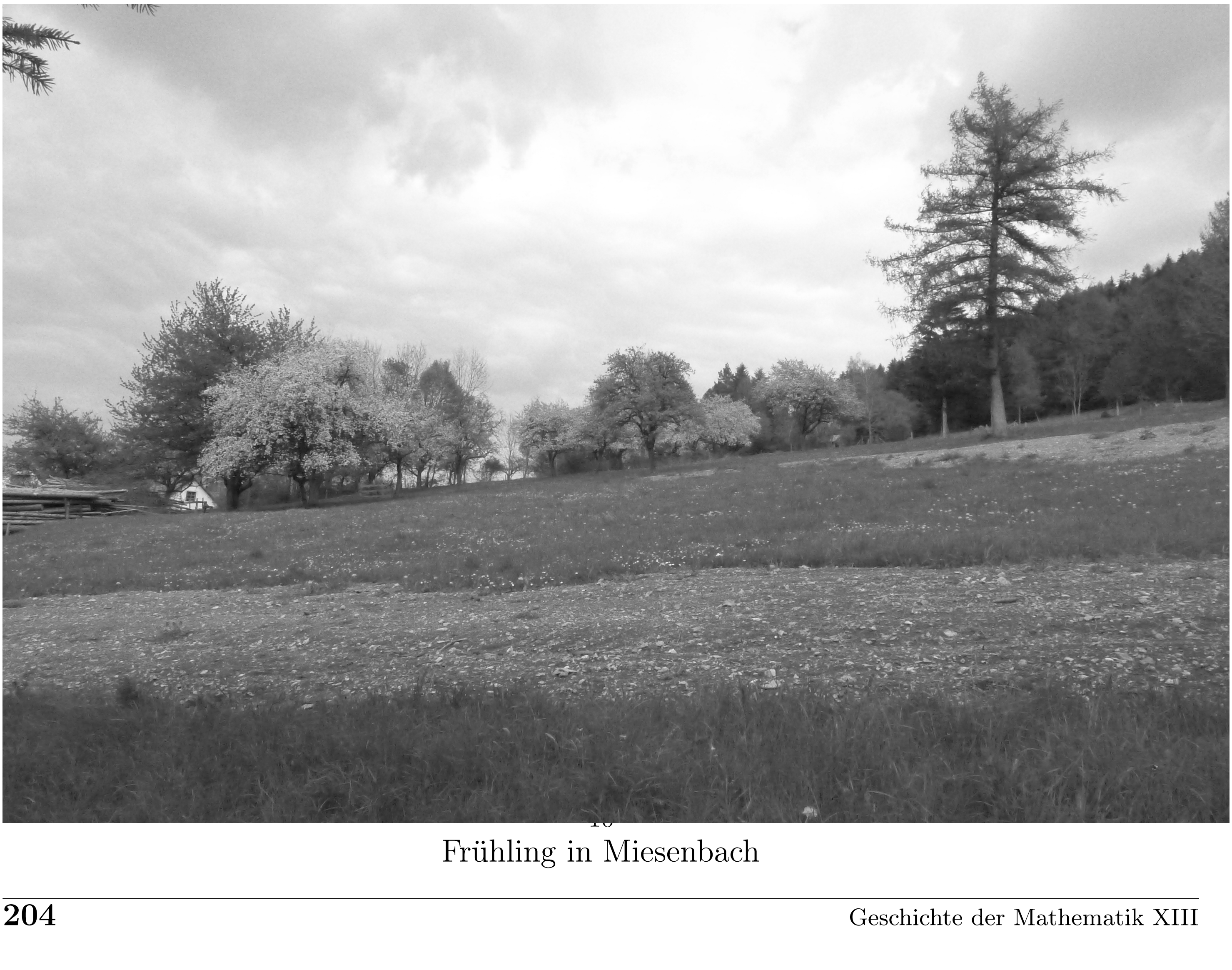
[Via05] Vianello, Luigi (1905): *Der Eisenbau*, Verlag Oldenbourg, München, mehrere Auflagen

[Via98] Vianello, Luigi: Graphische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader Stäbe, Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure vol 42, no 52 (1898), 1436-1443

[Wie44a] Wielandt, Helmut (1944a): Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten Eigenwertaufgaben. Math Z 50, p. 93-143

[Wie44b] Wielandt, Helmut (1944b): Bestimmung höherer Eigenwerte durch gebrochene Iteration, Ber. B44/J/37 der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, 11 pages

[Zu50] Zurmühl, Rudolf: *Matrizen - Eine Darstellung für Ingenieure*, Springer Verlag, 1. Aufl. 1950, 2. Aufl. 1958, 3. Aufl. 1961, 4. Aufl. 1964;
Zurmühl, Rudolf † and Falk, Sigurd: *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*, Teil 2: *Numerische Methoden*, 5., überarbeitete und erweiterte Auflage 1986, 6. Aufl. 1992, 7. Aufl. 1997



Frühling in Miesenbach

Computeralgebra ohne Computer – Über die Disssertation von Grete Hermann

Peter Ullrich
Universität Koblenz · Landau, Campus Koblenz,
Fachbereich 3: Mathematik / Naturwissenschaften, Mathematisches Institut,
Universitätsstraße 1, 56070 Koblenz, Deutschland

Mit ihrer Habilitation 1919 und ihrer Ernennung zur (nichtbeamteten) außerordentlichen Professorin 1922 in Göttingen erwarb Emmy Noether (1882–1935) auch das Recht, Promotionen zu betreuen. Als erste Person unter ihren Doktorandinnen und Doktoranden schloß Grete Hermann* (1901–1984) Anfang des Jahres 1925 ihr Verfahren ab.

Als Thema der Doktorarbeit Hermanns [8] hatte Noether die Ausarbeitung von Teilen der Dissertation von Kurt Hentzelt (gef. 1914) gestellt. Dabei ging es darum, Algorithmen anzugeben, mittels derer sich gesuchte Größen für Ideale in Polynomringen nicht nur prinzipiell bestimmen lassen – was längst bekannt war – sondern auch mit einem von vorneherein abschätzbaren Rechenaufwand. In der Einleitung ihrer Doktorarbeit formulierte Hermann sehr präzise diese Bedingung [8, S. 736–737]. Damit positionierte sie sich einerseits in Bezug auf die Herangehensweisen von Paul Gordan (1837–1912) bzw. David Hilbert (1862–1943). Andererseits nahm sie dadurch die Denkweise der Computeralgebra voraus.

Allerdings wandte sich Hermann unter dem Einfluss Leonhard Nelsons (1882–1927) danach von der Mathematik ab und stattdessen ausschließlich der Philosophie, der Physik und auch der Politik zu. So war sie von 1961 bis 1978 Leiterin der ursprünglich von Nelson begründeten und nach dem Zweiten Weltkrieg wiedergegründeten Philosophisch-Politischen Akademie. Gefördert von dieser soll 2017 beim Springer-Verlag ein Sammelband

*Für die genannte Person finden sich zahlreiche verschiedene Namensformen wie Margarethe Hermann, Grete Henry, Grete Henry-Hermann. In diesem Artikel wird durchgängig die Namensform Grete Hermann verwendet, unter der ihre Dissertation [8] erschienen ist.

erscheinen, in dem die mathematischen und naturphilosophischen Schriften HERMANNs kommentiert herausgegeben werden. Der Autor des vorliegenden Artikels ist dabei für die Kommentierung der Dissertation [8] zuständig. Da HERMANN nicht nur die erste Doktorschülerin NOETHERs ist, sondern auch einen bemerkenswerten Lebenslauf aufweist, soll im Folgenden auch auf diese Aspekte eingegangen werden.

1 Zur Vita von GRETE HERMANN

Am 2. März 1901 wurde HERMANN† als drittes von sieben Kindern einer Bremer Kaufmannsfamilie geboren. Die Bildungsaffinität und Modernität ihres Elternhauses zeigte sich dadurch, dass HERMANN das Neue Gymnasium (heute: Oberschule am Barkhof) in Bremen besuchte, zu dem Mädchen nur in Ausnahmefällen zugelassen wurden. Im Jahr 1920 legte sie dort ihre Reifeprüfung ab. Bereits im darauffolgenden Jahr erwarb sie die Lehrbefähigung für Volks- und Mittelschulen.

Ähnlich wie NOETHER selbst schloss HERMANN daran ein Universitätsstudium an: In Freiburg i. Br. und Göttingen studierte sie Mathematik, Philosophie und Physik. Als erste unter NOETHERs Doktorandinnen und Doktoranden wurde sie im Februar 1925 in Göttingen promoviert; mündlicher Prüfer in diesem Verfahren neben NOETHER war EDMUND LANDAU (1877–1938). HERMANN reichte am 25. Mai 1925 ihre Dissertation bei den Mathematischen Annalen zur Veröffentlichung ein [8, S. 788]. Noch im gleichen Jahr legte sie das Staatsexamen für das Lehramt an höheren Schulen ab.

Danach ging HERMANN weder in den Schuldienst, noch blieb sie der Hochschulmathematik treu, sondern arbeitete von 1925 ab als Privatassistentin des Göttinger Philosophen NELSON bis zu dessen Tod im Jahr 1927. Über die Reaktion NOETHER hierauf berichtete HERMANN selbst [26, S. 20]:

> „Schon Emmy Noether sagte grollend, als ich nach meinen Examina die Assistentin meines anderen Göttinger Lehrers, des Philosophen Leonard Nelson, wurde: ‚Da studiert sie vier Jahre lang Mathematik, und auf einmal entdeckt sie ihr philosophisches Herz!'"

†Bis zur Veröffentlichung des genannten Sammelbandes scheinen die meisten Informationen über HERMANN im Internet zu finden zu sein; selbst die Homepage des Grete-Henry-Programms der Universität Bremen [13] verweist auf den diesbezüglichen deutschsprachigen Wikipedia-Artikel [14]. Weitere Quellen sind [5], [12] und [27].

Unter Nelsons Einfluss trat Hermann in den von ihm gegründeten Internationalen Sozialistischen Kampfbund (ISK) ein. Weiterhin arbeitete sie in dem von Nelson gegründeten und von Minna Specht (1879–1961) geleiteten Landerziehungsheim „Walkemühle" in Adelshausen bei Melsungen mit. Ebenso trat sie bereits im Gründungsjahr 1932 in die Redaktion der vom ISK herausgegebenen Tageszeitung „Der Funke" ein. In den Jahren 1933 bis 1935 hielt sie überdies Kurse zur (politischen) Philosophie ab, in denen es um die Möglichkeiten ethischen Handelns, etwa des Widerstandes, in dem damals in Deutschland herrschenden Regime ging.

Hermann befasste sich in dieser Zeit jedoch nicht nur mit Philosophie und Politik, sondern auch mit Physik: Über Grundlagenfragen der Quantentheorie korrespondierte sie mit Niels Bohr (1885–1962), Werner Heisenberg (1901–1976) und anderen. Aus der Teilnahme an einem von Heisenberg im Sommer 1934 in Leipzig veranstalteten Seminar resultierte ihre Schrift [10]. In deren Abschnitt 7 widerlegte sie den „Beweis", den John von Neumann (1903–1957) über die Unmöglichkeit verborgener Variablen in der Quantentheorie gegeben hatte, indem sie nachwies, dass dieser auf einem Zirkelschluss beruhte. (Zu dem Einfluss von Hermann auf die Grundlagen der Quantentheorie vergleiche man die Arbeiten [16] und [17].)

Noch 1936 erhielt Hermann den Richard Avenarius-Preis der Leipziger Akademie für die Schrift [11]. Die politschen Verhältnisse in Deutschland hatten sich allerdings zwischenzeitlich so verschlechtert, dass sie im gleichen Jahr emigrieren musste, zunächst nach Dänemark, wo sie an einen Landerziehungsheim für die Kinder deutscher Emigranten arbeitete, das Specht und andere Lehrkräfte bereits 1933 gegründet hatten, nachdem sie die „Walkemühle" verlassen hatten. Nach einer Zwischenstation in Paris im Jahr 1937 ging Hermann letztendlich 1938 nach England, was für sie unproblematisch war, seitdem sie 1937 den Engländer Edward Henry geheiratet hatte.

Während des Zweiten Weltkrieges engagierte sich Hermann in der Londoner Gruppe des ISK. Im Jahr 1946 wurde ihre Ehe geschieden, und sie kehrte nach Deutschland zurück. Dort leitete sie von 1947 bis 1950 den Aufbau der Pädagogischen Hochschule Bremen, an der sie danach bis zu ihrer Pensionierung im Jahre 1966 als Professorin für Philosophie und Physik und stellvertretende Leiterin wirkte.

Politisch engagierte sie sich in der SPD, leitete die pädagogische Hauptstelle der Gewerkschaft Erziehung und Wissenschaft und gehörte von 1954 bis 1966 dem Deutschen Ausschuss für das Erziehungs- und Bildungswesen an. Zudem wirkte sie von 1927 bis 1932 bei der Erstherausgabe von NELSONs nachgelassenen Schriften mit sowie von 1970 bis 1975 bei der Gesamtausgabe von dessen Schriften. Am 15. April 1984 starb GRETE HERMANN in Bremen.

2 Das mathematische Umfeld

Im Laufe des 19. Jahrhunderts hatte sich mit der „Invariantentheorie" eine Teildisziplin der Mathematik herausgebildet, bei der es letztlich darum ging, endlich erzeugte Algebren über einem Körper zu untersuchen, was wiederum darauf hinauslief, ein Ideal in einem Polynomring über dem Körper zu betrachten. Der profilierteste Forscher auf diesem Gebiet zum Ende des 19. Jahrhunderts war GORDAN, der von 1874 bis 1910 als Professor in Erlangen wirkte. Er und seine Schule gingen dabei Probleme des oben genannten Typs in der Weise an, dass sie für jeden Einzelfall konkrete Rechnungen durchführten, egal, wie umfangreich diese auch wurden.

HILBERT hingegen wandte sich in seiner im Jahr 1890 erschienenen Arbeit [18] grundlegend von den expliziten Rechnungen ab: Er bewies allgemein für jedes Ideal in einem Polynomring, dass es ein endliches Erzeugendensystem besitzt. Allerdings war dies ein reiner Existenzbeweis, der für ein gegebenes Ideal nicht einmal eine a priori-Schranke für die Zahl der notwendigen Konstruktionsschritte lieferte, geschweige denn explizit ein Erzeugendensystem.

NOETHER stand mitten in diesem Spannungsfeld: Einerseits war sie im Jahre 1907 in Erlangen bei GORDAN mit einer im Geiste von dessen Schule verfassten Arbeit [21] promoviert worden. Andererseits aber wandte sie sich bald danach von dem rein rechnerischen Vorgehen ab und stattdessen einem begrifflichen Ansatz zu. Sie selbst führte diese Umorientierung nicht so sehr auf ihren Studienaufenthalt im Wintersemester 1903/04 bei HILBERT in Göttingen zurück, sondern eher auf den Einfluss von ERNST FISCHER (1875–1954), der 1911 den ehemals von GORDAN besetzten Lehrstuhl in Erlangen übernommen hatte. (Man vergleiche etwa [22].)

Zwar wurde FISCHER erst 1920 von Erlangen an die neu gegründete Universität zu Köln wegberufen. Für das Folgende von Bedeutung ist, dass er jedoch in den Jahren 1915 bis 1918 gar nicht in Erlangen anwesend, sondern zum Kriegsdienst im Ersten Weltkrieg eingezogen war.

3 Der Vorläufer: Die Dissertation von Kurt Hentzelt

Bei Fischer wurde im Sommer 1914 Kurt Hentzelt promoviert mit einer Dissertation, von der Teile im Jahr 1922 in einer Bearbeitung von Noether publiziert wurden [7]. Dabei zählte Hentzelt als Autor [7, S. 53]; so ist diese Arbeit auch nicht in den „Gesammelten Abhandlungen“ Noethers [25] enthalten, sondern nur ein Kurzbericht über einen Vortrag darüber [23]. In einer längeren Fußnote erklärt Noether die Situation [7, S. 53]:

> „Kurt Hentzelt ist seit Oktober 1914 vor Dixmuiden vermißt und muß zu den Toten gezählt werden. Die hier gegebene Abhandlung ist eine vollständig freie Bearbeitung des wesentlichsten Teiles seiner Dissertation „Zur Theorie der Formenmoduln und Resultanten“ [...]. Diese ganz auf Grund eigener Ideen verfaßte Dissertation ist lückenlos aufgebaut; aber Hilfssatz reiht sich an Hilfssatz, alle Begriffe sind durch Formeln mit vier und fünf Indizes umschrieben, der Text fehlt fast vollständig, so daß dem Verständnis die größten Schwierigkeiten bereitet werden. Zu der geplanten Umarbeitung ist er selbst nicht mehr gekommen.“

Hentzelts Doktorvater Fischer konnte sich aufgrund seines Kriegsdienstes nicht der Überarbeitung annehmen. Noether hingegen interessierte sich für Hentzelts Zugang zur Eliminationstheorie. Dabei ging es darum, die gemeinsamen Nullstellen eines Erzeugendensystems eines Ideals in einem Polynomring zu bestimmen. Die Fußnote endet wie folgt [7, S. 53]:

> „Die Teile der Dissertation, die sich [...] auf die Frage der Bildung der auftretenden Funktionen durch endlich viele Schritte beziehen, sollen einer gesonderten Veröffentlichung vorbehalten bleiben.“

Noether war also nicht nur an der abstrakten Klärung der Sachverhalte interessiert, sondern auch daran, wie man die erforderlichen Größen in endlich vielen Schritten explizit konstruieren kann. Dieses Interesse braucht man gar nicht einmal ausschließlich auf den Einfluss Gordans zurückzuführen; bereits Leopold Kronecker (1823–1891) hatte die Bedeutung derartiger Konstruktionsverfahren betont, und gerade um 1920 herum hatte sogar der Hilbert-Schüler Hermann Weyl (1885–1955) sein Interesse daran bekundet [29].

Insoweit lässt sich das letzte Zitat durchaus so lesen, dass Noether 1922 beabsichtigte, die genannten Teile der Dissertation von Hentzelt selbst auszuarbeiten. Letztlich verwendete sie diese Aufgabenstellung jedoch für die Doktorarbeit von Hermann [8].

4 Zum Inhalt der Dissertation von Grete Hermann

Im Gegensatz zu [7] zählt dann auch Hermann als Autorin der Arbeit [8], selbst wenn die Titelei deutlichen Bezug auf die Vorarbeiten von Hentzelt nimmt [8, S. 736]. Auch in den ersten Zeilen der Arbeit verweist Hermann „auf die Ideal- und Eliminationstheorie, wie sie von E. Noether und K. Hentzelt entwickelt ist" [8, S. 736]; ebenso beschreibt sie detailliert, welche Resultate sie von Hentzelt übernommen und wie sie diese gegebenenfalls abgeändert hat [8, S. 736–739].

Wegweisend in Richtung Computeralgebra sind jedoch ihre Aussagen zur Art der Methoden [8, S. 736]:

> „Die folgenden Rechenmethoden werden Berechnungen mit *endlich vielen Schritten* sein. Die Behauptung, eine Berechnung kann mit endlich vielen Schritten durchgeführt werden, soll dabei bedeuten, es kann eine *obere Schranke für die Anzahl der zur Berechnung notwendigen Operationen* angegeben werden. Es genügt also z. B. nicht, ein Verfahren anzugeben, von dem man theoretisch nachweisen kann, daß es mit endlich vielen Operationen zum Ziele führt, wenn für die Anzahl dieser Operationen keine obere Schranke bekannt ist".

Der Hilbertsche Beweis für die Existenz eines endlichen Erzeugendensystems für jedes Ideal in einem Polynomring [18] wird durch diese Setzung aus der Betrachtung ausgeschlossen. In [8, S. 736–737, Fußnote [2])] weist Hermann allerdings auf ein anderes Ergebnis hin, den Satz von Lasker-Noether, welches sie in ihrer Dissertation gemäß den von ihr genannten Kriterien behandelt.

Bei diesem Satz handelt es sich um eine Übertragung des Hauptsatzes der elementaren Zahlentheorie von dem Ring der ganzen Zahlen auf Polynomringe: Die Aussage des Hauptsatzes der elementaren Zahlentheorie lässt sich so interpretieren, dass jedes Ideal im Ring der ganzen Zahlen der Durchschnitt von eindeutig bestimmten Potenzen verschiedener Primideale ist.

Die Verallgemeinerung auf beliebige kommutative Ringe, etwa Polynomringe, allein der Aussage an sich benötigt schon einen gewissen Aufwand:

Die „Potenzen von Primidealen“ werden zu „primären Idealen“ verallgemeinert, wobei ein Ideal „primär“ heißt, wenn jeder Nullteiler des Faktorrings nach diesem Ideal nilpotent ist. Und statt „Durchschnitten von Potenzen verschiedener Primideale“ muss man sogenannte reduzierte Darstellungen als Durchschnitte von Idealen betrachten, bei denen der Durchschnitt von jeweils allen bis auf eines nicht in dem letztgenannten enthalten ist.

Dass sich jedes Ideal in einem Polynomring in eindeutiger Weise als reduzierter Durchschnitt von primären Idealen schreiben lässt, bewies Emanuel Lasker (1868–1941) im Jahre 1905 [19]. Die Verallgemeinerung auf beliebige noethersche Ringe erfolgte durch Noether [24]. Allerdings war Laskers Beweis inkonstruktiv. Im Jahre 1913 gab Francis Sowerby Macaulay (1862–1937) zwar einen Algorithmus an, der die Primärzerlegung in Polynomringen in endlich vielen Schritten bestimmt, er konnte aber keine a priori-Schranken für die Anzahl der Schritte angeben [20]. Hermann hingegen gelang es als eine der zentralen Anwendungen in ihrer Dissertation, für die Existenzaussage des Satzes von Lasker-Noether a priori-Schranken für die Anzahl der Schritte anzugeben, was allerdings bereits bei Hentzelt angedeutet war [8, S. 738].

Als maßgeblich für die Einsetzbarkeit der Computeralgebra erwies sich jedoch die folgende Bemerkung, die sich direkt an das obige Zitat über die verwendeten Rechenmethoden anschließt [8, S. 736–737]:

> „Die in der vorliegenden Arbeit auftretenden Schranken [...] sind unabhängig von den Koeffizienten dieser Basiselemente. Mit Hilfe dieser Schranken, die angeben, bis zu welchem Grad die Variablen berücksichtigt werden müssen, werden sich die Probleme zurückführen lassen auf Probleme der Determinanten- und Elementarteilertheorie, die sich nach bekannten Methoden mit endlich vielen Schritten erledigen lassen.“

Das ursprüngliche Problem der allgemeinen Algebra wird also auf eines der Linearen Algebra reduziert.

5 Die Anfänge der Computeralgebra

Die Bedeutung Hermanns für die Computeralgebra wird in der vorhandenen Literatur durchaus verschieden gesehen. So erhebt [15] sie zur Gründermutter der Computeralgebra:

> „Her doctoral thesis [. . .] is the foundational paper for computer algebra.“

Ähnlich schreibt Caroline L. Herzenberg über Hermann [16]:

> „Her doctoral thesis [. . .] made a significant contribution to mathematics and turned out to become a foundational paper for computer algebra“.

Bettina Eick hingegen datiert den Beginn der Computeralgebra auf das Jahr 1914 [4], das Jahr der Dissertation von Henzelt. Und die Monographie [1] setzt den Beginn der Computeralgebra als eigenständiger Teildisziplin auf die Zeit um 1960 an und verbindet dies mit dem Namen Bruno Buchberger (*1942), siehe etwa [1, 10.4, insb. S. 658], wobei hinsichtlich der Vorgeschichte auf Charles Babbage (1792–1871) und Ada Lovelace (1815–1852) verwiesen wird [1, S. 653].

Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Zwischenzeit keinen Einfluss hatte. Buchberger wurde 1965 in Innbruck bei Wolfgang Gröbner (1899–1980) promoviert, nach dem er auch die „Gröbner-Basen“ benannte, die er als entscheidendes Hilfsmittel in seiner Dissertation [2] verwendete. Und Gröbner machte in der Einleitung seines Buches [6] seine Wertschätzung der Arbeiten Noethers deutlich.

Dieses ist die eine der beiden Literaturquellen, die Buchberger in seiner Dissertation angab [2, S. 58]; die andere ist die „Moderne Algebra“ [28], die verfasst wurde „[u]nter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether“ [28, S. V]. Auf Hermanns Dissertation [8] selbst griff Buchberger in seiner Doktorarbeit allerdings nicht zurück. Er erwähnte sie erst in seinem 1970 erschienen Artikel [3], wenn auch in einer Weise, die nicht so klingt, als habe er ihr etwas zu verdanken, sondern eher, als würde er dem Hinweis eines Gutachters nachkommen:

> „Es sei an dieser Stelle auch auf die Arbeit [Hermann] verwiesen, in der sich zu ähnlichen Fragen eine Fülle von Material findet.“

Allerdings war das Quellenverzeichnis [3, S. 383] im Vergleich zu dem in [2] nur auf 5 Positionen gewachsen, so dass die Erwähnung von Hermanns Dissertation [8] schon bemerkenswert war.

Die Bedeutung der Dissertation Hermanns ist aber keinesfalls in Vergessenheit geraten. So erschien eine englische Übersetzung davon [9], der eine historische Einführung von Michael Abramson beigegeben ist, die wie folgt schließt [9, S. 8]:

„One would not at all expect a 1926 paper to contain optimal algorithms, but the fact that procedures for these computations even existed in 1926 make this paper worthy to be remembered.“

Literatur

[1] Heinz-Wilhelm Alten et al.: 4000 Jahre Algebra: Geschichte – Kultur – Menschen. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum 2. Auflage 2014.

[2] Bruno Buchberger: Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal. Dissertation. Philosophische Fakultät an der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck 1965.

[3] —: Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems. *Aequationes mathematicae* **4** (1970), 374–383.

[4] Bettina Eick: 100 Jahre Computeralgebra. Vortrag am 9. Mai 2014 vor der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, siehe http://www.math.uni-hamburg.de/mathges/veranst/Meilensteine/Meilenstein_XI.pdf, zuletzt abgerufen am 5. Mai 2016.

[5] Ilse Fischer: Von der Philosophie der Physik zur Ethik des Widerstandes. Zum Nachlass Grete Henry-Hermann im Archiv der sozialen Demokratie. *Archiv-Nachrichten. Internet-Newsletter aus dem Archiv der sozialen Demokratie* **1** (2005), https://www.fes.de/archiv/adsd_neu/inhalt/newsletter/newsletter/NL_2005/NL_01_2005/html/fischer012005.htm, zuletzt abgerufen am 5. Mai 2016.

[6] Wolfgang Gröbner: Moderne algebraische Geometrie. Wien, Innsbruck: Springer-Verlag 1949.

[7] Kurt Hentzelt: Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten, bearbeitet von E. Noether, *Mathematische Annalen* **88** (1922), 53–79.

[8] Grete Hermann: Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale. (Unter Benutzung nachgelassener Sätze von K. Hentzelt.) Dissertation Göttingen 1925 und *Mathematische Annalen* **95** (1926), 736–788.

[9] —: The Question of Finitely Many Steps in Polynomial Ideal Theory (Englische Übersetzung von [8]). *Communications in Computer Algebra* **32/3** (1998), 8–30, siehe auch http://www.ricam.oeaw.ac.at/Groebner-Bases-Bibliography/gbbib_files/publication_775.pdf, zuletzt abgerufen am 5. Mai 2016.

[10] —: Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik. *Abhandlungen der Fries'schen Schule, N.F.* **6**, Heft 2 (1935), 69–152.

[11] —: Welche Konsequenzen haben die Quantentheorie und die Feldtheorie der modernen Physik für die Theorie der Erkenntnis? In: G. Hermann, E. May und Th. Vogel: *Die Bedeutung der Modernen Physik für die Theorie der Erkenntnis: Drei mit dem Richard Avenarius-Preis ausgezeichnete Arbeiten.* Leipzig: Verlag von S. Hirzel 1937.

[12] Hermann, Grete. In: Exilarchiv, siehe http://www.exilarchiv.de/DE/index.php?option=com_content&view=article&id=4504%3Ahermann-grete&catid=44&lang=de&ml=5&mlt=system&tmpl=component, zuletzt abgerufen am 5. Mai 2016.

[13] Grete-Henry-Programm der Universität Bremen zur Förderung von Geschlechtergerechtigkeit und personeller Vielfalt in der Wissenschaft, siehe http://www.uni-bremen.de/universitaet/die-uni-als-arbeitgeber/foerderung-unterstuetzung/grete-henry-programm.html, zuletzt abgerufen am 5. Mai 2016.

[14] Grete Hermann. In: Wikipedia, die freie Enzyklopädie, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Grete_Hermann, zuletzt abgerufen am 5. Mai 2016.

[15] Grete Hermann. In: Wikipedia, the free encyclopedia, siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Grete_Hermann, zuletzt abgerufen am 5. Mai 2016.

[16] Caroline L. Herzenberg: Grete Hermann: Mathematician, Physicist, Philosopher. *Bulletin of the American Physical Society* **53**, Heft 5 (2008), 230.

[17] —: Grete Hermann: An early contributor to quantum theory. Preprint 2008. arXiv: 0812.3986.

[18] David Hilbert: Über die Theorie der algebraischen Formen. *Mathematische Annalen* **36** (1890), 473–534; auch in David Hilbert: *Gesammelte Abhandlungen*, 3 Bände. Berlin: Springer 1. Auflage 1932–1935, 2. Auflage 1970. Band 2, S. 199–257.

[19] Emanuel Lasker: Zur Theorie der Moduln und Ideale. *Mathematische Annalen* **60** (1905), 20–116.

[20] Francis Sowerby Macaulay: On the resolution of a given modular system into primary systems including some properties of Hilbert numbers. *Mathematische Annalen* **74** (1913), 66–121.

[21] Emmy Noether: *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form.* Dissertation Erlangen 1907. In *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **134** (1908), 23–90 und zwei Tabellen; auch in [25, S. 31–99].

[22] —: Lebenslauf, Eingangsvermerk 4.6.1919, Archiv der Georg-August-Universität Göttingen, Personalakte Noether.

[23] —: Über eine Arbeit des im Krieg gefallenen K. Hentzelt zur Eliminationstheorie, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **30** (1921), 101, auch in [25, S. 353].

[24] —: Idealtheorie in Ringbereichen, *Mathematische Annalen* **83** (1921), 24–66, auch in [25, S. 354–396].

[25] —: *Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers*, hrsg. v. Nathan Jacobson. Berlin et al.: Springer 1983.

[26] Peter Roquette: Zu Emmy Noethers Geburtstag, Einige neue Noetheriana. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **15**, Heft 1 (2007), 15–21.

[27] Vera Venz: *Zur Biographie von Grete Hermann.* Studienarbeit an der Universität Bremen 2001, siehe http://www.hausarbeiten.de/faecher/vorschau/103740.html, zuletzt abgerufen am 5. Mai 2016.

[28] Bartel Leendert van der Waerden: Moderne Algebra I. Berlin: Springer, 2. Auflage 1937.

[29] Hermann Weyl: Über die neue Grundlagenkrise in der Mathematik. *Mathematische Zeitschrift* **10** (1921), 39–79.

In the search of Monge's ideal: the introduction of descriptive geometry in the first institutions in Greece during the XIXth century

Christine Phili*

I. Introduction

It might be stressed that even captive Greece was not an intellectual desert[1]. Before the proclamation of the war of Independence in 1821 and more specifically between 1770 and 1821 many mathematical textbooks were published in Greek in Europe[2].

All these books are written in a difficult, archaic language or tend to be incomplete and less methodical, and above all never proved their effectiveness as university handbooks. The main aim of all these books was the education of the Greeks, an indispensable condition for their revolt.

However it would be an omission here not to mention the edition of various journals and periodicals published in Vienna[3] having the target to function as a channel which would popularize scientific and literal knowledge. Among them, *Hermes the Scholar*[4] (Vienna 1811-1821) played a decisive role. In this journal the Greek intellectuals read for the first time the recent edition regarding books consecrated on descriptive geometry. Thus, in the issue of 15th June 1817, the Greeks learned that in Brunswic a treatise of descriptive geometry was published, *Traité de Géométrie descriptive à l'usage des éléves de l'institut des voyes de communication,* par M. Potrér[5] avec grav. 1 Vol. gr in 8^{o} à Brunswic, Pluchart[6]. (see the photocopy).

---

[1] Greece preserved also some scientific centers, as for example the Athonian Academy, which flourished under its first director, Eugenios Voulgaris (1716-1806) or the Academy of Cydonies in Asia Minor under the leadership of Benjamin of Lesbos (1759?-1824). See Christine Phili, Los matematicos y los politicos en la época de la Revolucion griega: dos representantes principales: Benjamin de Lesbos y Teofilo Cairis. *Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Technicas.* Vol 34 No 74.2, 2011, pp. 341-354.

[2] For more details see Yannis Karas, *The Exact Sciences in the Greek Region 15th-19th Genturies,* Athens 1991 (in Greek); *Science during the Ottoman Occupation,* Vols 1-2, Athens 1992 (in Greek);

* National Technical University of Athens. Faculty of Applied Mathematical and Physical Sciences. Department of Mathematics. Zografou Campus 1580 Athens Greece e-mail:xfili@math.ntua.gr

[3] Christine Phili, «Greek Mathematical Publications in Vienna in the 18th-19th centuries» in *Mathematics in the Austrian - Hungarian Empire.* Proceedings of a Symposium held in Budapest on August 1, 2009 during the XIII ICHST. Martina Becvárová, Christa Binder (eds) Prague 2010, pp. 137-147.

[4] Yannis Karas, «Hermes the Scholar» in *History and Philosophy of Science in Greece 17th-19th centuries.* Athens 2003, pp. 683-690. [in Greek].

[5] Despite the orthografical error it concerns the book of Charles Marie Potier, *Géométrie descriptive* Paris 1817 in 8^{o} 96 pages.

[6] *Hermes the Scholar,* News regarding French books. Vienna, 15 June 1817, p. 284.

The next year in this same cultural journal an anonymous Greek of Diaspora informed his compatriots and presented his comments on new mathematical editions[7]. Thus, he quoted: *«Leçons élémentaires par La Caille, augmentées par Marie, avec des Notes par M. Labey...; Cours de mathématiques à l'usage des écoles impériales militaires, par les professeurs Allaire, Billy, Puissant, Boudrot; Elémens de géométrie par Legendre, membre de l'Institut; Elémens de géométrie par Develey; Recueil des problèmes resolus par des considérations purement géométriques»*[8]. Apart from these books, the Greeks learned also that the following books[9] had been recently published, *Traité de la Géométrie descriptive par Potier, Géométrie descriptive par Monge (senateur) avec les deux suppléments de la Géométrie descriptive par Hachette*[10]. (see the photocopy).

We consider that this information regarding Monge's new geometry[11] probably constitutes the very first trace concerning the descriptive geometry for the Greeks of Diaspora, as well as for those who lived under the Ottoman rule. We must take into consideration that this journal, *Hermes the Scholar,* through its numerous subscribers was quite well diffused in more than 40 Greek and European cities. So, it became an important channel in order to transfer in Greece the French Einlightenment and the ideas of the French Revolution.

II. The flourishing epoch of the Ionian Academy under Carandinos' dominance.

Finally the Ionian Academy, i.e. the first University, was established by the Legislative Assembly[12] in Corfu in 1823 with Greek as its official language[13], thanks to

[7] Professor Yannis Karas in his paper of 2003 stressed that in the issues of 1817 and 1818, 82% of the books which were presented belonged to sciences. Yannis Karas, *op. cit.,* p. 684.

[8] *Hermes the Scholar.* «Literaries», 1st of August 1818, Vienna, pp. 421-422.
It might be stressed that this notification originated from a letter written by an anonymous erudite well known Greek to his friend who lived in Europe. The context of this letter revealed the need for the enslaved Greeks to be informed on basic useful books recently edited in French on mathematics, physics, philosophy. Thus, the editors of *Hermes the Scholar* considering that the list of new French books might be very interesting for the Greeks, published this answer.

[9] This notification continued and the Greek erudite quoted also the following books: *«Cours complet par Garnier, Traité de Géodésie, ou exposition des méthodes astronomiques et trigonométriques, soit à la mesure de la terre, soit à la confection du canevas des cartes et des plans 1 Vol. par Puissant, Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement, avec deux suppléments contenant la théorie de la projection des cartes, in -4, ouvrage adopté par l'université, pour l'enseignement dans les lycées par Puissant.* This notification included also books on physics, chemistry, minerology (see *Elémens de Physique expérimentale, de Chémie et de Minérologie, suivis d'une abrégé d'Astronomie,* par P. Jacotot)». *Hermes the Scholar, op. cit.,* pp. 422-423.

[10] In reality from this notification results that it concerns Hachette's *Supplément à la Géométrie descriptive de Gaspard Monge,* Paris 1811 (published according to the 3rd edition of Monge's *Descriptive Geometry.* Paris 1811, as well as, *Second supplément de la Géométrie descriptive... suivi de l'Analyse géométrique de M. John Leslie* Paris 1818. *Hermes the Scholar.* Ibidem.

[11] Monge's invention was published due to the care of Hachette in 1799 under the title, Lectures taught in the Écoles Normales in the Third Year of the Republic (*Leçons données aux Écoles Normales de l'An III de la République).*

[12] Gazzetta degli Stati Uniti delle Isole Ionie 284 (26 May / 7 June 1823).

[13] Idem 339 (17 May / 29 May 1824).

2

Guilford's[14] numerous and persistent efforts[15], as well as his influence regarding the Government.

Thus, in November 1823 the private teaching started in: ancient Greek, Latin, English, literature, history, rhetorics, mathematics, botanology, philosophy and theology. After these initiative lectures the entrance exams started[16], for the first preparative years, which were proclaimed in the official journal.

As regards the mathematical education professor Carandinos the Ephorus (Ἔφορος)[17] or Rector, was entirely responsible as well as in administrative matters.

But who was Carandinos?

Ioannis Carandinos (1784-1834) a penniless child from the island of Cephalonia, under the regime of the Septinsular Republic studied at the first public school created in Corfu. The curriculum of that school comprises: ancient Greek, mathematics and theology. As regards mathematics Carandinos studied arithmetics, algebra and geometry with Cesar Pellegrin, a Russian officer from the island of Cephalonia. The book through which he was initiated in mathematics, was the book of Nicephoros Theotokis, *Elements of Mathematics.* Later during the second French occupation of the Ionian Islands he had the great opportunity to study privately mathematics (analysis and mechanics) under Charles Dupin's guidance. After Dupin's departure, Carandinos returned as the teacher of this primary school in which he acquired his first knowledge of mathematics, history and theology. Upon his return Carandinos was in the position *«to teach the young pupils concerning the Lacroix's and Laplace's systems and other contemporary French (Scientists)»*[18].

The acquaintance of Carandinos with Guilford was decisive regarding his career. The early education of Carandinos facilitated Guilford's option. His young protégé through Guilford's scholarship attended the lectures[19] of the Ecole Polytechnique in 1821 as free auditor (auditeur libre) (see the photocopy).

After the inaugural ceremony (see the photocopy). Carandinos started his lectures *«in the first year, the preparative one, he gave lectures on algebra and geometry from 11 to 12 five times per week... also he taught the introduction of the superior analysis i.e. the curriculum of mathematics for the second year following Lacroix and Legendre, five days per week from 12 to 13»*[20].

Fortunately we found his weekly program in his book, which exists now at the Gennadios Library. Thus Carandinos declared that:

---

[14] In 1819 Guilford was named Chancellor of the University of the Ionian Islands.

[15] Guilford offered many scholarships in order to form the first kernel of professors.

[16] The entrance exams were rigorous, thus among the 150 students who followed the preparatory lectures from November until May 1824, only 47 students were admitted.

[17] Guilford proposed Carandinos for this function: *«I will take the liberty of proposing, for that office, our well desiring senior professor John Carandino».* 17th May 1824. Plan submitted to the Governement, for the establishment and Regulations of the Ionian Academy.

[18] See Proselantis' letter to the Review, *Hermes the Scholar* 1812, p. 190.

[19] Christine Phili, La reconstruction des mathématiques en Grèce: l'apport de Ioannis Carandinos (1784-1834) in *L'Europe Mathématique* Catherine Goldstein, Jeremy Gray, Jim Ritter (ed). Paris Editions de la Maison des Sciences de l'Homme Paris 1996, pp. 305-319.

[20] Gerasimos Typaldos - Iacovatos, *The History of the Ionian Academy* Athens 1982, p. 150 Preface by Spyros Asdrachas. (in Greek).

«I give three lectures per week text complement of Algebra (of) Lacroix as well as to the primary class from the first November 1825 in the first class which comprises 11 students, I gave ten hours per week and I presented the following authors…
text (of) Monge desciptive geometry and the above mentioned introduction[21]

After Carandinos' departure in 1832 due to health reasons, a new epoch started for the Ionian Academy which could never reach its high level in mathematical education except during the presence of Mossotti. It might be stressed that the tendencies for applied mathematics of the new High Commissioner Lord Howard Douglas (1776-1861), as well as Mossotti's preference for the same topic, were the main reasons for the reform of 1837[22], which among other comprised the adoption of the Italian language as the official one for the Academy in order to facilitate the task of the Italian professors[23]. From this reform the Faculty of Civil Engineers was created. Mossotti, who was associated to its establishment, proposed that the candidates for this new Faculty followed preparative lectures on analytic and descriptive geometry, on the optical instruments (constructions and applications), as well as elements of surveying. Nevertheless as the students were not enough qualified, and as the professor of mathematics Kontouris resignated to attend as auditeur libre the lectures at the Ecole Polytechnique, the Faculty of Civil Engineers never functioned[24].

However during the academic year 1837-1838 in the Faculty of philosophy, lectures on pure mathematics were attended by several students. Professor Kontouris taught stereometry[25], elements of algebra and trigonometry. For these courses Kontouris utilized the book of Legendre translated by Carandinos.

After Mossotti's departure in 1840, the curriculum of the Faculty of philosophy was modified[26] and the descriptive geometry was not anymore included.

III. The Military School of Evelpides

When Ioannis Kapodistrias arrived in Greece on the 6th of January 1828 found a country without determined borders, devastated by the war of Independence, as well as by the internal conflicts. In this atmosphere of disorder and misery[27] Kapodistrias undertook

---

[21] Ioannis Carandinos. See manuscript in his book, *On some theorems of Polygonometry.*
[22] Douglas, a renowned military officer member of the Royal Society already from 1816, wrote several books (as for example *Essay on the principles and construction of military bridges.* London 1st ed 1816; 2e ed. 1832; *Observations on the motives, errors and tendency of M. Carnot's system of defence.* London 1819) and gave lectures on strategy and naval construction in the Royal Military College (1804-1807).
[23] Christine Phili, «L'Académie Ionienne et le Risorgimento» in *Europa Matematica e Risorgimento Italiano,* a cura di Luigi Pepe. CLUEB Bologna 2012, pp. 67-80.
[24] However Mossotti had the possibility to compose his lectures on mathematical physics which were published after his departure for Pisa. See Ottaviano Mossotti, *Lezioni elementari di fisica matematica date nell'Universita di Corfu nell'anno scolastico 1840-41.* Firenze G. Piatti 1843.
[25] We can't be affirmative if the lectures of stereometry comprised elements of descriptive geometry.
[26] The curriculum became more restrained thus the 1st year was consacrated to the algebra, and the second one to the trigonometry. The third year comprised only physics and chemistry.
[27] It might be stressed that the numerous orphans constituted a very hard problem for the newly born peny state. Thus, Kapodistrias opted to establish an orphanage in the island of Aegina in which these children attended lessons of carpentry, tailoring, watchmaking, etc.

4

the first measures in order to establish a well organized state worthy to ensure the outcome of this disastrous war and the recovery of the Greek people.

Thus, the reorganisation of the army was one of the main aims for the governor. So, apart from his efforts to organize a regular army, on the 1st of July 1828, he established the Company of Evelpides[28] in Nafplion, first capital of Greece from 1829 to 1834. The organisation of this school was granted by Kapodistrias to the Bavarian colonel Karl von Heideck[29] (1788-1861).

However we owe a special mention regarding the posterior translation of Francoeur's book *Linear Drawing*[30]... During the first years of his mandate, Ioannis Kapodistrias ordered the co-editor of the journal *Hermes the Scholar,* Konstantinos Kokkinakis[31] (1781-1831) to translate Francoeur's book. Finally this book was published in 1831, posthumously as its translator had died and the final revision was undertaken by Ioannis Kokkonis (1795-1864), a member of the educational committee, a general inspector of the schools of Peloponese and an ardent partisan of the mutual teaching method, as he studied in Paris (1824-1829) with Ch. Sarasin.

This book largely[32] contributed to diffuse linear drawing, as well as some elementary methods of projection, livelling and rules of perspective and became an indispensable tool not only for artisans, carpenters etc. Thus, we could consider that this manual became the preliminary tool for the teaching of descriptive geometry in several schools and institutions. Unfortunately until now we could not find an official list regarding its distribution.

On the 2[th] of December 1828, Kapodistrias accepted Pauzié's proposition regarding the organisation of a Polytechnic Military School[33], following the model of the Ecole Polytechnique, in order to offer to the country qualified officers, who would man the administration of the state and contribute to its growth. Thus, on the 28th of December 1828 this Military School was officially established[34]. The direction of this institution, first in Greece, Kapodistrias entrusted to Pauzié[35], but in order to keep equal distances[36],

---

[28] In Greek this adjective (here is used as noun) means hopeful, promising and for the first time this name was given to the very young students of the Ionian Academy. We consider that is nomination, which is used until now was given also to these young students, who actually will represent the hope for the Greek nation.

[29] Later with count Armansperg und Ludwing von Maurer, he became member of the Regency (1833-1835), as King Otto was underage.

[30] The complete title is: *Dessin Linéaire et arpentage pour toutes les écoles primaires quel que soit le mode d'instruction qu'on y sait* 1[e] éd. 1819, 2[e] éd. 1827 Paris. Francoeur dedicated this book to the Duc of Gazes.

[31] An erudite Greek, invited by Kapodistrias taught in the Central School of Aegina from 1829 until his death.

[32] As on the island of Aegina Kapodistrias established an important printing office in order to ensure the needs of the central school (a kind of high school) and these of preliminary schools. These establishments were closed after Kapodistrias' assasination until 1832 and restarted to function in August 1832. It might be stressed that Christos Vafas, a student of Carandinos in the Ionian Academy was appointed to teach mathematics in this Central School.

[33] Andreas Kastanis, «The teaching of mathematics in the Greek military academy during the first years of its foundation (1828-1834)» *Historia Mathematica* Vol. 30 2003, p. 125.

[34] At that period was named Central War School or Central Military School. The students are obliged to pay fees except those who could obtain a scholarship as orphans of the war or as descendants of combattants.

[35] According to this decree Pauzié was promoted to the rank of lieutenant colonel.

authorized also Karl Heideck, who already was at the head of the regular Greek army, to sign the plan regarding the organisation of that school together with Pauzié.

In the State Archives we found a precious manuscript document[37] in French, probably dictated by Pauzié, in which he exposed among others, the regulation of the curriculum. Thus, according to the 50th article, for the third division (junior), apart from the courses of Greek and French[38], the mathematical courses comprised, arithmetics, logarithms, the first four books of Legendre's geometry and algebra up to the equations of second degree.

For the second division the mathematical lectures were: the 5th, 6th and 8th books of Legendre's geometry, rectilinear trigonometry, use of the tables of sinus, algebra up to the general theory of equations, descriptive geometry, notions on conic sections. As it concerns the practical lessons the students must be familiarised with the design of figures, as well as in linear and topographic design.

From the precious French manuscript document, which in reality constitutes a relevant document for a historian of mathematics, we focus on the 64th article of the regulation regarding the studies. This article ordered that the Military School should deliver to each student the following indispensable tools as for example: a drawing board, a box of pencils, two rulers, an inkpot, an elastic gum, a French-Greek dictionnary, the books of algebra[39] and arithmetics of Bourdon, Legendre's geometry and *«une géométrie descriptive de Monge»* (sic), i.e. one descriptive geometry of Monge. (see the photocopy). According to this formulation, we consider that as Carandinos' translation was never edited, Kapodistrias through his supporters abroad could buy several copies of Monge's treatise in order to fulfill the lack of this manual in Greek.

In 1834 the Regency reorganised the Military School[40]. Henceforth the studies lasted eight years in order to become the highest institution in the educational system of the country. The Bavarians modified the curriculum and apart from the German[41], introduced differential and integral calculus, spherical trigonometry, geodesy, mechanics and fluid mechanics, hydraulics etc. Of course, descriptive geometry maintained an important part of the curriculum. Especially in the fifth year the students attended lectures

---

[36] Kapodistrias as former minister of the Foreign Afffairs in Russia tried to decrease the French influence towards the two other Great Powers, Russia and Great Britain, whose contribution to the liberation of Greece was decisive during Navarino's sea fight. However during his mandate as first governor of Greece he could not avoid the almost omnipresent French influence on educational matters.

[37] Greek State Archives. Secretary of Military Affairs doc. 54 January 1829, f. 102.

[38] The teaching of French comprises also French grammar, which was a translation of Lhomond's Elements of French. Andreas Kastanis, *The Military School of Evelpides during the first years of its function 1828-1834.* Athens 2000, pp. 99-100. [in Greek].

[39] According to Carandinos' notification of the 22 May 1828, he expressed his desire to translate Bourdon's Algebra containing 800 pages as well as an important appendixe. The same desire is expressed too in his letter on the 19th April 1829 to Kapodistrias. In this letter he stressed also the financial difficulties which made imperative his intentions Thus, Bourdon's treatise *Eléments d'algèbre* Paris 1817 remained unpublished. See Christine Phili, «The French Mathematics and Ioannis Carandinos» *Proceedings of the Conference: Mathematics during Ottoman rule organized by the National Foundation of Research and the Greek Mathematical Society, Euclid* III issue 40-41 May-December 1994, p. 84. (in Greek). However it must be stressed that Carandinos student Christos Vafas, translated L. Fourcroy's *Leçons d'algèbre* in 1837 and later Spyridon Manaris see *Elements of algebra.* 2nd ed. 1853.

[40] In 1837 the Military School was transfered from Nafplion to Piraeus, in order to train also the students of the Naval School.

[41] However the coefficient regarding the German language was 4, while for the French was 6.

6

regarding elements of differential and integral geometry, while in the sixth year the mathematical curriculum comprised the continuation of the lectures of differential and integral calculus, descriptive geometry and a very vanguard course for that epoch in Greece: the Calculus of variations.

The lack of didactic books appeared again in 1840. Thus, on the 6th/18th of June 1840 the new commandant of the Military school colonel Spyridon Spyromilios[42] (1800-1880), who replaced the Prussian colonel Eduard von Rheineck[43] (1796-1854), stressed the lack of handbooks. In his report[44] (see the photocopy) to the Ministry of Defence, he marked that this lack made imperative the task for the professors to translate or to compile European treatises as the students tried with difficulty to note or to partially copy the lectures. So, this situation constitutes one of the main factors, which prevented their progress. Thus, the commandant proposed that the Military School could offer to its students lithograph handbooks in Greek. However despite our research we could not find any mathematical manual of that epoch.

From the list of professors[45] regarding the curriculum of the academic year 1841, we can quote that major Dimitrios Stavridis was appointed to teach architecture, descriptive geometry, levelling and surveying of buildings and machines 20 hours per week, while Dimitrios Despotopoulos taught mathematics 18 hours per week.

The report[46] of the council of studies of the 17th March 1842, revealed the courses' material[47]. As it concerns the descriptive geometry, the course's material of the 5th grade comprises intercepts and applications of the projectivity to the theory of shadows and scenography[48] (sic), 1 ½ hour per week, survey of buildings and machines, including also the presentation of the most useful woodcutting, as well as the construction of the five capitals of columns (Toscanian, Doric, Ionian, Corinthian and Roman) 2 hours per week.

In the 4th grade the lessons of the descriptive geometry comprise livelling, after the teaching of the projective geometry, arising from the descriptive geometry 3 ½ hours per week. It might be stressed that the coefficient[49] for this course was quite high: 8.

The letter[50] (see the photocopy) (written in French) of the 11th / 23th June 1843 of Adolph Hast, a bookseller of that period in Athens, to the Royal Ministry of War, regarding the books, which will be distributed as prizes to the preminent students, revealed that Monge's treatises were abandoned, although Monge's Descriptive geometry after its 6th edition in Paris 1838, was later edited[51] in Paris 7th ed. and in Brusselles in

---

[42] Graduated from the Military School of Naples. He showed evidence of an incomparable boldness during the war of Independance.

[43] Afer taking part in the Napoleonic Wars, he arrived in Greece in 1822 and continued to fight with the Greeks against the Ottomans.

[44] Greek State Archives. Othonian period Ministry of Defence f. 372, no 323.

[45] Greek state Archives. Ministry of Defence. Othonian period M/B f. 372.

[46] Idem.

[47] For example for the 2st grade the mathematical curriculum comprises: algebra (resolution of 2nd degree equations, logarithms, Newton's binomial and its applications, function's developpment in series), geometry (the last four books from Legendre's books, geometrical problems, resolved by algebraic methods).

[48] It is quite interesting that at that period the erudite Greeks basing on Geminus' classification of the mathematical sciences, named the science of perspective as scenepainting (σκηνογραφικὴ in Greek).

[49] Greek State Archives. Ministry of Defence. Othonian period M/B f. 421.

[50] Greek State Archives. Ministry of Defence M/B f. 421.

[51] René Taton, *L'oeuvre Scientifique de Monge,* Paris P.U.F. 1951, p. 383.

7

1854. The list[52] of this bookseller, among others, contains the recently edited book by the professor of the Polytechnic School, C. F. A. Leroy, *Traité de géométrie descriptive*[53] 1 Vol. texte 1 Vol. planches Paris 1842. This proposition permits us to conclude that the teaching of descriptive geometry was slighly modified leaving Monge's classic topics.

It might be stressed that King Otto showed evidence of his sincere interest for the Military School as during his reign attended the exams and several times visited the school in Piraeus in order to attend the lectures too and regularly received the reports regarding the progress of the students. So, in 1842 Otto decided that the studies lasted seven years, as the preparatory year was abolished. The descriptive geometry was taught in the fourth year, 16 hours per week and the students apart from the well known chapters regarding the surfaces' intersections, evolute and evolutionary, were initiated to study the applications of projectivity: theory of shadows and perspective. It is quite impressive that almost at the same period these chapters were also included in the curriculum of the Polytechnic School, but we ignore the course's material.

However on 16th September 1858, lieutenant Dimitrios Antonopoulos (1821-1885), a former student of the Ecole Polytechnique (X-1848), professor of descriptive geometry, theory of shadows and scenography[54], was replaced by officer Vassilios Romas. On the 2nd September 1859, Dimitrios Tournakis[55], a lieutenant of artillery was appointed to teach descriptive geometry.

Spyromilios' mandate was also charecterized by an important innovation. In 1840, he introduced the written exams, considering that the oral ones couldn't offer an accurate idea on student's background, as the examiner could intervene in order to facilitate the level of the questions.

Thus, thanks to this new institution, several copies were preserved in the State Archives. The copies regarding descriptive geometry revealed the topics of the exams, as well as the name of the examiner.

So, on the 14th October 1854, professor V. Romas, asked his students to determine the figure of the shadow and the perspective of a triangular pyramid[56] (copy). On the 6th November 1857, professor D. Antonopoulos demanded the intercept of a girder by a vertical plane, the shadow of this girder as well as its perspective[57] (copy). On the 13th September 1858 the same professor demanded his students to describe a sphere in a triangular pyramid[58] (copy). On the 16th of September 1859 the problem for the students is the intersection of a rectilinear cone by a cylinder[59] (copy).

After Otto's expulsion in 1863, a new reform started for the Military School. Thus, the new King George I, formatted in a Danish Naval School, introduced in 1864 the entering exams and decided that the studies lasted four years for the students who desired to follow the weapons of infantry and cavalry and six years for those who opted for the technical weapons: artillery and engineering. The first three years were preparatory and

---

[52] Greek State Archives Ministry of Defence. M/B f. 421.
[53] C. F. A. Leroy published his treatise on descriptive geometry in Bruxelles in 1837. See *Traité de Géométrie Descriptive avec une collection d'épures, composée de 60 planches.*
[54] Greek State Archives. Ministry of Defence M/B f. 407.
[55] Idem.
[56] Greek State Archives. Ministry of Defence f. 427.
[57] Idem, f. 424.
[58] Idem f. 429.
[59] Idem.

common for all the Evelpides and of course descriptive geometry had a prominent role in the first two years. During the third year the students learned on the intersections of surfaces, while during the fourth, those who were destined to become officers of artillery and engineering corps were initiated to the applications of the descriptive geometry: shadows, perspective, wood cutting.

Nevertheless as during that period Greece tried to attend the modern technology and as the military staff was one of main supporters of its administration, a new reform was announced for the Military School on the 31st of October 1866, in order to speed up the studies, which were reduced. Henceforth the studies lasted five years and three as usually were preparatory, in which the descriptive geometry, having ten as coefficient, preserved an important part of the curriculum.

Nevertheless this reform lasted only one year. In July 1867 the authorities closed the Military School for a while and its reopening on January 1868 was marked by the readoption of the program of 1864.

Two years later, according to the new reform of 1870, the lessons in the Military School lasted seven years. During the first five years the students attended several courses, including mathematics. Descriptive geometry remained an important part of the curriculum as it retained the highest coefficient: ten; it was taught in the third year in its basic form, in the fourth started its applications gnomonics and wooden frameworks and the fifth year was more focused in applications as theory of shadow, perspective, enumerated planes[60]. Ending the five years of studies the Evelpides after their graduation could work as professors in high schools or as civil geometers (equivalent noun of the engineer) in public works. The Evelpides who attended the other two supplementary years of studies in which were included military courses as artillery, fortification or technical courses road constructions, bridge building etc. were destined to serve in technical weapons (artillery and engineering corps).

From 1880 to 1886 the professor of the descriptive geometry was a major of the engineering corps Miltiadis Kanelopoulos who wrote one of the first treatises on descriptive geometry. Indeed his treatise[61], *Lectures on descriptive geometry according to his lessons given during the academic year 1882-83 in the Military School,* appeared in 1883. It might be stressed that in this same year appeared also the book of T. Moschopoulos, *Elementary Descriptive geometry according to his lessons given in the school of non-commissioned officers.*

IV. The University of Athens

Kapodistrias' assassination in 1831 marked the beginning of a new and difficult period in Greece. In 1837, King Otto established the first university, the Othonian University, unique high institution in the Balcans and near East.

[60] In 1887 was published in Piraeus where the Military School was located an anonymous translation of C. E. Leroy treatise entitled on enumerated plans. Andreas Poulos in his book, *Greek Mathematical Bibliography* considers that this translation followed the 4th edition of his book, *Traité de Géométrie descriptive: suivi de la méthode de plans cotés et de la théorie des engranages cylindriques et coniques, avec une collection d'épures, composée de 71 planches.* Tome 1. Paris 1855. Andreas Poulos, *op. cit.,* p. 137.

[61] In 1884 was published his book regarding the theory of shadows.

For the first academic year 1837-1838 the curriculum comprises, the last five books of Legendre's geometry, Legendre's rectilinear trigonometry, general properties of numbers, algebra and Hachette's descriptive geometry[62]. These lectures were given from 4-5 every Monday, Wednesday and Friday[63].

The studies lasted three years and for six semesters the students attended the following lessons:

1[nd] semester:	continuation of algebra's application to two – dimensional geometry, statics and descriptive geometry
2[nd] semester:	spherical trigonometry, algebra's application to three dimensional geometry, continuation of descriptive geometry
3[th] semester:	end of descriptive geometry and differential calculus

It might be stressed that in the very first years a special care would be taken to teach students the principles of practical geometry such as lands surveying, levelling and of course the use of geometrical instruments. These last instructions were indispensable for their educational career, but also for those who could follow a military career. The students had adopted that mathematics in their applied use are at the base of astronomy, mechanics, architecture, fortification, navigation etc.

In 1840, according to the program, Negris lectured on differential and integral calculus and continued descriptive geometry, focused on the intersections of second degree surfaces, as well as three dimensional analytic geometry, including also rectilinear trigonometry and algebra starting after Newton's binomial. During his descontinuous teaching the former student of the Ecole Polytechnique tried to educate his few[64] students on the basic branch of mathematics.

By the Royal decree of 19 Mai / 31 Mai 1842 regarding the exams, the students of the mathematical department in order to obtain their graduation were obliged to be examined in the following lessons:

«high pure mathematics, applied mathematics i.e. the analysis of finite quantities, differential and integral calculus, research regarding various curves, descriptive and practical geometry, mechanics and astronomy».

So descriptive geometry through Negris' teaching remained in the curriculum.

However we consider that after Negris' dismission the lectures of descriptive geometry were never taught again in the Othonian University. So, after the departure of this polytechnician, the spirit and the method of Monge were abandoned in the University, while they were largely cultivated in the Military School and in the Polytechnic School.

V. The Polytechnic School of Athens

---

[62] It is not clear which book was followed in these lessons. According to this notification we could suppose that it refers to J. N. P. Hachette *Supplément à la géométrie descriptive de Gaspard Monge* 1[st] ed. Paris 1811.

[63] See the photocopy of the program.

[64] The fees probably made imperative the universiterian studies. However for the academic year 1837-1838 only 52 students were inscribed in the four faculties, while for the academic years (1853-1863) the number of students increased to 2. 134.

The construction of the Royal Palace in Athens according to the plan of the Bavarian architect Friedrich von Gärtner (1792-1847), revealed the lack of qualified Greek builders (craftsmen, stonemasons, bricklayers etc.). Moreover the needs of new techniques in order to build the new capital, Athens, exceeded the actual technical abilities of the Greek artisans. Thus, at the end of 1836, a noble Bavarian officer Friedrich von Zentner (1777-1847) conceived the idea to create a technical school[65] according to the model of the Royal School of Building (königlich Baugewerkeschule in Munich, established in 1826 following the model of the Ecole Polytechnique), as well as the technical school in Lyon[66], la Martinière.

The first lectures were: elementary mathematics, architecture and drawing. The courses of elementary mathematics comprised: elementary arithmetic (up to extract square and cubic roots), elementary geometry (in order to execute land surveying). The courses of architecture[67] were focused on architectural technology (nature of materials), as it concerns the lecture of drawing Zentner considered that a good architect could initiate these untrained students to the liberal and linear drawing.

The professor of drawing (liberal and linear) was Christian Hansen[68], a distinguished Danish architect. The lessons of plastic constructions were given by the French architect Charles Laurent and his assistant, a Bavarian sculptor Karl Heller. The 2nd lieutenant of the engineering corps Theodore Komninos (1807-1883) taught mathematics i.e. practical arithmetic and elementary geometry, until 1854 as Komninos was appointed to give lessons on mathematics, mechanics, geometry and architecture[69].

As the demand for educated craftsmen, surveyors and technicians increased, in 1840 this school was transformed in a daily one, and consequently its curriculum was enriched by an enlarged one. Thus, side by side with the school of Sundays, functioned this newly established daily school. Nevertheless in both schools mathematics preserved an important part of the curriculum.

In the next year Zentner proposed that the French architect Charles Laurent could teach mathematics and descriptive geometry, side by side with Komninos. As it concerns the lectures of mechanics could be ensured by some professors of the university. Indeed George Vouris was invited to teach physics and elements of mechanics.

After the revolution[70] of the 3rd September 1843, all the foreign professors as Friedrich Zentner, Charles Laurent, Christian and Theofile Hansen were expelled and henceforth only native Greek would be appointed in the administration. So, the School of

[65] *Das königreich Griechenlands in Hinsicht auf Industrie und Agrikultur. Gesammelte Notizen von Ritter Friedrich von Zentner königlich bayerischen Kammerjunker und Ober Lieutenant, Ritter des königlich - griechischen Erlösee - Ordens und Mitgleid mehrerer Industrievereine des In-und Auslandes.* Augsburg 1844.

[66] In his text Zentner mentioned the names of Lorté, Fourné, Tabareau, Couchaud from Lyon, who offered a considerable number of technical works.

[67] As it concerns the thorough teaching of architecture Zentner considered that advanced lessons would be given in the Military school or in the forthcoming university.

[68] In 1839 his brother Theofile Hansen (1813-1891) whose buildings constitute until now the architectural ornements of Athens, was appointed to give also lessons of drawing.

[69] Konstantine Biris, *History of the Polytechnic School* Athens 1952, pp. 486-487 (in Greek).

[70] The main demand was the granting of constitution and consquently the reduction of the royal abuse.

Arts[71] was reorganised and divided in three distinct schools: i) the School of Sundays ii) the Every Day School iii) the Higher School, exclusively consacrated to the instruction of Fine Arts[72].

The curriculum[73] of the School of Sundays comprised elementary algebra, principles of practical geometry, arithmetics but also courses on drawing, construction of objects, courses which from didactic point of view should follow the Greek translation of Francoeur's book, *Linear drawing...,* while their teaching were ensured by M. Georgiades, an architect, who taught the construction of objects 11 hours per week, as well as the drawing, 11 hours per week too.

The curriculum of the Every Day School contained among others, construction of objects, elements of algebra and geometry, applications to the arts, title which undoubtedly permits us to suppose that the applications included at least some elements of perspective. M. Georgiades was appointed to teach the construction of objects and the drawing 3h per week respectively.

In 1844, Lyssandros Kavtanzoglou (1811-1862), a distinguished architect, graduated from the Fine Arts Academy of Rome, was appointed to succeed Zentner, as director of the Polytechnic School, in which remained until his death (1862). However, according to Biris' book, in the first year of his mandate the students could not attend the lessons of descriptive geometry, as well as these of building and architecture[74].

However Kavtanzoglou taking into consideration the complicated situation regarding the studies in the Polytechnic School, in his report of the 5th May 1851 addressing to the Ministry of Internal Affairs tried to elucidate it. In this interesting document[75], (see the photocopy) which we found in the State Archives, among others, he exposed the deficiency regarding the mathematical education, as well as the lack of scenography's (i.e. perspective) lessons which as a main application of the descriptive geometry constituted, as he stressed, an indispensable course, which must be taught practically as its other applications. So, a priori Kavtanzoglou opted for the practical teaching, probably based on the design. In this same framework we could include his remarks regarding the affinity of this Greek institution to the similar French Schools: Ecole des Beaux Arts, Ecole de Arts et Métiers[76], Ecole préparatoire du dessin and his proposition for free access[77].

In this report, Kavtanzoglou expressed his considerations that all this misfortune which reigned in the Polytechnic School could be recovered if the Ministry ordered:

---

[71] This institution is known under several names: Polytechnic school, school of constructing Arts and Professions, school of Craftsmen, Royal School of Arts, School of Industrial Arts. We usually utilize here the name of Polytechnic School.

[72] Official Gazette No 38 9 November 1843. Decree regarding the organization of the School of Arts.

[73] The curriculum of this higher school comprised: archeology, lithography, construction of statues, wood engraving, coopergraphy, drawing etc.

[74] Konstantine Biris, *op. cit.,* p. 70.

[75] Greek state Archives, Secreteriat of the Ministry of Internal Affairs (Otto's reign) f. 2185.

[76] For the early years see Robert Fox, Education for a new age: The Conservatoire des Arts et Métiers, 1815-1830. In Artisan to Graduate ed. by D. Carwell, Manchester: Manchester University Press 1974, pp. 23-38.

[77] The demand for technical training continually increased. So during the academic year 1844-45, the students were 635, and their ages constitutes a peculiar panorama as 11 of them were between the age of 25 to 40 years old, 44 between 20 to 25, 256 between 15 to 20, 270 between 10 to 15 and 54 from 7 to 10 (!). See Konstantine Biris, *op. cit.,* pp. 110-111.

12

firstly a clear distinction of the civil engineers from the military[78] ones and secondly the permission for the civil students to attend theoretical lectures at the university and the practical, mainly based on graphics, at the Polytechnic School.

In 1853, according to the former tradition, Ioannis Papadakis (1820? or 1825-1876), professor of the university of Athens was invited to teach descriptive geometry and perspective[79]. Although he firstly studied in Munich[80], he attended the courses of the «physicomathematical department» of Athens University and graduated from it. As a distinguished student[81] he obtained a stipend from the Greek goverment and studied in Munich and from 1842 in Paris at the Ecole Polytechnique and at the Ecole des Mines[82] (1844). Returning in Greece he was firstly appointed as extraordinary[83] professor of mathematics «and especially of astronomy» on the 3rd March 1850 and on 17th of August 1854 as full professor.

Thus, Papadakis was quite adequate to ensure the teaching of the descriptive geometry and its applications to the Polytechnic School, as he was training in the Grandes Ecoles. So, side by side with his duties[84] in the University of Athens, he started to teach descriptive geometry in the Polytechnic School firstly from 1853 until 1856, twice in a week. *«The lessons of perspective, as application of the descriptive geometry were firstly introduced by I. Papadakis and were taught with zeal and success. These courses were mostly indispensable for the progress of any art»*[85]. We must take into consideration that these lessons regarding perspective were mainly considered as a substitute of elementary architecture. Any way, the above statement makes clear that the teaching of descriptive geometry actually began between 1853 and 1855.

However an ordinary event changed this apparently calm situation. In 1856 the lesson of stenography was introduced in order to recompensate the lack of manuals. Joseph Mindler (?-1868), a Bavarian officer at the Royal court and stenographer[86] of the Parliament was appointed[87] as professor of stenography. As his salary was more important[88] than that of Papadakis[89], the professor of descriptive geometry resigned as a mark of protest.

The director of the School of Arts, Lyssandros Kavtanzoglou proposed to the Ministry of Internal Affairs as a temporary solution to authorize Sotirios Pilotos

[78] According to the royal decree of the 19th April 1833 on the competence of the Ministry of Internal Affairs only the engineering corps was exclusively authorized to elaborate Public Works. Thus, by definition the graduated from the Polytechnic school could not work as engineers.
[79] However its course's material remained unknown.
[80] Konstantine Kotsovilis, *Die griechischen Studenten in München under König Ludvig I von Bayern (von 1826 bis 1844). Werdegang und späteres Wirken beim Wiederaufbau Griechenlands.* München 1995, pp. 190-192.
[81] Proceedings of the Philosophical Department session of 28 December 1840. (M.S.) (in Greek).
[82] Fotini Assimakopoulou, Konstantinos Chatzis, Anna Mahera, *op. cit.,* p. 40.
[83] A non permanent post.
[84] Due to his several duties, Papadakis couldn't present any paper or treatise, apart his meteorological observations.
[85] Journal *Helios* (Sun) of the 12th October 1855. [in Greek]
[86] After many years of research he transfered in Greek the stenographie system of Gabelberger.
[87] Only in 1916 started the process to present a canditature.
[88] The recompense of teachers and professors was defined by the Minister of Internal Affairs.
[89] However Papadakis, as professor of the University could touch only an additional pay.

(Salvatore Pilotto)[90], from Corfu, who studied at the Ecole Centrale des Arts et Manufactures[91] (written in French) in Paris and graduated in 1855 as ingénieur métallurgiste (written in French too) to give lessons on mechanics and especially on descriptive geometry and its applications, as well as on geodesy, gratis[92]. In this report he was also stressing his anterior experience as *«until now he gave successfuly these lessons to 14 regular auditors»*[93]. Thus, the ministerial report ended entreating the king to appoint Sotirios Pilotos (or Pilottos) as full[94] professor. This demand was fulfiled and in 1860 S. Pilotos was appointed as professor of descriptive geometry and its applications, as well as of geodesy too.

(see the royal decree)

Nevertheless at the end of the same year, on the 15th of December 1860, the new minister of Internal Affairs returned on the demand concerning the teaching of descriptive geometry. In his report to the king he stressed the existing gap after Ioannis Papadakis' resignaton, as his courses were indispensable for the surveyors' training. Ending his report the Minister of Internal Affairs proposed that Ioannis Papadakis must be appointed again in order to teach rectilinear trigonometry, descriptive geometry and its applications, as well as elements of statics.

This proposition was accepted[95] and in 1863 by a royal decree Papadakis was appointed and taught until his death in 1876. We must also quote that Papadakis during the politically unstable year[96] 1863-1964, was a member of the collective direction together with his colleagues, professor of chemistry, Stamatios Krinos and the architect Gerasimos Metaxas (1816-1890), professor of architecture and building, trained also in France.

After Kavtanzoglou's death in 1862 and Otto's dethronement in 1863, a new era started for the School and the decree of the 26th August 1863 marked the reorganisation of its aims. Thus, henceforth this institution could ensure:

«Craftsmen's theoretical and practical education as well as to the owners of the manufactures the most necessary arts i.e. building construction, smothery, joinery scuplture, painting, ceramics, tanning, soap-making»[97].

It might be stressed that according to the decree of the 31st October 1863, a school committee, (following the model of the Ecole Polytechnique) was created in order to maintain the order and the discipline of the school.

Dimitris Skalistiris (1815-1883), who, from 1859 was engaged by a royal decree to teach physicomechanics[98] (sic.), became the new director of the Polytechnic School (1864-1873). His first task was the amelioration of the studies, according to the French

[90] Fotini Assimacopoulou, Constantinos Chatzis, Anna Mahera, *op. cit.,* p. 40.
[91] Comberousse Charles, *Histoire de l'École Centrale des arts et manifactures*. Paris Gauthier Villaus 1879.
[92] Indeed he taught gratis until his appointement in 1860.
[93] Greek state Archives. King George's reign unclassified. In 1862 ended Pilotos' engagement to teach.
[94] In our modern terminology.
[95] As his demands for higher recompenses were satisfied.
[96] This interval which started with Otto's expulsion and ended with the arrival of a new king was very agitated.
[97] Gazette of the State no 33. Decree regarding the new organization and direction of the School of Arts.
[98] According to the title of this course we could suppose that Skalistiris gave lectures on theoretical mechanics.

technical ones. Thus, in his letter on the 12th October 1864 addressed to the Ministry of the Internal Affairs, he marked the existence of three technical schools in France, the Schools of Arts and Métiers[99] (presisely he noted that one of them is situated in Aix near Marseille), considering that all these three constituted an appropriate model to follow. Moreover, in this letter he emphasized that France *«owed a lot to these schools regarding the diffusion and the perfection of Arts»*[100].

He openly accused that after the revolution of 1843, the Polytechnic School declined from the targets which were cultivated in these French institutions. Thus, Skalistiris revealed that his very first intention was to reorganize the Greek Polytechnic School according to the French model. Especially in order to facilitate this task he asked the minister to send the Greek consul, Zizinia[101] to Marseille, to provide the regulation of this school in Aix as well as the teaching books of the curriculum[102]. Ending his letter he declared his desire to reorganize this Greek institution on the model of the Ecole des Arts of Métiers of Aix. So, in a certain way Skalistiris started up again Zentner's ideas and marked the need to return to these, i.e. the reorganisation of the technical training.

The new director was a captain of the engineering corps, a graduate from the Military school, who attended the lectures at the Ecole Polytechnique (1838) and later the Ecole des Ponts et Chaussées[103]. Returning to Greece he was appointed professor of bridge construction in the Military School in 1846, as well as professor of physicomechanics in the Polytechnic School, as we have already mentioned.

At the end of 1876 Papadakis died and the teaching of descriptive geometry was ensured by Dimitris Tournakis (1820-1902). Thus, in January 1877, this lieutenant of artillery started to teach descriptive geometry in the Polytechnic School. It might be stressed that Tournakis had a great experience as from 1859 taught this branch of geometry in the Military School. However Tournakis' career in the Polytechnic School was short. In February 1878 he was removed and was replaced by the officer of the engineering corps Nikolaos Solomos, a professor of the Military School, whose teaching career lasted also just a year (he was removed in December 1878). N. Solomos (1840-?) side by side with his educational duties, consecrated his life to write manuals for the Greek artisans and workers[104].

Solomos'successor in the Polytechnic School was Andreas Zinopoulos[105] (1842-1890), a graduate of the École Centrale des Arts et Manufactures, thus a civil engineer,

---

[99] Conservatoire National des Arts et Métiers. *Centcinquante ans de haut enseignement technique au conservatoire national des arts et métiers.* Paris Boutry Daumas 1970.
[100] Konstantinos Biris, *op. cit.,* p. 181.
[101] A descendant of a very wealthy family of Alexandria and a very succesful businessman.
[102] Unfortunately we couldn't find any traces of this regulation or the teaching books in the historical library of the Polytechnic school.
[103] Fotini Assimakopoulou, Konstantinos Chatzis, Anna Mahera, «Elève en France, enseignant en Grèce. Les enseignants de l'Ecole Polytechnique d'Athènes (1837-1912) formés dans les Ecoles d'ingéniers en France». *Jogos de Identitade Profissional: Os engenheiros entre a fromação e acção.* Ana Cardoso de Matos, Maria Paulo Diogo, Irina Gouzévitch, André Grelon (eds) Lisboa, Ediçoẽs Colibri / CIDEHUS-UE/CIUHCT 2009, pp. 25-41.
[104] Konstantinos Chatzis, «Des ingénieurs militaires au service des civils: Les officiers du Génie en Grèce au XIXe siècle in *Science, Technology and the 19th Century state: the role of the Army.* Conference Proceedings edited by Konstantinos Chatzis and Efthymios Nicolaïdis. National Hellenic Research Foundation. Laboratoire Techniques, Territoires et Sociétés / C.N.R.S Athens 2003, pp. 84-86.
[105] Fotini Assimakopoulou, Konstantinos Chatzis, Anna Mahera, *op. cit.,* p. 40.

who started to teach descriptive geometry from 1878 until 1882, and appointed at the direction of the public works too.

In the State Archives, a certificate[106] of 1882 regarding the training of a civil engineer, translated in French, presents the curriculum of that epoch, as well as the high level of teaching, which permitted the young graduate to continue his studies in Gand.

(see the photocopy).

Solomos' dismission matched the plan of new director[107], Gerasimos Mavrogiannis (1828-1905), a former consul in Marseille and Trieste and an erudite specialized in history, who opted for the demilitarization[108] of the school. Of course the military staff was against this decision, which renversed its long standing rule. However after Mavrogiannis' dismissal, the new director of the Polytechnic School was Anastasios Theofilas[109] (1827-1901), a graduate from the Military School, who later completed his studies at the École de Saint-Cyr[110], started the reform of 1887, which transformed the Polytechnic School into universiterian institution, while the military spirit and the austeres discipline revived with him.

In October 1882, the council of instruction of the Polytechnic School in order to enrich its library ordered several books, scientific journals as well as some drawings regarding the descriptive geometry *«because the unexperienced students had absolute need to understand this course»*[111]. In the State Archives we found several receipts[112] of the International bookshop of Athens during the direction (1878-1901) of the architect Anastassios Theofilas. Among the books[113] we can quote that the Polytechnique School bought four copies of Lebon's book on descriptive geometry[114], while in the same year Theofilas approved the expenses for a lithographic leaflet of 168 pages regarding the descriptive geometry[115] in 300 copies, a quite impressive number for 1886.

After A. Zinopoulos' dismissal in November 1882, immediatly Apostolos Apostolou (1840-1918), an officer of the engineering corps, taught the descriptive geometry until 1905. It might be stressed that Apostolou presented, one of the first treatises on descriptive geometry. Thus his lectures during the academic year 1883-1884, were edited in 1883 in Athens, thanks to Thomaidis'[116] will. This treatise was reedited[117] in 1890 and comprised a second part consacrated to the theory of shadows[118]. It might be stressed that the form of this handbook is quite particular, as all its contents are problems.

---

[106] Greek State Archives. Ministry of Interior Affairs. King George's reign I΄ (unclassified) f. 36.
[107] His mandate was very short, from 1876 to 1879.
[108] Konstantinos Biris, *op. cit.,* p. 263.
[109] A vanguard person who among other achievements, translated in Greek in 1861 a modern article regarding photography's applications to topography, Fotini Assimakopoulou, Konstantinos Chatzis, Georgia Manvrogomatou, *op. cit.,* p. 348.
[110] Forini Assimakopoulou, Konstantinos Chatzis, Anna Mahera, *op. cit.,* p. 4.
[111] Konstantine Biris, *op. cit.,* p. 287.
[112] Greek State Archives. Ministry of Internal Affairs. King George's reign (unclassified) f. 36, n° 39.
[113] Of course the commands comprises also scientific journals as for example the Annales des Ponts et Chaussées (1886).
[114] Maybe it concerns the book of Ernest Lebon, *Traité de géométrie descriptive pour l'enseignement secondaire.* Paris 1881.
[115] Greek State Archives. Ministry of Internal Affairs. King George's reign (unclassified) f. 32, n° 89.
[116] The sum entrusted of this will finances up to now some of the editions of the Polytechnic school.
[117] In the front page Apostolou precised his position: professor of the Faculty of Civil engineers.
[118] Andreas Poulos, *op. cit.,* p. 140.

In 1887 the French language became an obligatory course. So, in December of this year, Joseph Cellar was appointed in order to ensure the teaching. In this same year a new decree modified the status of the school, whose name became now *«School of Industrial Arts»* and mainly comprised two Faculties: the faculty (School in Greek) of civil engineers and that of mechanical engineers. Henceforth this institution could provide the scientific education of engineers, who then were ready to attend the challenges regarding the great technical projects of the country (railways, road constructions as well as the construction of the Isthmus of Corinthos). It might be noted that at that period a group of French engineers (Mission Française des Ponts et Chaussées) was invited[119] in order to support the ambitious plans of the Greek prime minister Charilaos Trikoupis (1832-1896)

In January 1888 for the first time an open competition was proclaimed concerning the appointement of an assistant for the topographical exercices. Nikolaos Karakatsanidis (1852-1920), a graduate from the Polytechnic School passed succesfully the exams and later from 1905 until his death taught descriptive geometry. In 1917 he published the first original treatise of descriptive geometry.

However we must refer that September 1890 constitutes a turning point for the history of Polytechnic School as its subordination was modified[120]. Henceforth it was under the direction of public works. This slight modification marked a new era for the institution as the authorities and the administration could more easily understand its needs and its aims[121].

At the end of the XIXth century descriptive geometry was recognized as an indispensable tool for the studies of civil and mechanical engineers. Thus, the proclamation of the 12th of July 1891 regarding the admission of the forthcoming students is quite impressive as among other disciplines[122], the elements of descriptive geometry[123] were also included in it.

However this omnipresent French affinity regarding the professorship, as well as the teaching books mainly used in the renown French institutions lasted until 1897. Henceforth, the subsequent staff searching its training in Germany[124] (Munich, Berlin, Dresden, Karlsruhe etc.) introduced in Greece new ideas and methods.

VI. Conclusion

The introduction, the adoption and the teaching of descriptive geometry is mainly related to the development of higher technical education in Greece during the XIXth century.

---

[119] Yiannis Antoniou, Michalis Assimakopoulos, «Notes on the Genesis of the Greek Engineer in the 19th century: The School of Arts and the Military Academy» in *Science, Technology and the 19th century state: the Role of the Army.* Conference Proceedings edited by Konstantinos Chatzis and Efthymios Nicolaïdis. National Hellenic Research Foundation. Laboratoire Techniques, Territoires et Sociétés / C.N.R.S. Athens 2003, p. 120.

[120] From its establishment was under the direction of Public Finances.

[121] Konstantinos Biris, *op. cit.,* p. 320.

[122] The complete list comprises: algebra, geometry, rectilinear trigonometry, physics, chemistry, drawing.

[123] Konstantinos Biris, *op. cit.,* p. 322.

[124] Biris in his History of Polytechnic School noted that this option appeared after the marriage of crown prince with Kaiser's sister. Konstantinos Biris, *op. cit.,* p. 365.

However, according to several references[125] Ioannis Carandinos, was the first who introduced this important scientific tool in the Ionian Academy.

As the Military School was established (1828) according to the model of the Ecole Polytechnique, it was quite natural that descriptive geometry constituted a main course of the technical education which was ensured[126] by Greek officers of the engineering corps, trained mainly in France.

Thus, during the 19th century the technical education was monopolized by the Military School and the Polytechnic School. Until 1880 the profession of the engineer was exclusively bestowed to the officers of the engineering corps graduated from the Military School.

As it concerns the administration[127] of the Polytechnic School, we must take into consideration that from 1837 until 1901, among the six directors, four were officers of the engineering corps: Friedrich von Zentner (1837-1843), Dimitrios Skalistiris (1864-1873), Dimitrios Antonopoulos[128] (1873-18760 and Anastassios Theofilas (1879-1901).

Without any trace of exaggeration we could state that the officers of the engineering corps gradually transformed the Polytechnic School to an institution for engineers of university level. Thus, only in 1882 according to the law on technical assistants, it was permitted to the graduates of the Polytechnic school to be appointed to the Public Works.

It might also be stressed that a great part of the didactic books of the Military and Polytechnic Schools were written by the officers of the engineering corps. So, the training of the engineers (military and civil) was bestowed to the officers of engineering corps, trained in France, who also had the responsibility to teach descriptive geometry. However two distinct examples reversed this rule: Konstantinos Negris, a former student of the Ecole Polytechnique who taught descriptive geometry in Athens University from 1837 until 1845 and Ioannis Papadakis, a former student of the Ecole des Mines, actual professor of mathematics in the University of Athens, taught descriptive geometry and its applications in the Polytechnic School during (1853-1856) and (1863-1876).

In the Greek institutions the professor of mathematics usually taught the common curriculum, while the teaching of descriptive geometry was bestowed to a different person. Probably also this rule was broken too, when Dimitrios Despotopoulos could teach for a while descriptive geometry in the beginning of his career as professor of mathematics in the Military School.

Descriptive geometry and its applications i.e. perspective, theory of shadows were taught in the Polytechnic School as well as in the Military School. Unfortunately the course's material of Papadakis and his successors remains unknown to us, despite our

[125] See for example Carandinos' notification of the 22th of Mai 1827 or his letter to Fourier of the 1st September 1828.

[126] This tradition lasted until the middle of the XXth century.

[127] We must also quote that Emmanuel Manitakis (1808-1883) officer of the engineering corps was appointed in 1887 President of the Administrative Committe in the Polytechnical School. Manitakis who was trained in France (Lycée St-Louis, Sorbonne, École régimentaire de l'artillerie on Metz) mainly contributed to the development of Public Works in Greece. See Konstantinos Chatzis, *op. cit.,* 2003, pp. 81-83.

[128] Dimitrios Antonopoulos (1821-1885), a former student of the Ecole Polytechnique (X-1848). See Efthymios Nikolaïdis, Les élèves grecs de l'École Polytechnique: 1820-1921 in *La Diaspora hellénique en France* ed. by G. Grivaud Athènes. École Française d'Athènes 2000, pp. 55-65.

research in the State Archives[129]. However we consider that according to the program the students of the Fine Arts, could attend lessons of perspective and scenography (i.e. perspective) given in 1863 by a painter of Italian origin, Vincent Lanza (1822-1902).

We must also take into consideration that an osmotic process characterizes the professorship of the Military School and this of the Polytechnic as several professors taught descriptive geometry[130] in both institutions.

Ending this text we would like to quote that in the newly established university of Thessaloniki Nikolaos Kritikos[131] (1894-1986) during the first year of his appointment taught descriptive geometry (1929-1930).

Silvia Schöneburg, Thomas Krohn

[129] The Archives of the Polytechnic School were classified after 1917.
[130] As well as other disciplines.
[131] During the First World War he attended the lectures of George Polya at ETH Zürich.

19

Bibliography

I. Manuscripts

Greek State Archives
secretary of Military Affairs
Ministry of Internal Affairs i) Othonian period ii) King George's reign
Ministry of Defence i) Othonian period ii) King George's reign

II. Books -Papers

Antoniou Yannis , Assimakopoulos Michalis, "Notes on the Genesis of the Greek Engineer in the 19th century: The School of Arts and the Military Academy" in *"Science, Technology and the 19th century State: The Role of the Army"* Conference Proceedings edited by Constantine Chatzis and Efthymios Nikolaidis. National Hellenic Research Foundation. Laboratoires Techniques, Territoires et Sociétés/ C.N.R.S. Athens 2003, pp. 91-138.

Assimakopoulou Fotini, Konstantinos Chatzis, Mahera Anna, "Elève en France, enseignant en Grèce. Les enseignants de l'Ecole Polytechnique d'Athènes (1837-1912) formés dans les Ecoles d'ingénieurs en France". *Jogos de Identitade Profissional: Os engnheiros entre a formação e acçãa*. Ana Cardoso de Matos, Maria Paulo Digo, Irina Gousévitch, Andre Grelon (eds) Lisboa, Edicoēs Colibri /DIDHUS-UE/CIUHCT 2009, pp. 25-41.

Assimakopoulou Fotini, Konstantinos Chatzis, Mavrogonatou Georgia, "Implanter les Ponts et Chaussées européens en Grèce": le rôle des ingénieurs du corps du Génie 1830-1880. *Quaderns d'Historia de l' Enginyera* Vol. X, 2009, pp. 331-350.

Biris Konstantine, *History of the Polytechnic School*. Athens 1952 (in Greek).

Chatzis Konstantinos, "Des ingénieurs militaires au service des civiles: les officiers du génie en Grèce au XIXe siècle"

Science, Technology and the 19th century Army. Conference Proceedings edited by Konstantinos Chatzis and Efthymios Nikolaidis. National Hellenic Research Foundation, Laboratoire Techniques, Territoires et Sociétés / C.N.R.S., Athens 2003, pp. 69-87.

Fox Robert, *The Savant and the State*: Science and Cultural Philosophy in Nineteenth Century France. The John Hopkins University Study in Historical and Political Science 2012.

Henderson Gerald, *The Revival of Greek Thought (1620-1830)*. New York 1970.

Karas Yiannis, *The Exact Sciences in the Greek regions 15th-19th centuries*. Athens 1991 (in Greek); *Science during the Ottoman rule* Vols 1-2, 1992 (in Greek).

Kardamitsi-Adami Maro, "The first Greek engineers" *Technical Annals* Vol 8 no 4, 1988, pp. 63-89 (in Greek).

Kastanis Andreas, *"The Military School of Evelpides during the first years of its foundation" 1828-1834*. Athens 2000 (in Greek); "The teaching of mathematics in the Greek military academy during the first years of its foundation (1828-1834)". *Historia*

Mathematica, Vol. 30.2003 pp. 123-139; "Descriptive Geometry in 19th century Greece" *Science, Technology and the 19th century state: The Role of the Army. Conference*. Proceedings edited by Konstantinos Chatzis and Efthymios Nikolaïdis National Hellenic Research Foundation. Laboratoire Techniques, Territoires et Sociétés / C.N.R.S. Athens 2003, pp. 152-162.

Nikolaidis Efthymios, Les élèves grecs de l'Ecole Polytechnique: 1820-1921 in *La Dispora Hellénique en France* ed. by G. Grivaud Athenes Ecole Française d'Athènes, 2000, pp. 55-65.

Phili Christine, "La reconstruction des mathématiques en Grèce: l'apport de Ioannis Carandinos (1784-1834) in *L'Europe Mathématique*. Catherine Goldstein, Jeremy Gray, Jim Ritter (eds) Paris Edition de la Maison des Sciences de l'Homme, Paris 1996, pp. 305-319"; "Mathematics and Mathematical Education in the University of Athens from its foundation to the beginning of the XXth century" *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* Vol. 51, 2001, pp. 74-98; Ioannis Carandinos (1784-1834): l'initiateur des mathématiques françaises en Grèce. id. Vol. 56, No 156-157 Juin-Décembre 2006, pp. 79-124; Greek mathematical publications in Vienna in the 18th-19th centuries in Mathematics in the Austrian-Hungarian Europe. *Proceedings of a symposium held in Budapest on August 1, 2009 during the XIII ICHST*. Martina Becvárova, Christa Binder (eds) Prague 2010, pp. 137-147. "L'Académie Ionienne et le Risorgimento in *Europa Matematica e Risorgimento Italiano* a cura di Luigi Pepe CLUEB Bologna 2012, pp. 67-80; "An unpublished letter of Ioannis Carandinos to Fourier…" *Proceedings of the Academy of Athens*. Vol. 87 2012, pp. 27-32 (in Greek); 1837-1937: ein Jahrhundert der hoeheren Institutionen in Griecheland. *Oesterreiches Symposium zur Geschichte der Mathematik. Oesterreichische Gesellschaft fuer Wissenschaftgeschichte*. Miesenbach 2014, pp. 70-87.

Poulos Andreas *Greek Mathematical Bibliography (1500-1900)*. Greek Mathematical Society Athens 1988 (in Greek).

Stasinopoulos Epaminondas, *History of the Military School,* Athens 1954 (in Greek).

Taton Renè, *L'Oeuvre Scientifique de Monge* P.U.F. Paris 1952.

Typaldos-Iacovatos, Gerasimos, *The History of the Ionian Academy*. Preface by Spyros Asdrachas. Athens 1982, (in Greek).

21

Hans Fischer, Jacques Sesiano


Stefan Deschauer


Alfred Holl


Marko Razpet


Ulrich Reich


Renate Tobies


Karl-Heinz Schlote


Zdzisław Pogoda

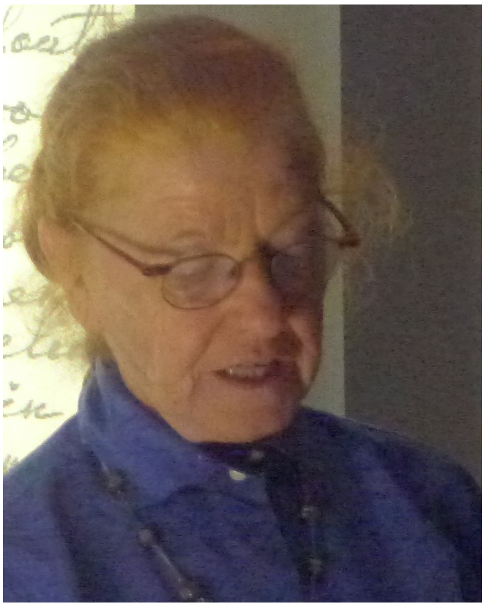

Danuta Ciesielska


Miloš Čanak


Michael Zarichnyi


Stanisław Domoradzki


Martina Bečvářová


Hannelore Eisenhauer (2014)


Klaus Kohl (2014)


Gerd Baron


Silvia Schöneburg


Holger Wuschke


Jacques Sesiano


Nada Razpet


Jasna Fempl Madjarević


Detlef Gronau


Thomas Krohn


Hans Fischer


Annette Vogt


Harald Gropp


Rita Meyer-Spasche


Peter Ullrich


Christa Binder


Waltraud Voss


Menso Folkerts


Winfried Mahler


Michael von Renteln


Gerlinde Faustmann


Wolfgang Breidert


Peter Schmitt

Čanak M.von Renteln Fischer Säckl
J.Sesiano *(verdeckt)* G.Reich Gronau
M.Razpet Fempl Gropp J.Sesiano G.von Renteln Meyer-Spasche

Wuschke Schlote W.Breidert Pogoda Krohn Zarichnyi Domoradzki
Schöneburg Ullrich *(verdeckt)*
N.Razpet Folkerts Deschauer *(verdeckt)*
Bečvářová Vogt Binder M.Breidert Voss

∗ Gerd Baron (120)
Institut für Algebra und Geometrie, TU Wien,
Wiedner Hauptstr. 8-10/104, A 1040 Wien, Österreich
gerd.baron@tuwien.ac.at

∗ Martina Bečvářová (96)
Katedra aplikované matematiky, Fakulta dopravní, ČVUT v Praze,
Na Florenci 25, CZ 11000 Praha 1, Tschechien
becvarova@fd.cvut.cz

∗ Christa Binder
Adolf-Gstöttner-Gasse 6/37, A 1200 Wien, Österreich
christa.binder@tuwien.ac.at

Wolfgang Breidert
Baumgartenstr. 9, D-76316 Malsch, Deutschland
Wolfgang.Breidert@gmx.de
(Marlene Breidert)

∗ Miloš Čanak (77 , 112)
11000 Beograd, Brzakova 4, Serbien
miloscanak12@yahoo.com

∗ Danuta Ciesielska (61)
L&A Birkenmajer Institute for the History of Science,
Polish Academy of Sciences,
ul. Nowy Swiat 72,PL 00-330 Warsaw, Poland
smciesie@cyfronet.krakow.pl

∗ Stefan Deschauer (7)
Technische Universität Dresden, Professur für Didaktik der Mathematik
TU Dresden, D-01062, Deutschland
Stefan.Deschauer@tu-dresden.de

∗ Stanisław Domoradzki (86)
Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Rzeszów
University of Rzeszów, 1 Prof Pigonia Str., PL 35-959 Rzeszów, Poland
domoradz@ur.edu.pl

∗ Hannelore Eisenhauer (103)
Postfach 134, CH 6085 Goldern-Hasliberg, Schweiz
kohl-eisenhauer@bluewin.ch

Gerlinde Faustmann
Kaisersteing. 6, A 2700 Wiener Neustadt, Österreich
gerlinde.faustmann@aon.at

∗ Jasna Fempl-Madjarević (144 , 112 , 77)
5th Belgrade Gymnasium, MM Arhimedes and Math. Institute,
Vidikovački venac 27, YU 11000 Beograd, Serbien
arhimed1@eunet.rs

∗ Hans Fischer (175)
Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt,
Mathematisch-Geographische Fakultät, D 85071 Eichstätt, Deutschland
hans.fischer@ku.de
(Ilse Fischer)

Menso Folkerts
Meggendorferstraße 66, D 80993 München, Deutschland
Museumsinsel 1, D 80538 München, Deutschland
M.Folkerts@lrz.uni-muenchen.de

∗ Detlef Gronau (146)
Riglergasse 6/5, A 1180 Wien, Österreich
detlef.gronau@chello.at

(Elvira Gronau)

∗ Harald Gropp (190)
Henkel-Teroson-Straße 20, D 69123 Heidelberg, Deutschland
d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

∗ Alfred Holl
Technische Hochschule Nürnberg, Fakultät Informatik,
Kesslerplatz 12, D 90489 Nürnberg, Deutschland
alfred.holl@th-nuernberg.de

Klaus Kohl (103)
Postfach 134, CH 6085 Hasliberg-Goldern, Schweiz
kohl-eisenhauer@bluewin.ch

Gerhard Kowol
Fakultät für Mathematik, Universität Wien,
Nordbergstr. 15, A 1090 Wien, Österreich
gerhard.kowol@univie.ac.at

∗ Thomas Krohn (168)
Klepziger Straße 23, D-06112 Halle (Saale), Deutschland
krohn@math.uni-leipzig.de

Winfried Mahler
Pestalozzistraße 11, D-07749 Jena, Deutschland
winfried.mahler@web.de

∗ Rita Meyer-Spasche (195)
Römerstraße 10, D 80801 München, Deutschland
meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de

Christine Phili *(schriftlicher Beitrag)* (215)

∗ Zdzisław Pogoda (60)
Institute of Mathematics, Jagiellonian University,
ul. Łojasiewicza 6, PL 30-348 Kraków, Polen
zdzislaw.pogoda@uj.edu.pl

∗ Marko Razpet (21)
Levstikova 6, SI 1230 Domžale, Slovenija
Marko.Razpet@guest.arnes.si

∗ Nada Razpet (134)
Levstikova 6, SI 1230 Domžale, Slovenija
nada.razpet@guest.arnes.si

∗ Ulrich Reich (31)
Kurpfalzstraße 14, D-75015 Bretten, Deutschland
familiereich@web.de

(Gabriela Reich)

Michael von Renteln
Weiklesstraße 28a, D-76228 Karlsruhe, Deutschland
von@renteln.de

(Gisela von Renteln)

Herwig Säckl
Traberweg 1, D-93049 Regensburg, Deutschland
herwsaeckl@aol.com

(Waltraud Säckl)

∗ Karl-Heinz Schlote (52)
Elie-Wiesel-Straße 55, D 04600 Altenburg, Deutschland
schlote@imai.uni-hildesheim.de

Peter Schmitt
Adolf-Gstöttner-Gasse 6/37, A 1200 Wien, Österreich
Peter.Schmitt@univie.ac.at

∗ Silvia Schöneburg (124)
Davidstraße 13. D-04109 Leipzig, Deutschland
schoeneburg@math.uni-leipzig.de

∗ Jacques Sesiano
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Département de Mathématiques, C 1015 Lausanne, Schweiz
seziano@bk.ru

(Jamilla Sesiano)

Malgorzata Stawiska *(Co-Autorin)* (86)
Mathematical Reviews, 416 Fourth St., Ann Arbor, MI 48103, USA
stawiska@umich.edu

∗ Renate Tobies
Friedrich-Schiller-Universität, Ernst-Haeckel-Haus,
Institut Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin
Berggasse 7, D 07745 Jena
renate.tobies@uni-jena.de

∗ Peter Ullrich (205)
Universität Koblenz-Landau, Campus Koblenz, Fachbereich 3:
Mathematik/Naturwissenschaften, Mathematisches Institut,
Universitätsstraße 1, D-56070 Koblenz, Deutschland
ullrich@uni-koblenz.de

∗ Annette Vogt (181)
MPI für Wissenschaftsgeschichte,
Boltzmannstraße 22, D-14195 Berlin, Deutschland
vogt@mpiwg-berlin.mpg.de

Waltraud Voss
Hauptstraße 3, D-01097 Dresden, Deutschland
waltraud.voss@tu-dresden.de

∗ Holger Wuschke (124)
Universität Leipzig. Math.Inst.Didaktik
Augustusplatz 10, D 04109 Leipzig, Deutschland
holger.wuschke@math.uni-leipzig.de

∗ Mykhailo Zarichnyi (86)
Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Rzeszów
University of Rzeszów, 1 Prof Pigonia Str., PL 35-959 Rzeszów, Poland
zarichnyi@yahoo.com