Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte

XI. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

Der Blick aufs Ganze.

Gibt es große Linien in der Entwicklung der Mathematik?

Tagung, 22. April bis 28. April 2012, Miesenbach (Niederösterreich)

Kurzfassungen der Vorträge

Herausgeber:

Dr. Christa Binder
Institut für Analyis und Scientific Computing
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8-10/101
A 1040 Wien, Österreich

Tel.: +43 1 58801 10129
FAX: +43 1 59901 10199
e-mail: `christa.binder@tuwien.ac.at`

Danksagung:

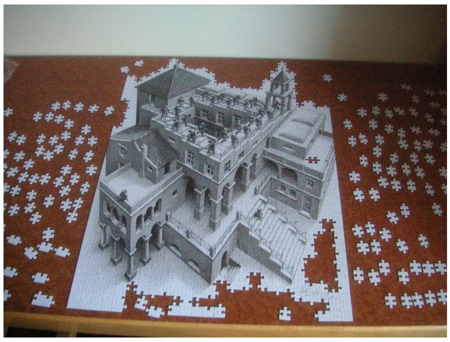
Ohne die großzügige Hilfe der folgenden Institutionen
wäre die Durchführung der Tagung nicht möglich gewesen.
Dafür herzlichen Dank.

International Commission on the History of Mathematics (ICHM)
Amt der Niederösterreichischen Landesregierung, Abteilung Kultur und Wissenschaft
Österreichische Mathematische Gesellschaft
Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien
anonyme Spender

KULTUR NIEDERÖSTERREICH

Layout und Druckvorlage: Peter Schmitt

PROGRAMM

(links) **Gruppenbild** *(von links)*:
(erste Reihe) Enid Grattan-Guinness, Rita Meyer-Spasche, Marlene Breidert, Annette Vogt, Jasna Fempl, Christa Binder, Stefan Deschauer, Martina Bečvářová, Ivor Grattan-Guinness, Danuta Ciesielska, Christine Phili, Sergui Demidov, Fritz Katscher, Waltraud Säckl,
(zweite Reihe) Tomaz Kranjc, Harald Gropp, Marko Razpet, Nada Razpet, Wolfgang Breidert, Katalin Munkacsy, Hans-Joachim Girlich, Herwig Säckl, Zdzisław Pogoda, Stanisław Domoradzki, Wiesław Wójcik, Bernhelm Booss-Bavnbek, Gerd Baron, Gisela von Renteln,
(dritte Reihe) Luboš Moravec, Tercio Girelli Kill, Tatjana Kill, Inge Girlich, Michael von Renteln, Reinhard Siegmund-Schultze

(oben) **Tagungstratsch**
links: Kiki, vierbeiniger Teilnehmer aus Kopenhagen
mitte: Mittagspause: Spanferkel im Börsenhof
rechts: zur Entspannung: ein Puzzle (M.C. Escher), fast fertig

nächste Seite **bei den Vorträgen**
in der ersten Reihe links:
Harald Gropp, Reinhard Siegmund-Schultze, Ivor Grattan-Guinness, Christa Binder
in der ersten Reihe rechts: Friedrich Katscher, Reiner Wieland, Marko und Nada Razpet

Bilder im Text (schwarzweiß):
p. 19: Reinhard Siegmund-Schultze
p. 37: Bernhelm Booss-Bavnbek
p. 51: Danuta Ciesielska
p. 60: Zdzislaw Pogoda
p. 92: Hans-Joachim Girlich
p.127: Tomaz Kranjc
p.129: Zdzislaw Pogoda, Stanislaw Domoradzki, Luboš Moravec
p.138: Ivor Grattan-Guinness
p.145: Bernhelm Booss-Bavnbek *(mit seinem Co-Autor Philip J. Davis)*
p.164: Luboš Moravec
p.175: Wieslaw Wojcic
p.190: Angela Lohri

(Photos: Peter Schmitt)

Gut Ding will Weile haben: Zur langen Geschichte des Funktionsbegriffs

Herwig Säckl, Regensburg

Mit diesem Beitrag möchte ich das Thema „Das große Ganze“ unserer Tagung auf zwei Weisen nutzen:

1. mit einem knappen Resümee eines Ausschnitts der langen Geschichte, die der Funktionsbegriff innerhalb der Mathematik durchlaufen und in Teilen auch mitgeschrieben hat, beginnend mit Oresme um 1380 und endend mit Hausdorff 1914,

2. mit einer kurzen sozial- und bildungshistorischen Betrachtung zur Rolle des Funktionsbegriffs in der Humanismus-Realismus-Debatte im 19.Jahrhundert und zur Rezeption des Funktionsbegriffs in der Lehre an Hochschule und Gymnasium bis in unsere Zeit.

1.

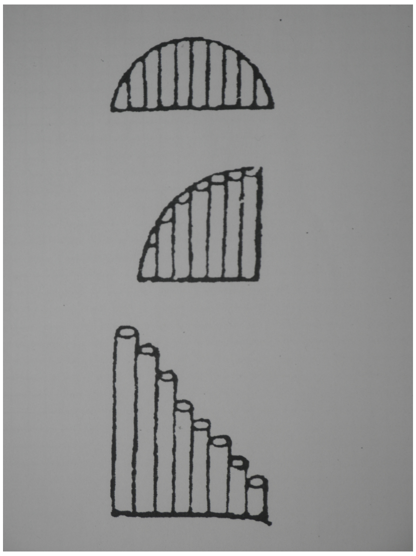
Auf die Frage „Was ist eine Funktion?“ gab Hermann Weyl in seinem Buch „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften“ 1928 eine doppelte und zunächst widersprüchlich erscheinende Antwort:

„Niemand kann erklären, was eine ***Funktion*** *ist. Aber: „Eine Funktion f ist gegeben, wenn auf irgendeine bestimmte gesetzmäßige Weise jeder reellen Zahl a eine Zahl b zugeordnet ist (wie z.B. durch die Formel b = 2a + 1). Man sagt dann, b sei der Wert der Funktion f für den Argumentwert a.“ “* (Weyl [1], 22, Hervorhebung orig.)

Weyl kommentiert den Widerspruch nicht, die Auflösung ergibt sich aber durch das Kapitel „Die aufbauende mathematische Definition“, in dem er auftaucht. Der erste Teil der Antwort bedeutet wohl, dass es nach Weyls Überzeugung keinen idealen Gegenstand „Funktion“ etwa in einem platonischen Universum gebe, dieser Gegenstand muss vielmehr durch eine existenzverleihende Definition aus bereits vorhandener Mathematik geschöpft werden und eben dies leistet der zweite Teil der Antwort (dazu auch Thiele [2], 7).

Weyls „aufbauende“ Definition ist statisch, Assoziationen zu Bewegungen werden vermieden. Damit steht Weyl am Ende der Entwicklung des Funktionsbegriffs, die man auch als eine Emanzipation von mechanischen Vorstellungen sehen kann (dazu auch Juschkewitsch [3], 22).

Die ontologische Dimension in Weyls Betrachtung kann uns zu Nicole Oresme führen, einem französischen Spätscholastiker aus der Pariser Schule, der beim Universalienproblem, also bei der Frage nach der eigentlichen Existenz von allgemeinen Begriffen (Realismus) bzw. von Einzelobjekten (Nominalismus), klar die nominalistische Position einnimmt und allgemeine Begriffe für bloße Namen der Zusammenfassung von eigentlich existierenden Einzelobjekten hält. Oresme stellte in der zweiten Hälfte des 14.Jahrhunderts die Quantität von Qualitäten (Aristotelische Begriffe) graphisch dar. Oresme betrachtete etwa die Qualität Wärme, verteilt auf einem Stab und als extensio dargestellt in der Horizontalen und die zugehörige Quantität, den Grad der Erwärmung des Stabs, die intensio, an jeder Stelle des Stabs als Strecke in der Vertikalen aufgetragen:



Oresme ~ 1380 nach [4], 39

Wir Nachgeborenen neigen dazu, skalierte Abszissen- und Ordinatenachsen hinzuzudenken und eine frühe Form von Analytischer Geometrie und in dieser ex-post-Sicht das Erscheinen einer geometrischen Funktionsauffassung: Funktion als Kurve zu erkennen. Analytisch-geometrische Wechselbeziehungen tauchen bei Oresme aber nicht auf, Oresme überträgt die Quantität-Qualität-Beziehungen ins Geometrische, einerseits in didaktischer Absicht, wie man seinen Worten deutlich vernimmt:

„ ... Daß wir so die Qualität darstellen müssen, damit ihre Verteilung leichter erkannt werde, leuchtet ein; weil nämlich ihre Gleichförmigkeit und Ungleichförmigkeit schneller, leichter und klarer erkannt und beurteilt werden kann, wenn sie in einer Figur ähnlich abgebildet und in einem sichtbaren Beispiel beschrieben wird.“
(Oresme ~ 1380, [5], 131)

aber vor allem, um dann Euklidische Geometrie anwenden zu können. Das gelingt ihm z.B. mit dem geometrischen Beweis dafür, dass man die gleichförmig beschleunigte Bewegung ersetzen kann durch eine gleichförmige mit einer festen mittleren Geschwindigkeit. Dieses Bewgungsproblem finden wir u.a. bei Galilei wieder, bei diesem aber mit der ganz anderen experimentell-analytischen Umgangsweise im Vergleich zur philosophisch-geometrischen von Oresme.

Mit der Einführung der symbolischen Algebra durch Vieta am Ende des 16. Jahr-
hunderts und der Einführung der Analytischen Geometrie durch Descartes und Fermat in der 1.Hälfte des 17. kann man nun graphische Darstellungen wie bei Oresme, eingebettet ins 17. Jahrhundert, interpretieren als Verbindung von geometrischer Funktionsauffassung: Funktion als Kurve bzw. rechnerischer Funktionsauffassung: Funktion als Gleichung. Dazu aus der Geometrie (1637) von Descartes:

„Indem man der Linie y der Reihe nach unendlich viele verschiedene Größen beilegt, erhält man auch unendlich viele für die Linie x, und auf diese Weise unendlich viele Punkte ...

... daß zwischen allen Punkten der als geometrisch zu bezeichnenden Linien, d.h. also derjenigen, die ein genaues und scharfes Maß zulassen, und allen Punkten einer geraden Linie notwendig eine Beziehung bestehen muß, die vollständig durch eine und nur durch eine Gleichung dargestellt werden kann, ...“
(Descartes 1637, [6], 17, 23)

Mit der Formulierung „Beziehung durch eine und nur durch eine Gleichung“ wird eine Wechselwirkung zwischen Funktionsvorstellung einerseits und Darstellung und Eigenschaften von Funktionen andererseits sichtbar, wie sie bis weit ins 19.Jahrhundert immer wieder problematisiert wurde. Insbesondere ist die Heraus- bildung des Begriffs der Stetigkeit eng gekoppelt an die Vorstellungen, die mit Funktionen verbunden werden (Euler, Cauchy, Hankel).

Die bei Descartes sichtbare enge Verbindung zwischen geometrisch und rechnerisch orientierter Funktionsauffassung ist 50 Jahre später im Briefwechsel zwische Leibniz und Johann Bernoulli wieder von Bedeutung. 1673 tritt das Wort Funktion zum 1. Mal auf, Leibniz verwendet es in einer geometrischen Situation, es bedeutet die beim Schnitt gewisser Geraden (Achsen, Tangenten, Normalen) entstehenden variablen Strecken. Volkert ([10], 59 ff) schildert die Situation bei Leibniz sehr genau. In den 90er Jahren wird diese geometrische Vorstellung im Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli als zu eng empfunden (ebda) und es entsteht die Auffassung von Funktionen als analytischen Ausdrücken.

Euler macht sich diese Auffassung seines Lehrers zu eigen und schreibt 1748 im 1.Band seiner „Introductio in Analysin Infinitorum“

„Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist ein analytischer Ausdruck, der auf irgendeine Weise aus jener veränderlichen Größe und aus Zahlen oder constanten Größen gebildet ist.“

(Euler 1748, [7], 18 (Übersetzg. S.))

Im 2.Band greift Euler die vorher zitierte Formulierung von Descartes „eine und nur eine Beziehung...“ auf, um so stetige Kurven zu kennzeichnen. Von dieser globalen Stetigkeitsvorstellung ist Euler nicht mehr abgekommen, obwohl man immer wieder lokale Betrachtungen findet, z.B. in der Integralrechnung 1768:

„Wo nämlich der Wert von X durch Veränderung von x nur wenig verändert wird, dort können die Intervalle, in denen x variiert sicher ziemlich groß gewählt werden. Wo sich aber die Funktion X schon durch eine leichte Veränderung von x stark ändert, dort kann man nur sehr kleine Intervalle nehmen.“
Euler 1768, [8], 187 (Übersetzg. S.)

Erst Cauchy und Bolzano sind am Beginn des 19.Jahrhunderts zum lokalen, unserem heutigen Stetigkeitsbegriff gelangt. In dieser Auseinandersetzung um stetige Funktionen spielen bekanntlich Potenz- und trigonometrische Reihen eine wichtige Rolle, Funktionen also, in deren Darstellung durch analytische Ausdrücke auch unendliche Prozesse verwendet werden. Gregory war 1673 der erste, der diese Möglichkeit in Betracht gezogen hatte.

Die bei Euler immer wieder verwendete Formulierung für Funktionen als analytische Ausdrücke, die auf irgendeine Weise gebildet werden, taucht dann 1837 auch in der Definition „willkürlicher Funktionen“ von Dirichlet auf, einer Definition, die noch im 20.Jahrhundert in Vorlesungen mit ausdrücklichem Hinweis „nach Dirichlet“ verwendet wurde (mdl. Hinweis Freudenthal):

„Man denke sich unter a und b zwei feste Werthe und unter x eine veränderliche Größe, welche nach und nach alle zwischen a und b liegenden Werthe annehmen soll. Entspricht nun jedem x ein einziges, endliches y, und zwar so, dass, während x das Intervall von a bis b stetig durchläuft, y = f(x) sich ebenfalls allmählich verändert, so heißt y eine stetige oder continuirliche Function von x für dieses Intervall. Es ist dabei gar nicht nöthig, dass y in diesem Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängig sei, ja man braucht nicht einmal an eine durch mathematische Operationen ausdrückbare Abhängigkeit zu denken. Geometrisch dargestellt ... erscheint eine stetige Function als eine zusammenhängende Kurve, ...
... So lange man über eine Function nur für einen Theil des Intervalls bestimmt hat, bleibt die Art ihrer Fortsetzung für das übrige Intervall ganz der Willkür überlassen.“
(Dirichlet 1837, [9], 135)

Wir sehen hier die Bezüge zu Descartes und Euler und wir sehen geradezu einen Appell an die Bewegungsvorstellung als die passende Grundlage, auf der der

Funktionsbegriff lebt. Die hier vorausgestzte Stetigkeit ist natürlich für die Definition nicht notwendig, möglicherweise wollte Dirichlet seinem Appell an die Bewegungsvorstellung eine anschauliche Basis geben, überdies sah man zu dieser Zeit zumindest die intervallweise Stetigkeit samt Fastüberalldifferenzierbarkeit als eine sehr natürliche Eigenschaft von Funktionen an. Die Diskussion um „Monsterfunktionen“ (Volkert [10], 99 ff) mit abscheulichen Eigenschaften, die „die lichte Klarheit“ aus der Mathematik vertreiben könnten, so eine Befürchtung um 1880, hatte noch nicht begonnen.

Wir kommen zur letzten Station, in der Bewegungsaspekte vollständig vermieden sind, zur Definition von Hausdorff 1914:

„Aus zwei nichtverschwindenden Mengen A, B können wir geordnete Paare p = (a,b) bilden, deren erstes Element a ein Element von A, deren zweites Element b ein Element von B ist, ... betrachten wir eine Menge P solcher Paare von der Beschaffenheit, daß jedes Element von A in einem und nur einem Paare p von P als erstes Element auftritt.
Jedes Element a bestimmt auf diese Weise ein und nur ein Element b, nämlich dasjenige, dem es zu einem Paare (a,b) verbunden auftritt, dieses durch a bestimmte, von a abhängige, dem a zugeordnete Element bezeichnen wir mit b = f(a) und sagen, daß hiermit in A (d.h. für alle Elemente von A) eine eindeutige Funktion von a definiert sei.“
Hausdorff 1914, [11], 12)

Hausdorff nimmt hier den Funktionsbegriff in seine „Grundzüge der Mengenlehre“ auf, die am Beginn des 20. Jahrhunderts auf dem Weg zu einer Basisdisziplin der Mathematik ist. Damit wird die Bedeutung des Funktionsbegriffs weit über die Analysis hinaus betont. Im Gewand von Abbildungen, Transformationen und Operatoren ist er auch in Geometrie, Algebra, Topologie und Funktionalanalysis wesentlich.
Mit Hausdorffs Definition sind wir in Weyls Zeit angekommen. Ihre Funktionsdefinitionen sind beide bewegungsfrei, sie unterscheiden sich im Grad der Allgemeinheit und der Formalität, entsprechend den angesprochenen Adressaten. Hausdorff wendet sich an Fachmathematiker, Weyl richtet sich an ein größeres Publikum.

2.

Am Beginn des 19.Jahrhunderts hatte der Funktionsbegriff begonnen, die engen Grenzen der kleinen Zirkel forschender Mathematiker zu überschreiten und in die weiten Landschaften des Bildungssystems vorzustoßen. Als Beleg dafür kann das 1802 erschienene Buch „Idee eines ABC der Anschauung“ dienen, geschrieben von Friedrich Herbart, Philosoph, Pädagoge, praktischer Schulmann und Nachfolger von Kant auf dessen Königsberger Lehrstuhl von 1809 bis 1833.

In diesem „ABC der Anschauung“ wird der Funktionsbegriff nicht nur als ein Gegenstand neben vielen für den Mathematikunterricht vorgeschlagen, sondern Herbart verbindet ihn, deutlich aufklärerisch motiviert, mit Naturgestz, mit Weltanschauung, mit moralisch richtigem Verhalten:

„Gewöhnt vielmehr den Jüngling, die Dinge dieser Welt als nur allmählich zum Guten bildsam, - gewöhnt ihn, sie als Größen und ihre Veränderungen als Functionen der bewegenden Kräfte ... zu betrachten. Zeigt ihm, wie allenthalben da das Phantom der Regellosigkeit entwich, wohin die Kenntnis drang; ... Entblößt ihm den lächerlichen Dünkel der Unwissenheit, die von jeher, wie noch heute, da das Gesetz zu leugnen pflegte, wo es ihr nicht klar unter die Augen trat. Enthüllt ihm die Wunder der Analysis, ... Lehrt ihn diese Wunder zu begreifen; er sehe und finde es selbst, wie alle diese Größenbegriffe ineinander hängen und auseinander hervorgehen. Er entdecke sie in der Natur ... So wird er beobachten lernen; er wird das Gesetz, auch wo er es nicht sieht, doch suchen, wenigstens voraussetzen. ... Diesen Regeln wird er vorsichtig sich anzupassen, - sie selbst wird er in den Dienst jener, vorher gefaßten, Idee des Guten, einzuführen und darin zu halten suchen.“
(Herbart 1802, [12], 169 – 170)

Vergleichen wir diese Sätze mit den Vorstellungen von Wilhelm von Humboldt, dem Gründer der neuhumanistischen Bildungsreform, die aus einem Brief von 1793 stammen:

„Meiner und gewiß auch Ihrer Überzeugung nach, fehlt unserem Zeitalter gerade Bildung des Geschmacks, oder noch richtiger, Einfluß eines gebildeten Geschmacks auf die raisonnierenden und handelnden Kräfte.“
(Humboldt, W.v. 1793, [13], Bd.5, 173)

Mit den raisonnierenden und handelnden Kräften verweist Humboldt implizit auf die Humaniora und die Realia, die er 15 Jahre später als dann Verantwortlicher für die preußische Bildungsreform in seinem neuhumanistischen Bildungskonzept zu integrieren suchte, um den Menschen bei der Absicht zu unterstützen,

„soviel Welt, als möglich zu ergreifen, und so eng, als er nur kann, mit sich zu verbinden, um in sich frei und unabhängig zu werden“.
(H. 1808, [13], Bd.1, 235)

Dass es Wilhelm von Humboldt ernsthaft um diese Integration von Humaniora und Realia ging, zeigen die Schulpläne, in denen die gleichgewichtige Behandlung der historischen und sprachlichen Gegenstände (der Humaniora) sowie der mathematischen und naturwissenschaftlichen Gegenstände (der Realia) festgelegt und in den von wissenschaftlichen Deputationen entworfenen Lehrplänen auch konkret umgesetzt wurden.

Wie im Zitat von Herbart deutlich wird, kann der Funktionsbegriff mit seiner ordnenden Kraft, die im Formalen, rein Geistigen und Moralischen ebenso wirksam ist wie in der Anwendung auf die materielle Welt und ihre Gesetzmäßigkeiten, die von Humboldt angestrebte Integration auf natürliche Weise unterstützen, geradezu paradigmatisch darstellen. Und für diese positive Wirkung konnte der Funktionsbegriff auch nach dem Scheitern der Humboldtschen Reform eingesetzt werden, nachdem also die Humanisten und Realisten einen Kampf ausfochten, der das Bildungswesen des ganzen 19.Jahrhunderts geprägt hat und dessen Ausläufer auch heute noch für manche Bewegung sorgen,. Nun konnte der Funktionsbegriff – mit wechselndem Erfolg - als Brücke zwischen den feindlichen Bereichen dienen, da er bei beiden seine Stützpunkte pflegte, bei den Humanisten mit der geistig-formalen und moralischen Stärke, bei den Realisten mit der Anwendung, mit der Möglichkeit die Naturgesetze mathematisch zu fassen. Auf diese Weise konnte der Funktionsbegriff dazu beitragen, Welt umfassend zu ergreifen, ganz wie Humboldt sich das vorgestellt hatte.

Nun, werfen wir von unserer funktionalen Bildungsempore zum Abschluss noch einen Blick auf ein Buch im 1.Parkett des Bildungssystems, den „Cours d`Analyse“ [14]. Dieser Lehrgang der algebraischen Analysis von Cauchy, man könnte auch sagen, diese Funktionenlehre, war im 19. Jahrhundert die wohl wirkungsvollste Vorbereitung auf die Differential- und Integralrechnung. 1821 in Frankreich erschienen, wurde sie schon 1828 ins Deutsche übersetzt. Dieses Buch war für den mathematischen Anfangsunterricht an der Ecole Polytechnique konzipiert, es enthielt aber auch manche Forschungsergebnisse von Cauchy, Stetigkeitsbegriff, Limesbegriff und Konvergenzkriterien etwa, es verwirklichte neue Ansprüche an die mathematische Strenge, es war für 50 Jahre auch eine Monographie für die forschenden Mathematiker und konnte sogar in den gymnasialen Mathematik- unterricht in Frankreich und auch in einigen wenigen anspruchsvollen deutschen höheren Schulen vordringen. Damit stand der Cours am Anfang eines Rezeptionsprozesses, der schließlich um 1900 den Funktionsbegriff auch in den Lehrplänen der deutschen höheren Schulen verankerte.

Das ist bis heute so geblieben, wie die zeitgenössische Lehrplandiskussion zeigt. So werden etwa im aktuellen Lehrplan für den Mathematikunterricht des achtjährigen Gymnasiums in Bayern vier inhaltliche Themenstränge genannt, die sich durch alle Jahrgänge ziehen: Zahlen, Funktionen, Geometrie und Stochastik. Auch auf der Bundesebene mit ihren einheitlichen Abituranforderungen und den Bildungsstandards, die ja der Zähmung des Bildungsföderalismus dienen, finden wir die verpflichtende Leitidee des funktionalen Zusammenhangs. So haben sich die um 1800 erstaunlich früh angestellten Überlegungen Herbarts, wenigstens zum Teil – wohl ohne den moralischen Anspruch – als bemerkenswert zukunftsfähig erwiesen.

Quellen und Literatur

[1] Weyl, H.: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, München 1976 (Erstausgabe 1928)

[2] Thiele, R.: Die Erfindung der Funktion. Der Anteil der frühen Variationsrechnung aus historischer und philosophischer Sicht.
In Binder, C.(Hrsg.): V. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, Wien 1999, 7 – 16

[3] Juschkewitsch, A.P.: Die Entwicklung des Funktionsbegriffs. Aus Ist. Mat. Issled 17, 1966, 123 – 150, übersetzt von Karin Reich, 1972

[4] Krüger, K.: Erziehung zum funktionalen Denken, Berlin 2000

[5] Oresme, N.: Quaestiones disputatae de Euclidis elementis.
In Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Darstellung, Frankfurt 1975, 131 – 135

[6] Descartes, R.: Geometrie, Darmstadt 1969 (Erstausgabe 1637)

[7] Euler, L.: Introductio in Analysin Infinitorum 1, Opera Omnia I/8 (Erstausgabe 1748)

[8] Euler, L.: Institutiones Calculi Integralis 1, Opera Omnia I/11 (Erstausgabe 1768)

[9] Dirichlet, G.: Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen. Dirichlets Werke, New York 1969, 133 – 160 (Erstausgabe 1837)

[10] Volkert, K.Th.: Die Krise der Anschauung, Göttingen 1986

[11] Hausdorff, F.: Grundzüge der Mengenlehre, Berlin 1914

[12] Herbart, J.F.: Idee eines ABC der Anschauung. Sämtliche Werke in 19 Bänden, Berlin 1964, Band 1, 151 – 274 (Erstausgabe 1802)

[13] Humboldt, W.v.: Werke in 5 Bänden, Stuttgart 1960

[14] Cauchy, A.L.: Cours d` Analyse, Paris 1821

Geometric sources of the Moscow school of theory of functions: from C.F. Gauss to D.F. Egorov and N.N. Luzin

S.S. Demidov

1.Introduction The Moscow school of theory of functions of D.F. Egorov and N.N.Luzin, which became one of the most striking events in the mathematics of the XX-th century and the basis (together with the school of St. Petersburg founded by P.L. Chebyshev) of the Soviet mathematical school, was established one hundred years ago: in 1911 in the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* Egorov's paper "Sur les suites des fonctions mesurables" [1], which contained the theorem, known today as Egorov's theorem[1]; and in 1912 in the same journal Luzin's note [2] regarding the so-named C-property[2] were published. The development of this school was rapid and already by the beginning of the twenties years the results of the first generation of Luzitania (the name of the community of young mathematicians which was formed around Luzin – D.E. Men'shov, A.Ya. Khinchin, P.S. Aleksandrov, M.Ya. Suslin and others) transformed Moscow into one of the European mathematical capitals. Their researches were the development of the ideas of the French school of the theory of sets and functions of a real variable (E. Borel, H. Lebesgue, and R. Baire). The basis for the perception of these ideas was prepared by the ideology of the Moscow philosophical-mathematical school and first of all by a most influential mathematician of Moscow at the turn of the XIX-th century and the original philosopher N.V. Bugaev (see [3]). The atmosphere which reigned at this time in the Moscow mathematical community was characterized by an profound interest to applied topics (N.E. Zhukovskii), by a tendency to the philosophy and by the desire to understand the mathematical

[1] Any convergent sequence of measurable functions can be transformed into a uniformly convergent one by ignoring a set of arbitrary small measure.

[2] C-property of measurable functions: each measurable function can be converted into a continuous one, if its values within a set of an arbitrary small measure are suitable altered.

activity in its wide philosophical context (thereby the Moscow mathematical school of this period is known as philosophical-mathematical), and finally by a specific geometric spirit and the adherence to the clear geometric constructions and, in particular, to the construction of the elegant counter-examples geometric in spirit. This spirit found its expression in the works of the founders of the Moscow school of theory of functions, thereby giving to their theoretical constructions a special geometric perception. Thus the purpose of this paper is: to expose geometric component of the development of the Moscow school of theory of functions.

Geometry occupied a special place in the work of the Muscovites since the time of the formation in Moscow in the late 1830's of an important center of mathematical studies. The «Textbook on the Analytical Geometry» (Moscow, 1836), written by one of the founders of the Moscow mathematical tradition – by N.D. Brashman (1796 – 1866)[3], was awarded the Demidov Prize of Petersburg Academy of Sciences. Muscovites developed successfully various branches of geometry (see [5]): V.Ya. Tzinger (1836 – 1907) developed the ideas of M. Chasles and J. Steiner, K.A. Andreev (1848 – 1921) and A.K. Vlasov (1868 – 1922) studied the projective geometry. The most important role in the development in Moscow of geometric studies can be attributed to Karl Mikhailovich Peterson (1828 – 1881). A modest teacher of mathematics in the German Gymnasium (Peterschule) in Moscow, a graduate of Dorpat University, Peterson became one of the best geometers of his time. His researches became the basis on which the original Moscow geometric school was established.

Peterson originated of the burghers of Riga (on his life and works see [5, 6]) and окончил in 1853 he окончил Dorpat University with the scientific degree of Candidate of pure mathematics. His professors in the university were the geometers K.E. Senf (1810 – 1848) and Ferdinand Gotlibovich Minding (1806 – 1885). His tutor was Minding and Peterson was preparing his candidate work "On the deformation of surfaces" [7, 8] under his leadership. Certainly Minding himself posed the problem which was solved by his gifted pupil.

[3] About the works of this mathematician, graduated from Vienna Polytechnic School, who played very important role to the development of mathematics in Russia, see [4].

2. Ferdinand Minding and the dissertation of Peterson. Minding was born in lawyer 's family in Prussia, in the town Kalisz (which now belongs to Poland), and he studied at the universities of Halle and Berlin. Moreover, between 1831 – 1843 he became a private-docent of the University of Berlin. In mathematics he was in some way a self-taught person: among his professors there were not enough distinguished mathematicians. He chose himself the topics of his researches. One of the main themes of his studies became the differential-geometric theory of surfaces – i.e. the ideas containing in Gauss' memoir "General studies on the theory of surfaces" which was published in 1828 [9][4]. The starting point of Minding's studies derived from the problem proposed in 1828 in the third volume of Crelle's journal [10, p. 99] and which was apparently proposed by A.L. Crelle himself (see [11, p. 59]): "Auf einer gegebenen krummen Fläche einen bestimmten Flächenraum mit der möglich-kürzesten Linie einzuschliessen". The solution of this problem was proposed by Minding in his first paper "On the curves of the shortest perimeter on the curve surfaces" [12], published in 1830, which marks the beginning of his studies in this region. As A. Kneser wrote in 1900 [13] (quoted from [11, c. 58]): "A new development of the general theory of surfaces begins, as we know, … in Gauss' studies; Minding can be named as his first successor, who was moving along the paths of the Master, but who much further than Gauss came in many essential points". Minding introduced the concept of the geodesic curvature of a curve on a surface, solved the problem of necessary and sufficient conditions of isometry of the surfaces. He received the important results on the covering of the surfaces, on the deformation of the surfaces and on the properties of some special classes of the surfaces – of the surfaces of revolution, of the surfaces of the constant curvature, etc. (see [5, p. 255 – 257; 11, p. 58 – 92]).

It is very important for us that in 1834 Minding shifted to the Russian Empire and thus continued his activities as the professor of the Dorpat university until his death. He published his most important works in Crelle's journal and in the editions of the Petersburg Academy of

[4] The beginning of the differential-geometric studies of surfaces was stated by L. Euler with several results which remained unknown during a long period – see [5, p. 183 – 185].

Sciences, and in 1864 he was elected as a corresponding-member of this Academy. On the proposal of V.Ya. Bunyakovskii and P.L. Chebyshev he became its honorary member in 1879. Moreover, in 1864 together with his children he received the Russian citizenship – a reminder of this is the appearance of the Russian form of his name: i.e. Ferdinand Gotlibovich Minding.

Among his students of the years 50-s we can see Peterson who started his geometrical studies by his dissertation "On the deformation of surfaces". In this work he deduced the principle properties of the coefficients of the second quadratic form of the surfaces and studied the question on the analytical conditions which determine the surface up to its position in space. Gauss had already established an analytical relation between the coefficients of the first ($Edu^2 + 2dudv + Gdv^2 = ds^2$) and the second ($Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$) differential forms of the surface $x = f_1(u,v),\ y = f_2(u,v),\ z = f_3(u,v)$, which can be represented as $K = \dfrac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}$. Peterson deduced two differential relations between the coefficients of both forms. This result, which was not published, was rediscovered and these equations were published in 1857 by G. Mainardi. Their complete deduction was given in 1868 – 69 by D. Codazzi. Under their names these equations are known in modern literature. (In Russia these equations are named Peterson-Codazzi equations.)

In his dissertation Peterson proved also an assertion known in literature as the Bonnet theorem which O. Bonnet himself published only in 1866: i.e. the six coefficients of the first and second differential forms of the surface define completely this surface up to its position in space.

Minding, who praised Peterson's work, in his short reference wrote that "the work is outstanding". Nevertheless we can only guess why it remained unpublished. It was kept in the university archive and, apparently, its first reader after Minding was A. Kneser who worked in Dorpat university during 1890 to 1900. At this time although Peterson was no longer alive, his name began to acquire a European reputation. The information concerning his dissertation appeared in 1901 in the publication of P. Stäckel [14] and was reported to him by Kneser. The complete text of the dissertation was published only in 1952 in a Russian translation [7,8].

3. Karl Mikhailovich Peterson in Moscow From 1865 Peterson began to teach the mathematics in Petropavlovskoe uchilishche (Peter and Paul German Gymnasium – Peterschule) in Moscow. There seems no information as to why he moved to Moscow and that he did after receiving his diploma of the candidate of pure mathematics in Dorpat. Nevertheless it is clear that during these years he continued to study the theory of deformation of surfaces. He came to Moscow during the period of the reforms of Alexander II. These reforms, the chief of which was the abolition of serfdom, also concerned the realm of the education and science.

The most important among these events for Peterson was the foundation in 1864 of the Moscow Mathematical Society in activities of which he took an active part as one of its founding members. His paper "On the relationships and affinities between the curved surfaces" [15] was published in the first volume of the journal "*Matematicheskii Sborbnik*" (Mathematical Collection) founded by the Moscow Mathematical Society, which appeared in 1866. This article opened a new area of research, which became the hallmark of the Moscow geometers: i.e. the problem of deformation on the conjugate persistent reseau (réseau conjugué persistant). Deformation on the conjugate persistent reseau is the such deformation F_t of the surface F_0 . when the directions of extreme deformation remain constant. The conjugate persistent reseau of deformation is named the network, formed by lines having the directions of extreme deformation, which is conjugated on each surface F_t [16]. The first example of such a deformation was considered still by F. Minding [17], who obtained it during his studies of the deformation of surfaces of revolution. Almost all major papers of Peterson were the studies on the theory of surfaces or on the geometric theory of partial differential equations. There were published in "*Matematicheskii Sbornik*". His last work [18] appeared there in 1882, i.e. posthumously.

It is necessary to say that Peterson was a figure sufficiently isolated – he had no disciples because he did not work in the University, the university professors, though they treated him with respect, maintained at a certain distance – there was a gap separating them from the school teacher. Despite the fact that in 1879 the University of Odessa awarded him a doctorate in pure mathematics "honoris causa" for his studies on the theory of partial differential equations, after his death, in contrast to other prominent founding members of Moscow Mathematical Society, he was not honored to publish a special issue of "*Matematicheskii Sbornik*", dedicated to his memory. Such issue appeared only in 1903 on his 75th anniversary, when his name had already acquired a European reputation. This issue was prepared by the mathematicians of the next generation who studied and developed Peterson's ideas in the late 80s – B.K. Mlodzeevskii (1858 - 1923), and in the 90s – D.F. Egorov (1869 - 1931). Mlodzeevskii gave an overview of Peterson's results on the differential geometry [19], Egorov – on the theory of partial differential equations [20]. These overviews were translated into French in the same year, published in *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* [21]. In 1905 the same edition was published in a French translation the major works of Peterson.

4. Moscow school of differential geometry The researches of Mlodzeevskii and Egorov, which developed Peterson's ideas, marked the beginning of the Moscow school of differential geometry.

After the defense in the 1886 the master's dissertation "Studies on the deformation of surfaces" and in 1889 his doctoral dissertation, "On varieties of many dimensions", Mlodzievskii continued his geometric research into the differential invariants (some of his results were later rediscovered by Darboux) as well as into the development of the ideas of Minding and Peterson on the deformation of certain types of surfaces (see [22]). Egorov, who began his scientific career from the research in Bugaev's arithmology, quickly realized the futility of this trend, and chose as a field of his future studies Peterson's topics – i.e. the differential geometry of surfaces and the geometric theory of partial differential equations. In 1898 he defended his master's dissertation "Partial differential equations of second order with two independent variables. The general theory of integrals; characteristics "(he developed S. Lie’s approach and in many aspects his ideas were close to those of Peterson). Later he began to study the so-called “three-orthogonal potential surfaces”. The main results of his doctoral dissertation "On a class of orthogonal systems" (1901) were included in the second edition of Darboux’ treatise «Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes» (Paris, 1910). The potential surfaces studied by Egorov have been named by Darboux in his honor as E-surfaces. The studies on the differential geometry (on the theory of surfaces) [23] and on the (closely related to this theory) general geometric theory of partial differential equations formed the main topics of Egorov’s mathematical creativity, the development of which he continued until his death. A significant place in the studies of his school (S.S. Byushgens, S.P. Finikov and others) occupied the problem of deformation on the conjugate persistent reseau [16].

5. The geometry in the Moscow school of theory of functions The Moscow school of theory of functions was born and made its first steps in the community of specialists in the field of differential geometry i.e. : Mlodzeevskii, Egorov and their disciples. Mlodzeevskii, at the end of the fall semester of 1900, gave the first course on the theory of functions of a real variable in Moscow. The first important achievement of Muscovites in this new theory, i.e. Egorov's theorem (1911), belongs to Egorov. Although the majority of the research workers of Luzitania such as D.E. Men’shov, A.Ya. Khinchin, P.S. Aleksandrov, M.Ya. Suslin, P.S. Uryson, A.N. Kolmogorov and others were far beyond the borders of differential geometry, their geometric roots determined by the influence of their professors and by way of their education are guessed in their geometric predilections (in topological studies of Aleksandrov and his pupils) as well as in their inclination to simple constructions which were geometric in spirit.

A remarkable manifestation of the geometric component of the work of the representatives of the Moscow school of theory of functions constitutes the work of Luzin himself. It is enough for examine the course of Luzin regarding the theory of functions of a real variable [25], in order to make sure that the geometric manner of his vision regarding of the research objects, as well as the visual clarity and transparency of his exposition. The visual image of his constructions is an integral part of his presentation. When Luzin introduces the concept of the set, he provides [24, p. 8] “a such rough image. Imagine an impermeable transparent shell, as of a sealed transparent bag. It can be assumed that *all* elements *e* of the set M are inside this shell. In addition to these the shell does not contain any other objects. This shell with objects *e*, located inside it, can serve as a image of M consisting of elements *e*. This transparent shell which envelops all the elements (and nothing else except them) is very good representation of that act of unification of elements e, the result of which is the set M ". Other examples in the book [24] are following: " For visual clarity we utilize the following scheme. We represent the sets $A, B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ as a system of concentric circles, the radii of which are smaller and smaller …” (p. 39); “If we utilize a rough image, it can be regarded as the neighbouring interval δ_n simply as a flabby ("swollen") rational point r_n ... "(p. 83); " Regarding "a curve drawn on the plane," our imagination bears the image of a thin stroke, curling in a plane, intersecting, or sometimes not-intersecting itself, " (p. 193). Luzin frequently associates drawings for his exposition. His book [24] contains 184 figures. For comparison, the monograph of I.P. Natanson (of mathematician from Leningrad school) "Theory of functions of real variables" [25] (a much larger volume) contains only 9 figures (!). Such consideration of the subject was influenced by the geometric lessons of Luzin’s professors, in particular, by Egorov’s lectures, instilled a lasting interest to the studies in the geometry. This interest is revealed in his reviews regarding S.P. Finikov’s results [26, 27]. These reviews are excellent manifestations of Luzin’s thorough knowledge of the topic. Moreover in his own work regarding the problem of the deformation on the conjugate persistent reseau [28, 29], which, according to specialists [30], has become a natural culmination of a half-century development of the studies initiated by Peterson. Luzin demonstrated that the surfaces, which allowed the deformation on the conjugate persistent reseau, formed a special class of surfaces. Moreover it may be noted that not all the surfaces have the conjugate persistent reseau.

So even in a time when the Moscow school of theory of functions, having gone through the highest point of its development, became one of the many sections of the emerging Soviet mathematical school, a geometric theme, going back to Gauss and giving the geometric tone to the functional constructions of Muscovites, continued to resound.

Literature

1. Egorov D.F. Sur les suites des fonctions mesurables. In: C.R. Acad. Sci. Paris. 1911. Vol. 152. P. 244 – 246.
2. Luzin N.N. Sur les propriétés des fonctions mesurables. In : C.R. Acad. Sci. Paris. 1912. Vol. 154. P. 1688 – 1690.
3. Demidov S.S. N.V. Bougaiev et la création de l'école de Moscou de la théorie des fonctions d'une variable réelle. In : Boethius. 1985. T. 12. S. 651 – 673.
4. Demidov S.S. Nikolai Dmitrievich Brashman (1796 – 1866) and the development of mathematics in Russia. In: Acta Historiae Rerum Naturalium Necnon Technicarum. New Series. Vol.7. Prague. 2003. P. 63 – 72.
5. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года. Москва: Наука. 1968.
6. Депман И.Я. Карл Михайлович Петерсон и его кандидатская диссертация. В: Историко-математические исследования. Вып. 5. 1952. С. 134 – 164.
7. Петерсон К.М. Об изгибании поверхностей. В: Историко-математические исследования. Вып. 5. 1952. С. 87 – 112.
8. Россинский С.Д. Комментарии к диссертации К.М. Петерсона. В: Историко-математические исследования. Вып. 5. 1952. С. 115 – 117.
9. Gauss C.F. Disquisitiones generales circa superficies curvas. Gottingae. 1828.
10. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 3, Heft. 1. 1828.

11.Галченкова Р.И., Лумисте Ю.Г., Ожигова Е.П., Погребысский И.Б. Фердинанд Миндинг. Л.: Наука. 1970.

12.Minding F. Ueber die Curven kürzesten Perimeters auf krummen Flächen. In Folge der Aufgabe 6, Bd.3, H. 1, S. 99. In: J. reine und angew. Math., Bd. 5, 1830, S. 297 – 304.

13.Kneser A. Übersicht der wissenschaflichen Arbeiten Ferdinand Minding's nebst Biographischen Notizen. In: Z. Mathem. und Phys., Bd. 45, Histor.-litterarische Abteilung, 1900, S. 113 – 128.

14. Stäckel P. K. Peterson. In: Bibliotheca mathematica, (3), Bd. 2, 1901, S. 121 – 132.

15. Петерсон К.М. Об отношениях и сродствах между кривыми поверхностями. В: Математический сборник. Т. 1. 1866. С. 391 – 438.

16. Фиников С.П. Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи. М.-Л.: ОНТИ. 1937.

17. Minding F. Ueber die Beigung krummer Flächen. In: J. reine und angew. Math., Bd. 18, 1838, S. 365 – 368.

18. Петерсон К.М. Об изгибании поверхностей второго порядка. В: Математический сборник. Т. 10. 1882. С. 476 – 523.

19. Млодзеевский Б.К. Карл Михайлович Петерсон и его геометрические работы. В: Математический сборник. Т. 24, Вып. 1. 1903. С. 1 – 21.

20. Егоров Д.Ф. Работы К.М. Петерсон по теории уравнений с частными производными. В: Математический сборник. Т. 24, Вып. 1. 1903. С. 22 – 29.

21. Egorov D.F., Mlodzieiowski B.K. Notice sur Karl Michailovitch Peterson. In: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (2). V. 5. 1903. P. 459 – 479.

22. Россинский С.Д. Болеслав Корнелиевич Млодзеевский. М.: изд-во Московского университета. 1950.

23.Егоров Д.Ф. Работы по дифференциальной геометрии. Под ред. С.П. Финикова. М.: Наука. 1970.

24. Лузин Н.Н. Теория функций действительного переменного. Изд. 2-е. М.: Учпедгиз. 1948.

25. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.-Л.: ГИТТЛ. 1950.

26. Лузин Н.Н. Отзыв о научных работах профессора Сергея Павловича Финикова. В: Историко-математические исследования. 1985. Вып. 29. С. 316 – 318.

27. Лузин Н.Н., Чаплыгин С.А. Научные работы Сергея Павловича Финикова. В: Историко-математические исследования. 1985. Вып. 29. С. 319 – 321.

28. Лузин Н.Н. О существовании алгебраических поверхностей, не имеющих главного основания. В: Доклады Н СССР, т. 19, 1938. С. 21 – 26.

29. Лузин Н.Н. Доказательство одной теоремы теории изгибания. В: Известия АН СССР. Отд. техн. Наук. 1939. №2. С. 81 – 106. № 7. С. 115 – 132. № 10. С. 65 – 84.

30. Кузнецов П.И. Николай Николаевич Лузин (к девяностолетию со дня рождения). В: Успехи математических наук. 1974. Т. 29. Вып. 5 (179). С. 197 – 210.

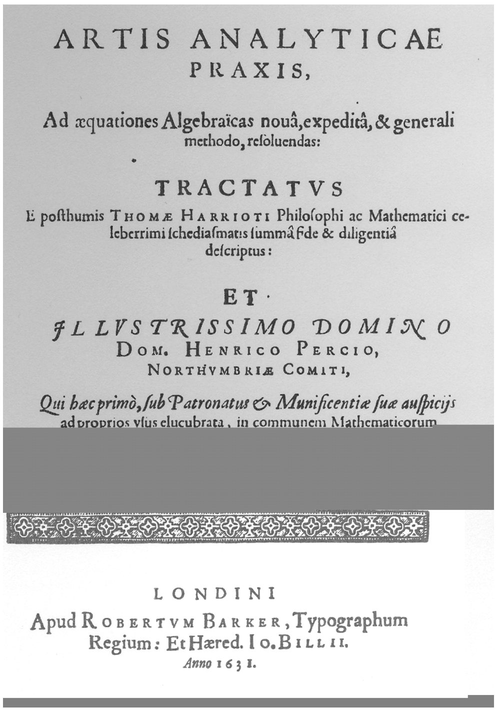
Thomas Harriot (1560-1621) und sein Wiederentdecker, der Norweger Johannes Lohne (1908-1993) – grundlegende Änderungen in der mathematischen Forschung (seit Harriot) und in der Art, über diese zu berichten (seit Lohne)

Reinhard Siegmund-Schultze (Kristiansand, Norwegen)

Thomas Harriot (1560-1621) beginnt allmählich als der bedeutendste englische Mathematiker vor Newton gewürdigt zu werden. Die Ursache für seine relativ geringe Bekanntheit bis zu den historischen Arbeiten Lohnes seit dem Ende der 1950er Jahre ist der völlig andersartige, von Mäzenen gesteuerte Wissenschaftsbetrieb um 1600. Resultat war unter anderem, dass Harriot zu seinen Lebzeiten nicht eine einzige Zeile Mathematik oder Physik veröffentlichte. Seine posthum publizierte "Artis Analyticae Praxis" (1631) enthält nicht alle seine originalen algebraischen Resultate, die von Mathematikern und Historikern vom Hörensagen oder aus indirekter Kenntnis überschätzt (John Wallis) oder unterschätzt (Montucla) wurden, wobei politische und nationalistische Momente mitspielten.

Thomas Harriot (Oxford, c. 1560 – London, 2 July 1621)
war ein Englischer Astronom, Mathematiker, Ethnograph und Sprachforscher. Manche schreiben ihm die Einführung der Kartoffel in England zu. Er war der erste, der eine Zeichnung des Mondes basierend auf einer Beobachtung mit dem Fernrohr machte, im Juli 1609, vier Monate vor Galilei. Nach Studium in Oxford ging Harriot für seinen Mäzen Sir Walter Raleigh auf eine Expedition nach Amerika. Später arbeitete er für den IX. Earl of Northumberland. In dessen Haus bei London wurde er ein schöpferischer Mathematiker und Astronom.

Der norwegische Physiklehrer Johannes Lohne (1908-1993) hat 1959 auf der Grundlage der unveröffentlichten Manuskripte Harriots in und bei London gezeigt, dass Harriot bereits um 1600 das Lichtbrechungsgesetz bewiesen hat, das gewöhnlich und oft auch noch heute Snellius und Descartes zugeschrieben wird. Lohne hat 1965 auch in Ansätzen, die später von Jon V. Pepper verfolgt wurden, gezeigt, dass Harriot die Eigenschaften der logarithmischen Spirale als stereographische Projektion der Loxodromen beweisen konnte und auf dieser Grundlage zwischen 1590 und 1614 und schon vor Napier und Briggs sehr genaue, wenn auch spezielle Logarithmentafeln berechnete, die ihm zur Konstruktion einer genauen Mercatorkarte dienten.


ARTIS ANALYTICAE
PRAXIS,
Ad æquationes Algebraïcas nouâ, expeditâ, & generali methodo, resoluendas:
TRACTATVS
E posthumis THOMÆ HARRIOTI Philosophi ac Mathematici celeberrimi schediasmatis summâ fide & diligentiâ descriptus:
ET
JLLVSTRISSIMO DOMINO
DOM. HENRICO PERCIO,
NORTHVMBRIÆ COMITI,
Qui hæc primò, sub Patronatus & Munificentiæ suæ auspicijs ad proprios vsus elucubrata, in communem Mathematicorum
LONDINI
Apud ROBERTVM BARKER, Typographum Regium: Et Hæred. IO. BILLII.
Anno 1631.

Harriots einzige mathematische Publikation, die *Artis Analyticae Praxis*, wurde 1631 postum von seinem Schüler Walter Warner veröffentlicht.

Hier wurden die Größer - (>) und Kleiner- (<) Zeichen eingeführt.

Aber Lohne wusste und zeigte, dass Harriot selbst diese Symbole nie benutzt hatte und statt dessen ähnliche Zeichen verwendete, die zusätzliche vertikale Striche hatten.(Dies war natürlich eine der weniger wichtigen Entdeckungen Lohnes.)

Lohne schrieb 1975 in einem seiner englischsprachigen Artikel über die „Praxis" im Vergleich zu den Harriotschen Manuskripten. Details dazu sind in (Lohne1965) zu finden.

> "It is well known how Harriot in one of its chapters brought all the right-hand terms over to the left side of the equations, so that he might split the resulting polynomials into a product of suitable binomials. It is far less well known that Harriot consistently used brief symbols and carefully thought-out notation in situations where Viète disheartens us with Greek verbalism. Whereas Viète accepted only positive roots of equations, Harriot's manuscripts also list negative and even complex roots."

Lohne hat auch die Entwicklung der Harriot-Geschichtsschreibung untersucht (unter anderem die Rolle des Astronomen von Zach) und die nur zögernde Bereitschaft der Engländer nach Wallis, die Verdienste ihres Landsmannes anzuerkennen. Seit Lohne hat sich eine kleine Harriot-Industrie entwickelt, die in immer stärkerem Maße auch seine physikalischen Arbeiten einbezieht, so dass Harriot heute manchmal (M.Schemmel) der "englische Galilei" genannt wird. Dies ist zwar eine deutliche Übertreibung wegen der sehr verschiedenen Wirkungen von Harriot und Galilei in ihrer Zeit, dient aber der Öffentlichkeitswirksamkeit im heutigen Wissenschaftsbetrieb. In der Tat hat sich auch die Harriot-Forschung grundlegend geändert seit Lohne. Heute werden die Harriotschen Manuskripte in einem großen deutsch-englischen Gemeinschaftsprojekt (M.Schemmel – J. Stedall) ins Netz gestellt, während mit der Professionalisierung der Wissenschaftsgeschichte Schullehrer wie Lohne kaum noch aktiv in die Forschung eingreifen können.

Nebenstehend ist Lohne etwa im Alter von 75 Jahren. Viele Bilder und Dokumente befinden sich in Lohnes Nachlass, der im Besitz seines Schülers und heute prominenten norwegischen Mathematikers Bernt Øksendal (Oslo) ist.

Obwohl Lohne in erster Linie Physikhistoriker und Physiklehrer war, ist er Zeit seines Lebens stark von der deutschen Mathematikgeschichtsschreibung beeinflusst worden, wie unter anderem aus seinem folgenden Schreiben an den norwegischen Forschungsrat von 1959 hervorgeht, der seine jährlichen Archivreisen nach England großzügig unterstützte:

> "Ich habe versucht, Tafeln, Instrumente und Messungsmethoden zu analysieren. Es zeigte sich, dass eine oberflächliche Untersuchung unzureichend ist. Kontrollrechungen und Kontrollexperimente müssen durchgeführt werden.
>
> Solche exakten Untersuchungsmethoden sind seit langem in der Mathematikgeschichtsschreibung verwendet worden (Jos. E. Hofmann und O. Neugebauer), aber bisher nicht in der Physikgeschichte."

Dies führt zu einem weiteren Thema, zu der Änderung der Bedingungen für Mathematikgeschichtsschreibung seit Lohne und zu den Gründen für seinen relativ geringen Bekanntheitsgrad insbesondere in Norwegen selbst. Hierzu gehören anscheinend auch politische Momente. Eine Ursache ist hierbei Lohnes Kollaboration mit den deutschen Besatzern, für die er als sogenannter „Frontkämpfer" („frontkjemper") gegen die Sowjetunion zog, wofür er nach dem Krieg mit dreieinhalb Jahren Zwangsarbeit büßen musste. Jedoch sind die Wirkungen dieses politischen Einsatzes auf Lohnes Lebenswerk als Historiker nicht eindeutig negativ. Man könnte umgekehrt argumentieren, dass ihn seine Außenseiterrolle in der norwegischen Gesellschaft und seine Isolation in dem kleinen Provinzstädtchen Flekkefjord tiefer in das Studium der Vergangenheit getrieben haben. Lohnes Erforschung der Wissenschaftsgeschichte des 17.Jahrhunderts erstreckte sich auch auf Beiträge über Kepler und Newton. Der bedeutendste Newton-Forscher der neueren Zeit, Derek T. Whiteside, war ein unermüdlicher Propagandist Lohnes.

Wir müssen uns hier abschließend auf einige „Autoritätsbeweise" für Lohnes Bedeutung als Physik- und Mathematikhistoriker beschränken und ansonsten auf seine historischen Beiträge in *Centaurus* und an anderen Stellen verweisen.

Whiteside schrieb 1970:

> „On Newton's initially somewhat crude notions on the path of free fall under terrestrial gravity the author [Lohne] gives a lengthy critique which cuts sharply through a century of muddled thought on the topic by Newton historians."

Harriots Biograph, der US-Amerikaner John Shirley, sagte 1983:

> "Johannes A. Lohne, … has studied Harriot's optical papers more than any other."

Die heute führende Expertin für Harriots Mathematik, Jacqueline Stedall, schrieb 2000:

> "In recent years, by far the best and most sustained research on Harriot's science and mathematics was done by Johannes Lohne."

Der Vortrag konnte auch noch über ein kleines Erfolgserlebnis des Autors berichten, dessen Beschäftigung mit Lohne zur Wiederauffindung des Harriotschen Handexemplars (mit Marginalien) des „Opticae Thesaurus“ von Alhazen-Vitelo in der Ausgabe von F. Risner (1572) in der norwegischen Nationalbibliothek beigetragen hat. Dieses Handexemplar und die darin befindlichen Randbemerkungen Harriots waren die Grundlage oder zumindest der Anstoß für Lohnes erwähnte Wiederentdeckung des Harriotschen Beweises des Sinusgesetzes der Lichtbrechung.

Zusammen mit seinem Kollegen Rolf Nossum in Kristiansand (Norwegen) plant der Autor eine kleine norwegische Biographie über Lohne und dessen historiographisches und politisches Wirken.

Einführende und weiterführende Literatur:

Lohne, J. (1959): Thomas Harriott (1560-1621): The Tycho Brahe of Optics. Preliminary Notice; *Centaurus* 6, 113-121.

Lohne, J. (1963): The Fair Fame of Thomas Harriott [sic]: Rigaud versus Baron von Zach; *Centaurus* 8, 69-84.

Lohne, J. (1965): Thomas Harriot als Mathematiker; *Centaurus* 11, no.1, 19-45.

Lohne, J. (1979): Essays on Thomas Harriot: I. Billiard Balls and Laws of Collision, II. Ballistic Parabolas, III. A Survey of Harriot’s Scientific Writings; *Archive for History of Exact Sciences* 20, 189-312.

Pepper, Jon V. (1968): Harriot’s calculations of the meridional parts as logarithmic tangents; *Archive for History of Exact Sciences*, 4, 359–413.

Schemmel, M. (2008): *The English Galileo: Thomas Harriot’s work on motion as an example of preclassical mechanics*, 2 vols, Berlin: Springer.

Shirley, J. W. (1983): *Thomas Harriot: A Biography*; Oxford: Clarendon Press.

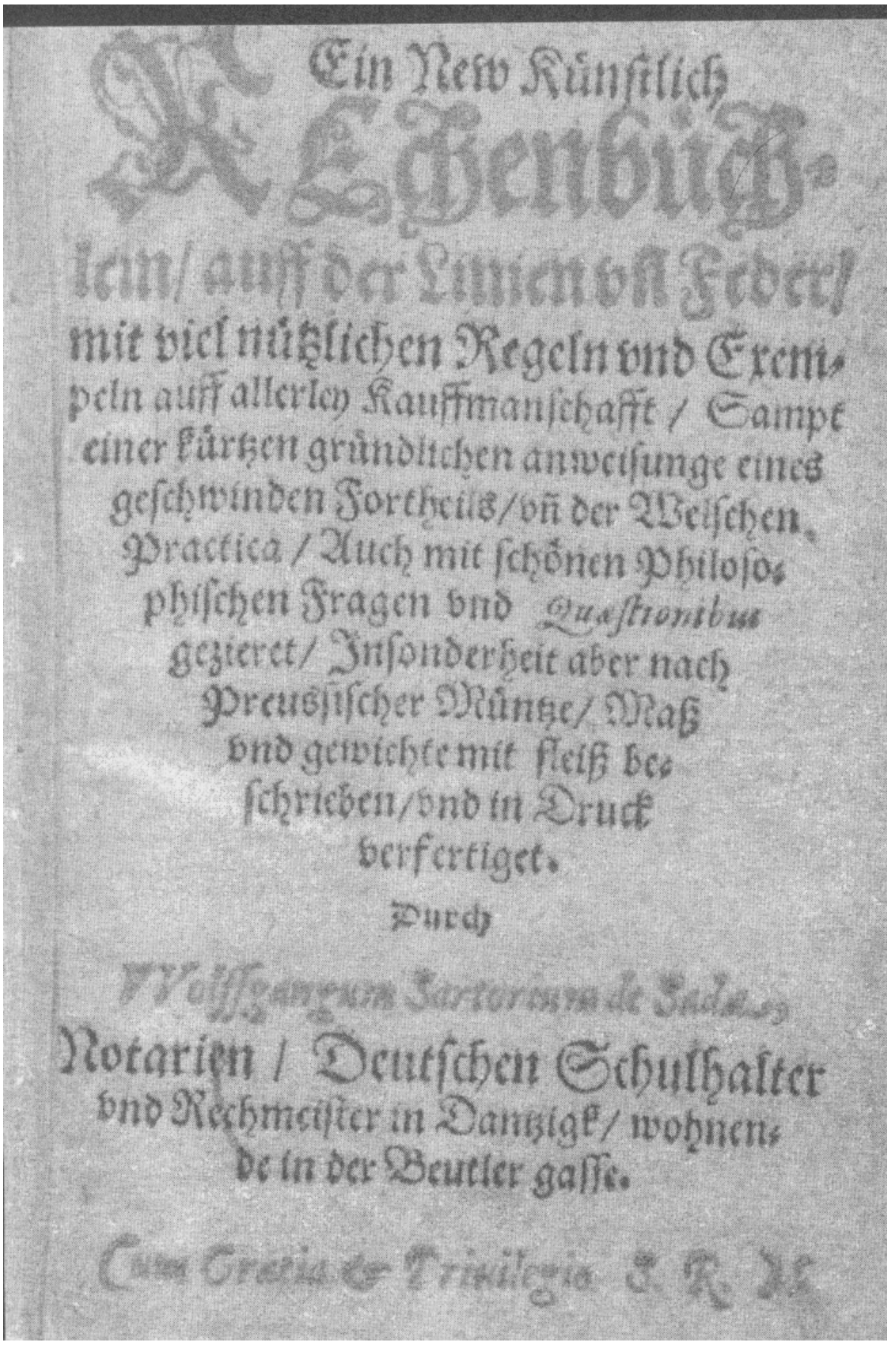
Siegmund-Schultze, R.: Johannes Lohne (1908-1993) revisited: documents for his life and work, half a century after his pioneering research on Harriot and Newton; Archives Internationales d’histoire des sciences 60 (2010), no. 165, 569-596.

Stedall, J. (2000): Rob’d of Glories: The Posthumous Misfortunes of Thomas Harriot and His Algebra, *Archive for History of Exact Sci*ences 54, 455–497.

Tanner, C.H. (1967): Thomas Harriot as Mathematician: A Legacy of Hearsay; *Physis* 9, 235-247, 257-292.

Über die Anfänge der Algebra in Danzig (Wolfgang Sartorius 1592)

Stefan Deschauer



Ein New Künstlich
Rechenbüch-
lein/ auff der Linien vñ Federn/
mit viel nützlichen Regeln vnd Exem-
peln auff allerley Kauffmanschafft / Sampt
einer kurtzen gründlichen anweisunge eines
geschwinden Fortheils/ vñ der Welschen
Practica / Auch mit schönen Philoso-
phischen Fragen vnd Quaestionibus
gezieret/ Insonderheit aber nach
Preussischer Müntze/ Maß
vnd gewichte mit fleiß be-
schrieben/ vnd in Druck
verfertiget.
Durch
VVolffgangum Sartorium de Sada,
Notarien / Deutschen Schulhalter
vnd Rechmeister in Dantzigk/ wohnen-
de in der Beutler gasse.
Cum Gratia & Privilegio S. R. M.

1 Einführung

Im Jahre 1592 ließ ein gewisser Wolfgang Sartorius de Sada ein Rechenbuch (siehe Titelblatt) erscheinen, das in der Literatur bisher noch nicht besprochen wurde. Nur AM verweist auf einen Standort des von Jakob Rhode gedruckten 319 Seiten starken Werks (20 Lagen A–V, die letzte ohne V viij^{v}), nämlich auf die Biblioteka Gdańska Polskiej Akademii Nauk (Bibliothek der Polnischen Akademie der Wissenschaften Danzig), die ehemalige Bestände der Stadtbibliothek Danzig aufbewahrt (Signatur Sb 2727 (1) 8^{0}). Ein zweites Exemplar konnte ich in der Biblioteka Elbląska im. Cypriana

Norwida, der Nachfolgeinstitution der ehem. Stadtbibliothek Elbing, auffinden (Signatur: Sign. Pol. 6.II.5657). Weitere Standorte sind nicht bekannt.
Das Buch weist zumindest eine Besonderheit auf, die eine nähere Betrachtung verdient: ein Kapitel zur Algebra, das als frühestes Dokument für die Vermittlung entsprechender Kenntnisse in Danzig – und damit im gesamten Königreich Polen – gelten darf. Im Ostseeraum war es nur Johannes Junge, der schon vorher algebraische Methoden zum Druck gebracht hatte (Lübeck 1578); die „Rigaer Algebraiker" begannen erst im 17. Jahrhundert mit ihrer Publikationstätigkeit (Ericus Pommergardt 1671).
Der Autor – Sartorius ist vermutlich die latinisierte Form von Schneider oder Schröder – der sich als Notarius, Deutscher Schulhalter und Rechenmeister in Danzig bezeichnet, widmet sein Buch einem sonst unbekannten Jacob Schwabe, von dem er offenbar seine Ausbildung erfahren hat, und bittet auch um Gottes Schutz für dessen „tugendsame geliebte Hausfrau" und die Kinder (1. Vorwort, A ij).
Die Grundlagen der Arithmetik habe er aber von seinem Oheim Martin Heintze gelernt, der u. a. Schlossprediger, Pfarrherr und Erbherr auf Sada war. (2. Vorwort „An die Leser", A vj^{v}). (In Spanien tritt Sada zweimal als Ortsname auf: in Galizien und in Navarra.) Jedenfalls erklärt sich so auch der adelige Namenszusatz unseres Rechenmeisters.
Sartorius gibt weiter an, dass er seine Rechenschule schon im 19. Jahr betreibt, also im Jahr 1574 eröffnet oder übernommen haben muss (A ij^{v}). Der Erfolg seines kürzlich erschienenen Werks zur Buchhaltung (1592) und die Bitten seiner Schüler und Freunde hätten ihn dazu bewogen, auch ein Rechenbüchlein zu schreiben (A iiij), obwohl es schon viele gute und nützliche Bücher dieser Art gebe (Autoren werden nicht genannt), aber man könne des Guten nie zu viel tun (A iij).
Im 1. Vorwort gibt Sartorius den Inhalt seines Buchs, mit dem man zur Not auch ohne „mündlichen Bericht" rechnen lernen könne, nur sehr summarisch wieder. Das Werk ähnelt in Aufbau und Inhalt im Wesentlichen vielen anderen Rechenbüchern des 16. Jahrhunderts. Die Besonderheit liegt aber in den „Philosophischen Fragen" (Titelblatt), im unvollständigen Inhaltsverzeichnis ist von *Cossischen oder Philosophischen Regeln Reimweise / sampt den darzu gehörigen Quœstionibus* die Rede (A iiij^{v}). Hier wäre zu fragen, in welchen Büchern sonst noch Ansatz und Lösung einer algebraischen Gleichung in Reimform dargeboten werden.

2 Die cossischen oder „philosophischen" Regeln mit Beispielaufgaben

Im Text wird dieses Kapitel (L vj–M iiij) mit *Von Philosophischen Quœstionibus vnd Rechnungen* überschrieben.

2.1 Die erste Regel (L vj)

Die Fragen werden also als philosophisch eingestuft, weil sie nicht (besonders) alltagstauglich sind.
Der Begriff „Unität" für die Unbekannte ist auch bei Ries zu finden, und zwar an zwei markanten Stellen in seiner Coss (2. Teil, Vermächtnis an die Söhne, nach 1544 beendet): Dort ist auf S. 329 f. einmal von *examinirung der Vnitet*, dann von *erforschung der Vnitett* die Rede. Vgl. auch Gebhardt (1994, S. 114, 116).

Von 3 Aufgaben zu dieser Regel werden die ersten beiden vorgerechnet.

Von Philoſophiſchen *Quæſtionibus* vnd Rechnungen.

Nachfolgende *Exempla* ſein/
Philoſophiſcher art allein/
Die habn *Speculations* fein/
Vnd doch wol zu machen ſein.
Durch handlung einer *vnitet*,
So man recht damit vmbgeht.
Darumb merck dieſe *REGEL* fein/
Nimb nur ein *Vnitet* allein.
Vnd handel damit anders nicht/
Denn wie die Auffgab laut vnd ſpricht.
So lange biß du kompſt zum end
Auff ein vergleichung/ dann ſetz bhend:
Das *Collect* ſo iſt kommen recht/
Aus handlung der *Vnitet* ſchlecht:
Forn in die Regel *DeTri* fein/
Die vergleichung ſetz Mitten ein.
Vnd die *Vnitet* hinden an/
Procedier nach der Regel/ alßdann:
Wird die *Vnitet* reſoluirt/
Das *Facit* krigſt/ wie ſichs gebürt.

1. Item / Als Gott die ſtadt Tyro vmb jhrer Sünde willen geſtrafft das ſie König Nebucadnezor erobert/ hat er etliche Tauſent erſchlagen / vnd $\frac{1}{3}$ part ſo viel als der erſchlagenen Creutzigen/ vnd $6\frac{1}{2}$ mal ſo viel als der gecreutzigtẽ / in die dienſtbarkeit gefenglich weg führen laſſen/ in Sũma 21000 Perſonen/ Wie viel ſein der erſchlagenen/ der gecreutzigten/ vnd der weg gefürten geweſen? Fack der erſchlagenen 6000. der gecreutzigten 2000. vnd der hinweg geführten 13000. Rechens alſo/ Setz: der erſchlagenen ſein 1 *Vnitet* geweſen/ vnd ſchreib allwege bey der *Vnitet* das *ſignum* rℓ. vnd *operire* damit laut der auffgabe. Stehet alſo.

1 rℓ der erſchlagenen
$\frac{1}{3}$ rℓ der gecreutzigten   Perſonen.
$2\frac{1}{6}$ rℓ der weg gefürten

$3\frac{1}{2}$ rℓ ——— 21000 ——— rℓ
Facit 6000 der erſchlagenen etc.

2. Itℓ einer iſt ſchüldig 30 mℓ/ vnd ſpricht/ wenn er noch $\frac{2}{3}$ vnd $\frac{5}{6}$ ſouiel hette/ als er hat/ ſo kundte er bezalen / Wie viel hat er gehabt? Facit 12 mℓ. Setz er hab 1 *Vnitet* mℓ / darzu Addir $\frac{2}{3}$ vnd $\frac{5}{6}$ wird $2\frac{1}{2}$ *Vnitet*/ das ſol gleich ſo viel ſein als 30 mℓ/ Darumb ſetz in die Regel *DeTri* alſo.

rℓ mℓ rℓ
$2\frac{1}{2}$ ——— 30 ——— 1 Fack 12 mℓ

Typ: Proportionale Gleichungen

$a_1x + ... + a_nx = b \Leftrightarrow (a_1 + ... + a_n)x = b$ (b ist das *Collect*)
Lösung mit Dreisatz: $(a_1 + ... + a_n)x$ — b — x

2.2 Die zweite Regel (L vij/L vij^v)

2 REGVLA.

Ob es sich aber thet begebn
Das du gebracht dein Rechnung ein.
Durch recht handlung der vnitet,
Biß zur Regel DeTri, vnd steht:
Das Signum + so genent wird plus:
Oder das ÷ welchs bedeut minus:
Forn vnd mitten/ Nu mercke fein/
Wenn beid Zeichen eben gleich sein/
Als denn die Zalen Subtrahier/
Seinds aber vngleich/ so Addir.
Procedir nach der Regl/ zuhand:
Wird dir das Facit wol bekandt.
So du auch bey der Regel hindn
Das plus oder minus thust findn/
Zum Facit Addir stets das plus,
Subtrahier dauon das minus.
Ausser der Regl thu schlecht agirn
Mit den Zalen so mit sich führn:
Das Signum, minus oder plus,
Wie der gemein Algorithmus:
Dich lehrt / welchs hieuor offt geschehn/
Vnd jtzt/ wie auch hernach wirst sehn.

Von 11 Aufgaben werden die ersten beiden vorgerechnet.

5. Jte 31 Englische laken ÷ $48\frac{1}{2}$ ellen/ sein gleich 29 stück + $56\frac{1}{2}$ ellen / wie viel ellen helt 1 laken? Facit $52\frac{1}{2}$ elen.

31 ÷ $48\frac{1}{2}$ ellen —— 29 + $56\frac{1}{2}$ elen —— 1

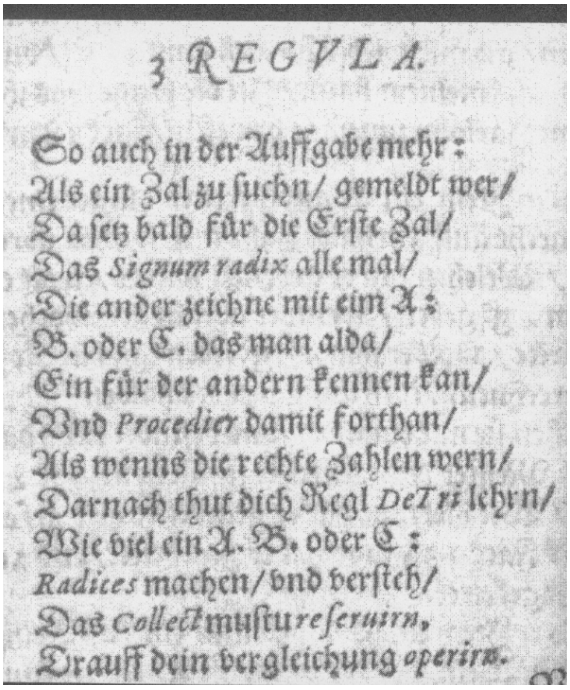
2 laken —— 105 ellen —— 1 laken

12. Item eine Fraw mietet ein Amme vmb ein bedingten lohn vnd leinwandt 8 mk 14 ß $15\frac{2}{3}$ ₰. Demnach werden sie vneins / spricht die Fraw: Du hast mir nu 28 wochen gedienet/vnd hast bereit dein Jarlohn auffgenommen/ gib mir wieder herauß 3 mk 12 ß/ vnd geh aus meinem hause/ Ist die frage was jhr zum Jarlohn zugesagt gewesen? Fac 18 mk.

Typ: allgemeine lineare Gleichungen

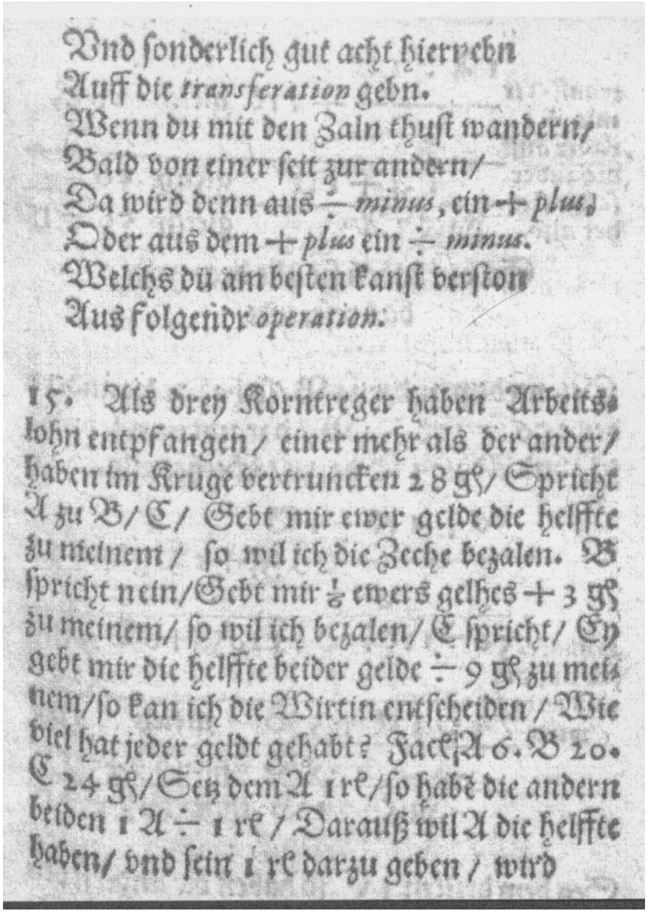
Nr. 12 ist eine nette Aufgabe, die der Autor nicht vorgerechnet hat. Wie kommt er auf das Ergebnis 18 Mark? (1 Mark = 20 Groschen, 1 Groschen = 18 Pfennig)

2.3 Die dritte Regel (M^v/M ij)



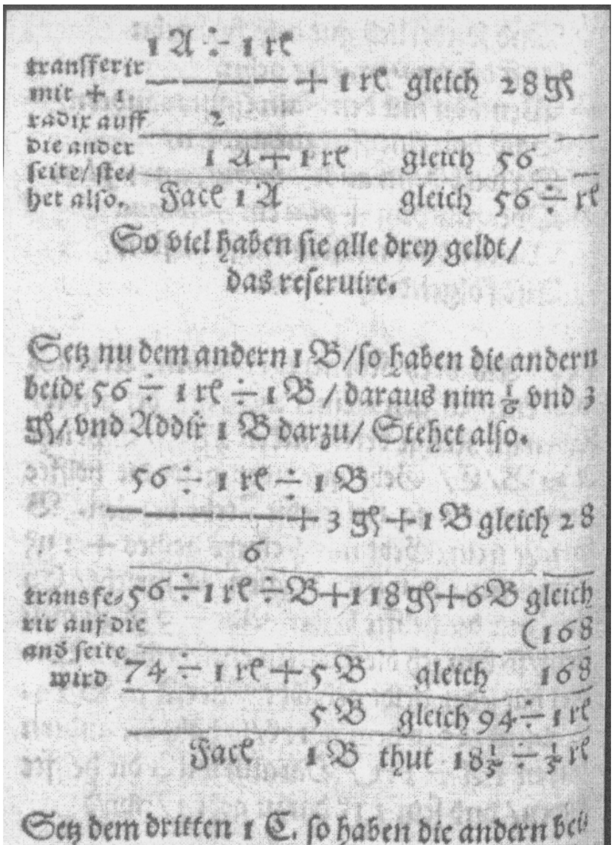
3 REGVLA.

So auch in der Auffgabe mehr:
Als ein Zal zu suchn/ gemeldt wer/
Da setz bald für die Erste Zal/
Das *Signum radix* alle mal/
Die ander zeichne mit eim A:
B. oder C. das man alda/
Ein für der andern kennen kan/
Vnd *Procedier* damit forthan/
Als wenns die rechte Zahlen wern/
Darnach thut dich Regl *DeTri* lehrn/
Wie viel ein A. B. oder C:
Radices machen/ vnd versteh/
Das *Collect* must u *reseruirn*,
Drauff dein vergleichung *operirn*.



Vnd sonderlich gut acht hiergebn
Auff die *transferation* gebn.
Wenn du mit den Zaln thust wandern/
Bald von einer seit zur andern/
Da wird denn aus ÷ *minus*, ein + *plus*,
Oder aus dem + *plus* ein ÷ *minus*.
Welchs du am besten kanst verston
Aus folgendr *operation*.

15. Als drey Korntreger haben Arbeitslohn entpfangen/ einer mehr als der ander/ haben im Kruge vertruncken 28 ß/ Spricht A zu B/ C/ Gebt mir ewer gelde die helffte zu meinem/ so wil ich die Zeche bezalen. B spricht nein/ Gebt mir $\frac{1}{6}$ ewers gelhes + 3 ß zu meinem/ so wil ich bezalen/ C spricht/ Ey gebt mir die helffte beider gelde ÷ 9 ß zu meinem/ so kan ich die Wirtin entscheiden / Wie viel hat jeder geldt gehabt? Facit A 6. B 20. C 24 ß/ Setz dem A 1 rc/ so habe die andern beiden 1 A ÷ 1 rc / Darauß wil A die helffte haben/ vnd sein 1 rc darzu geben / wird



transferir mit + 1 radix auff die ander seite/ stehet also.

$\frac{1\,A \div 1\,rc}{2} + 1\,rc$ gleich 28 ß

1 A + 1 rc gleich 56

Facit 1 A gleich 56 ÷ rc

So viel haben sie alle drey geldt/ das reseruire.

Setz nu dem andern 1 B/ so haben die andern beide 56 ÷ 1 rc ÷ 1 B / daraus nim $\frac{1}{6}$ vnd 3 ß/ vnd Addir 1 B darzu/ Stehet also.

$\frac{56 \div 1\,rc \div 1\,B}{6} + 3$ ß + 1 B gleich 28

transferir auf die and. seite: 56 ÷ 1 rc ÷ B + 118 ß + 6 B gleich 168

wird 74 ÷ 1 rc + 5 B gleich 168

5 B gleich 94 ÷ 1 rc

Facit 1 B thut $18\frac{1}{5} \div \frac{1}{5}$ rc

Setz dem dritten 1 C. so haben die andern beide 56 ÷ 1 rc ÷ 1 C/ daraus nim die helffte ÷ 9 ß/ vnd Addir darzu 1 C. Steht also.

Von 5 Aufgaben wird nur die erste (Nr. 15) vorgerechnet. Der Autor setzt die Lösung auf einer hier nicht abgebildeten Seite (M iij) fort. In dieser Aufgabe bezeichnet er den Term $56-1\ radix$ bzw. $56-radix$ als *Collect.* <

Typ: 3 lineare Gleichungen mit 3 Unbekannten
Lösung mithilfe von Substitutionen

Im letzten Absatz seines Algebra-Kapitels schreibt SARTORIUS:
Solcher vnd der gleichen Exempel wil ich folgends bey jeder Regel zu ende vngefehr nur zwey oder drey setzen / nicht aber der meinung / das ein jglicher Schüler sie alle lernen musse / Sondern nur für die jenigen / so dazu lust vnd vbrige zeit haben / sich ihres gefallens daran zuuersuchen / vnd zu exerciren. Wie dann ein fleißiger Schulmeister eines jeden Schülers ingenium vn̄ gelegenheit hiebey wol wird zu obseruiren wissen / was ihm nutz oder nötig sein wil etc. (M iiij)
Weitere algebraische Aufgaben sucht man in den folgenden Kapiteln aber vergebens.

Literatur

AM = Hoock, Jochen / Jeannin, Pierre (Hrsg.): Ars mercatoria. Band 1 (1470–1600). Paderborn 1991

Deschauer, Stefan: Die Rigischen Rechenbücher. Spiegel einer lokalen mathematischen Tradition im Ostseeraum. In: Algorismus, Heft 73, Augsburg 2010

Gebhardt, Rainer: Einblicke in die Coß von Adam Ries. Leipzig 1994
Junge, Johann: Rechenbuch auff den Ziffern vnd Linien / darinne allerley Kauffmans handlung … Lübeck 1578

Pommergardt, Ericus: Sehl: Hn: Friderici Wedenmeyers / gewesenen Rechen-Meisters alhier Zu Riga / Wolgegründetes Rigisches Rechen-Buch …mit etlichen neuen hinzugesetzten Arithmetischen Aufgaben vermehret … Riga (1671)

Ries, Adam: Coss-Manuskript, 2. Teil (nach 1544 vollendet)

Sartorius de Sada, Wolfgang: Buchhalten mit zwey Buechern / nach Preussischer Muentze / Mass / vnd Gewichte … Danzig 1592 (Jakob Rhode), Sign. Sb 2727 (2) 8^0

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Stefan Deschauer, Technische Universität Dresden, Professur für Didaktik der Mathematik, D-01062 Dresden

E-Mail: Stefan.Deschauer@tu-dresden.de

Die ersten gedruckten Algebrabücher in Europa

Von Friedrich Katscher

Viele Jahrhunderte lang wurde das Wissen der Welt durch mündlichen Unterricht und durch Handschriften weitergetragen. Die einzelnen Handschriften wurden zwar oft abgeschrieben, doch blieb die Anzahl der Exemplare immer sehr gering. Auch war die Zahl der Menschen, die lesen und schreiben konnten, klein. Erst die Erfindung des Buchdrucks um das Jahr 1450 demokratisierte das Wissen und verbreitete eine große Anzahl immer gleicher Texte zu einem moderaten Preis. Davon profitierte neben anderen Wissenschaften auch die Mathematik. Das erste in der neuen Technik vervielfältigte Rechenbuch, der sogenannte „Trienter Algorismus", erschien 1475 in deutscher Sprache in Italien und erst drei Jahre später die „Arithmetik von Treviso" (*larte de labbaco)* auf Italienisch.

Nach teilweisen Anfängen in mehreren Ländern war die Lehre von der Lösung linearer und quadratischer Gleichungen einschließlich der dabei verwendeten Begriffe und Rechenoperationen unter dem Titel „Algebra" von Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi zwischen 813 und 833 in Bagdad endgültig geschaffen worden. Seine Handschrift wurde im 12. Jahrhundert in Spanien ins Lateinische übersetzt. Anfang des 13. Jahrhunderts wurde das neue mathematische Fachgebiet durch das letzte (15.) Kapitel (de questionibus aliebre almuchabala; über Fragen der Algebra und Almukabalah) einer grundlegenden lateinischen *Handschrift* bekannt, die **1202** von **Leonardo von Pisa** (Fibonacci) unter dem Titel **Liber ab**(**b**)**aci** (Buch der neuen indisch-arabischen Rechenmethode) verfasst worden war.

Wir wollen erforschen, welches *gedruckte* Buch als jeweils erstes in den wichtigsten europäischen Sprachen die Algebra lehrte. Dabei muss es sich keineswegs um ein nur ihr allein gewidmetes Werk handeln, sondern es genügt, wenn der Leser in einem genügend langen Abschnitt in das neue mathematische Fachgebiet neben Arithmetik, Zahlentheorie und Geometrie eingeführt wurde.

1) Italienisch - weite Verbreitung

In Italien, wo die Algebra inzwischen gelehrt und weiterentwickelt worden war, erschien zum ersten Mal im Jahre **1494** in **Venedig** ein *gedrucktes* Buch, in welchem die Gleichungslehre ausführlich behandelt wird: Die **Summa de** (Gesamtheit der) **Arithmetica Geometria Proportioni et** (und) **Proportionalita** von **Luca Pacioli** (ca. 1445/50-1517). Wie der Titel sagt, wird in dem 616 Seiten starken, gut geschriebenen, aber hauptsächlich kompilatorischen Werk die gesamte damalige Mathematik (mit Ausnahme der Trigonometrie) durchgearbeitet und auf die *regole de algebra ditte [regole] de la cosa* (Regeln der Algebra [auf Italienisch] genannt „Regeln der Cosa" [cosa, wörtlich Sache, Ding = Unbekannte, Übersetzung des arabischen Wortes *schai*]) entfällt immerhin das achte von neun Kapiteln des nichtgeometrischen Teils mit 78 Seiten auf die Algebra.

Auf Lateinisch heißt gleich *aequalis* und auf Italienisch *eguale*, aber ebenso *uguale.* Gleichmachen, vergleichen heißt auf Latein *aequare,* auf Italienisch jedoch *uguagliare* oder *ag(g)uagliare.* Pacioli nennt daher eine Gleichung Lateinisch *equatio* und Italienisch *equatione* oder *aguaglimento* (Mehrzahl: *aguaglimenti*). (-gl- wird -lj- gelesen.)

Dabei sind die sechs Gleichungsformen, die er behandelt, dieselben wie bei al-Khwarizmi, nämlich modern geschrieben tre aguaglimenti semplici (drei einfache Gleichungen) 1) $ax^2 = bx$, 2) $ax^2 = b$, 3) $ax = b$, und tre aguaglimenti composti (drei zusammengesetzte Gleichungen) 4) $ax^2 + bx = c$, 5) $bx + c = ax^2$ und 6) $ax^2 + c = bx$. Die konstante Zahl wird numero genannt, die Unbekannte cosa, ihr Quadrat censo (Vermögen, Übersetzung des arabischen Wortes *mal*), ihr Kubus cubo, abgekürzt n^o., co., ce, cu. „Ist gleich“ wird durch “facia“ oder „fa“ (es mache), „fara“ (es wird machen), „sia“ (es sei), „equali“ (gleich) oder „se agguagliano“ (gleichen sich) ausgedrückt. Die Koeffizienten und die Konstante sind immer positiv und außerdem sind negative oder Null-Lösungen ausgeschlossen.

Obwohl damals noch nicht einmal die Lösungen der kubischen und quartischen Gleichungen gefunden worden waren und es keine Verwendung für sie gab, hatte Pacioli Namen und Abkürzungen für alle Potenzen der Unbekannten bis zum heutigen x^{29}, die er aus cosa, censo und cubo multiplikativ zusammensetzte, wobei die Primzahlpotenzen separat davon nummeriert wurden. So hieß beispielsweise x^{18} cu.ce.cu (cubo de censo de cubo), weil die dritte mal der zweiten mal der dritten Potenz die 18. Potenz ergeben. x^{19} dagegen hatte die Bezeichnung sexto (sechster) relato, weil 19 die sechste Primzahl nach dem primo (erstem) relato, nämlich 5, ist. (Die erste Primzahlpotenz, 2, hieß ja censo und die zweite, 3, cubo.)

Die Lösung kubischer Gleichungen nennt Pacioli zwar „impossibile“ (unmöglich), schreibt aber „ich würde sagen, dass die Wissenschaft für diesen Fall noch keine Möglichkeit gegeben hat, es zu vollbringen, so wie sie noch keine Möglichkeit gegeben hat, den Kreis zu quadrieren… die Methode, es zu vollbringen, hat sich wegen der improportionalità che è cattiva (argen Unproportionalität) noch nicht ergeben.“ Ein halbes Jahrhundert später, 1545, veröffentlichte Hieronimo Cardano (1501-1576) die Lösung der kubischen Gleichung.

Pacioli schreibt, dass es manchmal notwendig ist, in Gleichungen eine zweite Unbekannte neben der cosa einzuführen, und schlägt für sie einfach die Bezeichnung „quantita“ vor, abgekürzt q^a. (Viele Abkürzungen, die er verwendet, bestehen aus dem Anfangsbuchstaben und rechts oben klein aus dem Endbuchstaben, zum Beispiel primo, prima, der, die erste, p^o und p^a, oder regola, Regel, r^a. Wenn man das weiß, ist es nicht allzu schwer, den mehr als 500 Jahre alten Text zu verstehen, in den auch viele lateinische Stellen eingefügt sind.)

Die „Summa“ wurde von der Universidad de Sevilla digitalisiert und kann daher kostenlos unter der Internetadresse fondosdigitales.us.es auf den Computer heruntergeladen werden.

2) 3) Deutsch - aus Wien

Die nächsten zwei Algebrabücher haben eine Besonderheit: Sie wurden in Wien und zwar nicht in der Gelehrtensprache Latein, sondern auf Deutsch verfasst. Heinrich Schreyber wurde zwischen 1492 und 1496 in Erfurt geboren und 1507 als „Henricus Scriptoris Erdfordensis“ an der Wiener Universität immatrikuliert, die damals im deutschsprachigen

Gebiet in der Mathematik führend war. Von 1514 bis 1517 war er in Krakau, kehrte dann mit dem gräzisierten Namen Grammateus nach Wien zurück, hielt Unterricht und starb hier im Wintersemester 1525/1526. Er veröffentlichte vier deutsche und vier lateinische Bücher, darunter **Ayn new kunstlich Buech welches gar gewiß vnd behend lernet nach der gemainen regel Detre/welschen practic/ regeln falsi vnd etlichen regeln Cosse mancherlay schöne vnd zu wissen notürfftig rechnung auf kauffmannschaft…** Gemacht auff der löblichen hoen schul zu Wienn in Osterreich (sic!) durch **Henricum Grammateum/oder schreyber von Erffurdt der sieben freyen künsten Maister.**

Gewidmet ist das Buch „Dem edlen fürsichtigen weysen Johannsen Tschertte ainer des Senats zu Wienn und Hospitalmaister daselbst… Geben zu Wienn… 1518.“ Nach Hans Tschertte, Festungsbaumeister zur Zeit der ersten Türkenbelagerung Wiens 1529, sind eine Gasse und eine U-Bahnstation im 12. Gemeindebezirk Wiens benannt. Gedruckt wurde das Buch wahrscheinlich erst **1521** in **Nürnberg**.

Nach dem italienischen Wort für die Unbekannte, cosa, in Süditalien cossa ausgesprochen, wurde die Algebra im deutschen Sprachraum Coss genannt, Von den „regeln Cosse“, wie es im Titel heißt, handeln 78 der insgesamt 251 Seiten des Buches.

Grammateus nennt die Unbekannte *prima quantitas* oder *erste quantitet* und kürzt sie 1a oder pri ab. Die Potenzen der Unbekannten heißen 2a oder se (secunda), 3a oder ter (tertia), 4a oder quart (quarta), 5a oder quint (quinta) und 6a oder sext (sexta). Außerdem setzt er hinter jede konstante Zahl „N.“, die Abkürzung für Numerus. Damit lehrt er zu rechnen und formuliert sieben Gleichungsformen mit ihren Regeln. Anschließend gibt er 27 Zahlenbeispiele für die sieben Regeln, also Gleichungen, die er meist zuerst durch die bis ins 16. Jahrhundert angewendete Regula falsi, den doppelten falschen Ansatz, und danach *durch Coss* löst, um deren Überlegenheit zu zeigen. Drei Aufgaben spielen in Wien.

Ein Beispiel: *Es gehet ainer vor etlich junckfrawen sprechendt got grüß euch alle zehen/Spricht aine vnser sein nicht zehen/sundern wann vnser noch so viel weren/vnd ayn drittayl so viel so weren vnser so viel über zehen als vnser darunder seyn. Ist die frag wie viel sein der junckfrawen… Durch Coss: Setz der junckfrawen zal sei 1 pri … also sprich ich dz* [dass] *10N.−1 pri. sein gleich* $2\frac{1}{3}$ *pri.−10N.* $[10 - x = 2\frac{1}{3}x - 10]$ … *so entspringen 6 der junckfrawen zal.*

Das Buch von Schreiber/Grammateus kann vom Münchener Digitalisierungszentrum (MDZ) der Bayerischen Staatsbibliothek heruntergeladen werden.

Im Jahr **1525** erschien bei einem Drucker in **Straßburg**, der sonst protestantisch-theologische Bücher herstellte, das 208 Seiten starke Werk **Behend vnnd Hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebrae/so gemeinicklich Coss genennt werden**. Von seinem Verfasser **Christoff Rudolff** wissen wir nur, dass er aus der damals böhmischen Stadt Jauer in Schlesien (jetzt Javor in Polen) nach Wien kam (Geburtsjahr unbekannt), hier den größten Teil seines Lebens verbrachte, im Jahr 1538 ein Haus in der jetzigen Bräunerstraße 12 kaufte und 1542 oder vorher starb. Welchen Beruf er hatte, ist unbekannt. In der Universität finden sich keine Hinweise auf ihn, doch schrieb er am Ende seines Buches: „Ich hab von meister Heinrichen/so grammateus genennt/der Coss anfengklichen bericht emphangen. Sag im darumb danck." Die Widmung des Buches an den Brixener Fürstbischof Sebastian Sprenz endet mit „Geben zu Wien in Osterreich (sic!)."

Rudolff verwendete für die Unbekannte − Name: Radix − und ihre Potenzen die von Regiomontan eingeführten „Charakter" (Schriftzeichen) und eine gewöhnliche Zahl hatte ebenfalls nachher ein φ-ähnliches Symbol, das dragma (latinisierte Form des Wortes Drachme) oder numerus hieß und eher ein d darstellen sollte. Er benutzte auch die Zeichen + und −. Es gab acht Haupt- und insgesamt 30 Unterregeln zur Lösung von algebraischen Gleichungen beginnend mit modern geschrieben $ax = d$ bis zu $d + ax^4 = bx^8$, und insgesamt 443 Beispiele für sie. Nach der *Regula quantitatis* wird, um *„confusion oder irrsal zu vermeiden"*, eine zweite Unbekannte namens *quantitet*, abgekürzt 1 *quant,* eingeführt (offenbar eine Übersetzung der *quantita* Paciolis).

Wolfgang Kaunzner und Karl Röttel veröffentlichten 2006 das ausgezeichnete (und sehr preiswerte) Buch *Christoff Rudolff aus Jauer in Schlesien*, das neben einer ausführlichen Beschreibung der drei Bücher Rudolffs (darunter zwei kaufmännische Rechenbücher) auch ihre Faksimiles enthält.

4) Französisch - ohne großen Einfluss

In den 1870er Jahren entdeckte der französische Gelehrte Aristide Marre (1823-1918) in der französischen Nationalbibliothek in Paris eine hochinteressante mathematische Handschrift von 648 Seiten aus dem Jahr **1484** (zehn Jahre vor der *Summa* Paciolis), die fast gänzlich unbekannt geblieben war. Sie war von dem, wie er sich selbst bezeichnete, Pariser „Algoristen" **Nicolas Chuquet** (gestorben 1487 oder 1488) in Lyon verfasst und hatte den Titel **Triparty en la science des nombres** (Dreiteiler in der Wissenschaft der Zahlen). Der dritte Teil handelt von den Unbekannten und ihrer *rigle* (Regel) und war so meisterhaft, dass man Chuquet zu Recht als „Vater der französischen Algebra" bezeichnet. Für unser 12, 12x, $12x^2$, $12x^3$ schrieb er $.12.^0$ (!), $.12.^1$, $.12.^2$, $.12.^3$ und er hatte auch negative Koeffizienten und „denominacions" (Potenzexponenten), z. B. „wer $.72.^1$ durch $.8.^3$ dividieren will, wird $.9.^{2.\bar{m}}$ finden", bedeutet heute $72x/8x^3 = 9x^{-2}$ und $.84.^2$ dividiert durch $.7.^{3.\bar{m}}$ ergibt $.12.^5$. Er nannte die Unbekannten auch *les premiers* (die ersten) und hatte für unser x daher auch ein Zeichen ähnlich wie ein großes P. Komplexe Lösungen nannte er „impossibles".

Die Handschrift gelangte nach dem Tod Chuquets in den Besitz des unweit von Chuquet wohnenden gebürtigen Lyoners **Estienne de la Roche**, der **1520** in **Lyon** das Buch **Larismetique nouellement composee** (Die neu verfasste Arithmetik) veröffentlichte, in welchem er mehrere lange Passagen der *Triparty* wortwörtlich abschrieb. Es war das erste gedruckte Algebrabuch eines Franzosen, enthielt aber viele Erkenntnisse Chuquets nicht und hatte kaum einen Einfluss auf die weitere Entwicklung der französischen Mathematik.

5) 6) Latein - von zwei Deutschen, eines erschienen in Paris

1544 erschien bei dem Nürnberger Verleger Johann Petreius (der ein Jahr vorher das berühmte astronomische Werk des Kopernikus *De Revolutionibus Orbium Coelestium* und ein Jahr später die *Ars magna* von Hieronimo Cardano druckte) das 656 Seiten umfassende lateinische Werk **Arithmetica integra** (Vollständige Arithmetik) des deutschen protestantischen Theologen (Freund von Martin Luther und Philipp Melanchthon) und Mathematikers **Michael Stifel** (auch Stiefel, 1486/87-1567, 1524-1527 evangelischer Pfarrer im Schloß Tollet in Oberösterreich), bestehend aus drei „Büchern“. Das dritte von mehr als 180 Seiten ist den Coss-Zahlen und ihrer Regel, also der Algebra, gewidmet. In der europäischen Wissenschaftssprache Latein geschrieben wurde das Werk natürlich auch außerhalb Deutschlands gelesen. Der Großteil der algebraischen Aufgaben geht, wie Stifel schreibt, auf Christophorus Rudolf (sic!) zurück.

Eine deutsche Übersetzung der *Arithmetica integra* wurde 2007 unter dem Titel *Michael Stifel. Vollständiger Lehrgang der Arithmetik* von Eberhard Knobloch und Otto Schönberger veröffentlicht.

Wegen zu geringer Auflage oder zu großer Nachfrage war die *Coss* von Christoff Rudolff bald, selbst zum vierfachen Preis, nirgendwo mehr zu haben und daher entschloss sich Stifel *Die Coss Christoffs Rudolffs. Die schönen Exempeln der Coss gebessert vnd sehr gemehrt,* also neu bearbeitet, herauszugeben. Das 1006 Seiten starke Buch erschien 1554 in Königsberg in Preußen.

Der deutsche Mathematiker, Astronom und Kartograph **Johann Scheubel** (1494-1570), der 1513 an der Universität Wien zu studieren begann und später an der Universität Tübingen Professor der Arithmetik, Algebra und Geometrie war, schrieb sechs Bücher, darunter *Evclidis megarensis*, *Philosophi & Mathematici excellentissimi, sex libri priores, de Geometricis principiis* (Die ersten sechs Bücher über die geometrischen Grundlagen des hervorragendsten Philosophen & Mathematikers Euklid von Megara, Basel 1550). Nach 6 Seiten Vorwort folgen 76 Seiten mit dem Titel „Brevis regularum algebrae descriptio“ (Kurze Beschreibung der Regeln der Algebra), bevor der Euklid-Teil beginnt.

Dieser algebraische Vorspann fand so großen Anklang, dass er **1551** und **1552** in **Paris** als eigenständiges Werk mit dem Titel **Algebrae compendiosa facilisque descriptio** (Kurzgefasste und leichte Beschreibung der Algebra, 104 Seiten) in zwei identischen Auflagen gedruckt wurde. Mit diesem Werk, von dem noch mehr als 50 Exemplare existieren (eines in der Universitätsbibliothek Salzburg), wurde Scheubel zum Wegbereiter der Algebra in Europa. Hier das Urteil unseres Kollegen, des Scheubel-Forschers Ulrich Reich: „Scheubel war ein ganz wichtiger Entwickler und Übermittler der Algebra. Er ist das Bindeglied von Heinrich Schreyber und Christoff Rudolff von Wien nach Frankreich und zu Robert Recorde in England. So hat er einen ganz wesentlichen Beitrag zur Europäisierung der Mathematik geleistet.“

6) Spanisch

1552 erschien in **Valencia** das 288 Seiten starke spanische Buch **Libro primero, de Arithmetica Algebratica, enel qual se contiene el arte Mercantiuol, con otras muchos Regulas del arte menor, y la Regla del Algebra, vulgarmente llamada Arte mayor, o Regla de la cosa…** compuesto, ordenado, y hecho Imprimir por Marco Aurel, natural Aleman**:** **Intitulado, Despertador de ingenios** (Erstes Buch der algebraischen Arithmetik, in welchem die Kaufmannswissenschaft mit anderen Regeln der kleineren Kunst und die Regel der Algebra, volkstümlich größere Kunst oder Regla de la cosa genannt, enthalten ist… verfasst, geordnet und gedruckt worden durch **Marco Aurel, gebürtiger Deutscher**; betitelt: Wecker der geistreichen Menschen). Von den 24 Kapiteln handelt die zweite Hälfte von *ygualaciones* (Gleichungen). Als Deutscher hatte der Autor mit großer Wahrscheinlichkeit auch deutsche Werke studiert, doch nennt er keinen einzigen deutschen Cossisten. Das Buch endet mit den deutschen Worten: Gedult in armut. books.google.com hat das Buch unter *Marco Aurel Libro primero* digitalisiert.

7) Englisch

Als letztes in den europäischen Hauptsprachen erschien **1557** in **London** das 332 Seiten lange englische Mathematikbuch **The whetstone of witte, whiche is the seconde parte of Arithmetike: containyng thextraxtion** (sic!) **of Rootes: The Coßike practise, with the rule of Equation: and the woorkes of Surde Nombers** (Der Schleifstein des Verstandes, welcher der zweite Teil der Arithmetik ist; enthaltend das Wurzelziehen, die cossische Praxis mit der Gleichungsregel [132 Seiten]**:** und die Aufgaben der irrationalen Zahlen). In der Widmung findet man den Autor **Robert Recorde**, *Phisitian* (Arzt) (zirka 1510-1558), der schon je ein populäres englisches Buch über Arithmetik, Geometrie und Astronomie verfasst hatte.

Der Titel des Buches beruht darauf, dass das Wort cos, abgeleitet von italienisch cosa, auf Lateinisch Schleif-, Wetzstein heißt. Ein Gedicht auf der Titelseite weist auf seinen großen Nutzen zur Schärfung der geistigen Fähigkeiten, in heutigem Englisch „wit“ (auch Witz), hin.

Scheubelius wird in dem Buch zehnmal genannt, was zeigt, dass Recorde dessen lateinisches Algebrabuch gründlich studiert hat. Dementsprechend verwendete er seine Methoden und seine *signes* (Schriftzeichen) für Potenzen bis zu unserem x^{80}, seine Wurzelhaken sowie zum ersten Mal in England + und −. *Und um die langweilige Wiederholung der Wörter „ist gleich“ zu vermeiden,* führte er unser jetziges Gleichheitszeichen ein, *a paire of paralleles, or Gemowe (Zwillings-) lines of one lengthe,* allerdings im Druck mehr als ein Zentimeter lang, mit der Begründung: *bicause noe.2. thynges can be moare equalle.*

Der Text ist ein Zwiegespräch zwischen Meister und Schüler. Das Buch endet tragisch, was für ein mathematisches Werk ziemlich ungewöhnlich ist. Der Master, also Robert Recorde, muss nämlich seinen Unterricht für immer beenden, weil er ins Gefängnis abgeholt wird − vermutlich wegen Geldschulden. Der Scholar sagt: „Mein Herz ist durch diese plötzliche Unruhe so mit Schwermut bedrückt, dass ich meinen Kummer nicht ausdrücken kann. Aber ich will mit all denen, die ehrliches Wissen lieben, beten, dass Gott in seiner Barmherzigkeit Ihre Schwierigkeiten beenden und Ihnen solchen Frieden geben wird, wie ihn Ihre mühevolle Arbeit verdient.“ Doch dieser Friede war leider der Tod. Im King’s Bench Prison in Southwark (Süd-London) ist Recorde nämlich im darauffolgenden Jahr gestorben.

Die Internetseite des Digitalisats lautet: www.archive.org/details/TheWhetstonOfWitte

Wenn wir die Geschichte der Algebra Revue passieren lassen, finden wir, dass die Unbekannte und ihre Potenzen zuerst in Worten ausgedrückt und später vor allem Abkürzungen dafür verwendet wurden. In Italien wurden numero, cosa, censo und cubo durch n^{o}., co., ce. und cu. abgekürzt. Regiomontan verwendete 1456 für unser heutiges x das Kürzel rs oder rx (was von beiden lässt sich nicht feststellen) für res (Ding, Sache) oder radix (Wurzel) und cs für census (das Quadrat der Unbekannten). Das Zeichen cs wurde später für den Kubus der Unbekannten gebraucht und für ihr Quadrat wurde ʒ, das z der deutschen Kurrentschrift, verwendet, das heißt, aus census wurde zensus. Diese Zeichen waren längere Zeit in Gebrauch. Der Franzose François Viète/Franciscus Vieta (1540-1603) benutzte 1590 die Vokale A, E, I, O, U, Y für die Unbekannten und die Konsonanten B, G, D für die konstanten bekannten Zahlen, der Engländer Thomas Harriot (1560-1621) statt dessen die entsprechenden Kleinbuchstaben. Erst René Descartes/Renatus Cartesius (1596-1650) führte 1637 in seiner *Geometrie* die letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z, als Unbekannte (oder Variable) und kleine Zahlen rechts oben als Potenzexponenten ein, was wir als besonders praktisch noch heute verwenden.

Doch in Wirklichkeit ist es vollkommen egal, welche Symbole für die Unbekannten und ihre Potenzen benutzt werden. Viel wesentlicher ist es, die Regeln für ihren Gebrauch zu erlernen, also wie man sie addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert, potenziert und radiziert. Eine wichtige Voraussetzung ist auch die Vorzeichenregel, dass + mal + und − mal − plus und + mal − und − mal + minus ergibt und dass eine Größe auf die andere Seite der Gleichung gebracht das Vorzeichen wechselt. Der Lösungsweg für die quadratischen Gleichungen wurde schon von al-Khwarizmi gezeigt und für die kubischen und quartischen Gleichungen von Hieronimo Cardano 1545 in der *Ars magna* veröffentlicht.

Der Blick auf die ganzen Zahlen --- Remarks on the development of numerical notation

Harald Gropp

d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

1. Introduction

In this paper the development of numerical notation will be discussed by also using the recently published book “Numerical Notation” by Stephen Chrisomalis [ch] and my book report [g4]. Due to several reasons it is not a discussion of *grosse Linien in der Entwicklung der Zahldarstellung*. It is rather a collection of different topics as a complement to the book [ch] and my report [g4] and in preparation for a broader discussion in the future.

2. A book review

“Over 100 different numerical notation systems spanning over 5,000 years and every inhabited continent” [ch, p. 360].

What the book of Chrisomalis contains, is really a world of numerical notations starting from earliest textual sources in ancient Mesopotamia and ending at the end of the twentieth century in Northern Alaska, covering all relevant civilizations of world history but also rather unknown inventions of rather unknown peoples in the past.

Here I can rather invite the reader to consult my report and to read the book carefully, “Bemerkungen zum sehr empfehlenswerten Buch, das auf fast 500 Seiten einen wichtigen Beitrag zur Kulturgeschichte liefert. ….. Es ist zu hoffen, dass das hier besprochene Buch viele Leserinnen und Leser findet und zur weiteren Forschung anregt.“ [g4]. My short paper should start this further research, also start the cooperation between the history of mathematics and the field of social anthropology and also related fields.

3. The use of numbers

Let me first remind us of the many different ways how numbers are denoted in texts and how numbers are used for many purposes.

There may be special symbols for numbers such as 1, 2, 3, …

Letters may be used as numbers such as Roman numerals or in the case of many Semitic scripts.

On the other hand, not all numbers in texts really denote numbers. Sometimes the numbers just stand for a series of sounds and as such represent a series of letters, e.g. 1TEIN instead of Einstein or STR8TS instead of Streights (or straights ?). Of course, in many cases numbers just denote different symbols. Altogether, numbers and letters have been closely related in history as well as the activities of counting and telling.

The German words *Zählen* and *Erzählen* stand for many similar examples in other language. Let me just mention a recently published book on the relation of numbers, language, and the human mind [wi] as one reference for further reading. Altogether, the list of references is quite restricted here, not mentioning relevant, but quite well known books here such as those of Hill, Menninger, Ifrah and others. Rather the list of references below contains hints to more hidden sources.

4. The "Western numerals"

"From their origin as a foreign and suspicious novelty during the medieval period, the ten Western numerals, structured by the use of the positional principle, have become so familiar that it is easy for the nonspecialist to forget that there *are* other numerical notation systems. The ubiquity and universality of the Western numerals make understanding their origin and diffusion all the more important. Unfortunately, no monograph has dealt systematically with the topic since Hill (1915), whose work is rather outdated as a result of advances in paleography." [ch, p.219].

This characterization of Chrisomalis makes the discussion of "our Western numerals" which we obtained from the East so difficult. Anyhow, the Western domination of the world in the last 500 years has lead to a rather unbalanced discussions of languages, scripts, calendars, and numerals where the English language, the Latin script, the Gregorian calendar, and the Hindu-Arabic numerals dominate the world of today.

Only in the case of the numerals the origin was outside of Europe. They entered Christian Europe only in the middle of the last millennium for everyday purposes and had been called *signos diabolicos* by representatives of the church for many centuries. For further details see my paper [g2] and a nicely written novel by M.I. Molina [mo].

5. The Central European "Sichelzahlen"

In the case of the Western numerals their origin in the East is often forgotten by the general user. On the other hand, the use of numbers in Central Europe at the end of the second millennium BC is still quite unknown and not generally accepted, compare [so] and my paper [g3]. In comparison to the sky disk of Nebra which is discussed "by everybody" although many interpretations are rather doubtful and to the calendar of Coligny which is discussed at least by experts controversially, the "Sichelzahlen" should be better known are discussed in more detail.

6. The most recently developed numerical notation

According to the book of Chrisomalis [ch] the most recently invented numerical notation was done in a pedagogical context among the Inuit in Northern Alaska where according to the vigesimal system of the Inuit language a base 20 notation was introduced. This notation is used by a few hundred people and will probably never conquer the world.

7. A script without explicit numerical notation

Is it necessary at all to have special symbols for numbers? It may be helpful, but it is certainly not necessary as the example of the Mandaeans shows, a religious group closely related to Jews, Christians, and Muslims. These Mandaeans even use a special script for their Mandaean language, but as far as we know do not use special numerals in these texts. They just write out numbers such as “fourhundredandeightythousand”, of course in Mandaean and not in English. For further reference see [g1].

8. A language without numbers?

At least, the Mandaeans have words for numbers in their language. Is it even possible for a human community to live and survive without words for numbers? A group of people in Brazil, the Pirahã in the Amazonas region, are discussed in this context. Maybe their language only has words for small and big, but not for integers [ev].

9. Origins in Mesopotamia and Mesoamerica

“While Mesopotamian mathematics is important for understanding later Greek developments, ….. Mesopotamian numeration is nearly a historical dead end.”[ch, p. 228)]

More than 5000 years ago, the first numerals occurred in Mesopotamia. Chrisomalis discusses them somewhere in the middle of his book. These first successfully used numbers survived for more than 3000 years. Maybe a characterization as a dead end development is not really adequate. These first independent evolutions have to be further studied. The same holds true for the development in Mesoamerica. Altogether, these notation systems on the way towards a positional value system with zero reveal important details for a history of culture.

10. Back to Europe

In this last chapter let us come back to Europe to mention a numerical notation, mainly investigated only in the last years by D. King [ki]. The system was used by Cistercian monks in the Middle Ages and can represent a 4-digit decimal number by a single symbol. The 9 different nonzero digits are encoded by 9 different small marks attached to four positions of a stick.

Let me finally mention the case of the numerals within the system of the “old Hungarian alphabet”, compare e.g. [va]. How old this system really is, must be further discussed. However, it looks as if in Hungary an alphabet different from the Latin one was used in the Middle Ages for quite some time.

Last but not least, it looks as if the study of numerical notation systems is very interesting, even if today the “Western numerals” tend to dominate the world more and more. Nevertheless these investigations will tell us more about past, present, and maybe even the future of mathematics, general culture, and our human society.

References:

[ch] S. Chrisomalis, Numerical notation, A comparative history, Cambridge (2010).

[ev] D.L. Everett, Das glücklichste Volk, sieben Jahre bei den Pirahã-Indianern am Amazonas, München (2010).

[g1] H. Gropp, Mathematik und Astronomie der Mandäer, Algorismus 43 (2004),137-149.

[g2] H. Gropp, Severus Sebokht und Gerbert d‘Aurillac, Algorismus 44 (2004), 26-38.

[g3] H. Gropp, Von Nebra nach Coligny: 1500 Jahre Mathematik und Astronomie vor Christi Geburt in Mitteleuropa, Algorismus 53 (2006), 110-119.

[g4] H. Gropp, Book review of [ch], Anthropos 107 (2012), 237-238.

[ki] D. King, The ciphers of the monks, a forgotten number notation of the Middle Ages, Stuttgart (2001).

[mo] M. I. Molina, El señor del cero, Madrid (1996).

[so] C. Sommerfeld, Gerätegeld Sichel, Studien zur monetären Struktur bronzezeitlicher Horte im nördlichen Mitteleuropa, Berlin (1994).

[va] Cs. Varga, Zeichen – Buchstaben – Zahlen, München (2009), translated from the Hungarian.

[wi] H. Wiese. Numbers, language, and the human mind, Cambridge (2003).

MATHEMATICAL LECTURES AT THE JAGIELLONIAN UNIVERISTY IN THE YEARS 1860–1945

Danuta Ciesielska, Stanisław Domoradzki

Abstract: This article is a partial report of research on mathematical education at the Jagiellonian University in the years 1860–1945. Only a short description of the selected lectures with copy of some notes is presented. Moreover, short biographical notes of professors of the Jagiellonian University: Franciszek Mertens, Stanisław Zaremba and Witold Wilkosz are given.

1 Historical background.

Polish King Casimir the Great (Kazimierz Wielki) established the Jagiellonian University in 1364. The Chair of mathematics and astronomy was founded about 1405. From 1846 to 1918 Kraków was a city in the Austrio-Hungarian Empire. In 1861 Galicia got autonomy with the National Parliament and local government in the capital city Lvov (Lemberg). The December Constitution of 1867 guaranteed the right to teach in Polish at the universities (see:). In Galicia Polish cultural, artistic and scientific life developed. There were three universities: the Jagiellonian University in Kraków, Lvov University and Lvov Polytechnic (in fact the university in Chernivtsi (Czerniowce) in Bukovina also was in Galicia). In 1918 Poland regained its independence and so-called interwar period began. In the interwar period academic work in the newly independent Polish state experienced rapid development; there were 5 public universities and 8 colleges (technical, agricultural, veterinary and fine arts). In these years student enrolment figures grew. At the Jagiellonian University the number of students differ from 4,000 (1918) to 8,000 (1932). During World War II Polish universities were closed. The underground education was organised in 1939 by the Secret Teaching Organisation, which took care of the underground primary and secondary level education. 1,500,000 pupils attended primary schools, the secondary school system covered 100,000 people. In 1940 the secret education was administered also at post-secondary level and by 1944 covered about 10,000 students. The Jagiellonian University conducted the underground education in Kraków. About 455 students were enrolled in coursework. For furthered studies see , and .

2 From 1860 to 1895

2.1 Mathematical staff in the period 1860–1895.

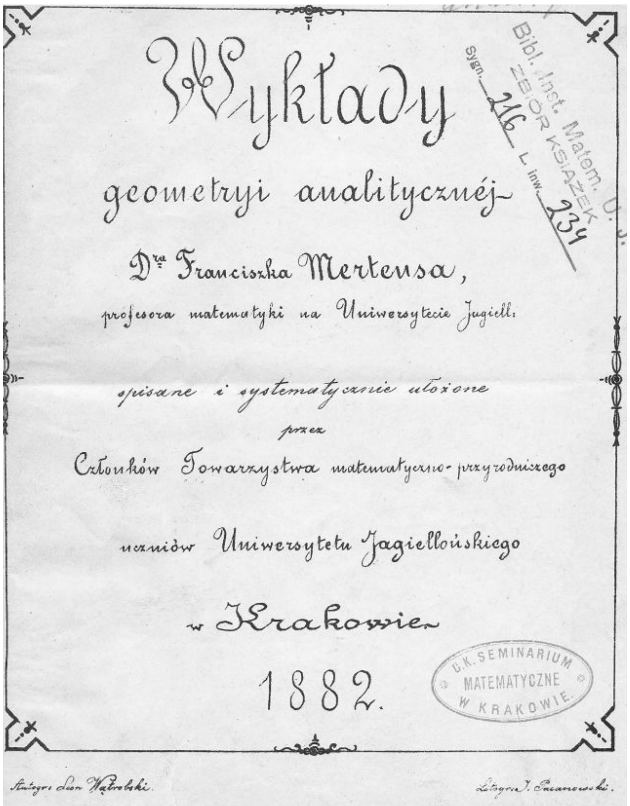
In this period only a few professor conducted mathematics lectures. We list, in the chronological order, names of professors and in the bracket titles of the lecturers. Jan Kanty Steczkowski, Michał Karliński (Calculus, Calculus of Variation, Probability), Franciszek Mertens (Analytic Geometry, Trigonometry, Algebraic Equations), Marian Baraniecki (Determinants, Algebraic Equations, Geometry, High Geometry), Stanisław Kępiński (Calculus, Analytic Functions, Analytic Geometry, Number Theory), Ludwik Birkenmajer (History of Mathematics). For detailed studies see: .

Franciszek Mertens and *Analytic Geometry*

Franciszek Mertens[1] (1840 – 1927) was born in Środa (Prussian Empire, now Poland) and died in Vienna. Mertens studied at the University of Berlin where he attended lectures by Weierstrass, Kronecker and Kummer. In 1865 he obtained his doctorate with a dissertation *De functione potentiali duarum ellipsoidium homogenearum*; his advisors

had been Kummer and Kronecker. He worked first in the Jagiellonian University in Kraków from 1865 to 1885. He moved to the Polytechnic in Graz, and in 1894 he became an ordinary professor of mathematics at the University of Vienna. Mertens worked on a number of different topics including potential theory, geometrical applications to determinants, algebra and analytic number theory. He published 126 papers. He probably is best known for the hypothesis on Möbius function (so-called Mertens' conjecture). Since a proof of Mertens' conjecture would have implied the truth of the Riemann hypothesis, many mathematicians attempted to prove the conjecture but in 1985 Andrew Odlyzko and Herman te Rielee disproved Mertens' conjecture.

In 1880's Franciszek Mertens had conducted analytic geometry, but in fact it was the lecture on projective geometry[2]. One copy of the lithographed notes from this lecture is a property of the Library of the Faculty of Mathematics and Computers Sciences of the Jagiellonian University (Bibl. Inst. Matem. U.J. sygn. 216, L. inw. 234), but in 1880's it was a property of the Mathematical Seminar in Kraków. The other copy of book is available in the Jagiellonian Library (see: [8]). The notes were prepared by members of the Mathematical and Physic Society of Studensts' of the Jagiellonian University. Leon Wątorski was the author of notes, J. Pacanowski lithographed it.



Wykłady

geometryi analitycznéj

Dra Franciszka Mertensa,

profesora matematyki na Uniwersytecie Jagiell.

spisane i systematycznie ułożone

przez

Członków Towarzystwa matematyczno-przyrodniczego

uczniów Uniwersytetu Jagiellońskiego

w Krakowie

1882.

Bibl. Inst. Matem. U.J. ZBIÓR KSIĄŻEK sygn. 216 L. inw. 234

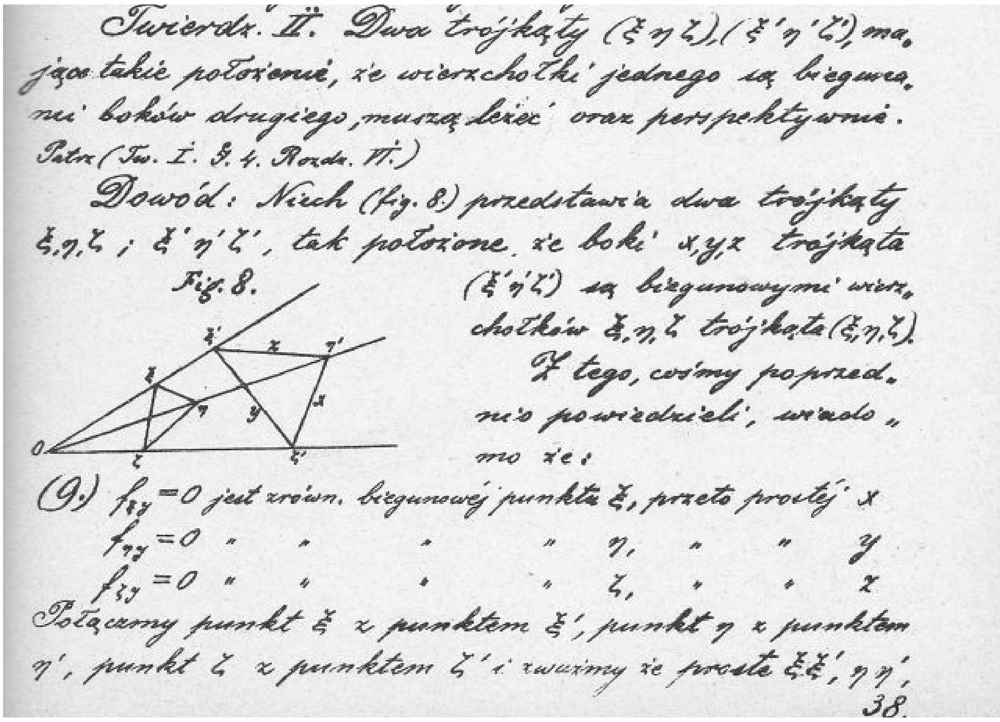
C.K. SEMINARIUM MATEMATYCZNE W KRAKOWIE

The book has 462 pages and consists of 12 chapters. Let us give the titles of the selected chapters. Chap. II: On

[1] For a biography of Franciszek Mertens see: A. Rosenblatt, *Działalność naukowa Fr. Mertensa*, Wiad. Mat. 30 (1927), 79–95 or A Dick, *Franz Mertens, 1840-1927* (German), Forschungszentrum Graz, Mathematisch-Statistische Sektion , Graz, 1981 or S. Domoradzki, *Franciszek Mertens (1840-1927)*, Opuscula Math. 13 (1993), 109-115 or K. Ciesielski, A. Pelczar, Z. Pogoda, *Franciszek Mertens (1840–1927)*, in: Złota Księga Wydziału Matematyki i Fizyki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 2000 or J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *Franz Carl Joseph Mertens*, MacTutor History of Mathematics available http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Mertens.html

[2] For basic information on perception of analytic geometry in Poland see: Jadwiga Dianni, *Recepcja geometrii analitycznej w Polsce w wiekach XVII – XIX (Perceptionn of analytic geometry in Poland in the centuries XVII – XIX)*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki XIX(1974), 677–700.

Determinants and their Application to Solution of *m* Equations with *n* Variables; Chap. III: Algebraic Curves of First Order; Chap. IV: Geometric Applications. – Harmonic Conjugate; VI: Projective Basis (Homogenic Coordinate); Chap. VIII: Quadratic Forms; Chap. XII: The Pascal Theorem, The Brianchon Theorem, Applications. Chapter II, §11 The Cramer Rule, The Kronecker-Capelli-Rouché-Fontené-Frobenius Rule – The algorithm for computing the number of solutions in a system of linear equations.



Twierdz. II. Dwa trójkąty $(\xi\eta\zeta)$, $(\xi'\eta'\zeta')$ mające takie położenie, że wierzchołki jednego są biegunami boków drugiego, muszą leżeć oraz perspektywnie. Patrz (Tw. I. §. 4. Rozdz. VI.)

Dowód: Niech (fig. 8) przedstawia dwa trójkąty ξ,η,ζ; $\xi'\eta'\zeta'$, tak położone, że boki x,y,z trójkąta $(\xi'\eta'\zeta')$ są biegunowymi wierzchołków ξ,η,ζ trójkąta (ξ,η,ζ).

Fig. 8.

Z tego, cośmy poprzednio powiedzieli, wiadomo, że:

(9.) $f_{\xi y}=0$ jest zrówn. biegunowej punktu ξ, przeto prostej x
$f_{\eta y}=0$ " " " " η, " " y
$f_{\zeta y}=0$ " " " " ζ, " " z

Połączmy punkt ξ z punktem ξ', punkt η z punktem η', punkt ζ z punktem ζ' i zważmy że proste $\xi\xi'$, $\eta\eta'$,

38.

3 From 1895 to 1918

3.1 Staff and regular lectures

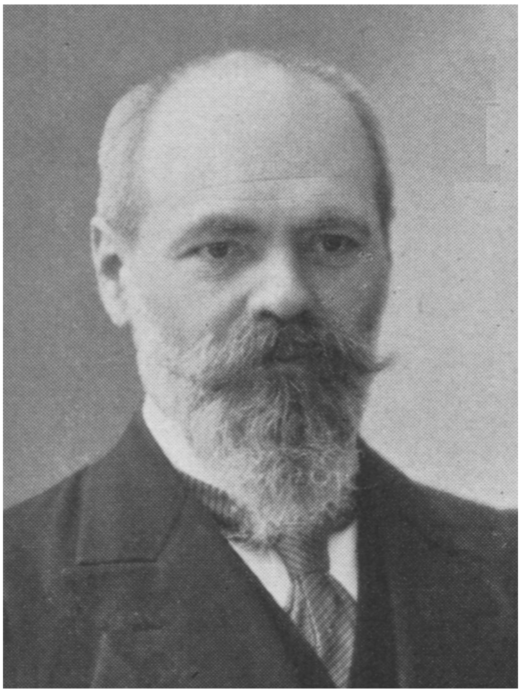
In 1895 the new era of mathematics at the Jagiellonian University began. Prominent Polish mathematicians started their academic career and brought to the university modern mathematics. We list, in the chronological order name of professor and in the bracket titles of the regular lecturers: Michał Karliński (Calculus, Spherical trigonometry), Kazimierz Żorawski (High mathematics, Differential geometry, Analytic geometry, Elementary geometry, Curves and surfaces) Stanisław Zaremba (High algebra, Projective geometry, Calculus, Analytic function, Differential equations, Analytic geometry), Maurycy Pius Rudzki (Mechanics), Cezary Russjan (Ordinary differential equations, Partial differential equations, Calculus of variations, Projective geometry), Ludwik Birkenmajer (History of mathematics), Jan Sleszyński (Number theory, Analytic function, Probability, High algebra, Methodology of mathematics, Determinants), Alfred Rosenblatt (Curves and Surfaces of Second Degree), Antoni Hoborski (Calculus). For detailed study see: .

3.2 Special lectures

In 1900 Stanisław Zaremba came to the university and started the presentations of modern methods of mathematics with special lecture: *On the Dirichlet Boundary Condition and Related Problems*. The idea of the presentation of modern mathematics was continued, in this project contributed Kazimierz Żorawski, Jan Sleszyński and Alfred Rosenblatt. We give the titles of lectures and in the brackets the year and the name of lecturer: *Curves and Surfaces* (1909, 1910 – Kazimierz Żorawski), *Principles of Set Theory* (1911 – Stanisław Zaremba); *Kinematics* (1911 – Kazimierz Żorawski); *Probability* (1912 – Jan Sleszyński); *Mathematical Logic* (1913 – Jan Sleszyński); *Algebraic Curves* (1913 – Alfred Rosenblatt); *Theoretical Physics* (1915 – Stanisław Zaremba).

Stanisław Zaremba and *Principles of Set Theory*

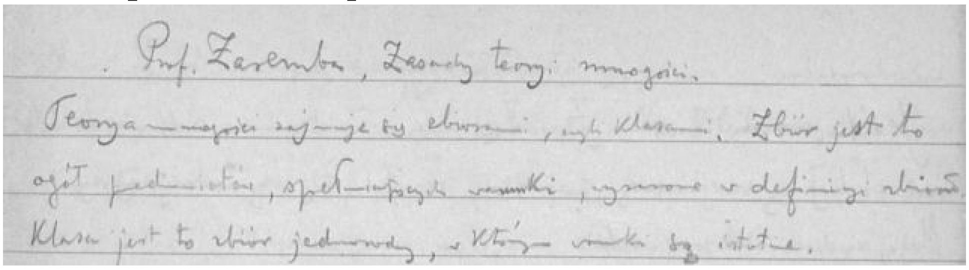
Stanisław Zaremba[3] (1863-1942) was born in Romanówka (Russian Emporium, now Ukraine) and died in Kraków. He was first educated as an engineer at the Institute of Technology in St. Petersburg. In 1886 he went to Paris where he studied mathematics. He obtained doctorate from Sorbona in 1889 with a thesis *Sur un problème concernant l'ètat calorifique d'un corp homogène indéfini*. His advisors had been Darboux and Picard. He stayed in France until 1900 and made many contacts with mathematicians of the French school at this time; publishing his results in French mathematical journals made him well known and highly respected by leading French mathematicians such as Poincarè and Hadamard. Zaremba returned to Poland in 1900 where he was appointed to a Chair in the Jagiellonian University. Much of Zaremba's research was in partial differential equations and potential theory. He also made major contributions to mathematical physics and to crystallography. He studied elliptic equations and in particular contributed to the Dirichlet principle.



Principles of Set Theory (see [8]). The lecture was conducted in the summer semester of the academic year 1910/1911, on Saturdays from 8 to 9 am (see). In the academic year 1909/1910 in Lvov Wacław Sierpiński conducted, first time forever, the lecture on set theory (see). Unfortunately, no copy of notes from this lecture survived. Fortunately, in the Jagiellonian Library there is a collection of the archival records of Aleksander Birkenmajer. In this collection are many hand–writenn notes of mathematical, physical and other lectures, and among them the notebook entitled *Principles of Set Theory*. There is no doubt that this is the copy of Zaremba's lecture conducted in summer semester of academic year 1910/1911. From this book we can learn that he presented 'naive set theory', and in fact he gave a study of the structure of the real numbers line. Let us listed some problems selected from the book:

[3]For a biography of Staniaław Zaremba see: Andrzej Pelczar, *Stanisław Zaremba (120th anniversary of obtaining Ph.D. at the Paris University)*, Copernicus Center Reports, vol. 1, Kraków 20101; available http://www.scribd.com/doc/67049821/Copernicus-Center-Reports-vol-1 or J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *Stanisław Zarenba*, MacTutor History of Mathematics available http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Zaremba.html

On the matter of the set theory. Decimal representation of any real number and unique decimal representation. On the continuum nature of the interval (0,1). On the continuum nature of any interval. The diagonal argument on equinumerosity of the square and the interval.


Prof. Zaremba, Zasady teoryi mnogości.
Teorya mnogości zajmuje się zbiorami, czyli klasami. Zbiór jest to
ogół jedności, spełniających warunki, wymienione w definicyi zbioru.
Klasa jest to zbiór jedności, w którym warunki są istotne.

4 The interwar period

In 1918 started a new period of mathematics in Kraków. In Lvov and Warsaw most of mathematicians, following idea of Zygmunt Janiszewski[4], have chosen "newly–born" fields of mathematics as their field of research[5]. The Jagiellonian University was criticized for its attachment to classical mathematics. On the other hand, several mathematicians working at the Jagiellonian University were invited speakers at the International Congress of Mathematicians[6] in Strasbourg, Toronto, Bologna, Zurich, and Oslo. Most of them published many articles in international journals and presented to students advanced lectures on modern mathematics.

4.1 Mathematical staff and regular lecture during the interwar period

We just list, in the chronological order names of professor (if one of them also worked at another university, than in the brackets the name of the university is given): Aleksander Birkenmajer, Leon Chwistek (Lvov University), Stanisław Gołąb (Mining Academy in Kraków), Antoni Hoborski (Mining Academy in Kraków), Franciszek Leja (Warsaw Polytechnic), Jan Leśniak, Otto Nikodym (Warsaw University), Alfred Rosenblatt (Lima University in Peru), Jan Sleszyński, Włodzimierz Stożek (Lvov Polytechnic), Jerzy Spława-Neymann (Warsaw University of Life Sciences, Warsaw University), Tadeusz Ważewski, Witold Wilkosz, Stanisław Zaremba, Stanisław Krystyn Zaremba (Vilnius Stefan Batory University), Kazimierz Żorawski (Warsaw Polytechnic).

Regular lectures: High algebra and Number theory, Geometry (elementary, high, analytic), Differential geometry, Projective geometry, Calculus (elementary, advanced), Differential equations (ordinary, partial), Analytic functions, Calculus of variations.

4.2 Special lectures

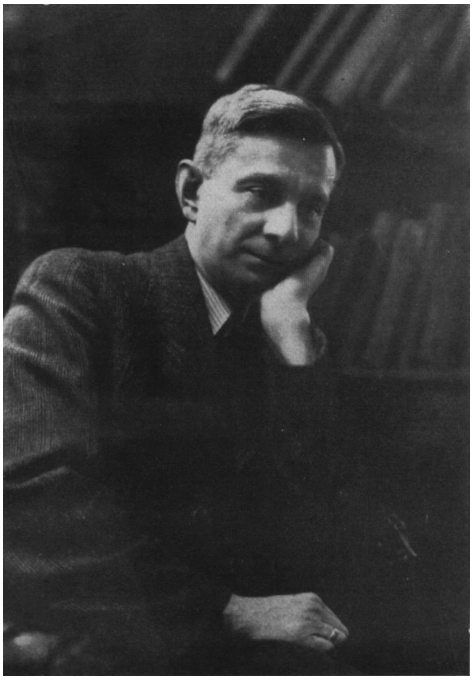
In those years many special lecture were conducted at the Jagiellonian University. In opposite to Lvov and Warsaw, applications of mathematics were the main field of research activities of mathematicians in Kraków, mathematical physics and application of mathematical modern ideas in theoretical physics played very important role. The first lecture on mathematical statistic in Poland – by Jerzy Neyman – was conducted in Kraków. However, modern mathematics ideas, typical for Lvov and Warsaw University also were presented in Kraków. We give the titles of lectures and in the brackets the year

[4] Zygmunt Janiszewski, *O potrzebach matematyki w Polsce*, Nauka Polska (1918), 11–18.
[5] Janiszewski's suggestions were set–theoretical topology and mathematical logic.
[6] St. Zaremba (5 times), F. Leja (3), A. Rosenblatt (3), O. Nikodym, W. Wilkosz (1), T. Ważewski (2), S. Gołąb (3), J. Neyman (2) – sometimes a lecture take place afert World War II.

and the name of lecturer or lectures: *Introduction to Theory of Relativity* STR, (1920 – Stanisław Zaremba), *Algebraic Equations and Galois Theory* (1922 – Antoni Hoborski), *Geometric Topology/ Set Theory and Topology/ Topology* (1934, 1935 – Witold Wilkosz; 1938 – Stanisław K. Zaremba), *Probability Theory and Mathematical Statistics* (1927, 1928 – Jerzy Spława-Neymann), *Stieltjes Integral* (1928 – Tadeusz Ważewski), *Lie Groups* (1928 – Otto Nikodym; 1929, 1930 – Antoni Hoborski), *Elimination Theory* (1928 – Otto Nikodym*), Set Theory* (1921, 1923 – Witold Wilkosz; 1929, 1931 – Leon Chwistek), *Mathematical Aspects of QuantumMechanics/Quantum Field Theory* (1931, – Leon Chwistek; 1932 – Alfred Rosenblatt; 1933 – W. Wilkosz); *Algebraic Functions and Riemannian Spaces* (1929 – Witold Wilkosz); *Hilbert Spaces* (1929 – Otto Nikodym; 1931, 1934 – A. Rosenblatt); *Spectral Theory of Matrices* (1930 – Otto Nikodym). From this very long list we have chosen to presentation *The Axioms of Integers* and *Set Theory* by Witold Wilkosz .

4.3 Witold Wilkosz

Witold Wilkosz[7] (1891 – 1941) was born and died in Kraków. He was a school friend of Stefan Banach. He had mathematical and languages skills and before his matriculation he had received a scholarship from *Deutsche Morgenländische Gesellschaft* for the essay on Semitic language. For few months he studied at the University of Beirut. When he returned to Kraków, he had started studies on classical languages at the Jagiellonian University but in two years he quitted these studies. Next he studied mathematics in Turin and Kraków. In 1914 he wrote PhD dissertation, supervised by G. Peano, but because of World War I he did not complete the formalities (the dissertation *Sulle funzioni assolutamente continue*, had been printed in 1914 in Rom. Acc. L. Rend.). In 1918 in Kraków he obtained doctorate (dissertation: *Z teorii funkcji absolutnie ciągłych i całek Lebesgue'a*). In 1920 he became qualified as professor (dissertation: *Sulle funzioni Duhameliane. I. Le Funzioni esattamente misurabili o sommabili*; Annales Soc. Polonaise). In 1931 he published in Paris a monograph *Les proprietès topologiques du plan euclidien*. In November 1939 the Nazis arrested him drugging the “Sonderaktion Krakau”. Resulted in declined health, he was released from prison, but he died of pneumonia in 1941.



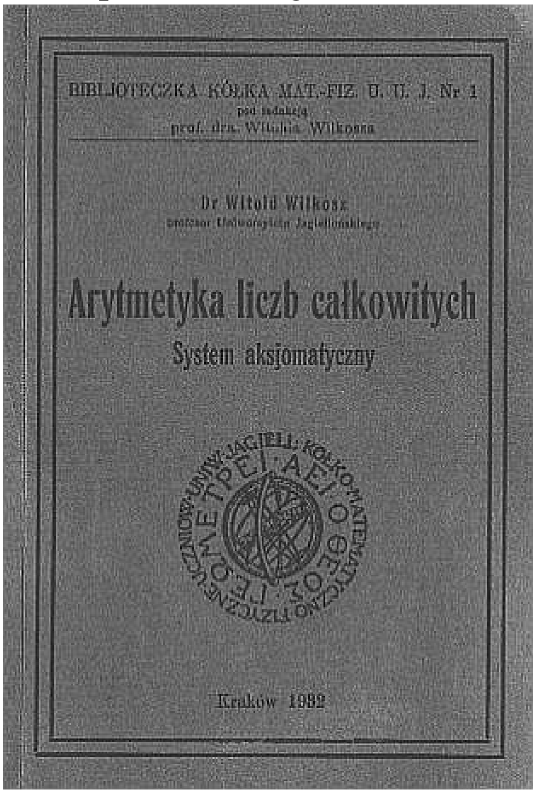
From 1900 to 1932 many lecture notes were published, but most of them only as lithographed copy of the notes. Until the end of World War I there were published 9 books and 15 from 1918 to 1932. Many of these books were published due to effort of the *Jagiellonian University Students’ Maths Society* (see). In 1930’s students of Philosophical Faculty at the Jagiellonian University created a series of printed lecture notes in Polish. In 1932 Witold Wilkosz became the Editor-in-Chef of the special series of *Jagiellonian University Students’ Maths Society Publications* and also wrote five books in these series:

[7] For the biography of Witold Wilkosz see: B. Średniawa, *W dwudziestą rocznicę śmierci prof. Witolda Wilkosza*, Postępy Fizyki 12 (1961), 389–393; available http://hint.org.pl/cgi-bin/sas.cgi or St. Gołąb, *Witold Wilkosz (1891–1941)*, in: *Studia z dziejów Katedr Wydziału Matematyki, Fizyki, Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego*, Kraków 1964.

1. *Arytmetyka liczb całkowitych. System aksjomatyczny – The Axioms of Integers* ,
2. *Teorja mnogości punktowych, część I. Mnogości linjowe. Teorja opisowa. Miara Lebesgue'a – Set Theory I. Set Theory of the Subsets of the Real Numbers Line. Lebesgque Measure* ,
3. *Zarys algebry w ujęciu klasycznym, część I – Classical Algebra I*, ,
4. *Podstawy teoretyczne arytmetyk klasycznych – Peano Arithmetic*, ;
5. *Elementy teorii liczb – The Number Theory*,

We give a very short presentation of two books from this five.

The Axioms of Integers (). The author gives the new axioms of arithmetic, solving a problem that previously posed and solved Peano. Table of Contents: Introduction, On Peano Axioms, Basic theorems and definitions, Addition, Minority and majority relation, Subtraction, Multiplication, Equivalence classes, Multiplicity, Division, Exponentiation, Minimum Principles, Application of the Minimum Principles, Maps and Sequences, Decimal System, Interpretation of Peano Axioms in the New Theory of Integers.



Set Theory (). This book, published in 1933, had been prepared on the basis of lectures conducted in academic years 1921/22 and 1922/23 but had proceeded Wilkosz' lecture *Set Theory and Topology* in 1934/35.

Table of Contents: Sets and Algebra of Sets; Point Sets, Set-theoretical Properties of the Real Numbers Line; Accumulation Points; Closed, Dense and Perfect Sets, Open Sets, Everywhere- and Nowhere-dense Sets, Scattered Sets, Sequences of Sets, Baire Category, Zermelo Principle, Sequences of Points, Borel-Lebesgue Density Theorem, Distance of Sets, Lebesgue (Measure) Theorem for the Real Numbers Line, Measure, Vitali Covering Lemma, Rademacher Theorem, Cardinality of Subsets of the Real Numbers Line.

5 Summary

This is only a very short presentation of the lectures conducted at the Jagiellonian University for almost one-century.

Bibliography

[1] Archives records of Aleksander Birkenmajer, *Principles of Set Theory by S. Zaremba*, Jagiellonian Library, Manuscripts, Przyb. 570/75.

[2] Krzysztof Ciesielski, Zdzisław Pogoda*: On Mathematics in Kraków Through Centuries*, Roczniki PTM Ser.II: Wiadomości Matematyczne 48(2012) no.2, 313–324.

[3] Krzysztof Ciesielski: 100th Anniversary of the Jagiellonian University Students' Maths Society, Math. Intelligencer 17(1995) no. 1, 42-46.

[4] Jadwiga Dianni, *Recepcja geometrii analitycznej w Polsce w wiekach XVII – XIX (Perception of analytic geometry in Poland in the centuries XVII – XIX)*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki XIX(1974), 677–700.

[5] Stanisław Domoradzki, *The Growth of Mathematical Culture in the Lvov Area in the Autonomy Period (1870 – 1920),* Matfizpress, Prague 2011.

[6] Franciszek Mertens, *Wykład geometryi analitycznej* (*Lecture on Analytic geometry*), Towarzystwo matematyczno–przyrodnicze uczniów Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1882.

[7] Jadwiga Hachaj, Piotr Jakóbczak, *Wykłady Profesorów Stanisława Zaremby i Kazimierza Żorawskiego w świetle notatek Aleksandra Birkenmajera (Lectures of Professors Stanisław Zaremba and Kazimierz Żorawski through notes of Aleksander Birkenmajer)*, Roczniki PTM Ser. VI: Antiquitates Mathematicae 1(2007), 7–14.

[8] Henryk Barycz, *Uniwersytet Jagielloński w życiu narodu polskiego (Jagiellonian University in the life of the Polish nation)* , Wrocław 1948;.

[9] Julian Dybiec, *Uniwersytet Jagielloński 1918-1939 (Jagiellonian University 1918-1939)*, Kraków 2000.

[10] Zdzisław Opial: *Zarys dziejów matematyki w Uniwersytecie Jagiellońskim w drugiej połowie XIX wieku (An Outline of the History of Mathematics at the Jagiellonian University in the second half of the nineteenth century)*, in *Studia z dziejów Katedr Wydziału Matematyki, Fizyki, Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego (Studies on the History of Departments of the Faculty of Mathematics, Physics, Chemistry of the Jagiellonian University)*, ed. Stanisław Gołąb, Jagiellonian Univeristy, Kraków 1964.

[11] *Spis wykładów (Index of lectures),* c.k. Uniwersytet Jagielloński, Kraków, academic years: 1870/1871 – 1917/1918.

[12] *Spis wykładów (Index of lectures),* Uniwersytet Jagielloński, Kraków, academic years: 1918/1918 – 1938/1939.

[13] Witold Wilkosz: *Arytmetyka liczb całkowitych. System aksjomatyczny* (*The Axioms of Integers*), Bibljoteczka Kółka Matematyczno–Fizycznego U.U.J. Nr 1, Kraków 1932

[14] Witold Wilkosz: *Teorja mnogości punktowych część I. Mnogości linjowe. Teorja opisowa. Miara Lebesgue'a (Set Theory I. Set Theory of the Subsets of the Real Numbers Line. Lebesgue Measure*), Bibljoteczka Kółka Matematyczno–Fizycznego U.U.J. Nr 2, Kraków 1933.

[15] Witold Wilkosz: *Zarys algebry w ujęciu klasycznym część I* ((*Classical Algebra I*), Bibljoteczka Kółka Matematyczno–Fizycznego U.U.J. Nr 5, Kraków 1934.

[16] Witold Wilkosz: *Podstawy teoretyczne arytmetyk klasycznych* (*Peano Arithmetic*), Bibljoteczka Kółka Matematyczno–Fizycznego U.U.J. Nr 7, Kraków 1935.

[17] Witold Wilkosz: *Elementy teorii liczb* (*The Number Theory),* Bibljoteczka Kółka Matematyczno–Fizycznego U.U.J. Nr 8, Kraków 1935.

Address

Dr Danuta Ciesielska
Institute of Mathematics
Faculty of Mathematics, Physics and Technical Science
Pedagogical University of Cracow
Podchorążych 2
30–084 Kraków
Poland
E-mail: smciesie@cyfronet.krakow.pl

Dr hab. Stanisław Domoradzki
Institute of Mathematics
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Rzeszów University
Al. Rejtana 16 A 35-959 Rzeszów
Poland
E-mail: domoradz@univ.rzeszow.pl

Kraków origins of mathematics in Poland

Zdzisław Pogoda

In the first twenty years of the twentieth century the Polish School of Mathematics was established. Almost immediately became famous in the world thanks to mathematicians as Stefan Banach, Wacław Sierpiński and others. However, the origins of Polish mathematics refer to Kraków.

Collegium Maius of Jagiellonian University

The story begins in 1364, when Polish king Casimir the Great (Kazimierz Wielki) established a university in Kraków, which was one of the first universities in Central Europe. Only Charles University in Prague is older. Nowadays the university is called Jagiellonian. This name is taken from Polish king Władysław Jagiełło, who renovated and extended the university at the beginning of the 15th century, according to the last will of his wife, a granddaughter of Casimir the Great, Jadwiga. Jadwiga ordered that after her death her jewelery would have to be used at the renovation of the University. Then the University was called the Kraków Academy. The name was changed to the Jagiellonian University in the 19th century ([2], [3], [4]).

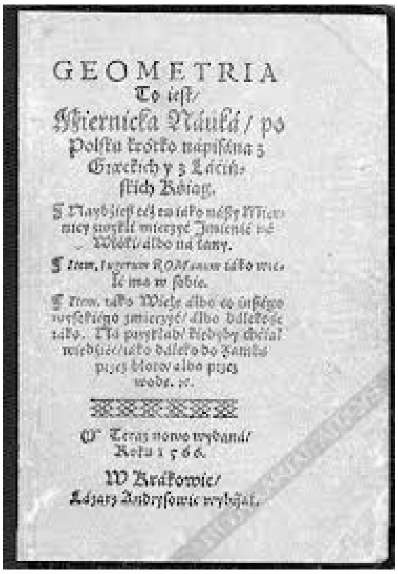
Painting by Jan Matejko *Założenie Szkoły Głównej przeniesieniem do Krakowa ugruntowane.*(Assumption School of moving to Krakow established)

.

There is no information about the teaching of mathematics in the early days of the academy. However, we can safely assume that in the beginning, classical topics divided into trivium and quadrivium were lectured at the university. Quadrivium contained arithmetic, geometry, astronomy and music. About 1405 a Kraków citizen Jan Stobner founded a Chair of mathematics and astronomy. This was an event of great influence to development of mathematics at the Kraków Academy, as the Head of the Chair could stay and work there for a longer time and, consequently, could specialize in some areas. In those times, a scientist had to be prepared to lecture many subjects and frequently drawing of lots decided what would be lectured. The existence of a Chair guaranteed some kind of stability. The second Chair connected with mathematics was founded about 1450 by Marcin Król of Żurawica (c.1422 – c.1453). This was a Chair of astrology, but it must be pointed out that then astrology was treated very seriously and creating horoscopes usually involved complicated calculation. Król reformed teaching mathematics at the university and wrote some mathematical monographs, in particular *Geometriae practicae seu Artis mensurationum Tractatus* and *Algorismus minutarium*. In those years education at the Kraków university was at a very high level. Then also taught Janb Schelling of Głogów called Gloger and Wojciech of Brudzew. For example, among scholars educated in Kraków there were five who in 1448 – 1471 headed a Chair at the University of Bologna. In the years 1470 -1520 enrollment was more than 14,300 students ([3], [4]). Among them were outstanding representatives of scientific, cultural and political as Mikolaj Rej, Andrew Frycz whether Maciej of Miechów.One of the most famous graduates of

Kraków Academy was Mikołaj Kopernik (Nicolaus Copernicus) (1473 – 1543) who became a student there in 1491. Kopernik many times underlined the role of Kraków Academy in his education.

In the first decades of the 16th century a lot changed at the European universities under the influence of Renaissance. The Arts played the main role. In Kraków, the development of mathematics was not financed sufficiently. New trends in the University of intensified interest in humanities disciplines. It is noticeable that there has been suppression of the development of mathematics and astronomy. There were no outstanding personalities to deal with mathematics. Nevertheless, a number of significant user created such as *Algorithmus:To jest nauka liczby* by Tomasz Kłos - the first textbook of mathematics in the Polish language. In 1561 Benedykt Herbest (Neapolitanus) published handbook *Arithmetica linealis* and in 1566 Stanisław Grzepski wrote a handbook of practical geometry *Geometria, to jest nauka miernicka* ([3], [4]).


GEOMETRIA
To iest/
Miernicka Náuká / po
Polsku krótko nápisána z
Greckich y z Lácińskich Ksiąg.

Stanisław Grzepski *Geometria, to jest nauka miernicka.*

Only in the first half of the 17^{th} century in Kraków Academy there appeared a mathematician of European level. It was Jan Brożek (Joannes Broscius) (1585 – 1652). He was also a philosopher, an astronomer, a physician and a theologist. Besides his scientific achievements, he generously donated the university. His main mathematical achievements were obtained in the theory of numbers. He investigated mainly prime numbers and perfect numbers. He wrote many dissertations and books about numbers, logarithms and several applications of geometry. He pointed out several mistakes in some papers written by others. Unfortunately, he lived and worked far from mathematical centres and his research was, in fact, not know abroad. Brożek did not find successors in Kraków ([2], [3]).

Jan Brożek (Johannes Broscius)

While under the influence of Brożek lawyer Stanisław Pudłowski (1597 - 1645) became interested in mathematics. At the same time work John Toński, the author of *Arithmetica vulgaris et Trigonometria* devoted to plane and spherical trigonometry. At the end of the seventeenth century, worked in Krakow Stanisław Solski (1622 – 1701) author of encyclopaedic works *Geometra polski.*

The 17th and 18th century is the period of rapid development of mathematics in Europe. Sad to say, it was not the case of Poland. We cannot speak about any expansion of science here. The situation was improved at the end of the 18th century thanks to reforms introduced by the Commission of National Education (Komisja Edukacji Narodowej), and personally Hugo Kołłątaj (1750 – 1812) and Jan Śniadecki (1756 – 1830). Śniadecki was undoubtedly the best Polish mathematician born in the 18th century. Despite his scientific achievements (in particular, he was the forerunner of probability in Poland) he worked very actively in teaching area, he wrote some mathematical books. Several of terms in Polish mathematical terminology propagated by Śniadecki are still used. It must be noted that by dint of Śniadecki two mathematical Chairs at the Kraków Academy was founded again. They were called the Chair of Elementary Mathematics and the Chair of Higher Mathematics ([2], [3]).

Jan Śniadecki

In 1795 Poland lost its independence and up to the end of World War I had been divided among Russia, Prussia and Austro-Hungary. In the part of Polish territory under the Austrian power the situation was not bad; in particular, the universities in Kraków and Lwów (Lvov) still continued to function and the lectures were conducted in Polish. The development of science, including mathematics, could be also observed. In 1815 Kraków Learned Society (Krakowskie Towarzystwo Naukowe) was founded; it was transformed to the Academy of Arts and Science (Akademia Umiejętności) in 1872. Since 1817, the Society published together with the Kraków University a scientific journal *Rocznik Towarzystwa Naukowego z Uniwersytetem Krakowskim Połączonego*. All distinguished Kraków mathematicians published papers there (in Polish language). In 1885 the Academy of Arts and Science started publishing the bulletin of the Academy. In this journal, the series of mathematical science was included and there were papers published also in foreign languages. At the university, good mathematicians lectured and presented some interesting courses. The first mathematician who reached an international fame and worked in Kraków was in the second half of the 19th century Franciszek Mertens (1840 – 1927).

Mertens studied mathematics in Berlin. In 1865 – 1884 he headed a Chair at the Jagiellonian University. Then he moved to Graz and later to Vienna. He worked mainly on analytic number theory, algebra and mathematical analysis. His name is attached to the theorem about the multiplication of series. Other of his results are the determination of the sign of Gauss sums and an elementary proof of the Dirichlet theorem on quadratic form and prime numbers. However, nowadays his name is known probably first of all because of the Mertens conjecture. It says that the so-called Mertens function is bounded by the square root function. The result would have implied the Riemann hypothesis, but the conjecture was proved to be false in 1985, almost 100 years after its statement. In some sources, Mertens is not presented as a Polish mathematician. Indeed, the matter is slightly complicated. He was born in Polish town Środa (close to Poznań, then under Prussia. In his family we find Polish, French and German roots. But what is important, Mertens regarded himself as a Pole, which follows for example from several documents at the Jagiellonian University archives and the Polish Academy of Arts and Science archives. Mertens spoke and wrote Polish perfectly and fluently. He published a lot in Polish, also when he moved from Kraków. Thanks to Mertens, who lectured also modern mathematics, students in Kraków could learn at higher level ([2], [3]).

The position of Polish mathematics changed rapidly in the first half of the 20th century. The origin of this was in Kraków, where the scientific activity of two mathematicians implemented modern mathematics to the university.

Kazimierz Żorawski

The first Chair was headed since 1895 by a great Polish mathematician, Kazimierz Żorawski (1866 – 1953). Żorawski graduated from the Imperial University of Warsaw and got his doctorate in 1891 from the University of Leipzig. There he was interested in the theory of continuous groups, later known as Lie groups. His thesis, written under the supervision of Lie, concerned his preferred research topic, i.e. the equivalence of analytical or geometrical objects with respect to some group of transformation and the construction of differential invariants of such objects. Żorawski was the first Polish mathematician who worked actively on differential geometry. Among other results, he introduced some kind of generalizations of Christoffel symbols. He also presented some generalizations of the theory of a space with an affine connection, the theory which was created and developed later by Schouten and Weyl. Żorawski obtained many pioneering results, unfortunately most of them was not noticed ([2], [6]).

Postage stamp with the image of Stanisław Zaremba

The most important role was played by Stanisław Zaremba (1863 – 1942), who is regarded as the best Polish mathematician at the end of the 19th century and first decades of the 20th century. He studied in Petersburg where he got diploma in engineering in 1886.

Then he moved to Paris. In 1889 he obtained PhD in mathematics from Sorbona. His doctoral dissertation was the solution of the problem stated by the French Academy of Science in 1858. Many mathematicians had earlier presented solutions which were not accepted, Riemann among them. Zaremba was known in France as an outstanding mathematician, he married a French lady Henriette Cauvin and he could make a great career there, as Paris was a very important centre of world mathematics. However, he thought that in the Polish territory there is need to introduce modern mathematics and he took a Chair at the Jagiellonian University in 1900. He started lecturing many modern topics and inviting several eminent mathematicians from abroad.

The main scientific results of Zaremba were obtained in partial differential equations, especially concerning problems originated from mathematical physics and applications. Some of his most important results concern the elliptic equation $\Delta u+\xi u+df=0$. The famous Zaremba example showing that the classical Dirichlet problem may have no solution nowadays is cited in classical textbooks as well as during plenary lectures at conferences. The beauty of this result was hidden in a very clever method of showing the nonexistence of any solution. Zaremba's list of publications contains above 100 positions; according to the opinion of Henri Lebesgue, Zaremba never wrote a needless paper. Zaremba was also an author of textbooks. He considered this aspect of mathematical activities as very important ([2], [5]).

The work of Zaremba and Żorawski led to remarkable results already before World War I. Many new courses were offered to students, including, for example, set theory. The standard of the lectures increased significantly. Many of graduates worked on serious problems, later taught other students. A number of students appeared to be very good mathematicians and later on they had remarkable influence to the development of mathematics in Kraków. Still before World War I, more outstanding mathematicians started the work in Kraków. Especially, Antoni Hoborski (1879 – 1940) and Alfred Rosenblatt (1880 – 1947) should be mentioned here. Both obtained PhD from the Jagiellonian University in 1908. Their advisor was Zaremba, however, they turned out to another areas of mathematics. Hoborski worked in differential geometry, Rosenblatt was a pioneer of algebraic geometry in Kraków. Moreover, in 1911 another eminent mathematician got a Chair in the university, i.e. Jan Sleszyński (1854 – 1931). He was an author of papers in analytic functions theory and number theory and an original monograph about the theory of proof ([1], [2], [6]).

In 1918 Poland became again an independent country. This was a good point for a remarkable development of science. Great mathematical centres were created in Lwów (with Banach, Steinhaus and Mazur) and Warszawa (with Sierpiński, Mazurkiewicz and Kuratowski). As we presented very briefly, Kraków was also very important to Polish mathematics and played a key role in creation of the Polish School of Mathematics.

References

[1] K.Ciesielski, Z.Pogoda, *Conversation with Andrzej Turowicz*, Math. Intelligencer 10 (1988) no. 4, 13 – 20.

[2] K.Ciesielski, Z.Pogoda, *On mathematics in Kraków through centuries*, Wiadomości Matematyczne, v.48, no 2, 2012, 313 – 324.

[3] A.Pelczar, *O matematyce i matematykach w Uniwersytecie Jagiellońskim*, Złota Księga Wydziału Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2000, 214 – 237.

[4] A.Pelczar, *Selected Chapters of the History of Mathematics in Poland*, in: From shared traditions to prosperous bilateral future in Swiss-Polish relation (Proceedings of the Conference: Swiss-Polish Cohesion Dialogue between Science, Economy and Culture, Bern, November 22, 2007), Empa, Berno, 2009, 49 – 62.

[5] A.Pelczar, *Stanisław Zaremba (120th anniversary of obtaining Ph.D. at the Paris University)*, Copernicus Center Reports, 1 (2010), 91 – 119.

[6] Z.Pogoda, *Kazimierz Żorawski and the Cracow Mathematical School*, in: 31 Mezinárodní Konference Historie Matematiky, Velké Meziříčí, 2010, (J.Bečvář, M.Bečvářova, eds.) Matfyzpress 2010, 211 – 216.

Mathematics Institute
Faculty of Mathematics and Computer Science
Jagiellonian University
Łojasiewicza 6
30-348 Kraków, Poland
Zdzislaw.Pogoda@im.uj.edu.pl

VÁCLAV LÁSKA AND APPLIED MATHEMATICS IN LWÓW AND PRAGUE

MARTINA BEČVÁŘOVÁ

1 Introduction

Václav Láska (1862–1943) was "the last Czech polyhistor" of natural sciences.[1] He became a famous mathematician, astronomer, geodesist, seismologist, meteorologist, cartographer and teacher. Throughout his professional career V. Láska strove to integrate mathematical methods, based on exact mathematics and physics, into modern national research.

2 Family and studies

Václav Láska was born in Prague on 24th August 1862. His father, Václav Láska (1824–1886), was a cabinetmaker from Libáň (Jičín district) and gradually rose to become a Prague master builder, rebuilding various Prague monasteries, taking part in the construction of the jailhouse in Řepy, and even in the reconstruction of Karlštejn. His mother was Marie Menclová (1829–1899), the daughter of an allotment holder Josef Mencl from Staré Hrady (Jičín district) and

[1] He is the author of more than three hundred works covering the following areas: equalizing count, least-squares analysis, practical numerical calculations, nomography, graphic-statistical and graphic-mechanical calculations, theory of probability, mathematical statistics, insurance, mathematical geography, physical geography, cartography, hydrology, hyetography, balneology, climatology, geodesy (basic and higher), geology, geophysics, seismology, astronomy, photogrammetry, cosmic physics, philosophy of mathematics, history of exact and natural sciences, tuition of mathematics and its application, and popularization of natural sciences. For more information see [3] and [4].

Barbora (born Tesařová). His family lived in Prague, on Spálená Street. Václav had three siblings, Jan (born 1854), Josef (born 1865) and František (1870–1872).

Václav Láska started primary school in the *Czech Trinity School* in the centre of Prague when he was six years old. According to stories told about him, even at this young age, Václav Láska had already decided to become an astronomer, however, his study results were only average and he did not show any talent in this area.

At the age of ten, V. Láska was sent by his family to a *German Boy-Seminar in Bohosudov* (German Weisskirchlitz, Teplice district) to study at a private German grammar school, which belonged to a monastery with very strict monastic rules. It was there where his hidden talent markedly developed, above all his deep interest in mathematics. Just a remark on his teachers; from 1st to 4th grade his mathematics teacher was A. Dichtl and in 5th Julián Vervaet.[2] Láska's marks dramatically improved in Bohosudov; he was the second best pupil out of 26 classmates. He excelled in the majority of his classes; just his Latin knowledge was rated as unsatisfactory because he was not keen on the memorizing nor the endless readings of Latin authors.

When V. Láska passed the fifth grade, his parents decided to send him back to Prague in order to graduate from the *Lesser Town German Secondary School*. There he attended the fifth to eight grades. Though his report showed excellent marks, he had to repeat the fifth grade, because his Prague teachers did not trust the "provincial" school. Except for classic languages, his marks were excellent again. In addition, his interest in mathematics, physics, astronomy and natural science deepened. Already as a fifth grader V. Láska wrote an "article" about the nines and elevens rules of divisibility and distributed it among his classmates during breaks at school. He forced them to read it and to discuss mathematics. To help the family budget, V. Láska tutored his classmate Jaroslav count Thun. A lifetime friendship developed from this long-term tutoring, and V. Láska gained a powerful and quite rich patron. During his secondary school studies, V. Láska became seriously ill and turned almost deaf. Nonetheless, music remained among his lifelong interests as well as the history of exact sciences, social issues and matters of emigration to the USA. V. Láska graduated in 1883. The final exam that he passed entitled him to study at any university within the Austro-Hungarian Monarchy.

3 Studies at the University in Prague

Between 1883 and 1886, V. Láska attended lectures at the *Faculty of Philosophy at the German University in Prague*. He focused, above all, on mathematics (professors H. J. K. Durège and A. Puchta, private docent S. Kantor), physics (professors E. Mach and F. Lippich), and astronomy (professor L.Weinek). As a special student, V. Láska attended geodesy lectures at the *German Technical University in Prague* (professor K. Kořistka). Láska's professors appreciated him as an extremely learned student with wide universal

[2] Member of Societas Iesu, he was from Belgian Gent, wrote and published mathematical and methodical reports in the Czech journal *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky* [Journal for Cultivation of Mathematics and Physics]. He taught in Prague and Bohosudov.

knowledge, excellent observational skills and uncommon craftsmanship. His classmates used to say that he was "a walking encyclopaedia of math sciences".[3]

While still a student, he managed to make his child dream come true and started to occupy himself with astronomy. In 1884, V. Láska was appointed the Assistant at the Klementinum Observatory. It soon became apparent that he was a talented observer, a proficient theorist and an excellent arithmetician. It was here that he experienced his first disappointment as a result of the inadequate nature of the equipment at the observatory and the limited interest of the government in supporting of scientific work.

V. Láska successfully graduated and obtained his doctorate degree at the German University in Prague on 19th December 1887. His dissertation thesis *Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen in ihrer historischen Entwickelung* was evaluated by professors H. J. K. Durège and A. Puchta. V. Láska underwent two doctoral examinations (scientific mathematics and history of mathematics) in front of a committee whose members were professors H. J. K. Durège, E. Mach and F. Lippich and then passed also a general philosophy and history examination. The committee recognized his extensive knowledge of literature.

4 The Beginning of his career

After finishing his studies, V. Láska wanted to devote himself to scientific work in the field of astronomy and to pedagogical work at a university or technical schools. However, some unexpected problems arose. His family conditions worsened due to his father's chronic liver illness and so V. Láska had to support the family from his private teaching income and the small pay he received from the observatory (400 guldens per year). Still, he did not resign from his scientific work and did not accept the offer of a job as a secondary school teacher. As late as 28th April 1890 V. Láska was appointed a Full Assistant of the Royal Institute of Astronomy at the Czech University. This position was no better paying, however it brought him nearer to making his dream come true.[4]

4.1 Astronomical works

Initially, V. Láska, in conjunction with the Institute Director August Seydler (1849–1891), executed computations of small planet orbits (for example he described the orbit of Asporina and Sapientia). He carried on with this work also under the new director Gustav Gruss (1854–1922).[5]

In cooperation with G. Gruss, V. Láska focused on studies of variable stars which originally drew only a little attention in Bohemia. F. W. A. Argelander (1799–1875) revived interest in variable stars in the 1830s by elaborating a method of highly accurate determination of the change in star brightness by only

[3] For more information on mathematics at the Faculty of Philosophy at the German University in Prague and German Technical University in Prague see [1].

[4] Lets note that one of the main goals of the institute during that period of time was to build, install, orientate and consequently control new instruments, search for a building convenient for measurements, acquire new qualified assistants (it was a badly paid job which was not included into the years of public service) and "forbid" departure of good quality students, who after this demanding training tended to leave for a better paid jobs abroad.

[5] Let's note that this presented a typical activity of students and assistants. Lots of future Czech astronomers and mathematicians participated in this activity (for example F. Nušl, K. Petr, V. Nechvíle).

an eye vision comparison with a star of which brightness is known and which differs only a little from the surveyed star.[6] G. Gruss and V. Láska first observed variable stars only in integral light and the results of their observations were published in *Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění* [Dissertations of the Czech Academy of Sciences, Literature and Arts].[7] In 1894, they proceeded to spectroscopic observations. Even though their observations were not abundant they were significant for the development of astrophysical research in our lands and one can say that the level of their theory corresponded with the world trend.[8] Both astronomers were well aware of the importance of observing not only the illusive star size, but first and foremost the spectrum changes which enables better and more accurate study of the stars. Emission lines of hydrogen and helium were ordinarily studied elsewhere around the world; the Czech measurements of H_α line were at the world level even with the insufficient equipment of the observatory. It is noteworthy to record that V. Láska bought the first photographical apparatus of the Institute and arranged for its installation on the telescope.

The third area in which V. Láska was involved was geodetic-astronomical works, because the Prague observation was given an important task – to specify the exact coordinates of location necessary for accurate astronomical surveying. The task was assigned to V. Láska, since, during his studies, he had already demonstrated a deeper interest in geodesy. The location was scaled by using so called *angular transit instrument*[9] and the geographic width of Kindl's Villa 50°6´11.7´´ ± 0.1´´ was determined by the proven Horrebow-Talcott method.[10] Concurrently V. Láska took the Villa coordinates linking them to triangular points of Prague and issued comments on the accuracy of the previous coordinate's determination of Prague triangular points.

4.2 The importance of Láska's astronomical works

V. Láska was a great observer with good mathematical background which enabled him to execute measurements, observations and enumeration at the world level. Still he could not obtain corresponding job at the Prague University. Due to the struggle for a means of living, he diverted from astronomy and concentrated on geodesy.

4.3 Láska's geodetic work in Prague

In 1890, V. Láska lived at the Czech Technical University in Prague. A committee, consisting of F. Müller, K. V. Zenger and Ed. Weyr, was brought together to assess his application. On 22nd March 1890, V. Láska passed a specialized colloquium in front of the examination committee which was formed by the previously stated professors as well as professors J. Šolín,

[6] It is possible to say that the Czech lands played the important role in the world trend of stars observation (for example V. Šafařík's and G. Gruss's observations and works).

[7] They used Argelander's method and eight inch telescope, for comparison using less known stars, and they managed to describe 20 stars smaller than the 6th star size.

[8] The survey results were published in the *Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění* [Dissertations of the Czech Academy of Sciences, Literature and Arts]. They used an eight inch telescope, surveyed thirteen stars out of which five showed clear emission lines of hydrogen. They focused however on verification and specification of preceding results. Activity of this astronomical institute weakened after 1896.

[9] This telescope rotates only around horizontal axis and serves to survey stars transiting the meridian.

[10] The famous Kindl's Villa used to be the residency of the Czech institute of astronomy until 1900.

K. Petrlík and A. Vávra. F. Müller tested the candidate on the history of geodesy, K. V. Zenger enquired about methods of the determination of the geographical position of a location and Ed. Weyr required the explanation of mathematical principles of cartographic mapping. On 24th March 1890, V. Láska presented his habilitation work *Úlohy geodesie vyšší v budoucnosti* [Future tasks of the higher geodesy] in front of the professors' board of the Czech Technical University in Prague. All parts of his habilitation process were evaluated as excellent, thus, on the 22nd September 1890, he was designated Private Docent of "Higher Geodesy" at the Czech Technical University.

Between 1891 and 1895 V. Láska held selective lectures at the Czech Technical University. These lectures demonstrated outstanding extent and level, covering cartography, photogrammetry, and higher geodesy, astronomical passages regarding higher geometry, theory and computations of trigonometry nets.[11] His lectures were accompanied by practical exercises on Letná, demos at the observatory, etc.

V. Láska wrote many textbooks and monographs for his students and other readers interested in geodesy, astronomy, mathematics and their applications. His Czech written textbooks were titled *Počtářství geodetické, tj. návod ku počtům trigonometrickým a polygonálním pro účely katastrální* (Geodetic Counting, Instruction for Trigonometric and Polygonal Counting for Catastral Purposes, Prague, 1894, 68 pages) and *Vyšší geodesie* (Higher Geodesy, Vol. 1, Prague, 1896, 105 pages).[12]

His German textbooks *Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik* (Vol. I.–IV., Braunschweig, 1888–1894, XVI + 1071 pages),[13] *J. Lieblein's Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis zum Selbstunterricht* (2nd edition, Praque, 1889, VIII + 108 pages),[14] *Lehrbuch der sphärischen und theoretischen Astronomie und der mathematischen Geographie* (Bremerhaven und Stuttgart, 1889, XII + 280 pages; 2nd edition, Leipzig, 1906, 1913, 192 + 164 pages), *Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie* (Stuttgart, 1890, VIII + 187 pages), *Einführung in die Functionentheorie, eine Ergänzung zu allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung* (Stuttgart, 1894,

[11] Lectures were specified as follows: Cartography Essentials – *History of Earth Shape projection, Projection in accordance with Older Theories, Gauss's Divergence Theorem and projection of newer theory;* Spherical Astronomy – *Spherical Coordinates Framework, Sidereal Time, True Time and Civil Time, Circadian Movement Phenomenon, Change in Coordinates Due to Precession and Nutation, Survey Corrections in Respect of Parallax, Refraction and Aberration, Determination of Azimuths Time, Geographical Latitudes and Longitudes, Astronomical Determination of the Earth Shape;* Geophysics – *Physical Determination of the Earth Shape, Deviations from the Direction of the Gravity Axis and its Impact on Determination of Geodetic Values, Variation of the Earth Axis and Theory of Nivelation*.

[12] According the foreword, the textbook was finished in 1894. It was the top of Láska's theoretical works. Its structure and conception were very modern, it put the stress on the mathematical applications. It was compared with the famous German textbook written by Pizzetti (1895).

[13] The extensive collection of mathematical formulas was spread throughout Europe. It was very well reviewed in the journal *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (see 20 (1888), pp. 1283, 25(1893/1894), pp. 1906).

[14] V. Láska noticeably rewrote Lieblein's textbook, he added information on sources, many exercises, historical comments and bibliographical notes.

V + 55 pages)[15] and *Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie)* (Stuttgart, 1894, VIII + 240 + 204 pages) became very famous and popular.[16]

4.4 Other Láska's studies and smaller works

Works of V. Láska in the 1890s covered such topics as astronomy, geodesy, geophysics and applied mathematics. V. Láska wrote his works in Czech and German language and published them mainly in the journals *Zprávy Královské české společnosti nauk* [Reports of Royal Bohemian Society of Sciences], *Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění* [Dissertations of the Czech Academy of Sciences, Literature and Arts] and *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky* [Journal for Cultivation of Mathematics and Physics]. His best works include: *Theorie nivellování na geoidu* (Theory of Nivelation on Globe, 1894),[17] *O transformaci orthogonálních geodetických souřadnic na ellipsoidu* (On Transformation of Orthogonal Geodetic Coordinates on Ellipsoid, 1894),[18] *Vyšetřování změn světlosti hvězd proměnných* (Investigation of Changes in Brightness of Variability Stars, 1894, 1895),[19] *Pozorování jasných čar ve spektrech některých hvězd* (Observations of Bright Emission Lines of Some Spectrum of Variability Stars, 1894)[20] and *Stanovení zeměpisné šířky observatoře c. k. české univerzity* (Determination of the Exact Coordinates of Location of Prague Astronomical Observatory, 1899).[21] His smaller works and studies presented a wide range of diverse topics. The themes covered: refraction, mirage, meteorology, historical notes about pendulum clocks, an analysis of the astronomical works of Marcus Marci, descriptions of historical and modern astronomical instruments, explanations of the construction of new measuring instruments (argeometer, theodolite, tachymeter), studies of conic section construction, graphical solutions of unusual application tasks, triangulation, levelling, transformation of geodetic coordinates, interpretation of geodetic points, division of areas, cartography, etc.

5 The top of career – Lwów

At the end of the 19th century, there was room for only one Professor of Astronomy at the Czech University in Prague and one place for a Professor of Geodesy at the Czech Technical University in Prague. Requests sent to Vienna to grant the creation of a second professorial position were not successful. Václav Láska could not advance his career in Prague, and thus he accepted an offer of and Associate Professor Position in Lwów.

On 25th October 1895, V. Láska was appointed Associate Professor of Spherical Astronomy and Higher Geodesy at the School of Polytechnic in Lwów. He started his first Polish lectures shortly after his arrival; these covered photogrammetry and nomography and he wrote the first Polish textbooks on geodesy and applied mathematics. V. Láska was named Director of Astronomic Observatory at the Polytechnic School in Lwów on 1st December 1895. He started

---

[15] It was a classical textbook on calculus which put the stress on physical, astronomical and geodetic applications.
[16] For information on Láska's publications see [1] and [4].
[17] Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění 3(1894), n. 11, 4 pages.
[18] Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění 3(1894), n. 17, 8 pages.
[19] Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění 3(1894), n. 13, 16 pages, 4(1895), n. 13, 17 pages.
[20] Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění 3(1894), n. 30, 3 pages.
[21] Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění 8(1899), n. 25, 16 pages.

the reorganization and modernization of astronomical observations with a great passion. Soon, on 8th August 1897, he was named Private Docent at the University in Lwów and two years later a Professor at the Polytechnic School. Additionally, in 1901 V. Láska became Director of the Seismology Station in Lwów and started a revision of the seismological research in Galicia.

V. Láska learned the Polish language almost perfectly very soon after coming to Lwów. He grew fond of his Polish colleagues and students (a friend of his was, for example, prof. M. Smoluchowski). His understanding of Polish national movement, Polish culture and history was deep. Although he became an acknowledged and reputable expert, he still wished to return to Bohemia. He brought his wife Anežka (born Maisnerová in Kladno) with him to Lwów. His two sons studied at Polish schools although he himself had a solely German education. V. Láska maintained close contacts with Prague and kept track of all the changes at the Czech University and Technical University. He conducted extensive correspondence with the whole world.

Lwów in the 19th century

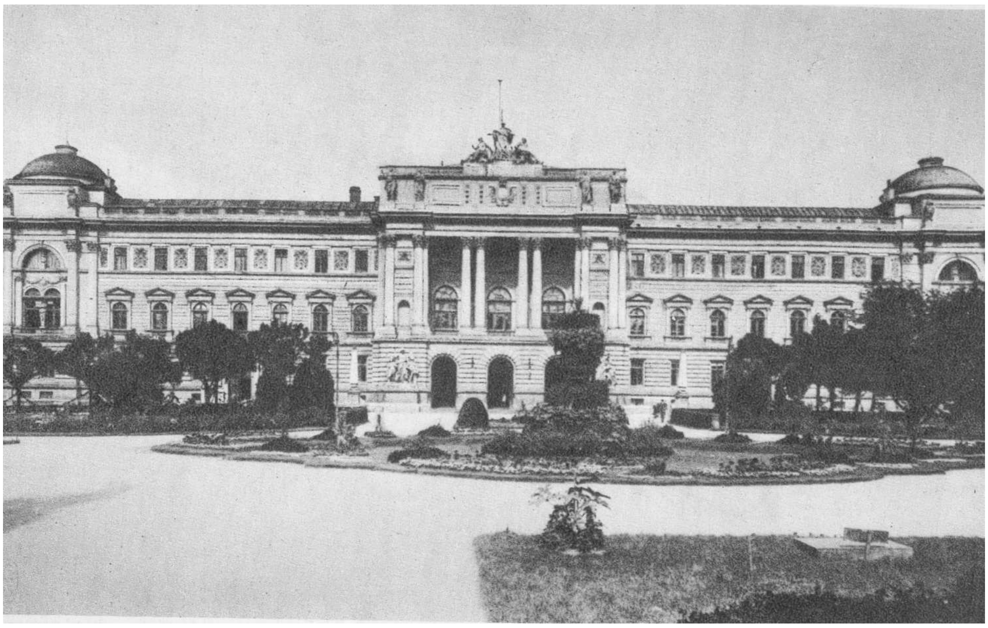
For his Polish students he wrote and published these textbooks and monographs: *Astronomia sferyczna i geodesya wyższa* (Spherical Astronomy and Higher Geodesy, Lwów, 1901, 88 pages), *Teorya błędów i rachunek wyrównania* (Equalizing Count and Least-squares Analysis, Lwów, 1903, co-author S. Widt), *Teodolit i jego zastośowanie do zdjęć polygonanych* (Theodolit and His Mathematical Background, Lwów, 1903, co-author S. Widt), *Miernictwo* (Measuration, Lwów, 1903), *Wykłady nomografii* (Nomography, Lwów, 1905, 43 pages, co-author F. Ulkowski) and *Teorya rzutów kotowanych* (Theory of Practical Numerical Calculations, Lwów, 1907, 49 pages).

Thanks to his professional works and activities, and his professional and personal contacts, he was named a member of the *Czech Royal Society for Science* (an extraordinary member from 1895), *Czech Academy for Sciences and Arts* (an extraordinary member from 1896), *Société Belge d'Astronomie* (a titular member from 1904), *Commission for Earthquake in Vienna*, *Central institute for*

7

meteorology and geodynamics in Vienna, Bibliographical commission of Academy in Krakow and a member of the organization committee of the *First international congress for seismology* (Strasbourg 1901).

Polytechnic in Lwów



University in Lwów

5.1 Work in seismology

Láska's arrival to Galicia started his deeper interest in seismology which became probably the most important topic of his stay in Lwów. Since the beginning of his career in Galicia, V. Láska concentrated on applications of mathematical methods when solving the geodetic, geophysical and seismologic problems of east Galicia. His works also gained large acceptance abroad (they were appreciated by A. Sieberg, H. Benndorf, W. H. Hobbs, B. B. Golicyn). V. Láska belonged to the founders of a young and fast-developing Austrian seismology school of thought built from the beginning on a mathematical basis, exact measuring and scoring. Reports on seismological measuring in east Galicia and a study of the earthquake history in Poland represented valuable documents indicating his universal activities. Seismological papers, acknowledged world-wide, included his works written in the German language: *Ziele und Resultate der modern Erdforschung* (1904),[22] *Die Erdbeben im Lichte neuester Forschungen* (1908)[23] and *Zur Geschichte der praktischen Geometrie in Polen* (1907, 1909).[24]

First international congress for seismology (Strasbourg 1901)

5.2 Work in geodesy

With respect to his specialization at the Polytechnic School, V. Láska was concerned also with geodesy. He led numerous student excursions and organized outdoor projects and surveys. Since his Prague studies, V. Láska was attracted to measuring instruments, their construction, possibilities of improvement and elaboration. In Lwów, for example, V. Láska designed a new tachymeter (known as the Láska-Rost patent), new construction of photo-theodolite, builder's level

[22] Natur und Offenbarung 50(1904), pp. 193–208.
[23] Natur und Offenbarung 55(1908), pp. 257–273, 321–337.
[24] Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 5(1907), pp. 102–106, 143–147, 7(1909), pp. 12–13.

and planimeter and improved tachymetry arithmetic instruments (replacing tables). From the theoretical point of view alone, V. Láska stove to improve and refine arithmetic geometrical methods in geodesy and photogrammetry. He was also interested in the history of geodesy, especially in the history of theodolite development, the history of projection and the history of "practical geometry" in Poland.[25]

5.3 Work in astronomy

Although at the beginning of his career after his Prague studies, Václav Láska was determined to become an astronomer, following his Prague disappointment, astronomy became only a marginal subject of scientific interest to him. Regular reports about observations and surveys at the observatory in Lwów and scientific essays about research on variable stars represent valuable documents regarding his astronomical activities. In addition to the regular measurements, the organization of scientific work of the observatory in Lwów and the lectures at the University he also undertook the second revision of extensive and time consuming publication of an astronomy textbook written in German language *Lehrbuch der sphärischen und theoretischen Astronomie und der mathematischen Geographie* (Leipzig, 1906, 1913, 192 + 164 pages) and the preparation of astronomy and geodesy textbooks *Astronomia sferyczna i geodesya wysza* (Spherical Astronomy and Higher Geodesy, Lwów, 1901, 88 pages) written in Polish language.

Astronomic Observatory at the Polytechnic in Lwów

5.4 Work in meteorology

However marginal, the new topic of Láska's works in Lwów was meteorology, in which he concentrated especially on the observation of the sunset, the research of cloudiness, the measurement of rainfall and a description of the relation of meteorological phenomena and elevation above sea-level.

[25] For more information on Láska's scientific and pedagogical activities in Poland see [4].

5.5 The importance of Láska's professional activities in Lwów

Václav Láska strongly emphasized mathematically exact definitions of terms and relations. He believed that mathematical expression was the best form of description of all natural sciences. V. Láska demanded logic, objectivity and exact observation, conciseness, clarity, comprehensibility and accuracy in results processing. Mathematics did not represent the main goal of his studies, but rather the means or path to the resolution of quantitative and qualitative problems. Thus his textbooks and study materials contain exact definitions even in the descriptive sciences (geography, geology and balneology). His effort to do the following: to explain observed processes with the use of physics, to describe them in terms of formulas and equations; to mathematically, accurately interpretate measurements; to clearly formulate the conditions of experiments; to briefly and concisely analyse results and to faithfully describe the questionable problems, fully fitted in the concept of natural science "mathematization" and completely aligned with world trends. At the end of the 19th century and during the first decades of the 20th century, V. Láska formulated a number of basic rules of tectonics and geo-tectonics, in spite of the fact that, at that time, only a poor understanding of the physics of solid substances existed. V. Láska was ahead of his time the more than 30 years and, to a certain degree, anticipated the role of time in elastic, plastic and viscous states in one physical system at various thermo-dynamical conditions inside the Earth.

His most important result is probably represented by the *Láska's Formula* which enables approximate estimation of distance where an earthquake is measured from its epicentre,

$$D = [(S - P) - 1] \text{ mega-meter,}$$

where D represents the distance of the observation station from the epicentre in mega-meters (1 mega-meter is 1,000 km), P is the time when longitudinal waves (*primae*) reached the observation station, P is expressed in minutes, S is the time when transverse waves (*secundae*) reached the observation station expressed in minutes. Láska's formula, which was found experimentally, applies for distances up to 10,000 km. The formula is not absolutely accurate, it requires corrections,[26] but it is being cited and used up to now.

5.6 Other Láska's activities

Václav Láska was a member of editorial board of the prestigious international journals: *Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen*, *Astronomische Jahresbericht* and *Internationales Archive für Photogrammetrie*. He also took part in the geological survey of Galicia, which was related to an effort to start crude oil extraction in this area and to organize a regular seismological and meteorological service in Galicia.

6 Second career in Prague

In 1911, Václav Láska was offered a position of Professor at the University in Freiburg (Switzerland), which he refused because he did not want to move from Lwów to another foreign city. He was thinking of moving back to Prague. He

[26] The Table of Basic Corrections was put together by Czech astronomer, meteorology and seismologist Rudolf Schneider (1881–1955).

aspired to devote himself to geophysics, teach it at a university and continue the scientific work which he begun in Lwów.

The Austrian Ministry of Culture and Education took a different view, however, that it was enough for Prague to have only one (German) department of Geophysics, at which A. Prey, R. Spitaler and L. W. Pollack held consecutive positions. In 1911 a chair of applied mathematics was established at the Czech University in Prague and Václav Láska was appointed to this position.

6.1 Professor of applied mathematics in Prague

Václav Láska took over the leadership of the Department of Applied Mathematics in 1911 and managed it until 1932. He was more or less forced to devote himself, at first, to statistics and probability, and shortly thereafter lead the department of statistics and actuarial mathematics and the department of earth's magnetism. Since he saw the base of geodesy, astronomy, geography and petrochemical science in applied mathematics, he introduced some new tutorials, he also endeavoured to provide his students with new incentives to lead them to the study of the application of numerical methods, trigonometry etc. V. Láska supported the habilitations of young colleagues from various areas of applied mathematics, actuarial mathematics and statistics. He promoted his co-workers to be sent to west Europe and the USA to improve in the areas of petrochemistry, mining surveys, and research on minerals, crude oil and minerals deposits, exploration of natural resources and phenomena, and the like. His dream was to create, in Prague, a top quality applied mathematics workplace of world importance.[27]

6.2 Work for newly established Czechoslovakia

After the creation of independent Czechoslovakia, Václav Láska took part in the building of new science institutes; he influenced the work of statistic, geodetic, cartographic and geophysics institutes. During that time, Láska's interest concentrated, above all, on geophysics. Thus he was named, on the 20th of December 1920, the Director of the *Czechoslovakian Geophysical Institute in Prague*. For a short period of time, he was the only employee of this Institute, but soon he developed this Institute into a top workplace connected with the centres for geomagnetism, seismological and geophysical research of Czechoslovakia. He saw the main goals of his work in the area of research (gravitation, earthquake, geomagnetism, geo-electricity, geothermics, radiation, geophysical mapping of the state territory, the provision of observation of unexpected phenomenon – aurora, local earthquakes, flooding) with the view of the practical tasks of public interest (construction of houses in seismically active locations, protection from flooding, technical constructions of tunnels, the use of data for aeronautics and civil defence, geophysical earth research, search of precious metals). He did not omit even the education of new generations and the intensification of international cooperation in the form of co-workers internships, the exchange of magazines and monographs and, above all, the creation of a net of observation and gauging stations.

Thanks to all these activities, V. Láska became a Member of the *International Union of Geodesy and Geophysics* (IUGG) in 1923 and, at the same time, the first Chairman of the *Czechoslovak National Committee for Geodesy and Geophysics*. As a result of his initiative, a net of Czech correspondents and observers arose

[27] For information on geological research in Czechoslovakia see [3] and [5].

(what they did was observation of local earthquakes, new data collection, and recording the history of earthquakes), and a special educational seminar meeting was started to meet their needs. The Czech seismologic station in Prague, where the Wiechert's horizontal seismograph was installed, was established one year later and in 1927 integrated into the international net. After the station's routine setup, V. Láska managed to attract young qualified co-workers: J. Liznar, F. Čechura, B. Kladivo, V. Špaček, J. Špaček, J. Šplíchal, B. Šalamon, R. Běhounek and A. Zátopek.

Václav Láska retired in 1932 at the age of 70; the leadership of the geophysical institute was taken over by his student and colleague B. Šalamon (1880–1967), who had built, with Václav Láska, the state geophysical institute, organized the geophysical and seismologic service in Czechoslovakia, took part in the creation of station network (Praha, Cheb, Stará Ďala – Ógyalla, Užhorod) and contributed to their recognition at the international level.

In partnership with Jaroslav Pantoflíček (1875–1951), Václav Láska contributed to the creation of the *Statistický atlas Republiky Československé* (Statistical Atlas of Czechoslovak Republic, published from 1930 to 1935). He also influenced the basic concept of the geographic-statistical mapping of our country. His aim was to obtain and uniformly work up as much data about Czechoslovakia as possible. V. Láska tried to push through his own working procedure – "to measure, chart, calculate, reflect, evaluate and control data". Thanks to his own ideas, his speed and accuracy in the execution of demanding calculations, his diligence with regards to surveys and data evaluation, his excellent knowledge of measuring methods and instruments and his unusually extensive knowledge of literature, he was immensely respected by his co-workers.

For students and his co-workers, Václav Láska wrote the following Czech textbooks, monographs and texts: *Počet pravděpodobnosti* (Theory of Probability, 1921, 127 pages), *Počet graficko-mechanický* (Graphic-Mechanical Calculations, Vol. 1, 1923), *Úvod do kosmické fysiky a matematické geografie* (Introduction to the Cosmology and Mathematical Geography, 1926), *Úvod do geofysiky* (Introduction to Geophysics, 1927, 73 pages), *Úvod do filosofie* (Introduction to Philosophy, 1939, 52 pages) and *Theorie a prakse numerického počítání* (Theory and Practices of Numerical Calculations, 1934, co-author V. Hruška) and statistical booklet *Vybrané stati z matematické statistiky* [Selected Parts of Mathematical Statistics]. His studies entitled *Statistika všeobecná* [General Statistics] and *Úvod do studia statistiky* [Introduction to Statistics] remain as manuscripts.

7 Activities after retirement

Václav Láska did not stop his scientific work even after his retirement. He devoted himself to the scientific, pedagogical, methodical and didactical preparation of secondary school teachers of mathematics. He endeavoured to organize courses and projects using examples from his practice for teachers. V. Láska took part in discussions regarding the reformation of the Czechoslovak educational system; he sharply denounced the continuous reduction of requirements posed on the preparation of teachers and on the knowledge of students. V. Láska had his own ideas regarding education and proper teaching methods. He thought that correct education should include a proficient knowledge of basic subject matters and should be enriched by interesting and provocative problems which would provide useful stimulus for further self-education and scientific student work. Based on his own experience, V. Láska believed that the best results would be obtained by well-aimed support of talented students, by providing good motivation and by providing the students with opportunities to voluntarily undertake small research tasks and by doing so attracting students to scientific work and allowing them to become part of the scientific team.[28] V. Láska insisted that mathematics forms a part of everyday life and is essential for it. He showed that even ordinary people may understand the importance of mathematics through appropriately selected examples and applications. In this way they would support the teaching of mathematics at all levels of education.

Václav Láska died on 27th July 1943 in Řevnice near Prague.

References

[1] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 34 [Czech Mathematical Community, Edition History of Mathematics, volume 34], Ústav aplikované matematiky FD ČVUT, Matfyzpress, Praha, 2008 (Czech).

[2] Čupr K.: *Posmrtné vzpomínky*. [Posthumous Memories.] Rozhledy matematicko-přírodovědecké 23(1944), pp. 136–138 (Czech).

[3] Pleskot V., Zátopek A.: *In memoriam profesora dr. Václava Lásky*. [In Memoriam. Professor Dr. Václav Láska.] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 89(1964), pp. 247–249 (Czech).

[4] Vetter Q.: *Profesor Dr. Václav Láska šedesátníkem*. [Professor Dr. Václav Láska Sexagenarian.] Časopis pro pěstování matematiky 53(1924), pp. 1–19 (Czech).

[5] Zátopek A.: *Sixty years since the foundation of the (State) Institute of Geophysics at the Charles University in Prague*. Studia geophysica et geodaetica 25(1981), pp. 296–312 (English).

Acknowledgement

The publication was supported by grant GA ČR P401/10/0690 of the Czech Academy of Science.

Address

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Department of Applied Mathematics
Faculty of Transporation Sciencies
Czech Technical University in Prague
Na Florenci 25
110 00 Prague 1
Czech Republic
e-mail: *becvamar@fd.cvut.cz*

[28] For more information on Láska's teaching methods see [2].

From the Elements of Euclid to Alberti's Elements of Painting

Dedicated to Dr Efthalia Constantinides

Christine Phili

National Technical University Athens

xfili@math.ntua.gr

G. Santinello in his book, *Leon Battista Alberti. An aesthetic vision of the world and life* stresses that the *Elements of Painting* constitute: "*a brief treatise containing a technical didactical character in which he developed certain geometric principles and their applications ... Starting with some definitions from the traditional mathematics of the ancients point, line, surface, solid]. To these [Euclidean definitions] follow the definitions which Alberti proposed, formulated in a more concrete language of painters which followed the vision: For example for the geometry a solid is that which has length, breadth and depth. For Alberti, a body should be divided by length, by width and by depth; on the terms of vision a solid is that which is covered by a surface which is possible to see exposed to the light. Finally he related to the definitions of the same elements according their pictorial representation i.e. point, line and surface. The definition of a solid is missing because its pictorial representation in two dimensions, coincides with a surface.*

In these definitions appear particularly important the knowledge of different point of view which it determine. These are three aspects contained in and the same thing could be considered. As for example it is the mathematical solid, the real solid perceived by vision, the pictorial representation of the percuved solid. A series of fundamental problems resolved graphically in a progressive order concerning difficulty and complexity".[1]

Alberti in his *Elements of Painting* shows that definitions, graphical exercises and propositions are from now on the necessary instruments to help the proficient artist to become familiar to this science. This treatise, which in reality constitutes a

[1] G. Sanitinello, *Leon Battista Alberti. Una visione estetica del mondo e della vita*. Firenze 1962 p. 68-69.

manuel concerning exercises of perspective, illustrates in principle the coexistence of these two disciplines: i.e. geometry and painting. For this he undertakes a most delicate task, transforming the Euclidean definitions into an easier language i.e. less abstract and more practical for the artists, who are involved with beauty[2] and harmony.

In reality this treatise on the "*Elements of Painting*" is based on the spirit and content of Euclid's *Elements*, one of Alberti's favorite goal of studies.[3] Moreover in his text on the Tuscan dialect, he stresses the true meaning of Elements i.e. *"these very brief annotations, which we denominate as Elements" ("questi brevissimi ricordi, qua il chiamano Elementi")*.[4] [5]

Alberti follows Euclid's *Elements* as in the beginning of his treatise which provides the definitions of the principal geometrical objects such as point, line, surface, solid, angle etc. Nonetheless it diverged from the Euclidean definitions due to the fact that Alberti composes this manual in order to assist the artists. This new

---

[2] Conformly to Alberti's position *"beauty is born with painting. Moreover painting was given the highest honour to our ancestors. For although almost all other artists were called craftsmen, the painter alone was not considered in that category. For this reason, I say among my friends that Narcissus who was changed into flower, according to the poets was the inventor of painting. Since painting is already the flower of every art, the story of Narcissus is most the point"* L.B.Alberti, On Painting ,translated with introduction and Notes by J.R. Spencer New Haven Yale University Press 1970, p. 64.

[3] Probably Alberti had studied the Latin translation of Campanus of Novara. For more details about Latin translations see Ch. Phili, The Elements of Euclid, the treatises of Achimedes, the Conics of Apollonius and the first translations of Venice. The echoes. P*roceedings of the International Conference Byzance, Venise and the modern culture*. National Foundation of Research Athens 2004 pp. 295-320.

[4] L. B. Alberti,. page 34.

[5] See the etymology of the Greek word *stoixeion*.

science of perspective,[6] given by Boethius,[7] arises during the Renaissance period. The need of new techniques made imperative the knowledge of geometry[8]. Thereby the Renaissance system reproduced the monocular vision, while the eye of the observer is placed at a certain distance from the figurative plan.

As already mentioned above, Alberti for reasons of brevity and clarity opens his treatise with definitions related to basic concepts dealt by the painter.

The Euclidean geometric definition of the point states that:

“A point is that which has no part”

[The translation in English of Euclid’s *Elements* is due to Sir L. T. Heath]

and this has been slightly transformed in the following statement:

“A point is that which cannot be divided into parts”.[9]

[6] Term deriving from the Latin perspective, i.e. from *perspicere* (see with clarity) that was the translation of the Greek term Optike, science of vision. For more details see G. Nicco Fasola, Svolgimento del pensiero prospettico nel trattati da Euclide a Piero in *Le Arti 1942-1943* a IV pp. 59-71. See also P. Reina, *La Prospettiva*. Milano 1940, D. Gioseffi, Perspectiva artificialis. Per la Storia della Prospettiva Spigolature e appunti *Istituto di Storia dell’ Arte Antica e Moderna di Trieste* 1957 pp. 14-47 and complementi di Prospettiva in *Critica d’ Arte* 1957 XXIV pp. 468-488; 1958 XXV-XXVI pp. 102-139.

[7] Boethius, *Analyt. Poster*. Aritstot. Interpretatio Bâle 1570 p. 527 and p. 538.

[8] G. Wolff, Mathematik und Malerei *Math. Bibliothek*. 20-21 Leipzig 1916, 2e Aufl. 1925; W. M. Ivins, Jr. *Art and Geometry* Cambridge. Mars. 1946. See also G. Wolff, Leone Battista Alberti als Mathematiker, in *Scientia* Bd. LX 1936 pp. 351-359.

[9] *“Punctum dicunt esse quod nullas queat in partes dividi”*. L. B. Alberti, op. cit. p. 115.

I.e. Alberti instead of giving a mathematical definition on point, has given a technical definition addressed especially to the artists[10]. (It may be mentioned that all Latin quotations contained in this analytical essay are translated in their entirety from Latin to English by the present author.)

The second and the third definitions of the *Elementa picturae* comprise in reality a combination of two Euclidean definitions, dated to 300 B.C. These constitute the second and the third definition, as well as the fifth and the sixth respectively.

Thus the second and the third Euclidean definitions express:

"A line is breadthless length",

"The extremities of a line are points"

These two definitions in the hands of Alberti were instilled as seen below:

> *"A line is said to be a point deduced from an oblong length. The length of a line can be divided, but not its latitude".*[11]

Alberti gives again a definition chosen for the usage of an artist. In reality he proposes them to consider a line derivating from the movement i.e. the flux of points[12]. This fact constitutes a contradiction to the axiomatization of Euclid –

---

[10] See the definition of the point in his treatise *On the Painting* : « *The first thing to know is that a point is a sign which one might say is not divisible into parts. I call a sign anything which exists on a surface so that it is visible to the eye* ». L. B. Alberti, op. cit., p. 37.

[11] *"Lineam fieri dicunt puncto in oblongum deductio. Erit igitur lineae prolixitas divisibilis, latitude autem omnino erit indivisibilis"*L.B.Alberti ,*Elementa Picturae*. idem.

[12] For more details see Ch. Phili , Has flux's concept ancient roots? An attempt at an approach. *Galileo* Uruguay 2002 pp.1-7 .http://www.galileo .fcien.edu.uy

According to Euclid a line does not derive from the movement of a point. It might be stressed that Alberti does not consider the mathematical point as the "point of painters", which is not abstract. A real point however performed by the painter's brush, constitutes the minimal quantity which was required, according to the previoius definition: «*which cannot be divided into parts [by the painter]»*[13].

It might be stressed that Alberti's definitions concerning the concepts of point and line are not abstract and thereby not mathematical. Moreover in his note regarding his treatise *"On Painting"*, *De punctis et lineis apud pictores*[14] (*On the points and lines used by painters*), he expresses sufficiently well these notions:

"The points and lines used by the painters are not those utilized by mathematicians for whom each line an infinite number of points could be contained. By our definition a point is a sign that a painter considers as a manner between a mathematical point and a quantity which could be measured, possibly as atoms".[15] [16]

Alberti's definition of a surface arises also from a combination of two Euclidean definitions:

"A surface is that which has length

and breadth only".

"The extremities of a surface are lines".

Thus for Alberti the definition for a surface could be quoted as:

"A surface is said to be produced if

the latitude of line is extended; and thus the length as well as the latitude (width) can be divided, but not its depth

[13] L. B. Alberti, op. cit. p. 115.
[14] L. B. Alberti, *Opera Inedita et pauca separatism impressa*. Firenze 1890 p. 66.
[15] *"Puncta et lineae hic apud pictures sunt non quae apud mathematicos, ut in linea cadant puncta infinita. Ex nostra definitione punctum est signum quod ipsum pictor sentiat veluti medium quodam inter punctum mathematicum et quantitatem quae cadat sub numero quales forte sunt atomi"*.
[16] Translated by the author of the present paper.

(profundity)”.[17]

Once more Alberti adopting Euclid for the usage of artists, diverges from Euclid’s axiomatization (even though Alberti ignores that he commits it): in reality he determines the two dimensional geometric figure deriving from the movement i.e. the flux of a line.

At the end of the first set of statements (A) Alberti gives the definition of a body for the painters, based on the first definition of the Book XI of Euclid’s *Elements* i.e:

“A solid is that which has length, breadth and depth”.	*“A body should be defined as to whether it can be divided by length, by width and by depth”*.[18] [19]

At the beginning of the second list of definitions (B), Alberti stresses that all the statements of the first list (A) *“were stated by the ancients”* i.e. *(Greeks)*.[20] He did not explicitely mention Euclid but it is clear that he relates it to Euclid’s *Elements*.

[17] *“Superficien esse dicunt veluti si lineae latitudinem extendus, ex quo fiet ut eius longitudo atque item latitudo possit dividi, sed profunditas non aderit”*. idem.

[18] *“Corpus autem id esse statuunt, cuius et longitudo et latitudo et profonditas est divisibilis”*. idem.

[19] We can remark that Alberti follows very closely the ancient sources such as the Stoics’ position: *“Body is defined by Apollodorus in his Physics as that which is extended in three dimensions, length, breadth, and depth. Thus this is also called body. But surface is the extremity of a solid body, or that which has length and breadth only without depth ... Surface exists not only in our thought but also in reality… A line is the extremity of a surface or length alone. A point is the extremity of a line, the smallest possible mark or dot”*. Diogenes Laertius, *Lives and Opinions of Eminent Philosophers,* VII, p. 135.

[20] *“Haec igitur dixere veteres”*.L.B.Alberti. op.cit. idem

Moreover Alberti emphasizes that the second list (B) contains his own definitions stating that: *"we should add the following question below"*[21].

In reality the additions of Alberti[22] in his manuel served the artists to acquire a visual perception in its entirety.

Moreover the commencement of the second list (B) records the second Euclidean definition of a body contained in the Book XI.

"An extremity of a solid is a surface."

Alberti moreover indicates that: *"a solid body ("corpus") that is covered by a surface should be perceived by the possibility of sight and light"*.[23]

It might be quoted that in this statement Alberti combines his theory concerning the vision and the light. In the latin version of his treatise *On the Painting*, he stresses that a painter tries to reproduce everything which is visible due to the light.[24] On the other hand Alberti endowed with an open mind takes important steps in the theory of perspective as he abandons conic vision[25] for the pyramidal one.

The motives of all the other definitions included in this treatise reflect Alberti's concepts on geometry for the profit of the painters.

Moreover, in order to give his definition for a circle, Alberti utilizes the model of the Euclidean definitions 15th and 16th of the Book I, which Sir T. Heath translates in the following way:

"A circle is a plain figure contained by

"By defining a circle we name the

[21] *"Nos ista subiungemus"* idem.

[22] See R. Arnheim, *Art and Visual Perception. A psychology of the Creative Eye*. California University 1954, 2nd ed. London 1956.

[23] "*Corpus appello id quod opertum superficie sub aspectu et lumine possit perspici*".idem

[24] *"Nam ea solum imitari studet pictor quae sub luce videautur"* L. B. Alberti, op. cit. O.IV.

[25] *"[The Stoics] hold that we see when the light between the visual organ and the object stretches in the form of a cone… The apex of the cone in the air is at the eye, the base at the object seen. Thus the thing seen is reported to us by the medium of the air stretching out towards it, as if by a stick"*. Diogenes Laertius, *Lives and Opinions of Eminent Philosophers* VII, 157.

one line such that all the straight lines falling upon it from one point among those lying within the figure are equal to one another. And the point is called the center of the circle".

peripheral boundary constructed by the curved lines which joined between them at their extremities, in such a way that they neither intersected nor formed any other angle. Thus if there is a point in the middle of the above area, it will be from all other points equidistant related to a continuous peripheral edge".[26]

At the end of this list of statements Alberti presents his own definition for an angle, which converges with the Euclidean (Book I definition 8) one.

"A plain angle is the inclination to one another of two lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line."

"An angle is where two joined lines do not form one line but intersect each other, even lthough some of them are not at a right angle and others are. A right angle is one of the four angles constituted by two intersecting lines that intersect each other."[27]

[26] *"Circulus apud nos erit limbus constans pluribus lineis flexis, quarum capita ita inter se iuncta sint, ut altera nusquam alteram pericidat. Quod si in areae medio adsit punctum, id ab universis limbi partibus aequo semper intervallo destabit".* L.B. Alberti, op. cit. p. 119.

[27] *"Anguli fient cum duae iunctae lineae non unam efficient lineam, sed sese mutuo intersecabunt, nam ex ea intersecatione quattuor fient anguli circa punctum intersecationis, qui si erunt omnes inter se pares dicentur recti; si non erunt pares dicentur non recti. Hinc dicetur rectangular superficies, quae recto habeatur angulo, absque numero angulorum dicetur aut triangula, aut quadrangular, et eiusmodi"* idem.

ANGELA LOHRI – violinist and PhD student
Fields of interest: harmonic research, mathematics in music theory, musical intonation, combination tones, music acoustics, performing arts
Supervisors: Univ. Prof. Dr. Werner Schulze, Dr. Philippe Borer
Institute: International Centre of Harmonics, University of Music and Performing Arts Vienna, Lothringerstrasse 18, A-1030 Vienna, Austria
Email: angela.lohri@gmx.ch

COMBINATION TONES – UNITY AND MULTIPLICITY

Introduction

The first historical evidence about the investigation of combination tones dates from 1714[1]. The violinist and composer Giuseppe Tartini stated that two musical tones played simultaneously, either on one single or on two different instruments, generated a third sound, in his words a '*terzo suono*'[2]. Tartini emphasised that the *terzo suono* has a physical existence: "it is physically certain that, when two simultaneous sounds are played loudly and in a prolonged way, [...] a third simultaneous tone can be heard, different from the given two sounds."[3]
By and by, the phenomenon has been studied by music theorists, instrument makers, acousticians and physiologists. The term 'combination tone' was introduced by Gerhard Vieth in 1805. Before, the phenomenon was named "third tone (or third sound)", "grave harmonic tone (or grave harmonic sound)", "grave harmonic", "resultant tone" and sometimes "Tartini tone". Soon, the complexity of the subject became evident. Controversy arose over the "subjective" or "objective" nature of combination tones.
Current research reveals that combination tones are still a challenging field including physical, physiological and psychological aspects. The interactions of capacities, sensation, focus and consciousness of the hearing individual turn the research about combination tones into a complex undertaking. New findings show that combination tones can originate from different places. Either they are generated in an instrument (extra-aural)[4], or in the human auditory system (intra-aural). Moreover, in most cases, not only one single combination tone is generated from two simultaneous sounds, but many. This was first described by the organist Andreas Sorge in 1744[5] and by the physicist Thomas Young in 1800[6]. Furthermore, another neuronal phenomenon "the virtual pitch"[7] should be taken into consideration as well.[8]
Over the past three centuries, various theories about the origin and nature of combination tones have been developed. Some of them have been rejected, some of them have been developed further. Considering these continuous changes, it is remarkable that at the latest with Gustav Hällström's publications, one particular insight

[1] TARTINI 1767, p. 36
[2] TARTINI 1754, p. 13
[3] TARTINI 1767, p. 5: „ è fisicamente certo, che dati due suoni simultanei forti, e prolungati, date due voci simultanee forti, e prolungate, si sente un terzo suono simultaneo, diverso dai due dati suoni, e dalle due date voci."
[4] LOHRI 2011
[5] SORGE 1744, pp. 40-41
[6] YOUNG 1800, p. 132
[7] The 'virtual pitch' is also known as „missing fundamental", „residual tone" or „periodicity pitch".
[8] SETHARES 2005, pp. 34-37 and pp. 82-84; HESSE 1972, pp. 110-111; TERHARDT 1981a; BENSON 2006 pp. 156-157

was certain: When two played sounds build an exact ratio consisting of low whole numbers, all emanating combination tones build among themselves a series of harmonic proportions (1:2:3:4:5: etc.) in which the played notes and their overtones are perfectly embedded. The same mathematical principle rules also within the overtone series. This may suggest that the sound itself manifests the importance of whole numbers in music.[9] Consequently, combination tones do not appear randomly, but their place of appearance is predictable and correlates with the two played notes. Giuseppe Tartini was the precursor of this idea. The following sections explain the significance of this mathematical principle on the basis of Tartini's descriptions.

The formula

In his 1767 dissertation *De Principj' dell'Armonia contenuta nel Diatonico Genere* Tartini gave a formula to calculate the third tone: "the formula of the third tone is the multiplication of the two [co]-prime numbers"[10]. In the subsequent passage, Tartini applies this formula to some common musical intervals, amongst others to the major sixth with string lengths proportions 5:3: "3 and 5 multiplied gives the product 15, and this is the third sound".[11] Fig. 1 translates this example into musical notation.[12] Tartini's given formula applies to string lengths (see numbers marked in Fig. 1), but it fits as well for operations with frequency ratios, under condition that the reciprocal values of the string lengths ratios are used[13]. And in this case, the *terzo suono* would not be expressed by the multiplication but by the greatest common divisor of the two numbers (see Fig. 2). For the given example of the major sixth, the common divisor of the numbers 3 and 5 is 1. This result may cause astonishment to some readers, because in many textbooks the first difference tone (f2-f1, in this case 5 – 3 = 2) is considered to be identical with Tartini's *terzo suono*. However, the term 'difference tone' was introduced much later by Hermann von Helmholtz in 1856[14]. There is no reason to automatically equate the first difference tone with Tartini's observation.[15]

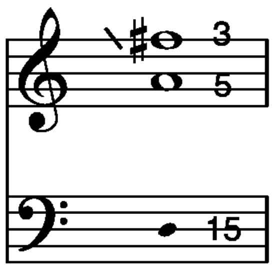


Fig. 1. Major sixth expressed in string lengths.

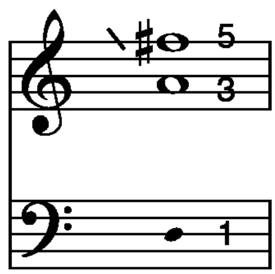


Fig. 2. Major sixth expressed in frequency ratios.

[9] In music theory the representation of intervals in frequency ratios (or in string length proportions) is fundamental. In Pythagorean tradition, the quantity expressed by a number corresponds to the quality expressed by a musical tone. In other words, every specific vibration ratio generates a characteristic tone sensation, and subsequently evokes an appropriate feeling.

[10] TARTINI 1767, p. 5: „di questo terzo suono si è la formola, che lo assicura, ed è la moltiplica tra loro de' due numeri sempre primi"

[11] TARTINI 1767, p. 5: „Moltiplicato 3 per 5, il prodotto 15 è il terzo suono"

[12] Thus, a string of length 3 and a string of length 5 would produce (if sounded together) the third tone corresponding to a string length 15. The diagonal stripe indicates that the f sharp is not deriving from the generation of fifths, but of the generation of thirds.

[13] This follows the law that string lengths behave reciprocally to frequencies. For example, an interval of a vibration ratio 3:5 is generated by two strings (of equal material, thickness and tension) with lengths of the reciprocal proportion 5:3.

[14] HELMHOLTZ 1856, p. 518: „Ich werde diese neuen Töne mit dem Namen der *Summationstöne* bezeichnen, im Gegensatze zu den früher besprochenen und schon länger bekannten, welche wir

Combination tone series

Neither in the 1754 Treatise nor in the 1767 Dissertation does Tartini comment on additional tones other than the third tones. However, Tartini recognised that for just musical intervals of the diatonic scale the place of appearance of the third tone follows always the same principle and he defined further: "Thus, the nature of this formula is [of] the same harmonic nature as the fractions 1, ½, ⅓, ¼ etc."[16] In other words, he pointed out that the proportions between the played notes and the 'third tone' were arranged analogously to the harmonic proportions which exist within the overtone series. Going beyond the slight suggestion of Andreas Sorge in 1744, Tartini recognized the harmonic nature of combination tones and paved the way for later scientists. By the middle of the 19th century, the majority of acousticians, among them Hällström and Helmholtz, recognised that two tones played simultaneously generate not only one single third tone, but an entire series of tones arranged in harmonic proportions.[17]

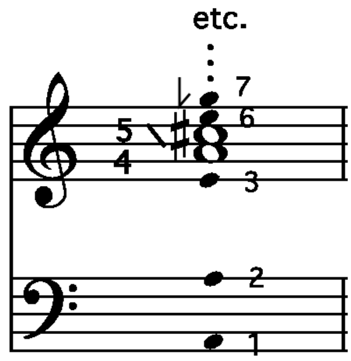


Fig. 3. The played notes (including their overtones) are embedded in a harmonic series of combination tones (combination tone series).

The principle "Unity within Multiplicity" in Music

Many of Tartini's reflections are reminiscent of Plato's principle "unity within multiplicity".[18] According to Daniel Muzzulini "unity within multiplicity" and "multiplicity within unity" were common topoi of the 18th century music.[19] Giuseppe Tartini states:

> "Vibrating strings return to the unity of their oscillations, because they are in harmonic progression. Thus, the harmonic system reduces the diverse to the same; the multiplicity to the unity. Hence, the considered unity is inseparable from the harmonic system in every respect, in fact, the harmonic system resolves itself into the unity, into his principle. The consequence is entirely legitimate, because it is physical; and totally independent from human judgement."[20]

Differenztöne nennen können, weil ihre Schwingungszahl der Differenz der Schwingungszahlen der primären oder ihrer combinirten Töne niederer Ordnung gleich ist."

[15] In the earlier 1754 *Trattato* (pp. 18-19) Tartini refers the third tone to the string length ½ of the harmonic unity (the entire string length) which would correspond to the number 2 for the calculation with frequencies. In the 1767 *Dissertation* Tartini obviously abandoned the idea of the third tone being ½, respectively 2. So testify several passages in his *Dissertation*. Additionally to the already mentioned example of the major sixth 3:5 (where the result for the third tone was 1 and not 2), a passage on p.85 in the same book confirms it: „regarding the series of the impairs 1, 1/3, 1/5, 1/7 [...] for every combination of two [of these] sounds the third tone corresponds to 1" (p. 85 TARTINI 1767, "la serie degl' impari 1, 1/3, 1/5, 1/7 [...] da ciascuna combinazione di due suoni si ha il terzo suono = 1"

[16] TARTINI 1767, p. 6: „Insomma la natura di questa formola, è la stessa armonica natura delle frazioni 1, ½, ⅓, ¼ ec."

[17] HÄLLSTRÖM 1832, pp. 444-445; HELMHOLTZ 1856, p. 522

[18] PLATON, Philebos 14C – 18D

[19] MUZZULINI 2004, p. 21 and p. 365

[20] TARTINI 1754, p. 13: "Le corde pendole sonore, perché sono in progressione armonica ne' loro suoni, si riducono alla unità nelle loro oscillazioni. Dunque il sistema armonico riduce il diverso allo stesso; la moltiplicità alla unità. Dunque dal sistema armonico è inseparabile la unità considerata in qualunque

Current knowledge about sound perception does not contradict Tartini's ideas. However some aspects of physiology have been found where the power and the ambivalent character of the harmonic series become apparent.
In music theory, the harmonic series can represent all tones that emanate from an ideal, periodically vibrating string. In sound perception, the issue is more complicated. Depending on the hearing situation sound shows either aspects of "unity" or/and aspects of "multiplicity". Usually we perceive a complex sound (consisting of several partial tones) as one single pitch. Our auditory system detects the fundamental period of all present sound components. In this process, the holistic listening dominates. Other hearing situations require a switching to another mode of listening. In the analytic listening, our brain puts the focus on a particular sound component; we become listeners of spectral pitch and can possibly hear out some overtones.[21] A further characteristic of the harmonic series can be observed: The pitch of a complex sound becomes more distinct when more overtones are added, and vice versa more diffuse when overtones are removed.[22] In this circumstance, 'multiplicity' and 'unity' are not an antagonism. In the 1754 *Trattato*, Tartini explains in this context:

> "When a series of organ pipes is arranged according to sounds in harmonic proportion and when the foot pedal is pressed, so that all pipes are played together, only the lowest tone C is heard. Thus, in this phenomenon the diverse is reduced into the same, the multiplicity to the unity as a result of the power of the harmonic series."[23]

The study of Tartini's treatises reveals that this principle governs his entire musical system. Subsequently to the above statement, he adds: "Further, a new harmonic phenomenon was discovered which proves admirably the same, even much more."[24] Tartini alludes here to the third tone which can be interpreted as well as the unity (*terzo suono*) within a multiplicity (the two played notes).
Today's knowledge in the field of physiology and neurology reveals how modern Tartini's ideas actually are. The principle of "unity within multiplicity" appears to be positioned very deeply in music perception, notably in the perception of pitch. Regarding all the vibrations around us that impact our ear, it is crucial that the information is being reduced and attributed to particular subjects (unities). In this sense, a pitch is a condensed information of multiples of a frequency that emanate very probably from a same source.
Recent investigations show that the lowest combination tone generated by just musical intervals is more audible than the theory of nonlinear mechanism in the inner ear would predict.[25] In fact, in the system of just intonation this lowest combination tone coincides with the "missing fundamental" (also called residual tone, virtual pitch or periodicity pitch) which is a tone generated by the neuronal mechanism of pitch detection. The

---

rispetto, anzi il sistema armonico si risolve nella unità, come in suo principio. La conseguenza è troppo legittima, perch' è fisica; e però affatto indipendente dall'arbitrio umano. "

[21] SCHNEIDER 2005; SETHARES 2005, p. 42

[22] PLOMP 1976, p. 113

[23] TARTINI 1754, p. 12: "Data dunque una serie di canne di Organo disposta ne' loro suoni armonicamente in tal modo, suonando il pedale, che regge tutte le canne suddette, non si sentirà se non il solo suono gravissimo Csolfaut. Dunque in questo fenomeno il diverso è ridotto allo stesso, la moltiplicità alla unità in forza delle serie armonica."

[24] TARTINI 1754, p. 13: "Si è poi scoperto un nuovo fenomeno armonico, che prova mirabilmente lo stesso, e molto di più."

[25] MEYER 1954c; HESSE 1972 pp. 110-111; TRAMO ET AL. 2001, pp. 98-101; SETHARES 2005, p. 83; TAYLOR 2003, pp. 58-59

acoustician William A. Sethares states: “One of the central features of virtual pitch is that the auditory system tries to locate the nearest harmonic template when confronted with a collection of partials.” Based on today’s definitions in the field of acoustics, there is a strong indication that the *terzo suono* observed by Tartini was equal to a virtual pitch and not to a difference tone. This assumption would give reason again to admire Tartini’s intuition; the complex neuronal process that generates the pitch coinciding with Tartini’s third tone may perhaps be summarised as: “the harmonic system resolves itself into the unity, into his principle”.

References

Benson, David, 2006. *Music: A mathematical offering*, Third Printing (2008), Cambridge University Press

Hällström, Gustav Gabriel, 1832. Von den Combinationstönen, *Ann. Phys. Chem*. 24, pp. 438-466

Helmholtz (von), Hermann, 1856. Ueber Combinationstöne, *Ann. Phys. Chem*. 99, pp. 497-540

Helmholtz, Hermann, 1856. Ueber Combinationstöne, *Ann. Phys. Chem*. 99, pp. 497-540

Hesse, Horst-Peter, 1972. *Die Wahrnehmung von Tonhöhe und Klangfarbe als Problem der Hörtheorie,* Köln: Arno Volk Verlag

Lohri, Angela; Carral, Sandra; Chatziioannou, Vasileios, 2011. Combination Tones in Violins [extended Version], *Archives of Acoustics* 36, Nr. 4, pp. 727-740

Meyer, Max F., 1954c. Tartini Versus Helmholtz Judged by Modern Sensory Observation. *JASA* 26, pp. 761-764

Muzzulini, Daniel, 2006. *Genealogie der Klangfarbe,* Bern: Peter Lang

Plomp, Reinier, 1976. *Aspects of tone sensation,* Academic Press Inc. (London) Ltd.

Schneider, Peter et al., 2005. Structural and functional asymmetry of lateral Heschl’s gyrus reflects pitch perception preference, *Nature Neuroscience*, Vol. 8, No. 9, Sept. 2005, pp. 1241-1247

Sethares, William A., 2005. *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*, Second Edition, London: Springer-Verlag

Sorge, Georg Andreas, 1744, *Anweisungen zur Stimmung und Temperatur sowohl der Orgelwerke, als auch anderer Instrumente, sonderlich aber des Claviers, in einem Gespräche zwischen einem Musico theoretico und seinem Scholaren*, Hochgräfl. Reuss-Plauischer Hof- und Stadt-Organist zu Lobenstein

Tartini, Giuseppe, 1754. *Trattato di Musica secondo la Vera Scienza dell’Armonia,* Nella Stamperia del Seminario Padova, [Reprint] Kessinger Publishing’s Legacy Reprints, USA, 2010

Tartini, Giuseppe, 1767. *De’ Principj dell’Armonia contenuta nel Diatonico Genere, Dissertazione di Giuseppe Tartini.* Ristampa anastatica della prima edizione edita in Padova nel 1767 presso la Stamperia del Seminario, [Reprint] Cedam- Casa editrice Dott. Antonio Milani, Padova, 1974

Taylor Charles, 2003. “The science of musical sound” in: *Music and Mathematics, from Pythagoras to fractals*, (Ed.) Fauvel; Flood; Wilson, New York: Oxford University Press

Tramo, Mark Jude, Peter A. Cariani, Bertrand Delgutte; Louis D. Braida, 2001. Neurobiological Foundations for the Theory of Harmony in Western Tonal Music, in: *Zatorre et al.: The Biological Foundations of Music, Annals of the New York Academy of Sciences*, Vol. 930, June 2001

Young, Thomas, 1800. Outline of experiments and inquiries respecting sound and light, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 90, Part 1, pp. 106-150

ABOUT BOGDAN GAVRILOVIĆ (1864-1947)
Serbian Mathematician, Great Scholar, Philosopher and Erudite

Bogdan Gavrilović was born in Novi Sad, the capital of Vojvodina (Serbian province), also known as the “Serbian Athens”, in 1864 and became the great Serbian Mathematician of the country called Yugoslavia in the 20th century.

He obtained his elementary and high school education in his native city – Novi Sad. His high school provided him with excellent education in humanistic and exact sciences. As a cadet of the Serbian Tekelijanum (a private university), he studied Mathematics, Physics and Astronomy at the School of Philosophy in Budapest, and graduated there in 1885. It was here that he successfully defended his doctoral thesis “On the Expressions of Single Argument Analytic Functions” in 1886. To advance his scientific knowledge Gavrilović relied on the opportunities available in Germany and Switzerland.

In 1887 he was hired as a teacher by the Great School of Belgrade, where he became a Regular Professor in 1892, at the age of 28. At its Schools of Philosophy and Engineering he lectured students in Mathematics for more than 50 years, together with another famous Serbian Mathematician – Mihajlo Petrović Alas. Their professional dedication is described, therefore, as the laying of foundations for the Belgrade and Serbian school of mathematics of University of Belgrade that produced many excellent mathematical scientists who also belonged to the ranks of European level scientists.

Bogdan Gavrilović is also the founder of the so-called Mathematics Seminar Library and, when the University of Belgrade developed from a local “Great School” into a national scientific institution, he was the major contributor to its shaping as a modern institution of free science and studying. He held the position of University President for three terms, always participating very actively in the University’s progress as an institution of science and studying of most advanced level.

Gavrilović’s most famous textbooks are “Analytic Geometry” (1896) and “Theory of Determinants” (1909). Even by current standards these textbooks are deemed the works of the most distinguished scientific and teaching qualities. In his lifetime – the late 19th and early 20th century – they were even more valuable.

Bogdan Gavrilović also wrote and published 55 scientific and educational articles and books. In addition he published in Budapest 20 polemics in Mathematics, all sponsored by the Serbian and Yugoslav academies of sciences and arts. His favorite fields were Algebra and Theory of Functions, but, nevertheless, he was a Geometer by his heart. His works are part of the "classic development of Mathematics" as they address the most current issues of mathematical analysis and theory of functions that were being opened and developed in his time. The works provide a distinct stamp of "modernism, freshness and European level approach" for the Yugoslav and Serbian science of mathematics.

His works on Geometry refer to the most modern issues and problems of Analytical Geometry of the time, particularly the Projection Geometry using the most recent tools and instruments. Such issues and methods were a real novelty in Geometry.

His works in Algebra and Theory of Determinants were not in any dissonance with those of the other famous mathematicians engaged in the field. By his works on the determinant cubes (3rd order) Gavrilović was able to attain a position for himself among two to three most distinct scientists of the world.

His works include the following:

1. "About Structure of Algebraic Arrangements" (1900);
2. "About the Analytic Expressions of Some Functions" (1907);
3. "About a Feature of Space Determinants" (1907);
4. "About the Analytic Representation of Single Argument Functions in the Point Area of Infinity" (1907);
5. "About the Synthetic Function of the Zero Polynomial of 3rd Order" (1907);
6. "A Contribution to the Theory of Analytic Functions" (1922);
7. "The issue of Space, Hyperspace and Continuum";
8. "About the Remainders of Single Argument Functions";
9. "About the Orders of Single Argument Functions";
10. "About the Mapping of Conjugated Points of a Special Transfinite Set of Projection Points"; and

11. “About the Mapping of a Set of Points into a Transfinite Plural Set of Congruent Projection Point Lines” (1948, posthumously).

As a well-known and recognized scientist Gavrilović was a regular member of the Serbian Academy of Sciences and Arts and its President for two offices (between 1931 and 1937), a corresponding member of the Yugoslav Academy, a member of the Czechoslovakian Society of Scholars in Prague, a member of the “Circolo matematico di Palermo”, a honorary member of the University of Athens, President of the “Nikola Tesla” scientific institute in Belgrade, etc.

The Bogdan Gavrilović’s horizon reached far beyond the boundaries of mathematical sciences. Having been also particularly and extremely well educated in humanities, he possessed a vast knowledge of classical languages (Ancient Greek and Latin) and all important modern languages. As a mathematician of a very broad general culture, he was able to extend his vision over the entire science and, as such, to act in practice very profoundly. This claim is supported by a series of his works featured extensively by the qualities of his general culture. And regardless of whether he was honoring an academician, historian or philosopher or commemorating a geologist or a mathematician, and whether he was speaking to his students on the culture and role of the University, his general culture and his synthetic comprehension of all the interconnected issues could be perceived each time. This highly advanced approach reflected his very comprehensive looking at all the events around him and his connecting into a whole of all the manifestations of life – A HARMONIC VIEWING OF THE WORLD. Professor Gavrilović maintained living interest for everything; he was profoundly sociable as he displayed a friendly feeling for everyone. No words of bitterness, let alone “hostility acts” could escape from him for anyone.

Particularly distinct qualities of his broad general culture are also exemplified by his following works written extremely professionally and with second-sight:

1. Civilization of Sciences (1911);
2. Social Task of University (1912);
3. Culture And Harmony (1926);
4. On the 18^{th} Century Rationalism And Its Influence on the Society of the Time (1937);

5. On the Living And Dead Matter And on the Conflict Between Vitalists and Mechanists;
6. On Our (Serbian) Middle Ages Art;
7. On History As a Science and Its Sense; and
8. On Mihajlo Pupin, the Scholar and Philosopher.

Having understood the value of science as a whole, Gavrilović knew that the purpose of his life would not be fulfilled by doing only scientific and lecturing work in mathematics, but that his task was rather much broader. He had in mind rising of the Serbian culture and education higher, as well as its science and corresponding human resources. This is what Bogdan Gavrilović dedicated his entire life to in the situations when his nation fought to attain freedom and build its own statehood. This way he was not only a distinguished mathematician, but also a propound fighter for the culture and education of his people.

Together with Mihajlo Petrović, another great Serbian (and Yugoslav) mathematician of his time, Gavrilović not only introduced the national achievements in mathematics to the European trends in spite of a rearrangement of Serbia, but, more importantly, essentially contributed with his scientific and teaching work to raise the teaching and studying of Mathematics at the University of Belgrade to the level maintained at the universities of the developed Europe, as well as to affirm and develop the advanced European concepts of science, culture and education in our, Serbian environment. That is why it can rightly be said that the Serbian science and culture was awarded in the first half of 20th century the “Divine gift” in the form of the pioneer and giant of mathematics of that time and divine and charismatic personality of Bogdan Gavrilović.

If this review of one of the first European PhD mathematicians may seem overly pretentious, one should not neglect or forget that the time mentioned here, when Gavrilović developed his great career, should be perceived within a very specific time and space context, one that was marked by enormous scientific development differences from one part of Europe to another. [As a matter of fact, Gavrilović had to defend his doctoral thesis abroad (Budapest) since the level of Serbian education system was inadequate for such achievements in the early 20th century.]

Therefore, the contribution of Bogdan Gavrilović is two-fold. On one hand he attained the highest levels of mathematical science known in Europe in the 20th century, and, on the other, he helped the Serbian (and Yugoslav) university education methods to be improved and elevated to modern levels, thus laying foundations for the subsequent keeping of pace with the European trends, particularly concerning the courses in Mathematics. His nation also remembers him as an astronomer, philosopher and general erudite who enriched enormously the Serbian culture in numerous very important fields.

LITERATURE

1. Dr Ernest Stipanic: Paths of Development of Mathematics, Vuk Karadzic, Beograd

2. Prof. Dr Zarko Mijailovic: Determinants of Bogdan Gavrilovic – lecture

3. Dragan Trifunovic: Annals of Life and Work of Mihaila Petrovica- Serbian Academy of Sciences - Department of Natural Sciences and Mathematics, Belgrade 1969

Jasna Fempl Madjarevic
M.D. Archimedes
E-mail: jasnafm@gmail.com

B.W. Gnedenko (1912-1995) und die Entwicklung der Stochastik

Hans-Joachim Girlich, Leipzig

Jakob Bernoulli entwickelte in der *Ars conjectandi* von 1706 und Pierre Laplace in der *Théorie analytique des probabilités* von 1812 mathematische Methoden zum Studium von Erscheinungen unter dem Walten des Zufalls, die in ihrer Gesamtheit bald als *Wahrscheinlichkeitsrechnung* bezeichnet, noch am Anfang des 20. Jahrhunderts als eine Disziplin der Physik angesehen wurde. In den „Goldenen Zwanzigerjahren" entstand daraus allmählich eine eigenständige mathematische Disziplin, getragen durch Borel, Lévy und Frechét in Frankreich, Steinhaus und Łomnicki in Polen, Cramér in Schweden, Castelnuovo, Cantelli und de Finetti in Italien, Norbert Wiener in den USA, Hausdorff und von Mises in Deutschland, Bernstein, Khintchine und Kolmogoroff in Russland.
B.W. Gnedenko wurde von den beiden letztgenannten Gelehrten 1934 in eine Aspirantur an der Moskauer Staatlichen Universität aufgenommen. Diesen Zeitpunkt wollen wir als Einstieg in die Entwicklung der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen wählen und dabei insbesondere beobachten, inwieweit Gnedenko darauf Einfluss ausüben konnte.

An der Wolga

Boris W. Gnedenko wurde am Neujahrstag des Jahres 1912 als zweiter Sohn des Vermessungsingenieurs Wladimir W. Gnedenko in Simbirsk, dem heutigen Uljanowsk geboren. Boris' Großvater Wassili stammte aus dem ukrainischen Gouvernement Poltawa. Er hatte in den 1870er Jahren Land im Wolga-Gebiet erhalten, das er bewirtschaften durfte. Bereits 1915 zog die Familie Gnedenko nach Kasan, wo Boris' Vater an der Universität ein Studium aufnahm und Boris seit Herbst 1918 die Schule besuchte, die er nach erneutem Umzug der Familie im April 1925 in Saratow fortsetzte. Mit persönlicher Erlaubnis des Volksbildungsministers A.W.Lunatscharski (aus Poltawa) durfte er schon als Fünfzehnjähriger an der Physikalisch-mathematischen Fakultät der Saratower Universität studieren, erhielt nach drei Jahren im August 1930 das Abgangszeugnis und eine Anstellung als Assistent am Lehrstuhl für Mathematik und Organisation am Textilinstitut in Iwanowo-Wosnessensk, den sein bisheriger Saratower Professor G.P. Bojew kommissarisch leitete.[1]
Hier arbeitete Gnedenko vier Jahre lang sowohl in der Lehre als auch an mathematischen Modellen für die Organisation der Bedienung von

[1] W.S. Koroljuk, I.N. Kowalenko, D.B. Gnedenko: *Boris Wladimirowitsch Gnedenko (01.01.1912 – 27.12.1995).* Obozrenie priklad. i promyshlen. matematiki 11 (2004), S.161.

Textilmaschinen und an statistischen Problemen. Dabei entstanden seine ersten wissenschaftlichen Veröffentlichungen.[2]

Am Math.-Mech. Institut der MGU

Im April 1934 wurde Gnedenko von G.P. Bojew zu einem Seminar über Wahrscheinlichkeitstheorie an das Institut für Mathematik und Mechanik der Moskauer Staatlichen Universität (MGU) gesandt. Die Professoren A.J. Khintchine (1894-1959) und A.N. Kolmogoroff (1903-1987) leiteten das Seminar. Beide Gelehrte hatten in den letzten zehn Jahren durch hervorragende Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, insbesondere zu einer Theorie der stochastischen Prozesse die Grundlage einer modernen Wissenschaftsdisziplin geschaffen, die wir durch einige ihrer Publikationen charakterisieren wollen. Als Ausgangspunkt kann Khintchines Spezialvorlesung von 1926 dienen[3], die er zur Monographie *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*[4] weiterentwickelte, worin stochastische Prozesse mit klassischen Grenzwertsätzen in Zusammenhang gebracht wurden. Khintchine hat weiterhin eine Theorie der wichtigen Klasse der stationären stochastischen Prozesse[5] ausgearbeitet. Von Kolmogoroff ist an erste Stelle seine große Arbeit über nachwirkungsfreie Prozesse[6] zu setzen, die heute Markov-Prozesse genannt werden. Wichtig ist danach die Abhandlung über Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen und unbeschränkt teilbare Verteilungen.[7] Schließlich gipfeln Kolmogoroffs Veröffentlichungen in dem Büchlein *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*[8], das die axiomatische Basis für eine moderne Wahrscheinlichkeitstheorie mit den stochastischen Prozessen als Kern lieferte. Hier werden Verteilungsfunktionen und das Stieltjes-Integral, die von Mises[9] als Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewählt hatte, durch Wahrscheinlichkeitsmaße und das allgemeine Lebesgue-Integral ersetzt. Gnedenko war von dem Seminar am Math.-Mech. so begeistert, dass er sich dort um eine Aspirantur bewarb, die er im Herbst 1934 unter der Betreuung von

[2] D.B. Gnedenko: *Bibliographie von B.W.Gnedenko*. Obozrenie priklad. i promyshlen. matematiki 11(2004), S.165.
[3] veröffentlicht als Monographie A.J. Chintschin: *Grundgesetze der Wahrscheinlichkeitstheorie* (Russisch). Moskau 1927.
[4] Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2. Band, Heft 4, Berlin 1933.
[5] A. Khintchine: *Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse*. Mathematische Annalen 109 (1934), 604-615.
[6] A. Kolmogoroff: *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Mathematische Annalen 104 (1931), 415-458.
[7] A. Kolmogoroff: *Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo*. (Un problema di Bruno de Finetti). Rendiconti Accad. Lincei 15 (1932), 805-808, 866-869.
[8] Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2. Band, Heft 3, Berlin 1933.
[9] R. von Mises: *Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Mathematische Zeitschrift 4(1919), 1-97.

Khintchine antreten konnte. Hier promovierte er 1937[10], wurde 1938 Dozent und 1943 Professor. Nach einer 15jährigen auswärtigen Tätigkeit in Lemberg, Kiew und Berlin kehrte er 1960 in seine alte Position nach Moskau zurück. 1966 übernahm Gnedenko von Kolmogoroff die Leitung des Lehrstuhls für Wahrscheinlichkeitstheorie, die er bis 1995 ausübte.

Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen

Für Summen unabhängiger Zufallsgrößen gab A.M. Ljapunow (1857-1918) 1901 eine einfache hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des zentralen Grenzwertsatzes an, d.h. für die Konvergenz der normierten Summen gegen die Gaußverteilung. Zum Beweis nutzte er den Dirichletschen diskontinuierlichen Faktor und verbarg Cauchys charakteristische Funktionen[11], die später Paul Lévy (1886-1971) zu einem bequemen Werkzeug der Stochastik entwickelte.[12] Lévy konnte damit zeigen, dass die Grenzverteilungen normierter Summen in einer die Gaußverteilung enthaltenden Klasse von Verteilungen liegt, für die er eine allgemeine Formel im Falle identisch verteilter Summanden fand. Diese stabilen Verteilungen stehen im Zusammenhang mit unbeschränkt teilbaren Verteilungen, die stochastische Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen charakterisieren, was Bruno de Finetti (1906-1985) entdeckte[13] und Kolmogoroff präzisierte[14]. Die intensiven Untersuchungen dieser beiden Klassen von Verteilungen durch Lévy und Khintchine führten zur Lévy-Khintchine-Formel [15] für die charakteristische Funktion unbeschränkt teilbarer Verteilungen. Damit stand eine Methode zur Verfügung, die von ihren beiden Schülern Wolfgang Döblin (1915-1940)[16] und Boris Gnedenko genutzt wurde. Letzterer wurde darüber auch durch eine Spezialvorlesung von Khintchine vertraut gemacht, die später als Monographie[17] veröffentlicht wurde. Gnedenkos Approximationsmethode zum Studium von Grenzverteilungen von Summen bei Serienschemata stellte er 1939 in Tomsk[18] vor. Sie wurde ausgebaut in einer großen Arbeit 1944 in den Uspechi (mit demselben Titel wie das Buch seines

[10] B.W. Gnedenko : *Zur Theorie unbeschränkt teilbarer Verteilungsgesetze* (Russisch). Dissertation, Moskau 1937.

[11] H. Fischer : *A History of the Central Limit Theorem*. New York 2011, S.200.

[12] P. Lévy: *Calcul des probabilités*. Paris 1925.

[13] B. de Finetti: *Le funzioni caratteristiche di legge istantanea*. Rendiconti Accad. Lincei 12(1930), 278-282.

[14] Vgl. Anmerkung 7.

[15] A. Khintchine: *Déduction nouvelle d'une formule de M.Paul Lévy*. Bulletin de l'Université d'état à Moscou. Section A, Vol. 1, Fasc.1. Moscou 1937.

[16] W. Doeblin, P.Lévy: *Sur le sommes de variables aléatoires independantes à dispersions bornees inferieurement.* Comptes rendus Acad. Sci. Paris 202 (1936), 2027-2029.

Vgl. auch B.Bru, M.Yor: *Comments on the life and mathematical legacy of Wolfgang Doeblin.* Finance and Stochastics 6(2002), 3-47.

[17] A.J. Chintschin: *Grenzgesetze für Summen unabhängiger Zufallsgrößen* (Russisch). Moskau-Leningrad 1938.

Lehrers) und mündete 1949 in der bedeutenden Monographie *Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen*[19], veröffentlicht zusammen mit seinem zweiten Lehrer und Freund Kolmogoroff.
Die Problematik der Grenzwertsätze von Summen verfolgte Gnedenko mit seinen Schülern bis zum Lebensende. Dabei untersuchten sie nun Summen mit einer zufälligen Anzahl von Summanden. Die Ergebnisse wurden dargestellt in der im September 1995 zusammen mit V.Y. Korolev abgeschlossenen Monographie *Random Summation- Limit Theorems and Applications*.[20]

In der Ukraine

Der berühmte polnische Mathematiker Hugo Steinhaus (1887-1972) begann an der Lemberger Universität 1905 unter österreich-ungarischer Ägide zu studieren, unter polnischer wurde er 1923 ordentlicher Professor, unter ukrainischer blieb er 1939 unter dem Dekan Banach Ordinarius neben Schauder, Mazur, sowie Saks, Knaster und Orlicz. 1941 wurde die Universität von den Deutschen geschlossen und Steinhaus verbarg sich in den Karpaten. Im Juli 1945 wurde er zum korrespondierenden Mitglied der Polnischen Akademie der Wissenschaften gewählt und kehrte nicht nach Lemberg (L'viv) zurück, sondern ging mit anderen polnischen Gelehrten nach Schlesien, wo er im November 1945 als Dekan an der neuen Breslauer Universität zu lesen begann.[21]
Gnedenko wurde im Mai 1945 korrespondierendes Mitglied der Ukrainischen Akademie der Wissenschaften und beauftragt, an der verwaisten Lemberger Universität ein Mathematik-Studium wieder zu ermöglichen. Er hielt viele Vorlesungen und gewann begabte Schüler. Als ukrainisches Akademie-Mitglied seit 1948 wurde er alsbald in der Hauptstadt Kiew benötigt als Direktor des Mathematischen Instituts der Akademie und Leiter des Lehrstuhls für Stochastik an der Kiewer Universität (ab 1950)[22]. Zu seinen hervorragenden Studenten gehörten W.S. Koroljuk, A.W. Skorochod, I.N. Kowalenko und M.I.Jadrenko, die zusammen mit Gichman (1918-1985) in der Ukraine einen hohen Stand der Stochastikforschung erreichten.[23] In ähnlicher Weise erfolgreich als Schulengründer erwies sich Gnedenko bei einer zweisemestrigen Gastprofessur an der Humboldt-Universität zu Berlin im Jahre 1954. Durch seine Vorlesungen und Seminare fanden die vorher auf dem Gebiet der Analysis gut ausgebildeten

[18] B.V. Gnedenko: *A review of the current state of the theory of limiting laws for sums of independent terms.* In: Probability and Statstics. Russian papers. Berlin 2004, 277-294.
[19] Berlin 1959, russisches Original: Moskau 1949.
[20] CRC Press, Boca Raton, New York 1996.
[21] H. Steinhaus: *Erinnerungen und Aufzeichnungen*. Dresden 2010.
[22] V. Kalashnikov: *OBITUARY: Boris Vladimirovich Gnedenko*. Journal of Applied Probability 33(1996), 592-599.
[23] Vgl. z.B. A. Skorokhod: *Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Differential Equations*. AMS translations of Math.Monographs, Vol.78, 1989. Original: Kiew 1987.

deutschen Studenten J. Kerstan, K. Matthes, W. Richter, H.-J. Rossberg und W. Winckler den Weg zur Stochastik.[24]

Bedienungs- und Zuverlässigkeitstheorie

In den 35 Jahren nach der Rückkehr nach Moskau arbeitete Gnedenko vorrangig auf Gebieten der angewandten Stochastik. Er hatte schon in Kiew angefangen, Vorlesungen über Bedienungstheorie zu halten, die er zusammen mit Kowalenko veröffentlichte. Letzterer folgte ihm nach Moskau und aus der Zusammenarbeit im Seminar über Bedienungstheorie an der MGU ging das Lehrbuch *Einführung in die Bedienungstheorie*[25] hervor. Parallel dazu liefen Untersuchungen mit J.K. Beljajew und A.P. Solowjew, die zu dem Buch *Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie*[26] führten. Die danach insbesondere von seinen Schülern E.J. Barsilowitsch und W.A. Kaschtanow erzielten Fortschritte wurden 1983 publiziert.[27] Zu dieser Zeit wurde auch ein großes Projekt abgeschlossen, an dem auf Gnedenkos Initiative und unter seiner Leitung 14 Autoren aus der Sowjetunion und 16 deutsche Mathematiker ein *Handbuch der Bedienungstheorie*[28] schufen.

Propagator der Stochastik

Wenn wir heute das Lebenswerk von Boris Gnedenko im Strom der Mathematik einordnen wollten, so wird es nicht durch bahnbrechende Entdeckungen und spektakuläre Forschungsergebnisse charakterisiert, sondern durch große Erfolge bei der Gestaltung und Verbreitung der Ideen und Methoden der modernen Stochastik von den Anfängen im Schulunterricht bis hin zur Universität. Davon zeugen auch zwei Bücher, die durch viele Auflagen und Übersetzungen in aller Welt bekannt sind. Das ist zum einen die mit seinem Lehrer Chintschin verfasste *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*[29], zum anderen das *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung*[30]. Bei Letzterem lässt sich auch der Stellenwert und die Entwicklung der Historiographie der Stochastik verfolgen, die in Gnedenko einen ihrer profiliertesten Verfechter besaß.

---

[24] Vgl. z.B. K. Matthes, J. Kerstan, J.Mecke: *Infinitely Divisible Point Processes*. J. Wiley, Chichester, New York 1978. Deutsches Original: Berlin 1974 (B.W. Gnedenko gewidmet).

[25] Akademie-Verlag, Berlin 1971. Russisches Original: Moskau 1966.

[26] Akademie-Verlag, Berlin 1968. Russisches Original: Moskau 1965.

[27] B.W. Gnedenko (Hrsg.): *Probleme der mathematischen Theorie der Zuverlässigkeit* (Russisch). Moskau 1983.

[28] Akademie-Verlag, Berlin, Band I 1983, Band II 1984.

[29] Dt. Verl. d. Wissenschaften, Berlin 1955. Russisches Original: Moskau-Leningrad 1952.

[30] Akademie-Verlag, Berlin 1957. Russisches Original: Moskau 1954, 6.Aufl.1988.

Große Linien und Brüche - Das Beispiel der (mathematischen) Statistik an der Berliner Universität (1886-1945)

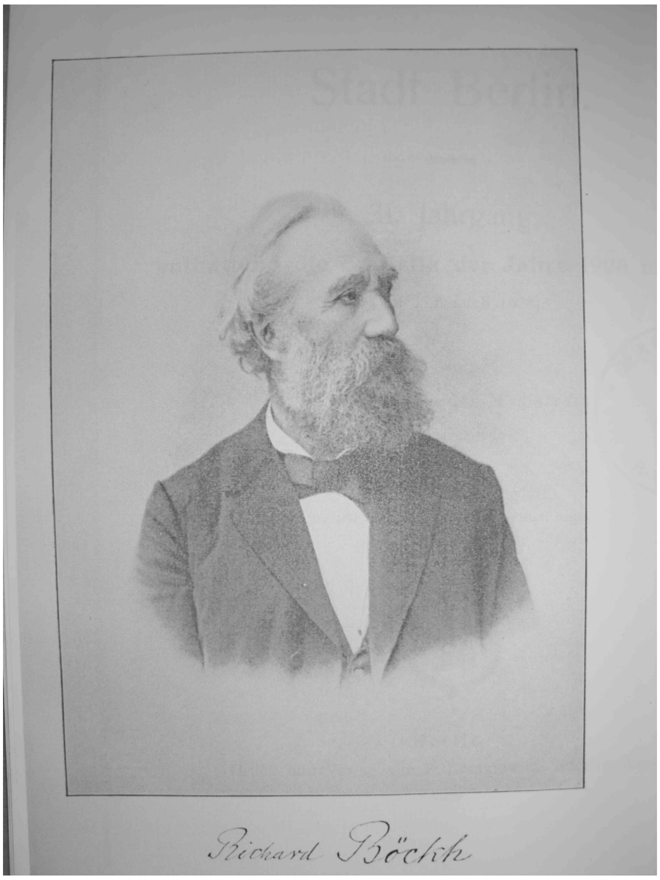
Between continuity and dis-continuity - Mathematical statistics and the Economic-Statistical Seminar at the Berlin University between 1886 and 1945

Annette Vogt (Berlin)

Die Anfänge der universitären, akademischen Ausbildung im Fach Statistik an der Berliner Universität lassen sich genau datieren. Am 12. August 1886 erfolgte die Gründung des Staatswissenschaftlich-Statistischen Seminars an der Universität, die bis 1945 offiziell die Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin hieß. Obwohl der Antrag schon 1883 beim zuständigen Kultusministerium eingereicht war, erfolgte erst drei Jahre später die Gründung des Seminars, das bezüglich der Ausbildung in Statistik dem Modell folgte, das der Statistiker Ernst Engel (1821-1896) am Königlich-Preußischen Statistischen Bureau in Berlin eingeführt hatte. Sein ehemaliger Mitarbeiter August Meitzen (1822-1910), Statistiker, Agrarhistoriker und Nationalökonom, gehörte zu den vier ersten Direktoren des Seminars. Neben A. Meitzen, ab 1875 a. o. Prof. an der Philosophischen Fakultät, erhielt der bedeutende Statistiker Richard Boeckh (1824-1907) 1881 eine a. o. Professur an der Universität und wurde 1886 einer der vier Direktoren des Seminars.

Boeckh war der bekannteste deutsche Statistiker Ende des 19. Jahrhunderts in Deutschland. Er war königlicher Regierungsrat am Königlich-Preußischen Statistischen Bureau in Berlin und ab 1875 Leiter des Statistischen Bureaus der Stadt Berlin. Zu seinen Schülern gehörten Ferdinand Tönnies (1855-1936) und Robert René Kuczynski (1876-1947), 1911 Direktor des Statistischen Amtes der Stadt (Berlin-) Schöneberg und Gründungsmitglied der Deutschen Statistischen Gesellschaft im Jahr 1911.

Die beiden anderen Direktoren waren der Staats- und Finanzwissenschaftler Adolph (Adolf) Wagner (1835-1917), seit 1870 ord. Professor an der Berliner Universität, und der Ökonom, einer der Hauptvertreter der historischen Schule der Ökonomie, Gustav von Schmoller (1838-1917), seit 1882 ord. Professor an der Berliner Universität. Diese Parität - zwei Ökonomen und zwei Statistiker - bei den Direktoren des Staatswissenschaftlich-Statistischen Seminars galt bis 1907, bis zum Tod von Richard Boeckh. Zwischen 1913 und 1931/33 wurde jeweils einer der Professoren am Staatswissenschaftlich-Statistischen Seminar zum geschäftsführenden Direktor bestimmt, ein „Rotationsprinzip“, das später in der Politik bekannt werden sollte.



August Meitzen und Richard Boeckh

Berliner Universität 1883

Ab 1901 lehrte mit Ladislaus von Bortkiewicz (1868-1931) als a. o. Prof. an der Berliner Universität einer der bekanntesten Statistiker, der auch die mathematische Statistik vertrat. Von 1906, der Gründung der Berliner Handels-Hochschule, bis 1922 war er auch Professor an dieser Hochschule, 1920 erhielt er ein persönliches Ordinariat an der Universität. Dies war einer der Gründe, warum nach seinem Tod im Juli 1931 seine Position nicht wieder besetzt wurde. Die mathematische Statistik wurde an der Berliner Universität außerdem von Richard von Mises (1883-1953) vertreten, über dessen Beziehungen zu Bortkiewicz aber nichts bekannt ist. Zu vermuten ist, daß beide wenig oder nichts miteinander zu tun hatten.

Zwischen 1906, der Gründung der Berliner Handels-Hochschule, und 1945 bestanden teilweise enge Beziehungen zwischen Angehörigen des Lehrkörpers an der Philosophischen Fakultät bzw. ab 1936 an der Rechts- und Staatswissenschaftlichen Fakultät und Angehörigen des Lehrkörpers der Handels-Hochschule bzw. ab 1935 der Wirtschafts-Hochschule. Mitunter, wie z. B. im Fall von Ladislaus von Bortkiewicz, bestand eine Personalunion, d. h. der betreffende Professor lehrte an beiden Institutionen, wobei die Handels-Hochschule bis

Januar 1933 als von den Berliner Kaufleuten privat finanzierte Einrichtung über größere Freiräume bei der Bezahlung der Lehrenden verfügte.
An der Handels-Hochschule lehrte von 1926 bis zu seiner Vertreibung 1933 der Statistiker und Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler Franz Eulenburg (1867 Berlin - 28.12.1943 Berlin, in Gestapohaft). Er war durch sein 1908 erschienenes Buch „Der akademische Nachwuchs“, das eine deutliche Kritik des Privatdozententums (vgl. Max Weber, 1919) darstellte, deutschlandweit bekannt geworden.

Handels-Hochschule Berlin

Von 1927 bis 1945 wurde das Fach Statistik an der Universität von der Privatdozentin (einer von 12 an der Philosophischen Fakultät zwischen 1919 und 1932) Charlotte Lorenz (1895-1979) vertreten. Sie kannte von Bortkiewicz nicht nur persönlich, sie hatte nach dessen Tod auch noch engen Kontakt zu dessen Schwester Helene. Charlotte Lorenz hatte 1919 in Berlin promoviert, 1927 hier habilitiert und arbeitete bis 1940 als Referent(in) beim Statistischen

Reichsamt. Seit 1937 a.o. Prof. und ab 1939 apl. Prof. erhielt sie von 1940 bis 1945 eine bezahlte Dozentur (Diätendozentur genannt). Ihre Mitgleidschaft in der NSDAP führte 1945 zu ihrer Entlassung. Ab 1947 mit Lehraufträgen an der Universität Göttingen tätig, wurde sie 1956 (wieder) apl. Professorin.

Von 1922 bis 1928 und von 1942 bis 1945 sowie nach Wiedereröffnung im Januar 1946 lehrte Rudolf Meerwarth (1883-1946) Statistik an der Berliner Universität, zunächst als a. o. Prof. Nach seiner Rückkehr von der Universität Leipzig, wo er von 1928 bis 1941 ord. Prof. für Statistik war, lehrte er in Berlin als ordentlicher Professor. Sein Buch „Leitfaden der Statistik“ war 1939 in Leipzig erschienen. Er wurde im Mai 1945, nach der bdingungslosen Kapitulation NS-Deutschlands, Dekan der Rechts- und Staatswissenschaftlichen Fakultät, die 1936 aus Teilung der Philosophischen und Zusammenlegung der Staatswissenschaften mit der Juristischen Fakultät entstanden war. Mit Wiedereröffnung der Universität am 29. Januar 1946 amtierte R. Meerwarth als Prorektor, aber er starb bereits am 9. März 1946.

Bei der Wiedereröffnung der Universität strebten die Juristen die Wiederbegründung ihrer Juristischen Fakultät an. Die Staatswissenschaften bildeten zusammen mit der Handels-Hochschule, die seit 1935 Wirtschafts-Hochschule hieß, im Oktober 1946 die neugegründete Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät. Gründungsdekan wurde Bruno Gleitze (1903-1980), Wirtschaftswissenschaftler, Statistiker und SPD-Politiker. Von 1945 bis 1948 amtierte er außerdem als Präsident der Deutschen Verwaltung für Statistik in der SBZ und Vizepräsident der Deutschen Verwaltung für Finanzen in der SBZ. Damit stand gewissermaßen in der Tradition von Richard Boeckh und August Meitzen wieder ein Statistiker an der Spitze - nun einer Fakultät. Und die Statistik kam mit seiner Person wieder zurück an die Universität, denn am 5. Februar 1940 war das Staatswissenschaftlich-Statistische Seminar, das zum Teil schon in den 1920er Jahren nur noch Staatswissenschaftliches Seminar genannt worden war (vgl. Max Sering 1924 in einem Brief) in Institut für Wirtschaftswissenschaften umbenannt worden. Im Dezember 1948 verließ Bruno Gleitze jedoch Berlin-Ost und arbeitete bis 1953 in Berlin-Dahlem im Deutschen Institut für Wirtschaftsforschung, ehe er von 1954 bis 1968 Leiter des Wirtschaftswissenschaftlichen Instituts des DGB wurde und Mitglied des Forschungsbeirats für Fragen der Wiedervereinigung Deutschlands. Von 1966 bis 1967 war er Wirtschafts- und Verkehrsminister in NRW.

Zwischen 1886 - der Gründung des Staatswissenschaftlich-Statistischen Seminars mit den beiden Statistikern Richard Boeckh und August Meitzen als Direktoren - und 1946 - der Eröffnung der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät mit dem Statistiker Bruno Gleitze als Dekan - verlief die Entwicklung der Statistik an der Berliner Universität in Lehre, Ausbildung und Forschung also einerseits in einer „großen Linie“. Fast ununterbrochen wurde Statistik gelehrt, wurde dazu geforscht und publiziert. Andererseits gab es teilweise große Brüche und Abbrüche dieser Entwicklung. Die Gründe für diese Brüche waren vielfältig. 1931 führte der Tod von Ladislaus von Bortkiewicz zu einem ersten Bruch, die mathematische Statistik wurde nur noch durch Richard von Mises vertreten. Die Folgen der Weltwirtschaftskrise und die erlassenen Notverordnungen sowie preußischen Sparverordnungen führten zu massiven Gehaltskürzungen und Stellenstreichungen und hatten damit Einfluß auf die Vertretung des Fachs Statistik in Lehre und Forschung.

Der schwerwiegendste und langwirkendste Bruch erfolgte auf Grund des NS-Regimes. Am Beginn stand die Vertreibung vieler Gelehrter, darunter Richard von Mises von der Berliner Universität, dem erfolgreich die Emigration gelang, und Franz Eulenburg (1867- 28.12.1943) von der Handels-Hochschule, an der er von 1926 bis 1933 lehrte.
Zu den Opfern des Nazi-Terrors gehörten der Statistiker und Wirtschaftswissenschaftler Franz Eulenburg, der in einem Gestapo-Gefängnis in Berlin „starb“ sowie die Lehrbeauftragte für Spanisch Margot Sponer (1898- erschossen 27. April 1945). Margot Sponer war von 1937 bis 1942 Lehrbeauftragte an der Berliner Universität und bis 1944/45 auch Lehrbeauftragte an der Wirtschafts-Hochschule. Am 27. April 1945 wurde sie von drei SS-Männern aus ihrer Wohnung in Wilmersdorf abgeholt und als NS-Gegnerin erschossen, drei Tage, bevor die Rote Armee Berlin-Wilmersdorf erreichte.

Die mathematische Statistik kehrte in den frühen 1950er Jahren nach Berlin-Ost und Berlin-West in Gestalt zweier Mathematiker zurück, die als Gäste an den beiden (feindlichen) „Schwestern-Universitäten“ zur gleichen Zeit tätig waren: An der Freien Universität Berlin lehrte zeitweise als Gastprofessor aus New York der Emigrant und bekannte Nazi-Gegner Emil Julius Gumbel (1891-1966), an der Humboldt-Universität Berlin lehrte von 1953 bis 1955 der sowjetische Mathematiker Boris Vladimirovich Gnedenko (1912-1995). Und Gnedenko wird das Vorwort zur russischen Übersetzung des Buches von Gumbel „Statistics of Extremes“ (New York, 1958) schreiben (Moskva, 1965).

Emil J. Gumbel

Boris V. Gnedenko

Between continuity and dis-continuity - Mathematical statistics and the Economic-Statistical Seminar at the Berlin University between 1886 and 1945

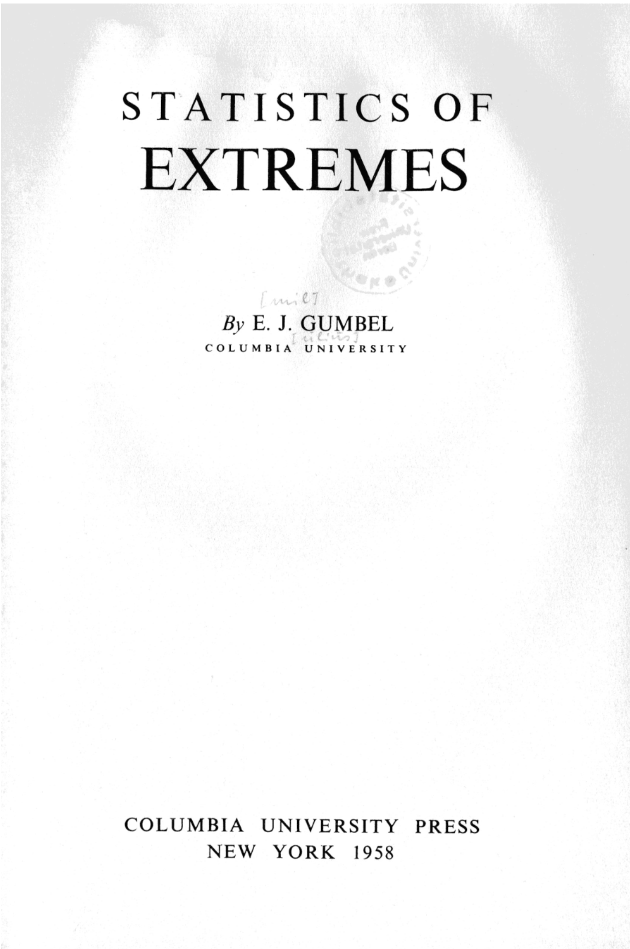
abstract

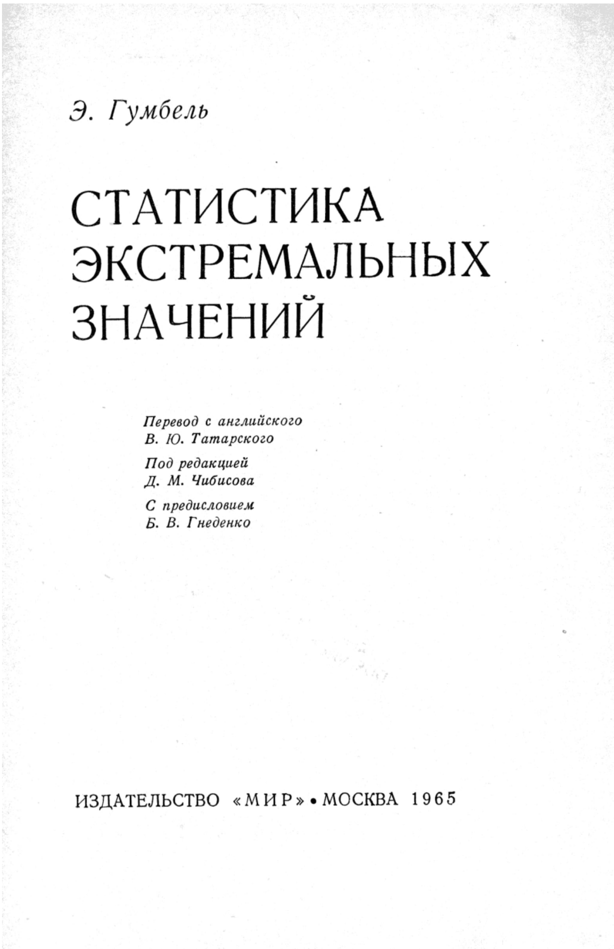
First, I will give an overview on the history of the Economic-Statistical Seminar at the Berlin University from the beginning. This seminar was established in 1886, two famous statisticians became the first directors: August Meitzen (1822-1910) and Richard Boeckh (1824-1907). The other two directors were the economists Adolph (Adolf) Wagner (1835-1917) and Gustav von Schmoller (1838-1917). After 1907/1910 statisticians became less important, although the famous statistician Ladislaus von Bortkiewicz (1868-1931) tought at the Berlin University from 1901 until his death in 1931.
Second, I'll describe the development of the seminar in the 1920s and 1930s, including the close relations between the Philosophical Faculty of the Berlin University, where the seminar was established in 1886, and the Berlin School of Economics (Berliner Handels-Hochschule) which was opened in 1906. Among the staff members, the female Privatdozent Charlotte Lorenz (1895-1979) tought statistics at the Berlin University between 1927 and 1945.
Third, I'll give an overview on the situation before and after 1945, and I'm giving a summary of the development of statistics and mathematical statistics between 1886 and the 1950s.

Because of the Nazi regime many scientists were forced to leave the University from 1933 onwards. Most of them managed to escape, for example Richard von Mises (1883-1953). Others became victims of the Nazi terror, for example the statistician and economist Franz Eulenburg (1867 Berlin - "gestorben" 28.12.1943) and the lecturer in Spanish Margot Sponer (1898- erschossen 27. April 1945). Franz Eulenburg was teaching at the School of Economics from 1926 until 1933, and he "died" in a prison of the Gestapo in Berlin. Margot Sponer was employed at the Berlin University from 1937 until 1942 and at the School of Economics until 1944/45. She was killed by three SS men on April 27, 1945 - three days later the Red Army liberated Berlin Wilmersdorf where she was shot.
The University was re-opened in January 1946. The Law Faculty was established again; and the School of Economics and the fields economics and statistics of the University were united and founded the new Faculty of Economics. In the tradition of August Meitzen and Richard

Boeckh a statistician became the first dean of this Faculty: Bruno Gleitze (1903-1980), he was dean of the Faculty from 1946 until December 1948, when he left Berlin-East and moved to Berlin-West.

Mathematical statistics "came back" to the Berlin University in the 1950s, and it came back to the sister universities, i. e. in Berlin-East - at the Humboldt University - and in Berlin-West - at the Free University. Two guest scientists tought mathematical statistics in Berlin: at the Free University the emigrée Emil Julius Gumbel (1891-1966), at the Humboldt University from 1953 until 1955 the Soviet mathematician Boris Vladimirovich Gnedenko (1912-1995). Gnedenko will write the preface of the Russian translation of Gumbel's famous book "Statistics of Extreme" (New York, 1958) which came out in Moscow in 1965.





Humboldt-Universität zu Berlin

Heilig-Geist-Kapelle
Spandauer Str.

Literatur:

Grohmann, Heinz, Walter Krämer, Almut Steger (Hgg.) Statistik in Deutschland. 100 Jahre Deutsche Statistische Gesellschaft. Heidelberg u.a.: Springer Verlag, 2011.
Vogt, Annette (Hrsg.) Emil Julius Gumbel. Auf der Suche nach Wahrheit. Berlin: Dietz Verlag 1991.
-----. Emil Julius Gumbel im Interview - Zum 35. Todestag. In: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Jg. 1997-2000, Hrsg. vom Vorstand der BMG, Berlin 2001, S. 247-258.
-----. Jüdische Mathematiker im deutschsprachigen Raum - Von der Ausgrenzung zur Akzeptanz, von der Akzeptanz zur Ausschließung (S. 11-32); Berlin (S. 46-56); Das Gift des Antisemitismus (S. 182-198); Vertreibung - Exil - Rückkehr? (S. 200-222) - alle in: Birgit Bergmann, Moritz Epple (Hgg.) Jüdische Mathematiker in der deutschsprachigen akademischen Kultur. Heidelberg u.a.: Springer Verlag, 2009. (English 2012)
-----. The fate of Hertha's Sister, Margot Sponer. (Ch. 4.8) In: Maushart, Marie-Ann. Hertha Sponer. A Woman's Life as a Physicist in the 20th Century. "So You Won't Forget Me". Ed. by Brenda P. Winnewisser. Duke Univ. Durham, Dept. of Physics. Xlibris Corporation. 2011, pp. 139-146 + pp. 244-246 (fn 143-168).
-----. Die Berliner Humboldt-Universität von 1945/1946 bis 1960/1961 (Die Berliner Humboldt-Universität von der Wiedereröffnung 1946 bis zu Universitäts-Jubiläum 1960 und Mauerbau 1961). Berlin 2012, MPI für Wissenschaftsgeschichte, Preprint 425. (erscheint gekürzt, Kapitel 2, in: Jarausch, Konrad H. und Middell, Matthias (Hgg.). Geschichte der Universität Unter den Linden 1810-2010. Biographie einer Institution, Band 3: Von 1945 bis zur Gegenwart. Berlin: Akademie Verlag, 2012 (im Druck).
Vogt, Annette, Wolfgang Härdle. Ein Statistiker der ersten Stunde. Zum Gedenken an Ladislaus von Bortkiewicz wurde ein Lehrstuhl eingerichtet. In: „Humboldt“ (Zeitung der HU Berlin), 22.4.2010.
Zschaler, Frank. Vom Heilig-Geist-Spital zur Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät. 110 Jahre Staatswissenschaftlich-Statistisches Seminar an der vormals königlichen Friedrich-Wilhelms-Universität. 90 Jahre Handels-Hochschule Berlin. Berlin et al: Springer Verlag, 1997. (Schriften der Wirtschaftswissenschaftlichen Gesellschaft an der Humboldt-Universität zu Berlin)

Bildrechte:
alle Fotos aus Wikipedia, bis auf
Charlotte Lorenz, in: Universitäts-Archiv Göttingen, PA Ch. Lorenz
Margot Sponer, in: Archiv Humboldt-Universität, Bestand NS-Doz. Z-DI/982: Margot Sponer
Titelbilder der Bücher von Gumbel (1958, 1965)

Dr. Annette Vogt
MPI für Wissenschaftsgeschichte (MPI for the History of Science)
Boltzmannstr. 22
14195 Berlin
vogt@mpiwg-berlin.mpg.de

Jakob Philipp Kulik and his Tables

Luboš Moravec

Abstract. Jakob Philipp Kulik (1793–1863) was a mathematician and university professor, who worked at Lyceums in Olomouc and Graz and at the Prague University. His manuscript of divisors tables is well known but he published also several articles and books containing various topics from mathematics, mechanics and astronomy. This article gives a summary of his life and work with a focus to his number-theoretic tables.

Life and Pedagogical Activities

Youth in Lvov[1]

Jakob Philipp Kulik was born on 1st May 1793 in Lvov. His mother was Konstanze born Berezowska, his father Stefan Kulik was a lottery official and owner of several houses in Lvov.

J. Ph. Kulik studied primary school and after that he frequented a grammar school in Lvov where he graduated in 1809. As his father wanted him to be a lawyer he enrolled to the Lyceum in Lvov. At first he studied at faculty of philosophy (1809–1811). In that time he was already very interested in mathematics. His teacher of mathematics was Johann Holfeld,[2] but he probably had not any influence to Kulik's interest in mathematics. In [1] J. Ph. Kulik wrote that he had been fascinated by the world of mathematics since childhood and that he had been a self-learner in advanced mathematics.

In 1811 J. Ph. Kulik started to study at faculty of law. However, his love to mathematics was stronger than the father's wish. This contradiction led to Kulik's leaving from Lvov in 1814. He never finished his law studies.

Short Stay in Olomouc[3]

In 1814 J. Ph. Kulik participated (without foreknowledge of his parents) in competition for the post of the professor of elementary mathematics at the Lyceum

[1] Lvov, also Lwów, Львів or Lemberg, is a cultural centre of West Ukraine now. In the 19th century it was a Polish city, a part of the Austrian Empire.

[2] Johann Holfeld (1747–1814) was an Austrian mathematician who executed a triangulation of West Galicia in 1796. He worked at Lvov Lyceum from 1808 till his death.

[3] Olomouc, also Ołomuniec or Olmütz, is a historical centre of Moravia. It was established probably in the 10th century. Today it is the sixth biggest city in the Czech Republic.

in Olomouc.[4] Although he was only 21 years old, he won the competition and on 14th November 1814 he became a full professor of elementary mathematics at the faculty of philosophy at the lyceum.

His pedagogical work started in the academic year 1815/1816. Despite of the fact it was his first year at the lyceum, he had quite a lot of teaching. Firstly, he taught seven lessons a week a compulsory course of elementary mathematics for first-year students. Moreover, he lectured physics and applied mathematics intended to second-year students (also seven lessons a week). Finally, he prepared a seminar of using geometric tools in geodetics.

Although he planned to teach three-year course of advanced mathematics, he spent only one year in Olomouc and then moved to Graz.

Ten Years in Graz

On 24th October 1816 J. Ph. Kulik was promoted to a professorship of physics at the Lyceum in Graz. His lectures of physics and applied mathematics started in the academic year 1816/1817. Since the year 1817/1818 he also taught astronomy at new Graz polytechnic school called Joanneum. He gave his lectures probably in German.

J. Ph. Kulik started his academic career in Graz. In 1822 he obtained a doctorate from philosophy there. His doctoral thesis called *De phaenomenis Iridis* was a physical treatise about rainbow. In the year 1822/1823 he became a rector of the lyceum.

During the stay in Graz J. Ph. Kulik created his first publications and became a respected and popular teacher. He spent ten years of his life there. Then, in 1826 he moved to Prague.

Prague

In the academic year 1826/1827 J. Ph. Kulik started to teach at the Prague University where he was appointed a professor of advanced mathematics.[5] He stayed at this post till his death.

The free lectures given by J. Ph. Kulik formed two-year course. The first year contained mathematics and the second mechanics. Both these year-courses were taught three lessons a week every year. During Kulik's professorship at the Prague University the number of students who attended the lectures in

[4] The Lyceum in Olomouc was a successor of the Olomouc University which was established in 1569. In 1778 this university was moved to Brno, but in 1782 it was returned to Olomouc as the Moravian Lyceum. The school is called *Palacký University Olomouc* now.

[5] There were two chairs of mathematics at Prague University. The chair of elementary mathematics was intended for teaching the basic course of mathematics, which was mandatory for faculty of philosophy students. The chair of advanced mathematics provided free lectures in advanced mathematics.

advanced mathematics increased. In 1829 he became a dean of the faculty of philosophy.

The school reform from the years 1848–1849 changed conditions at the Prague University. The new regulations were much less restrictive, which led to bigger freedom in the topics of lectures and their number. After the year 1850 J. Ph. Kulik taught mathematical and physical lectures containing various topics: infinitesimal calculus, advanced analysis, advanced geometry, mechanics, hydrodynamics, astronomy, chronology and also topics connected with history of mathematics. The last Kulik's course was advanced analysis in the winter semester 1862/1863.

In Prague J. Ph. Kulik became an associate (1831) and later a full member (1832) of the Royal Bohemian Society of Sciences.[6] He had there several speeches, mostly about number theory and mechanics. He also hold some functions in this society: he worked as a librarian (1833–1840), a director (1837 and 1860), a secretary of the mathematical class (1840–1841) and a cashier (1861–1863). In 1851 he was honoured by the titular Imperial Councillor.

What is more, Kulik's personal life changed during the time he spent in Prague. On 4th November 1828 he married Catharina Degl (1809–1883), who was a daughter of a wealthy Lvov citizen. They had two children – son Justin (1837–1915) and daughter Angela (1841–1925). Justin became a well-known Prague lawyer; Angela married Antonín Randa (1834–1914), who was a professor of civil law at the Prague University.

J. Ph. Kulik died on 28th February 1863 in Prague and was buried at Košíře cemetery. His wife Catharina was buried at the same place in 1883. But in 1884 the cemetery was closed and later the remains were moved to the burial vault of Antonín Randa's family at Vyšehrad.

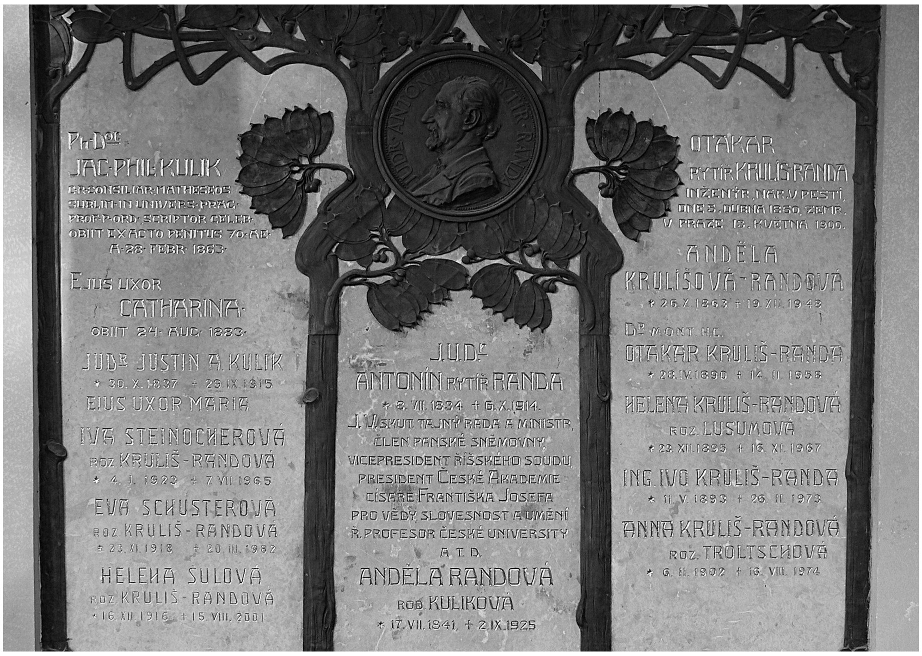


Figure 1: Burial vault of Antonín Randa's family at Vyšehrad.

[6] Official German name was *Königliche böhmische Gesselschaft der Wissenschaften.*

Charity and Donations

J. Ph. Kulik was known as a big benefactor who often presented books to students and also to some institutions, usually libraries or schools. We can mention some examples.

He presented every grammar school in Galicia with a collection of pictures of Greece and Egyptian antiquities in 1840. He also paid for publishing *Praktische Zeichenschule* – the helpful tool for teaching of drawing which he gave to many schools in the whole Austrian Empire.

In revolution year 1848 Lvov was cannonaded and on 1$^{\text{st}}$ November the library of the Lvov University was burned. As there were lost thousands of books, J. Ph. Kulik presented this library with 498 books in 1000 volumes. At this occasion he also gave ten huge packs of books to Galician grammar schools.

On 22$^{\text{th}}$ July 1861 students association for free lectures in mathematics and physics was established. The association later developed into the Union of Czech Mathematicians and Physicists, which exists till now. J. Ph. Kulik entailed his private library (which contains about 800 books) on this association, so in 1863 Kulik's books set up the base of the library of this association.

Publications

J. Ph. Kulik published more then twenty articles in popular science and scientific journals and about thirty books. The most part of his work is written in German, but he also published in Latin and in his mother tongue – Polish.

Kulik's work can be divided into four groups: various mathematical tables, textbooks, calendars and the remaining part containing other publications from mathematics, physics and astronomy.

Tables[7]

Published tables

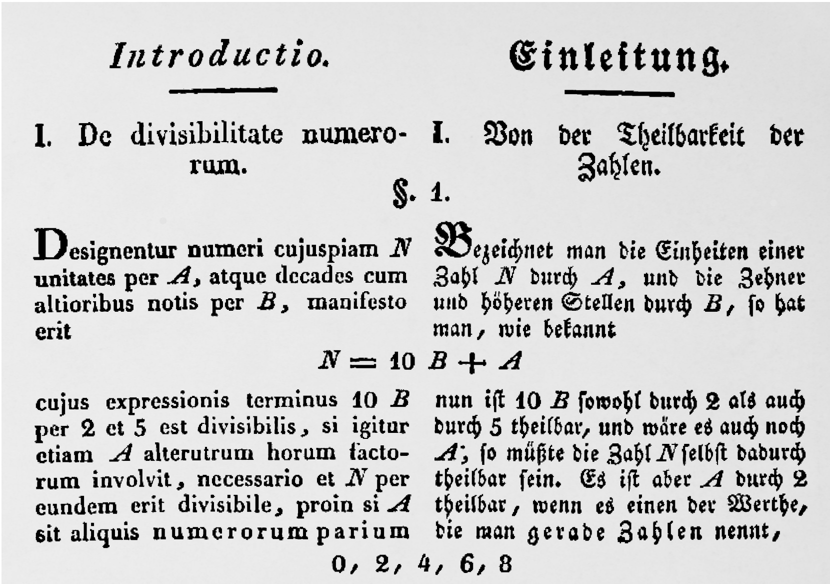
In 1824 J. Ph. Kulik published his first set of tables *Handbuch mathematischer Tafeln* in Graz (see [2]). He stated in the preface that the book is only an abstract from tables he planned to publish in the next year (see [3]). Although, they were probably a basis for several other his sets of mathematical tables.

The book contained tables of all divisors of numbers up to 21 500, the smallest divisors of numbers up to 67 100 (indivisible by 2, 3, 5 and 11), square and cube powers and roots of numbers up to 1 000, higher (up to ninth) powers of numbers up to 100, six-digit logarithms or trigonometric functions. There

[7] More information about Kulik's tables can be found e. g. in [10, 12, 13]. Two of them were also reconstructed by Locomat project (see [14, 15]).

were also added tools for conversion between sexagesimal and decimal numeral system and between various measure units.

Kulik's second tables (see [3]) were written simultaneously in Latin and German. This extension of [2] contained only number-theoretic part, other tables were not included. There were tables of the smallest divisors of numbers up to 1 000 000, square powers of numbers up to 7 500, prime numbers up to 3 761, 2^n, 3^n and 5^n for two-digit numbers etc.



Introductio.	Einleitung.
I. De divisibilitate numerorum.	I. Von der Theilbarkeit der Zahlen.

§. 1.

Designentur numeri cujuspiam N unitates per A, atque decades cum altioribus notis per B, manifesto erit	Bezeichnet man die Einheiten einer Zahl N durch A, und die Zehner und höheren Stellen durch B, so hat man, wie bekannt

$$N = 10\,B + A$$

cujus expressionis terminus 10 B per 2 et 5 est divisibilis, si igitur etiam A alterutrum horum factorum involvit, necessario et N per eundem erit divisibile, proin si A sit aliquis numerorum parium	nun ist 10 B sowohl durch 2 als auch durch 5 theilbar, und wäre es auch noch A, so müßte die Zahl N selbst dadurch theilbar sein. Es ist aber A durch 2 theilbar, wenn es einen der Werthe, die man gerade Zahlen nennt,

0, 2, 4, 6, 8

Figure 2: A part of introduction from Kulik's *Divisores numerorum* (1825).

In these two publications J. Ph. Kulik introduced his space-saving system for writing numbers. He used italic letters for pairs of digits and standard roman letters for two-digit prime numbers.

In 1830's J. Ph. Kulik planned to prepare set of tables designated for study of mathematics and use in practice called *Sammlung von Tafeln zur Erleichterung des Studiums der Mathematik und mit Rücksicht ihrer Anwendbarkeit auf Zwecke des praktischen Lebens*, but only the first part was published (see [6]).

Later he wrote also two books containing tables which could help with multiplication and raising big numbers to the second and third power (see [8, 9]).

Magnus canon

The top of Kulik's work is an extensive manuscript called *Magnus canon divisorum pro omnibus numeris per 2, 3 et 5 non divisibilibus et numerorum primorum interjacentium ad milies centena milia accuratius ad 100 330 201*. The aim of this work was to create tables of the smallest divisors of numbers in the interval 3 033 001–100 330 201 indivisible by 2, 3 and 5. It was an unique work because published tables of divisors did not exceed 10 000 000 at that time.[8]

[8] The tables of the 12$^{\text{th}}$ milion were printed as late as in 1951: Kulik J. Ph., Poletti L., Porter R. J.: *Liste des nombres premiers du onzième million.* Beeger N. G. W. H. (ed.), Werto,

He started to work on these tables very early. In [2] he wrote that he had prepared a continuation of Burckhardt's tables.[9] It was a manuscript containing tables of the smallest divisors up to 30 030 000, which he later used as a basis for *Magnus canon*.

J. Ph. Kulik worked on *Magnus canon* for a long time (probably since the second half of 1820's till his death) and created tables written on 4 212 pages in 8 volumes.

There was a preprinted table which divided each page into 77 columns and 80 rows. Symbols for the numbers 7 and 11 were also preprinted, because numbers divisible by them appeared repeatedly at the same positions in the table.

J. Ph. Kulik used two basic methods for preparing these tables. He created sophisticated templates for small prime numbers. They helped him to fill them in the table as the multiples of such a prime number appeared periodically in table. However, he could not use this tool for higher divisors due to the increasing size of templates. Instead of them, J. Ph. Kulik used auxiliary tables of prime multiples of these divisors, which helped him to fill in also big prime numbers.

Numbers were written by a similar space-saving system, which was used in [2] and [3]. In these tables it was improved and developed into a complicated system using also pairs of letters, even digits etc. It caused that the reading of tables could be quite difficult.

After Kulik's death the manuscript was transported to the Viennese Academy of Sciences (it was his wish), so that other scientists could study it. Unfortunately, the second volume was lost probably during the transport.

Although J. Ph. Kulik worked on this manuscript for 40 years, he did not finish it. First volume is complete, the second is not available and from the third there are missing high divisors. There are also some mistakes; in the beginning of 20$^{\text{th}}$ century Derrick Norman Lehmer (1867–1938) found 229 of them in the table of the 10$^{\text{th}}$ million.

Although these tables were never published they are very interesting and admirable work, which was absolutely unique at that time.

Textbooks

J. Ph. Kulik published two editions of his textbook of advanced analysis (see [5]). It was a recommended material for his lectures at the Prague University. The aim of this work was to explain those parts of mathematics which were needed for mechanics and physics studies. The level of the book is comparable with Euler's compendia.

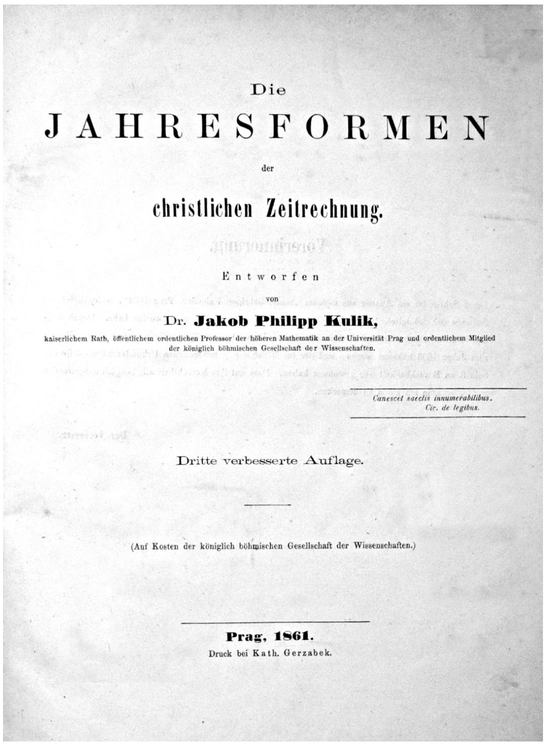
Amsterdam, 1951.

[9] Burckhardt J. C.: *Tables des diviseurs pour tous les nombres des 1$^{\text{er}}$, 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ million.* Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris, 1817.

After 20 years of lecturing mechanics at the university he also published textbook containing basics of advanced mechanics (see [7]).

Calendars[10]

J. Ph. Kulik participated on creating one-year calendars, an analogue of our present diaries. They were often published in the 19th century and used by common people. One part of these calendars was usually dedicated to astronomy and just this was Kulik's own work. There were lists of astronomical phenomena such as full moons, solar and moon eclipses, stars movements etc. He probably participated also in creating the diaries and in stating dates of religious holidays.


Die

JAHRESFORMEN

der

christlichen Zeitrechnung.

Entworfen

von

Dr. Jakob Philipp Kulik,

kaiserlichem Rath, öffentlichem ordentlichen Professor der höheren Mathematik an der Universität Prag und ordentlichem Mitglied der königlich böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.

Canescet saeclis innumerabilibus.
Cic. de legibus.

Dritte verbesserte Auflage.

(Auf Kosten der königlich böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.)

Prag, 1861.

Druck bei Kath. Gerzabek.

Figure 3: Title page from the third edition of Kulik's universal calendar.

J. Ph. Kulik published three editions of the universal calendar (see [4]). The first and the second edition were titled *Der tausendjährige Kalender.* There was one big difference between these two editions – the first edition contained only Christian calendar, but in the second one Jewish and Islamic variants were added. The Christian calendar from the first edition is usable up to the year 5000, in the second edition it ends in 2366. The third edition was strongly reduced and renamed to *Die Jahresformen der Christlichen Zeitrechnung.*

Other publications

First of all Kulik's publications were Polish science popular articles in magazine *Rozmaitości Lwowskie.* Their topic was astronomy, especially movements of stars at night sky.

Later he started to publish in scientific journals such as *Zeitschrift für Physik und Mathematik*, *Abhandlungen der königlichen böhmischen Geselschaft der Wissenschaften* or *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik.* The topics of articles were various – number theory, applied mathematics, mechanics, geometry etc.

[10] More information about Kulik's calendars can be found in [11].

Can a mathematician teach physics?

Nada Razpet
University of Primorska, Faculty of Education, Koper
University of Ljubljana, Faculty of Education, Ljubljana

Abstract: Since ever, mathematics and physics have been closely linked to one another. Often, discoveries in mathematics brought about discoveries in physics, often discoveries of mathematicians fostered progress in physics. Today, there are virtually no more people possessing good basic knowledge both in science (physics, chemistry and biology) and mathematics. Still in the seventies of the past century, at secondary schools and gymnasia, there were two-major teachers-teachers of mathematics and physics-because this was the only possible combined major at the faculty. Today, teachers at gymnasia are only "one-major" - mathematics teachers teach mathematics, physics teachers teach physics. Due to a reduced extent of physics instruction in secondary schools again the question of whether mathematics teachers should also teach physics (or even the other way round) is posed. Let us browse a little into the history to see what some well-known mathematicians have contributed to physics and where it is reflected at the today's instruction. We limit our discourse to a few topics and mention only a handful of people known as philosophers or mathematicians, less as physicists. Also, we do not intend to reach far into the past. To make a closer glance at "physics", we start with Thales, go to Galilei, Pascal who is better known as a mathematician, although he was also an experimentalist, and we end with Fermat and his use of the calculus of variations in optics.

Introduction

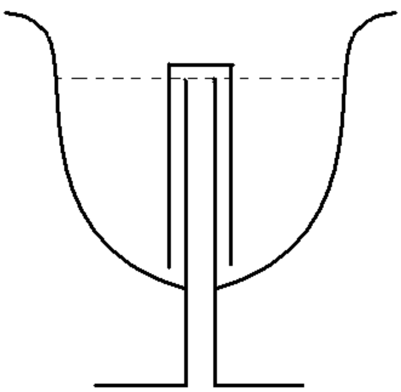
We first try to answer the question of what is physics. On internet, a lot of definitions can be found; let us quote one of them: "What is physics? Physics (from Greek: physics "nature") is a natural science that involves the study of matter and its motion through space time, along with related concepts such as energy and force. More broadly, it is the general analysis of nature, conducted in order to understand how the universe behaves."
In the following, we limit ourselves to those people who are known, at least among our students, as mathematicians. Mathematicians, most often, have the reputation of not being very practical in everyday life. We take a closer look at what they were doing and what was their contribution to science, in particular physics.
Looking in the past, it is difficult to answer where the "true" beginning of science is. As we are interested in people mentioned in school mathematics, let us begin in Greece, with Thales of Miletus. He rejected religious and mythological explanations of natural phenomena and emphasized that all phenomena have some natural cause.

Thales of Miletus (about 624 BC - about 546 BC)

He was a philosopher, businessman and mathematician. No written documents about his work have been preserved. Several anecdotes about him were doing the rounds, and it is difficult to establish what was true. It is well-known that he was good in geometry, both theoretically and practically. He was interested in astronomy. Some people think that he wrote a manual for sailors where he describe how to orient oneself with the help of the Little Dipper (Little Bear, Ursa Minor). He also wrote treatises On the Solstice, and On the Equinox. He is supposed to have predicted the solar eclipse in 585 BC which occurred in the moment of the battle between the Lydians and the Medes on the river Halys. It is not known whether Thales did it by chance or he really had the knowledge to do so. (Some suggest that he might have learnt, during his travels in Asia Minor and Egypt, the Chaldean teaching about periodical nature of eclipses.) The predicted solar eclipse made Thales famous. Supposedly, he was also able to determine the height of a pyramid from its shadow and the shadow of a vertical stick of known length (which is still being learnt at schools today), as well as the distance of a boat from the coast.

Pyhtagoras (about 570 - d. about 495 BC)

Students are familiar with the Pythagorean theorem. We are interested what the contribution of Pythagoras to physics was. According to a legend, Pythagoras discovered musical notes when he passed blacksmiths at work. He thought that the pitch of a sound depended on the size of the hammer (which is not true). Their sizes were simple ratios of each other; the ratios were taken as the criterion of the harmony. Pythagoras is often depicted considering the sounds of strings and pipes. (The pitch of a string is indeed inversely proportional to the length of the string.)
Pythagoreans also studied astronomy. They started what is now known as the ”harmony of the spheres”. They believed that the planets and stars are moving along circles, according to musical notes, thus creating a harmonious cosmos governed by numerical relations between the spheres.
On the Greek island of Samos, souvenirs called the Pithagorean cup are sold. On each cup, there is an inscription: ”Tradition says Pythagoras, during water supply works in Samos around 530 BC moderated the workers' wine drinking by inventing the 'fair cup'. When the wine surpasses the line, the cup totally empties, so the greedy one is punished.”
There are no reliable historical confirmations of this discovery. The functioning of the cup can be explained by the functioning of a siphon. We can make such a cup ourselves, as shown on the figure. A hole is made in the bottom of the cup, a straw is put in and bent in such a way that the end of the straw is just above the bottom. The water flows out of the cup when the water level reaches the knee of the straw.

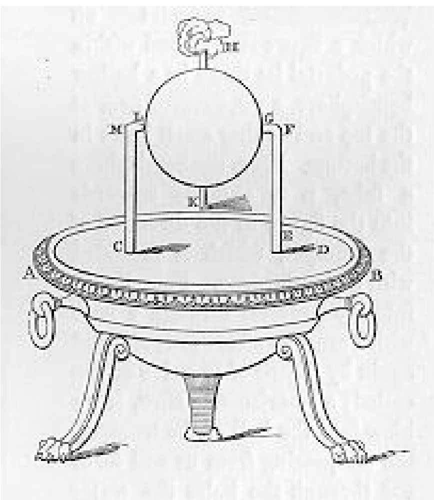


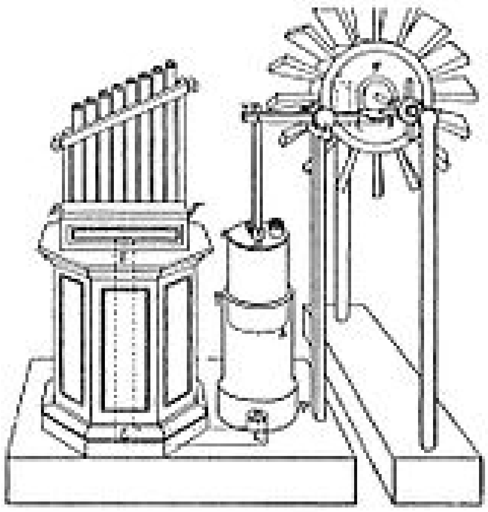
Archimedes of Syracuse (c. 287 BC - c. 212 BC)

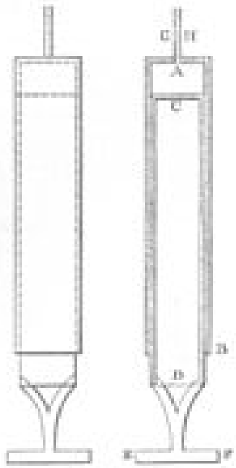
Archimedes is best-known to physicists for the anecdote about his discovery of the principle of buoyancy (the story of the golden crown). He is also well-known for the ”Archimedes’ screw” used to lift water from a low-lying place into irrigation ditches.
In the 2nd century, Lucian of Samosata AD 125 - after AD 180) described how Archimedes, during the Siege of Syracuse (c. 214-212 BC), put the enemy’s ships to fire with the help of mirrors acting collectively as a parabolic reflector. There were many attempts to find out if it is feasible. In one of the attempts, 500 students equipped with mirrors tried to set fire to a ship at a distance of 120 meters. However, they did not succeed to reach the temperature of 210 °C necessary for wood to burn. It seems more probable that the Greeks blinded the sailors with the aid of mirrors. On the instigation of the President Obama, the attempt to burn the ship was made in the MythBusters emission, but it failed.
Archimedes is well-known for his statement regarding levers; he should have declared: ”Give me a place to stand on, and I will move the Earth.” More precisely, he stated: ”Magnitudes are in equilibrium at distances reciprocally proportional to their weights.”

Hero (or Heron) of Alexandria (10-70 AD)

He is known to students for his formula (Heron’s, or Hero’s formula) about the area of a triangle whose sides have known lengths. He is less known for his experimental work and for a number of technical inventions and ingenious toys.





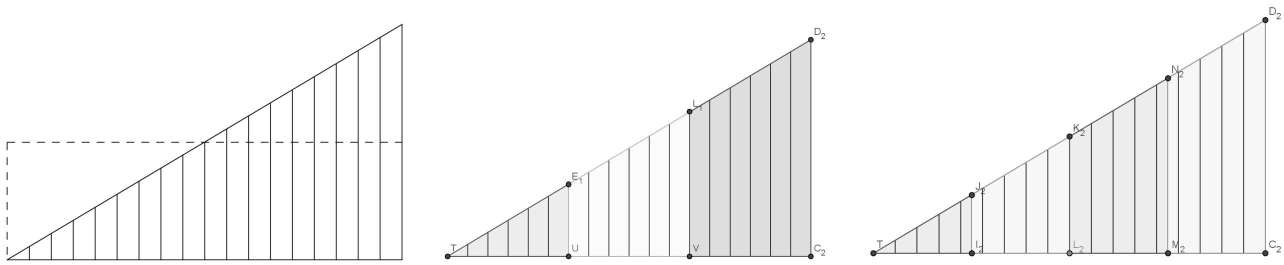


qbigskip Many of the Heron’s works are lost; some of them are conserved in Arabic translations. Heron published a detailed description of a steam engine (aeolipile). This was a sphere filled with water equipped with two nozzles; upon heating and evaporating the water in the sphere, it worked as a rocket-like reaction engine. (Marcus Vitruvius Pollio described the aeolipile some 100 years earlier than Hero).
Hero also invented the first vending machine. When a coin was introduced into a slot, a set amount of water was lifted up and dispensed. This was described in his book ”Mechanics and Optics”.

Hero invented a wind-powered organ. He also invented a syringe-like measuring device to measure small quantities of air or liquids.
He studied light and stated the ”Principle of the Shortest Path of Light”. It was nearly 1000 years later that Alhacen expanded the principle to both reflection and refraction, and the principle was later stated in this form by Pierre de Fermat in 1662.

Nicole Oresme (1320 - 1382)

Around 1361, Oresme wrote that everything that can be measured can be presented in the dorm of a graph, e.g. a graph of velocity as a function of time for a uniformly accelerated motion. Along a horizontal line, he marked points indicating the measured times. Through these points, he drew perpendicular lines whose lengths were equal to the measured time.
Oresme has provided a geometrical verification of the Merton rule (”mean speed theorem”): a body undergoing a uniform acceleration and a body moving uniformly at a velocity of one-half the final velocity of the first body, will travel an equal distance over the same time interval.
The diagram obviously leads to the law of motion generally ascribed to Galileo in the 17 th century.



The area in the first half of time is in proportion 1 : 3 to that of the second half. If we subdivide the time into three equal parts, the distances covered are in the ratio 1:3:5. For four equal subdivisions, the distances are in the ratios 1:3:5:7.
In general, as Galileo observed later, the distances are to one another as the odd number, and because the sum of the first n consecutive odd numbers is the square of n, the total distance covered varies as the square of the time, the familiar Galilean law for falling bodies.

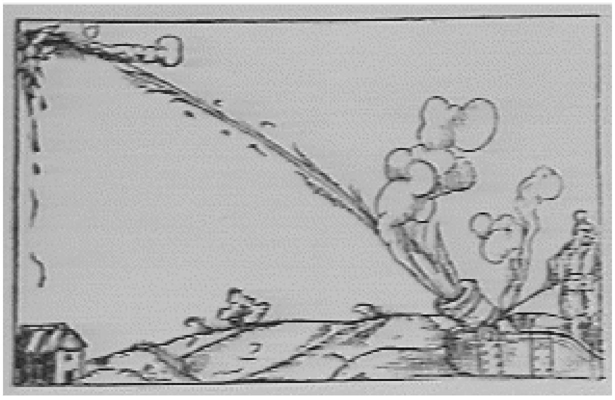
Galileo Galilei (15 February 1564 - 8 January 1642)

In schools, the importance of getting used to independent research-like work (inquiry based learning) is stressed again and again. We give students a problem, they make a hypothesis, plan an experiment, determine independent and dependent variables, perform measurements, compare the results with the hypotheses, look for the relations among physics quantities, i.e. write down the relationships in the mathematical form.
Historically, the first to proceed this way was Galileo Galilei.

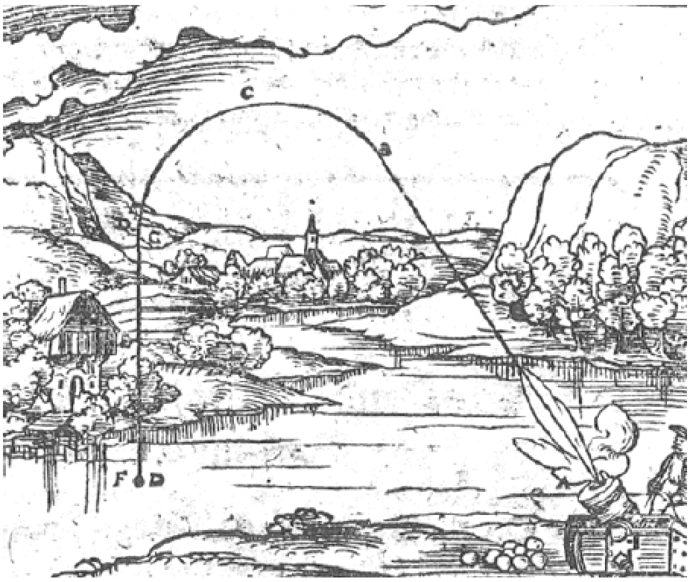
Projectile motion and Galileo Galilei

Galilei made careful preparations for experiments. He first made a hypothesis (what was going to happen), then he determined what should be observed and measured, and after the experi-

ment, he compared the results with the hypotheses. He did not perform all the experiments he described, but, for some of them only thought about the process. We give examples connected to the projectile motion.
Projectile motion was interesting, among other things, because of its relevance to the military. Already Aristotle described the projectile motion in the 4th century BC. Then the Arabic scholar Avicenna (Avicenna was born c. 980 near Bukhara, in present-day Uzbekistan, the capital of the Samanids) in the 11th century and Albert of Saxony in the 14th century maintained that a projectile launched from a hill moves at first horizontally then it gradually goes into the vertical downward motion.

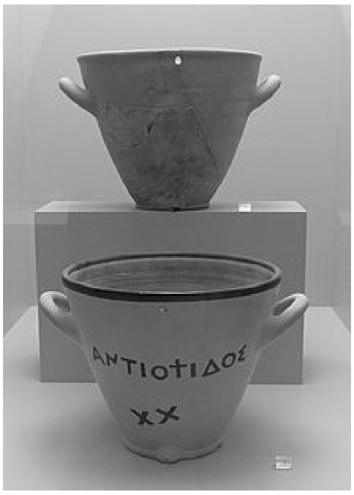


The motion of a projectile thrown in an arbitrary direction is as interesting as the horizontal case. Until Galileo's times, there were many explanations, of which of course all were wrong. The closest to the correct answer is shown in a picture from the year 1582. At first, the projectile is moving upwards at a certain angle which is followed by a circular arc and finally a vertical fall.



Of course, at that time no technical aids were at hand for an exact examination of the motion. Today, with the aid of fast cameras, the motion can be recorded and the footage observed in slow motion. With the aid of a computer, we can fit the curve along which the projectile was moving.
Galileo Galilei was the first to correctly describe this motion (at the beginning of the 17th century). When planning the experiments, he had to solve a number of problems which today are not problems any more. At all the experiments with projectiles, it is necessary to measure

time with sufficient accuracy. Galilei maintained that he could measure time with the accuracy to one tenth of the heart beat. Heart beats succeed within less than a second, so he could measure times to within less than one tenth of a second. But how? At that time, time was measured with the help of water clocks (clepsydras). Galilei made a special arrangement. He made water pour through a tiny tube from a bigger container to a smaller one. He blocked the orifice with a finger and removed it at the moment he left the ball go. At the end of the experiment, he blocked again the orifice. He weighed the water in the smaller container and in this way determined the elapsed time. We can say that he made a stopwatch. The experiments described by Galilei were repeated in the 20th century with the same kind of equipment; it was shown that it is possible to achieve the accuracy claimed by Galilei.



A display of two outflow water clocks from the Ancient Agora Museum in Athens. The top is an original from the late 5th century BC. The bottom is a reconstruction of a clay original.

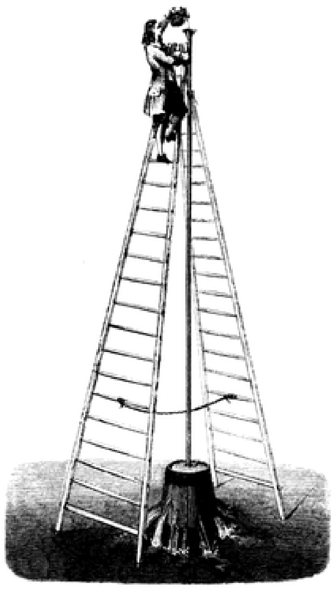
Galilei was the first to decompose the motion of a body into a horizontal and a vertical component. He verified by experiment that the horizontal part of the motion was uniform. He observed two balls: one was projected horizontally, the other was dropped vertically at the same time. Both reached the ground in the same time. He made a sketch to illustrate the experiment. The same experiment is still being performed in schools.
Let us write the equations. An object projected at an angle moves along a parabola. We neglect the air resistance (as is done at school). Parabola is one of the conic sections which were well known long ago. They were considered by Menaechmus (380-320 BC), later by Aristaeus and Euclid. They were more closely treated by Apollonius and later Papus. In their writings, they all used ratios. The present-day form of description is due to Descartes.
Galilei also used ratios. If the height of a trajectory is proportional to the square of time and if the time of falling from the height h_1 is 1 s, then it takes the body to be falling 2 s if it is dropped from the height $h_1(t_2/t_1)^2$. The today's form is $s = s_0 + gt^2/2$.
This means that we need the free fall acceleration (acceleration of gravity), g; Galilei was not interested in it, although he could have calculated it as he measured the period of a pendulum of length $9\frac{1}{3}$ m. He found that a quarter of period is 141 tempos, i.e. 1.53 s (today's calculations show slightly more: 1.65 s). He also used his own unit of length - punto. He made so because he calculated with integers and needed for both time and length as short a unit as possible.

And what do mathematicians say? For them, parabola is a curve which may be treated as a section of a cone with the appropriate plane, as a graph of the quadratic function or, analytically, as the locus of points that are equidistant from a line and a point.
What is missing here? A connection that students usually do not feel. They know all the characteristics of the quadratic function written as $f(x) = ax^2 + bx + c$.
They know the significance of the coefficients a, b and c (how they determine the position and the form of the graph), they are able to calculate extreme-but they get stuck when they see the same function in the form which is usual in physics: $x = v_0 t \sin\varphi$, $y = v_0 t \cos\varphi - gt^2/2$
A physicist reads from the graph of this function that the horizontal part of the motion (along x-axis) is uniform, and that the vertical motion is accelerated. A physicist also asks the question of where the body is when it is above or below the x-axis, i.e. when $y \leq 0$. He also wants to know how far the body moves in the horizontal direction at a certain initial velocity-in other words, what is the reach of it for a given initial velocity which, of course, is a vector.
From this, it is obvious that a physics teacher should know very well what the mathematics teacher is teaching; also, the mathematics teacher should know what is necessary for a student to understand the relationships between the quantities in physics, and why, at the mathematics instruction, the significance of the coefficients of a function is considered.

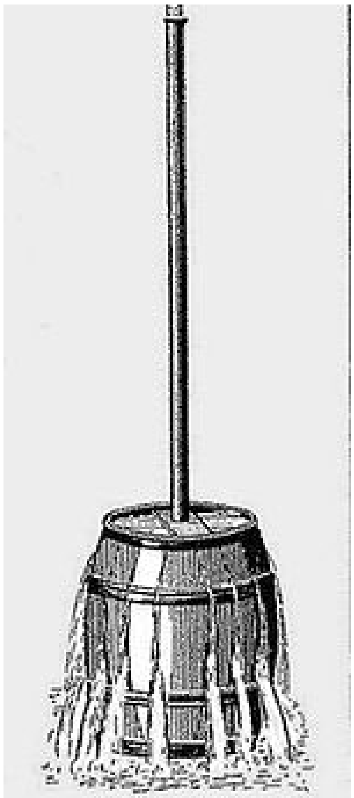
Fluids and Blaise Pascal

Secondary school students know Pascal by the Pascal's triangle. It is known that Pascal at the age of sixteen wrote a treatise about conic sections and completed what was written about the subject by Apollonius. Computer people know Pascal for his computing machine made in 1642. With it he helped his father who was a tax collector in Rouen (working for Cardinal Richelieu).
The study of fluid motion was important for practical reasons. For a long time, Aristotle's assertion was accepted that the behavior of fluids was the consequence of the ”horror vacui”. Constructors of wells realized that water can be sucked from a well only if it is not deeper that 10 m. The functioning of a pump was explained by the ”horror vacui”, that nature abhors a vacuum. When a piston in a pump is lifted, water follows it in order to avoid empty space. But this contradicted experience: if this was true, water could be lifted to an arbitrary height. So the horror vacui had an upper limit. In 1646, Pascal got to know the Torricelli's experiments with liquids and repeated them himself. At first, he thought that in the explanation of experiments the weight of the air and the ”horror vacui” had to be taken into account. Later, he found that the results could be explained by the weight of the air and the air pressure.
Today, problems of this kind are interesting in connection with lifting water to greater heights and also in relation to the explanation of how water can rise to top of very tall trees such as eucalyptus which reach heights far over 10 m.
Pascal also started more demanding experiments connected with vacuum. He designed a special equipment, we could say a double barometer. He put a U-tube onto a meter tube. At the contact he left an opening which could be blocked by a finger or a piece of a swine bladder. While in the horizontal position, he filled the tubes with mercury and closed both ends; he opened the free end of the straight tube only when it was dipped into the container filled with mercury. In the straight tube, the height of the column of mercury was 76 cm, some mercury was also in the U-tube. He let the air slowly enter into the vacuum in the upper tube and observed the level

of mercury in the tubes. He reported on his work in the treatise ”New experiments with the Vacuum”.
The experimentalists already had some experience with the low air pressure. They knew that a balloon that was not quite inflated at the foot of a hill gets nicely inflated on the top. Similarly, they performed experiments where they closed an ”empty” bottle at the foot of a mountain and opened it at the top. Pascal concluded that the air weight decreases with height. His brother-in-law measured for him the pressure at the bottom and at the top of an 800 m high mountain. You can imagine what effort was required to do this measurement as they had to carry along a mercury barometer. They found a difference of 7 cm in the column level. This way, they demonstrated that the air pressure was smaller at higher places. Already at that time it was known that the air pressure was changing and that one can connect the air pressure changes with weather changes.
Pascal also discovered that in fluids at rest a fluid acts perpendicularly to all surfaces of the container. Pascal also designed a hydraulic press, one could say a ”fluid lift”.



a)



b)

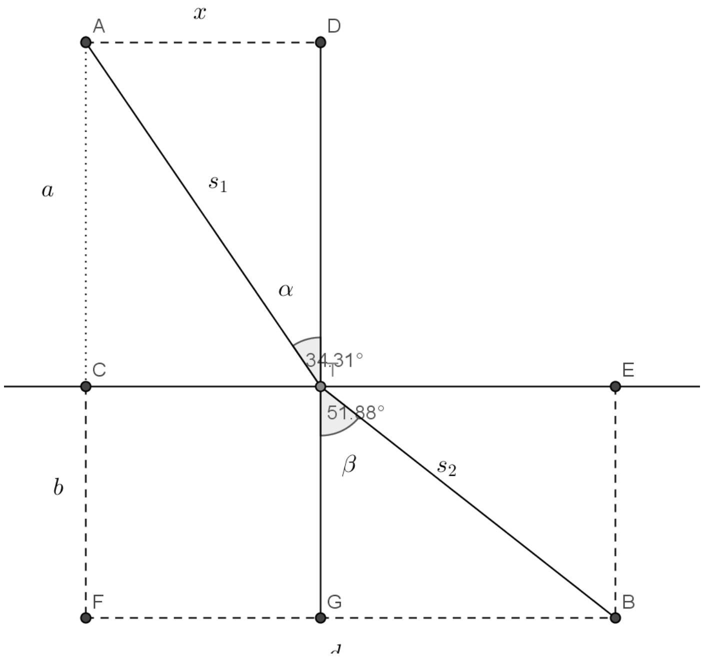
a) An illustration of Pascal’s barrel experiment of 1646. b) The effects of Pscal’s law, as Pascal discovered in his 1646 barrel experiment. (from Wikipedia).

Pascal carried out some of the experiments in public. He attached a 14 m long tube, closed at one end, to a mast in the horizontal position. He filled the tube with wine, dipped the open end into a container with water (or wine) and then lifted the tube into vertical position. Spectators predicted that the wine level will be lower than the water level because wine is ”stronger”. Pascal knew that density influences the level of the column, so the wine column will be higher as the wine density is lower (due to the alcohol content).
Pascal also calculated the weight of the air in the atmosphere. The unit of pressure is named after Pascal. Students know this unit but only few realize that this is the same person who is

also mentioned at mathematics lessons.

Light refraction and the Fermat's principle

Fermat is considered to be the originator of the calculus of variations and, together with Blaise Pascal, the originator of the probability theory. Of course, he is also known in the field of the number theory. Fermat also took a lot of interest in physics. Today, he is best known for his principle of least time about the propagation of light which states that light takes the path that requires the shortest time. Descartes, defending refraction laws discovered by himself, severely attacked this principle in his letters. It is true that Descartes' findings were correct, but the way leading to them was erroneous and they were only a special case of the Fermat's principle. Let us see how the problem is presented to the secondary school students.



From a point A in a medium where the speed of light is c_1 a light ray is sent to the point B in another medium where the speed of light is c_2. A third point T has to be found such that the time necessary for the light ray to go from A to B via T is the shortest. The problem, of course, is solved by looking for the extremum of a function.

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1^2} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2^2}$$

$$\frac{v}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

On the other hand, this problem can be related to a familiar problem: which is the shortest path for a bird, sitting at a point A on one tree, to reach the point B on another tree if the bird, during the flight, is to touch a water surface (one makes the mirror image of the point B, the water surface being the mirror plane). Of course, there are several variants.

Fermat was no experimentalist. He considered findings of other scientists and, using the calculus of variations, found solutions to physics problems.

Conclusion

At a discussion about teaching mathematics at the Palais de Découverte in Paris, on March 7, 1997, V. I. Arnold wrote: ”Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is a part of physics where experiments are cheap . . . In the middle of the twentieth century it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic. A whole generation of mathematicians grew up without knowing half of their science and, of course, in total ignorance of any sciences.”
Teaching both subjects (mathematics and physics) has advantages and disadvantages. Let us look at the disadvantages. Teaching physics requires some practical and experimental skills; experiments have to be prepared in labs which means that it is not possible to make all the preparations for the instruction at home. Teachers that do not like experimental work often have resort to writing down equations, mathematical explanations of the relationships between quantities and to a small number of demonstration experiments. This kind of physics instruction can be boring and unappealing. So the conclusion: a mathematician is rarely suitable for the physics instruction.
On the other hand, a teacher who is capable of experimental work can draw attention of students to relationships in nature. At the physics instruction, one can use vectors, derivatives, integrals etc. and show how physics laws can be discovered in different ways. Often students exclaim: ”Oh, we used this equation also at physics.”
The answer to the question if a mathematician can teach physics is, of course, affirmative, but with a disclaimer: if he/she likes experimental work and if he/she is familiar with the basic physics. In any case, a ”combined” teacher can contribute more easily to better connecting various scientific disciplines and has the potential to efficiently introduce students into the research work.

References

[1] Encyclopedia Britannica Online - Heron of Alexandria

[2] Riff W H 1582 Bawkunst Oder Architectur aller furnemsten (Basel: Sebastian Henric Petri)

[3] Rocca P., Riggi F., Projectile motion with a drag force: were the Medievals right after all?, Physics Education, **44**(4), 398-402), 2009.

[4] Bais S., The equations, icons of knowledge, Harvard University press 2005, Cambridge, Massachusetts.

[5] Næss, Galileo Galilei - When the World Stood Still, Springer, Oslo, 2002.

[6] Milankovic M., Kratka zgodovina znanosti, 1. del., DMFA Slovenije, 1984.

[7] http://portalegalileo.museogalileo.it/egjr.asp?c=16204

[8] Gowers T., editor, The Princeton Companion to mathematics, Princeton University Press, 2008.

[9] Aristotle's Physics is the hidden, and therefore never adequately studied, foundational book of Western philosophy." [Cambridge: Cambridge University Press, 1998], 183-230; 185.)

[10] Strnad J., Do Newtonovih zakonov (Ob tristoletnici "Principov", Presek, Letnik 14, **7**, 1986-87, DMFA Slovenije, Ljubljana.

[11] Strnad J:, Fiziki 1.del, Založba M& M, v sodelovanju s tretjim programom Radia Slovenija, 1995, Ljubljana.

[12] Strnad J:, Fiziki 3. del, Založba Modrijan v sodelovanju s tretjim programom Radia Slovenija, 2000, Ljubljana.

[13] Strnad J:, Fiziki 4. del, Založba Modrijan v sodelovanju s tretjim programom Radia Slovenija, 2004, Ljubljana.

Mathematics and physics – a (hi)story of rivalry or alliance?

T Kranjc
Faculty of Education, University of Ljubljana, Ljubljana
Faculty of Education, University of Primorska, Koper

Abstract

Interrelation and interdependence between mathematics and natural sciences, in particular physics, are considered from the historical and educational point of view. Underlying to both mathematics and physics are "patterns" (Hardy, 1996) or structures, and relationships between quantities; these are condensates of (general) results which may appear in a multitude of specific forms arising in specific contexts. The history of mathematics and physics shows that, despite very different approaches, methods and perceptions used in mathematics and in physics, respectively, they were most often able to mutually enrich, deepen and extend their knowledge and applications, and that they helped each other to achieve further progress. Until the end of the 19th century (and later, to a lesser extent), most mathematicians (including the greatest names who contributed most remarkable results into the field of "pure mathematics", like Leibnitz, Euler, Gauss, Riemann etc.) also made important contributions in the fields of other sciences.

In our presentation, we offer a few examples of mathematicians who made important contributions to the treasury of "pure" mathematics and, at the same time, coped with and solved problems of "practical" relevance, especially in various fields of physics. It is in doing so that they often discovered new procedures, concepts and objects, and even new mathematical disciplines. It is our "proposition" (which we do not prove, but rather exemplify by the facts from the history) that dealing with "practical" problems which require mathematical tools, makes one to deepen the understanding of basic concepts, general mathematical structures and their true deep meaning and significance. It is, in an essential way, the necessary training and exercise indispensible for developing skills and experience, and consequently the insight and feeling for the subject. It also puts into the perspective the value of the "tool box" that is being used. (There are undoubtedly exceptions that "prove the rule".)

A very important tool to understand mathematics as well as physics is visualization. If one is able to solve a problem without calculations, just by visualizing the functioning of the general principles in a general setting of the description space of a process, it is certainly superior to doing tiresome and lengthy calculations (Woit, 2006). Here, physical ("real-world") models may be of help also in mathematical considerations (Feynman, 1985). Inversely, mathematical models may help clearing up and understanding physical processes. Either way, "applied" mathematics is a good apprenticeship in order to gain a better visualization.

At the same time as the process of a mutual support between the two scientific disciplines took place, there has often been some (probably well-intentioned) rivalry between mathematicians and physicists, as well as between the two respective communities. The differences and sometimes lack of understanding stem from the fact that mathematicians and physicists use distinctly different language (sometimes incomprehensible to each other), different approaches to presenting and solving problems, and even different logic. This should be kept in mind and mathematicians and

physicists should, as far as possible, bridge the barriers between the two languages and adapt themselves to the two attitudes of mind. Often, they also have different viewpoints concerning the status of mathematics and physics and their relationship. Nevertheless, despite the differences, we think that it is safe to say that through all the history mathematics and physics have been *close allies* fostering and stimulating each other. The results of this cooperation may be evaluated by hypothesizing what physics (but also chemistry, biology, psychology, economics etc) would be without mathematics, and vice versa, what gaps there would be in mathematics without the contribution of physics.

A corollary of the above statement is that teaching/learning mathematics and physics should be intertwined at all levels of education (in a reasonable way and proportion, depending on the cognitive and instructional level). Teaching/learning only "theory" (which is beloved among students and sometimes also among teachers because it requires less mental effort) is worthless and deceiving unless the understanding and capability of using it are checked by solving "practical" problems and by actually performing the calculations required by the "formulas" appearing in the theory. Transgressing the boundaries of mathematics by using it in various contexts is especially important because it makes clearer the underlying mathematical universality of forms and structures ("patterns") which perhaps is the most essential feature of the knowledge of mathematics (and physics).

Let us add one last point: Development of mathematics and physics through history is interesting and instructive on its own right. Therefore, it is beneficial if the teaching/learning lessons of both mathematics and physics are supplemented by some facts from the history. Special emphasis should be laid upon their parallel development and interdependence. While no one is able to explain "the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences" (Wigner, 1960), it is worthwhile to stress this fact and to show how fruitful the alliance between mathematics and physics has always been.

References

Feynman, R.P. (1985). *"Surely you're joking, Mr. Feynman"*, Bantam Books, New York.

Hardy, G.H. (1996). *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press, Cambridge.

Wigner, E. (1960). *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences,* Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, no. I (February 1960).

Woit, P. (2006). *Not even wrong*. Jonathan Cape, London.

Der Kreisbogen und die wahre Kettenlinie

Marko Razpet

Pädagogische Fakultät

Universität Ljubljana

MSC(2010): 34A05, 49J05, 49S05, 53A04.

Wir beweisen, dass es in Polarkoordinaten geschriebene planare Kurven gibt, bei denen die Bogenkoordinate zwischen polarer Achse und beliebigem Punkt dem Produkt der Winkelkoordinate und des Radius dieses Punktes gleich ist. Beispiele solcher Kurven sind der Kreisbogen und eine besondere Art der wahren Kettenlinie.

Einleitung

Im Aufsatz [2] wird die so genannte *wahre Kettenlinie* behandelt. Unter allen bemerkt man eine Kurve, die in Polarkoordinaten eine besondere einfache Gleichung hat, bei derer der Radius durch eine rationelle Funktion der Winkelkoordinate ausgedrückt wird, während die Gleichungen der anderen wahren Kettenlinien relativ kompliziert sind. Die Kettenlinie, die hier behandelt wird, hat aber eine spezielle Eigenschaft. Ihre Bogenlänge zwischen polarer Achse und beliebigem Punkt dem Produkt der entsprechenden Winkelkoordinate und dem Radius dieses Punktes gleich ist. Den positiven Winkelkoordinaten ordnen wir positive Bogenkoordinate zu, den negativen Winkelkoordinaten aber negative Bogenkoordinate. Die einfachste Kurve, die diese Eigenschaft besitzt, ist der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

Jetzt sind wir dadurch motiviert, andere Kurven mit solcher Eigenschaft zu finden. Selbstverständlich, wir suchen solche Kurven in polarer Form. Nachdem wir in einer Ebene den Koordinatenursprung O und die polare Achse p fixierten, ist ein Punkt der Kurve mit dem Winkelkoordinate φ und Radius $r > 0$ ganz bestimmt. In Polarkoordinaten ist die Kurve durch eine positive stückweise stetig differenzierbare Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$ im Intervall $[\alpha, \beta]$ gegeben. Dabei ist freilich $\alpha < \beta$. Die Bogenlänge $\sigma[\alpha, \beta]$, die den Winkelkoordinaten φ im Intervall $[\alpha, \beta]$ entspricht, ist durch

$$\sigma[\alpha, \beta] = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}\, d\phi$$

bestimmt. Wenn wir der Winkelkoordinate φ in einem Intervall, das 0 enthält, *die Bogenlänge*

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}\, d\phi \tag{1}$$

zuordnen, positive den positiven φ, negative zu negativen φ und 0 zu $\varphi = 0$, so haben wir auf der Kurve ein natürliches Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung im Punkt T definiert. Dem Punkt P, der der Winkelkoordinate φ entspricht, ordnen wir auf der Kurve die Bogenkoordinate $s(\varphi)$ zu. Längs der Kurve ist der Punkt P von T für $|s(\varphi)|$ entfernt.

Eine merkwürdige Kurve

Für eine Kreislinie mit dem Mittelpunkt in O gilt $r(\varphi) = r_0$, wo r_0 eine positive Konstante ist, und zwar der Radius. Die Bogenlänge ist $\sigma[\alpha, \beta] = r_0(\beta - \alpha)$ und die Bogenkoordinate $s(\varphi) = r_0\varphi$. Also hat eine Kreislinie

$$s(\varphi) = \varphi r(\varphi). \tag{2}$$

Gibt es andere Kurven in Polarform mit der Eigenschaft (2)? Für welche Kurven ist die Bogenkoordinate $s(\varphi)$ Produkt der Winkelkoordinate φ mit Radius $r(\varphi)$ für allen φ in einem Intervall $(-\omega, \omega)$, wo die Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$ nichtnegativ ist? Wir werden noch eine solche Kurve kennenlernen. Wenn wir auf Stetigkeit der Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$ bestehen und die Unstetigkeit ihrer Ableitung in endlich vielen Punkten erlauben, finden wir sogar unendlich viele Kurven mit dieser Eigenschaft.

Finden wir also eine nichtnegative stetig differenzierbare Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$, für die (2) gilt. Das heißt

$$\varphi r(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}\, d\phi$$

in einem Intervall $(-\omega, \omega)$. Daraus folgt die Differentialgleichung

$$r(\varphi) + \varphi r'(\varphi) = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}. \tag{3}$$

Wir fügen dazu noch den Anfangswert $r(0) = r_0 > 0$. In Absicht kommen nur Lösungen $r(\varphi)$, für die

$$r(\varphi) + \varphi r'(\varphi) = [\varphi r(\varphi)]' \geq 0.$$

gilt. Aus (3) bekommen wir die Differentialgleichung

$$r'(\varphi)[(1 - \varphi^2)r'(\varphi) - 2\varphi r(\varphi)] = 0, \tag{4}$$

mit dem Anfangswert $r(0) = r_0 > 0$. In (4) sind beide Faktoren Funktionen in φ und das Produkt kann Null sein, obwohl die Faktoren nicht identisch Null im Interval $(-1, 1)$ sind. Die Gleichung has stetig differenzierbare Lösungen

$$r(\varphi) = r_0 \quad \text{und} \quad r(\varphi) = \frac{r_0}{1 - \varphi^2}$$

im Intervall $(-1,1)$, aber sie sind nicht die einzigen. Stetig differenzierbar ist auch die Funktion, die durch

$$r_1(\varphi) = \begin{cases} r_0, & -1 < \varphi < 0, \\ \dfrac{r_0}{1-\varphi^2}, & 0 \le \varphi < 1. \end{cases}$$

definiert ist. Damit fanden wir noch nicht alle Lösungen. Der Ring stetig differenzierbarer Funktionen im Intervall $(-1,1)$ hat nämlich Teiler der Null. Das heißt, dass es im Ring Funktionen f_1 und f_2 gibt, die nicht identisch Null in $(-1,1)$ sind, doch ihr Produkt im $(-1,1)$ identisch Null ist. Sogar der Ring beliebig vielmal differenzierbarer Funktionen auf der ganzen reellen Achse hat Teiler von Null. Funktionen f_1 und f_2, definiert durch

$$f_1(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi \le 0, \\ e^{-1/\varphi^2}, & \varphi > 0, \end{cases} \qquad \text{und} \quad f_2(\varphi) = \begin{cases} e^{-1/\varphi^2}, & \varphi < 0, \\ 0, & \varphi \ge 0, \end{cases}$$

sind nicht gleich Null, sie haben in jedem Punkt alle Ableitungen und ihr Produkt ist identisch Null. Die Lösungen der Differentialgleichung (4) kann man unter den Lösungen der Gleichungen

$$r'(\varphi) = f_1(\varphi) \quad \text{und} \quad (1-\varphi^2)r'(\varphi) - 2\varphi r(\varphi) = f_2(\varphi)$$

suchen. Die Menge aller Lösungen von (4) bei dem Anfangswert $r(0) = r_0$ wird unübersehbar, darum suchen wir sie unter den Funktionen, die im Punkt 0 wegen des Anfangswerts $r(0) = r_0$ analytisch sind.

Nach [1, 3] ist eine reelle oder komplexe Funktion $\varphi \mapsto f(\varphi)$ (reell) analytisch im Punkt φ_0, wenn sie im Intervall, das den Punkt φ_0 enthält, definiert ist und wenn sie im Intervall $(\varphi_0 - \omega, \varphi_0 + \omega)$ für ein $\delta > 0$ eine konvergente Potenzreihe

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\varphi - \varphi_0)^n$$

besitzt. Eine solche Funktion hat im Intervall $(\varphi_0 - \omega, \varphi_0 + \omega)$ alle Ableitungen, die auch analytische Funktionen sind, für ihre Koeffiziente a_n, die reelle oder komplexe Zahlen sind, gilt die Formel:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\varphi_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Man sagt, dass eine Funktion $\varphi \mapsto f(\varphi)$ analytisch in einem offenen Intervall $\mathcal{I}$ ist, wenn sie analytisch in jedem Punkt φ_0 dieses Intervalls ist. Es gibt eine wichtige Eigenschaft der analytischen Funktionen. Wenn die Funktion $\varphi \mapsto f(\varphi)$ analytisch im Punkt φ_0 ist, dann ist sie analytisch auch in einem vielleicht kleineren offenen Intervall, das φ_0 enthält. Eine analytische Funktion, die alle Koeffiziente a_n gleich 0 hat, ist die Nullfunktion. Sie ist identisch gleich Null im beliebigen offenen Intervall, das φ_0 enthält.

Alle Funktionen, die analytisch in einem offenen Intervall $\mathcal{I}$ sind, bilden einen kommutativen Ring, der ohne Teiler von Null ist, was zum Beispiel in [1] bewiesen wird.

Wenn eine im Punkt 0 analytische Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$ unsere Gleichung (2) löst, so sind beide Faktoren in Gleichung (4) offenbar analytisch im Punkt 0 und die Gleichung wird zu zweier gespaltet:

$$r'(\varphi) = 0 \quad \text{und} \quad (1-\varphi^2)r'(\varphi) = 2\varphi r(\varphi).$$

Ihre im Punkt 0 analytische Lösungen mit dem Angangswert $r(0) = r_0$ sind

$$r(\varphi) = r_0 \quad \text{und} \quad r(\varphi) = \frac{r_0}{1-\varphi^2} = r_0(1+\varphi^2+\varphi^4+\ldots), \quad -1 < \varphi < 1. \tag{5}$$

Die erste stellt einen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung dar, was zu erwarten war, die zweite Lösung gibt aber eine komplizierte Kurve $\mathcal{K}$, die eine Asymptote mit dem Neigungswinkel ± 1 in Rücksicht auf die polare Achse (Abbildung 1). Für diese Kurve gibt es einen einfachen Ausdruck für die Bogenlänge. Wir haben zuerst

$$\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} = r_0 \frac{1+\varphi^2}{(1-\varphi^2)^2} = r_0 \left(\frac{\varphi}{1-\varphi^2}\right)'$$

und dann mit Hilfe von (5):

$$\sigma[\alpha, \beta] = r_0 \left(\frac{\beta}{1-\beta^2} - \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\right), \quad -1 < \alpha \le \beta < 1$$

Im Sonderbeispiel ergibt sich

$$\sigma[-\alpha, \alpha] = \frac{2r_0\alpha}{1-\alpha^2} = 2r(\alpha)\alpha, \quad 0 \le \alpha < 1.$$

Das bedeutet, dass die Bogenlänge der Kurve $\mathcal{K}$ zwischen Punkten T_- und T_+ dem kürzesten Kreisbogen mit Radius $r(\alpha)$ und mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung O zwischen denselben Punkten gleich ist.

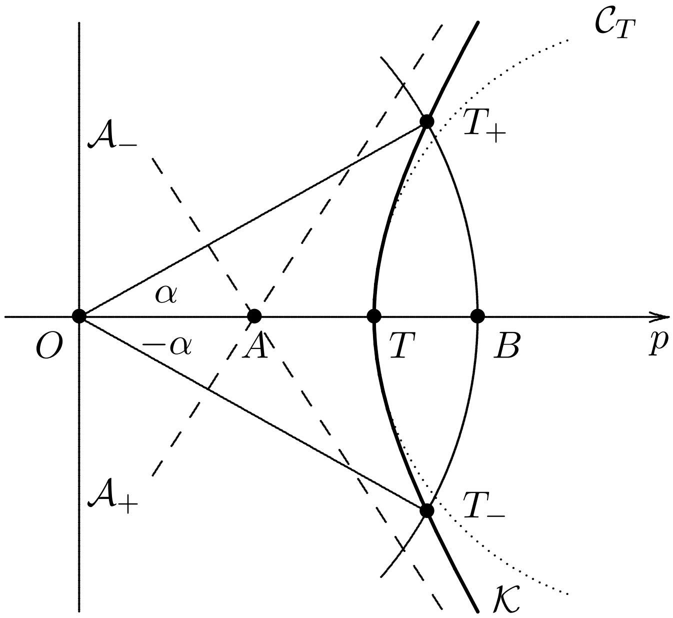


Abbildung 1. Die wahre symmetrische Kettenlinie.

Dem Koordinatenursprung auf der Kurve $\mathcal{K}$ ist der Punkt T am nächsten, sein Radius ist r_0. Der Flächeninhalt $S(\alpha)$ des Segments, das mit Halbgeraden $\varphi = -\alpha$, $\varphi = \alpha$ und Kurve $\mathcal{K}$ beschränkt ist, wird mit allgemeiner Formel

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} r^2(\varphi)\, d\varphi$$

berechnet. Man bekommt zuerst

$$S(\alpha) = r_0^2 \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{(1-\varphi^2)^2}$$

und danach noch, mit Hilfe der Teilbrüche und Integration, endlich

$$S(\alpha) = \frac{r_0^2}{4}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} - \ln\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right), \quad 0 \le \alpha < 1.$$

Die Krümmung $\kappa(\varphi)$ einer Kurve in Polarkoordinaten bei dem Winkelkoordinate φ kann man mit Hilfe des Ausducks (mehr davon in [5], Seite 448)

$$\kappa(\varphi) = \frac{r(\varphi)r''(\varphi) - r^2(\varphi) - 2r'^2(\varphi)}{\sqrt{(r^2(\varphi) + r'^2(\varphi))^3}}$$

berechnen. Das Resultat für unsere Kurve $\mathcal{K}$ ist ziemlich einfach:

$$\kappa(\varphi) = \frac{(1-\varphi^2)^3}{r_0(1+\varphi^2)^2}.$$

Der Krümmungsradius im Scheitel T beträgt

$$\varrho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = r_0.$$

Die Krümmungskreislinie im Punkt $\mathcal{C}_T$ auf $\mathcal{K}$ im Scheitel T hat Radius r_0. Die Kurve $\mathcal{K}$ hat zwei Asymptoten, $\mathcal{A}_\pm$, die die Polarachse im Winkel ± 1 im Punkt A mit Radius $r_0/(2\sin 1)$ schneiden.

Mit den Lösungen $r(\varphi) = r_0$ und $r(\varphi) = r_0/(1-\varphi^2)$, $-1 < \varphi < 1$, der Differentialgleichung (3) kann man stetig differenzierbare Lösungen mit Eigenschaft (2) zusammnsetzen oder nur stückweise stetig differenzierbare Lösungen.

Beispiel 1

Die Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$, definiert für $-\alpha < 0 < \beta < 1$, wobei $\alpha > 0$, mit

$$r(\varphi) = \begin{cases} r_0, & -\alpha < \varphi < 0, \\ \dfrac{r_0}{1-\varphi^2}, & 0 \le \varphi \le \beta. \end{cases}$$

gibt uns eine Kurve, die von einem Kreisbogen zwischen Winkeln $-\alpha$ und 0 mit Radius r_0 und von dem Bogen der Kurve $\mathcal{K}$ zwischen Winkeln 0 und β (Abbilding 2) zusammengesetzt ist. Die Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$ ist im Intervall $[-\alpha, \beta]$ stetig und ihre Bogenlänge ist für $-\alpha \le \varphi \le 0$ gleich

$$s(\varphi) = r_0\varphi$$

und für $0 \le \varphi \le \beta$ gleich

$$s(\varphi) = \frac{r_0\varphi}{1-\varphi^2}.$$

Deswegen

$$s(\varphi) = \begin{cases} r_0\varphi, & -\alpha < \varphi \le 0, \\ \dfrac{r_0\varphi}{1-\varphi^2}, & 0 \le \varphi \le \beta. \end{cases}$$

Die Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$ hat offenbar die Eigenschaft (2).

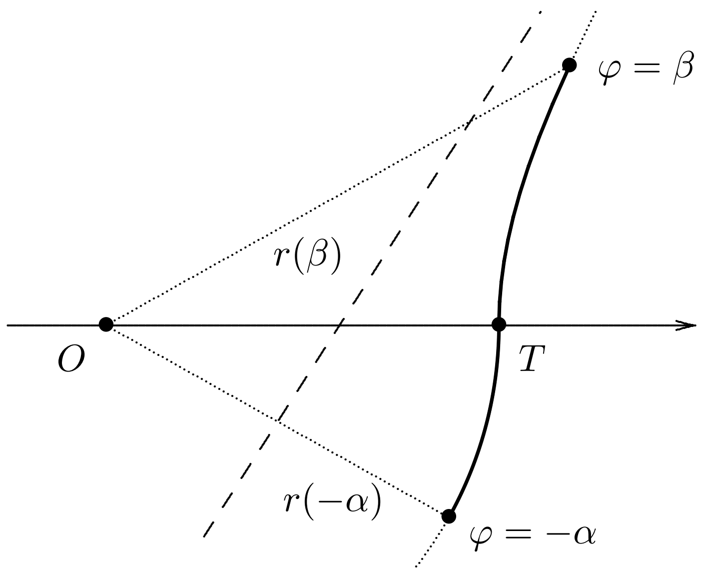


Abbildung 2. Der Kreisbogen wird glatt in den Bogen der wahren Kettenlinie fortgesetzt.

Beispiel 2

Für $\varphi \geq 0$ nehmen wir noch die Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$, die für $0 < \alpha < 1$ durch

$$r(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{r_0}{1-\varphi^2}, & 0 \leq \varphi \leq \alpha, \\ \dfrac{r_0}{1-\alpha^2}, & \alpha \leq \varphi. \end{cases}$$

definiert ist. Die entsprechende Kurve ist von einem Bogen der Kurve $\mathcal{K}$ und einem Kreisbogen von beliebiger Länge zusammengesetzt (Abbildung 3). Die Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$ ist auf der Halblinie $[0, \infty)$ stetig und ihre Bogenlänge ist für $0 \leq \varphi \leq \alpha$ gleich

$$s(\varphi) = \frac{r_0 \varphi}{1-\varphi^2}$$

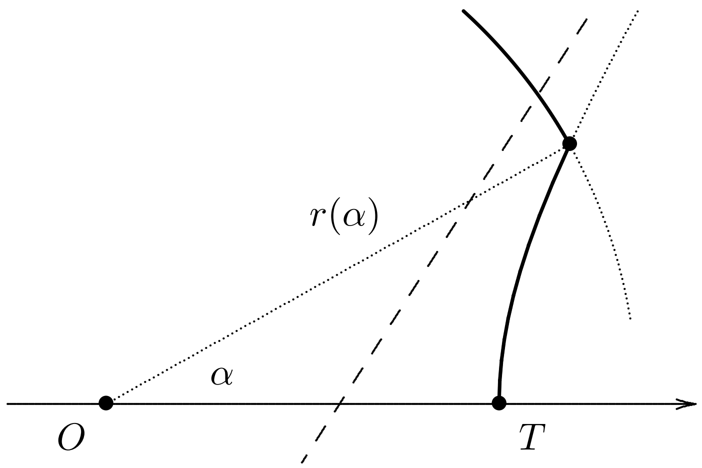
und für $\alpha \leq \varphi$ gleich

$$s(\varphi) = \frac{r_0 \alpha}{1-\alpha^2} + \frac{r_0(\varphi - \alpha)}{1-\alpha^2}.$$

Das heißt:

$$s(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{r_0 \varphi}{1-\varphi^2}, & 0 \leq \varphi \leq \alpha, \\ \dfrac{r_0 \varphi}{1-\alpha^2}, & \alpha \leq \varphi. \end{cases}$$

Die Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$ hat Eigenschaft (2).



Abbilding 3. Den Bogen der wahren Kettenlinie wird in den Kreisbogen fortgesetzt.

Nach oben beschriebenem Muster kann man Beispiele in mehreren Punkten nicht differenzierbaren, aber stetigen Funktionen mit Eigenschaft (2) bilden.

Die wahre Kettenlinie

Die Kurve $\mathcal{K}$ ist ein Sonderbeispiel der wahren Kettenlinie. Die wahre Kettenlinie im Gravitationsfeld von einer Masse im Punkt O verursacht ist die Form einer idealen, homogenen, dünnen, flexibilen, nicht dehnbaren in zwei verschiedenen nicht auf derselben senkrechten Gerade liegenden Punkten aufgehängter Kette in stationärem Zustand. Die Kurve $\mathcal{K}$ ist ein Sonderbeispiel, bei dem Punkte T_- und T_+ von O für r_1 entfernt sind, die Radien OT_- und OT_+ bilden der Winkel 2α, die Länge der Kette beträgt $2r_1\alpha$, was ist auch die Länge des Kreisbogens von Radius r_1 bei Mittelwinkel von $2\alpha < 2$ (Abbildung 1). Bis zu einem konstanten Faktor ist die potentielle Energie der Kette

$$\mathcal{F}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{r}\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi \tag{6}$$

bei den Bedingungen

$$\mathcal{P}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = 2r_1\alpha, \qquad r(\pm\alpha) = r_1. \tag{7}$$

In stationärem Zustand ist das Integral (6) minimal. In (6) und (7) auftretende Funktion $\varphi \mapsto r(\varphi)$ wird durch Methoden der Variationsrechnung ([4, 6, 7]) bestimmt. Die Lösung genügt der Gleichung

$$r(\varphi)(\lambda r(\varphi) - 1) = c\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}, \tag{8}$$

wo c und λ Konstanten sind. Wann $r(\varphi) = r_0/(1-\varphi^2)$ der Gleichung (8) für jeden Winkel φ im Intervall $(-\alpha, \alpha)$ bei der Bedingung (7) genügt? Wir haben zuerst

$$\lambda r_0 - (1-\varphi^2) = c(1+\varphi^2)$$

und davon folgt $c = 1$ und $\lambda = 2/r_0$. Die Länge der gesuchten Kurve ist $2r_0\alpha/(1-\alpha^2) = 2r_1\alpha$, woraus $r_0 = (1-\alpha^2)r_1$ folgt. Am Ende haben wir ein Sonderbeispiel der wahren Kettenlinie: $r = r_1(1-\alpha^2)/(1-\varphi^2)$.

Literatur

[1] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1975.

[2] J. Denzler, A. M. Hinz, *Catenaria Vera – The True Catenary*, Expo. Math. **17** (1999), Seiten. 117–142.

[3] S. G. Krantz, H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[4] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, Ljubljana, 1974.

[5] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1994.

[6] I. Vidav, *Višja matematika III*, DZS, Ljubljana, 1976.

[7] E. Zakrajšek, *Analiza III*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2002.

On Max Newman as a logician

I. Grattan-Guinness
Middlesex University Business School, The Burroughs,
Hendon, London NW4 4BT, England

The interaction between mathematicians and (formal) logicians has always been much slighter than one might imagine. After a brief review of examples of very partial contact in the period 1850-1930, the case of Max Newman is reviewed in some detail. The rather surprising origins and development of his interest in logic are recorded; they included a lecture course at Cambridge University, which was attended in 1935 by Alan Turing.

Logic and mathematics. Cambridge University Faculty of Mathematics. Vienna University. Lionel Penrose.

1. Cleft

One might expect that the importance to many mathematicians of means of proving theorems, and their desire in many contexts to improve the level of rigour of proof, would motivate them to examine and refine the logic that they were using. However, inattention has long been common. For example, in ancient Greek times Euclid produced detailed proofs, but he never explicitly discussed the pertinent logic; conversely, the logicians, especially Aristotle, did not use mathematics that much as a source of cases or examples.[1]

A very important source of maintaining the cleft during the 19th century is the founding from the late 1810s onwards of the 'mathematical analysis' of real variables, grounded upon an articulated theory of limits, by the French mathematician A.-L. Cauchy. He and his followers extolled rigour, especially careful nominal definitions of major concepts and detailed proofs of theorems. From the 1850s onwards this aim was enriched by the German mathematician Karl Weierstrass and his many followers, who brought in, for example, multiple limit theory, definitions of irrational numbers, and an increasing use of symbols — and from the early 1870s, Georg Cantor and his set theory. However, absent from all these developments was explicit attention to any kind of logic.

This silence continued among the many set theorists who participated in the inauguration of measure theory, functional analysis and integral equations.[2] Artur Schoenflies and Felix Hausdorff were particularly hostile to logic, targeting Bertrand Russell. Even the extensive dispute over the axiom of choice focussed mostly on its legitimacy as an assumption in set theory and mathematics and use of higher-order quantification [Moore 1982]: its need to state an infinitude of independent choices within finitary logic was a trouble for logicians.

The creators of symbolic logics were exceptional among mathematicians in attending to logic, but also they made little impact on their colleagues. The algebraic tradition with George Boole, C. S. Peirce, Ernst Schröder and others from the mid 19th century was just a curiosity to most of their contemporaries. Similarly, when mathematical logic developed from the late 1870s, especially with Giuseppe Peano's 'logistic' programme at Turin from around 1890, he gained many followers there [Roero and Luciano 2010] but few elsewhere. However, followers in the 1900s included the Britons Russell and A. N. Whitehead, who adopted logistic (include Cantor's set theory) and converted it into their 'logicistic' thesis that all the "objects" of mathematics could be obtained; G. H. Hardy but not many other mathematicians responded [Grattan-Guinness 2000, chs. 8-9]. From 1903 onwards Russell

---

[1] The same separation seems to have obtained in Indian and Arabic logics [Gabbay and Woods 2004]).

[2] The history of mathematical analysis is quite well covered; see especially [Rosenthal 1923, Bottazzini 1986, Medvedev 1991 and Jahnke 2003]. A similar story obtains for complex-variable analysis.

publicised the mathematical logic and arithmetic logicism put forward from the late 1870s by Gottlob Frege, which had gained little attention hitherto even from students of foundations and did not gain much more in the following decades. In the late 1910s David Hilbert started the definitive phase of his programme of metamathematics and attracted several followers at Göttingen University and a few elsewhere; however, its impact among mathematicians was limited even in Germany.[3]

The next generations of mathematicians include a few distinguished students of foundations. For example, in the USA from around 1900 E. H. Moore studied Peano and Hilbert and passed on an interest in logic and model theory to his student Oswald Veblen, then to Veblen's student Alonzo Church, and then to his students Stephen Kleene and Barkley Rosser [Aspray 1994]. At Harvard Peirce showed multiset theory to the Harvard philosopher Josiah Royce, who was led on to study logic, and especially to supervise around 1910 C. I. Lewis, Henry Sheffer, Norbert Wiener, Morris Cohen and C. J. Ducasse, the last the main founder of the Association of Symbolic Logic in the mid 1930s [Grattan-Guinness 2002]. In central Europe Johann von Neumann included metamathematics and axiomatic set theory among his concerns [Hallett 1984, ch. 8].

But the normal attitude of mathematicians remained indifference. For instance, around 1930 Tarski and others proved the 'deduction theorem' [Tarski 1941, 125-130; Kleene 1952, 90-98]; it gained the apathy of the mathematical community, although it came to be noted by the Bourbaki group, who normally were hostile to logics. (Maybe the reason was that their compatriot Jacques Herbrand had proved versions of it; if so, it was his sole impact on French mathematics.) Also, Kurt Gödel's now famous theorems [1931] on the incompletability of first-order arithmetic were appreciated fairly quickly by students of foundations, but the community did not become widely aware of them until the mid 1950s [Grattan-Guinness 2011a].

2. Newman's course at Cambridge

Turing's own career provides a good example of the cleft; for when he submitted his paper [1936] on computability to the London Mathematical Society they could not referee it properly, because Max Newman was the only other expert in Britain and he had been involved in its preparation [Hodges 1983, 109-114]; they seem to have accepted it on Newman's word. But this detail prompts an historical question that has not been examined: why was the mathematician Newman also a logician? An answer is given in the rest of this article; more details are given in [Grattan-Guinness 2012a]

Although he did not publish much on logic, it is clear that Newman was familiar with the technicalities of several parts of it. In particular, during his wartime period at Bletchley Park he published three technical papers, one written jointly with Turing [Newman 1942, 1943, Newman and Turing 1943]. At Cambridge in the 1930s he had taught a course on 'Foundations of mathematics', which, as is well known, was crucial for Turing when he attend it in 1935; for from it learnt about recursion theory and Gödel numbering from the only Briton who was familiar with it.

Ready for the academic year 1933-1934, Newman ran the course only for the two succeeding years before it was closed down, perhaps because of disaffection among staff as well as among students. In particular, Hardy, despite his familiarity with foundations, opined to Newman in 1937: 'though "Foundations" is now a highly respectable subject, and everybody ought to know something about it, it is, (like dancing or "groups") slightly

[3] There does not seem to be an integrated social history of metamathematics, but one can be pieced together from the temporally ordered trio [Peckhaus 1992, Sieg 1999 and Menzler-Trott 2001]. In the early stages Hilbert based logic on the existence of a thought-source, a rather peculiar notion already found in Dedekind; Zermelo worked with truth-functions, but the place of logic in his set theory is modest. Compare [Peckhaus 1994].

dangerous for a bright young mathematician!'.[4] Somehow Newman continued to set questions for five of the six years that he was to remain at Cambridge before moving to Bletchley Park in 1942;[5] The questions for 1939 may have been set by Turing, who, presumably in resistance against Hardy's coolness, was invited to give a lecture course on foundations in the Lent term of 1939. He was asked to repeat it in 1940; but by then he also was at Bletchley Park.[6] But how had Newman got involved in logic in the first place?

3. Newman's way in to logic

Maxwell Hermann Alexander Neumann (1897-1984) was born in London in 1897 to a German father and an English mother. He gained a scholarship to St John's College Cambridge in 1915 and took Part I of the Mathematics Tripos in the following year. But carrying the surname 'Neumann' in Britain in the Great War was not a good idea; the family changed its surname to 'Newman', and Max had to leave his college until 1919, when he returned and completed Part II of the Tripos very well in 1921.

Then, very unusually, he spent much of the academic year 1922–1923 at Vienna University. He went with two other members of his college.

One was Lionel Penrose, who as a schoolboy had been interested in Russell's mathematical logic, and he specialised in traditional versions of logic as taught in the Moral Sciences Tripos. Then he became interested also in psychology, and wanted to meet Sigmund Freud and Karl Bühler and other psychologists in Vienna. He may have initiated the visit to Vienna; his family was wealthy enough to sustain it, especially as at that inflationary time British money would last a long time in Vienna.

The other was Rolf Gardiner, who was later active in organic farming and folk dancing, enthused for the Nazis [Moore-Colyer 2001], and was to be the father of the conductor Sir John Eliot Gardiner. His younger sister Margaret came along; she became an artist and a companion to the biologist Desmond Bernal. She recalled 'the still deeply impoverished town' of Vienna, where Penrose and Newman would walk side-by-side down the street playing a chess game in their heads [Gardiner 1988, 61-68].

Of Newman's contacts with the mathematicians in Vienna we have only a welcoming letter of July 1922 from ordinary professor Wilhelm Wirtinger;[7] but it seems clear that his experience of Viennese mathematics was decisive in changing the direction of his researches. His principal research interest was to become topology, which was *not* a speciality of British mathematics. By contrast, in Vienna some of Wirtinger's own work related to the topology of surfaces; in 1922 the University recruited Kurt Reidemeister, who was to become a specialist in combinatorial topology, like Newman himself; Leopold Vietoris was a junior staff member, and a student was Karl Menger (though then rather ill at the time and away from Vienna).

Most notably, ordinary professor Hans Hahn was not only a specialist in the topology of curves, and in real-variable mathematical analysis; he also regarded formal logic as both a research and as a teaching topic. In particular, while Newman was there he ran a preparatory seminar on 'algebra and logic', and in later years held two full seminars on *Principia mathematica*. In addition, he supervised doctoral student Kurt Gödel working on the completeness of the first-order functional calculus with identity, and as editor of the

[4] Newman's archive, Saint John's College Cambridge; thanks to David Anderson much of it is available in digital form at http://www.cdpa.co.uk/Newman/. Individual items are cited in the style 'NA, [box] a- [folder] b- [document] c'; here 2-12-3.

[5] A Mathematics Tripos course in 'logic' was launched in 1944 by S. W. P. Steen. The Moral Sciences Tripos continued to offer its long-running course on the more traditional parts of 'Logic'.

[6] On Turing's teaching see [Hodges 1983, 153, 157] and the Faculty Board minutes for 29 May 1939.

[7] The Wirtinger letter is at NA, 2-1-2.

Monatshefte für Mathematik und Physik published both that thesis and the sequel [1931] on the incompletability of first-order arithmetic (which was to be registered as Gödel's higher doctorate).

Hahn also engaged in philosophical debates. When he had studied at Vienna University from the mid 1890s to his higher doctorate in 1905 he had participated in some of the discussion groups that surrounded some chairs in the university. After teaching elsewhere for several years, he returned to Vienna University as a full professor of mathematics in 1921. During 1922 he led the move to appoint to the chair of natural philosophy the German physicist and philosopher Moritz Schlick; after arriving in 1923 Schlick created what was to be known as the 'Vienna Circle', with Hahn as a leading member.[8] Further, while the Circle had no agreed philosophy among all its members, Schlick, Hahn and later Carnap strongly advocated positivism and empiricism, acknowledging major influences from Ernst Mach (who had held that chair in the 1890s) and Russell.

4. After Vienna

After his return Newman developed as a (pioneer) British topologist, with a serious interest in logic and logic education and (as we shall soon see) a readiness to engage with Russell's philosophy; surely one sees heavy Viennese influences here, especially from Hahn. In 1923 he applied for a college fellowship. He submitted a paper [1923a] on the avoiding the axioms of choice in developing the theory of functions of a real variable that was published that year,[9] some unidentifiable discussion of solutions of Laplace's equation, and a long unpublished essay [1923b] in the philosophy of science that was completed in August. Its title, 'The foundations of mathematics from the standpoint of physics', could well have originated in a Viennese chat. Maybe he wrote some of it there; unfortunately the 161 folios do not contain any watermarks.

In this essay Newman took the world of idealised objects that was customary adopted in applied mathematics (smooth bodies, light strings, and so on) as 'certain ideals, or abstractions […] not applicable to those of real physical objects', and contrasted it with the world of real physical that one encounters and on which he wished to philosophise. He distinguished between these two kinds of philosophising by *the different logics that they used*. The idealisers would draw on the two-valued logic, for which he cited a recent metamathematical paper by Hilbert [1922] as a source; but those interested in real life would go to constructive logic, on which he cited papers by Brouwer [1918-1919] and Hermann Weyl [1921].

We see here Newman's notable readiness to admit logical pluralism, and to put logic*s* at the centre of the analysis of a philosophical problem; most unusual for a mathematician, and far more Viennese than Cantabrigian. His college referees, Ebenezer Cunningham and H. F. Baker, were not impressed by the essay but recommended the award of the Fellowship. He neither revised the essay nor seemed to seek its publication, although occasionally he alluded to its concerns; and it must be at least a major source of his recognition of the importance of logic*s*.

This essay built upon the awareness of logic that he must have gained at Cambridge from Penrose. That contact will have continued, for after Vienna Penrose wrote several manuscripts on mathematical logic, especially psychological aspects, in which he was influenced by Russell and also by Ludwig Wittgenstein's notion of tautology given in the recent *Tractatus logico-philosophicus* (1922). He worked on a doctoral dissertation on the psychology of mathematics, but then abandoned it.[10] From 1925 he studied for a degree in medicine at Cambridge, and became a distinguished geneticist, psychiatrist and statistician,

[8] On the Vienna Circle is see [Stadler 2001]; on Hahn see [Sigmund 1995].
[9] On the context see *passim* in [Montel and Rosenthal 1923] and [Medvedev 1991].
[10] In the Penrose Papers, University College London Archives, see especially boxes 20-21 and 26-28.

and also father of the mathematicians Oliver and Sir Roger Penrose [Harris 1973].

An occasion for Newman to exercise his logical and philosophical talents arose when he attended a set of philosophical lectures that Russell gave in Trinity College Cambridge in 1926. They went into a book on 'the analysis of matter' [Russell 1927]. Newman helped Russell to write two chapters, and when the book appeared he criticised its philosophical basis most acutely in [1928]; Russell accepted the criticisms, which stimulated Newman to write Russell two long letters on logic and on topology [Grattan-Guinness 2012b].

Newman continued to pioneer both topology and logic at Cambridge. Doubtless with topology in mind, in 1936, a year before sinking the foundations course, Hardy had proposed Newman as a Fellow of the Royal Society, with J. E. Littlewood as seconder, although Newman was no Hardy-Littlewood analyst; the election was made in 1939. Newman used the Society to support his logical cause. In 1950 he proposed Turing as a Fellow, seconded by Russell, the election being accepted in 1951; five years later he wrote the obituary [1955] of Turing. In 1966 Newman proposed and Russell seconded Gödel as Foreign Member, duly gained two years later.[11] In 1970 he was invited to be the obituarist of Russell, to be helped by A. J. Ayer, but he was not well enough to oblige. He died in 1984.

Among mathematicians who came to like logic, Newman is a very unusual case. The (sparse) evidence suggests two sources: Penrose's early interest, and the unusual mixture of mathematics, logic and philosophy in Vienna, which drew him also to topology. Thus he change directions; had he stayed in Cambridge in 1922-1923 he would have surely continued in the direction indicated by the paper on avoiding the axioms of choice, namely, Hardy-Littlewood mathematical analysis. But then his interest in logic could have waned (and in topology never have flowered), so that maybe no foundations course would have existed for budding Hardy-Littlewood mathematical analyst Turing to take and thereby to learn of the subjects of recursive functions and undecidability. Then the story of Bletchley Park and afterwards could have been very different; neither he nor this alternative Newman would have been the obvious choices to go there, nor would they have been as effective as they actually were. The way that things turned out in fact contains some strokes of luck!

Bibliography

Adams, J. F. 1985. 'Maxwell Herman Alexander Newman 7 February 1897 - 22 February 1984', *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, 31,* 436-452.

Aspray, W. 1991. 'Oswald Veblen and the origins of mathematical logic at Princeton', in T. Drucker (ed.), *Perspectives on the history of mathematical logic,* Boston (Birkhäuser), 54-70.

Bottazzini, U. 1986. *The higher calculus. A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass,* New York (Springer).

Gabbay, D. and Woods, J. 2004. (Eds.), *Greek, Indian and Arabic logic from Leibniz to Frege*, Amsterdam (Elsevier).

Gardiner, M. 1988. *A scatter of memories*, London (Free Association Books).

Gödel, K. 1931. 'Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme', *Monatshefte für Mathematik und Physik, 38*, 173-198. [Many reprs. and transs.]

Grattan-Guinness, I. 2000. *The search for mathematical roots, 1870-1940. Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton (Princeton University Press).

Grattan-Guinness, I. 2002. 'Re-interpreting " ": Kempe on multisets and Peirce on graphs, 1886-1905', *Transactions of the C. S. Peirce Society, 38*, 327-350.

Grattan-Guinness, I. 2011a. 'The reception of Gödel's 1931 incompletability theorems by mathematicians, and some logicians, up to the early 1960s', in M. Baaz, C. H.

[11] Information comes from Royal Society Archives, and NA, 2-15-10 to -13.

Papadimitriou, H. W. Putnam, D. S. Scott and C. L. Harper (eds.), *Kurt Gödel and the foundations of mathematics. Horizons of truth*, New York (Cambridge University Press), 55-74.

Grattan-Guinness, I. 2012a. 'Discovering the logician Max Newman (1897–1984)', in preparation.

Grattan-Guinness, I. 2012b. 'Logic, topology and physics: points of contact between Bertrand Russell and Max Newman', *Russell,* to appear.

Hallett, M. 1984. *Cantorian set theory and limitation of size*, Oxford (Clarendon Press).

Harris, H. 1973. 'Lionel Sharples Penrose. 1898-1972', *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, 19*, 521-561. [Repr. in *Journal of medical genetics, 11* (1974), 1-24.]

Hilbert, D. 1922. 'Die logischen Grundlagen der Mathematik', *Mathematische Annalen, 88,* 151-165. [Repr. in *Gesammelte Abhandlungen,* vol. 3, Berlin (Springer), 1935, 178-191.]

Hodges, A. 1983. *Alan Turing: the enigma*, London (Burnett Books and Hutchinson).

Jahnke, N. H. 2003. (Ed.), *A history of analysis,* Providence, R.I. (American Mathematical Society).

Kleene, S. C. 1952. *Introduction to metamathematics*, Amsterdam (North Holland) and Groningen (van Nostrand).

Medvedev, F. A. 1991. *Scenes from the history of real functions* (trans. R. Cooke), Basel (Birkhäuser).

Menzler-Trott, E. 2001. *Gentzens Problem. Mathematische Logik im nationalsozialistischen Deutschland*, Basel (Birkhäuser). [English ed.: *Logic's lost genius: the life of Gerhard Gentzen*, [Providence] (American Mathematical Society and London Mathematical Society), 2007.]

Montel, P. and Rosenthal, A. 1923. 'Integration und Differentiation', in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* Leipzig (Teubner), vol. 2, pt. C, 1031-1135 (article IIC9b).

Moore, G. H. 1982. *Zermelo's axiom of choice*, New York (Springer).

Moore-Colyer, R. J. 2001. 'Rolf Gardiner, English patriot and the Council for the Church and Countryside', *The agricultural history review, 49,* 187-209.

Newman, M. H. A. 1923a. 'On approximate continuity', *Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 23*, 1-18.

Newman, M. H. A. 1923b. 'The foundations of mathematics from the standpoint of physics', manuscript, Saint John's College Archives, item F 33.1.

Newman, M. H. A. 1928. 'Mr. Russell's "Causal theory of perception"', *Mind, new ser., 37*, 137-148.

Newman, M. H. A. 1942. 'On theories with a combinatorial definition of "equivalence"', *Annals of mathematics, 43*, 223-243.

Newman, M. H. A. 1943. 'Stratified systems of logic', *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 39*, 69-83.

Newman, M. H. A. 1955. 'Alan Mathison Turing', *Biographical memoirs of Fellows of the Royal Society, 1*, 253-263.

Newman, M. H. A. and Turing, A. 1943. 'A formal theorem in Church's theory of types', *Journal of symbolic logic, 7*, 28-33.

Newman, M. H. A. 1955. 'Alan Mathison Turing', *Biographical memoirs of Fellows of the Royal Society, 1*, 253-263.

Peckhaus, V. 1992. 'Hilbert, Zermelo und die Institutionalisierung der mathematischen Logik in Deutschland', *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte, 15,* 27-38.

Peckhaus, V. 1994. 'Logic in transition: the logical calculi of Hilbert (1905) and Zermelo (1908)', in D. Prawitz and D. Westerståhl (eds.), *Logic and philosophy of science in Uppsala*, Dordrecht (Kluwer), 311-323.

Roero, C. S. and Luciano, E. 2010. 'La scuola di Giuseppe Peano', in Roero (ed.), *Peano e la sua scuola. Fra matematica, logica e interlingua. Atti del Congresso internazionale di studi (Torino, 6-7 ottobre 2008)*, Turin (Deputazione Subalpina di Storia Patria), xi-xviii, 1-212.

Rosenthal, A. 1923. (Ed. and trans.), 'Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen', in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* Leipzig (Teubner), vol. 2, pt. C, 851-1187 (article IIC9).

Russell, B. A. W. 1927. *The analysis of matter*, London (Kegan, Paul).

Sieg, W. 1999. 'Hilbert's programs: 1917-1922', *Bulletin of symbolic logic, 5*, 1-44.

Sigmund, K. 1995. 'A philosopher's mathematician: Hans Hahn and the Vienna Circle', *The mathematical intelligencer, 17*, no. 4, 16-19.

Stadler, F. 2001. *The Vienna Circle,* Vienna and New York (Springer).

Tarski, A. 1941. *Introduction to logic and to the methodology of the deductive sciences* (trans. O. Helmer), 1st ed., New York (Oxford University Press).

Turing, A. M. 1936. 'On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem', *Proceedings of the London Mathematical Society, (2)42,* 230-265. [Various reprs. and transs.].

Weyl, C. H. H. 1921. 'Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik', *Mathematische Zeitschrift, 10,* 39-79. [Repr. in *Gesammelte Abhandlungen,* vol. 2, Berlin (Springer), 1968, 143-180.]

Unity in Major Themes – Convergence vs. Arbitrariness in the Development of Mathematics[1]

Bernhelm Booß-Bavnbek (Roskilde University, Denmark)[2] and

Philip J. Davis (Brown University, Providence, Rhode Island, U.S.A.)[3]

To the memory of **Gian-Carlo Rota** *(April 27, 1932 – April 18, 1999)*

Abstract. We describe and explain the desire, common among mathematicians, both for unity and independence in its major themes. In the dialogue that follows, we express our spontaneous and considered judgment and reservations; by contrasting the development of mathematics as a goal-driven process as opposed to one that often seems to possess considerable arbitrariness.

[Phil] CREDO 1

I don't believe in the unity of mathematics and think that as time goes on the subject called mathematics becomes less and less unified. The Unity of Mathematics is a dream, a chimera, an ideal that doesn't exist:

- The *2010 Mathematics Subject Classification* (*MSC*) lists almost a hundred mathematical subjects. To some extent, each subject has its own techniques, intellectual resources and devotees. While there may, indeed, be some connections between e.g., potential theory and non-associative algebras and collaboration between experts that indicate a certain degree of unity and coherence in the field of mathematics I find the lack of unity more strikingly located elsewhere.
- *Diachronic and cross cultural disunity*. Written mathematics is easily 4000 years old. It has been created by people and has served for people a variety of purposes. A mathematician lives in a sub-culture at a certain time and place. A piece of mathematics does not exist only in a sequence of special symbols because the naked symbols are essentially uninterpretable. The symbols are embedded in a cloud of knowledge,

[1] Contribution to the XI Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, Organiser: Christa Binder, Topic: *Der Blick aufs Ganze. Gibt es große Linien in der Entwicklung der Mathematik*? Venue: Miesenbach, 22-28 April, 2012

[2] Email: <booss@ruc.dk>

[3] Email: <philip_davis@brown.edu>

meanings, associations, experiences, imaginations that derive from the *particularities* of time, place, person and the enveloping society.

- *Pythagoras* asserts that 3 is the first male number. In certain Christian theologies it is the number of the Godhead. If in Indian numerology the numbers 1,10,19, and 28 are *ruled by the sun*, the meaning of and the belief in those words may escape my readers. Historians of mathematics often explain a piece of ancient mathematics in terms of contemporary concepts. This may be anticipated because of the difficulty and ultimate impossibility, noted by numerous authors, particularly by ELEANOR ROBSON[4], of entering into the heads of the Past.[5]
- *Semantic ambiguity*. I may write down the sequence x╚∩σ∑≡ 6 and claim this is a piece of mathematics. But this claim cannot be substantiated on the basis alone of the mere symbols. To provide meaning, every mathematical statement must be embedded in a narrative in some natural language (English, German, et alii.) Furthermore, its significance as mathematics cannot be established if its knowledge is limited to one and only one person. (Private revelation.)
- *Semiotic ambiguity*. Can it be determined when two mathematical statements phrased differently, are asserting the same thing? BARRY MAZUR[6] has begun a discussion of this question.
- *Non-acceptance or doubts about certain theories put forth by professional mathematicians*. Examples are easily found. Originally there was one formal geometry: that of EUCLID. After BOLYAI and LOBACHEVSKII there were three; and after RIEMANN an infinity of geometries. ZERMELO did not believe GÖDEL's proof of the Incompleteness Theorem. For GEORGE BERKELEY: Infinitesimals were the *ghosts of departed quantities*. The skepticism of KRONECKER, POINCARÉ, ZERMELO, E. PICARD, BROUWER, HERMANN WEYL, WITTGENSTEIN, ERRETT BISHOPP ET ALII regarding the concepts of CANTOR.
- A well known quote from the great applied mathematician RICHARD HAMMING sums it up:

---

[4] Eleanor Robson, *Mathematics in Ancient Iraq: A Social History*, Princeton and Oxford: Oxford University Press, 2008, xxvii + 472 pp., ISBN: 978-0-691-09182-2. On the other hand, Robson is fully aware of a close connection between the "algebra" her Babylonians talk about and what we can find in EUCLID's *Elements II* and in later algebra of equations.

[5] See André Weil, History of mathematics: why and how, Plenary Lecture, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki, 1978, pp. 227-236. He was most outspoken in his demand to explain a piece of ancient mathematics in terms of contemporary concepts, while at the same time warning against *anachronisms*: "An understanding in depth of the mathematics of any given period is hardly ever to be achieved without knowledge extending far beyond its ostensible subject-matter. More often than not, what makes it interesting is precisely the early occurrence of concepts and methods destined to emerge only later into the conscious mind of mathematicians; the historian's task is to disengage them and trace their influence or lack of influence on subsequent developments." Ironically, Weil's attitude was anticipated 130 years earlier by a German thinker: "The so-called historical presentation of development is founded, as a rule, on the fact that the latest form regards the previous ones as steps leading up to itself", Karl Marx, *Outline of the Critique of Political Economy* (*Grundrisse*), 1857-61, Penguin 1973, in elaborating his famous dictum *Human anatomy is a key to the anatomy of the ape*. See also the ontogenetic dilemma of unity: Nobody can think like an embryo. We can only describe our "adult" stage, even though the embryo is a preliminary stage of an "adult" stage.

[6] Barry Mazur, WHAT IS... a motive?, *Notices of the AMS* **51**/10 (2004), 1214-1216.

> I know that the great HILBERT said *We shall not be driven out of the paradise that CANTOR has created for us*, and I reply *I see no reason for walking in*.

- *Philosophic ambiguity*. Prior to the end of the 19th Century there was one philosophy of mathematics: that of Platonism. Now there are easily five distinguishable philosophies: together with variations that exhibit the Freudian *narcissism of slight differences*.

- *And yet….* There is something that is called mathematics. The history of the wool trade in 14th Century Brabant, cited by IBSEN, is not mathematics. *Sag' mir: Wo versteckt sich die Einheit der Mathematik?*

[Phil] CREDO 2

- I believe that mathematics cannot have foundations and, in fact, doesn't need them.

[Bernhelm] There is a general human longing for unity among great themes. More specifically there is a longing for them among mathematicians

I certainly see the points you make and to some extent I agree with you. Take, e.g., the *Duhem–Quine holism* thesis so popular in philosophy of science: The Thesis bids us to keep all things in view and argues strongly against the validation of single statements in isolation from all (!) possible connections. You and I have always agreed that, mildly speaking, these claims are utterly unrealistic. In mathematics and physics, the related discussions of the *Vienna Circle* have faded during the past 90 years.

However, as human beings, we need orientation and continuity. Regarding mathematics, perhaps CHARLES SANDERS PEIRCE was the philosopher who struggled most with the epistemological concepts of unity vs. independence. Basically, he pointed to the anthropogenic character of our thought concepts developed through hundred of thousands years, namely, our experience with procuring food and shelter and gaining a mate. These innate capacities should, however, be strengthened by a logically controlled abandonment of common sense views when confronted with phenomena beyond the shared human phylogenetic experiences. I believe that PEIRCE would like our *Blick aufs Ganze,* but also ÁGNES HELLER[7] and the late GIAN-CARLO ROTA[8] acknowledge a specific human habit when confronted with a variety of phenomena, namely a striving for expla-

[7] Ágnes Heller, Can the unity of sciences be considered as the norm of sciences? In: Helga Novotny and Hilary Rose (eds.), *Counter-Movements in the Sciences – The Sociology of the Alternatives to Big Sciences*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, 1979, 57-66.
[8] Gian-Carlo Rota, *Indiscrete Thoughts*, Birkhäuser Boston, 1996.

nation and meaning and the desire to memorize, communicate and reconsider the findings.

This is why we have language, and though *human language* has throughout our history become both more specific and more diversified, nevertheless, there are great linguistic themes and, as against WHORF's Hypothesis that the structure of language affects the way we conceptualize things, there is a capacity for expressing a large variety of human observations and feelings in a shared way. Over the short time span of only 10,000 years, as archeologists tell us, dogs have devolved from their wolf ancestors into a remarkable variety of breeds; but in spite of all their current differences they still share characteristic features.

For me, the *power of mathematical formalisms*, can be derived from the capacity of formulae

- to recall and communicate condensed experiences and
- to suggest imaginative alternative approaches to already existing practices.

To exercise this cognitive transfer, the mathematical practitioner needs to discern and avail him/herself of the major themes in mathematics. Unity, the perception of unity and the search for unity, is constitutive for mathematics as a scientific subject.

[Bernhelm]

Here is my view of the simultaneous tendencies of *specialization* (*diversification*) and *generalization* (*unification)* in mathematics:

1. Well-intended, but less well founded educational initiatives of the 1960s that centered elementary and advanced math teaching around sets and structures were readily overcome after 10 years of having been introduced. Math teachers on all levels rediscovered the challenges of teaching concrete mathematics. *Generalized Abstract Nonsense – GAN* -- was abolished.
2. Math research has shown a remarkable and powerful counter-movement against excessive generalizations. I mention here only four cases all of which are related to my own work in mathematics: (1) Returning to and the reconsideration of *generic cases* instead of striving for the greatest generality. (2) Orientation towards *algorithmic questions* under limited conditions instead of stating general non-viability. (3) Focus on *error quantities* such as the index, the eta-invariant, the spectral flow, the Maslov index. (4) Biology of *focused* systems, e.g., of a single cell instead of whole-body modeling holistically perceived.
3. Some university mathematicians experience such great pressure to publish, to plagiarize or blindly to resow in the same strip, that they feel they have not the time to think about the meaning of their work. Some are apt to inculcate the same snob feeling of high-standard accomplishment to their classes. This tendency is supported by a hierarchical division among mathematics in which a very few are the *architects*, full of

seminal visions, and the many merely maintain the ground by filling in details or at best doing some *plumbing*.

4. In view of the experiences with the New Math, a threat to the intellectual unity of mathematics arises from *declamations* of unity that reduces mathematical dissemination to shallow definitions (e.g., vector spaces, groups, limits) hoping to create meaningful essentials but in the absence of meaningful applications.[9]

[Phil]

A propos of *Major Themes,* a quotation from TOCQUEVILLE struck me as pertinent. Of course, TOCQUEVILLE was writing about systems of government and not about mathematics, but I think it might elicit a response from thoughtful mathematicians:

> Men of democratic centuries like general ideas because they exempt them from studying particular cases; they contain, if I can express myself so, many things in a small volume and give out a large product in a little time. When, therefore, after an inattentive and brief examination, they believe they perceive a common relation among certain objects, they do not push their research further, and without examining in detail how these various objects resemble each other or differ, they hasten to arrange them under the same formula in order to get past them.[10]

[Bernhelm]

I like the moderate conservatism of the preceding quote. JACOB BURCKHARDT coined the phrase *terribles simplificateurs*. A German proverb of uncertain origin states *Der Teufel steckt im Detail – The devil is in the details*. So look carefully! Recently, a professor of musicology at Aarhus University pointed to a conflict between knowledge and theory, deploring that her students were much better at reading BOURDIEU than reading

[9] A model for such a well-intended and well-written, but somewhat misleading advocacy of *unifying and generalizing concepts* can be found in the widely read and cited Jean-Luc Dorier, Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics, *Educational Studies in Mathematics* **29** (1995), 175-197. The author's favorite example of a unifying and generalizing concept is *Linear Algebra.* Based on an extensive historical study of a single aspect of the genesis of the abstract concept of a vector space (for J-L Dorier, it is only the concept of space and its algebraic formalization), he arrives at an epistemological analysis and an analysis of teaching sequences with many interesting observations, but where the core concept of linearity, as most mathematicians will see it, namely the concepts of eigenvalues and spectrum, are absent. For contrast, see Peter D. Lax, *Linear Algebra*, Wiley 1997, where he frankly admits the rather dullness of the axioms of linear algebra and then continues: "It is astonishing that on such slender foundations an elaborate structure can be built, with romanesque, gothic, and baroque aspects. It is even more astounding that linear algebra has not only the right theorems but the right language for many mathematical topics, including applications of mathematics." (l.c., p. 1).

[10] Alexis de Tocqueville, *De la démocratie en Amerique* (1835/1840)—Democracy in America. It was published in two volumes, the first in 1835, the second in 1840. Various English language versions. The French original and an English translation (by Henry Reeve) are on the web in public domain: http://fr.wikisource.org/wiki/De_la_d%C3%A9mocratie_en_Am%C3%A9rique and http://ebooks.adelaide.edu.au/t/tocqueville/alexis/democracy/complete.html

notes. BERTOLT BRECHT's Herr K. has this wonderful remark about the problem of clipping a laurel hedge into a ball: *Well, there is the ball now, but where is the laurel?*
Indeed, there are good reasons to be alarmed whenever we are confronted with *Große Linien* and *Der Blick aufs Ganze*; and where does that leave us in our debate about the *Große Linien in der Entwicklung der Mathematik*?

[Phil]

Here are some of the turning points in the history of mathematics that have had consequences in the philosophy of mathematics:

1. Pythagorean Theorem. Sqrt (2). (Existence)
2. EUCLID's *Elements*. (Axiomatics. Idealization)
3. Algebraization of Arithmetic circa 15th C. (Formalization)
4. Discovery of the complex numbers. (Semantics)
5. Algebraization of Geometry. DESCARTES. (Downgrading the visual)
6. Invention of Calculus. NEWTON, LEIBNIZ. (Existence of infinitesimals)
7. Algebra goes abstract. GALOIS, HAMILTON. (Formalization)
8. Mathematical logic. BOOLE, FREGE, RUSSELL, WHITEHEAD. (Logicism)
9. Non-Euclidean geometry. BOLYAI, LOBACHEVSKII. (Conflict between empiricism and axiomatics.)
10. Axiomatization of the real numbers and of analysis. CAUCHY, WEIERSTRASS, et al. (Formalization.)
11. Cantorian set theory. (Existence)
12. Space goes abstract. RIEMANN, KLEIN, PEANO, HILBERT. (Formalism, Degradation of the visual)
13. HILBERT's Program. GÖDEL's Incompleteness Theorem. (Destruction of Logicism)
14. Electronic digital computing machines and the subsequent deep mathematizations of all aspects of society. Change in mathematical research methodologies. (Preeminence of the discrete over the continuous)
15. Increasing relevance of stochasticism. (Ontology)

[Bernhelm]

In my view, a new type of unity emerged in the *Renaissance* with the dissolution of the sensus communis, the vanishing of the basically common language of επιστήμη and the subsequent universalization of the method of the *mathematization of the natural sciences*.

Just for a few seconds, let me play on the common pride of mathematicians regarding GALILEI's famous dictum:

> La filosofia é scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si puó intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali é scritto. Egli é scritto in

> lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi é impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi é un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.[11]

In ÁGNES HELLER's characterization:

> So it was the new (symbolic) language of natural sciences that *became* the *sole sensus communis* in an age of dissolution of integrations, communities, other types of *sensus communis*, the sole scientific language whose norm it is that it could be spoken by every one and in an equal manner. This language has developed in an age in which the universal concept of humanity as abstracted from religion, race and nation was born.[12]

Today we rightly consider the *Glasperlenspiel* of mathematicians; the mathematization of the sciences and of technology; and a sober approach to international relations *more geometrico* (GROTIUS) for a triumph of humanity and not a regression.

Insisting on human value and meaning. Skeptical voices, however, appeared on the scene in parallel with the emphasis on unity. There is a considerable price, they argued, attached to this new common language, to this new conception of objectivity and science. In HELLER's words, it has to "pay the price of being abstracted from everything that is human, for the ever given societality, from value ideas of moral and non-moral type". She credits in particular KANT and HUSSERL for delineating the limits of natural sciences and emphasizes HUSSERL's thesis according to which "the emergence of modern natural sciences is an historical achievement; consequently their world-constitution is reversible".

Similarly, GIAN-CARLO ROTA, while recognizing the positive cultural and technological contributions of mathematics and mathematization fought a life-long battle against the *pernicious influence of mathematical thinking on philosophy* as exemplified by analytical philosophy, The outlines of the new meaning-oriented unity are not yet clearly drawn. The dominant philosophy of mathematics is still moving in the realm of GALILEO GALILEI's quote, as witnessed by the contributions to a conference on *The Unity of Mathematics*, held in 2003 in honor of I.M. GELFAND's 90th birthday.[13] The late GELFAND himself, however, called for greater awareness of ongoing changes of the content

---

[11] Galileo Galilei, *Il Saggiatore, Lettere, Sidereus Nuncius, Trattato di fortificazione*, in: *Opere*, a cura di Fernando Flora, Riccardo Ricciardi Editore, 1953. Here: Il Saggiatore, cap. 6. In English: ``Philosophy is written in that great book which ever lies before our eyes — I mean the universe — but we cannot understand it if we do not first learn the language and grasp the symbols, in which it is written. This book is written in the mathematical language, and the symbols are triangles, circles and other geometrical figures, without whose help it is impossible to comprehend a single word of it; without which one wanders in vain through a dark labyrinth." *The Assayer* (1623), as translated by Thomas Salusbury (1661), p. 178, as quoted in *The Metaphysical Foundations of Modern Science* (2003) by Edwin Arthur Burtt, p. 75.

[12] L.c., p. 59.

[13] P. Etingof, V. Retakh and I.M. Singer (eds.), *The Unity of Mathematics - In Honor of the Ninetieth Birthday of I.M.Gelfand*, Birkhäuser, Boston, 2006, XXII + 631 pages, ISBN-10 0-8176-4076-2, e-IBSN 0-8176-4467-9.

and role of mathematics and insisted on the distinction between meaningful and meaningless abstractions and constructions:

> We have a *perestroika* in our time. We have computers which can do everything. We are not obliged to be bound by two operations - addition and multiplication. We also have a lot of other tools. I am sure that in 10 to 15 years mathematics will be absolutely different from what it was before.[14]

And

> An important side of mathematics is that it is an adequate language for different areas: physics, engineering, biology. Here, the most important word is adequate language. We have adequate and nonadequate languages. I can give you examples of adequate and nonadequate languages. For example, to use quantum mechanics in biology is not an adequate language, but to use mathematics in studying gene sequences is an adequate language.

The emergence of a new type of unity, oriented differently, may be sensed in the outspoken ethical stand of M.F. ATIYAH, another exponent of the classical GALILEAN quote. Firstly, as president of the Royal Society and later as president of the Pugwash nuclear disarmament movement, he blamed the development and the consequent degradation of much mathematics on its applications to war and to juke boxes.

[Bernhelm] Promising offshoots and developments

There are clearly distinguishable mainstreams in mathematics. The active research mathematician has continuously to make a choice as to what are the prominent and promising fields to enter into or to rely on their own originality and inspiration. The difficult and often narrow problem of choice goes back to LAGRANGE who expressed very definitely his conviction that now all what could be solved in mathematics had been solved while at the same time opening wide fields of new mathematical research.[15]

In 1933, NORBERT WIENER characterized the *hierarchy* of mathematical objects:[16]

> In the hierarchy of branches of mathematics, certain points are recognizable where there is a definite transition from one level of abstraction to a higher level. The first level of mathematical abstraction leads us to the concept of the individual numbers, as indicated for example by the Arabic numerals, without as yet any undetermined symbol representing some unspecified number. This is the stage of elementary arithmetic; in algebra we use undetermined literal symbols, but consider only individual specified combinations of these symbols. The next stage is

[14] L.c., p.xiv.

[15] ”There is but one universe, and it can happen to but one man in the world's history to be the interpreter of its laws.” That is what Lagrange is quoted to have said about Newton, according to Th. Kuhn, The function of dogma in scientific research, in: A.C. Crombie (ed.), *Scientific Change*, Heinemann, New York, 1963, pp. 347-369, here p. 353. Kuhn's own comment: “In receiving a paradigm the scientific community commits itself, consciously or not, to the view that the fundamental problems there resolved have, in fact, been solved once and for all.”

[16] Norbert Wiener, *The Fourier Integral and Certain of its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1933, p. 1.

> that of analysis, and its fundamental notion is that of the arbitrary dependence of one number on another or of several others -- the function. Still more sophisticated is that branch of mathematics in which the elementary concept is that of the transformation of one function into another, or, as it is also known, the operator.

Today, we might be inclined rather to make long lists of promising developments and major themes abandoned to illustrate the nature of contemporary productivity[17]. Since Lagrange's pronouncement of the victorious end of mathematics and its putative revitalization, there has been permanent and productive tension between what has been accomplished and what new theoretical insights might lead to new fields. Every time a question seemed to be settled and a new fact established, new concepts have arisen on a higher level of abstraction. BØRGE JESSEN once quoted to me a remark of HARALD BOHR that all developments require and receive consolidation: for example, invariants were consolidated in groups, equations in operator algebras, statistics in probability, optimization in functionals. Instead of the much feared atomization of mathematics, a world of cross connections has been discovered and elaborated. With hindsight it is incomprehensible why JOHN VON NEUMANN declined the invitation to the 1954 Amsterdam ICM to give a HILBERT style talk that would present a list of the most important and as yet unsolved mathematical problems. On the basis of his work for the US Atomic Energy Commission (ACE) he would have been the ideal witness for the ever and ever more manifest unity of mathematics. To me it seems that only regards to military security prevented him of demonstrating that it had become easier to oversee mathematics since HILBERT's 1900 and not more difficult and certainly not impossible, as VON NEUMANN claimed in his famous letter.

Underlying all specializations and generalizations, there is one dominant theme in the development of mathematics, namely, striving for meaning: for human meaning. Such meaning may be found in many directions, aesthetic, cognitive or utilitarian. To me, when all has been said, the search for, the discovery and the construction of meaning establish a kind of unity within mathematics.

[Phil] The search for *Unity within Diversity* as a never ending process

There is certainly unity within mathematics. The Brown University catalog lists 50 different courses under one heading: Mathematics. Mathematicians of the world gather together every four years. On the other hand, Applied Math at Brown split off from Pure Math, and Computer Science split off from Applied Math.

I think that the phenomenon we are dealing with goes under the name of *Unity within Diversity*. This is a vast topic that spans all intellectual disciplines (Google the italicised phrase!) and the search for such unity within diversity is a never ending process.

[17] See Philip J. Davis, The rise, fall, and possible transfiguration of triangle geometry: A mini-history, *The American Mathematical Monthly* **102**/3 (March 1995), 204-214.

Historical meaning for a controversial mathematical operation

Tercio Girelli Kill
Federal University of Espírito Santo - Brazil

Circe Mary Silva da Silva
Federal University of Espírito Santo - Brazil

Textbooks are important historical sources for those wishing to investigate forms assumed by school mathematics throughout the ages. In a range of just over one hundred years, from mid-nineteenth century, it is possible to identify at least three periods in which the Brazilian educational publications showed marked characteristics and connected to its time. In the first group are the segmented productions of arithmetic, algebra and geometry; in the intermediate group are the mathematical publications, resulting from the merger of the subjects of arithmetic, algebra and geometry, and finally the books of modern mathematics. Each of these groups carried conceptions concerning intrinsic approaches, methods, concepts and representations. However, not even in books belonging to the same period was there conceptual consensus. This is what one finds, for example, when we analyze the different conceptions externalized by authors and teachers of mathematics concerning the division of a nonzero number by zero. The aim of this study is to investigate, among some of the authors who experienced these times of arithmetic, algebra and geometry, the meanings attributed to the relation $a / 0$, with $a \neq 0$.

The importance of the authors for their time, the circulation of their works and reference institutions where they taught were the necessary criteria but not sufficient, so that their conceptions could be considered in this text. Bloch (2001) warned us that "no object has movement in human society, except by the meaning that men attribute to it, and those are questions that affect the objects and not the opposite" (p. 8). In this way, besides the relevance of the authors, the traces that point out their views, on the relationship $a / 0$, should have survived through time.

The period of timed herein analyzed is long, it begins in 1852 with the first publications by Christiano Ottoni and extends until the first decades of the twentieth century. In this range, and more specifically in 1889, the country goes from a monarchical political system to Republican. In the 1850s, the education system still lacked an organization and there were few secondary schools in Brazil. Likewise, the publication of textbooks by Brazilian authors was still in its infancy. These authors, in general, teachers of secondary and upper schools exercised other professions, such as military engineers, politicians or clerics (SILVA, 2000). The strong foreign influence was very present, even with the arrival of French, Portuguese and Italians who brought to the teaching their experiences and much of their culture. Among the authors analyzed, two are found dedicated to the teaching of mathematics and had a significant role in the introduction of modern ideas and content for Brazilian education.

The Books of algebra by Professor Christiano Ottoni or compilations as he himself stated, served as references to well-known educational institutions for a long time. In the education programs of the Colégio Pedro II in the year 1856, the books of Arithmetic, Algebra, Geometry and Trigonometry are listed as the sole reference to their disciplines and continued in the programs for the years 1858 and 1862 (VECHIA; LORENZ, 1998). The book "Elementos de Álgebra", compiled by Ottoni has its first edition dated 1852. The work is based on the publication "Eléments d'algèbre" of Louis Pierre Marie Bourdon, which had been published in accordance with the programs of the Ecole Polytechnique in Paris. For the present study, we used a copy of the 4th edition of the year 1879, in which the meaning for the relation a / 0 is emblematic: "The infinite is presented also by the signal ∞, so that a smaller amount than any magnitude given or 0, can also be represented by a / ∞. Thus, a / 0 = ∞, a / ∞ = 0. " (OTTONI, 1879, p.90-91, emphasis by the author).

The way Ottoni conceived the division of a non-zero number by zero was also shared by other authors of textbooks of later times, with their respective peculiarities. One of these authors was the Portuguese author Jose Adeline Serrasqueiro (1835 -?). The books of Serrasqueiro gain space in the Brazilian educational scenario from 1891 and on, when the works of arithmetic and algebra are considered as indicated for teaching programs at the Colégio Pedro II (National Gymnasium). Born in Castelo Branco on the date of 12/22/1835, he had a Bachelor's Degree in Medicine and Philosophy from the University of Coimbra, an institution in which he got great prominence as a student. He taught mathematics at the Lycée de Coimbra.

The first book devoted to mathematics, published by the Portuguese José Adelino Serrasqueiro, was the Tratado de Arithmética in 1869. The publications by Serrasqueiro were probably based on the books of the Frenchman Joseph Louis François Bertrand. The collection of Serrasqueiro for secondary education was completed in the years 1878 and 1879 with the publication of Tratados de Álgebra e Geometria, respectively. The work discussed was the Treaty of Elementary Algebra as part of the 6th edition of 1893. When interpreting symbol types Serrasqueiro (1893) writes:

> Suppose that n takes decreasing values 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, the broken value m/n will take increasing values (...). This is the reason why the limit value m/0 is given the name of infinite value, because it is larger than any given magnitude. To express the infinite one employs the signal is ∞, and thus we have $m/0 = \infty$. (P. 91-92)

The author takes decreasing numerical values for the denominator, directing the student to the conclusion that the smaller is the denominator, with the numerator kept constant, the higher the resultant value of "the broken number". Moreover, there exists a mention of terms like "limit" and "tends to…" that indicates, at least in terms of nomenclature, a kind of advent of what we know in our times as a theory of limits.

The works of another Portuguese author Antonio Bandeira Trajano (1843-1921), are not listed as recommended by the curricula of the College of Pedro II, but acquire notoriety through the their adoption and retention in primary and secondary education levels[1]. Trajano was born in Portugal in the town of Vila Pouca de Aguiar on 30/08/1843. He arrived in Brazil in 1859, and was a founder of the Presbyterian Church of São Paulo. He taught geography and arithmetic in schools of the Presbyterian churches of Sao Paulo and Rio de Janeiro and was ordained priest in 1875. In 1877 he assumed the post of professor of mathematics at the American School of Sao Paulo.

“A Álgebra Elementar” of Antonio Trajano is represented in this study by a copy of the fifth edition, dated 1905. With respect to "preparing the ground" for a later approach of the so-called divisions by zero, he warns:

> The word infinite has several meanings, depending on the sense in which it is taken. In algebra, it has a particular meaning that can not be easily understood unless we have a clear idea of its application. It is appropriate to first study the case in which the term is applied, and then easily understand that the definition which is given to it in the algebraic sense. (TRAJANO, 1905, p. 114)

The algebraic sense alluded to by Trajano is exposed through the adoption of very small number values (one millionth) for a division, whose dividend is set to give the conclusion that: "And if the divisor goes down to zero, with valueless limit, the quotient

[1] According to Valente (1999) some works of Trajano dated 1879 and 1880 served as a reference up to mid-twentieth century.

will move up to the extreme opposite which is infinite, and becomes an *infinite value* "(idem, p. 114). The relation a / 0 is taken as a symbol for infinity:

> To express this quotient in algebra, one employs the symbol ∞ called infinite. So that it reads: a/0 = ∞: The quantity to be divided by zero equals infinity. In Algebra, therefore, an infinite amount or value, means a magnitude higher than any other remarkable quantity of the same species. (Ibid, p. 114-115)

The author refers exclusively to algebra to elaborate a division of a quantity or value number by zero as symbol of the infinite. Moreover, he proclaims a schism between the mathematical language that accepts the infinite as a possible result for equations and other situations, and a common language that interprets the infinite as impossibility.

The relation a / 0 = ∞ was found and taken in a symbolic form in the books of three major authors who have considerably influenced the Brazilian mathematics education. However, another question comes to attention: Was such a fact a consensus among the teachers of the time?

A backlash to the representation A / 0 = ∞, occurs publicly in the year 1863 with the publication of the article "Notas sobre o emprego do infinito no ensino das mathematicas elementares (Notes on the use of infinity in teaching elementary mathematics)" by Professor Américo Monteiro de Barros[2]. Specifically with respect to the A / 0 = ∞ he comments:

> [...] cannot be obtained for the unknown value a value of the form A / 0, unless coming from a false hypothesis, thus consisting as having been considered as possible a substitution and a division that were not. Warned by the indicating signal of an operation not only inexcutable as well as unintelligible one must rectify the starting hypothesis and there is no other direct and proper meaning to assign to the symbol A / 0 other than the impossibility. Would this not be better than to leave one to suppose that a zero repeated in infinite number of times can take all sorts of values? (P.13)

There exist records indicating that the controversies over the division by zero still persisted in the first decades of the twentieth century. An opinion of Professor Joaquim Inacio Almeida Lisbôa from Colegio Pedro II, about the books of the Professor also of the Colegio Pedro II, Arthur Thiré[3] also treated this question:

[2] According to Silva (2011). Professor Barros was from the state of Maranhão and taught Political Economy, Statistics and Principles of Administrative Law at the Escola Central, initially as a substitute professor and later as full professor.

[3] Thiré was born in Caen in 1853 and devoted his studies to Higher Mathematics and Mine Engineering at the Escola de Minas in Paris. He arrived in Brazil in 1878, invited by the Emperor D. Pedro II, to assume the chair of Applied Mechanics in the Escola de Minas of Ouro Preto. He taught at several educational institutions, including Colegio Pedro II, from 1910 until 1924.

> We do not know the reasons Mr. Thiré had to state (p. 190) it is obvious that one cannot divide a number by zero. However, this division leads us to the notion of a number that is greater than any other, and the infinite is most often a perfectly acceptable solution (LISBOA, THIENGO cited, p. 179).

The book of algebra of Thiré (1917) indicates that he apparently attributed another meaning for divisions by zero in the context of 1st degree equations, when compared to Ottoni´s book:

> This quotient b / 0, as we have seen, has no meaning by itself, because one can not comprehend what is a division of a number by zero. This form of division b / 0 of the value of x, when there is an impossibility. This seems to indicate that, when the value of x, in solving the equation appears in the form b / 0, the symbol of impossibility b / 0 is the sign that there is no solution (p.169-170).

The work of Thiré (1917) already shows some differences in relation to others. Such a fact can be interpreted in accordance with the contributions of Choppin (2004): "The authors of the textbooks are not mere spectators of their time: they claim another status, that of an agent" (p.557). The action of Thiré, specific to the case of division by zero, is directed towards breaking a current reality within the textbooks of that time. To Choppin (2004, p.557) there lies the interest of the historian, that is, in reflecting on the "intention of the authors." Thiré´s strategy to promote a change of mind was not so radical. As "observation" in the following pages he points to another possible interpretation of the "symbols of the impossibility b / 0." After an intuitive addressing to the question, by assigning positive values to the increasingly smaller denominator, he concludes: "It is also said that the relation b / a takes an infinite value when a = 0. The expression b / 0 is called the symbol of infinity, and is conventionally represented by the sign [...] that has the shape of the number 8 lying down b / 0 = ∞ (p. 172). "

A first incursion through the teaching textbook which make up this analysis suggests some interesting clues. The division of a non-zero number by zero was the object of public disagreement between teachers who expressed their opinions in favor of the infinite, as a result, or in favor of the impossibility to solve the issue. The dialogue with the historical witnesses reveals something about the dynamic process that is inherent to the development of human thought, from which mathematics is part. The re-encounter with the remote controversies is one more indication of historical non-linearity of the formation of mathematical concepts and ideas, thus contradicting impressions left by productions and educational exhibitions that still offer mathematics as a harmonious and universal “construction". History proves that there was not a complete unanimity with respect to such a "construction" project.

References

BARROS. A. M. Nota sobre o emprego do infinito no ensino das mathematicas elementares. Rio de Janeiro: Typographia de N. Lobo Vianna, 1863.

BLOCH, M. Apologia da história ou o ofício do historiador. Rio de Janeiro: J. Zahar, 2001.

CHOPPIN, A. História dos Livros e das edições didáticas: sobre o estudo da arte. Revista da Faculdade de Educação da USP. Educação & Pesquisa. Set/dez 2004. p.549-566.

______. O historiador e o livro escolar. História da Educação. Pelotas: ASPHE, n.11, abril. 2002. p.5-24.

OTTONI C.B, Elementos de Álgebra. Rio de janeiro: Livraria Francisco Alves, 1879.

SERRASQUEIRO, J. A. Tratado de Algebra Elementar. Coimbra: Imprensa da Universidade,1893.

SILVA, C.M.S. Um longo reinado do livro didático. Anais do V Encontro Capixaba de Educação Matemática. 2000, p. 28-47.

_____. Os Espinhos da álgebra para Lacroix. Educação Matemática. Pesquisa. São Paulo, v.13, n.1, pp.219-237, 2011

THIRÉ, A. Algebra gymnasial. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1917.

THIENGO. E. R, Arthur Thiré: História, Política, Educação e Matemática. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, 2008.

TRAJANO, A. Algebra Elementar. Rio de Janeiro: Tip.G. Leuzinger, 1905.

VALENTE, W. R. Uma historia da matemática escolar no Brasil, 1730-1930. São Paulo: Annablume, 1999.

VECHIA, A LORENZ, K;. Programa de ensino da escola secundária brasileira, 1850-1951. Curitiba: Edição dos Organizadores, 1998.

Wolfgang Breidert

Das Ganze, die Teile, Grenzen und Schranken zwischen Theologie und Topologie

Es gibt in der Mathematikgeschichte einfache und - wie ich meine - wichtige Fragen, die offenbar außerhalb des Interesses der meisten Mathematikhistoriker liegen. Ich möchte u.a. die Aufmerksamkeit auf die Fragen lenken, wann und wie man begonnen hat, in einer mehr oder weniger exakten Weise über Ganze, Teile, Grenzen und Schranken sowie über offene und abgeschlossene Intervalle nachzudenken und einen kleinen Beitrag zu einer möglichen Beantwortung dieser Frage liefern.

Genaue Definitionen haben in der Mathematik eine Vorgeschichte, in der sich anhand von Problemdiskussionen erst die betreffenden Begriffe herausbilden, nachdem jeweils die Notwendigkeit einer präzisen Definition sichtbar geworden ist. Und immer wieder zeigt sich, dass gelegentlich weitere Spezifizierungen nötig sind. Solche "Vorgeschichten" spielen sich oft in außermathematischen Bereichen ab (bei praktischen Tätigkeiten oder auf anderen wissenschaftlichen Gebieten) oder sie erfahren wenigstens ihre Impulse von dort. Bekannte Beispiele findet man nicht nur in der Astronomie, im kaufmännischen Leben oder in der Bautätigkeit, sondern auch in anderen praktischen Unternehmungen. Darüber hinaus gibt es zwischen den theoretischen Gebieten der Theologie oder Philosophie und der Mathematik seit der Antike vielfältige Beziehungen. Ob beim sogenannten Delischen Problem der Würfelverdoppelung tatsächlich eine praktische Aufgabenstellung (Berechnung eines Grabmals bzw. Altars) den Ausgangspunkt gebildet hat, sei dahingestellt - in Indien gab es tatsächlich die Aufgabe, Altäre zu verdoppeln, wenn das erbrachte Opfer nicht den erwünschten Erfolg hatte -, aber gewiss wurden Fragen der Kalender- oder Osterrechnung aus einem nicht spezifisch mathematischen religiösen Bereich an die Astronomen und Mathematiker herangetragen. Ich habe über einige der hier relevanten Aspekte in einem anderen Vortrag 1995 gesprochen. [1]

Zu den der Mathematik und Theologie gemeinsamen Gesprächsbereichen gehörten vor allem die Begriffe, die sich um das Unendliche ranken. Max Steck schreibt 1942 in seinem - leider stark nationalistisch gefärbten - Buch "Das Hauptproblem der Mathematik"[2]:

> *Die Genealogie des Unendlichen ist überhaupt noch sehr wenig erforscht; die Schwierigkeiten dabei sind ungeheuer und man müßte Mathematiker, Philosoph, Historiker, Philologe, Diplomatiker und was alles noch sein, um dies in befriedigender Weise tun zu können. Eine exakte problemgeschichtliche und systematische Darstellung der Genesis der Differential- und Integralrechnung, sowie des Problems des Unendlichen oder des Problems des Kontinuums überhaupt, die wir heute leider noch nicht besitzen (es wäre vermutlich die Lebensarbeit eines Gelehrten), wird an KEPLER, wie übrigens auch an NIKOLAUS VON CUES nicht vorbeigehen dürfen.*

Eine Begegnungsebene für Theologie und Mathematik ergab sich insbesondere dort, wo die Begriffe des Teils und des Ganzen mit dem Unendlichen kontaminiert wurden.

Man kennt Euklids Definition des Punktes: Er ist das, was keine Teile hat. Bekanntermaßen ist aber in Euklids Definitionen manches unklar. Wenn er sagt, dass die Enden einer Linie Punkte sind, bleibt im Dunkeln, ob diese Endpunkte als Teile zur Linie gehören oder ob sie auf andere Weise der Linie irgendwie zugeordnet sind. Auch die Definition der Grenze ("das, worin etwas endigt") bringt keine ausreichende Klarheit. Das ist besonders bedauerlich, weil

[1] Wolfgang Breidert, *Theologie und Mathemati*, in: Michael Toepell (Hrsg.): *Mathematik im Wandel*, Bd. I. Hildesheim - Berlin 1998 (= Mathematikgeschichte und Unterricht; Bd. 1), S. 78-88.

[2] S. 66. - Kepler und Nikolaus von Cues werden von Steck vor allen andern genannt, weil sie Deutsche waren.

der Begriff der Grenze schon von Aristoteles bei der Definition des Kontinuums benutzt worden war, der ja zwei (nicht äquivalente) Definitionen für das Kontinuum gegeben hat. Einerseits sagt er, kontinuierlich sei das endlos Teilbare[3], andererseits sagt er, kontinuierlich (verbunden) sei das, dessen Grenzen zusammenfallen.[4]
Auch eine zweite Bemerkung bei Aristoteles ist hier interessant, nämlich die Feststellung, einer Begrenzungsreihenfolge: Die Grenze eines geometrischen Gebildes besitzt immer eine um Eins kleinere Dimension als das Begrenzte, auch wenn Aristoteles keinen deutlichen Begriff der Dimension gehabt hat: Körper werden von Flächen, Flächen von Linien und Linien von Punkten begrenzt.

geom. Entität	begrenzt durch
....	
??	??
Körper	Flächen
Flächen	Linien
Linien	Punkte
Punkte	??
??	??
.....	

Aristoteles hat offensichtlich nicht versucht, diese Reihe nach oben oder unten fortzusetzen, obwohl sich eine solche Fortsetzung rein formal anzubieten scheint. Die Erwägung höherer Dimensionen kommt erst ab dem 17. Jahrhundert aufgrund der inzwischen entwickelten algebraischen Potenzschreibweise ins Spiel. Und gegen eine Fortsetzung der Begrenzungsreihenfolge "nach unten" wird ins Feld geführt, dass es einen Unterschied zwischen dem Begrenzenden und seiner Grenze gebe, was aber beim Punkt nicht möglich sei, weil er keine Teile hat. Der Punkt begrenzt sich gleichsam selbst und beendet damit die Begrenzungsreihenfolge.[5]

Die Diskussionen über das Unendliche waren im ausgehenden Mittelalter scholastisch subtil, so dass Richard Fitzralph[6] angesichts der Probleme der zeitlichen Unendlichkeit oder der Ewigkeit der Welt von einem "Chaos" (gähnenden Abgrund) spricht und Blaise Pascal verwendet noch immer die Abgrund-Metapher für das Unendliche. Aus theologischen Gründen versuchte man, das Attribut der Unendlichkeit für Gott zu reservieren, doch Heinrich von Harclay[7] entwickelte in diesem Kontext den Gedanken von zwei verschiedenen unendlichen Mengen, indem er zwei verschieden große Strecken (4 und 8 Fuß) in gleich große Teile zerlegt, so dass die eine doppelt so viele Teile wie die andere enthält. Dann lässt er die Teilchengröße unendlich klein werden, und erklärt, dass schließlich die eine Strecke unendlich viele, aber doppelt so viele Teile enthalte wie die andere. Auch Nicole Oresme[8] und Albert von Sachsen[9] diskutieren eine Reihe von Argumenten bei der Frage, ob ein Unendliches größer oder kleiner sein könne als ein anderes.

[3] Aristoteles, *Physik* VI, 1 (231 b 16): παν συνεχεσ διαιρετον εισ αει διαιρετα. (Jedes Kontinuum ist in immer weiter teilbare Teile teilbar.)
4 VI, 1 (231 a 22): συνεχη μεν ων τα εσχατα εν (Das Kontinuum [ist dadurch definiert], dass die Grenzen eins sind.)
5 Aristoteles, *Physik*, VI, 1 (231 a 26 f.): ου γαρ εστι το μεν εσχατον το δ' αλλο τι μοριον του αδιαιρετου (Es gibt nämlich am Unteilbaren [Punkt] weder eine Grenze noch einen sonstigen Teil.)
[6] Richard Fitzralph (ca. 1300-1360, Erzbischof von Armagh)
[7] Heinrich von Harclay (ca. 1270-1317, Kanzler der Univ. Oxford)
[8] Nicole Oresme (vor 1330-1382, Bischof von Lisieux)
[9] Albert von Sachsen (ca. 1316-1390, Rektor der Univ. Paris u. Wien)

Dort, wo nicht atomistische oder finitistische Lehren diskutiert wurden, verstand man üblicherweise unter einer endlichen geraden Linie eine Strecke, die als solche ihre Endpunkte enthält. Für die Geschichte der Analysis und der Topologie ist aber die Unterscheidung von offenen und abgeschlossenen Intervallen nicht unerheblich. In der Vorgeschichte dieser Begrifflichkeit klaffen jedoch noch große Lücken. Man kennt zwar Newtons Versuch, die Probleme der Infinitesimalmathematik durch die Begriffe von den "ersten und letzten Verhältnissen" zu beheben, doch man kennt kaum die vorausgehenden Diskussionen über die "ersten und letzten" Teile einer kontinuierlichen Größe, die eine solche Denkweise wohl schon vorbereitet haben. Leibniz hat für die Vorgeschichte seiner Überlegungen zum Calculus selbst auf Cavalieris Arbeiten hingewiesen, doch hat dieser Rückblick von Leibniz zu sehr viel Verwirrung unter den Mathematikhistorikern beigetragen, weil sie Moritz Cantor gefolgt sind und sich den Cavalierischen Indivisibilien vom Differenzialbegriff her genähert haben. Man übersah dabei, dass es bei den aristotelisch gebildeten Theologen und den theologisch gebildeten Aristoteles-Interpreten von der mittelalterlichen Scholastik an eine Tradition gab, die mehr oder weniger dazugedrängt hat, sich einerseits mit dem Unendlichen - Gott ist unendlich; ist die Welt, Raum, Zeit unendlich? - und andererseits mit dem Unteilbaren auseinanderzusetzen. Das Unteilbare (Atom, Indivisibile) kam in diese Diskussionen durch die Abwehr der bei Christen nicht beliebten epikureischen Lehren und - wie besonders bei Wilhelm von Ockham deutlich wurde - durch die Auseinandersetzungen um den Augenblick der Veränderung (Wandlung bei der Eucharistie).

Bei diesen Diskussionen wird gelegentlich die wichtige Unterscheidung zwischen einem *eigentlichen* oder konstitutiven und einem *uneigentlichen* Teil einer Größe entwickelt, denn die Hinzufügung oder Wegnahme der Grenzen einer geometrischen Figur vergrößern oder verkleinern sie nicht im eigentlichen quantitativen Sinne. Ohne die modernen topologischen Begriffe zur Verfügung zu haben, wird hier schon - wenn auch nicht in voller Allgemeinheit - der Unterschied zwischen offenen und abgeschlossenen Intervallen ('Größen') entwickelt.
Für die Übermittlung dieser Überlegungen an die Erfinder der Infinitesimalrechnung ist das Buch von Libert Froimond (Libertus Fromondus) über das Kontinuum von besonderem Wert[10], weil es auf eine Fülle von Quellen zur Geschichte der scholastischen und frühneuzeitlichen Diskussionen samt der kirchlichen Verdammung aller atomistischen Ansätze auf dem Konzil zu Konstanz (Anfang des 15. Jh.s) verweist.[11]
Einer dieser Hinweise von Froimond gilt dem 1617 publizierten Kommentar des Bischofs Paolo Aresio (1574-1644) zur Aristoteles-Schrift "Vom Werden und Vergehen"[12], die Aresio im Hinblick auf die heilige Wandlung interpretiert, weswegen er sich intensiv mit dem unteilbaren Augenblick beschäftigt und so die Indivisibilien-Debatte ausführlich darlegt (er beruft sich dabei auf mehr als fünfzig Autoren!). Obwohl Aresio kein *mathematisches* Buch schreibt und in seiner Darstellung theologische, philosophische und physikalische Überlegungen mit einfließen, enthält es doch einige für die mathematische Begriffsentwicklung interessante Aspekte und auch eine grundsätzliche Aussage zur Philosophie der Mathematik.

Aresios Aussage zur Philosophie der Mathematik findet sich in einem eigenen Abschnitt über das, was Aristoteles, die antiken Philosophen und die Mathematiker über die Indivisibilien

[10] Fromondus, Libertus (= Libert Froi[d]mond, 1587-1638, Prof. theol. In Leuven), *Labyrinthus sive de compositione continui*, Anvers 1631.
[11] Erst durch Philip Beeley wurde dieses Buch ausführlich berücksichtigt (Philip Beeley, *Kontinuität und Mechanismus: Zur Philosophie des jungen Leibniz in ihrem ideengeschichtlichen Kontext*, Stuttgart 1996.
[12] Aresius, Paulus (= Paolo Aresio, 1574-1644, Bischof von Tortona), *In Aristotelis libros de generatione et corruptione notationes et disputationes*, Mediolani 1617.

denken. Unter Berufung auf Aristoteles und Euklids Punkt-Definition sagt Aresio, dass die Indivisibilien nur mathematische, aber keine physischen Entitäten seien[13]:

Non igitur Mathematici haec vera entia esse credunt, sed fingunt talia, vt facilius suas demonstrationes conficiant, & quoniam quaedam passiones conueniunt quantitati, quatenus longa est, aliae, quatenus lata est, & aliae, quatenus profunda, vt harum distinctam cognitionem traderent, finxerunt lineam sine latitudine, & superficiem sine profunditate; sicut etiam imaginantur, fluxu puncti confici lineam, & fluxu lineae superficiem, & fluxu superficiei corpus. Et sicut Astrologi epiciclos, & excentricos in Coelo comminiscuntur, non quòd verè in eo esse existiment, sed vt his propositionibus vtantur ad veras conclusiones declarandas.

So verwenden auch die Mathematiker ihre Linien und die perfekten Kugeln, den Fluss eines Punktes und die Indivisibilien nur für ihre Lehre, aber halten sie nicht für wirklich existent. Aresio vertritt also sehr deutlich einen Fiktionalismus bezüglich der Mathematik, wie er vor allem von Christian Betsch[14] in der Nachfolge von Hans Vaihinger[15] am Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts vertreten wurde. Und einen solchen instrumentalistischen Fiktionalismus finden wir nicht nur bei Aresio, sondern auch bei dem zur gleichen Zeit ebenfalls in Oberitalien lebenden Bonaventura Cavalieri. Im Vorwort zur zweiten Auflage seiner "Geometria" (1653) schreibt er über seine Indivisibilienmethode, die er als bloßen "Kunstgriff" benutze[16]:

Artificio autem tali vsus sum, quale ad propositas quaestiones absoluendas Algebratici [sic!] adhibere solent; qui quidem numerorum radices, quamuis ineffabiles, surdas, ac ignotas, nihilominus simul aggregantes, subtrahentes, multiplicantes, ac diuidentes, dummodo propositae rei exoptatam sibi notitiam enucleare valeant, sua satis obijsse munera sibi persuadent, Non aliter ipse ergo indiuisibilium sine [= siue] linearum, siue planorum congerie ..... ad continuorum inuestigandam mensuram vsus sum

Nebenbei sei noch einmal darauf hingewiesen, dass Cavalieri explizit bemerkt, dass er nur eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Indivisibilien vornimmt und seine Methode völlig unabhängig davon ist, ob das Kontinuum aus Indivisibilien zusammengesetzt ist oder nicht[17]:

... siue ergo continuum ex indiuisibilibus componatur, siue non, indiuisibilium congeries sunt adinuicem comparabiles, et proportionem habent.

Die ein Kontinuum begrenzenden Indivisibilien sind also nach Aresio und Cavalieri nichts als eine *façon de parler* oder ideale Gebilde im Sinne mathematischer Fiktionen. Sie sind

---

[13] (p. 194, übers. W. B.:) Die Mathematiker glauben also nicht, dass es wirklich seiende Dinge seien, sondern sie denken so etwas aus, damit sie ihre Beweise leichter führen können, und da ja der Quantität gewisse Eigenschaften (passiones) zukommen (wie Länge, Breite, Höhe), so stellen sie sich eine Linie ohne Breite und eine Fläche ohne Tiefe vor; so wie sie sich auch vorstellen, eine Linie entstehe durch den Fluss eines Punktes und eine Fläche durch den Fluss einer Linie und ein Körper durch den Fluss einer Fläche. Wie sich auch die Astronomen (Astrologi) am Himmel Epizyklen und Exzenter ausdenken, die nicht wirklich in ihm existieren, sondern damit sie diese Sätze (propositiones) zur wahren [!] Erklärung ihrer Schlüsse benutzen.

[14] Betsch, Christian, Fiktionen in der Mathematik. Stuttgart 1916.

[15] Vaihinger, Hans, Die Philosophie des Als Ob. (1. Aufl. 1911) 5. u. 6. Aufl. Leipzig 1920. [Grundfrage: „Wieso erreichen wir oft Richtiges mit bewusst falschen Annahmen?“]

16 Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* ([1]1635). Bononiae 1653, Praefatio (Übers. W. B.): "Ich habe aber einen solchen Kunstgriff gebraucht, wie ihn die Algebraiker bei der Lösung der vorgelegten Probleme anzuwenden pflegen, denn, obwohl die Wurzeln der Zahlen unaussprechbar, irrational und unbekannt sind, addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren sie diese trotzdem, und sie sind überzeugt, ihre Pflicht hinreichend erfüllt zu haben, wenn sie nur die von ihnen gewünschte Kenntnis der vorgelegten Sache zu berechnen vermögen. Nicht anders habe ich selbst also bei der Berechnung des Maßes von kontinuierlichen Gebilden die Menge der Indivisibilien ... gebraucht ..."

[17] l.c., p. 111 (Scholium zu Liber II): "Sei es also, dass das Kontinuum aus Indivisibilien zusammengesetzt wird, sei es, dass es nicht so ist, so sind doch die Mengen der Indivisibilien miteinander vergleichbar und haben ein Verhältnis zueinander."

unteilbar und bilden den äußersten Teil des Kontinuums, sofern man es *von außen* betrachtet (*quatenus ab extrinseco demonstratur*), denn *von innen* betrachtet besitzt ein begrenztes Kontinuum keinen äußersten Teil. Hier wird also deutlich zwischen der offenen Menge und ihrem Abschluss durch eine Innen- und eine Außenperspektive unterschieden. Die beschränkende Grenze - ein Unterschied zwischen Grenze und Schranke wird noch nicht gemacht - ist dem Kontinuum *äußerlich*. Obwohl ein Kontinuum keine letzten Teile hat, ist es begrenzt.[18]

> *Primò enim non video, cur dici non possit quantitas sine superficie terminata positiuè, quia re vera datur positiuum aliquod, vltra quod vlterius non protenditur, ergo est terminata positiuè, illud enim positiuum est terminus, dari autem huiusmodi positiuum patet, illud scilicet quantitatis vltra quod non reperitur vlterior quantitas.*

Auch wenn der Schluss des Satzes nicht besonders gut ausgedrückt ist, so ist doch klar, was der Autor sagen will.

Der in scholastischer Tradition stehende Theologe Aresio leugnet die Realität von begrenzenden Indivisibilien und zwar mit Hilfe von theologischen Argumenten. Gott könnte die Grenzen eines Kontinuums wegnehmen. Dabei lässt der Autor den Einwand nicht gelten, dass dann auch die Figur oder Gestalt des Kontinuums verloren gehe. Er erwidert, indem er ein Argument des Wilhelm von Ockham aufgreift, dass es eine Einschränkung der göttlichen Allmacht wäre, wenn Gott keine gestaltete Quantität ohne Grenzen erschaffen könnte. Jedenfalls sind die Indivisibilien bei Aresio keine konstituierenden Teile des Kontinuums.

Mindestens von Moritz Cantor an und mindestens bis zu Hans Wußing hin geistert durch die Mathematikgeschichte die Behauptung, dass Cavalieri einen unklaren Begriff von Indivisibilien verwende.

So heißt es beispielsweise bei Hans Wußing[19], dass das Fachwort "Indivisibile" im 14. Jh. geprägt worden sein dürfte. Cavalieri erkläre nicht genau, was unter Indivisibilien im mathematischen Sinne zu verstehen sei. Dann heißt es: "Man könnte Cavalieris sehr verschwommene Ideen vielleicht so wiedergeben: Die Indivisibilien sind unendlich dünne Gebilde, die eine um Eins kleinere Dimension besitzen als das von ihnen in ihrer Gesamtheit gebildete stetige Ganze."

"Indivisibile" ist aber nichts weiter als die Übersetzung des aristotelischen Begriffs "Adihaireton" (Unteilbares), und seit Euklids Punkt-Definition haben Mathematiker mit dem Unteilbaren gearbeitet, nur dass dieser Begriff seit der Scholastik auch für Linien und Flächen benutzt wird, insofern sie bezüglich der Breite bzw. der Tiefe unteilbar sind.

Jene angebliche Unklarheit kommt, wie ich meine, nur daher, dass diese Indivisibilien, die nichts anderes sind als die auch von Euklid verwendeten Punkte, Linien und Flächen, von den Mathematikhistorikern immer wieder mit irgendwelchen infinitesimalen Größen oder Differenzialen verwechselt werden. (Es ist kein Zufall, dass auch bei Wußing sofort auf Kepler verwiesen wird, der aber schon von dem traditionellen Indivisibilienbegriff abgewichen ist.) Eine Fläche ist unteilbar hinsichtlich der dritten Dimension, eine Linie ist unteilbar hinsichtlich der zweiten Dimension und ein Punkt ist unteilbar hinsichtlich der ersten Dimension. Darin liegt im Sinne Euklids und auch Cavalieris nichts Unklares - wenn es die Mathematikhistoriker richtig verstehen.

Die Infinitesimalien als unendlich kleine konstituierende Teile sind eine spätere, zwar fruchtbare Fiktion der auf Cavalieri folgenden Generation, die man allerdings noch später

[18] Aresius, p. 183 a (Übers. v. W. B): "Erstens sehe ich nicht, warum man nicht sagen könne, eine [körperliche] Quantität ohne Oberfläche sei positiv begrenzt, weil es ja wirklich etwas Positives gibt, über das sie sich nicht hinauserstreckt, dieses Positive ist nämlich die Grenze. Dass es aber ein solches Positives gibt, ist klar, es ist nämlich das von der Quantität, jenseits dessen man keine weitere Quantität findet."

19 Hans Wußing, Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin 1979, S. 168.

dann wieder mühsam aus der Mathematik eliminiert hat, ehe man sie im zwanzigsten Jahrhundert wieder rehabilitierte.

<u>Literatur</u> (Auswahl):

Albertus de Saxonia, Questiones subtilissme in libros de celo et mundo (1507). [http://books.google.de/books?id=8Bh22F2txZwC&printsec=frontcover&hl=de&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false]

Alcoba, Manuel Luna, *G. W. Leibniz: Geschichte des Kontinuumproblems* (Hrsg. u. eingeleitet), in: *Studia Leibnitiana* 28 (1996), S. 183-198. [http://www.jstor.org.ezproxy.blb-karlsruhe.de/stable/40694302?seq=2]

Breidert, Wolfgang, *Das aristotelische Kontinuum in der Scholastik*, 2. Aufl. Münster 1979.

Breidert, Wolfgang, *Infinitum simpliciter* und *infinitum secundum quid*, in: *Miscellanea Mediaevalia*, Bd. 13/2 (1981), S. 677-683.

Dales, Richard C., *Henry of Harclay on the Infinite*, in: *Journal of the History of Ideas* 45 (1984), 295-301.

Gericke, Helmuth, *Wie vergleicht man unendliche Mengen?* in: *Sudhoffs Archiv* 61 (1977), S. 54-65.

Gericke, Helmuth, *Wie dachten und denken die Mathematiker über das Unendliche?* in: *Sudhoffs Archiv* 64 (1980), S. 207-225.

Gericke, Helmuth, *Aus der Geschichte des Begriffs "Kontinuum"*, in: *Mathematische Semesterberichte* 31 (1984), S. 42-58.

Leftow, Brian, *Aquinas on the Infinite.* In: *The Proceedings of the Twentieth World Congress of Philosophy*, vol. 2, Bowling Green, OH 1999, pp. 27-38.

Maior, Johannes (= Jean Mair), *Le traité* De l'infini, trad. par Hubert Elie, Paris 1938.

Ockham, Wilhelm von, *De Sacramento altaris*, ed. T. B. Birch, Burlington, IA 1930.

Oresme, Nicole, *Le livre du ciel et du monde*, publ. par A. D. Menut et A. J. Denomy, Madison 1968.

Wodeham, Adam de, Tractatus de indivisibilibus: A Critical Edition with Introduction, Translation, and Textual Notes, ed. Rega Wood, Dordrecht - Boston - London 1988.

Über die musikalischen Bewegungen im Lichte der Mathematik

Miloš Čanak

I

Am Anfang betrachten wir die Notenaufzeichnung einer einstimmigen Musikkomposition. Bei einer mehrstimmigen Komposition hat G. Souriau gemeint, dass aus jeder dieser Kompositionen eine „Hauptmelodielinie“ herausgearbeitet werden kann, die oft eine Reihe von höchsten Tönen (Noten) darstellt. Aufgrund dessen hat er folgendes Axiom formuliert: Für jede Musikkomposition kann man sich eine räumliche Aufzeichnung, d.h. eine krumme Linie vorstellen, die gleichzeitig auf die Harmonie (das Ebenmaß) des Werkes, den Rhytmus und die Melodielinie hinweist. Souriau hat sogar einen analytischen Ausdruck für diese krumme Linie vorgegeben. Nehmen wir z. B. die Notenaufzeichnung von Bachs Sarabande für Violine Solo in d-moll. Die Aufzeichnung selbst genügt natürlich nicht, gebraucht wird der Aufführer auf der Geige, der sie in Bewegung bringt und ihr Leben einhaucht. Dann fließen vor dem Zuhörer ganze Wasserfälle und Flüsse von Tönen, denen er sich mit Genuss überlässt.
Als ob ein ganzes musikalisches Leben in kurzer Zeit verfließt. Dieses musikalische Leben ist in manchen Dingen dem wahren Leben ähnlich und viele verleben es ohne zu wissen, wie es verflossen ist. Andererseits werden Musiktheoretiker eine Partitur nehmen und sie vielfältigen Analysen unterwerfen: der Harmoniezusammensetzung, der Tonalität, der Musikform, der Stellen und Weisen der Modulationen u.a., um am Ende vielleicht etwas über den Wert des Werkes zu schließen.

Mathematiker sind große Wertschätzer der Musik. In Ihr finden sie fruchtbaren Boden für ihre Forschungen und eine große Quelle der Inspiration. Manchmal werden sie auch interessante Phänomene und Gesetzlichkeiten herausfinden, die viele Musikologen, wegen der andersartigen Denkweise, nicht erkannt haben.

Die erwähnte Sarabande Bachs werden sie als eine Tonreihe oder als musikalische Grundbewegung betrachten, aber für sie kann das zugleich auch eine Zahlenreihe oder eine Funktionalreihe sein. Aus dieser Reihe werden sie eine Unterreihe nach bestimmten musikalischen oder mathematischen Kriterien aussondern und auf ihre Art deuten. Diese Unterreihe können Skalen, auseinandergenommene Akkorde, Sequenzen oder Töne bilden, die der Aufführer nach eigenem Gefühl oder Neigungen gewählt hat. Die so neu erhaltene Musikbewegung kann einen völlig anderen Sinn im Vergleich zu der Grundbewegung haben. Es ist möglich die Grundbewegung und die abgeleitete Musikbewegung vergleichsweise zu betrachten, d.h. während der Aufführung der Komposition die Töne der abgeleiteten Reihe zu betonen, zu akzentuieren oder ihre Dauer zu verlängern.

Worin liegt die mathematische Betrachtung im Grunde dieses Vorgehens?

Der Mathematiker vergleicht bildhaft eine Musikkomposition mit einer Fläche im Raum, deren Gleichung $f(x,y,z)=0$ ist. Auf dieser Fläche kann er zwei Familien, so genannte Hauptrichtungen erkennen. Diese Richtungen können gegenseitig orthogonal sein oder die gleichen konstanten Winkel bilden.

Am einfachsten ist es, wenn wir als Fläche eine Ebene nehmen. Dann stellen wir in diese Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem und zwei Familien von gegenseitig orthogonalen, ganzzahligen Koordinatenlinien. Damit haben wir die Ebene vernetzt. So können wir uns auf dieser Ebene bewegen, entweder einer der bestimmten Hauptrichtungen entlang, die parallel zu den Koordinatenachsen stehen oder auf einer selbstgewählten krummen Linie $y = g(x)$.

Wir können als Fläche auch eine Kugel wählen (als das mathematische Modell der Erdkugel). Die Erde ist mit einem Gradnetz von equatorialen und meridianen Linien (Breiten- und Längengraden) bedeckt. Stellen wir uns vor als Forscher und Expeditionsleiter zu aggieren. Außer den nötigen psychophysischen Fähigkeiten und Kenntnissen, wie auch den vollständigen Vorbereitungen, stellt die Wahl der Bahnkurve oder der Trajektorie, die zum Ziel führt, das größte Problem dar.

Vielleicht stellt unsere Fläche auch einen Berg dar, auf dessen Spitze wir steigen wollen. Es gibt den spiralen, leichteren Weg für einfache Ausflugsteilnehmer, aber wir entscheiden uns für den schwereren und steileren, den vor uns vielleicht niemand begangen hat. Wir wählen einen eigenen Pfad in der Erwartung neuer Ausblicke und Erlebnisse auf dem Weg zum Ziel. Bei dieser Wahl nehmen wir die Mathematik zu Hilfe und zwar das Teilgebiet der Geometrie, das Flächen im Raum und die dazugehörigen Linien auf ihnen erforscht.

II

Es sei eine glatte Fläche

$$f(x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

gegeben.

Wenn die Fläche (1) mit den Ebenen $z = m$ geschnitten wird, die parallel zu der Ebene $0xy$ verlaufen, bekommt man krumme Linien, die als Niveaulinien dieser Fläche bezeichnet werden. Ihre Gleichungen sind

$$f(x,y,z) = 0 \quad z = m \qquad (2)$$

und ihre Projektionen auf die Ebene $0xy$ sind

$$f(x,y,m) = 0. \qquad (3)$$

Man erhält die Differentialgleichung dieser Projektionen durch Elimination des Parameters m aus der Gleichung (3) und ihrer Ableitungsgleichung

$$f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy = 0 \qquad (4)$$

So kommen wir zu der Gleichung

$$P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0 \qquad (5)$$

Die Linien auf der Fläche (1) die normal zu den Niveaulinien verlaufen werden als Linien der größten Neigung dieser Fläche im Verhältnis zu der Ebene $0xy$ bezeichnet.

Da die Projektionen der Linien der größten Neigung der Fläche (1) orthogonal zu den Projektionen ihrer Niveaulinien auf die Ebene $0xy$ verlaufen, lautet die Differentialgleichung der Linien der größten Neigung

$$P(x,y)\, dy - Q(x,y)\, dx = 0 \qquad (6)$$

Das Integral dieser Gleichung

$$F(x,y,C) = 0 \qquad (7)$$

ergibt die Projektion der Linien der größten Neigung der Fläche (1) auf die Ebene 0xy. Die Gleichungen (7) und (1) ergeben zusammen die Linien der größten Neigung auf der Fläche (1).

Beispiel: Vorgegeben ist die Fläche

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \qquad (8)$$

deren Niveaulinien sind

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, \ z = m \qquad (9)$$

Die Projektion dieser Linien auf die Ebene 0xy ist

$$ax^2 + by^2 + cm^2 = 1$$

wobei m ein veränderbares Parameter ist.
Die Differentialgleichung dieser Linien lautet

$$ax + byy' = 0$$

und die Differentialgleichung ihrer orthogonalen Projektionen

$$axy' - by = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung

$$y = Cx^{\frac{b}{a}} \qquad (10)$$

stellt die Projektionen der Linien der größten Neigung der Fläche (8) auf die Ebene 0xy dar. Die Gleichungen (8) und (10) stellen zusammen die Linien der größten Neigung auf der Fläche (8) dar. Die Gleichungen (8), (9) und (10) mit den Parametern m und C stellen ein Netz der orthogonalen Krummen auf der Fläche (8) dar.

Interessant ist, dass eine große Anzahl von den in der Natur entstandenen Formen mit der Gleichung (8) annähernd beschrieben werden kann. Gleichzeitig erkennen wir bei einigen Pflanzenformen links- und rechtsorientierte Spiralen, die sich gegenseitig kreuzen und die Rolle des oben erwähnten Netzes der orthogonalen Krummen auf der Fläche übernehmen können. Andererseits kann die Gleichung (8) als Modell in der Musik genutzt werden, dabei werden die orthogonalen Trajektorien als musikalische Kontrastbewegungen verstanden.

Wenn a=b ist, so ist die Fläche (8) eine Rotationsfläche um die Achse 0z, wobei ihre Linien der größten Neigung Meridiane der Rotationsfläche sind und ihre Projektionen auf die Ebene 0xy gerade Linien darstellen.

Neben den Niveaulinien und den Linien der größten Neigung gibt es auf der Fläche f(x,y,z)=0 auch andere charakteristische, für die Praxis wichtige krumme Linien, wie die Linien der Krümmung, asymptotische Linien , geodätische Linien usw..

Abschließend, unterschiedliche musikalische Bewegungen betrachtend, kann der Mathematiker sich vor einer scheinbar unmöglichen Wahl zwischen einer großen Zahl von unterschiedlichen Flächen im Raum und den krummen Linien auf ihnen befinden.

Die Musik respektierend wird er bestimmt nicht wahllos irgendeine Fläche f(x,y,z)=0 aussuchen, die das Bild eines ernsthaften Musikstücks sein soll. Stattdessen kann er das Vorbild und die Inspiration in der Natur, bzw. in der Pflanzenwelt suchen.

III

Bei der Betrachtung der Sonnenblume erkennen wir, dass die Kerne in spiralen Linien angeordnet sind. Jeder Kern gehört zu einer linken und einer rechten Spirale. Falls wir uns bemühen die linken spiralen Linien nachzuzählen werden wir eine Überraschung erleben. Ihre Anzahl ist keinesfalls zufällig, es ist eine der Fibonacci-Zahlen (f(n)=f(n-1)+f(n-2)). Wir können z.B. 34, 55, 89 oder 144 Spiralen zählen. Die Anzahl der rechten Spiralen wird auch einer Fibonacci-Zahl entsprechen, aber nicht der Zahl der linken Spiralen, sondern einer benachbarten Fibonacci-Zahl. Der Quotient der Zahlen der linken und rechten Spiralen stellt eine Approximation des goldenen Schnitts dar.

Bei den Sonnenblumen auf Bild 1 erkennen wir 55 linke und 89 rechte Spiralen. Um das Abzählen zu erleichtern ist auf dem Bild jede zehnte Spirale markiert.

Bei anderen Blumen können andere benachbarte Paare der Fibonacci-Zahlen auftauchen.

Das Betrachten der Kerne in der Sonnenblumenblüte zeigt, dass sich bei der Betrachtung der Reihenfolge und Anordnung auf Bild 1, gewisse biologische und mathematische Gesetzlichkeiten entdecken lassen. Die Anordnung der Kerne bei der Sonnenblume ist ein gutes Beispiel für das Phänomen, das in der Botanik als Phyllotaxis (Blattstellung) bezeichnet wird – in der Bedeutung der günstigsten Anordnung der Pflanzenblätter mit dem Ziel der optimalen Sonnenbeleuchtung.

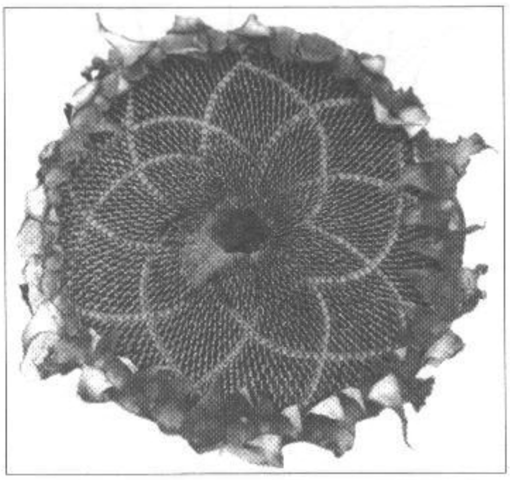


Bild 1

Bei manchen Bäumen, wie z.B. bei der Ulme oder Linde, stehen die Blätter eines Astes abwechselnd auf der einen und auf der anderen gegenüberliegenden Seite und das wird als 1/2 – Phyllotaxis bezeichnet.

Bei einer anderen Gruppe von Bäumen, wie z.B. bei der Buche oder dem Haselnussbaum kann man von einem zum anderen Blatt über eine Spirale gelangen die ein Drittel der vollen Umdrehung überschreitet. Hier handelt es sich um eine 1/3 – Phyllotaxis.

Auf dieselbe Art und Weise zeigt sich beim Aprikosenbaum, Apfelbaum oder der Eiche eine 2/5 – Phyllotaxis, bei der Pappel und beim Birnbaum eine 3/8 – Phyllotaxis, bei der Weide und dem Mandelbaum eine 5/13 – Phyllotaxis usw..

Brüche, die hier auftreten werden aus den Fibonacci-Zahlen gebildet. Da die 3/8 - Umdrehung im Uhrzeigersinn der 5/8 – Umdrehung gegen den Uhrzeigersinn entspricht, bekommt man immer benachbarte Fibonacci-Zahlen, deren Quotienten gute Approximationen für den goldenen Schnitt darstellen. Für die Botaniker ist es wichtig, dass sich diese Bruchzahlen in einem Umfang befinden, der den Pflanzen genügend Licht und frische Luft sicherstellt.

Bei der Anordnung der Tannenzapfenschuppen und der Ananas erscheinen gleichfalls die Fibonacci-Zahlen. Wenn wir die Skizze der Ananas (Bild 2) betrachten, erkennen wir dass ihre sechseckigen Schuppen nach unterschiedlichen spiralen Linien angeordnet sind und zwar:

- 5 parallele Linien steigen langsam nach rechts
- 8 Linien steigen steiler nach links
- 13 Linien steigen noch steiler nach rechts (bei genauer Betrachtung sichtbar)

Die Schuppen der Ananas sollte man anschließend nach der Höhe nummerieren. So bekommt man auf dem Bild entsprechende Zahlenreihen , z.B. 1,6, 11, 16, 21... und andere.

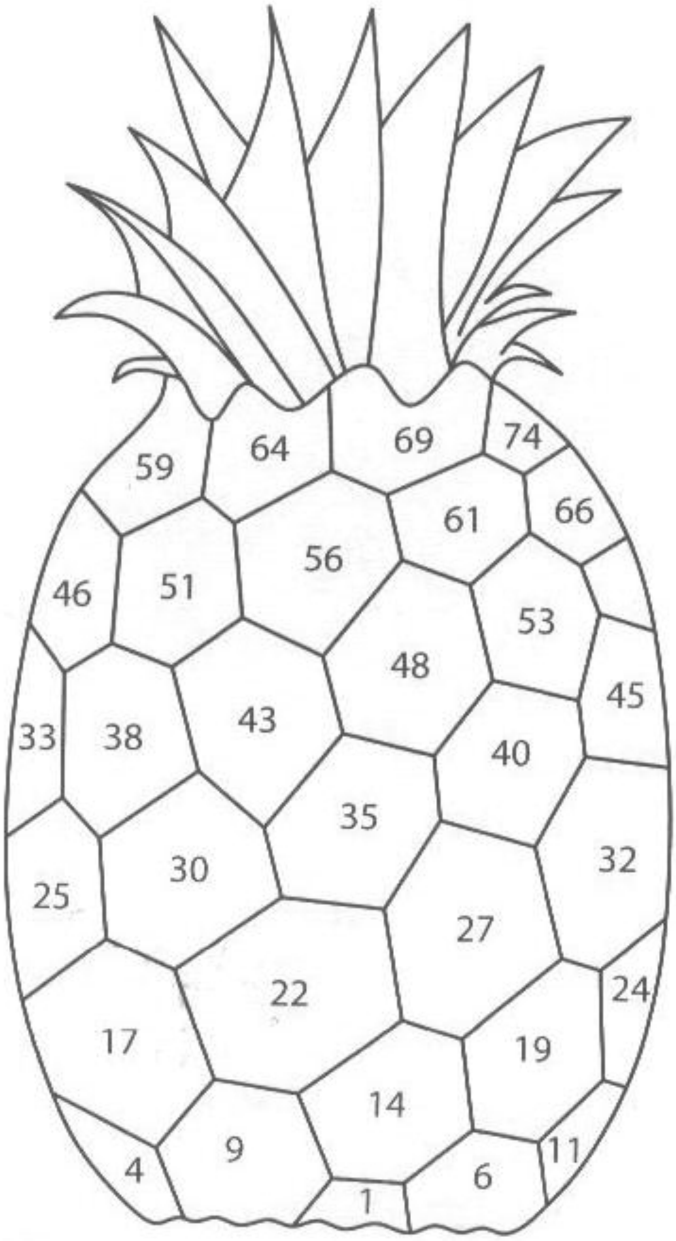


Bild 2

Um ein mathematisches Modell der Anordnung der Ananasschuppen zu erhalten können wir seine Oberfläche annähernd mit einer Zylinderhülle austauschen, die wir entlang einer vertikalen Linie durchgeschnitten haben und danach in einer Ebene auseinandergewickelt haben. So bekommt man Bild 3.

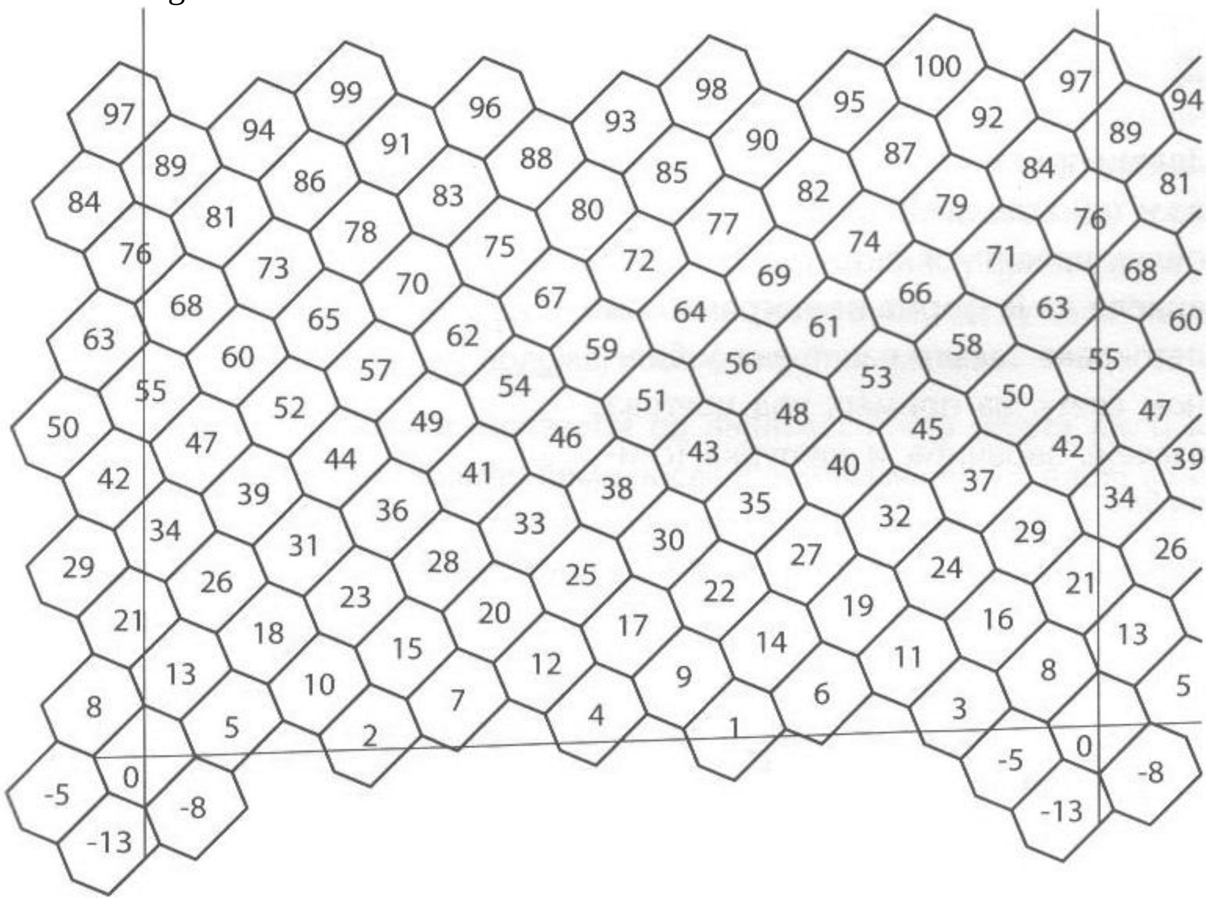


Bild 3

Betrachten wir für einen Augenblick das chromatische temperierte Tonsystem in dem den Tönen folgende Zahlen entsprechen:

$1= \sqrt[12]{2}^{0}, \sqrt[12]{2}^{1}, \sqrt[12]{2}^{2} \ldots \sqrt[12]{2}^{12} = 2$

In diesem System, 12 aufeinaderfolgende Schritte im Quintenzirkel ergeben dasselbe wie 7 aufeinaderfolgende Oktavenschritte, d.h. $\left(\sqrt[12]{2}^{7}\right)^{12} = 2^{7}$

Andererseits ist bei dem Pythagoreischen Tonsystem der Frequenzzahlwert für die Quinte 3/2 und für die Oktave 2, so erhalten wir $(3/2)^{12} = 129{,}7$ und $2^{7} = 128$. Diese Unstimmigkeit führt zu dem bekannten so genannten „Pythagoreischen Koma“.

Wenn wir jetzt die Oktaven, das Entstehen der Tonleiter und den Quintenzirkel betrachten, die die drei musikalischen Grundbewegungen bestimmen: die Oktaven-, Leiter- und Quintenzirkelbewegung, dann entspricht dem die Phyllotaxis als die Neigung der Pflanze zur günstigsten Anordnung der Blätter mit dem Ziel der optimalen Beleuchtung, also die Neigung zu Sonne und Licht. Entsprechungen sind auf den Bildern 4 und 5 sichtbar.

Auf Bild 4 ist die Blattrosette der Pflanze „plantago media“ dargestellt und die Grundspirale markiert. Der Divergenzwinkel ist annähernd 150 $^{\mathrm{o}}$ und die Anordnung der Blätter 3/8.

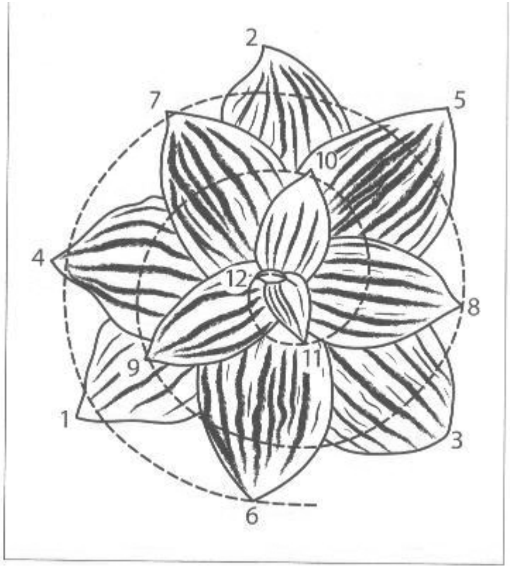


Bild 4

Auf Bild 5 ist schematisch ein Tannenzapfen dargestellt. Die Zapfenschuppen sind von 1 bis 56 nummeriert. Die unterbrochenen Linien I-VIII und die vollen Linien 1-13 verbinden die Zapfenschuppen durch einen weiten gegenseitigen Kontakt, so dass dies linke und rechte Spiralen sind, die am meisten auffallen und Kontaktparastichen genannt werden. Die gepunkteten Linien 1-21 verbinden untereinander die Zapfenschuppen, die annähernd übereinander liegen und die Ortholinien oder die Orthostichen darstellen. Obwohl diese Linien prinzipiell Gerade sein sollten, sind sie in userem Fall im Uhrzeigersinn leicht gekrümmt. Die Hauptspirale auf dem Bild ist nicht so auffällig und verbindet die Schuppen 1-2-3-4-...-56.

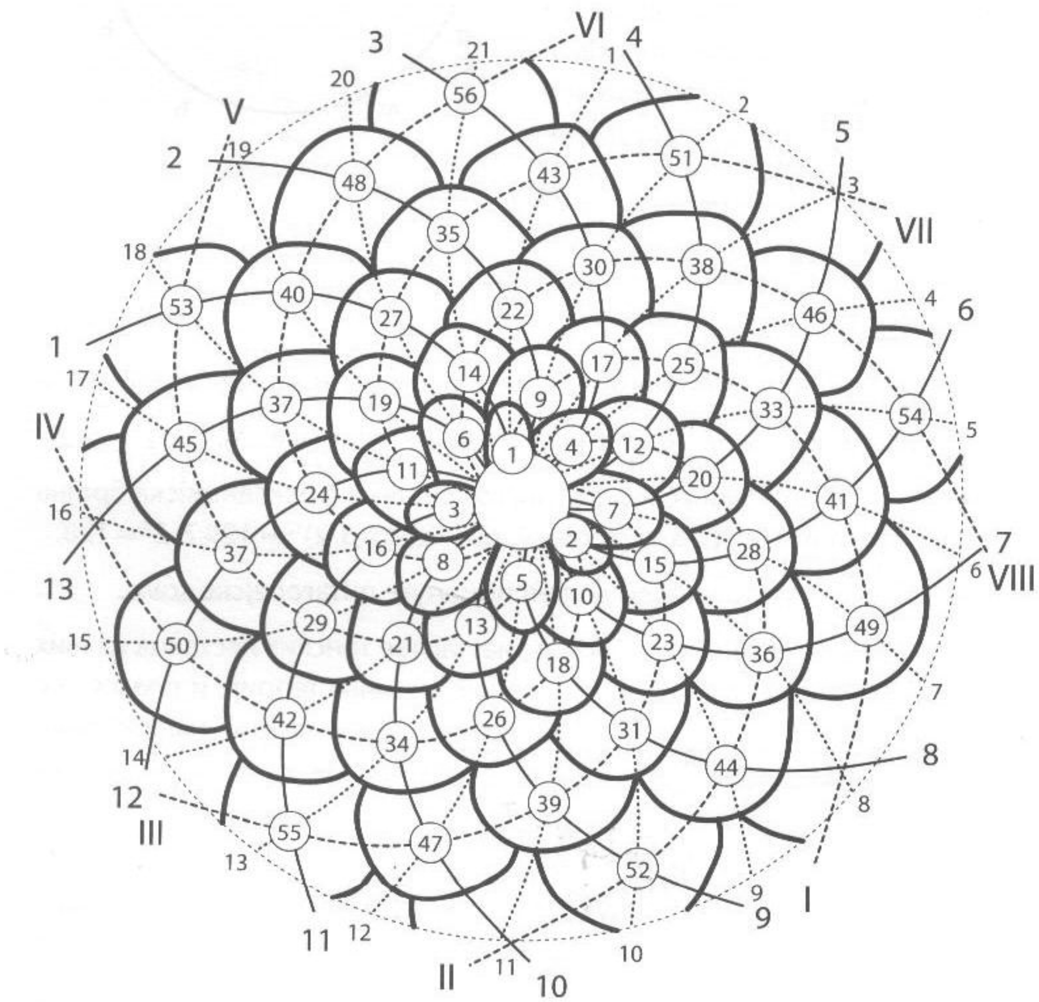


Bild 5

Die Zapfenschuppen und die Pflanzenblätter stellen die Musiktöne dar, wobei die erste Schuppe dem ersten Grundton entspricht. Den Bewegungen auf der linken und rechten Spirale (den Kontaktparastichen) entspricht das Bewegen auf dem Quinten- bzw. Quartenzirkel, d.h. das Aneinanderreihen aufeinanderfolgender Quarten.
Die Ortholinien oder die Orthostichen sind eigentlich Oktavenlinien, die die gleichnamigen Töne auf Oktavendistanzen verbinden, ähnlich wie die vertikale Linie, die die Edelgase im Periodensystem der Elemente verbindet. Die Zahl der unterschiedlichen Ortholinien gleicht der Zahl der Töne im Rahmen einer Oktave. Auf Bild 4, bei den Blättern der Pflanze „plantago media“ ist die Oktave temperiert und in 8 „Sekunden“ (unterschiedliche Töne) unterteilt, während auf Bild 5 bei den Tannenzapfen die Unterteilung in 21 grundeinheitliche Intervalle erfolgt. Während sich die Musiker für die optimale Temperierung und die Unterteilung der Oktave in 12 Grundeinheiten, d.h. Halbstufen entschieden haben, temperiert die Natur auf ihre eigene Art abhängig von den Eigenschaften der Pflanzen, sie unterteilt in 5, 8, 13, 21 oder eine andere Anzahl von Teilen mit dem Ziel eine solche Anordnung der Blätter zu erhalten, die eine optimale Beleuchtung ermöglicht und die Grundneigung der Pflanze zu Sonne und Licht ausdrückt.

Die Kontaktparastichen, d.h. die linken und rechten Spiralen, die über den anderen dominieren, drücken die Bewegung in gleichmäßigen Musikintervallen nach oben oder nach unten aus. Das Netz der linken und rechten Parastichen kann manchmal ein fast perfektes Netz zweier Familien von orthogonalen krummen Linien auf der Fläche bilden, das an das Netz der equatorialen und meridianen Linien auf der Erdkugel erinnert oder an das Netz der Orthostichen und der Hauptspirale. Auf Bild 5 sind das z.B. Linien 1 – 9 – 17 – 25 – 33 – 41 – 49 und 1 – 14 – 27 – 40 – 53.

Erkennbar sind auch andere linke und rechte Spiralen, die weniger sichtbar sind aber genauso Bewegungen in anderen gleichmäßigen Musikintervallen ausdrücken. Zum Beispiel die Spiralen der geraden und ungeraden Zahlen 1 – 3 – 5 – 7 - ... – 55 bzw. 2 – 4 – 6 – 8 - ... – 56 würden die aneinandergereihten großen Sekunden darstellen. Da jede große Sekunde (ganzer Ton) zwei kleine beinhaltet (zwei Halbtöne), ist die Vereinigung der beiden Reihen die Menge aller Töne, d.h. der Zapfenschuppen, genauso wie die Vereinigung der geraden und ungeraden Zahlen die Menge der natürlichen Zahlen darstellt.

Was sagt der Divergenzwinkel aus? Ist er als Quotient zweier Fibonacci-Zahlen ausgedrückt so stellt der Nenner die Zahl der Töne im Rahmen einer Oktave (oder equivalent für die durchgeführten Quinten- bzw. Quartensprünge) und der Zähler die Anzahl der Oktaven (oder für die durchgeführten vollen Umdrehungen) dar. Falls sich nach der Schließung des Quinten- bzw. Quartenzirkels der letzte Ton oder die letzte Schuppe nicht direkt über dem ersten Ton, bzw. erster Schuppe befindet, dann ist bei dieser Pflanze das Phänomen des „Pythagoreischen Komas“ bemerkbar, umgekehrt, liegen alle Punkte einer Oktave genau übereinander ist das System im mathematisch-musikalischen Sinne perfekt temperiert. Als Beispiel sehen wir auf Bild 4, dass die Oktave in 8 Grundintervalle (Blätter oder Töne) aufgeteilt ist, zu erkennen sind genauso viele Quartensprünge und das neunte Blatt befindet sich nicht genau über dem ersten. Es könnte uns erscheinen als ob dieses Temperieren mathematisch nicht vollkommen sei. Nichts desto trotz kann unser Verständnis der Vollkommenheit manchmal angeblich in Disharmonie mit der Vollkommenheit der Natur stehen, die diese in der Tendenz zur Realisation ihres Zieles ausdrückt. In diesen Fällen sollte man sicherlich nicht die Natur berichtigen, sondern sich hinterfragen.

Zum Schluss, alle vorhergehenden Betrachtungen anwendend, können wir ein mathematisch-biologisches Modell des chromatischen temperierten Tonsystems, des Quintenkreises und der Hauptbewegungen in der Musik entwickeln (Bild 6).

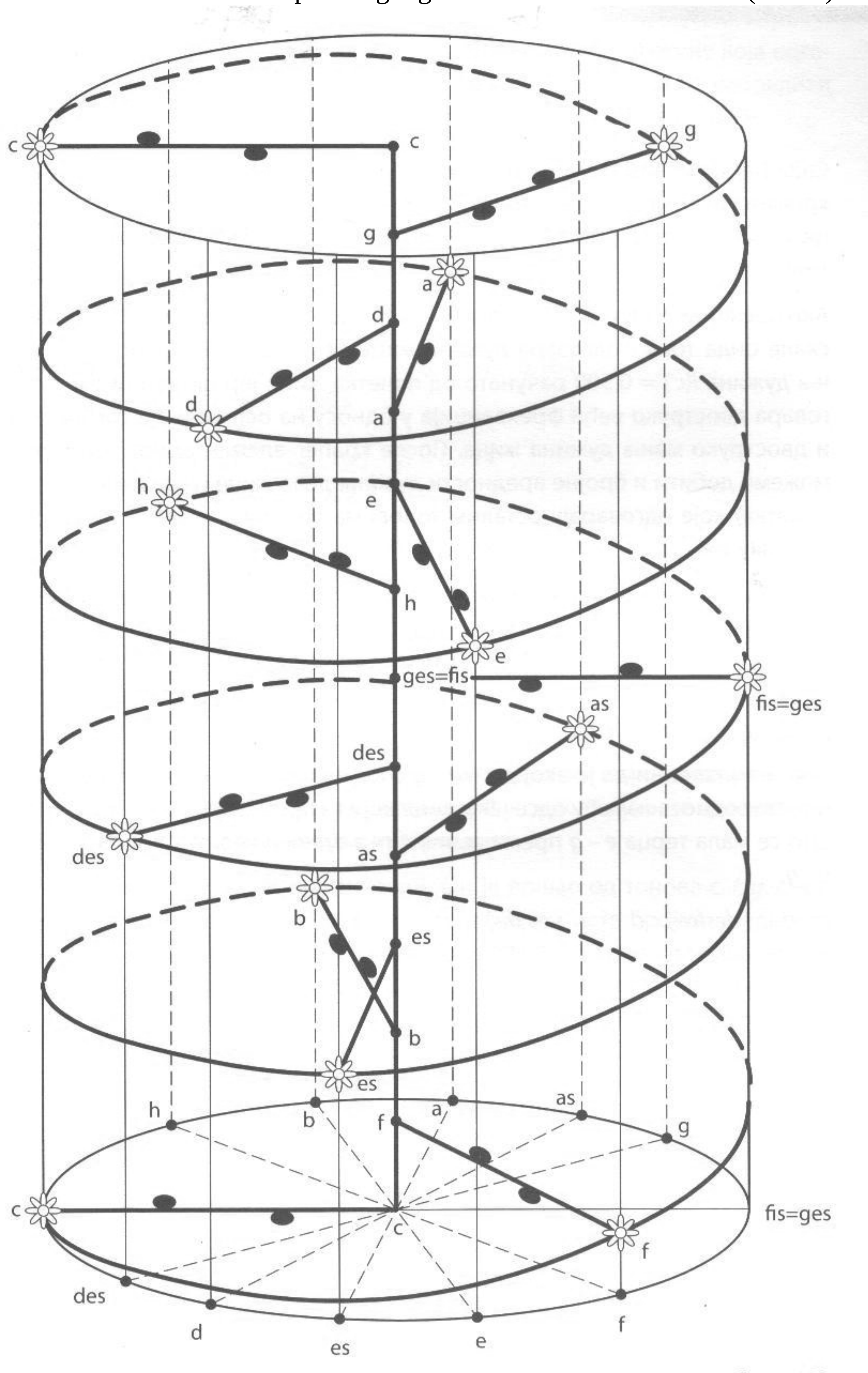


Bild 6

Ähnlich wie beim mathematischen Modell der Ananas entscheiden wir uns für den Zylinder. Seine Basis ist der Kreis, entlang des Kreisumfangs werden in gleichen Abständen 12 Töne der chromatischen temperierten Leiter c-cis=des-d-es-e aufgetragen. Die senkrechte Achse des Zylinders wird der Quintenstamm genannt. Ihr unteres Ende liegt deckungsgleich mit der Mitte des Basiskreises und in diesem Punkt befindet sich der Ton c. Den Quintenstamm hochkletternd tragen wir in gleichen Abständen die Töne des Quartenkreises auf (oder absteigend die Töne des Quintenkreises). Das sind die Töne c-f-b-es-as-des... und gleichzeitig sind es die Punkte aus denen die Äste unseres Musikbaumes wachsen.

Durch die Basiskreispunkte die den Tönen der chromatischen Leiter entsprechen werden senkrechte Ortholinien die parallel zum Quintenstamm verlaufen konstruiert. Sie gehören zu der Zylinderhülle und verbinden gleichzeitig alle gleichnamigen Oktaventöne.

Danach werden die Äste des Baumes konstruiert. Der erste Ast verbindet die Kreismitte mit dem Ton c. Der zweite geht vom Ton f aus, befindet sich in der Ebene parallel zur Basisebene und bildet zusammen mit dem ersten Ast einen Winkel von 150^{o} und schneidet dabei die f – Ortholinie in dem Punkt, dem auch der Ton f entspricht. Der dritte Ast geht vom Ton b aus und bildet einen Winkel mit dem vorhergehenden Ast von 150^{o}. Auf die gleiche Art und Weise, der Kreisbewegung folgend „wächst“ Ast für Ast, bis zum dreizehnten Ast, der den Quintenkreis (Quartenkreis) schließt und genau in den ersten Ast projiziert wird.

Die Punkte und Töne in denen die Äste an der Oberfläche des Zylinders enden und die entsprechende Ortholinie markieren wir mit Blüten. Abschließend können wir die Quintenspirale konstruieren, die gleichmäßig und langsam hochklettert, alle Blüten und Töne verbindet und nach fünf vollen Umdrehungen um die Hülle des Zylinders den Quintenkreis schließt.

Möglich sind auch Konstruktionen anderer krummen Linien entlang der Zylinderoberfläche, die bestimmte Töne verbinden und unterschiedliche musikalische Bewegungen beschreiben, ähnlich den Spiralen des Zapfens. Hier sei erwähnt, dass die allgemeinen Gleichungen der Schraubenlinie wie folgt lauten:
$x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$; wobei a den Radiusdes Zylinderbasiskreises darstellt.

Dieses mathematische Modell entspricht exakt dem chromatischen temperierten Tonsystem, seinen Tönen, Oktaven, seinem Quintenzirkel, seinen musikalischen Bewegungen und seiner vollständigen Ordnung. Andererseits entspricht es auch der Pflanze, ihrem Stamm, ihren Ästen und Blüten (oder Blättern) deren Divergenzwinkel 150^{o} beträgt und nahe an dem Wert des goldenen Winkels liegt. Die hier aufgeführten Analogien sind viel zu stark als dass sie ignoriert werden dürften. Sie überzeugen, dass die klassische Musik, die sich an das aufgeführte Tonsystem anlehnt, ihre Vitalität und Langlebigkeit auf natürlichem und gesundem Fundament gründet.

Literatur

[1] Despić D., „Teorija Muzike“, Zavod za udžbenike, Beograd, 1997

[2] Behr R. , „Neue Erkenntnisse über die Mathematik der Pflanzenblattstellung“, Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, 47, 2, 1994, S. 67 – 73

[3] Beutelspacher A., Petri B., „Der goldene Schnitt“, Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg – Oxford, 1996

[4]Pejović T., „Matematička Analiza 5“, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1960

[5]Čanak M., „Matematika i Muzika“, Zavod za udžbenike, Beograd, 2009

Anschrift des Verfassers
Prof. Dr. Miloš Čanak
11000 Beograd, Brzakova 4
Serbien
E-Mail: miloscanak 12@yahoo.com

Der Blick auf das Ganze: Georg Helm (1851–1923) – ein angewandter Mathematiker mit philosophischen und pädagogischen Ambitionen

Waltraud Voss, TU Dresden

Vorbemerkung

In meinen früheren Vorträgen kam Georg Helm schon mehrfach vor, jeweils unter einem anderen Aspekt: Naturwissenschaftliche Gesellschaft Isis in Dresden, Berufungsvorgänge an Polytechnikum/TH Dresden, Europäische Gradmessung, Versicherungslehre an Polytechnikum/TH Dresden, Helm als Professor in Dresden. Heute will ich näher auf Georg Helms Arbeiten zur Energetik und in diesem Zusammenhang auf seinen Kontakt zu Wilhelm Ostwald eingehen. Dabei stütze ich mich auf Helms Schriften, auf den wissenschaftlichen Briefwechsel Ostwalds, der vor einem halben Jahrhundert (1961) publiziert wurde und auf die „Lebenslinien" Wilhelm Ostwalds, die als dessen Selbstbiographie zuerst 1926/27 erschienen sind. Kurze Angaben zu den im Text genannten Personen erscheinen im Anhang.

Helms Leben und Wirken in Kürze

Der zweite Sohn eines angesehenen Dresdner Tischlermeisters trat nach Abschluss der Annenrealschule sechzehnjährig in die Dresdner Polytechnische Schule ein und absolvierte hier die Lehrerabteilung unter der Leitung des Mathematikers Oskar Schlömilch. Mit dem Dresdner Abschlusszeugnis von 1871 bezog er die Universität Leipzig, war hier unter der Leitung von Karl Bruhns an den Arbeiten zur Europäischen Gradmessung beteiligt, legte 1873 die Staatsprüfung für das höhere Schulamt ab und komplettierte seine Studien an der Universität Berlin bei Karl Weierstraß, Leopold Kronecker und Hermann von Helmholtz. Vierzehn Jahre lang unterrichtete er in Dresden Physik und Mathematik, und von 1888 bis 1919 (1923) war er Professor für angewandte Mathematik an Polytechnikum / TH Dresden; 1910/11 stand er als Rektor an der Spitze der TH Dresden.

Helm gehörte zu den Mathematikern und Naturwissenschaftlern, die die Ergebnisse ihrer Wissenschaft stets im großen kulturgeschichtlichen und gesellschaftlich-ökonomischen Zusammenhang sahen und die diese vielschichtigen Bezüge auch einem breiteren Publikum zu vermitteln verstanden. Das zeigte schon die Antrittsrede des neuberufenen Professors: „Über den Einfluss der Bewegungserscheinungen auf unsere Erkenntnis". Das zeigten später auch der von Rektor Helm in der Aula der TH Dresden zu Königs Geburtstag am 25. Mai 1910 gehaltene Festvortrag „Die Stellung der Theorie in Naturwissenschaft und Technik" und viele in den Hauptversammlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis zu Dresden gehaltene Vorträge. Das philosophische Rüstzeug hatte Helm in Dresden durch Oskar

Schlömilch erhalten; auf dieser Basis vervollständigte er seine philosophischen Kenntnisse an den Universitäten Leipzig und Berlin. Er machte sich insbesondere die Ideen von Richard Avenarius und Ernst Mach zu eigen. Nicht unerwähnt soll der Einfluss des „Vereins zur Förderung der freien Rede“ bleiben, der 1861 an der Polytechnischen Schule Dresden begründet worden war und dem Helm als Student - und später als Ehrenmitglied - angehörte. Helms glänzender Vortragsstil, gut verständlich und mitreißend, wie er ihm allgemein nachgerühmt wurde, ist wohl auch der Vereinsschulung zu danken.

Lehrer an der Annenschule von 1874 bis 1888

Von 1874 bis 1888 war Georg Helm Lehrer an der Annenschule in Dresden. In diese Zeit fallen auch Promotion, Heirat und erste Arbeiten zur Energetik. 1881 wurde er von der Universität Leipzig zum Dr.phil. promoviert. Als Dissertation hatte er sechs gedruckte Exemplare seiner Schrift „Beiträge zur geometrischen Behandlung der Mechanik“ eingereicht, die 1880 in der von Oskar Schlömilch begründeten „Zeitschrift für Mathematik und Physik“ erschienen war; Gutachter waren Felix Klein und Carl Neumann.
Die Höherentwicklung der Annenschule, einer Realschule, zum achtstufigen Realgymnasium hat Helm mitgestaltet und mitbegleitet. Im März 1885 erschien im „Programm der Annenschule“ seine umfangreiche Abhandlung „Der physikalische Unterricht auf dem Realgymnasium“, in der er - neben dem Lehrplan - auch seine Gedanken zur Methodik des Physikunterrichts entwickelte. Mit direktem Bezug auf Richard Avenarius und Ernst Mach betonte er, dass sich diese Methodik „in den Dienst jenes allgemeinen Prinzips, gegebene Vorstellungsmassen mit geringstem Kraftaufwande zu beherrschen“ stellt.
1887 wurde Helms in einer Hauptversammlung der Isis gehaltener Vortrag „Die bisherigen Versuche, Mathematik auf volkswirtschaftliche Fragen anzuwenden“ in den „Abhandlungen“ der Isis veröffentlicht. Hierin verglich er volkswirtschaftliche Vorgänge mit gewissen Naturprozessen, würdigte kritisch die bisherigen Versuche, mathematische Methoden in dieses Gebiet einzuführen und hob das Avantgardistische im Denken von Hermann Heinrich Gossen hervor, dessen bereits 1854 erschienenes Buch „Entwickelung der Gesetze des menschlichen Verkehrs …“ zunächst vergessen worden war. Aber „vielleicht“, räumt Helm ein, „blickt man einst auf die Begründer mathematischer Volkswirthschaftslehre zurück, wie wir jetzt auf Galilei, vielleicht auch nur auf Archimedes´ oder Stevins mechanische Versuche, - mehr mit psychologischem Interesse die geistvollen Gedanken bewundernd, als darin die historische Begründung einer neuen Wissenschaft verehrend.“ Jedenfalls sei ein erster Schritt getan, und was die weitere Mathematisierung der Volkswirtschaftslehre anbetrifft, ist Helm zuversichtlich, denn: „Die Gesetze, welche die Natur beherrschen und die mathematischen

Formen, in denen wir die Natur denken, müssen sich auch im Zusammenleben der Menschen wieder finden, das ja ein Stück der Natur ist."

Im selben Jahr, 1887, veröffentlichte Helm „Die Lehre von der Energie, historisch-kritisch entwickelt", an der er seit 1885 arbeitete. In diesem Buch stellte er als erster „Beiträge zu einer allgemeinen Energetik" vor und brachte die Begriffe „Energetik" und „Monismus" - im Sinne einer energetischen Einheit der Welt - in Zusammenhang. „Energetik" in diesem Sinne wird heute vor allem mit dem Namen Wilhelm Ostwald verbunden, doch sah Ostwald selbst in Helm den „Arbeits- und Denkgenosse(n) meiner eigenen Zeit, der mir als Energetiker vorangegangen war".

Helms Energetik-Auffassung und Kontakte zwischen Helm und Ostwald

Bevor wir auf Helms Auffassung zur Energetik im Jahre 1887 (und später im Jahre 1898) und auf die persönlich-wissenschaftlichen Beziehungen zwischen Helm und Ostwald näher eingehen, sei festgehalten, dass Ostwald das Jahr 1892 „als das Entwicklungsjahr meiner Energetik" bezeichnete (Lebenslinien, S. 224). 1890/91 war Ostwald die „Erleuchtung" gekommen, dass die Energie nicht eine Substanz neben der Materie sei, wie das Robert Mayer sah, sondern die einzige Substanz in unserer Welt überhaupt und dass damit „die ganze Physik, die bisher allgemein als eine Lehre von den Kräften dargestellt worden war, nunmehr als eine Lehre von den Energien dargestellt werden musste" (ebenda, S. 220/221).

Nun zu Helms Buch aus dem Jahre 1887! In drei Teilen behandelte Helm (I) „Die Quellen der Energie-Ideen", (II) „Die Begründung des Energiegesetzes" und (III) „Die Energetik". Seine Vision entwickelte er im Dritten Teil; dort heißt es (S. 57): *„So entsteht denn die Aufgabe, das Energiegesetz zu einer Weltanschauung auszubilden, welche die Mechanik als Naturwissenschaft in sich schließt, aber über ihre Grenzen hinausgreift."* Dabei weist er auf William Rankine hin, der sich als Erster in diesem Sinne ausgesprochen habe. Und weiter Helm: *„Hier sind kräftige Keime zu neuem Gedeihen: Im Energiegesetz entwickelt sich eine Weltformel, wie sie Laplace vorschwebte, doch weit hinausgreifend über das Gebiet Newtonscher Erkenntnis."*

<u>Kontakt Georg Helms zu Wilhelm Ostwald</u>

Wilhelm Ostwald wirkte seit 1887 als Professor für physikalische Chemie an der Universität Leipzig. Die Frage, ob der Raum diskret (mit „Atomen") oder kontinuierlich (mit „Kraft" oder „Energie") gefüllt sei, werden wir heute – aufgrund der Erkenntnisse der Physik aus den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts – mit „sowohl als auch" beantworten. Damals jedoch standen sich zwei Lager von Wissenschaftlern gegenüber. Ostwald war bekanntlich lange Zeit für die „Atomistik", wie noch die erste Auflage seines vielgenutzten „Lehrbuchs der allgemeinen Chemie“, erschienen 1885 bis 1887, zeigt. Zu dieser Zeit sah Georg Helm in der „Energetik“ die künftige Weltanschauung, die alle Bereiche der Gesellschaft durchdringen wird. Helms Gedanken zur Energetik waren ungewohnt und stießen auf Ablehnung – so man sie denn überhaupt zur Kenntnis nahm. Auch Ostwald traf bekanntlich zunächst auf Ablehnung, als er in der physikalischen Chemie für die bahnbrechenden Ideen von Svante Arrhenius und später von van´t Hoff stritt. So sah Helm in Ostwald quasi einen „Leidensgenossen“, wie aus seinem Brief an Ostwald vom 20. Januar 1891 (Körber, S. 73) hervorgeht:

„Die Energievorstellungen befinden sich gegenüber dem Systeme der analytischen Mechanik in einer ähnlichen Lage, wie Sie dieselbe in Bremen (auf der Naturforscherversammlung – W.V.) *als die Lage der physikalischen Chemie gegenüber den bisherigen chemischen Ansichten dargelegt haben. Innerhalb der einmal gezogenen Schranken ist das System von den größten Forschern so vollendet ausgebildet und so leistungsfähig geworden, dass ein Blick über die Schranken hinaus für müßig oder verwerflich gehalten wird. Und doch scheint es mir unumgänglich, die Verwendbarkeit des Energieprinzips für rein mechanische Vorgänge klarzustellen, … Ein einheitlicher Aufbau der Naturwissenschaft auf dem Energiegedanken muß doch vor allem das gesichertste Wissen, die Mechanik, unter diesen Gesichtspunkt zu bringen verstehen. So darf wohl gerade bei Ihnen meine Untersuchung auf eine freundliche Aufnahme hoffen.“*

Die erwähnte Untersuchung war die 1890 erschienene Arbeit Helms „Über die analytische Verwendung des Energieprinzips in der Mechanik“.

Ostwalds „Lehrbuch der Allgemeinen Chemie“ erschien 1893 in der zweiten Auflage. In den ersten Teil des 2. Bandes – mit der Überschrift „Chemische Energie“ – hatte er Gedanken von Helm aufgenommen. Dafür bedankte sich Helm in seinem Brief vom 16. Mai 1893, dabei das Gemeinsame betonend, aber auch auf Unterschiede in der Auffassung und in der mathematischen Darstellung hinweisend. Man blieb in Kontakt, und in dem Brief, den Ostwald am 4. Juni 1893 an Helm schrieb, heißt es (Körber, S. 76):

„Besten Dank für Ihren interessanten Brief, der für mich der vielversprechende Anfang eines hoffentlich recht lange währenden Austausches über einen Gegenstand ist, dessen Bedeutung für Wissenschaft und Weltanschauung gleich groß ist, und gegenwärtig von keinem anderen übertroffen wird. …“

Helm arbeitete in dieser Zeit an seinem Buch „Grundzüge der mathematischen Chemie“, das 1894 in Leipzig erschien, und 1897 unter dem Titel „The principles of mathematical chemistry“ in New York. Der Begriff „mathematische Chemie“ wurde von Helm geprägt. Anknüpfend an Arbeiten von Williard Gibbs (USA) entwickelte Helm in seinem Buch die allgemeine (physikalische) Chemie in einheitlicher Linie aus dem Energieprinzip heraus.

Von Februar 1895 bis Oktober 1897 erschienen zwölf Rezensionen dieses Buches, meist anerkennend und empfehlend, darunter als erste die von Wilhelm Ostwald in der Zeitschrift für physikalische Chemie (Februar 1895).

Vortrag in Lübeck 1895 und Helms Buch „Die Lehre von der Energie“ 1898

Am 27. April 1895 teilte Helm Ostwald mit, dass Herr Eilhard Wiedemann ihn im Auftrag des Lübecker Vorbereitungsausschusses aufgefordert habe, auf der diesjährigen Naturforscherversammlung über Energetik zu berichten. *„Sehr lieb wäre es mir selbstverständlich, wenn Sie die Sache unterstützten, insbesondere auch durch Ihre Beteiligung an der Sitzung in Lübeck, wo man vielleicht der Energetik dies und das am Zeuge flicken will; ….“* (Körber, S. 79).

Die Präsenz Ostwalds wurde auch von anderen gewünscht, besonders von Boltzmann, der in seinem Brief vom 1. Juni 1895 an Ostwald seine Lübecker Absichten kund tat (Körber, S. 21): *„Ich möchte, wenn möglich eine Debatte … provociren, hauptsächlich um selbst zu lernen. Dazu ist vor allem notwendig, dass die Hauptvertreter der Richtung – anwesend sind. Ich brauche Ihnen nicht erst zu sagen, wie lieb mir Ihre Anwesenheit wäre.“*

Auf der 67. Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, die vom 16. bis 20. September 1895 in Lübeck stattfand, sprachen sowohl Georg Helm als auch Wilhelm Ostwald, aber vor unterschiedlichen Hörerkreisen. Helm gab auf der Vereinigten Sitzung von rund 150 Mathematikern und Physikern einen „Überblick über den derzeitigen Stand der Energetik“. Daran schloss sich eine mehrstündige Debatte an. Ostwald war bei dem Vortrag Helms anwesend und trug die Diskussion dazu ganz wesentlich mit. Seinen eigenen Vortrag hielt er aber in einer der Allgemeinen Versammlungen über „Die Überwindung des wissenschaftlichen Materialismus“. Hierin setzte sich Ostwald vom „Atomismus“ ab, von der Materie als Substanz, auch von dem „Mayerschen Dualismus“ der zwei Substanzen Materie und Energie und kreierte die Energie als alleinige Substanz, als „allgemeinste Substanz“, als das allein „Vorhandene in Raum und Zeit“. Der Titel des Vortrags war spektakulär genug und sorgte bereits im vorhinein für große Publikums- und Presseaufmerksamkeit.

Festzuhalten ist, dass für Ostwald die Energie als „Substanz“ existiert, objektiv und unabhängig vom menschlichen Bewusstsein. Hier liegt der wesentliche Unterschied zu Georg Helm: Für Helm sind Eindrücke unserer Sinnesorgane, Erscheinungen, Beobachtungen, Erfahrungen das einzig Gegebene, das zusammengefasst und geordnet werden muss, wobei die Ordnung zweckmäßig zu sein hat, aber durchaus nach verschiedenen Prinzipien erfolgen kann. Nach Helm sollte man auch in der Energie, in den Energiegesetzen, nichts weiter sehen als den für seine Zeit gelungensten Ausdruck der quantitativen Beziehungen zwischen den

Naturerscheinungen. Philosophisch schließt Helm an Ernst Mach und damit an die große Richtung des subjektiven Idealismus an.

Viel später erinnerte sich Arnold Sommerfeld an die heißen Lübecker Diskussionen:

„Das Referat für die Energetik hatte Helm-Dresden; hinter ihm stand Wilhelm Ostwald, hinter beiden die Naturphilosophie des nichtanwesenden Ernst Mach. Der Opponent war Boltzmann, sekundiert von Felix Klein. Der Kampf zwischen Boltzmann und Ostwald glich, äußerlich und innerlich, dem Kampf des Stiers mit dem geschmeidigen Fechter. Aber der Stier besiegte diesmal den Torero trotz all seiner Fechtkunst.“ (Arnold Sommerfeld, in Wiener Chem. Ztg. 47 (1944), S. 25)

Helm hatte von Lübeck aus am 17. September an seine Frau geschrieben:

„Die große Aktion liegt hinter mir. Der Vortrag ist mir, glaube ich, ganz gut gelungen, wurde beklatscht und gelobt, aber in der Diskussion ging es doch hart her. … Er (Boltzmann W.V.)*, später Klein, Nernst, Oettingen berührten dabei Dinge, auf die ich durch die von mir erbetenen brieflichen Berichtigungen und Bemerkungen gar nicht vorbereitet war, die ich vielmehr ganz außer Diskussion stehend angesehen hatte, … Ostwald und Boltzmann gerieten tüchtig aneinander, doch kam die Diskussion nicht zu Ende und soll heute Nachmittag fortgesetzt werden.“* (Körber, S. 118)

Bekanntlich mündete die Diskussion in eine literarische Auseinandersetzung, wie etwa in „Wiedemanns Annalen“ (Annalen der Physik und Chemie) zu verfolgen ist. Gelegentlich mahnte Ostwald Helm in dieser Auseinandersetzung zur Gemütsruhe. (Körber, S. 82; Brief Helms vom 3.2.1896). Jahrzehnte später – 1924 – (Philosophie der Gegenwart in Selbstdarstellungen, Bd. 4) bemerkte Ostwald über den Einfluss der Lübecker Naturforscherversammlung auf die Richtung seiner eigenen weiteren Forschungen:

„Für mich war dies Erlebnis eine Aufforderung, durch die praktische Anwendung der gewonnenen Einsichten in möglichst vielen Einzelfällen die Richtigkeit und heuristische Brauchbarkeit der Energetik nachzuweisen. Dies geschah hauptsächlich durch die Bearbeitung der Elektrochemie, welche hierdurch die wissenschaftliche Gestalt und Ordnung erhielt, die sie seitdem behalten hat.“

- Ostwalds Buch „Die Elektrochemie. Ihre Geschichte und Lehre“ erschien 1896. – Anfang 1895 hatte Ostwald der Leipziger Verlagsfirma Veit & Co Georg Helm für ein angedachtes Energetik-Buch-Projekt vorgeschlagen, und dieser hatte zugesagt. 1898 nun kam dieses Buch unter dem Titel „Die Energetik nach ihrer geschichtlichen Entwicklung“ heraus.

„Überall“ – so Helm im Vorwort – *„ist es ein leitender Gedanke, der die Blätter des Buches durchweht: Die Energetik ist eine einheitliche Gedankenentwicklung, eine eigenartige Weise*

umfassender Naturerkenntnis, … Als ein Ganzes muss (sie) verstanden werden, als eine große Wendung menschlicher Auffassung des Naturgeschehens.“

Helm gliederte das Buch in acht Teile.

Erster Teil: Die Begründung des ersten Hauptsatzes.

Zweiter Teil: Die Vorbereitung des zweiten Hauptsatzes.

Dritter Teil: Die klassische Thermodynamik.

Vierter Teil: Neue Anläufe, Kämpfe und verfehlte Versuche.

Fünfter Teil: Die energetische Behandlung der Chemie.

Sechster Teil: Die energetische Begründung der Mechanik.

Siebenter Teil: Die Energiefaktoren.

Achter Teil: Die mechanische Richtung der Energetik und die mechanischen Bilder.

Im Achten Teil würdigte Helm die Arbeiten der neueren Physik, insbesondere auch die von Ludwig Boltzmann, die, wie er zugab, durchaus auch mittels mechanischer Analogien die Energetik förderten. Die Bedenken gegen mechanische (atomistische) Bilder zur Beschreibung von nicht-umkehrbaren Erscheinungen habe Boltzmann zwar durch Verwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen im wesentlichen beseitigt – aber, so Helm (S. 360-362):

„Eine andere Frage ist es, … ob … der konsequent durchgeführte Atomismus ein zweckmäßiges Weltbild liefert. … Die mechanische Weltanschauung ist ein universelles Abbildungsverfahren, aber sie liefert kein universelles Weltbild; mit ihrer Ausdehnung schwindet ihre Kraft.“ Helm weiter: *„Wir schreiben gewissen Dingen unserer Umgebung Existenz zu, um uns Ruhepunkte in der Erscheinungen Flucht zu verschaffen. … Wir haben damit Stichworte, unter denen wir unsere Erfahrungen bequem wiederfinden. … Freilich ist das Atom ein gutes Stichwort, um die Erfahrungen der Stöchiometrie, der Körperkonstitution, … und dergleichen darunter wiederzufinden, aber für die Thermodynamik schon und für viele andere Erfahrungsgebiete wird es doch recht unbequem. … Jede spezielle Theorie mag ihr Gebiet enger ziehen und davon ausgehen, dass der Äther existiert, oder die Atome oder die Newtonsche Kraft oder in fester geometrischer Verbindung stehende unzerstörbare Massen und dgl. Aber für die allgemeine theoretische Physik existieren weder die Atome noch die Energie, noch irgendein derartiger Begriff, sondern einzig jene aus den Beobachtungsgruppen unmittelbar hergeleiteten Erfahrungen. Darum halte ich es auch für das beste an der Energetik, dass sie in weit höherem Maße als die alten Theorien befähigt ist, sich unmittelbar den Erfahrungen anzupassen, …“*

Zu einigen weiteren Publikationen (und Aktivitäten) Georg Helms

Helms Bücher zur Energetik waren nur ein Teil seiner weitgespannten beruflichen Aktivitäten und seiner Publikationstätigkeit, die sich auch auf Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungswesen erstreckte. Dazu nur wenige Bemerkungen. Die Publikation „Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Kollektivbegriffe“ erschien 1902 im ersten Band der von Ostwald begründeten „Annalen der Naturphilosophie“ (S. 364-381). Auf diese Arbeit Helms bezog sich Richard von Mises, als er schrieb:

„Die moderne Entwicklung der sogenannten Kollektivmaßlehre durch Theodor Fechner und Heinrich Bruns steht der „Häufigkeitstheorie“ der Wahrscheinlichkeit nahe. Am deutlichsten hat sich in dieser Richtung Georg Helm, einer der Mitbegründer des Energieprinzips, ausgesprochen, … “ (von Mises, S. 26/27, 270)

Einer Anregung Ostwalds, 1903 wieder einen Beitrag zu den „Annalen der Naturphilosophie“ beizusteuern, konnte Helm nicht nachkommen, da er, wie er Ostwald mitteilte, an einem Buch schreibe und eine Menge Versicherungsaufträge habe. (Körber, S. 85)

In den „Annalen der Naturphilosophie“ erschien dann 1907, im 6. Band (S. 366-372), wieder eine Arbeit von Helm: „Die kollektiven Formen der Energie“. Über dieses Thema trug Helm auch auf der Naturforscherversammlung im September 1907 in Dresden vor.

Bei dem von Helm 1903 erwähnten Buch handelte es sich um "Die Theorien der Elektrodynamik nach ihrer geschichtlichen Entwicklung", das 1904 in Leipzig erschien. Dieses Buch ist aus den Vorlesungen hervorgegangen, die Helm seit Jahren an Polytechnikum / TH Dresden über das Gebiet gehalten hatte. Auch Helms „Grundlehren der höheren Mathematik“ sind unmittelbar aus seiner Lehrtätigkeit erwachsen. Dieses Buch kam 1910 heraus, wurde mehrfach nachgedruckt und 1921 neu aufgelegt. In knapper Form vermittelte es eine einheitliche Übersicht des gesamten Stoffes der mathematischen Grundlagenausbildung für Studenten der Ingenieur- und der Naturwissenschaften, so, wie ihn Helm seit 1906 in einer viersemestrigen Vorlesung darbot – ein Konzept, das sich in seinen Grundzügen bis in unsere Tage bewährt hat. Es war das erste derartige Lehrbuch im deutschsprachigen Raum. Sehr verdient gemacht hat sich Helm um die Versicherungslehre an der TH Dresden. Nach bereits vorher angebotenen Vorlesungen begründete er zum SS 1896 das Versicherungsseminar und regte 1913 den Lehrstuhl für Versicherungsmathematik an, der dann 1919, nach dem 1. Weltkrieg begründet wurde, - als erster im deutschen Hochschulwesen, der ganz der Versicherungsmathematik gewidmet war. Bis kurz vor seinem Tod blieb Helm als gesuchter Berater in Versicherungsfragen tätig. Georg Helm gehörte zu den Dresdner Hochschullehrern, die unermüdlich für das Promotionsrecht auch der Allgemeinen Abteilung („Lehrerabteilung“) der TH Dresden kämpften und ihr Ziel 1912 auch erreichten.

Quellen:

Helm, Georg: Die Lehre von der Energie, historisch-kritisch entwickelt. Nebst Beiträgen zu einer allgemeinen Energetik, Leipzig 1887

Helm, Georg: Die bisherigen Versuche, Mathematik auf volkswirtschaftliche Fragen anzuwenden. – In: Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis zu Dresden. Abhandlungen, 1887, S. 3-13

Helm, Georg: Die Energetik – nach ihrer geschichtlichen Entwicklung, Leipzig 1898

Helm, Georg: Grundzüge der mathematischen Chemie, Leipzig 1894

Helm, Georg: Die kollektiven Formen der Energie, Braunschweig 1907

Körber, Hans-Günther: Aus dem wissenschaftlichen Briefwechsel Wilhelm Ostwalds, I. Teil, Berlin 1961 (darin: Wilhelm Ostwald – Georg Helm auf S. 71-86)

JB 1894-95: Jahresbericht der DMV, IV. Band 1894-95, Berlin 1897, S. 6-10 (Bericht über die Jahresversammlung in Lübeck)

Programm der Annenschule zu Dresden, 1885

Ostwald, Wilhelm: Lebenslinien – Eine Selbstbiographie. Nach der Ausgabe von 1926/27 überarbeitet und kommentiert von Karl Hansel. - Stuttgart, Leipzig 2003 (Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, math.-nat. Klasse, 61)

von Mises, Richard: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, Wien 1936 (Springer, zweite neubearbeitete Auflage)

Anhang

Kurze Angaben zu den im Text namentlich benannten Personen

Archimedes von Syrakus (etwa 287-212 v.u.Z.), griechischer Mathematiker und Physiker in Alexandria und Syrakus

Arrhenius, Svante August (1859-1927), schwedischer Physiker und Chemiker; Mitbegründer der physikalischen Chemie; Nobelpreisträger

Avenarius, Richard (1843-1896), Philosoph, „Empiriokritizist“, lehrte in Leipzig (1876) und Zürich

Boltzmann, Ludwig Eduard (1844-1906), österreichischer theoretischer Physiker und Philosoph, Prof. in Graz, Leipzig und Wien

Bruhns, Karl Christian (1830-1881), Mathematiker, Astronom, Geodät, Prof. in Leipzig

Bruns, Ernst Heinrich (1848-1919), Mathematiker, Astronom, Geodät, lehrte in Dorpat, Berlin, Leipzig

Fechner, Gustav Theodor (1801-1887), Naturforscher und Philosoph in Leipzig, Pantheist

Galilei, Galileo (1564-1642), italienischer Mathematiker, Physiker und Astronom, der die heliozentrische Lehre vertrat

Gibbs, Josiah Williard (1839-1903), Mathematiker und Physiker in den USA

Gossen, Hermann Heinrich (1810-1858), preußischer Jurist, Vorläufer der Grenznutzenschule in der Ökonomie

Helm, Georg Ferdinand (18. März 1851 Dresden - 13. September 1923 Dresden), Prof. der Mathematik an Polytechnikum/TH Dresden

von Helmholtz, Hermann (1821-1894), Physiker und Physiologe, Prof. in Königsberg, Bonn, Heidelberg, Berlin

van´t Hoff, Jacobus Henricus (1852-1911), niederländischer Chemiker, Mitbegründer der Physikalischen Chemie, Prof. in Amsterdam und Berlin; Nobelpreisträger

Klein, Felix (1849-1925), Mathematiker und Wissenschaftsorganisator, Prof. in Erlangen, München, Leipzig, Göttingen

Kronecker, Leopold (1823-1891), Mathematiker in Berlin

Mach, Ernst Waldfried Josef Wenzel (1838-1916), österreichischer Physiker, Philosoph, Wissenschaftstheoretiker, Prof. in Graz, Prag, Wien

Mayer, Julius Robert (1814-1878), Arzt und Physiker, formulierte den ersten Hauptsatz der Thermodynamik

von Mises, Richard (1883-1953), österreichischer angewandter Mathematiker, Begründer der Zeitschrift für Mathematik und Mechanik (ZAMM), Prof. in Straßburg, Dresden, Berlin und (nach 1933) in Istanbul (Türkei) und an der Harvard University (USA)

Nernst, Walther Hermann (1864-1941), Mitbegründer der Physikalische Chemie, Prof. in Göttingen und Berlin; Nobelpreisträger

Neumann, Carl Gottfried (1832-1925), angewandter Mathematiker, 1868 bis 1911 Prof. in Leipzig

von Oettingen, Arthur Joachim (1836-1920), deutsch-baltischer Physiker, Prof. in Dorpat (akademischer Lehrer von Wilhelm Ostwald) und Leipzig

Ostwald, Wilhelm (1853-1932), Mitbegründer der Physikalischen Chemie, Philosoph, Wissenschaftstheoretiker, Prof. in Riga und Leipzig; Nobelpreisträger

Rankine, William John Macquorn (1820-1872), schottischer Physiker und Ingenieur, einer der Begründer der Thermodynamik, ersetzte den Begriff „lebendige Kraft“ durch den Begriff „Energie“

Schlömilch, Oskar Xaver (1823-1901), Mathematiker, Prof. in Jena und seit 1849 in Dresden, Schulreformer in Sachsen

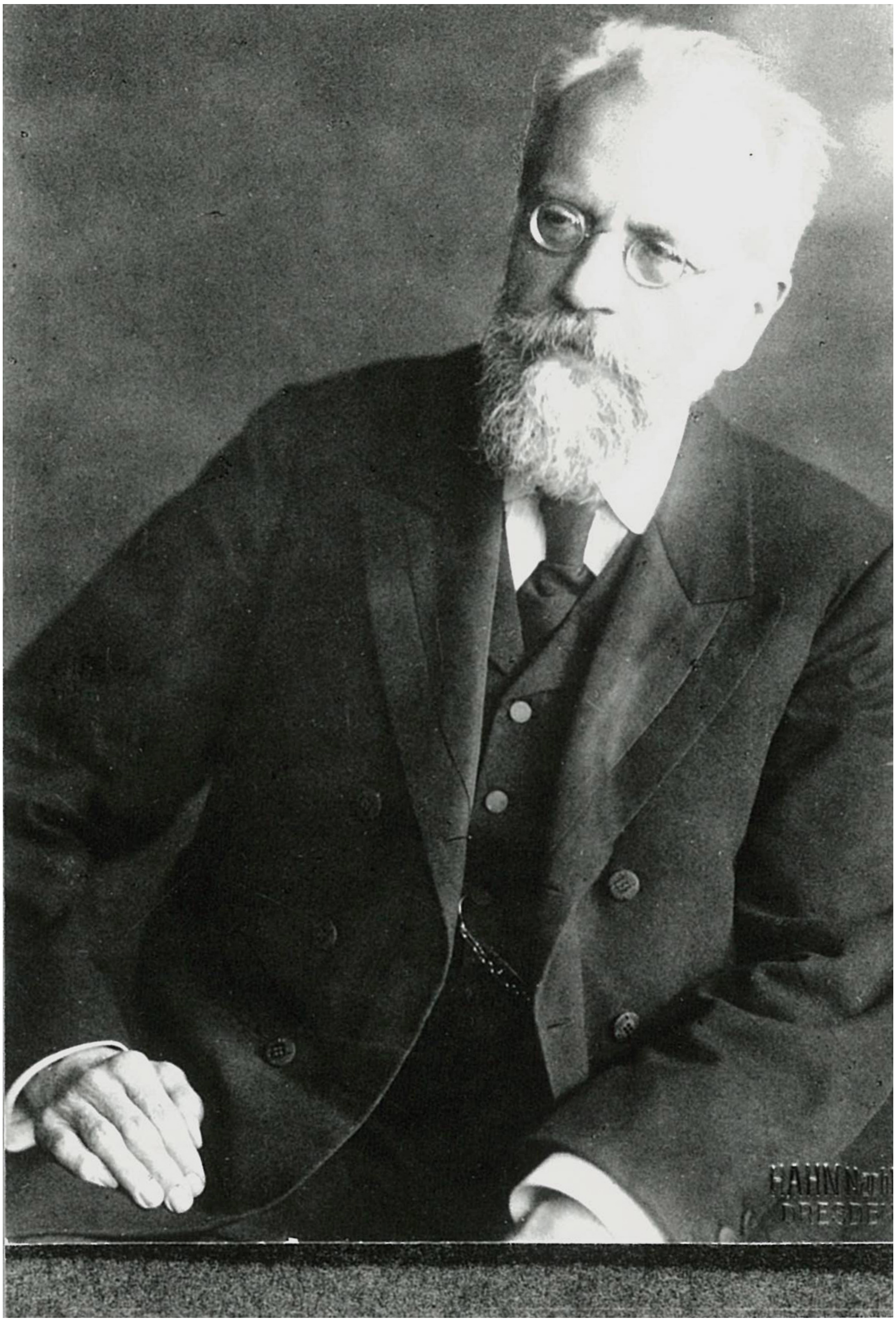
Sommerfeld, Arnold (1868-1951), Mathematiker und theoretischer Physiker, Prof. in Clausthal, Aachen, München

Stevin, Simon (1548-1620), niederländischer Baumeister, Kriegsingenieur und Cossist

Weierstraß, Karl Theodor Wilhelm (1815-1897), Mathematiker, Prof. in Berlin

Wiedemann, Eilhard Ernst Gustav (1852-1928), deutscher Physiker, lehrte in Leipzig, Darmstadt, Erlangen

Wiedemann, Gustav Heinrich (1826-1899), deutscher Physiker, ab 1871 Prof. in Leipzig, Herausgeber der „Annalen der Physik und Chemie" („Wiedemanns Annalen") (Vater von Eilhard W.)



Teilnehmer

Gerd Baron
Institut für Algebra und Geometrie, TU Wien,
Wiedner Hauptstr. 8-10/104, A 1040 Wien, Österreich
gerd.baron@tuwien.ac.at

* Martina Bečvářová 61
Katedra aplikované matematiky, Fakulta dopravní, ČVUT v Praze,
Na Florenci 25, CZ 11000 Praha 1, Tschechien
nemcova@fd.cvut.cz

Christa Binder
Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien,
Wiedner Hauptstr. 8-10/101, A 1040 Wien, Österreich
christa.binder@tuwien.ac.at

* Bernhelm Booss-Bavnbek 146
Roskilde University, Building 27
Department of Science, Systems, and Modelling / IMFUFA
DK 4000 Roskilde, Denmark
booss@ruc.dk

* Wolfgang Breidert 159
Baumgartenstr. 9, D 76316 Malsch, Deutschland
Wolfgang.Breidert@gmx.de

Miloš Čanak *(verhindert, schriftlich)* 165
11000 Beograd, Brzakova 4, Serbien
miloscanak12@yahoo.com

* Danuta Ciesielska 43
Institute of Mathematics,
Department of Mathematics, Physics and Technical Sciences,
Pedagogical University of Cracow,
ul. Podchorazych 2, PL 30-084 Kraków
smciesie@cyfronet.krakow.pl

Philip J Davis *(verhindert, Coautor)* 146
Division of Applied Mathematics, Brown University,
Providence, R.I., 02912 USA
Philip_Davis@brown.edu

* Sergui Demidov 9
Institute for the History of Science and Technology,
Staropanski per 1/5, RU 103012 Moscow, Russia
serd42@mail.ru

* Stefan Deschauer 25
Fachrichtung Mathematik, Professur für Didaktik der Mathematik,
TU Dresden, D 01062, Deutschland
Stefan.Deschauer@tu-dresden.de

* Stanislaw Domoradzki 43
Department of Mathematics, Faculty of Science and Nature,
University of Rzeszow, Rejtana 16a, PL 35-959 Rzeszow, Poland
domoradz@univ.rzeszow.pl

Gerlinde Faustmann
Kaisersteing. 6, A 2700 Wiener Neustadt, Österreich
gerlinde.faustmann@aon.at

* Jasna Fempl-Madjarević 88
5th Belgrade Gymnasium, MM Arhimedes and Math. Institute,
Vidikovacki venac 27, YU 11000 Belgrad, Serbien
jasnafm@gmail.com

* Hans-Joachim Girlich 93
Mathematisches Institut der Universität Leipzig,
Johannisg. 26, D 04103 Leipzig, Deutschland
girlich@math.uni-Leipzig.de

* Ivor Grattan-Guinness 139
43, St. Leonards Road, Hertford, Herts., SG14 3W, GB
eb7io6gg@waitrose.com

Detlef Gronau
Riglergasse 6/5, A 1180 Wien, Österreich
detlef.gronau@chello.at

* Harald Gropp 38
Hans-Sachs-Straße 6, D 65189 Wiesbaden, Deutschland
d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

* Friedrich Katscher 31
Mariahilferstr. 133, A 1150 Wien, Österreich
dr.katscher.vienna@chello.at

* Tercio Girelli Kill 153
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Pedagógica
Av. Fernando Ferrari 514, Campus Universitário
Alaor Queiroz de Araújo, Goiabeiras, 29075-910 – Vitoria, ES Brasilien
Espirito Santo, Brasilien
Tercio.Kill@gmail.com

Gerhard Kowol
Fakultät für Mathematik, Universität Wien,
Nordbergstr. 15, A 1090 Wien, Österreich
gerhard.kowol@univie.ac.at

* Tomaz Kranjc 128
Faculty of Education, Kardeljeva ploscad 16,
SL-1000 Ljubjana, Slowenien
tomaz.kranjc@pef.uni-lj.si

* Angela Lohri 83
Internationales Harmonik Zentrum, Universität für Musik Wien,
Lothringerstraße 18, A 1030 Wien, Österreich
angela.lohri@gmx.ch

Rita Meyer-Spasche
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik,
D 85748 Garching, und Römerstr. 10, D 80801 München, Deutschland
meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de

* Luboš Moravec 110
Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics,
Department of Mathematics Education,
Sokolovská 83, CZ-18675 Praha, Tschechien
moravec@karlin.mff.cunt.cz

* Katalin Munkacsy
Centre of mathematics education,
Elte, Pazmàny 1/C, H 1117 Budapest, Ungarn
katalin.munkacsy@gmail.com

* Christine Phili 75
Fac. of Applied Math.and Physics, Dept. of Mathematics,
National Technical University, Zografou Campus,
GR 15780 Athen, Griechenland
xfili@math.ntua.gr

* Zdzislaw Pogoda 52
Institute of Mathematics, Jagiellonian University,
ul. Łojasiewicza 6, PL 30-348 Kraków, Polen
zdzislaw.pogoda@uj.edu.pl

* Marko Razpet 130
University of Ljubljana, Faculty of Education,
Kardeljeva ploscad 16, SL-1113 Ljubljana, Slowenien
Marko.Razpet@fmf.uni-lj.si

* Nada Razpet 117
University of Primorska, Faculty of Education,
Cankarjeva 5, SL 6000 Koper, Slowenien
nada.razpet@fmf.uni-lj.si

Michael von Renteln
Institut für Analysis, Fakultät für Mathematik, KIT Karlsruhe,
D 76128 Karlsruhe, Deutschland
von@renteln.de

* Herwig Säckl 1
Traberweg 1, D 93049 Regensburg, Deutschland
herwsaeckl@aol.com

Karl-Heinz Schlote
Elie-Wiesel-Straße 55, D 04600 Altenburg
schlote@uni-hildesheim.de

Peter Schmitt
Fakultät für Mathematik, Universität Wien,
Nordbergstr. 15, A 1090 Wien, Österreich
Peter.Schmitt@univie.ac.at

Werner Schulze
Internationales Harmonik Zentrum, Universität für Musik, Wien,
Anton-von-Webern-Platz 1, A 1030 Wien, Österreich
schulze@mdw.ac.at

* Reinhard Siegmund-Schultze 20
University of Agder, Faculty of Engineering and Science
Gimlemoen, Postboks 422, N 4604 Kristiansand S, Norwegen
reinhard.siegmund-schultze@uia.no

Circe Mary Silva da Silva *(verhindert, Coautor)* 153
Federal University of Espirito Santo, Brasilien
cmdynnikov@gmail.com

* Annette Vogt 98
MPI für Wissenschaftsgeschichte,
Boltzmannstraße 22, D 14195 Berlin, Deutschland
vogt@mpiwg-berlin.mpg.de

Waltraud Voss *(verhindert, schriftlich)* 176
TU Dresden, Universitätsarchiv, D 01062 Dresden, Deutschland
Waltraud.Voss@tu-dresden.de

* Reiner Wieland
Linzerstraße 115/11, A 1140 Wien, Österreich
reiner.w@gmx.at

* Wieslaw Wojcic
Institute for the History of Science, Polish Academy of Sciences,
Nowy Swiat 72, PL 00-330 Warsaw, Polen
wwoj@ihnpan.waw.pl