Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte

10 =X= =10= =X= =10= =X= =10= =X= =10= =X= =10= =X= =10= =X= 10

X X

10 X. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik 10

X X

10 =X= =10= =X= =10= =X= =10= =X= =10= =X= =10= =X= =10= =X= 10

Ist Mathematik politisch korrekt?

Der Einfluß von Geschlecht, Sprache, Religion, Alter, Herkunft,

Gesellschaft, Kultur, ... auf die Beschäftigung mit Mathematik.

Tagung, 30. Mai bis 5. Juni 2010, Miesenbach (Niederösterreich)

Kurzfassungen der Vorträge

Herausgeber:

Dr. Christa Binder — *Tel.: +43 1 58801 10129*

Institut für Analyis und Scientific Computing — *FAX: +43 1 59901 10199*

Technische Universität Wien — *e-mail:* christa.binder@tuwien.ac.at

Wiedner Hauptstr. 8-10/101

A 1040 Wien, Österreich

Danksagung:

Ohne die großzügige Hilfe der folgenden Institutionen
wäre die Durchführung der Tagung nicht möglich gewesen.
Dafür herzlichen Dank.

Ministerium für Wissenschaft und Forschung

Amt der Niederösterreichischen Landesregierung, Abteilung Kultur und Wissenschaft

International Commission on the History of Mathematics (ICHM)

Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien

anonyme Spender

KULTUR NIEDERÖSTERREICH

Layout und Druckvorlage: Peter Schmitt

P R O G R A M M

Montag, 31. Mai, 2010

Dienstag, 1. Juni 2010,

Mittwoch, 2. Juni 2010,

Ausflug *zum Aviaticum (Flugzeugmuseum) in Wiener Neustadt und den Myrafällen*

Donnerstag, 3. Juni 2010,

Freitag, 4. Juni 2010,


DER TEUFEL
SONY
Inglesina

(oben) aufmerksames Publikum: *(von links)*
Christa Binder, Fritz Katscher, Detlef Gronau, Klaus Kühn

(links) Gruppenbild: *(von links)*
(vorne) Magdalena Hyksová mit ihrem Sohn
(erste Reihe) Marko Razpet, Rita Meyer-Spasche, Herwig Säckl, Waltraud Voss,
Myriam-Sonja Hantke, Christa Binder, Michaela Chocholová, Ulrich Reich, Friedrich Katscher
(zweite Reihe) Martina Bečvářová, Frau Pichler, Reiner Wieland, Frau Girlich,
Menso Folkerts, Harald Gropp, Nada Razpet, Annette Vogt,
Stefan Deschauer, Christine Phili, Gisela von Renteln, Peter Schmitt, Wolfgang Breidert
(dritte Reihe) Miloš Milovanović, Franz Pichler, Michael von Renteln,
Marlene Breidert, Klaus Barner, Karl-Heinz Schlote,
Sergui Demidov, Katalin Munkacsy

(nächste Seite) Im Seminarraum: *(von links)*
(Bank im Vordergrund) Friedrich Katscher, Reiner Wieland
(Bänke im Hintergrund) Harald Gropp, Christa Binder; Herwig Säckl, Herr Dynnikov, Klaus Barner;
Nada und Marko Razpet;
Michaela Chocholová, Martina Bečvářová; Christine Phili (verdeckt), Sergui Demidov

(Verzeichnis aller Bilder: Seite 308)

Wenn erst Euklids Elemente Allgemeingut sind, hat alleTyrannei ein Ende

Herwig Säckl, Regensburg

1. Einführung

Die Themenfrage unserer Tagung „Ist Mathematik politisch korrekt?" führt in die Sozialgeschichte, bzw. die Soziologie der Mathematik – die beiden Gebiete sind nicht klar zu trennen. Die erste systematische Beschäftigung mit dieser Form von Mathematikgeschichte findet sich, soweit ich sehe, in einer Arbeit von Dirk Struik aus dem Jahr 1942. In dem Aufsatz „On the Sociology of Mathematics" ([1]) beschreibt er deren Aufgabe so:

„The sociology of mathematics concerns itself with the influence of forms of social organization on the origin and growth of mathematical conceptions and methods, and the role of mathematics as part of the social and economic structure of a period." ([1], 58)

Die erste Hälfte dieser Erläuterung ist mit dem Einfluss gesellschaftlicher Organisation auf die Mathematik einseitig formuliert, die zweite dagegen mit der Mathematik als Teil der sozialen und wirtschaftlichen Struktur einer Epoche ist symmetrisch gefasst und lässt Raum für wechselweise Beziehungen und Einflüsse, also auch für die Wirkung der Mathematik auf die Gesellschaft. In diesem Sinn ist mein Beitrag mit einem Satz aus dem Kreis der französischen Enzyklopädisten betitelt: „Wenn erst Euklids Elemente Allgemeingut sind, dann hat alle Tyrannei ein Ende." Leider konnte ich das heroische Zitat nicht verifizieren, es ist einer Diskussion über konkrete Kunst und Demokratie entnommen.

Einige Jahre vor Stuik hat der polnische Arzt Ludwik Fleck in seinem Buch „Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache" ([2]) am Beispiel des Siphilisbegriffs „die soziale Bedingtheit jedes Erkennens" ([2], 53) dargestellt und in diesem Zusammenhang die wohl ersten selbständigen Begriffe für eine Sozialgeschichte der Wissenschaft eingeführt: das „Denkkollektiv" und den „Denkstil" ([2], 53 – 70). Diese Begriffe waren nicht politisch gemeint, sondern beziehen sich auf die Charakterisierung der Arbeit von und in wissenschaftlichen Gemeinschaften. Die beiden Arbeiten von Struik und von Fleck blieben aber zunächst isoliert, man könnte sagen, sie kamen im falschen sozialen Moment und Ort. Die berühmte Arbeit von Kuhn dagegen „The structure of scientific revolutions" ([3]) von 1962, 25 Jahre später, wurde geradezu erwartet. Jetzt war offenbar die Zeit reif, um über die „Struktur wissenschaftlicher Revolutionen" zu reden, über „Paradigmen" und „disziplinäre Matrizen", einige Jahre später über „historische Erfahrungsräume", über „historische Situationen", über „Räume des Wissens" und über mannigfache „Netzwerke", alles Begriffe, die auf die gesellschaftliche Einbettung von wissenschaftlichen Entwicklungen verweisen. Ab den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts wurden diese Betrachtungen auch für die Mathematikgeschichte genutzt, z.B. in Arbeiten von Bos und Mehrtens ([4], [5]).

Der utopisch überspitzte Titelsatz aus der französischen Aufklärung kennzeichnet die Überzeugung der französischen Aufklärer vom gewaltigen gesellschaftlich-politischen Potential der Mathematik, zu dessen Nutzung es offenbar eines umfassenden Bildungssystems bedarf. Davon ausgehend möchte ich im Folgenden an einigen Beispielen zeigen, wie in verschiedenen Bildungssystemen und gesellschaftlichen Situationen auf verschiedenen Ebenen versucht wurde und wird, die Mathematik zum Erreichen politisch-ideologischer und moralischer Ziele zu interpretieren und einzusetzen. Die Ebenen reichen dabei von der platonischen Utopie des idealen Staats über Erziehungsgesetze und Lehrpläne bis zum alltäglich benutzten Schulbuch.

2. Zur mathematischen Ausbildung der Kriegerphilosophen in Platons Staat

Der ideale Staat Platons, beschrieben in seinem Dialog „Politeia" ([6]), ist ein
3-Stände-Staat:
- Landwirtschaft, Handel, Gewerbe,
- Militär (Wächter, Krieger),
- Herrschende (Kriegerphilosophen),

in dessen Struktur sich menschliche Eigenschaften widerspiegeln:
- Bedürfnisse und Begierden,
- der Wunsch geschützt zu leben,
- die Fähigkeit zur Vernunft.

Die Gruppe der Herrschenden, die sich zur amtlichen Ausübung der Vernunft qualifiziert haben, soll dafür sorgen, dass ein gerechter Interessensausgleich für ein stabiles, harmonisches, konfliktfreies Miteinander in einem statischen Gleichgewicht nach innen und außen hergestellt wird. Die Qualifikation für das Amt eines Herrschenden ist umfassend und entsprechend langwierig, erst im Alter von 50 Jahren ist sie nach erfolgreichem Bestehen mehrerer Phasen abgeschlossen. Philosophen mit praktischer Erfahrung im Alltag und im Kriegswesen sollen so erzogen werden.

Wesentlicher Bestandteil dieser Erziehung ist auch eine intensive Schulung in den mathematischen Disziplinen Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik ([6], 521c – 531c). Die Begründung dafür ist dreifach: Zum ersten – minderen - geht es um den Erwerb von praktischen Fertigkeiten, zum zweiten – wichtiger - um allgemeine geistige Beweglichkeit, zum dritten und wesentlichen aber darum, „die Seele von dem Werdenden zu dem Seienden zu erheben", aus einem Zustand der Unvollkommenheit einen solchen der Vollkommenheit zu erreichen. Platon nennt diesen Vorgang die „Bildung der philosophischen Seele". Der Kern dieser Bildung besteht in der Entwicklung der Fähigkeit, hinter der Scheinwirklichkeit des Sichtbaren das Wesen, das Eigentliche der Dinge zu erfassen und so an der Wahrheit teilzuhaben. Jede der 4 mathematischen Disziplinen trägt dazu auf ihre Weise in besonderem Maß bei und so tauchen bei der Besprechung der Wirksamkeit der 4 Disziplinen die Begriffe Wahrheit, Wesen, Sein, das Gute, das Schöne in immer neuen Abwandlungen auf.

So heißt es für die Arithmetik:
„Denn dem Krieger ist es seiner Aufstellungen wegen notwendig, dieses zu verstehen; dem Philosophen aber, weil er sich dabei über das Sichtbare und das Werden erheben und das Wesen ergreifen muß, oder er ist doch nie der eigentliche Rechner. ... Unser Staatswächter aber ist ein Krieger und ein Philosoph."

Etwas weiter: „Siehst du also, sprach ich[Sokrates], Lieber[Glaukon], wie notwendig diese Kenntnis uns in der Tat sein muß, da sie die Seele so offenbar nötigt, sich der Vernunft selbst zu bedienen zum Behuf der Wahrheit selbst?" ...
„Aus allen diesen Gründen also dürfen wir die Kenntnis[der Arithmetik] nicht loslassen, sondern die edelsten Naturen müssen darin unterwiesen werden."
Diese Beschränkung auf die „edelsten Naturen" ist ein Hinweis auf den elitären Charakter dieser Ausbildung für wenige.

In der Geometrie wird zunächst deren offenkundiger Nutzen für das Kriegswesen kurz dargestellt. Wichtiger aber kann sie „machen, dass die Idee des Guten leichter gesehen werde" und weiter: „Denn offenbar ist die Meßkunst die Kenntnis des immer Seienden.- Also, Bester, wäre sie auch eine Leitung der Seele zur Wahrheit hin und ein Bildungsmittel philosophischer Gesinnung, ..." und schließlich: „So sehr als möglich müssen wir also, sprach ich, darauf halten, daß die Leute in deinem Schönstaate der Geometrie nicht unkundig seien."
Offenbar soll der ideale Staat als Ganzes die Idee des Guten und Schönen widerspiegeln.

Auch in der Astronomie wird zunächst die praktische Notwendigkeit für Ackerbau, Schiffahrt und Kriegskunst geklärt, sodann aber wichtiger, „daß diese die Seele nötigt, nach oben zu sehen, und von dem Hiesigen dorthin führt."
Etwas weiter wird verallgemeinernd deutlich gesagt, dass jegliche Wissenschaft nur mit dem Blick nach oben entstehen könne, der Blick vor die Füße bringe keine Erkenntnis.
Das ist auch eine Anspielung auf eine Anekdote, nach der Thales bei der sinnenden Betrachtung des gestirnten Himmels in eine Zisterne gefallen und darob von einer thrakischen Magd ausgelacht worden sei. (vgl. Blumenberg: „Das Lachen der Thrakerin")

Im Abschnitt zur Musik wenden sich die Gesprächspartner Sokrates und Glaukon ausdrücklich mit Grausen von denen ab, „welche die Saiten ängstigen und quälen und auf den Wirbel spannen." Ihnen geht es um die, die es machen „wie jene Astronomen, nämlich sie suchen in diesen wirklich gehörten Akkorden die Zahlen" Das ist im pythagoreeischen Sinn gemeint: die Ordnung hinter den Dingen muss man sehen und hören, dann ist es „sehr nützlich allerdings", sagt Sokrates, „für die Auffindung des Guten und Schönen, wenn man sie aber auf andere Weise betreibt, ganz unnütz." Da stimmt Glaukon nur verhalten zu: „Wahrscheinlich wohl, sagte er.-„

Die Bedeutung der 4 mathematischen Disziplinen und ihre dienende Funktion für die Bildung der philosophischen Seele der Kriegerphilosophen wird unterstrichen durch den prominenten Ort dieses Dialogteils zwischen dem berühmten Höhlengleichnis und der Aufgabe der Dialektik.

Die Dialektik dient der Sicherung des mit den mathematischen Disziplinen Bewirkten. Ihre Aufgabe ist es, die zerstreut vorgetragenen Einzelkenntnisse zusammenzustellen zu einer Übersicht der gegenseitigen Verwandtschaften der Wissenschaften einerseits und der Natur des Seienden andererseits. Die Prüfung der potentiellen Staatsführer in Dialektik trägt bei zu entscheiden, „wer von ihnen Augen und Sinne fahrenlassend auf das Seiende selbst und die Wahrheit loszugehen vermag" ([6], 537d). Wieder die Betonung der Bildung der philosophischen Seele und der Bogen zum Höhlengleichnis, so die mathematische Lehre mit Dialektik und Höhlengleichnis bewusst einfassend.

3. Der Kaiser und die Bildung: Mathematik zwischen Humanismus und Realismus

Die deutsche Bildungsdiskussion im 19.Jahrhundert ist geprägt von der Auseinandersetzung zwischen Humanismus und Realismus. Diese Auseinandersetzung ist nicht nur ein akademischintellektueller Disput um Bildungsvorstellungen, sonder auch ein harter, ja oft rüde geführter Kampf um gesellschaftliches Ansehen, um Studienberechtigungen, um Berufsausübung, um Stellen, um Aufstiegsmöglichkeiten. Der aus dem Gymnasialbereich des 18.Jahrhunderts stammende Satz „Mathematicus non est collega“ , den man auch um 1900 hören kann, u.z. nicht nur ironisch gemeint, verweist auf die schwierige Rolle, die das Fach Mathematik in der höheren Schule, aber z.B. auch im Wettbewerb zwischen Universitäten und technischen Hochschulen in diesem Feld einnimmt. Die Schwierigkeit – später auch der Vorzug - ergibt sich aus der Verbindung der Mathematik mit beiden Bildungsrichtungen: Betont man die formale Seite, die Klarheit, die systematische Einheit und wissenschaftliche Strenge, Mathematik als geistige Schöpfung, dann findet man die Anerkennung auch der die Allgemeinbildung betonenden Humanisten. Hier liegt auch eine Grundlage der Anerkennung und des Erfolgs der Reinen Mathematik in der Neuhumanistischen Bildungsreform in der ersten Hälfte des 19.Jahrhunderts. Verweist man aber auf den für die industrielle und wirtschaftliche Entwicklung des Landes wichtigen Nützlichkeitsaspekt, das geschieht verstärkt in der Gründerzeit in der zweiten Hälfte des 19.Jahrhunderts, dann ist man auf der Seite der Realisten mit ihrer Betonung der Fach- und Berufsbildung. Diese realistische Haltung wird von den Humanisten als „Amerikanismus“ gegeißelt, Ausdruck einer traditionellen bürgerlichen Bildungsarroganz, tatsächlich aber auch Aufbäumen gegen die Einsicht, den Wettstreit mit den Realisten nicht mehr gewinnen zu können, mit den Realisten, die die Mathematik als „Fackelträgerin einer neuen Zeit“ ([7]) betrachten.

Das Wort vom „Amerikanismus“ fiel auch bei der großen Reichsschulkonferenz von 1890, die sich mit den zentralen Fragen des höheren Schulwesens befassen sollte: Verhältnis Humanismus – Realismus, Verstärkung des vaterländischen Charakters der höheren Schule, Arten höherer Schulen, Berechtigungsfrage, Überbürdungsfrage, Überfüllungsfrage. Ganz konkret ging es – wie die Protokolle der Schulkonferenz ([8]) zeigen, durchaus hitzig – z.B. um die Abschaffung des lateinischen Aufsatzes im Abitur und die Einführung des schriftlichen Abiturs in Mathematik. Für beides wurde schließlich gesorgt.

In der Nachfolgekonferenz von 1900 spielt der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht eine bedeutende Rolle. Felix Klein ist als Berichterstatter dabei, sein großer Einfluss gründet auf der jahrelangen erfolgreichen Netzwerkarbeit, zu der auch die gute Verbindung zum obersten preußischen Kultusbeamten Althoff gehört. Die „Karikatur der Göttinger Gesellschaft für angewandte Physik und Mathematik aus einem Einladungsschreiben zur zehnten jährlichen Zusammenkunft im Jahr 1908“ stellt dieses Netzwerk ironisch dar (Bild 1, nach [9], 16):

„Universitätsprofessoren, jeder mit einem gewichtigen und einem schmalen Buch, und reiche Industrielle mit je einem großen und kleinen Geldsack treffen sich an der Straßengablung und setzen – nach einem Austausch des jeweils kleineren Mitbringsels – gemeinsam den Weg zur „Göttinger Vereinigung“ fort. Über der Transaktion die Sonne Felix Kleins, in deren Strahlen sich die Industriellen sonnen. Ein gekrönter Halbmond, der führende Industrielle hinter der Vereinigung, Theodore Böttinger, leuchtet den Professoren den Weg. Über allem sorgt Friedrich Althoff als segnender Gottvater dafür, daß der Bund zwischen Wissenschaft und Kapitalismus gedeiht.“ ([9], 16)

Bild 1

Die Konferenz von 1890 und die Nachfolgekonferenz im Jahr 1900 hatte der Kaiser höchstpersönlich angeordnet. Der entsprechende Erlass von 1889 sagt gleich im ersten Satz unmissverständlich, was den Kaiser bewegt, nämlich, „die Schule nutzbar zu machen, um der Ausbreitung sozialistischer und kommunistischer Ideen entgegenzuwirken."([8],3) Zur Überraschung des ganzen Reichs eröffnet er die Konferenz 1890 persönlich. Seine Eröffnungsrede ist monarchisch und gottesfürchtig-vaterländisch und deutlich prorealistisch ([8], 70 - 76). Die Abschaffung des lateinischen Aufsatzes und die Einführung des schriftlichen Abiturs in Mathematik ist wohl eine direkte Folge der kaiserlichen Rede.
Die Indienstnahme der Schule für die Pflege des Patriotismus wird in den Diskussionen um Deutsch, um Geschichte und Erdkunde deutlich, für Mathematik und Naturwissenschaften aber nicht sichtbar. Im Lehrplan Mathematik von 1892 wird immerhin die anschauliche Behandlung deutscher Maße und Gewichte aufgenommen.

4. Nationalsozialismus: Mathematik und Rassenideologie

In der Einführung sind die von Ludwik Fleck 1935 eingeführten Begriffe Denkstil und Denkkollektiv zitiert worden, Begriffe mit durchaus unpolitischer Absicht, gedacht, die Tätigkeit wissenschaftlicher Gemeinschaften zu beschreiben. Im Nationalsozialismus wurde der Begriff des Stils ebenfalls benutzt, allerdings, rassistisch politisiert, für die Konstruktion einer „Deutschen Mathematik" eingesetzt. Bekanntlich ist hier insbesondere der Funktionentheoretiker Ludwig Bieberbach zu nennen, der mit Veröffentlichungen wie „Stilarten mathematischen

Schaffens“ (1934) eine arteigene „Deutsche Mathematik“ begründen wollte; die Gründung der Zeitschrift mit diesem Titel sollte ebenfalls diesem Ziel dienen. Schon 1933 hatte der Mathematiker Georg Hamel sich der in großer Auflage weitverbreiteten Schulzeitschrift „Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften“ bedient und dort geschrieben:

„Aber das weitaus wichtigere ist der Erziehungswert, der aus der Geistesverbundenheit der Mathematik mit dem Dritten Reiche folgt. Die Grundhaltung beider ist die Heroische. ... Beide verlangen den Dienst; die Mathematik den Dienst an der Wahrheit, Aufrichtigkeit, Genauigkeit. ... Beide sind antimaterialistisch. ... Beide wollen Ordnung, Disziplin, beide bekämpfen das Chaos, die Willkür.“ ([11], 309)

Georg Hamel, Professor an der TH in Berlin, war ab 1933 „Führer“ (vorher schon Präsident) des Reichsverbandes Deutscher Mathematischer Gesellschaften und Vereine, in dem u.a. die Hochschulmathematiker mit der Deutschen Mathematikervereinigung (DMV) ebenso gleichgeschaltet waren wie die Schulmathematiker mit ihrem Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Die genannten Unterrichtsblätter dienten auflagensteigernd auch als Vereinszeitschrift.

Zu dieser Gleichschaltung, zur Rolle von Ludwig Bieberbach, zur Vertreibung und Ermordung jüdischer Wissenschaftler insgesamt ist inzwischen eine vielfältige Literatur erschienen. Ich erinnere nur an das Buch ([12]) zu einer entsprechenden Ausstellung bei der gemeinsamen Tagung der DMV und der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) in Berlin vor zwei Jahren, eine Ausstellung übrigens, die auch an verschiedenen Schulen gezeigt werden konnte.

Nun zwei konkrete Beispiele zur Instrumentalisierung der Mathematik bei der Verbreitung der NS-Ideologie.

Im Auftrag des genannten mathematischen Reichsverbands erschien 1935 ein Handbuch „Mathematik im Dienste der nationalpolitischen Erziehung“ ([13]), das den Mathematiklehrern eine große Anzahl von Aufgaben aus verschiedenen Bereichen der Gesellschaft anbot, eine Sammlung, die vom Unterrichtsministerium für die Nutzung amtlich empfohlen wurde.

Aus der Aufgabengruppe „Volksgemeinschaft“:

„Zeichne in ein Quadrat mit gegebener Seite a ein Hakenkreuz (HJ-Abzeichen), so daß sich die Breite der schwarzen zu der Breite der weißen Streifen verhält wie s : w. Welches sind die üblichen Werte für s und w?“ ([13], 44)

Aus der Aufgabengruppe „Rasse und Sippe“:

„Ein Geisteskranker kostet täglich etwa 4 RM, ein Krüppel 5,50 RM, ein Verbrecher 3,50 RM. In vielen Fällen hat ein Beamter täglich nur etwa 4 RM, ein Angestellter kaum 3,50 RM, ein ungelernter Arbeiter noch keine 2 RM auf den Kopf der Familie.

a) Stelle diese Zahlen bildlich dar.

Nach vorsichtigen Schätzungen sind in Deutschland 300000 Geistekranke, Epileptiker usw. in Anstaltspflege.

b) Was kosten diese jährlich insgesamt bei einem Satz von 4 RM?
c) Wieviele Ehestandsdarlehen zu je 1000 RM könnten – unter Verzicht auf spätere Rückzahlung – von diesem Geld jährlich ausgegeben werden?“ ([13], 42)

Erlauben Sie, sozusagen zur Entspannung nach dieser abscheulichen Aufgabe, den Hinweis auf eine völkisch-mathematische Lächerlichkeit, die mir bei der Vorbereitung begegnet ist ([14]):

1936 glaubte ein Musikforscher, Mitglied des NS-Kampfbundes für Kultur, auf dem Wege „einer seelisch-geistigen Schau“ die Quadratur des Kreises gelöst zu haben. In der Reaktion auf den erfolgten schüchternen Widerspruch sah der Kampfbund im Ergebnis zur Transzendenz der Kreiszahl pi von Lindemann 1882 den „Bankerott der noch herrschenden exakten Wissenschaft liberalistischer Herkunft". Der Mathematiker Emil Julius Gumbel (seit 1932 in der Emigration) reagierte darauf mit einer ironischen Beschreibung und Stellungnahme ([14]), deren letzter Satz lautet: „Die Tatsache, dass die Quadratur des Kreises kraft Blut und Boden gelungen ist, steht somit amtlich im Dritten Reiche fest."

5. DDR: Mathematik im Dienst der Erziehung zur sozialistischen Persönlichkeit

Nach dem Zusammenbruch des Nationalsozialismus und des dritten Reichs wurde in der Sowjetisch besetzten Zone 1946 das „Gesetz zur Demokratisierung der deutschen Schule" eingeführt und diesem entsprechend eine 8-klassige Grundschule und eine auf dieser aufbauende 4-klassige Oberschule eingerichtet. Im selben Jahr wurden Lehrpläne veröffentlicht, die die Vorgaben des Gesetzes für die Fachlehrpläne konkretisieren sollten ([15], 486/87).
Im Fachlehrplan für Mathematik heißt es: Die Mathematik „soll mitwirken bei der Erziehung des deutschen Menschen zur Humanität. ... Wo sie unentstellt und lauter betrieben wird, führt sie Lernende wie Könner ... zur Höhe geistigen Schauens und ethischen Erlebens, sie erzieht zur verantwortlichen Selbstleistung und Kritik und bekämpft Autoritätsglauben und Gehorsams-freudigkeit;" ([15], 487)
Solche einem liberalen Fachverständnis verpflichteten Leitlinien sind nur dieses eine Mal formuliert worden. Schon im Mathematiklehrplan von 1951 wird die Absicht deutlich, das Fach Mathematik ideologisch zu instrumentalisieren: Als zu erwerbende Kenntnisse werden genannt: „die Erkenntnis vom dialektischen Charakter der Entwicklung der Mathematik" und die von „der Richtigkeit der Leitsätze des dialektischen Materialismus in der Mathematik." ([15], 491)
Im Mathematiklehrplan von 1959 wird als wichtige Aufgabe genannt, „sozialistische Menschen heranzubilden" ([15],612), eine mantraartige Formulierung, die in verschiedenen Varianten in Lehrplänen, Zeitschriften und Vorträgen regelmäßig verwendet wird. Immer wieder wird nun auch betont, dass die Mathematik keine unpolitische Wissenschaft ist und die Mathematiker nicht im politisch leeren Raum arbeiten – eine Feststellung, die ohne ideologische Fixierung an Struiks Zitat erinnert. Beim 8.pädagogischen Kongress der DDR 1978 wird die Entideologisierung der Mathematik als bürgerliche und reaktionäre Auffassung verurteilt, vielmehr müsse die Einheit von Wissenschaft und sozialistischer Ideologie auch den Mathematikunterricht bestimmen ([16], 306). Damit kongruiert das im Untertitel eines großen Didaktikwerks von 1973 formulierte Ziel eines „wissenschaftlichen und parteilichen Unterrichts" ([17]) Genau dieser Untertitel ist in der 2.Auflage von 1988 weggelassen ([17]), offenbar konnte hier zwischenzeitlich entstandener Spielraum genutzt werden.
Im Mathematiklehrplan für die 9.u.10. Klasse von 1969 werden die Mathematiklehrer aufgefordert: „Beispiele für die Anwendung der Mathematik im Militärwesen sind zu nutzen, um die Schüler zu der Einsicht zu führen, daß mathematisch-naturwissenschaftliche Erkenntnisse in der Hand eines sozialistischen Staates der Sicherung des Friedens dienen, daß die gleichen Erkenntnisse aber von den Regierungen imperialistischer Staaten zu aggressiven Zwecken mißbraucht werden. Daraus ist die Schlußfolgerung abzuleiten, daß der Erwerb eines hohen mathematischen Wissens und Könnens auch im Hinblick auf die Verteidigungsbereitschaft gegenüber imperialistischen Bedrohungen eine moralische Pflicht eines jeden jungen Menschen unseres Staates ist." ([18], 13)

Diese klassenkämpferisch - sozialistische Aufladung der mathematischen Lehrpläne findet sich in den zugehörigen ebenfalls für die ganze DDR einheitlichen Schulbüchern für Mathematik nicht (z.B. [19]), was bei der gemeinsamen zentralen Erarbeitung von Lehrplänen und Schulbüchern überrascht. Der Auftrag der Mathematiklehrpläne, den Erfahrungsbereich der Schüler als Teil des gesellschaftlichen Lebens darzustellen, wird in entsprechenden Beispielen und Aufgaben erfüllt, aber ohne allzu aufdringliche Politisierung. Den Lehrplänen entnimmt man zwar entsprechende unterschwellige Aufforderungen an die Mathematiklehrer, die Frage nach der konkreten Realisierung des staatlichen Auftrags im Schulalltag ist aber ein anderes Problem.

6. BRD: Mathematik und Demokratie im Föderalismus

Die Ausgangssituation war nach dem 2.Weltkrieg für die drei Westzonen natürlich dieselbe; die Entwicklungen von West und Ost waren dann aber bekanntlich durch starke Divergenz gekennzeichnet, auch was die Bildungssysteme betrifft. Statt eines Unterrichtsgesetzes mit dem daraus fließenden Lehrplan im Osten gab es im Westen 11, inzwischen 16, statt eines Staatsverlags im Osten, der eine mathematische Schulbuchserie herausgab, entstanden im Westen 50 bis 100 private Verlage mit entsprechend zahlreichen Schulbuchreihen im Wettbewerb. Stichchproben aus verschiedenen Bundesländern ([20],) zeigen, dass dem DDR – Mantra der Erziehung zur sozialistischen Persönlichkeit das BRD – Mantra von der Erziehung zum mündigen Bürger entspricht, der sich der Demokratie verpflichtet fühlt - zu welchem Ziel auch die Mathematik ihren Beitrag leisten soll. Allerdings dringen diese politisch-moralischen Absichten in der Regel nicht bis in die Fachlehrpläne Mathematik vor, wie in der DDR, sie werden eher in Rahmenrichtlinien oder Leitgedanken formuliert,

- etwa im Bildungsplan Baden-Württemberg von 2004: die Schüler sollen „geistige Orientierung und Urteilsfähigkeit entwickeln, die für eine aktive Teilnahme am kulturellen und demokratischen Leben einer Gesellschaft unerlässlich sind.“

- oder in der Vorrede zum gemeinsamen Kerncurriculum Mathematik der Länder Berlin, Brandenburg und Mecklenburg-Vorpommern, wo u.a. folgende Stichpunkte genannt sind: interkulturelle Kompetenz, Arbeiten in einer demokratischen Gesellschaft, friedliches Zusammenleben der Völker, Einschätzung eigener und gesellschaftlicher Perspektiven.

Weiter will ich diese föderale Vielfalt nicht darstellen, die oft nur eine Scheinvielfalt ist, sondern noch auf ein der verfassungsmäßigen Vereinigungs- und Meinungsfreiheit geschuldetes Instrument kommen, mit dem Mathematik in Politik und Gesellschaft positiv bewusst gemacht werden soll. Gemeint sind die zahlreichen Verbände und Gesellschaften, die mathematische, mathematikdidaktische, mathematikunterrichtliche, auch mathematikhistorische Interessen vertreten und um entsprechende Lobby-Arbeit bemüht sind. Die Gestaltung des Jahres der Mathematik 2008 war das jüngste Beispiel solcher Lobby-Arbeit und die öffentliche Aufmerksamkeit war 2008 allenthalben groß! Es war in den letzten ca. 30 Jahren interessant zu beobachten, wie die Deutsche Mathematikervereinigung und die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik sich allmählich angenähert haben, geleitet von der Einsicht, dass sie nur mit einer gemeinsamen Stimme in der Politik Gehör finden und Einfluss ausüben können.
Weitere Beispiele dieser Lobby-Arbeit sind die zahlreichen Denkschriften zu Mathematikunterricht und Mathematiklehrerausbildung, die von den Verbänden immer wieder veröffentlicht werden. In einer, den „Perspektiven der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für die Sekundarstufen“ [21] von 2004 steht der Satz:
„Es geht um einen Paradigmenwechsel im Umgang mit der Mathematik. Nicht nur die Disziplin Mathematik, sondern gleichgewichtig die Beziehung Mensch Mathematik stehen im Mittelpunkt des Interesses.“ ([21], 76)
Eine etwas wolkige Formulierung, aber die Pflege genau dieser Paares Mensch – Mathematik ist wohl die Grundlage erfolgreicher mathematischer Lobby – Arbeit, wie etwa für die Aktion „Jahr der Mathematik“ praktiziert.

7. Resümee

Zusammenfassend kann man feststellen, dass die Mathematik mit ihren vielfältig interpretierbaren Objekten offenbar geeignet ist, unter sehr divergenten gesellschaftlichen Bedingungen als Werkzeug politischen Denkens und Handelns eingesetzt zu werden. Man könnte geradezu von entsprechenden Leerstellen in den politischen Systemen reden, in die man die Mathematik unabhängig vom Charakter des jeweiligen Systems zum Nutzen des Systems einsetzen kann. Den Verantwortlichen bleibt offenbar nicht verborgen, dass mathematische Objekte und Beziehungen selbst den Charakter von Leerstellen haben, die man mit erwünschten Bedeutungen und Größen besetzen kann, um ideologischen Einfluss in der gewollten Richtung auszuüben, bzw. anzustreben.

Zum verwendeten Leerstellenbild abschließend ein Beispiel:
1935 erschien im Dritten Reich ein Handbuch für den Rechenunterricht der Volksschulen([22]), in dem eingangs aus Hitlers „Mein Kampf" zitiert wird und 5 Ziele für den völkischen Rechenunterricht formuliert werden. Nach dem zweiten Weltkrieg erscheint das Buch in neuer Auflage([22]), diesmal ohne den „Mein Kampf" – Vorspann, die 5 Ziele sind etwas umformuliert, der Begriff der „Volksgemeinschaft" wird beibehalten und die Finanzaufgaben sind der neuen Währung angepasst. Nun ist das Rechenbuch für die „Erziehung zu wahrer Demokratie" (neue Auflage, Einleitung) geeignet.
Damit sind wir auch wieder beim Ende aller Tyrannei angekommen, einer Utopie, die nirgendwo ist, wie der Name sagt. Aber vielleicht kann man sich dem Zustand weiter nähern, z.B. mit einer mathematischen Demonstration wie in Bild 2, politisch durchaus korrekt, abgesehen davon, dass nur Männer demonstrieren:

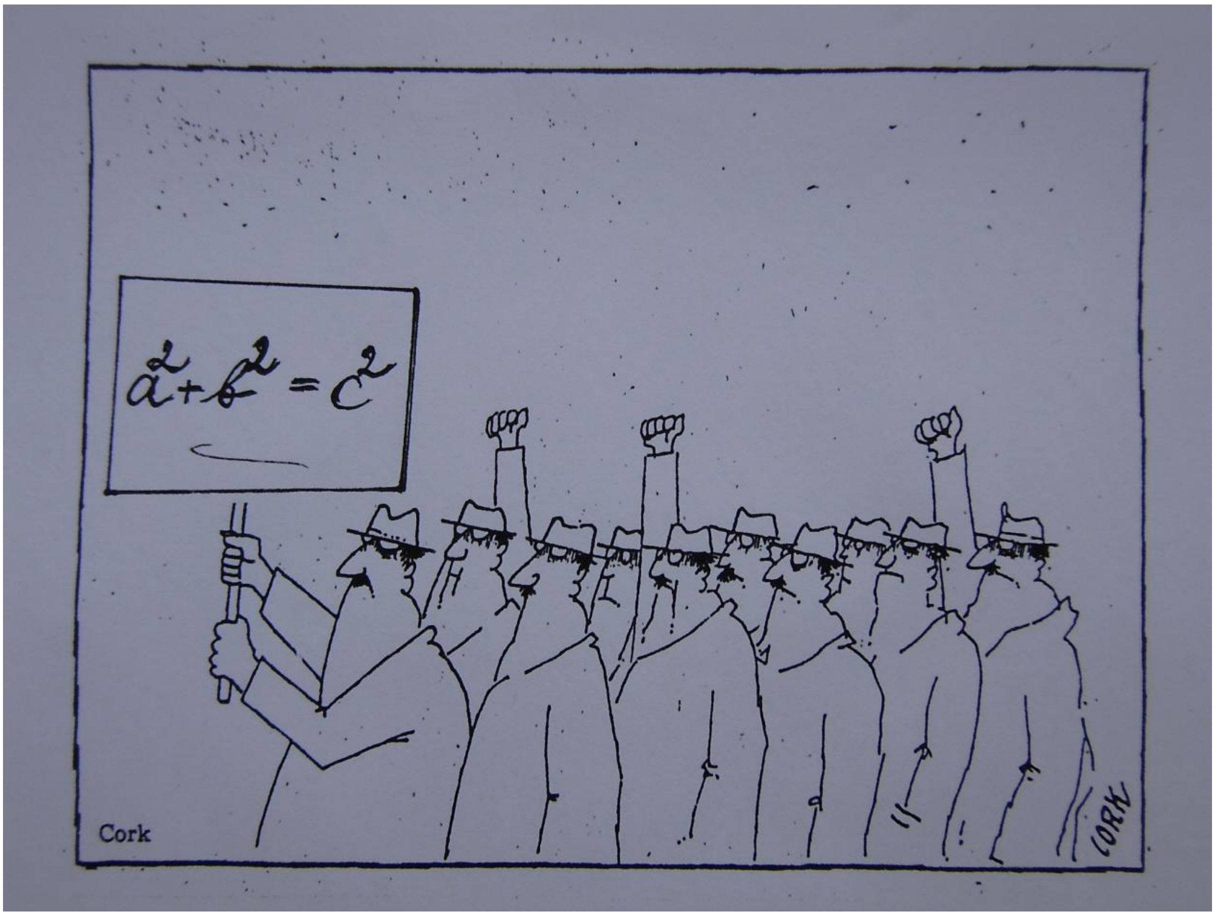


Bild 2 (unter Nutzung einer Karikatur in der Süddeutschen Zeitung vom 8.7.1989; die Schildaufschrift wurde verändert.)

8. Quellen und Literatur

[1] Struik, D.J.: On the Sociology of Mathematics. Science and Sociology 6 (1942), 58 – 70
[2] Fleck, L.: Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache, Frankfurt 1980 (Erstausgabe 1935)
[3] Kuhn, T.S.: Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen, Frankfurt 1973 (Erstausgabe 1962)
[4] Bos, H.J.M. u. Mehrtens, H.: Einige explorierende Bemerkungen über die Wechselwirkungen zwischen Mathematik und Gesellschaft in der Geschichte. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 9 (1977), 186 – 195
[5] Mehrtens, H.: T.S.Kuhn´s Theories and Mathematics: A Discussion Paper on the „New Historiography" of Mathematics. Historia Mathematica 3 (1976), 297 - 320
[6] Platon: Politeia. Sämtliche Werke, Hamburg 1958, Band 3
[7] Dillmann, C.: Die Mathematik – Die Fackelträgerin einer neuen Zeit, Stuttgart 1889
[8] Deutsche Schulkonferenzen Band 1: Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts, Berlin, 4. – 17. Dezember 1890, Glashütten 1972
[9] Krüger, K.: Erziehung zum funktionalen Denken – Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips, Frankfurt 1999
[10] Mehrtens, H. u. Richter, S. (Hrsg): Naturwissenschaft, Technik und NS- Ideologie – Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte des Dritten Reiches, Frankfurt 1980
[11] Hamel, G.: Die Mathematik im Dritten Reich. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 39 (1933), 306 - 309
[12] Bergmann, B. e.a. (Hrsg.): Jüdische Mathematiker in der deutschsprachigen akademischen Kultur, Berlin 2008
[13] Dorner, A.: Mathematik im Dienste der nationalpolitischen Erziehung, Frankfurt 1935
[14] Gumbel, E.J.: Die Quadratur des Kreises. Das neue Tagebuch 4 (1936), 212
[15] Neigenfeind, F.: Akzentsetzungen bei der Entwicklung des Mathematikunterrichts in den allgemeinbildenden Schulen der ehemaligen DDR, Teil I u.II. Pädagogik und Schulalltag 47 (1992), 486 – 495, 612 – 620
[16] Protokoll des 8.Pädagogischen Kongresses der DDR 1978, Berlin 1979
[17] Neuner, G. e.a.: Allgemeinbildung, Lehrplanwerk, Unterricht. Berlin 1973(1), 1988(2)
[18] Lehrplan für Mathematik, Klassen 9 und 10, Berlin 1969
[19] Mathematik 2, 9, 11. Berlin 1969, 1967, 1971
[20] http://www.bildungsserver.de
[21] Danckwerts, R. e.a.: Perspektiven der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für die Sekundarstufen. DMV – Mitteilungen 2/2004, 76 – 77
[22] Kruckenberg, A.: Die Welt der Zahl im Unterricht - Handbuch für den Rechenunterricht der Volksschule, Halle 1935 bzw. Hannover 1950

Die kommerzielle Revolution, Leonardo Pisano und die italienische und europäische Mathematik

Von Friedrich Katscher

In den wenigsten Geschichtsbüchern ist zu lesen, dass es im 12. Jahrhundert von den italienischen Städten ausgehend eine *kommerzielle Revolution* gab, die die Gesellschaft grundlegend veränderte und eigentlich erst unsere jetzige Lebensweise begründete.

Vorher herrschte in ganz Europa die Land- und Naturalwirtschaft, das heißt, eine weitgehend geldlose Tauschwirtschaft mit einer Produktion für den eigenen Bedarf. Es war zuerst in den wachsenden italienischen Städten mit einem neuen Bürgertum, wo sich der Umfang und die Art des Handels völlig wandelten. Die Geld- und Kreditwirtschaft und der bargeldlose Zahlungsverkehr begannen. Es fing mit den Geldwechslern an, doch dann kamen die privaten Banken. Man konnte Darlehen erhalten, ein Konto eröffnen und Geld investieren. Manufakturen, vorindustrielle Gewerbebetriebe mit vorherrschender Handarbeit, fingen an zu produzieren.

Schon vor 1200 entfaltete sich der internationale Handel, besonders der Seehandel, über weite Entfernungen. Versicherungen wurden notwendig. Durch seine geographische Lage im Mittelmeer wurde Italien zur Drehscheibe des Handels zwischen Asien, Nordafrika und den europäischen Märkten. Zentren des Fernhandels waren die oberitalienischen Städte Venedig, Genua, Florenz und Pisa. Sie errichteten in anderen Ländern ein Netz von Niederlassungen für den Warenaustausch.

Wer Handel betrieb, musste lesen, schreiben und besonders rechnen können. Die Durchführung der Geschäfte verlangte nicht nur rein arithmetische, sondern oft auch höhere mathematische Kenntnisse. Das heißt, Schulen und Rechenmeister wurden notwendig und Anleitungen mussten verfasst werden – vor der Erfindung des Buchdrucks um 1450 also Handschriften. Darin wurden oft nicht nur kommerzielle Probleme, darunter die Buchführung, behandelt, sondern auch interessante andere Fragen, geometrische, algebraische, zahlentheoretische und solche der Unterhaltungsmathematik. Auf diese Weise wurden auch neue mathematische Einsichten gewonnen.

Italien war im Handel und Finanzwesen dem anderen Europa weit voraus. Deutsche Kaufleute schickten daher ihre Söhne zur Ausbildung nach Italien. Und darauf sind auch die vielen aus dem Italienischen stammenden Fachausdrücke wie Kassa, Konto, Giro, Prokura, Saldo, brutto, netto usw. zurückzuführen.

Nach dem Zusammenbruch der griechisch-hellenistischen antiken Mathematik stand die europäische Mathematik jahrhundertelang auf einem äußerst niedrigen Niveau. Sie beschränkte sich auf elementares Rechnen, elementare Feldmesskunst und als höchstes auf den Computus, die Berechnung des Osterfestes und anderer Kirchenfeste.

Währenddessen vollzog sich die Weiterentwicklung der mathematischen Wissenschaften hauptsächlich in den Ländern des Fernen (China), Mittleren (Indien mit der Herausbildung des dezimalen Zahlensystems mit Stellenwert) und Nahen Ostens. Besonders die islamische Mathematik, die im 9. Jahrhundert in Bagdad begann, erreichte in der Arithmetik, Zahlentheorie, Geometrie, Trigonometrie und Algebra erstaunliche Ergebnisse.

Die indischen Zahlen kamen zwar in der zweiten Hälfte des 10. Jahrhunderts über die arabisch besetzten Teile Spaniens nach Europa, aber ihr Gebrauch war noch sehr gering und vor allem die fortgeschrittenen mathematischen Methoden der Araber blieben unbekannt.

Lange Zeit war in Europa niemand, der diese islamischen Erkenntnisse verbreitete und auch niemand, der sie verstand. Es war ein Italiener aus der Stadt Pisa, der die islamische Welt, Nordafrika und den Nahen Osten, bereiste, dort die neue auf dem indisch-arabischen Zahlensystem beruhende Mathematik erlernte und zurückgekehrt darüber mehrere grundlegende Werke schrieb, von denen mehrere Abschriften in italienischen Bibliotheken erhalten geblieben sind. Auf ihnen aufbauend hat sich zuerst in Italien und dann in den anderen europäischen Ländern die moderne Mathematik entwickelt. *Diese Werke waren tatsächlich die Grundlage, auf der alles Spätere aufbaute.*

Das wohl wichtigste Werk war 1202 auf Latein geschrieben und hatte den Titel *Liber abbaci* oder *Liber abaci,* also Buch des Abacus. (Es gibt Handschriften, in denen das Wort mit einem und andere, wo es mit zwei b geschrieben wurde.) Das lateinische Wort abacus stammt von griechisch abax, Platte oder Tafel. Darunter wurde nämlich im antiken Griechenland auch eine Tafel mit Rillen verstanden, in denen Rechensteine verschoben wurden, um einfache Rechnungen durchzuführen. Heute bedeutet daher Abacus ein einfaches Rechengerät mit Kugeln auf Drähten, wie der chinesische Suan-Pan, der japanische Soroban, der russische Stschoty und die Kinderrechenmaschine unserer Erstklassler.

Doch das lateinische Wort abacus im Titel des Buches von 1202, das bald in abaco oder abbaco italianisiert wurde, hatte eine *völlig andere, eigentlich entgegengesetzte Bedeutung*: Es meinte nämlich das *schriftliche* Rechnen, die *Rechenverfahren mit den neuen indisch-arabischen Ziffern*, also *ohne ein Recheninstrument.*

Wer war der Autor dieser großartigen Zusammenfassung des damaligen mathematischen Wissens, der dadurch zum *größten Mathematiker des Mittelalters* wurde? Wir können nur sicher sein, dass sein Vorname Leonardo war und dass er aus der Stadt Pisa stammte, weil in allen Handschriften am Anfang steht: "Incipit liber Ab(b)aci compositus a Leonardo filio (oder filiorum oder de filijs) Bonaccij pisano" (Es beginnt das Buch des Ab(b)acus, verfasst von Leonardus dem Sohn (oder von den Söhnen oder aus der Familie) des Pisaners Bonaccius,). Trotzdem sind die Mathematikhistoriker nicht sicher, ob sie ihm den italienischen Namen Leonardo Bonacci geben sollen.

Der Verfasser des bedeutenden Buches (der Titel deutsch übersetzt) *Ursprung, Transport und erste Fortschritte der Algebra in Italien,* Pietro Cossali (1748-1815), schrieb 1799 am Ende des zweiten Bandes: „Im Verlaufe des Werkes habe ich den verdienstvollen Leonardo von Pisa Leonardo Bonacci genannt, während er von anderen als Leonardo Fibonacci bezeichnet wurde, die die erste Silbe Fi von filius dem Vatersnamen Bonacci voransetzten.“ (In Italien gibt es viele Familiennamen, die mit Fi- beginnen.)

Den meisten Mathematikern ist der Pisaner als *Fibonacci* bekannt. Es ist aber anzunehmen, dass er selbst diesen Namen niemals verwendete. Er ist jedoch heute so weit verbreitet, dass er nicht mehr auszurotten ist.

Wie kam Leonardo Pisano (der Pisaner), wie man ihn am besten nennt, zu seinem Wissen? Lassen wir ihn im *Liber ab(b)aci* selbst erzählen:

„Als mein Vater von seinem Vaterland zum öffentlichen Schreiber in der Handelsniederlassung der Pisaner Kaufleute in Bugia <heute Bejaia in Algerien> bestellt worden war, ließ er mich in der pueritia <Kindheit oder Jugend> zu sich kommen, weil er dachte, dass das für meine Zukunft nützlich und geeignet sei, und er wollte, dass ich einige Zeit dort bleibe und im Abbacus unterrichtet werde. Durch einen bewundernswerten Unterricht in die Kunst der neun indischen Ziffern eingeführt <neun, weil Null nicht als Ziffer angesehen wurde>, gefiel mir das Wissen über die Kunst über alle Maßen und ich erkannte, dass alles über sie mit ihren verschiedenen Regeln in Ägypten, Syrien, Griechenland <Byzanz>, Sizilien und in der Provence studiert werden kann, worauf ich aus geschäftlichen Gründen diese Länder mit großem Eifer durchreiste und an wissenschaftlichen Streitgesprächen teilnahm.“

(Das Latein von Leonardo Pisano ist sehr schwierig und der obige Text ist dem Sinn nach sicherlich richtig, es gäbe aber noch mehrere andere Möglichkeiten, ihn zu übersetzen.)

Was hier steht, ist das einzige, was wir über das Leben des Pisaners wissen. Sein Geburtsjahr ist unbekannt, ebenso sein Sterbejahr. Doch wurde ein Dokument aus Pisa aus dem Jahr 1241 entdeckt, in welchem einem Magister Leonardo Bigollo (wahrscheinliche Übersetzung: Weit- oder Vielgereister), sicherlich unserem Mathematiker, für seine „Abschätzungen und Rechnungen des Abbacierens für die Stadt und ihre Beamten“, XX Pfund jährlich als Gehalt zugesprochen wurden. Er muss also nach 1241 gestorben sein.

Von seinen mathematischen Werken erhalten geblieben sind neben dem *Liber ab(b)aci* von 1202 (zweite Auflage 1228) eine *Practica geometrie* (Praxis der Geometrie) von 1220, ein zahlentheoretisch hervorragendes *Liber quadratorum* (Buch der Quadratzahlen) von 1225 und zwei kleinere Arbeiten. Gedruckt wurde das *Liber Abbaci* erst 1857 von dem wohlhabenden und großzügigen italienischen Mathematikhistoriker Baldassare Boncompagni (1821-1894). Die beiden Bücher wurden von Laurence Sigler und die *Practica geometrie* von Barnabas Hughes ins

Englische übersetzt. Im *Liber quadratorum* wird das Problem gelöst, Quadratzahlen zu finden, die um eine bestimmte Zahl vermehrt oder vermindert wieder eine Quadratzahl ergeben.

Heute findet man in italienisch-deutschen Wörterbüchern unter dem Stichwort *Abbaco* die Übersetzung *Rechenbuch*, aber in einem Wörterbuch aus dem Jahr 1793 steht *die Rechenkunst*. Im *Vocabulario della Lingua Italiano* von Pietro Fanfani aus dem Jahr 1865 gibt es beim Stichwort „Abbaco oder Abaco“ jedoch mehrere Bedeutungen: Tafel, um die mathematischen Figuren zu zeichnen; Tafel von Pythagoras (Multiplikationstabelle des kleinen Einmaleins); die Kunst, Rechnungen zu machen; das Buch, in dem man lernt, Rechnungen zu machen; die Schule, in der man lehrt, Rechnungen zu machen. Im modernen Italienisch ist ab(b)aco auch eine andere Bezeichnung für Nomogramm.

Wie schon anfangs gesagt, waren Anleitungen und Schulen nötig, um die für den Handel notwendigen mathematischen Methoden zu erlernen. Anfangs waren die Handschriften kürzere Versionen oder Auszüge aus dem *Liber ab(b)aci* von Leonardo, später wurden sie neu von den Rechenmeistern verfasst. Sie werden *Trattati* oder *Libri d'ab(b)aco* (Abhandlungen oder Bücher des Ab(b)aco) genannt.

Der Amerikaner Warren van Egmond hat in fast hundert Bibliotheken in Italien, Deutschland, Frankreich, England, USA und Österreich insgesamt 288 erhalten gebliebene Abbaco-Handschriften und 153 gedruckte Abbaco-Bücher von 1476 bis 1600 angesehen und 1980 einen dickleibigen Katalog über sie veröffentlicht (*Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and printed Books to 1600).* Da im Laufe der Zeit natürlich viele Handschriften verloren gegangen sind, kann man ihre ursprüngliche Anzahl mit mehr als 300 annehmen. Die meisten Ab(b)aco-Handschriften sind anonym, doch manchmal werden die Namen von Rechenmeistern als Autoren genannt.

In den letzten Jahrzehnten wurden viele interessante alte italienische mathematische Handschriften, vor allem algebraische, ediert und kommentiert und dabei neue Erkenntnisse über das Wissen und Können der Rechenmeister gewonnen, besonders vom Centro Studi della Matematica Medioevale (Studienzentrum der mittelalterlichen Mathematik) der Universität Siena unter Laura Toti Rigatelli und Raffaella Franci.

Eine Schule, in der die neue Rechenkunst gelehrt wurde, hieß *Scuola* oder *Bottega d'ab(b)aco* (bottega heißt eigentlich Geschäftsladen – man denke an französisch boutique). Knaben (es gibt keine Aufzeichnungen über teilnehmende Mädchen) begannen ihre Ausbildung mit ungefähr 10 oder 11 Jahren unmittelbar nach zwei Jahren in einer Grundschule, in der sie lesen und schreiben lernten. Sie blieben in der Ab(b)aco-Schule im Allgemeinen zwei Jahre lang und wurden in Arithmetik und praktischer Mathematik unterrichtet – wie man Zahlen schreibt, die Grundrechenarten, Brüche und die Lösung einfacher mathematischer Probleme. Die

Ab(b)aco-Schulen waren entweder privat oder sie wurden von den größeren und reicheren Gemeinden entweder subventioniert oder zur Gänze finanziert.

Der erste *Maestro d'ab(b)aco* (Rechenmeister), von dem wir wissen, Pietro aus Bologna, wurde 1265 erwähnt. Die früheste Erwähnung einer Rechenschule findet sich in den Statuten der Gemeinde Verona aus dem Jahr 1284. Elisabetta Ulivi hat vor allem die zahlreichen Scuole d'abaco in Florenz erforscht. Die frühesten noch existierenden Ab(b)aco-Handschriften stammen vom Ende des 13. Jahrhunderts.

Das indisch-arabische Zahlensystem, seine Verwendung für die praktische Mathematik des Alltags, aber auch die Lösungen schwierigerer Probleme breiteten sich zuerst in Italien und von dort ausgehend in den anderen Ländern Europa aus, ab Mitte des 15. Jahrhunderts auch in Süddeutschland. Eine besonders einflussreiche Rolle spielte Luca Pacioli (um 1445-1517), der 1494 in einem *gedruckten* Buch eine erste Enzyklopädie des gesamten mathematischen Wissens seiner Zeit – und natürlich auch die mathematischen Ergebnisse von Leonardo Pisano --, unter dem Titel *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* veröffentlichte. Das Buch ist auch deshalb berühmt, weil man darin die erste Beschreibung der doppelten Buchhaltung findet.

Pacioli gibt als eine seiner Quellen den Pisaner an. Er schreibt in der Inhaltsangabe des ersten Hauptteils: „Und all diese Sachen mit den nachfolgenden werden gemäß den antiken und auch modernen Mathematikern sein. Besonders von dem allerscharfsinnigsten Philosophen Euklid. Und dem Severin Boethius. Und von unseren Modernen von Leonardo Pisano."

In seinem Monumentalwerk *Introduction to the History of Science* (II. Band, 1931) schrieb der belgisch-amerikanische Wissenschaftshistoriker George Sarton (1884-1956):

Fibonacci was the greatest Christian mathematician of the Middle Ages, and the mathematical renaissance in the West may be dated from him.

Am Ursprung der Entwicklung der europäischen Mathematik der Neuzeit steht also *Leonardo Pisano*. Er sollte in der Öffentlichkeit weitaus bekannter werden. Denn wie gezeigt verdankt ihm die Menschheit viel mehr als nur die Fibonacci-Zahlen.

MATHEMATIK IM HORIZONT DES JAPANISCHEN GEISTES

数学 ほ　日本 気　の　地平線 に

von: Dr. phil. Myriam-Sonja Hantke

(Universität zu Köln, Germany)

Die Mathematik ist das Alphabet,
mit dem Gott die Welt geschrieben hat.
Galileo Galilei

1. EXPOSITION
– Die Einheit und Vielheit der Mathematik

Die Frage der Tagung ‚Ist Mathematik politisch korrekt?' möchte ich in meinem Vortrag vor dem Hintergrund der kulturellen Dimension der Mathematik stellen und fragen: ‚Ist Mathematik (inter-)kulturell korrekt?'. Wird die Mathematik nicht einseitig auf die griechisch-abendländische Tradition reduziert? Gibt es eine nicht-westliche Mathematik?

Mathematik in Japan. – Auf den ersten Blick scheint dies unserer Auffassung von Mathematik zu widersprechen. Mathematik ist eine universale Wissenschaft, die überall (auch auf den fernsten Planeten) ihre uneingeschränkte Gültigkeit besitzt. Vor diesem Hintergrund unterscheidet sich Mathematik in Japan, nicht von der in Europa oder Amerika. Die Frage nach der Mathematik in Japan stellt sich demnach nicht auf der noumenalen bzw. transzendentalen, sondern vielmehr auf der empirisch-historischen Ebene.

Es ist bekannt, dass mathematische Entdeckungen zu unterschiedlichen Zeiten und von unterschiedlichen Kulturen (Indien, Griechenland,…) gemacht worden sind. Nicht nur die unterschiedliche zeitliche und räumliche Entdeckung mathematischer Sachverhalte, sondern auch die unterschiedlichen Zahlensysteme (Sprache) spiegeln sich in der Vielfalt der Kulturen wieder. Vor diesem Hintergrund kann man von unterschiedlichen kulturellen Mathematik*en* sprechen. Mathematik ist somit universal und vielfältig.

Die Frage nach der ‚Mathematik im Horizont des japanischen Geistes', der ich hier in meinem Vortrag nachgehen möchte, stellt sich somit auf der noumenalen und auf der empirisch-historischen Ebene. Worin zeigt sich die Universalität (Einheit) der Mathematik und worin ihre kulturellen Unterschiede? Worin unterscheidet sich die japanische Mathematik von der Mathematik in Europa und Amerika? Worin liegen die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen der japanischen und westlichen Mathematik? Können daraus Einsichten in die unterschiedlichen kulturellen Horizonte gewonnen werden? Ist Mathematik (inter-)kulturell korrekt?

2. HEILIGE MATHEMATIK – Die Geschichte der Mathematik in Japan[1]

2.1 Sangaku (算額)

Für uns im Westen ist es eine ungewöhnliche Vorstellung, in eine westliche Kirche zu kommen und dort Glasfenster mit Gleichungen und geometrischen Figuren zu sehen. Anstatt auf Glas, sondern auf hölzerne Tafeln haben über zwei Jahrhunderte japanische Mathematiker – Mathematiker, Laien, Frauen, Kinder, … diese Tafeln mit geometrischen Aufgaben in ihre Tempel gehangen. Auf diesen zeigt sich nicht nur der Geist der Mathematik, sondern auch die Nähe der Mathematik zur Religion und zur Kunst. Diese hölzernen Tafeln, welche geometrische Aufgaben zeigen, nennt man ‚sangaku' (算額), was literarisch ‚mathematische Tafel' meint (Abb. 3 und 4). Diese sangaku hingen zu Tausenden in buddhistischen Tempeln und Shinto-Schreinen überall in Japan. Die Sammlungen von sangaku-Aufgaben wurde bekannt als ‚temple geometry' (heilige Mathematik).

Betrachtet man die sangaku, so zeigen sie eine grundlegend andere Ästhetik als die griechisch-westlichen Geometriebücher. Nicht nur in ihrer Ästhetik, sondern auch inhaltlich zeigen sich große Unterschiede, insbeson-

[1] Die Darstellung folgt: D. E. SMITH/Y. MIKAMI, 1914 und F. HIDETOSHI/T. ROTHMAN, 2008.

dere in der Lösung der sangaku-Problemen (differente Methoden). Auch, wenn die mathematischen Regeln in allen Kulturen in Ost und West miteinander identisch sind, so zeigen die sangaku eine andere mathematische Welt, in der mathematische Probleme in einer nicht-westlichen Art und Weise gelöst wurden. Traditionelle japanische Mathematik zu lernen heißt, eine andere Art und Weise des Denkens zu lernen. Wie entstanden die sangaku?

Die traditionelle japanische Mathematik und somit die Tempel-Geometrie entstanden im 17. Jh. Im Jahr 1603 wurde Tokugawa Ieyasu Shogun von Japan und gründete das Tokugawa-Shogunat. Die Tokugawa-Familie regierte Japan 300 Jahre lang, bis 1868 Commodore Matthew C. Perry Japan zum Westen hin öffnete. Als Ieyasu begann zu regieren gründete er die Hauptstadt Edo (heutige Tokyo). Darum nennt man diese Periode auch die ‚Edo-Zeit'. Probleme mit Piraterie und dem aggressiven Vordringen westlicher Mächte führten in ganz Ostasien am Ende des 16. Jhs zu drastischen Einschränkungen des Überseehandels und zur Abschließung Japans (*sakoku* 鎖国). Die Tokugawa konzentrierten den Handel mit China und Europa in der Stadt Nagasaki. Ihre einzigen europäischen Handelspartner waren die Niederländer. Zwei Japaner kamen um 1650 nach Holland, um Mathematik zu studieren: Petrius Hartsingius und Franciscus Carron. Wann sie nach Japan zurückkehrten, ist nicht bekannt. Die Abschließung Japans führte auch dazu, dass die Mathematik von Newton und Leibniz unbekannt blieb, was sich auch an den sangaku ablesen lässt. Die Zeit des sakoku war jedoch nicht negativ. Es war für Japan die Zeit des ‚großen Friedens' und der großen Entwicklung der japanischen Kultur auf den verschiedensten Gebieten, die für uns heute gerade typisch für Japan sind: Medizin, Poesie, Literatur, Teezeremonie, Musik, Nô-Theater, Ukiyo-e (Bilder/Holzschnitte der ‚fließenden Welt) Ikebana,… Wie aber stand es um Wissenschaft und Mathematik in dieser Zeit?

Die Ästhetik zeigte sich in vielen sangaku, deren Probleme oft an Origami erinnern. Es war die Zeit als man begann sangaku in die Tempel und Schreine zu hängen, womit die japanische Mathematik langsam begann sich zu entfalten. Warum wurden die sangaku in Tempel und Schreine aufgehangen?

Shinto (神道), der ‚Weg der Götter', ist neben dem Buddhismus die zentrale Religion Japans und besteht aus einer Vielzahl von religiösen Kulten und Glaubensformen, die sich an die einheimischen japanischen Gottheiten (*kami* 神) richten. Kami sind zahlenmäßig unbegrenzt und können die Form von Menschen, Tieren, Gegenständen oder abstrakten Wesen haben. Vor dem sangaku-Brauch brachten die Gläubigen Geschenke zu den Schreinen. Die kami, wurde gesagt, lieben Pferde. Da Sie jedoch sehr teuer waren, brachte man hölzerne Tafeln mit gemalten Pferden dar. Viele Holztafeln aus dem 15. Jh. zeigen darum Pferde. Deshalb erscheint es nicht ungewöhnlich, dass man in Japan mathematische Tafeln in Tempel und Schreine hängt. Man weiß nicht genau, wann dieser Brauch begann. Das älteste sangaku aus dem Jahr 1683 wurde in der Tochigi-Präfektur gefunden, wobei Yamaguchi Kanzan, ein Mathematiker aus dem 19. Jh., eine Tafel aus dem Jahr 1668 nennt, die jedoch verloren ist. In den nächsten zwei Jahrhunderten erschienen die Tafeln überall in Japan, über 2/3 in Shinto-Schreinen und 1/3 in buddhistischen Tempeln. Heutzutage sind 900 sangaku bekannt, wobei es ursprünglich wahrscheinlich 1900 Tafeln gab. Mit dem Fall des Tokugawa-Shogunats starb dieser Brauch aus. Nur sehr wenige setzen diesen bis in die späten 1980er Jahre fort. In welcher Sprache und von wem wurden sie geschrieben?

Die meisten sangaku enthalten nur die abschließende Antwort auf ein gestelltes Problem, selten eine detaillierte Lösung. Sie wurden in Kanbun (漢文) geschrieben, einer Sprache, die chinesische Zeichen und Grammatik gebraucht, aber auch diakritische Zeichen, um die japanische Bedeutung zu markieren. Kanbun spielte in Japan eine ähnliche Rolle wie im Westen Latein, die von Gelehrten geschrieben wurde. Die meisten sangaku wurden von Samurai geschrieben. Da die Edo-Zeit die Zeit des großen Friedens war, arbeiteten viele Samurai als Regierungsbeamten und

Lehrer. Wie die sangaku zeigen wurden sie nicht nur von Samurai, sondern auch von Kindern, Studenten, Frauen,… angefertigt. Damit die Geschichte und der Kontext der sangaku besser verstanden werden kann, möchte ich nun die Geschichte der Mathematik in Japan kurz nachzeichnen.

2.2 Die Geschichte der Mathematik in Japan

a. Sangi (算木)

Japan hat seit seiner frühesten Geschichte eng mit China in Verbindung gestanden, wodurch Japan viel von China übernommen hat: Kultur, Sprache, buddhistische Religion, System der Regierung. Dies trifft auf die Mathematik ebenso zu.

Heutzutage weiß man nichts über die japanische Mathematik vor dem 8. Jh. Es gab wohl bereits ein System mit Exponential-Schreibweise, ähnlich wie Archimedes ‚Sandrechner'. Mehr ist jedoch von der Nara-Zeit (710-794) bekannt, deren Regierungssitz in Heijo (heutige Nara in der Nähe von Osaka) lag. Im mittleren 6. und im 8. Jh. gelangte der Buddhismus von China nach Japan und wurde sehr mächtig, was sich am ‚Östlichen Großen Tempel' (Todai-ji) in Nara zeigt, der 752 gebaut wurde. Mit Beginn des 8. Jhs. wurden Universitäten gegründet und chinesische mathematische Texte zum Studium vorgeschrieben, die berühmt wurden als die ‚Ten Classics'. Der bedeutendste Text war der ‚Jiu zhang Suanshu' (Die neun Kapitel über die mathematische Kunst). Darin ist die Arithmetik und elementare Algebra dargestellt. In Japan wurden die Texte zur Einführung in die Landvermessung und der Steuererhebung gebraucht. Die chinesischen Texte legten somit den Grundstein für die japanische Mathematik.

Im Jahr 718 wurde das Gesetz ‚yoryô ritsuryô' (das Gesetz der yoryô-Zeit) und das Büro von ‚San Hakase' (arithmetische Intelligenz) gegründet. Die Abteilung der ‚Arithmetischen Intelligenz' bestand aus 70 Beamten, deren Aufgabe es war, die Größe der Felder zu messen und die Erhebung von Steuern. Mittels der chinesischen Mathematikbüchern konnten sie die Steuern, wie auch Reis, Salz und Sake berechnen. Damit konnten sie arithmetische Operationen durchführen. Höhere Mathematik entstand jedoch noch nicht in dieser Zeit. Die Berechnungen wurden mit einem Set schmaler Bambusstäbchen durchgeführt, die in China ‚saunzi' und in Japan ‚sangi' (算木) heißen. Dazu nahm man ein Papier mit einem Schachbrettmuster und legte darauf die sangi, mit denen die Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und das Wurzelziehen durchgeführt werden konnte.

Aufgrund der Unruhen wurde während der Nara-Zeit im Jahr 794 der Regierungssitz nach Heian-kyô (die Stadt des Friedens und der Ruhe, heutige Kyôto) verlegt. Es blieb die Hauptstadt bis 1192 und wird darum auch die ‚Heian-Ära' genannt. Während dieser Zeit begann Japan seine Kultur und sein Schriftsystem unabhängig von China zu entwickeln. Die bedeutendsten Entwicklungen zeigten sich in der Literatur: ‚Die Geschichte vom Prinzen Genji' von Murasaki Shikibu und das ‚Kopfkissenbuch' von Sei Shonagon, weniger in Mathematik und Wissenschaft.

In der Kamakura-Zeit (1192-1333) als das Minamoto-Shogunat in Kamakura gegründet wurde finden sich einige literarische Referenzen auf den Gebrauch der sangi in dieser Zeit, bspw. im Buch ‚Hosshinsyu' (Geschichten über den Buddhismus) von Kamo no Chômei und dem anonymen Buch ‚Uji Syui' (Geschichten, aufgeschrieben vom Uji-Minister). Dies zeigt, dass sangi für arithmetische Operationen gebraucht wurden. Auch noch in der Muromachi-Ära (1338-1573), in der die Ashikaga-Familie regierte. Zu dieser Zeit gab es viele Handelsbeziehungen zu Südasien, auch wurde das Nô-Drama und die Tee-Zeremonie erfunden. Ähnlich wie im Westen waren die letzten Dekaden des 16. Jhs. in Japan nicht friedlich. Im Jahr 1573 fiel das Ashikaga-Shogunat, als Oda Nobunaga (1534-1582) den letzten Ashikaga-Shogun aus Kyôto vertrieb und den Einigungsprozess Japans vorantrieb. Toyotomi Hideyoshi war sein Nachfolger, der eine Provinz nach der anderen eroberte. Einer seiner Soldaten am Hafen von Hakata besaß einen Abakus, ‚soroban' (算盤) auf Japanisch, welcher aus China kam. Dieser soroban ist der älteste, der überliefert worden ist (Abb. 1).[2] Er stammt aus dem Jahr 1592. Er revolutionierte die Mathematik in Japan. Man kann sagen, dass mit ihm die traditionelle japanische Mathematik begann.

b. wasan (和算) – Die Entstehung der traditionellen japanischen Mathematik

Môri Shigeyoshi war ein japanischer Mathematiker, der um 1600 wirkte. Wenig ist über ihn bekannt, außer, dass er in Osaka und später in Kyôto lebte. Er beherrschte den soroban in höchster Perfektion. Das chinesische Buch über den soroban Cheng Da Wei's ‚Suanfa Tong Zong' (Systematische Abhandlung über die Arithmetik) aus dem Jahre 1593 hatte er besessen. Dieses Buch hatte großen Einfluss auf die japanische Mathematik. Yusa Ichirôzaemon veröffentlichte 1676 eine japanische Ausgabe.

Bereits in den 1620er Jahren studierte Yoshida Mitsuyoshi (1598-1672) intensiv dieses Buch, passte es an Japan an und fügte Illustrationen bei. Auf diese Weise entstand das ‚Jinkô-ki' (Große und kleine Zahlen), welches 1627 erschien. Dieses Buch war das erste komplett mathematische Buch in Japan. Der Titel entstammte einem alten religiösen Buch ‚Ryôjin Hishô' (Gedichte aus diesen Tagen) aus dem 12. Jh. Yoshidas Jinkô-ki betrachtet hauptsächlich ‚rechenbetonte Algorithmen', Algorithmen, wofür man heutzutage den Rechner benötigt (bspw. Wurzelziehen). Das Buch wurde schnell bekannt. Es gab unterschiedliche Versionen wie das ‚Neue Jinkô-ki', der ‚Schatz des Jinkô-ki', das ‚Kurze Jinkô-ki', die ‚Fülle des Jinkô-ki',… Yoshida publizierte letztlich sieben Auflagen. In der Ausgabe

[2] T. KOJIMA, 1954 und 1963.

von 1641 stellte er dem Leser offene Aufgaben zum Lösen. Als die Leser die Lösungen darbrachten, wurde eine neue Ausgabe mit neuen Aufgaben veröffentlicht und so weiter.

Eines der Probleme darin war die Berechnung von π. Muramatsû Shigekiyo (1608-1695) verwendet in ‚Sanso' (Magazin der Mathematik) ein 2^{15}- oder 32.768-Eck zur Berechnung von π und erhielt den Wert 3,14159264877. Neunzehnhundert Jahre früher hatte Archimedes den Wert von π mittels der Einschreibung eines n-seitigen Polygons in einen Kreis berechnet. Mittels eines 96-Ecks bekam er für π einen Wert zwischen 3 10/71 und 3 1/7. Muramatsu verwandte die gleiche Methode wie sein Zeitgenosse Isomura Yoshinori (1640?-1710), der ein 2^{17} bzw. 131.072-Eck in einen Kreis mit Radius 1 einschrieb und für π den Wert 3,141592664 erhielt. Der berühmteste Mathematiker dieser Zeit war Seki Takakazu (1640?-1708), der ebenfalls π zu bestimmen versuchte. Dazu verwandte er jedoch seine eigene Methode, die erst nach seinem Tod 1712 von seinen Schülern in ‚Katsuyô Sanpô' (Sammlung von wichtigen mathematischen Ergebnissen) veröffentlicht wurde. Für π bekam er den Wert 3,14159265359, der bis zur 11. Stelle korrekt ist. Muramatsu berechnete den Umfang eines 2^{15}-, eines 2^{16}- und 2^{17}- Ecks und erhielt:[3] P (15) = 3,14159264, P (16) = 3,14159265 und P (17) = 3,141592653. Daraus berechnete er:

$$\pi = P(\infty) = P(16) + \frac{[P(16) - P(15)][P(17) - P(16)]}{[P(16) - P(15)] - [P(17) - P(16)]} = 3{,}14159265359$$

Takebe Katahiro (1664-1739) errechnete π bis zur 41. Stelle korrekt.

Der Beginn der traditionellen japanischen Mathematik ist somit mit der Publikation des Jinkô-ki im Jahr 1627 eng verknüpft. Die ‚Neun Kapitel', Chengs ‚Abhandlung' und andere chinesische Klassiker hatten direkt oder indirekt sehr großen Einfluss auf die japanische Mathematik. Mit sakoku (der Abschließung Japans) wurde die japanische Mathematik unabhängig von China. Der soroban löste die sangi in den alltäglichen Berech-

[3] F. HIDETOSHI/T. ROTHMAN, 2008, p. 71.

nungen wegen seiner Schnelligkeit ab, dennoch waren komplexere algebraische Operationen, insbesondere von Gleichungen mit höheren Graden mit den sangi leichter zu berechnen, so dass die sangi neben dem soroban bis ins 19. Jh. existierten.

Nachdem es für die Samurai in der friedvollen Edo-Zeit keine Arbeit mehr gab, wurden viele Höflinge, Bürokraten und Administratoren. Für drei oder vier Tage die Woche arbeiteten sie in einem provinziellen Schloss, doch der Lohn war so gering, dass sie Nebenjobs haben mussten. Während der Edo-Zeit gab es noch keine Universitäten in Japan. Demzufolge arbeiteten viele als Lehrer in kleinen privaten Schulen, die ‚juku' (eigentlich: *gaku shūjuku* 学習塾) hießen und sich den drei R's widmeten: reading, `riting und `rithmetik (= soroban). Die Berechnung der Felder wurden auch nicht mehr von den Samurai, sondern nun von den Bauern selbst durchgeführt. Im 19. Jh. gab es über 80.000 juku überall in Japan. Viele Mathematiker, gewöhnlich Samurai, erwarben den ‚Master of Mathematics' und unterrichteten Mathematik in diesen Schulen. Diese japanische Mathematik wird auch ‚wasan' (和算) genannt.

c. yosan (洋算)
– Der Aufstieg und Niedergang der traditionellen japanischen Mathematik

Im 18. und 19. Jh., in Zeiten des sakoku, gab es eine große Anzahl von japanischen Mathematikern, die mathematische Texte publizierten. In diesen wurden bedeutende Theoreme bewiesen und die meisten sangaku erschaffen. Die Mehrheit der Ergebnisse der traditionellen japanischen Mathematikern waren nicht wegbereitend für das westliche Denken. Dies liegt zum Teil darin begründet, da es in Japan keine voll ausgereifte Theorie des Kalküls gab. Die japanischen Mathematiker fanden die Fläche und das Volumen von geometrischen Figuren in ähnlicher Weise wie schon Eudoxos und

Archimedes im alten Griechenland. Bspw. kann der Flächeninhalt eines Kreises mit rechteckigen Streifen ausgefüllt und berechnet werden. Je schmaler die Streifen sind, desto mehr nähern sie sich der Kreisform an. Lässt man die Breite der Streifen gegen Null konvergieren, so erhält man den genauen Flächeninhalt des Kreises. Diese Idee bildet die Basis des ‚enri' (円理) bzw. des ‚Kreisprinzips' oder der ‚bestimmten Integration' (Riemann-Integral).[4]

Dennoch kann nicht behauptet werden, dass es der japanischen Mathematik an Genialität fehlte. Seki entwickelte eine Theorie der Determinanten vor Leibniz und andere japanischen Geometer bewiesen einige berühmte Theoreme bereits vor den westlichen Mathematikern oder zumindest unabhängig von ihnen. Dazu zählen der Satz von Descartes (Vier-Kreise-Satz von Descartes), die Steiner-Ketten, die Soddy-Kreisen, das Malfatti-Problem, der Satz von Casey und einige andere. Zudem waren die japanischen Mathematiker sehr geschickt im Umgang mit Gleichungen höheren Grades. Damit ist wirklich höherer Grad gemeint! Yamaguchis Tagebuch enthält im Zusammenhang mit dem Gion-Schrein-Problem[5] eine Gleichung vom 1024. Grad. (Und Studenten haben Angst vor Quadrate!) Der Mathematiker Ajima Naonobu (1732-1798) wurde dadurch berühmt, dass er zeigte, wie man die Gleichung auf eine Gleichung zehnten Grades mit der Variable a reduziert. Sein Vorgänger Matsunaga Yoshisuke (1692?-1744) beschäftigte sich mit unendlichen Reihen und ihrer Anwendung auf die Berechnung von Flächen mittels Integration. Diese Studien wurden von Wada Yasushi (1787-1840) fortgeführt und eine große Anzahl von bestimmten Integralen geschaffen. Uchida Kyô (1805-1882) studierte in Wada's juku. Er schrieb viele Bücher, welche die Integration von Feststoffen behandeln, wie auch die Frage, wie Flächen mittels Schnitten von Zylindern, Sphären,… gebildet werden können. Viele sangaku-Probleme erschienen in tra-

[4] F. HIDETOSHI/T. ROTHMAN, 2008, p. 301-312.

[5] In einem Kreissegment mit Basis AB, Länge a und Höhe m sind ein Kreis mit Radius r in der einen Hälfte und ein Quadrat mit Seitenlänge d auf der anderen Hälfte eingeschrieben, mit: $p = a + m + d + r$ and $q = m/a + r/m + d/r$. Die Aufgabe besteht darin a, m, d und r mittels der Terme von p und q auszudrücken.

ditionellen japanischen Texten. Fujita Sadasuke (1734-1807) schrieb ein Buch ‚Seiyô Sanpô' (Ausführliche Mathematik) und sein Sohn Fujita Kagen (1772-1828) das ‚Shinpeki Sanpô' (Mathematik der Schreine und Tempel/Heilige Mathematik), welches eine große Sammlung von sangaku enthält.

Mit dem Fortschreiten der Jahrhunderte kam die westliche Mathematik über China und Holland (Nagasaki) nach Japan, wodurch sie Logarithmen und das Zeichnen von Ellipsen kennenlernten, was man bereits von Leonardo da Vinci bereits kannte. In den Manuskripten des mittleren 19. Jhs. findet man darum die östliche und westliche Schreibweise nebeneinander.

Mit der Öffnung Japans im Jahr 1868 beschloss die neue Meiji-Regierung, dass Japan ein gleichwertiger Partner gegenüber den anderen Nationen werden sollte, woraufhin Japan rapide modernisiert wurde. Dazu zählte auch die Mathematik. Staatliche Schulen wurden in ganz Japan errichtet, wie auch im Jahr 1872 der ‚fundamentale Erziehungskodex' (gakurei), der vorschrieb, dass wasan an Schulen nicht mehr unterrichtet werden sollte. An allen Schulen soll westliche Mathematik, yosan (洋算), gelehrt werden. Gemäß dem Meiji-Slogan: ‚Western science and technology, and eastern ethics.'[6] Die westliche Mathematik war zudem leicht einzuführen und war schnell angeeignet. Auf diese Weise erhielt yosan einen großen Aufschwung in Japan. Einer der letzten Samurai Takaku Kenjirô (1821-1883) bedauerte den Niedergang des wasan und schrieb:

> Astronomy and the physical sciences as found in the West are truth eternal and unchangeable, and this we must learn; but as to mathematics, there Japan is leader of the world.[7]

Mit dem Meiji-Erziehungskodex verloren viele Lehrer der traditionellen japanischen Mathematik ihren Job und wasan wurde vergessen. Vom ma-

[6] H. MIZUNO, 2009, p. 87-88.
[7] F. HIDETOSHI/T. ROTHMAN, 2008, p. 24-25.

thematischen Standpunkt aus ist dieser Verlust groß, vom ästhetischen Standpunkt ist der Verlust von wasan und den sangaku unwiederbringlich.

3. AUSBLICK – Mathematik zwischen Wissenschaft, Religion und Kunst

Die Ausführungen über die sangaku bzw. die japanische Tempel-Geometrie und die Geschichte der Mathematik in Japan zeigte, dass die Mathematik einerseits universell, das heißt kulturübergreifend identisch ist (bspw. enri), sich andererseits aber auch innerhalb der Mathematik kulturelle Unterschiede zeigen. Dies zeigte sich vor allem im Brauch der sangaku, der uns im Westen fremd ist. Sind im Westen Religion und Mathematik (Wissenschaft) streng voneinander geschieden, so sind sie in der japanischen Kultur, wie die sangaku zeigen, eng miteinander verwoben. Mathematik ist darum in Japan religiös und die Darbringung von mathematischen Aufgaben bzw. ihrer Lösungen ein ‚Gottesdienst' (richtiger: ‚Götterdienst'). Jedoch nicht nur Religion und Mathematik, sondern auch Ästhetik bzw. Kunst und Mathematik durchdringen sich wechselseitig. Die sangaku stellen nicht nur mathematische Sachverhalte dar, sondern zeigen auf geschnitzten und bemalten Holztafeln die Schönheit der Mathematik. Mathematik ist somit in Japan eine Wissenschaft, die ohne Religion und Kunst nicht verstanden werden kann.

Man kann sicherlich nicht leugnen, dass die bedeutenden klassischen Entdeckungen in Griechenland und Europa gemacht worden sind, dennoch sind so manche berühmten Theoreme, die man westlichen Mathematikern zuschreibt, in manchen sangaku früher bzw. unabhängig vom Westen von traditionellen japanischen Mathematikern gemacht worden:

• Der ‚Satz des Ptolemäus' besagt, dass bei einem Sehnenviereck die Summe aus dem Produkt gegenüberliegender Seitenlängen das Produkt der beiden Diagonalen ergibt. Somit gilt: ac + bd = ef. Dieser findet sich gleichermaßen in Arima Yoriyukis ‚Syuki Sanpô' (Mathematik) aus dem Jahr 1769.

• Der ‚Kosinussatz'[8] findet sich auch in Heinouchi Masaomis ‚Sanpô Chokujutsu Seikai' (Mathematik ohne Beweis) aus dem Jahr 1840 und der ‚Sinussatz'[9] auf einem sangaku aus dem Jahr 1849 im Kumano-Schrein des Senhoku-gun in der Akita-Präfektur (gedruckt in ‚Sanpô Jojutsu' aus dem Jahr 1841).

• ‚Herons Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks', die besagt:

$$A_{\text{Dreieeck}} = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}$$

wobei s die Hälfte des Umfangs ist: s : = (a + b + c)/2, findet sich ebenso in einem unpublizierten Manuskript aus dem 19. Jh. von Kawakita Tomochika (1840-1919).

Der Satz des Pythagoras kam über China nach Japan, wie auch das Heron-Verfahren und Euklids Algorithmus. Gleichsam wurde dies unabhängig in Japan entdeckt.

• Das ‚Heron-Verfahren' bzw. das babylonische Wurzelziehen ist ein Rechenverfahren zur Berechnung einer Näherung der Quadratwurzel einer

[8] Kosinussatz: Für die drei Seiten *a*, *b* und *c* eines Dreiecks sowie für den der Seite *c* gegenüberliegenden Winkel – d.h. den zwischen den Seiten a und b liegenden Winkel γ gilt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Analog gilt für die anderen Winkel: $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos \beta$ und $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha$.

[9] Sinussatz: Sind *a*, *b* und *c* die Seiten eines Dreiecks, *α*, *β* und *γ* die jeweils gegenüber liegenden Winkel und *r* der Radius des Umkreises, dann gilt mit der Sinusfunktion:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

Häufig wird der Sinussatz auch als Verhältnisgleichung formuliert:
$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c$.

Zahl. Es ist ein Spezialfall des Newton-Verfahrens. Die Iterationsvorschrift lautet:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

Hierbei steht *a* für die Zahl, deren Quadratwurzel bestimmt werden soll. Der Startwert x_0 der Iteration kann, solange er nicht gleich Null ist, beliebig festgesetzt werden, wobei zu beachten ist, dass negative Werte gegen die negative Quadratwurzel konvergieren, zum Beispiel: $\sqrt{9} = 3$ mit $a = 9$ und $x_0 = 9$:

$$x_1 = \frac{9+\frac{9}{9}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{5+\frac{9}{5}}{2} = \frac{\frac{34}{5}}{2} = \frac{34}{10} = 3{,}4$$

$$x_3 = \frac{\frac{34}{10}+\frac{9}{\frac{34}{10}}}{2} = \frac{\frac{34}{10}+\frac{90}{34}}{2} = \frac{257}{85} \approx 3{,}0235$$

$$x_4 = \frac{\frac{257}{85}+\frac{9}{\frac{257}{85}}}{2} = \frac{\frac{257}{85}+\frac{765}{257}}{2} = \frac{65537}{21845} \approx 3{,}00009.$$

• Der moderne ‚euklidische Algorithmus‘ führt in jedem Schritt eine Division mit Rest aus. Er beginnt mit den beiden Zahlen *a* und $b = r_0$ deren größter gemeinsamer Teiler bestimmt werden soll.

$$a = q_1 \cdot r_0 + r_1$$

In jedem weiteren Schritt wird mit dem Divisor und dem Rest des vorhergehenden Schritts eine erneute Division mit Rest durchgeführt. Und zwar solange bis eine Division aufgeht, das heißt der Rest Null ist.

$$r_0 = q_2 \cdot r_1 + r_2$$
$$r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3$$
$$\vdots$$

$r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n + 0$

Der Divisor r_n der letzten Division ist dann der größte gemeinsame Teiler: ggT (a, b) = r_n.

Da sich die Zahlen in jedem Schritt mindestens halbieren, ist das Verfahren auch bei großen Zahlen extrem schnell, zum Beispiel:

Der größte gemeinsame Teiler von 1071 und 1029 wird mit dem Euklidischen Algorithmus wie folgt berechnet:

$1071 = 1 \cdot 1029 + 42$

$1029 = 24 \cdot 42 + 21$

$42 = 2 \cdot 21 + 0$

Der größte gemeinsame Teiler von 1071 und 1029 ist somit 21.

Auch beim Satz von Descartes (Vier-Kreise-Satz von Descartes), Steiner-Ketten, Soddy-Kreisen, dem Malfatti-Problem und dem Satz von Casey zeigt sich die große Nähe und auch (zeitliche) Differenz zwischen der westlichen und japanischen Mathematik:

• Satz von Descartes, Soddy-Kreise und Steiner-Ketten: Der Satz von Descartes (Vier-Kreise-Satz) lautet (1643):

$$2\,(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \kappa^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + \kappa)^2$$

$$2\,(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \zeta^2) = (k_1 + k_2 + k_3 - \zeta)^2$$

k = Reziproken der Kreisradien ($k_1 \equiv 1/r_1$ etc.)

+ = externe Berührung der drei Kreise mit dem vierten Kreis

– = interne Berührung der drei Kreise mit dem vierten Kreis

Der Satz von Descartes findet sich auch in Hasimoto Masataka's ‚Sanpô Tenzan Syogakusyo' (Geometrie und Algebra) aus dem Jahr 1830. Das Theorem war bereits gut bekannt in der Edo-Zeit und wurde für zahlreiche sangaku angewandt.

1826 bewies Jakob Steiner (1796-1863) Descartes Satz und entwickelte daraus folgendes Sechs-Sphären-Theorem:

> Given two spheres inscribed within a third sphere, such that they kiss each other as well as the outer sphere, put a necklace of spheres around the two given spheres. If all the spheres in the necklace kiss their nearest neighbors, as well as the outer sphere, then six and only six spheres can be placed in the necklace.[10]

In engem Zusammenhang steht die ‚Steiner-Kette' (1937):

> Given two circles, one within the other but not concentric, we imagine trying to fit a chain of smaller circles of various sizes between them, each of which kisses both the inner and outer circles, as well as their nearest neighbors.[11]

Ikeda Sadasuke hatte ein sangaku bereits 1826 in den Ushijima Chômeiji Tempel in Tokyo gehangen. Das sangaku ist nicht erhalten geblieben, aber es ist im folgenden Jahr von Shiraishi Nagatada in seinem Buch ‚Shamei Sanpu' (Sammlung von sangaku) aufgezeichnet worden.

• Das ‚Malfatti-Problem': Im Westen wurde dieses Problem 1803 von Gian Francesca Malfatti (1731-1807) gestellt, nach dem es benannt ist:

> Given a right triangular prism of any sort of material, such as marble, how shall three circular cylinders of the same height as the

[10] F. HIDETOSHI/T. ROTHMAN, 2008, p. 288 (ferner: Nature 139 (1937), 77).
[11] F. HIDETOSHI/T. ROTHMAN, 2008, p. 291

> prism and of the greatest possible volume of material be related to one another in the prism and leave over the least possible amount of material?[12]

Mit anderen Worten: Wie kann man drei Kreise in einem Dreieck so plazieren, so dass die Flächen der Kreise größtmöglich das Dreieck ausfüllen?

Malfatti sagte intuitiv, dass das Problem mit drei sich gegenseitig berührenden Kreisen gelöst werden kann. H. Lob und H.W. Richmond stellten 1930 fest, dass Malfattis Lösung nicht immer die Frage beantwortet. 1967 zeigte Michael Goldberg, dass Malfattis Antwort niemals die Aufgabe löst. 1992 konnten V.A. Zalgaller und G.A. Los zwei Lösungen für das Problem aufzeigen.

Ajima Naonobu, ein großer japanischer Mathematiker, löste das Problem, das er bereits 30 Jahre vor Malfatti gestellt hatte. Das Manuskript ‚Fukyû Sanpô' (Meisterwerke der Mathematik) wurde nach Ajimas Tod von seinen Schülern veröffentlicht: Gegeben sei ein Dreieck ABC mit einem einbeschriebenen Kreis mit Radius r. In Anknüpfung an Heron's Formel für die Fläche des Dreiecks erhält man:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

wobei s der halbe Kreisumfang ist. Mit $p \equiv r - (s-a) + \sqrt{r^2 + (s-a)^2}$, $q \equiv r\,(a-p)$ und $t \equiv \sqrt{q^2 - p^2\,(s-b)(s-c)}$ zeigt Ajima:

$$r_1 = \frac{q+t}{2\,(s-c)},\ r_2 = \frac{q-t}{2\,(s-b)},\ r_3 = \frac{r_1\,[b-(\frac{t}{r}+c)]^2}{(2r_1-p)^2}$$

zum Beispiel: a = 507, b = 375 und c = 252, dann betragen $r_1 = 64$, $r_2 = 56{,}25$ und $r_3 = 36$.

[12] F. HIDETOSHI/T. ROTHMAN, 2008, p. 293.

Es gibt weitere bedeutende Theoreme, die im Westen, aber auch in Japan entdeckt worden sind:

• Der ‚Satz von Feuerbach' wurde von Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) im Jahr 1822 veröffentlicht und besagt: Der Neun-Punkte-Kreis (oder Feuerbachkreis, Inkreis) berührt alle drei Außenkreise (Ankreis), wie auch den einbeschriebenen Kreis ABC.

Das Problem den Radius eines Kreises zu finden, der die drei Außenkreise berührt, wurde 1801 bereits in einem sangaku dargestellt, das jedoch verloren ist. Die Lösung findet sich in Nakamura Tokikakazu's ‚Saisi Sinzan' (1830):

$$\mathrm{r} = \frac{(r_1 + r_2)\,(r_3 + r_3)(r_3 + r_1)}{8\,(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3\, r_1\,)}$$

r = Radius des Neun-Punkte-Kreises
r_1, r_2 und r_3 = Radien der Außenkreise (Ankreise)

• Der ‚Satz von Casey' wurde 1857 von John Casey entdeckt: Vier Kreise mit den Radien r_1, r_2, r_3 und r_4 berühren sich mit einem fünften Kreis oder einer Linie, genau dann, wenn

$$t_{12}\, t_{34} \pm t_{13}\, t_{42} \pm t_{14}\, t_{23} = 0,$$

wobei t_{12} die gemeinsame Tangente zweier Kreise 1 und 2 ist, …

1830 wurde dieser Satz von Shiraishi Nagatada folgendermaßen bereits formuliert: Für vier Kreise, die einen fünften (extern oder intern) berühren gilt:

$$t_{12}\, t_{34} + t_{14}\, t_{23} = t_{13}\, t_{24}$$

• 1896 veröffentlichte Joseph Jean Baptiste Neuberg ein Problem im französischen Journal ‚Mathesis' (problem 1078, p. 193):

> Given a triangle ABC, let R, r, r_a, r_b, r_c be the radii of the circumcircle O, the incircle I, and the three excircles I_a, I_b, I_c respectively. The fourth tangents common to pairs of the excircles I_a, I_b, I_c form a triangle A_a, A_b, A_c. Show that the center of the incircle of triangle $A_1 B_1 C_1$ is the same as the center of the circumcircle of triangle $I_a I_b I_c$ and that the following relation holds:

$$r_1 = 2R + r = \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}$$

Das Ergebnis $2r_1 = r + r_a + r_b + r_c$ wurde bereits 1803 von Yamamoto Norihisa auf einem sangaku im Echigo Hakusan Schrein (Niigata-Präfektur) aufgezeichnet. Die Tafel ist zwar verloren, wird jedoch in Nakamura's Manuskript ‚Saishi Shinzan' aus dem Jahr 1830 genannt.

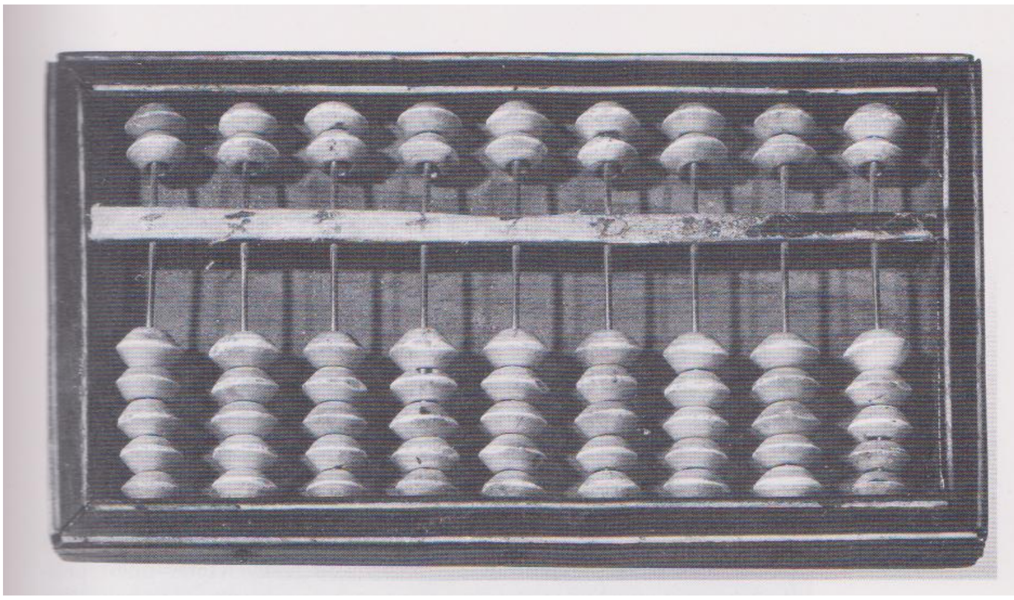
Fasst man nun die Ergebnisse zusammen, so zeigt sich, dass Mathematik einerseits universal gültig ist (Noumenon), sich aber dennoch kulturelle Unterschiede (Phaenomenon) in der Entdeckung von mathematischen Problemen (Zeit), ihrer Darstellung (Ästhetik) und ihrer Auflösung (Methode) zeigen. Anhand der japanischen sangaku-Tradition konnten auf diese Weise Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur westlichen Mathematik aufgezeigt werden.

Die Frage ‚Ist Mathematik (inter-)kulturell korrekt?' kann damit mit einem klaren Nein beantwortet werden, wenn die Mathematik jedoch zu einseitig auf die griechisch-westliche Tradition reduziert wird, wie es in den Schulen und Universitäten im Westen geschieht. Auch die anderen kulturellen Ausgestaltungen der Mathematik sollten berücksichtigt werden, da nicht selten in anderen Kulturen (hier der japanischen Kultur) die mathematischen Entdeckungen früher, zeitgleich oder auf eine andere Art und Weise gemacht wurden/werden. Der andere kulturelle Blick auf die gleichen Grundfragen eröffnet so neue Dimensionen im Denken. Sind beispielsweise Mathematik (Wissenschaft) und Religion bzw. Mathematik und Kunst im westlichen Denken streng voneinander geschieden, so zeigt die japanische sangaku-Tradition gerade ihre Verschmelzung, wo Mathematik zu einem ‚Gottes-`, bzw. ‚Götterdienst' und zur Kunst wird. Doch, wenn man über die abendländische Mathematiktradition kritisch nachdenkt, so findet man die Nähe von Mathematik und Religion beispielsweise auch bei Leibniz und bei Cantor, wie auch Mathematik und Kunst beim Goldenen Schnitt (Φ) oder auch in der fraktalen Geometrie. Aristoteles schrieb:

> The mathematical sciences particularly exhibit order, symmetry and limitation; and these are the greatest forms of the beautiful.

Sind sich beide fernen Kulturen vielleicht doch näher, als es auf den ersten Blick zu sein scheint?

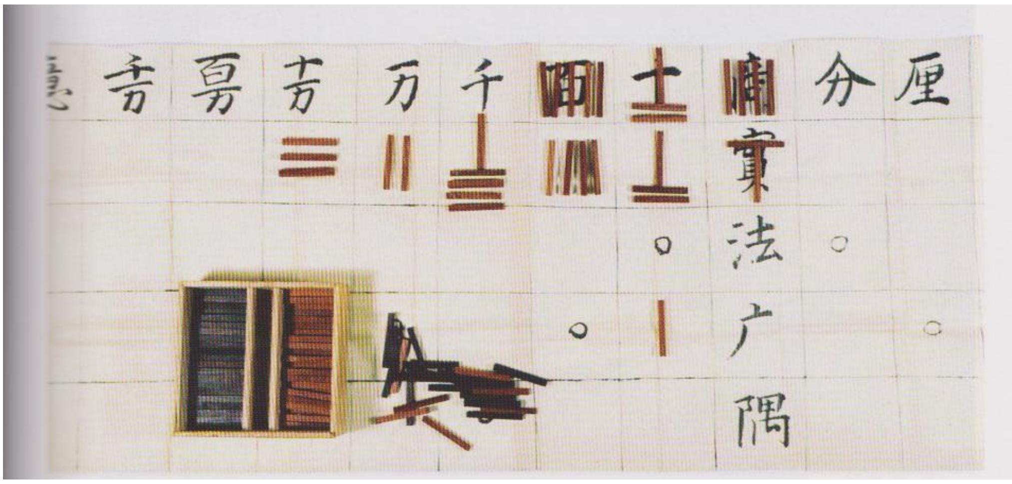
4. ANLAGE: Abbildungen



(Abb. 1)

Here is the oldest known abacus, or soroban, in Japan. It dates from about A.D. 1592 and was in the possession of one of Hideyoshi's soldiers at the port of Hakata.

(in: Fukugawa Hidetoshi/Tony Rothman: Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry, with a foreword by Freeman Dyson, Princeton University Press, Princeton/Oxford 2008, p. 15)



(Abb. 2)

Sangi, calculating rods, were placed on a ruled sheet of paper to form numerals and, with a prescribed series of operations, intricate arithmetic calculations could be performed. Sangi gradually lost out to the Japanese abacus, the soroban, although professional mathematicians used them well into the nineteenth century because they were better suited to complex calculations.

(in: Fukugawa Hidetoshi/Tony Rothman: Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry, with a foreword by Freeman Dyson, Princeton University Press, Princeton/Oxford 2008, plate 3)

PLATE 5. ***Sangaku* of the Katayamahiko shrine.** One of the most beautiful *sangaku*, this dragon-framed tablet was dedicated by Irie Shinjun in 1873 to the Katayamahiko shrine of Murahisagun Okayama city. We have used Irie's inscription on the tablet as the preface to chapter 5. The *sangaku* measures 162 cm by 88 cm.

(Abb. 3)

PLATE 10. ***Sangaku* of the Dewasanzan shrine.** A large and beautiful *sangaku*, this tablet from the Dewasanzan shrine in Yamagata prefecture measures 453 cm in width and 151 cm in height. What remains is moreover only half the original tablet; the other half was lost. It was hung in 1823 by the Saitō school. (© Asahi Shinbun.)

(Abb.4)

(in: Fukugawa Hidetoshi/Tony Rothman: Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry, with a foreword by Freeman Dyson, Princeton University Press, Princeton/Oxford 2008, plate 5 and 10)

LITERATUR

Albrecht Beutelspacher/Bernhard Petrie: Der Goldene Schnitt, Heidelberg/Berlin/Oxford ²1996

Fukugawa Hidetoshi/Tony Rothman: Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry, with a foreword by Freeman Dyson, Princeton University Press, Princeton/Oxford 2008

Max Koecher/Aloys Krieg: Ebene Geometrie, Berlin [u.a.] ³2007

Takashi Kojima: The Japanese Abacus. Its Use and Theory, Tokyo 1954

Id.: Advanced Abacus. Japanese Theory and Practice, Tokyo 1963

Hiromi Mizuno: Science for the Empire. Scientific Nationalism in Modern Japan, Stanford 2009

Heinz-Otto Peitgen/Hartmut Jürgens/Dietmar Saupe: Chaos and Fractals. New Frontiers of Science, New York ²2004

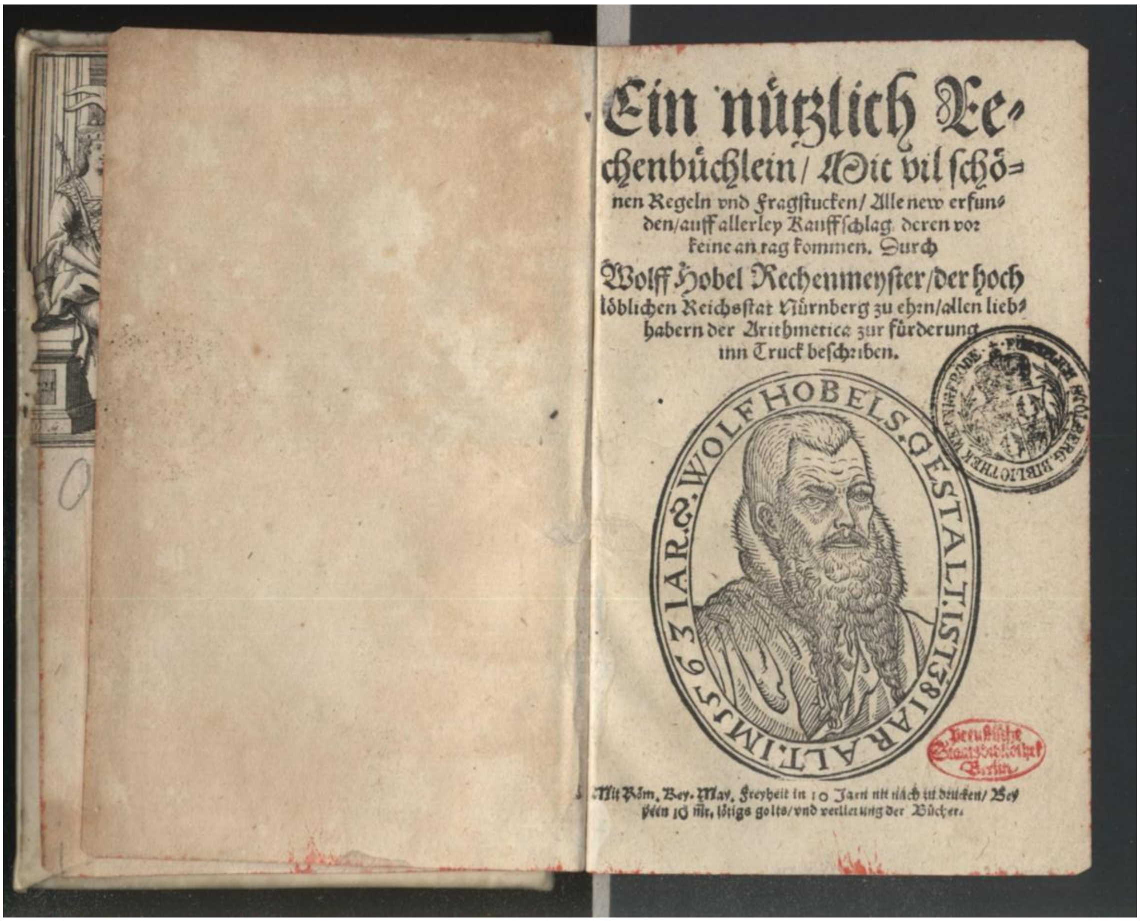
Manfred Pohl: Geschichte Japans, München ⁴2008

Wolfgang Schwentker: Die Samurai, München 2003

David Eugene Smith/Yoshio Mikami: A History of Japanese Mathematics, Chicago 1914

Algebraische Kostbarkeiten im Rechenbuch von Wolff Hobel (Nürnberg 1563)

Stefan Deschauer, Dresden



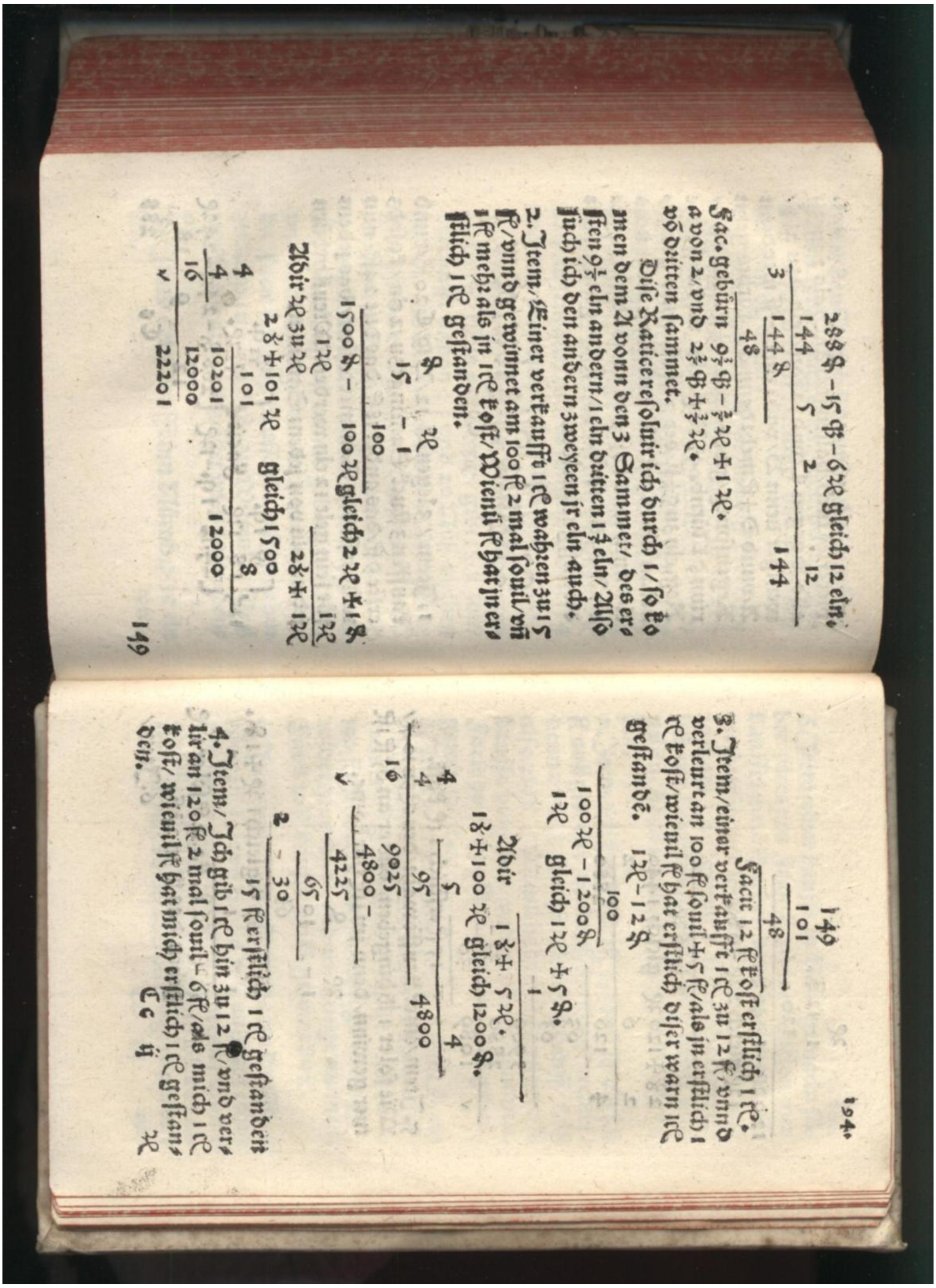
Titelblatt

Einleitung

Der Rechenmeister Wolff Hobel, ein Schüler von Johann Neudörffer d. Ä., veröffentlichte im Jahre 1563 (weitere Auflagen sollen 1565 und 1577 erschienen sein) bei Valentin Neuber in Nürnberg *Ein nützlich Rechenbüchlein …*, das die frühneuzeitliche Forschung bislang noch nicht entdeckt hat. Besonderes Interesse verdient das Kapitel zur Algebra (Bl. 193–199) mit 25 kniffligen, überaus reizvollen Textaufgaben sowie nicht immer eindeutigen Ergebnissen. Aus diesem „Filetstück“ des Buchs werden hier 2, im Vortrag möglichst 3 Aufgaben vorgestellt und die Lösungswege aufgezeigt, die Hobel überwiegend verschweigt. Zum Abschluss soll eine Kurzanalyse der Aufgaben eine gewisse Übersicht verschaffen.

Zwei typische Aufgaben

2 (193^{v}/194)



Einkaufspreis von 1 Zentner: x fl. (Gulden); Gewinn: $(2x+1)$ %

Die Gleichung $x(1+\frac{2x+1}{100})=15$ führt zu $x^2+\frac{101}{2}x=750$ mit $x_{1/2}=-\frac{101}{4}\pm\frac{149}{4}$, wobei nur x_1 in Frage kommt: $x=12$

Lösung des Autors (in unsere Terminologie übertragen):
$15-x \xrightarrow{\cdot 100} 1500-100x.$ Ohne Erläuterung folgt der (zu unserer Gleichung äquivalente) Ansatz $1500-100x=(2x+1)x.$ Wahrscheinlich hätte der Autor so argumentiert: x fl. erbringen $(15-x)$ fl. Gewinn, 100 fl. erbringen $(2x+1)$ fl. Gewinn, also erbringen $100x$ fl. (gemeinsames „Vielfaches“) einerseits $(1500-100x)$ fl., andererseits $(2x+1)x$ fl. Gewinn. Die zugehörige quadratische Gleichung des Typs $ax^2+bx=c$ – hier mit $a=2,\ b=101,\ c=1500$ – löst HOBEL schrittweise nach dem Schema $x=\frac{1}{2a}\ \sqrt{b^2+4ac}-b$. (Dabei ist die Rechnung $4\cdot 4=16$ überflüssig.) Es ist hier nicht ersichtlich, ob er eine zweite positive Lösung von vornherein ausschließt. Für x^2 verwendet der Autor das übliche cossische Symbol z (von *zensus* oder *census* = Kraft, Vermögen).

21 (197v)
Item / einer kaufft zu Nürnb. Negelen für 1 fl $\frac{16}{25}$ *souil lb fusti / als er fl zalt / vnd für 1 fl* $\frac{1}{16}$ *souil lb lauter / als er für die lautern gibt / fürts gen Wien / verzert 48 fl / thun 10 Nü. 9 Wie. lb / verkauffet 9 lb vnter einander 6 fl / rechter denn vmb* $\frac{1}{15}$ *souil fl / als der lb aller sein / Wenn ich die gelösten fl multi mit* $53\frac{1}{3}$ */ zeiget* $\sqrt[3]{}$ *des products* $\frac{3}{4}$ *gleich* $\frac{1}{15}$ *aller lb Wie. Vnd gewinnet also etlich fl / wenn ichs diuidir mit 10 / so bleibē* $9\frac{1}{2}$ */ mit 11 /* $3\frac{1}{2}$ */ mit 13 bleiben* $6\frac{1}{2}$ *fl vber / Wie uil hat er jeder lb kaufft vnd hingebē / auch für jede fl zalt / vnnd wieuil ist der gewinn. Facit / 400 lb lauter / 100 lb fusti / zalt für lautern 80 fl / für fusti* $12\frac{1}{2}$ *fl / gewint* $1059\frac{1}{2}$ *fl zu Wien an 450 lb Wiener.*

Einkauf der minderwertigen Nelken (Fusti) für x fl.: $\frac{16}{25}x^2$ N. lb

Einkauf der lauteren Nelken für y fl.: $\frac{1}{16}y^2$ N. lb

Gesamtgewicht: $u=(\frac{16}{25}x^2+\frac{1}{16}y^2)$ N. lb $=\frac{9}{10}u$ W. lb; Unkosten: 48 fl.
Beim Verkauf wird nicht mehr zwischen Fusti und lauterer Ware unterschieden. Außerdem gelten ab jetzt “Wiener Bedingungen“.
9 W. lb werden für $(\frac{1}{15}\cdot\frac{9}{10}u-6)$ fl. verkauft, $\frac{9}{10}u$ W. lb also für $\frac{u}{10}(\frac{3}{50}u-6)$ fl. [„gelöste“ fl.]

Es folgt die Bedingung $\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{53\frac{1}{3}\cdot\frac{u}{10}(\frac{3}{50}u-6)}=\frac{1}{15}\cdot\frac{9}{10}u$ – vgl. die drei Wurzelhaken im Text – die zur äquivalenten quadratischen Gleichung $625u-62500=u^2$ führt. Die Lösungen sind $u_1=500$ und $u_2=125.$ Daher beträgt der Erlös 1200 fl. oder $18\frac{3}{4}$ fl.
Weitere Informationen erhält man, wenn man den Gewinn g berechnet. Mit $g=10\lambda+9\frac{1}{2}=11\mu+3\frac{1}{2}=13\nu+6\frac{1}{2}$ hat man ein eindeutig lösbares lineares (3×3)-System $(\lambda=105,\mu=96,\nu=81).$ Der Gewinn beträgt daher $1059\frac{1}{2}$ fl.
Jetzt steht auch der Erlös (1200 fl.) fest, der ja nicht kleiner als der Gewinn sein darf, und damit ist $u=500.$ Unter Berücksichtigung der Unkosten gilt nun $1059\frac{1}{2}$ fl. $=(1200-x-y-48)$ fl., also $x+y=92\frac{1}{2}.$ Aus dem Gesamtgewicht in N. Pfund ergibt sich jetzt die Gleichung $500=\frac{16}{25}x^2+\frac{1}{16}(92\frac{1}{2}-x)^2,$ die sich zu $1124x^2-18500x+55625=0$ umformen lässt. Lösungen sind $x_1=12\frac{1}{2}$ und $x_2=3\frac{539}{562}.$ Der Autor hat nur die erste Lösung präsentiert: 100 N. lb Fusti für $12\frac{1}{2}$ fl., 400 N. lb lautere Ware für 80 fl. (jeweils im Einkauf), zusammen 450 W. lb. Nach dem Erlös (1200 fl.) fragt er nicht, und er fehlt auch im Fazit.
Die zweite (mathematisch mögliche) Lösung führt zu $10\frac{2490}{78961}$ N. lb Fusti für $3\frac{539}{562}$ fl. und zu $489\frac{76471}{78961}$ N. lb lautere Ware für $88\frac{152}{281}$ fl. (jeweils im Einkauf), die anderen Werte ändern sich natürlich nicht. Hierbei wäre aber der Preis für die hochwertigen Nelken deutlich niedriger als der für die minderwertigen, so dass sich die zweite Lösung aus praktischen Gründen verbietet.

Kurzanalyse der Aufgaben: formale und inhaltliche Aspekte
Die Einkleidung der Aufgaben bezieht sich fast ausschließlich auf normale Abläufe im Handel (Einkauf und Verkauf, teilweise mit Unterstützung durch einen Faktor). Die Ergebnisse der Aufgaben sind i. Allg. realistisch, allerdings sind die vorgegebenen Bedingungen praxisfern. Der Schwierigkeitsgrad ist unterschiedlich, aber einfache Aufgaben fehlen. Die Texte sind überwiegend fehlerfrei, auch treten verdruckte Zahlen kaum auf. In einem Fall muss aber bei einer falschen Zahl von einem Rechenfehler ausgegangen werden. Nur bei den Aufgaben 1–5 findet der Leser eine Skizze des Lösungswegs. Bemerkenswert ist auch, dass sich der Autor offenbar nicht bei jeder Aufgabe für alle einschlägigen Rechenfragen interessiert, sondern nur nach den „Schlüsselergebnissen“ fragt und diese im jeweiligen Fazit teilweise auch noch unvollständig beantwortet.
Besondere Beachtung verdient das „Markenzeichen“ dieser Aufgabensammlung – der Kunstgriff, mit dem in der Einkaufssituation algebraische Terme 2. Grades erzeugt werden. Im Fall einer erneuten Anwendung in der Verkaufssituation können somit auch kubische Terme generiert werden. In den betreffenden Auf-

gaben wird die Anzahl der Pfund pro Gulden stets mit der Gesamtzahl (x) der Gulden verknüpft – im Dreisatz dargestellt:

$1\text{ fl.} — \frac{m}{n}x\text{ lb} — x\text{ fl.} \to \frac{m}{n}x^2\text{ lb}$

Insgesamt spielen bei der Analyse aller 25 Aufgaben folgende formale und inhaltliche Aspekte eine Rolle (ohne Anspruch auf Vollständigkeit):

ungenaue Formulierung; unvollständige Fragen und Antworten; verdruckte Zahl; Rechenfehler; Kunstgriff zur Erzeugung algebraischer Terme 2. Grades; falscher mathematischer Begriff; Gesellschafter; Faktor; lineares (3×3)-System; lineares (4×4)-System; biquadratische Gleichung; kubische Gleichung; bikubische Gleichung; Gleichung 4. Grades; Gleichung 6. Grades; Wurzelgleichung; gemischtes linear-quadratisches (2×2)-System; quadratisches (3×3)-System; algebraische Operation mit Aggregaten, vorteilhaftes Substituieren; Prozentrechnung; vermehrter Grundwert; Verteilungsrechnung; unbestimmtes Problem; mathematisch mehrdeutiges Problem, das in der Praxis eindeutig lösbar sind; unvollständige Lösung des Autors; mangelnde Einsicht des Autors in den Zusammenhang der Variablen

Ausblick

HOBEL hat in diesem Kapitel seines Rechenbuchs eine gemessen an seiner Zeit höchst elaborierte algebraische Ausgabensammlung präsentiert. Die Aufgaben sind teilweise ziemlich anspruchsvoll und kompliziert, und auch ein in der Algebra Bewanderter dürfte damals aufgrund der schwerfälligen cossischen Symbolik erhebliche Schwierigkeiten beim Lösen gehabt haben.

Solche Aufgaben zu komponieren ist eine hohe Kunst, die HOBEL wohl in der Schule von JOHANN NEUDÖRFFER D. Ä. gelernt hat, und vielleicht stammen sie zumindest teilweise selbst vom berühmten Lehrer des Autors. Man kann jedenfalls vermuten, dass die Coss in der Ausbildung bei NEUDÖRFFER eine besondere Rolle gespielt hat.

Literatur

Hobel, Wolff: Ein nützlich Rechenbüchlein / Mit vil schönen Regeln vnd Fragstucken / Alle new erfunden / auff allerley Kauffschlag deren vor keine an tag kommen … Nürnberg (Valentin Newber) 1563. [nach RA und AM weitere, heute nicht mehr nachweisbare Auflagen: 1565, 1577]
Deschauer, Stefan: Zur Bedeutung der Nürnberger Rechenmeister in der Zeit der Renaissance – zwischen Dominanz und fehlendem Einfluss (erscheint in Sudhoffs Archiv 2010)

bicause noe. 2. thynges, can be moare equalle.

Robert Recorde und das Gleichheitszeichen

ULRICH REICH, BRETTEN

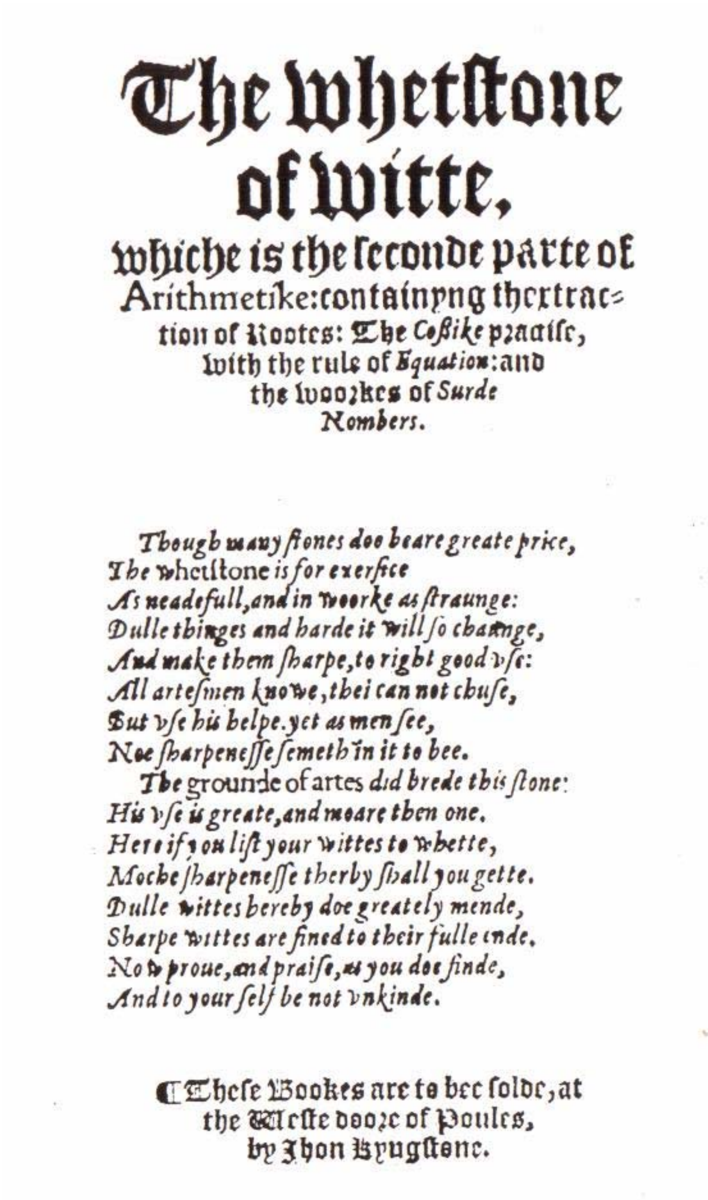
The Welshman Robert Recorde (c. 1510 Tenby – 1558 London) was the first who wrote several books in the English language presenting the fundamentals of arithmetic, geometry and astronomy. Later on, in the year 1557, one year before he died, Recorde published his most noted work, an advanced book of higher level with the title *“The Whetstone of Witte”* presenting the algebra in the English language. In this book he first proposed the use of the sign $=$ of equation.

Der etwa 1510 in dem malerischen Städtchen Tenby an der Südküste von Wales geborene Robert Recorde studierte ab etwa 1525 in Oxford und lehrte ab 1531 in Cambridge. Hier erlangte er 1545 den medizinischen Doktorgrad und praktizierte danach als Arzt in London. Anschließend war er in mehreren führenden Funktionen in den königlichen Silberminen in Bristol und in Irland tätig. Aus nicht gesicherten Gründen fiel Recorde in Ungnade und wurde in das Schuldengefängnis King’s Bench Prison in Londons Stadtteil Southwark geworfen, in dem er 1558 verstarb.

Neben den genannten Tätigkeiten verfasste Robert Recorde als erster mehrere Lehrbücher in englischer Sprache. Er verfolgte das ehrgeizige Ziel, einen vollständigen Mathematikkurs aufzubauen. Seine Lehrbücher waren bahnbrechend und wirken auch heute noch sehr modern und didaktisch lehrreich.

Zunächst veröffentlichte Recorde 1542 das Arithmetikbuch *„The Ground of Artes“*. Dieses Buch war lange Zeit ein Bestseller und erreichte bis 1699 über fünfzig Auflagen. Als nächste Werke folgten 1551 *„Pathwaie to Knowledge“*, eine stark gekürzte Version einiger Bücher der Elemente Euklids, und 1556 das Astronomiebuch *„Castle of Knowledge“*, in dem er auf vorsichtige Weise die damals revolutionäre kopernikanische Lehre beschrieb.

Recordes bedeutendstes Werk war sein 1557 erschienenes Algebrabuch *„The Whetstone of Witte“*, das 1557 bei *Jhon Kyngston* in London gedruckt wurde. Dies blieb die einzige Ausgabe. Heutzutage sind mir weltweit 32 Exemplare bekannt.


The whetstone of witte,
whiche is the seconde parte of
Arithmetike: containyng thextraction of Rootes: The Coßike practise,
with the rule of Equation: and
the woorkes of Surde
Nombers.

Though many stones doe beare greate price,
The whetstone is for exersice
As neadefull, and in woorke as straunge:
Dulle thinges and harde it will so chaunge,
And make them sharpe, to right good vse:
All artesmen knowe, thei can not chuse,
But vse his helpe: yet as men see,
Noe sharpenesse semeth in it to bee.
The grounde of artes did brede this stone:
His vse is greate, and moare then one.
Here if you list your wittes to whette,
Moche sharpenesse therby shall you gette.
Dulle wittes hereby doe greately mende,
Sharpe wittes are fined to their fulle ende.
Now proue, and praise, as you doe finde,
And to your self be not vnkinde.

These Bookes are to bee solde, at
the Weste doore of Poules,
by Jhon Kyngstone.

Abb. 1: Robert Recorde, *The Whetstone of Witte*, London 1557, Titelblatt

Das Buch im Quartformat (etwa 13 cm x 18 cm) enthält 164 Blätter und zwei Faltblätter. Hier folgt ein kurzer Inhaltsüberblick:

Titelseite		
Widmung		5 Seiten
Vorwort		6 Seiten
2 Gedichte		1 Seite
I. Elementare Zahlentheorie (Euklid, Boethius)		64 Seiten
II. Das Extrahieren von Wurzeln		57 Seiten
III. Die Kunst der cossischen Zahlen		134 Seiten
Die cossischen Zahlen	89 Seiten	
Gleichungsregeln	45 Seiten	
IV. Die Kunst der surdischen Zahlen		52 Seiten

Nach einer Widmung und dem Vorwort besteht das Buch aus vier Teilen. Der erste Teil behandelt Einzelheiten zur elementaren Zahlentheorie. Der zweite Teil ist eine Fortsetzung von Recordes Arithmetikbuch *“The Ground of Artes”*. Den wichtigsten, berühmtesten und umfangreichsten Teil stellt die Behandlung der Algebra unter dem Titel *“The Arte of Coßike nombers”* dar. Das Buch endet mit einem angehängten Teil über die irrationalen Zahlen, von Recorde bezeichnet als *“surde nombers”*.

In griechischer Tradition schreibt Robert Recorde – wie beispielsweise Platon – den gesamten Text in Form eines Dialogs zwischen dem *Master* und dem *Scholar*. Der *Scholar* stellt Fragen an den *Master*, der *Master* beantwortet die Fragen und prüft mit Beispielen oder weiteren Fragen, ob der *Scholar* die Thematik verstanden hat.

Im 16. Jahrhundert war es für Autoren nicht üblich, die Quellen ihres Wissens anzugeben. Robert Recorde ist hier eine rühmliche Ausnahme mit seinen häufigen Zitaten. Wir können seine 42 Zitate in drei Gruppen aufgliedern: Im Vorwort finden wir Zitate der alten Griechen Platon, Aristoteles und Nicomachus. Sonst im Text werden aus vergangenen Zeiten Boethius, *„Algeber“*[1] und besonders häufig Euklid zitiert. An Zeitgenossen nennt Recorde Cardanus, Stifel und Scheubel, auf die nun näher eingegangen wird.

Als Grundlagen dienten Recorde die in lateinischer Sprache verfassten Werke von dem italienischen Gelehrten Geronimo (Girolamo) Cardano (1501 – 1576), dem aus Esslingen stammenden Reformator, Mathematiker und Weltuntergangspropheten Michael Stifel (1487 – 1567), der 1525 – 1527 auf der Burg Tollet im Hausruckviertel (Oberösterreich) gelebt hatte, und insbesondere dem Tübinger Mathematikprofessor Johannes Scheubel (1494 – 1570), ehemals ab 1513 Student in Wien, dessen in Paris 1551 gedrucktes Algebrabuch *„Algebrae compendiosa facilisque descriptio“* Recorde besessen hatte.

In diesem Beitrag wird aus Platzgründen nur der Algebrateil knapp erläutert. Von Johannes Scheubel übernahm Recorde neben dem Pluszeichen und dem Minuszeichen [2] die von deutschen Mathematikern entwickelten sogenannten cossischen Zeichen, , , , , , … für die Potenzen x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5,… sowie die Wurzelhaken , und für die zweite, dritte und vierte Wurzel.

[1] Über *„Algeber“* schreibt Recorde auf fol. Ee iiij^{v} bei der Gleichungsregel: *„This Rule is called the Rule of Algeber, after the name of the inuentoure, as some men thinke: or by a name of singular excellencie, as other iudge.“*

[2] Das Plus- und Minuszeichen in unserer heutigen Form hatte ursprünglich Johannes Widmann von Eger entwickelt und in gedruckter Form 1489 in seinem Leipziger Buch *„Behe[n]de vnd hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft“* eingeführt.

Wie intensiv sich Robert Recorde mit der Schreibweise der Potenzen befasst hat, zeigt seine Tabelle bis zur Potenz 80:

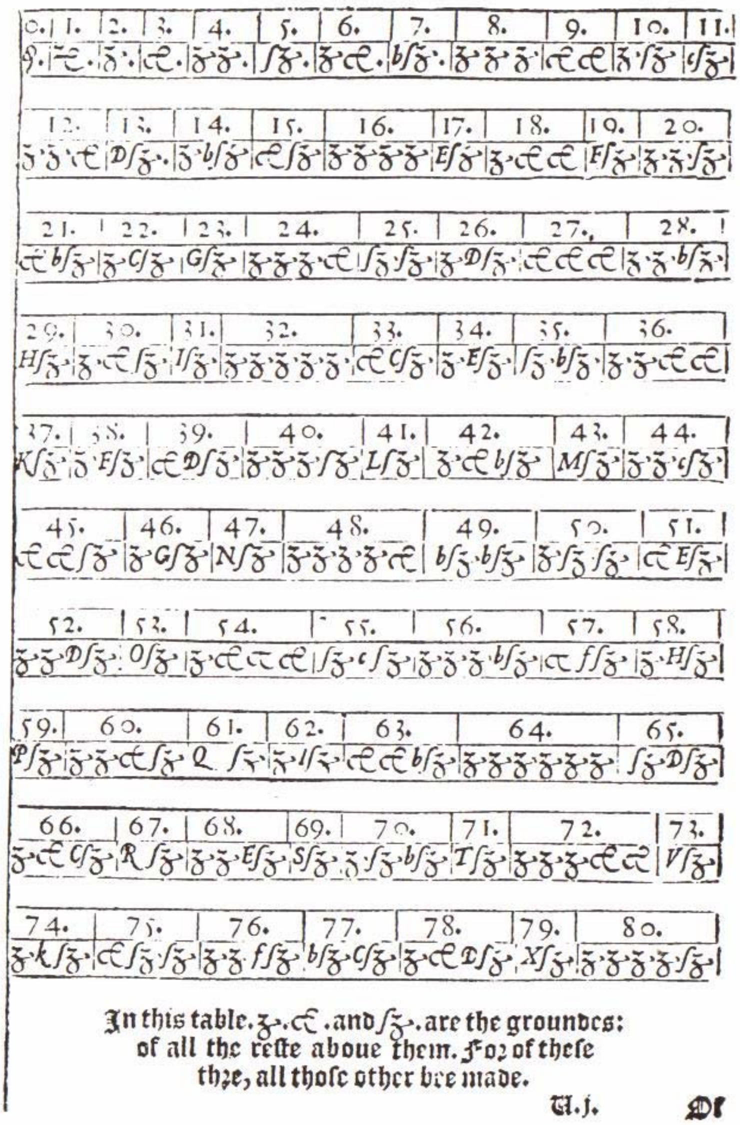


Abb. 2: Robert Recorde, *The Whetstone of Witte*, London 1557, fol. Nj[r]

Auf einen kleinen Schönheitsfehler in der Tabelle soll hingewiesen werden. Recorde übersieht, dass 69 keine Primzahl ist. Die richtige Bezeichnung für die Potenz 69 wäre ꞓGʃʒ·. Als Folgefehler beginnen so die nächsten Primzahlen 71, 73 und 79 mit falschen Großbuchstaben.

Im Folgenden führt Recorde die Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens von algebraischen Termen mit kleineren und größeren Beispielen vor. Danach befasst sich Recorde mit Gleichungen. Er beginnt dabei mit quadratischen Gleichungen und listet folgende drei Formen auf:

$$a\,x^2 = bx + c\ (= c + bx), \qquad a\,x^2 = c - b\,x, \qquad a\,x^2 = b\,x - c.$$

Hierzu bringt er diverse Zahlenbeispiele, die er mit Hilfe der quadratischen Ergänzung löst. Dabei findet er nur die positiven Lösungen. Er schreibt noch immer den Text „*is equalle to*“ aus, bis ihm diese Schreibweise auf fol. Ffi^{v} lästig wird. So kommt ihm als Geistesblitz seine brillante Erfindung unseres heutigen Gleichheitszeichens:

And to auoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke vse, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =======, bicause noe. 2. thynges, can be moare equalle.

Abb.3: Einführung des Gleichheitszeichens, fol. Ff i^{v}. (Die altenglische Formulierung *“Gemowe lines”* bedeutet *twin lines.*)

Nach der Einführung des Gleichheitszeichens wendet sich Recorde ausführlich den Gleichungen zu und präsentiert erstmalig Gleichungen, die in der uns gewohnten symbolischen Schreibweise geschrieben sind.

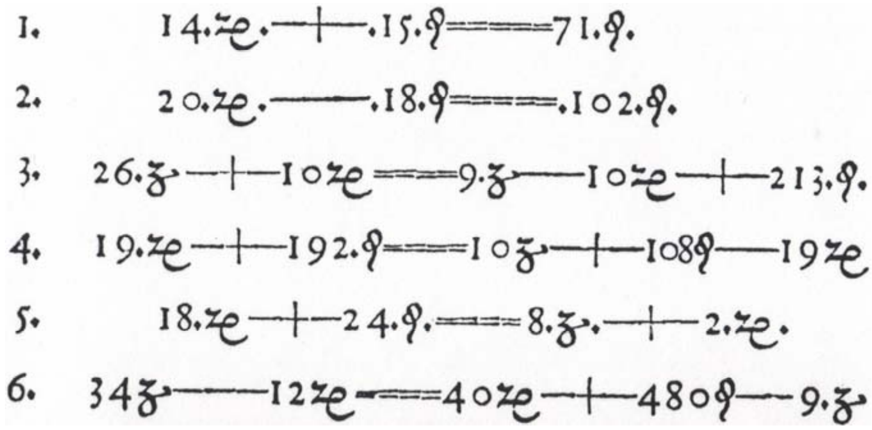


Abb.4: Recordes neue Schreibweise von Gleichungen, fol. Ff i^{v}.

Heutzutage werden diese Gleichungen folgendermaßen dargestellt:

1.) $14x + 15 = 71$

2.) $20x - 18 = 102$

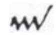
3.) $26x^2 + 10x = 9x^2 - 10x + 213$

4.) $19x + 192 = 10x^2 + 108 - 19x$

5.) $18x + 24 = 8x^2 + 2x$

6.) $34x^2 - 12x = 40x + 480 - 9x^2$

Auf den nächsten Seiten löste Robert Recorde diese Probleme, wobei er bei den quadratischen Gleichungen die Lösungen wiederum mit Hilfe der quadratischen Ergänzung ermittelte. Anschließend behandelte er weitere Gleichungstypen. Dabei klassifizierte er die Gleichungen in zwei Typen mit jeweils drei Unterklassen.

Im abschließenden Kapitel behandelt Recorde die sogenannten surdischen Zahlen („*surde nombers*") und führt dabei die Wurzelhaken ,  und  für die zweite, dritte und vierte Wurzel ein. Die Wurzelhaken hatte er in dieser Form von Johann Scheubel aus dessen in Paris 1551 gedrucktem Algebrabuch übernommen.

Da Robert Recorde als erster mathematische Lehrbücher in englischer Sprache verfasst hatte, gebührt ihm auch das Verdienst, einige wichtige mathematische Wörter wie *negative* oder *root* eingeführt zu haben. Somit war er ein ganz bedeutender Wegbereiter der Algebra mit ihrer heutigen Symbolik in Europa.

Wie bereits erwähnt wurde, gab es von „*The Whetstone of Witte*" nur die eine Auflage aus dem Jahr 1557. Ein Faksimile wurde 1969 gedruckt von Da Capo Press, Theatrum Orbis Terrarum Ltd., Amsterdam / New York. Und heuer – im Jahr 2010 – ist es TGR Renascent Books, Derby, UK (siehe www.renascentbooks.co.uk), gelungen, mit sehr sorgfältig und aufwändig hergestellten Büchern Robert Recorde zu gedenken.

Anlässlich seines 450. Todestages wurde Robert Recorde 2008 in einer Joint Conference der British Society of History of Mathematics (BSHM) und der WALMATO (Organisation walisischer Mathematiklehrer) in Gregynog Hall (Mid Wales) gewürdigt. Weitere Veranstaltungen folgen heuer insbesondere in seiner Geburtsstadt Tenby, wenn Robert Recordes 500. Geburtstag gefeiert werden kann. Zwar ist sein genaues Geburtsjahr nicht bekannt, aber irgendwann um 1510 muss er geboren sein.

Ein ausführlicher Aufsatz des Verfassers mit dem Titel *"The Whetstone of Witte: Contents and Sources"* wird demnächst in dem Tagungsband *"Robert Recorde (1510? – 1558): His Life and Times"* bei University of Wales Press (UWP) in Cardiff erscheinen.

Prof. Ulrich Reich
Kurpfalzstraße 14
75015 Bretten
Deutschland
Email: *familiereich@web.de*

Fermats « adaequare » — und kein Ende?

Klaus Barner

In this paper I champion Pierre Fermat and Herbert Breger against Enrico Giusti. In [Bre 1994] Breger puts forward the thesis that Fermat used the Latin word *adæquabitur* in the meaning of "equals" in his writings concerning his method of determining maxima and minima as well as calculating tangents. In his recent paper [Giu 2009] Giusti ridicules Breger's view of *adæquari* in a footnote. Giusti holds essentially Mahoney's opinion that the verb *adæquari* is about a "counterfactual equality", likewise a "pseudo-equality". I show that Fermat makes a subtle logical distinction between the words *æquari* and *adæquari*. The same distinction is made by Nicolas Bourbaki ([Bou 1970], E.I, p. 38f) introducing his *théorie egalitaire*. Notwithstanding: both verbs stand for a real equality. On this premiss, I show—using six examples—that Fermat's "method" may be justified right down to the last detail, even from the view of today's mathematical knowledge.

Wer sich einen auch nur kurzen Überblick über das mathematische Werk FERMATs verschaffen möchte, wird seine Methode der *Bestimmung der Maxima und Minima* und die damit eng zusammenhängende Methode der *Berechnung von Tangenten* nicht ignorieren können, zumal da diese allgemein als die frühesten Vorläufer der Differentialrechnung angesehen werden. Da diese Methoden Gegenstand einer Reihe von einschlägigen Arbeiten gewesen sind, darf man eigentlich erwarten, daß ursprünglich offene Fragen unter den Mathematikhistorikern inzwischen im wesentlichen geklärt wurden. Dies dürfte für die zunächst teilweise umstrittenen Probleme mit der Datierung der erhaltenen Schriften FERMATs und seiner das Thema betreffenden Korrespondenz in der Tat zutreffen. Was hingegen FERMATs „Methode" selbst betrifft, so scheint der Prozeß der Klärung offener Fragen noch nicht abgeschlossen zu sein.

Dies läßt sich in paradigmatischer Weise an FERMATs Verwendung des lateinischen Verbs *adæquare* verdeutlichen. Wie viele seiner Zeitgenossen benutzte er für die Bezeichnung der Identität zweier Terme nicht das 1557 von ROBERT RECORDE (1510–1558) erfundene Zeichen = , sondern, wie auch andere Autoren, das (ebenfalls lateinische) Verb *æquare* in der dritten Person Singular Passiv Futur: *æquabitur*, was wörtlich etwa soviel bedeutet wie: es wird gleich (gemacht werden). Das Futur wird hier allerdings wohl als Tempus indefinitum gebraucht.[1] Bei seiner Methode der Bestimmung der Maxima und Minima und der Berechnung der Tangenten hingegen verwendet FERMAT gezielt und in spezifischer Weise zusätzlich den Ausdruck *adæquabitur*, der sich semantisch von *æquabitur* nicht unterscheidet.[2]

Seit 1896 jedoch, als PAUL TANNERY für *adæquabitur* ein Zeichen ($\sim$) einführte, ringen die Gelehrten um das richtige Verständnis und die Wahl eines geeigneten Symbols für das Wort *adæquabitur*, wie die nachfolgende Tabelle zeigt, und scheinen sich bis heute auf eine gemeinsame Auffassung nicht haben einigen können. Dieses ist umso erstaunlicher, als HERBERT BREGER in [Bre 1994] mit überzeugenden philologischen und textkritischen Argumenten dargelegt hat, daß das lateinische Wort *adæquabitur* bei der Übertragung

Name	Quelle	Symbol	Übersetzung von *adæquabitur*
Tannery	Fermat III	$\sim$	*adégalé*
Wieleitner	[Wie 1929]	$\sim$	*angenähert gleich*
Miller	[Mil 1934]	$\approx$	*näherungsweise gleich gesetzt*
Itard	[Ita 1948]	$\sim$	*approximativement égal*
Hofmann	[Hof 1963]	$\approx$	*ungefähr gleich gesetzt*
Strømholm	[Str 1968]	$\sim$	*pseudo-equal*
Jensen	[Jen 1969]	$\approx$	*compared by adégalité*
Mahoney	[Mah 1973]	$\approx$	*adequated*
Edwards	[Edw 1979]	$\sim$	*pseudo-equal*
Andersen	[And 1980]	$\approx$	*as nearly equal as possible*
Cifoletti	[Cif 1990]	*aequale*	*comparé par adéquation*
Breger	[Bre 1994]	$=$	*put equal*
Alarcón	[Ala 2005]	$\sim$	*hechos adiguales*
Giusti	[Giu 2009]	*adaeq.*	*adaequabitur*

der einschlägigen Texte Fermats in die moderne mathematische Schreibweise durch das heute übliche Gleichheitszeichen (=) zu ersetzen ist. Die Arbeit Bregers wird entweder nicht zur Kenntnis genommen, wie in [Ala 2005], oder zwar erwähnt, aber nicht wirklich verstanden, wie in [Wein 1998], p. 141, wo der Autor sich quasi dazu überreden läßt, das Gleichheitszeichen anstelle des Tanneryschen Zeichens ($\sim$) zu verwenden, dann aber bemerkt: „Die entstehenden ‚Gleichungen' sollten aber im Sinne von Näherungen verstanden werden, da nur diese Interpretationen mathematisch sinnvoll sind.“ Und Enrico Giusti ([Giu 2009]) führt die Bregersche Arbeit zwar im Literaturverzeichnis auf, um dies dann lediglich dazu zu verwenden, auf Seite 67 in einer Fußnote eine völlig unbegründete und sachlich falsche Sottise anzufügen. Ohne hier auf die übrigen Teile der umfangreichen Arbeit Bregers einzugehen, mache ich mir im folgenden den Inhalt seines Paragraphen 4 (The Meaning of Adæquare) zu eigen und lese *adæquabitur* als Gleichheitszeichen.

Hier nehme ich, quasi im Anschluß an Breger, den Faden wieder auf. Dabei gehe ich von zwei kaum umstrittenen Beobachtungen aus, an die sich naheliegende Fragen unmittelbar anschließen.
Erstens: Fermats „Methode“ hat sich in einer großen Anzahl keineswegs trivialer Anwendungsbeispiele ausnahmlos bewährt; läßt sich sein Vorgehen auch vom heutigen mathematischen Wissensstand her grundsätzlich rechtfertigen?
Zweitens: Fermat verwendet im Kontext seiner „Methode“ — offenbar systematisch — zwei verschiedene Wörter für Gleichheit (*æquabitur* und *adæquabitur*); steckt eine mathematisch begründbare Unterscheidung dahinter, und wenn ja: welche?

Fermat hat die Regeln zur Anwendung seiner „Methode“ mehrfach rezeptartig formuliert, und die meisten Autoren beginnen mit der Wiedergabe dieser Gebrauchsanweisung. Ich werde jedoch stattdessen damit beginnen, daß ich eine Reihe von Fermats Problemlösungen unter Verwendung der heute üblichen mathematischen Begriffe und Methoden im Blick auf die genannten Fragestellungen untersuche. Auf Fermats Rezept kommen wir dann später zu sprechen.

Mir ist bewußt, daß diese Vorgehensweise höchst umstritten, ja „politisch inkorrekt“ ist. Ein renommierter, in Princeton lehrender, im Juli 2008 verstorbener Wissenschaftshistoriker und Fermatspezialist hat eine solches Vorgehen mit seinem Verdikt belegt:[3]

Mathematicians are also jealous of their history in ways that scientists are not. Some mathematicians have even argued that only people who are themselves creative mathematicians should write the history of math. Once I was attacked in print by someone who thought I wasn't worthy to study Fermat.[4] *I don't pay much attention to that. I'm a historian, not a Platonist. As a historian, I believe that an account of a 17th-century mathematician has to be restricted to what that person knew. Practicing mathematicians and scientists sometimes have a tendency to look at a figure like Fermat and say, "Oh, he's just doing X," where X is some more modern technique. As a historian, you can't use mathematics that came after Fermat to explain what Fermat was doing. Fermat was working with the mathematics of his time. How X grew out of Fermat's work is itself part of the history.* MICHAEL SEAN MAHONEY

Mein Problem ist: I am a Platonist, not a historian. Ich habe den naiven Glauben — *I believe as well* — daß die den Mathematikern (seit etwa um 1900) vertrauten Strukturen der reellen Analysis (als „im Universum überall und zu allen Zeiten Gültigkeit besitzend“) schon im 17. Jahrhundert galten, auch wenn sie zu jener Zeit noch von keinem Menschen erkannt worden waren. Und ich lasse mir ungern das mir vertraute Denken verbieten, wenn ich mathematische Texte des 17. Jahrhunderts studiere. Anachronismen allerdings möchte auch ich möglichst vermeiden. Und daher werde ich nicht behaupten, daß meine Gedanken auch FERMATs Gedanken seien, ja daß es mir überhaupt vergönnt sei, mehr als allenfalls zu erahnen, was FERMAT jeweils gedacht habe.

FERMAT besaß keine Vorstellung vom *Kontinuum*, wie es uns seit CANTOR, DEDEKIND und WEIERSTRASS vertraut ist, seine Zahlvorstellung könnte man vielleicht als *naiven Konstruktivismus* bezeichnen: wenn man für eine Größe einen Algorithmus besitzt, der es gestattet, diese beliebig genau durch rationale Zahlen zu approximieren, dann entspricht dieser Größe eine Zahl. Er hatte keinen Begriff von einer (reellen) *Funktion*, schon gar nicht von einer *stetigen*, und von den damit im Zusammenhang stehenden Begriffen von *Konvergenz* und *Grenzwert*. Nirgends betrachtet FERMAT die *lokale Steigung einer Kurve*. Die *Ableitungsfunktion* ist weit jenseits seiner Begriffswelt. Wenn ich jedoch seine „Methode“ analysiere, so tu ich dies mit den Augen eines Menschen, der seine mathematische Sozialisation im 20. Jahrhundert erfahren hat. Ich kann gar nicht anders — und MICHAEL MAHONEY konnte es übrigens auch nicht.

Bevor wir mit der Analyse einiger der Fermatschen Aufgabenlösungen beginnen, ein paar Vorbemerkungen. Bei der von mir verwendeten modernen Schreibweise gehe ich bei den Bezeichnungen wie folgt vor: ich behalte die von FERMAT gewählten Majuskeln $A, B, C, \ldots$, soweit sie Punkte (in seinen Zeichnungen) benennen, unverändert bei. Bezeichnen sie hingegen Konstanten oder Variablen, so verwende ich folgende Regel: seine Majuskeln $B, C, D, F, \ldots$ ersetze ich, weil sie als Konsonanten bei FERMAT stets Konstanten bezeichnen, der besseren Lesbarkeit wegen durch die entsprechenden Minuskeln $b, c, d, f, \ldots$; die beiden von ihm als Variable verwendeten Vokale A und E ersetze ich durch x beziehungsweise h.

Weil FERMAT zwei verschiedene Bezeichnungen für die Identität unterscheidet (*æquabitur* und *adæquabitur*), benötigen wir dafür auch zwei verschiedene Gleichheitszeichen. Ich gebe *æquabitur* durch das uns vertraute Gleichheitszeichen ($=$) wieder und *adæquabitur* durch das Gleichheitszeichen mit einem Punkt darüber ($\doteq$). Um Mißverständnisse auszuschließen: auch das letztere Zeichen soll „gleich" bedeuten. Der Punkt über dem Gleichheitszeichen soll lediglich darauf hinweisen, daß FERMAT hier *adæquabitur* geschrieben hat.

Um trotz meiner Verwendung der Erkenntnisse der neueren Analysis (Stand etwa 1900) möglichst nahe an FERMATs eigenem Vorgehen zu bleiben und *unnötige* Anachronismen zu vermeiden, halte ich mich, wenn es um die Darstellung und die Rechtfertigung (!) seiner „Methode" geht, ganz eng an FERMATs Aufzeichnungen und die von ihm vorgenommenen Umformungen, die sich im wesentlichen auf die vier Grundrechenarten und das gelegentliche Quadrieren von Wurzelausdrücken sowie das Umstellen von Gleichungen beschränken. Ich werde allerdings gelegentlich eine weitere Umstellung vornehmen, indem ich, wegen der besseren Lesbarkeit und um leichter argumentieren zu können, alle Terme auf eine (die linke) Seite der Gleichung bringe, was FERMAT übrigens stets zu vermeiden trachtete. Darauf könnte ich letztlich auch verzichten.

Für die Rechtfertigung der „Methode" FERMATs benötige ich neben der — auch FERMAT vertrauten — Kürzungsregel im wesentlichen nur *ein* Theorem aus der reellen Analysis, den Satz über die impliziten Funktionen. Ich zitiere ihn in seiner schlichtesten Form nach COURANT ([Cou 1929], S. 86), wo er „zu Fuß" (ohne die heute übliche Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes — der übrigens ein besonders schönes Theorem ist) bewiesen wird.

Ist $F(x, y)$ eine Funktion von x und y mit stetigen Ableitungen F_x und F_y und ist an der Stelle (x_0, y_0) die Gleichung $F(x_0, y_0) = 0$ erfüllt, während die partielle Ableitung $F_y(x_0, y_0)$ von Null verschieden ist, so läßt sich um x_0 herum in der x-Richtung ein Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_2$ so abgrenzen, daß in ihm durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ in e i n d e u t i g e r Weise eine stetige Funktion $y = f(x)$ bestimmt ist. Für diese Funktion gilt an der Stelle x_0 die Gleichung $y_0 = f(x_0)$, und an jeder Stelle des genannten Intervalles ist die Gleichung

$$F(x, f(x)) = 0$$

erfüllt. [Die bei COURANT nachfolgenden Aussagen über die Differenzierbarkeit von f und die Berechnung der Ableitung f' werden wir nicht benötigen.]

Die Geschichte dieses Satzes beginnt kurz nach FERMATs Tod, im Jahre 1669, als ISAAC NEWTON (1642–1727) in dem Manuskript *De Analysi per Æquationes Infinitas* die implizite Gleichung

$$Y^3 + a^2 Y - 2\,a^3 + a\,x\,Y - x^3 = 0$$

mittels Potenzreihen nach Y auflöste. Der Satz wurde von JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813), AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857) und anderen als ein Theorem der komplexen Analysis behandelt. Und die Historie endete vorläufig im Jahre 1876, als ULISSE DINI (1845–1918) den Satz über die impliziten Funktionen erstmals als Satz der reellen Analysis formulierte und bewies.[5] — An einer Stelle benötige ich zur Erklärung eines sehr speziellen Phänomens noch den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Weil sich FERMATs Methoden zur Bestimmung der Maxima und Minima beziehungsweise zur Berechnung von Tangenten im Ansatz etwas unterscheiden, obwohl sie im Kern identisch sind, behandele ich sie getrennt, und zwar die Bestimmung der Extrema zuerst.

Fermats Methode zur Bestimmung der Maxima und Minima

BEISPIEL 1. Die Strecke $A\,C$ ist im Punkt E so zu teilen, daß das Rechteck $A\,E\,C$ ein Maximum wird.[6]

FERMATS LÖSUNG. Es sei $b := \overline{AC}$. Ferner sei x eines der beiden Segmente. Dann ist das andere $b - x$, und das Produkt, welches ein Maximum werden soll, ist dann gleich $b\,x - x^2$. Ist hingegen das erste Segment gleich $x + h$, so wird das zweite $b - x - h$ sein, und das Produkt der Segmente ist dann

$$b\,x - x^2 - h\,x + b\,h - h\,x - h^2 = b\,x - x^2 - 2\,h\,x + b\,h - h^2\,. \tag{1}$$

Wir setzen die beiden Ausdrücke gleich:

$$b\,x - x^2 \doteq b\,x - x^2 - 2\,h\,x + b\,h - h^2\,. \tag{2}$$

Indem wir die gemeinsamen Terme weglassen, erhalten wir

$$b\,h \doteq 2\,h\,x + h^2\,. \tag{3}$$

Nun kürzen wir durch h:

$$b \doteq 2\,x + h\,. \tag{4}$$

Jetzt lassen wir h weg und erhalten

$$b = 2\,x. \tag{5}$$

Die Aufgabe ist gelöst, wenn wir $x = \frac{b}{2}$ nehmen. *Nec potest generalior dari methodus.*

KOMMENTAR. Wir verzichten hier darauf zu beschreiben, wie FERMAT auf diese Lösungsmethode gekommen ist. Dies hat er in überzeugender Weise in einem Manuskript mit dem Titel *Methodus de maxima et minima*[7], welches in einer Abschrift durch MARIN MERSENNE erhalten ist, selbst getan. Wir untersuchen FERMATs Vorgehen vielmehr im Hinblick auf unsere beiden oben formulierten Fragen.

Läßt sich seine Lösungsmethode vom heutigen mathematischen Standpunkt rechtfertigen? Nachdem er den zu einem Maximum zu machenden Term $b\,x - x^2$ auch für $x + h$ anstelle von x berechnet hat (Gleichung (1)), setzt er die beiden Terme gleich. Es entsteht eine Relation zwischen den beiden Variablen x und h (Gleichung (2)). Im nächsten Schritt werden Terme, die auf beiden Seiten der Gleichung stehen subtrahiert, wodurch sie verschwinden (Gleichung (3)); das ändert an der Relation nichts. Alle verbliebenen

Glieder der Gleichung enthalten den Faktor h. Nun wird unter stillschweigender Annahme, daß $h \neq 0$ sei, die (für jeden Integritätsbereich gültige und zur Nullteilerfreiheit äquivalente) Kürzungsregel angewandt, es wird durch h gekürzt, und es entsteht Gleichung (4). Mit Ausnahme des Falles, wo $h = 0$ ist, ändert sich an der Relation zwischen h und x nichts. Wir notieren diese Relation mit $F(h, x) := 2\,x + h - b$ in der Form

$$F(h, x) = 0 \qquad (h \neq 0).$$

Da aber x in diesem Falle eine stetige (sogar affin lineare) Funktion von h ist, läßt sie sich in den Punkt $h = 0$ stetig fortsetzen, und wir haben

$$F\left(0, \frac{b}{2}\right) = 0.$$

Hier mit dem Satz über implizite Funktionen zu argumentieren, hieße mit Kanonen auf Spatzen zu schießen; aber das wird sich ändern. Jedenfalls hindert uns (vom heutigen Standpunkt aus) nichts daran, hier an einen Grenzwert für $h \to 0$ zu denken. Ob Fermat, wenn auch vielleicht nur vage, bei seiner von ihm beschriebenen Methode an so etwas wie einen Grenzübergang gedacht hat, darüber möchte ich hier nicht spekulieren.

Schon bei diesem einfachsten seiner Beispiele verwendet Fermat seine beiden Wörter für Identität, *æquabitur* und *adæquabitur*. Steckt eine mathematisch begründbare Unterscheidung dahinter, und wenn ja: welche? Zunächst stellen wir fest, daß für uns heute bei dieser Aufgabenlösung Fermats nicht der geringste Anlaß besteht, irgendetwas anderes als unser übliches Gleichheitszeichen zu verwenden. Allerdings tritt es im obigen Beispiel in drei ganz verschiedenen Funktionen auf, die wir vermutlich bewußt gar nicht mehr registrieren. Für Fermat aber könnte sich dies ganz anders dargestellt haben.
Da haben wir zunächst Gleichung (5), wo das Gleichheitszeichen zwischen zwei Konstanten steht. Da schreibt Fermat *æquabitur*. Und er tut dies auch bei Gleichung (1), wo auf beiden Seiten Terme in zwei Variablen, h und x, stehen. Aber diese Gleichung ist allgemeingültig. Was immer h und x für Werte annehmen: die Gleichung bleibt richtig. Ganz anders in den Fällen der Gleichungen (2) bis (4): auch hier treten die beiden Variablen h und x auf, aber sie sind *nicht unabhängig*. Die drei Gleichungen beschreiben eine (im wesentlichen dieselbe) *Relation* $F(h, x) = 0$ zwischen h und x. Und das scheint für Fermat zumindest *ein möglicher* Grund gewesen zu sein, dies durch ein anderes Wort, *adæquabitur*, hervorzuheben. Hinzu kommt, daß er mit diesen Gleichungen eine ganz spezifische Prozedur vornimmt, die er seine „Methode“ nennt und die wir naheliegender (aber verbotener) Weise als Grenzübergang für $h \to 0$ interpretieren. Wir werden sehen, daß sich dies bei Fermat in allen seinen Beispielen exakt wiederholt.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Beispiel 2. Eine gegebene Strecke $A\,C$ ist im Punkt B so zu teilen, daß das Produkt aus dem Quadrat über $A\,B$ und der Strecke $B\,C$ das größte von allen Produkten wird, die in derselben Weise entstehen, indem man die Strecke $A\,C$ in irgendeinem Punkt teilt.[8]

Fermats Lösung. Es sei $b := \overline{AC}$ und $x := \overline{AB}$, so daß $\overline{BC} = b - x$ ist. Also muß $b\,x^2 - x^3$ maximal werden. Nehmen wir nun anstelle von x den Ausdruck $x + h$, dann ist das Produkt, das durch Multiplikation des Quadrates von $x + h$ mit $b - x - h$ entsteht

$$(x+h)^2(b-x-h) = b\,x^2 + b\,h^2 + 2\,b\,x\,h - x^3 - 3\,x\,h^2 - 3\,x^2h - h^3. \tag{6}$$

Dies setzt Fermat gleich dem ersten Produkt:

$$b\,x^2 - x^3 \doteq b\,x^2 + b\,h^2 + 2\,b\,x\,h - x^3 - 3\,x\,h^2 - 3\,x^2h - h^3\,, \tag{7}$$

wobei er wörtlich ausführt: *Id comparo primo solido $b\,x^2 - x^3$ tanquam essent æqualiaa, licet revera æqualia non sint, et hujusmodi comparationem vocavi adæqualitatem ...* [Dieses setze ich gleich dem ersten Produkt $b\,x^2 - x^3$, wie wenn die beiden einander gleich wären, obwohl dies eigentlich nicht der Fall ist, und nenne diese Gleichsetzung adæqualitas ...] Darauf streicht er die Glieder, die beiden Seiten gemeinsam sind, nämlich $b\,x^2 - x^3$, wobei auf einer Seite nichts übrigbleibt, auf der anderen hingegen

$$b\,h^2 + 2\,b\,x\,h - 3\,x\,h^2 - 3\,x^2h - h^3$$

Fermat zieht es jedoch vor, die Glieder mit dem Minuszeichen von den übrigen zu trennen (*Comparanda sunt ergo homogenea notata signo + cum iis quæ notantur signo −.*), und das ergibt dann die Gleichung

$$b\,h^2 + 2\,b\,x\,h \doteq 3\,x\,h^2 + 3\,x^2h + h^3. \tag{8}$$

Alsdann kürzt er alles durch h:

$$b\,h + 2\,b\,x \doteq 3\,x\,h + 3\,x^2 + h^2. \tag{9}$$

Nun streicht Fermat die Glieder , die noch den Faktor h enthalten:

$$2\,b\,x = 3\,x^2. \tag{10}$$

Schließlich wird, offenbar in der stillschweigenden Annahme, daß $x = 0$ keine Lösung liefert, durch x gekürzt, und es ergibt sich

$$2\,b = 3\,x. \tag{11}$$

Die Strecke AC ist also so zu teilen, daß $\overline{AC} : \overline{AB} = 3 : 2$ ist.

Kommentar. Fermats Vorgehen verläuft vollkommen analog wie im ersten Beispiel. Nachdem er den zu maximierenden Term $b\,x^2 - x^3$ mit $x + h$ anstelle von x berechnet hat (Gleichung (6)), setzt er beide Terme gleich und erhält so die in Gleichung (7) beschriebene Relation zwischen h und x, und nach Wegheben der Glieder, die beiden Seiten gemeinsam sind, und Umstellen erhält er Gleichung (8), in der sämtliche Glieder den Faktor h enthalten. Unter der stillschweigenden Annahme, daß $h \neq 0$ sei, kürzt er die Gleichung durch diesen Faktor und erhält Gleichung (9). Setzen wir $F(h,x) := b\,h + 2\,b\,x - 3\,h\,x - 3\,x^2 - h^2$, so entspricht diese der Relation

$$F(h,x) = 0 \qquad (h \neq 0)\,. \tag{12}$$

Das Streichen der Glieder in (9), die noch den Faktor h enthalten, bedeutet, daß in dieser Gleichung und entsprechend in Gleichung (12) $h = 0$ gesetzt wird. FERMAT mußte (und konnte wohl auch) keinen Beweis für die Richtigkeit dieses Vorgehens geben. Seine Rechtfertigung bestand darin, daß seine „Methode“ stets das nachprüfbar richtige Ergebnis lieferte. Um sie jedoch mit den Mitteln der heutigen Analysis zu begründen, müssen wir uns davon überzeugen, daß x in einer Umgebung von $(0, \frac{2}{3}\,b)$ lokal eine stetige Funktion $h \mapsto x(h)$ mit

$$x(h) \to \frac{2}{3}\,b \quad (h \to 0)$$

darstellt. Gleichung (12) ist eine quadratische Gleichung in x, die, wie eine elementare Rechnung ergibt, für $h = 0$ die beiden Lösungen $x_1 = \frac{2}{3}\,b$ und $x_2 = 0$ besitzt:

$$F\left(0, \frac{2}{3}\,b\right) = 0\,, \quad F(0,0) = 0\,.$$

Da der Wert $x(0) = 0$ für FERMAT aus geometrischen Gründen keine Bedeutung hat, können auch wir uns auf den Fall $x(0) = \frac{2}{3}\,b$ beschränken. Da aber die Funktion $(h,x) \mapsto F(h,x)$ alle Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt und überdies

$$F_x\left(0, \frac{2}{3}\,b\right) = -2\,b \neq 0$$

ist, folgt, daß es in einer Umgebung von $h = 0$ eine *stetige* Funktion $h \mapsto x(h)$ mit $x(0) = \frac{2}{3}\,b$ gibt, welche dort der Gleichung

$$F\,(h, x(h)) = 0$$

genügt. Und das rechtfertigt FERMATs Manipulation des Weglassens aller Glieder, die noch h enthalten.

Auch in diesem Beispiel gibt es, wie wir gesehen haben, vom heutigen Stand der Analysis aus betrachtet nicht den geringsten Anlaß, das von FERMAT verwendete *adæquabitur* anders zu interpretieren als ein Gleichheitszeichen. Wie im ersten Beispiel steht zwischen Konstanten (Gleichungen (10) und (11)) und bei der für alle Werte für h und x gültigen Gleichung (6) das Wort *æquabitur*. Bei den Gleichungen (7) bis (9) hingegen, die jeweils eine Relation zwischen h und x definieren, das Wort *adæquabitur*. Es trifft sich aber nun glücklich, daß FERMAT hier (im Falle der Gleichung (7)) eine Erläuterung im Zusammenhang mit der *Bestimmung der Maxima und Minima*) gibt dafür, daß er das Wort *adæquare* verwendet.[9]

FERMAT schreibt also: „Dieses [gemeint ist das Produkt $(x+h)^2(b-x-h)$] setze ich gleich dem ersten Produkt $b\,x^2 - x^3$, wie wenn die beiden einander gleich wären, obwohl dies eigentlich nicht der Fall ist, und nenne diese Gleichsetzung adæqualitas.“ In der Tat sind die beiden Produktterme nicht gleich — ihre Gleichsetzung liefert ja auch keine Identität, wie etwa die Gleichung (6), die für alle $h, x \in \mathbb{R}$ gültig ist. Vielmehr beschreibt Gleichung (7) die (von mir schon in die Form der Gleichung (8) gebrachte) *Relation*

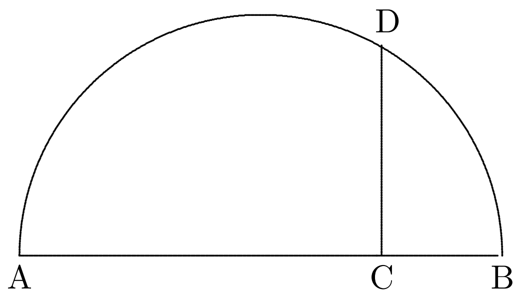
$$\mathcal{R} := \{(h,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, b\,h^2 + 2\,b\,x\,h = 3\,x\,h^2 + 3\,x^2 h + h^3\}\,. \tag{13}$$

Und genau dies ist die Bedeutung des Wortes *adæquare*: es bezeichnet die Gleichheit zwischen zwei Termen, die *keine Identität* sondern eine von der Identität verschiedene *Relation* definiert. Und diese Bezeichnung behält FERMAT bei der Abfolge der Schritte seiner „Methode“ so lange bei, wie die entstehenden Gleichungen eine Relation $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und keine Identität definieren. Dies zeigen die beiden bereits behandelten Beispiele; und es wird sich auch bei den nachfolgenden Beispielen ausnahmslos wiederholen.

Wir müssen uns vor Augen halten, daß für uns heute derartige (Relationen definierende) Gleichungen zwischen verschiedenen Termen so zur Routine geworden sind, daß wir den Unterschied zu den Identitäten im Eifer des Gefechts gar nicht mehr wahrnehmen. Zu unterstellen, daß dies für FERMAT ebenfalls eine selbstverständliche Routine gewesen sei, *das* ist ein *Anachronismus*. Es ist auch interessant zu beobachten, daß er, gegebenenfalls durch Umstellen von Gliedern der Gleichung, stets dafür sorgt, daß auf *beiden* Seiten der Gleichung zwei *nicht triviale* Terme stehen und nicht etwa auf einer Seite die Null.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

BEISPIEL 3. In dem Halbkreis mit dem Durchmesser $A\,B$ soll zu diesem das Lot $D\,C$ so errichtet werden, daß die Summe von $A\,C$ und $C\,D$ ein Maximum wird.[10]



FERMATS LÖSUNG. Für den Durchmesser $\overline{A\,B}$ schreiben wir b und für $\overline{A\,C}$ schreiben wir x. [Im folgenden nehmen wir aus offensichtlichen geometrischen Gründen stillschweigend an, daß x und $x+h$ stets im Intervall $[\,\frac{b}{2}, b\,]$ liegen.] Dann gilt nach dem Höhensatz

$$\overline{C\,D} = \sqrt{x\,(b-x)}.$$

Die Aufgabe besteht daher darin, den Term

$$x + \sqrt{b\,x - x^2}$$

zu einem Maximum zu machen. Da FERMAT hier die direkte Anwendung seiner „Methode“ auf diesen Term (wohl wegen des Wurzelausdrucks) zu schwierig erscheint, verwendet er einen „Kunstgriff“ (*artificium*). Er bezeichnet den zu maximierenden Term zur Abkürzung mit dem Buchstaben O, den wir durch y ersetzen:

$$y := x + \sqrt{b\,x - x^2}. \tag{14}$$

Daher ist

$$y - x = \sqrt{b\,x - x^2}\,.$$

Die Wurzel beseitigt er durch Quadrieren:

$$y^2 + x^2 - 2\,x\,y = b\,x - x^2\,.$$

Dann stellt er die Gleichung so um, daß die höchste Potenz von y allein auf einer Seite steht:

$$b\,x - 2\,x^2 + 2\,x\,y = y^2\,, \tag{15}$$

und bemerkt (unter Hinweis darauf, daß dies der *Kunstgriff* sei), daß y zum Maximum werde, wenn auch y^2 ein Maximum wird. [Dies ist richtig unter der Annahme, daß y nur positive Werte annimmt.] Sodann wendet FERMAT seine „Methode“ auf die linke Seite der Gleichung (15) an, wie er sagt, und erhält

$$b\,x - 2\,x^2 + 2\,x\,y \doteq b\,x + b\,h - 2\,x^2 - 2\,h^2 - 4\,x\,h + 2\,x\,y + 2\,h\,y\,. \tag{16}$$

[Hier ist allerdings zu beachten, daß er in (16) sowie in der folgenden Prozedur den in (14) definierten Term y unterschiedlich interpretiert. Den linearen Faktor y interpretiert er so, als sei dieses y bereits das gesuchte Maximum des Ausdrucks (14). Indem jedoch die von den Variablen x und h abhängigen Terme $y^2(x)$ beziehungsweise $y^2(x+h)$ berechnet und gleichgesetzt werden, wird die Abhängigkeit der entstehenden Terme von x und h explizit ausgenutzt - nicht jedoch bei den in erster Potenz auftretenden Faktoren $y(x)$ bzw. $y(x+h)$, die er wie eine Konstante behandelt. Es ist nicht ganz leicht, diesen Ansatz zu begründen. Hat man ihn jedoch einmal akzeptiert, so geht alles Weitere mit rechten Dingen zu. Insbesondere werden im nächsten, bei FERMAT nicht explizit notierten Schritt, wo auf beiden Seiten der Gleichung (16) die gemeinsamen Glieder weggelassen werden, auch die Glieder $2\,x\,y$ gestrichen, und es ergibt sich

$$b\,h + 2\,h\,y \doteq 4\,x\,h + 2\,h^2\,.]$$

Nun wird durch h gekürzt:

$$b + 2\,y \doteq 4\,x + 2\,h\,. \tag{17}$$

Alsdann wird das Glied $2\,h$, welches noch den Faktor h enthält, gestrichen,[11] und es bleibt

$$b + 2\,y = 4\,x$$

beziehungweise

$$2\,x - \frac{b}{2} = y\,.$$

Damit habe er die Gleichung gefunden, für die y^2 (und somit auch y) ein Maximum wird. Jetzt setzt FERMAT für y den in (14) gegebenen definierenden Ausdruck ein:

$$x - \frac{b}{2} = \sqrt{b\,x - x^2}.$$

Quadrieren liefert

$$x^2 + \frac{b^2}{4} - b\,x = b\,x - x^2$$

und schließlich die quadratische Gleichung

$$b\,x - x^2 = \frac{1}{8}\,b^2\,. \tag{18}$$

[Dies ist dieselbe Gleichung, die auch bei der üblichen Lösung mittels Differentialrechnung herauskommt. Eine elementare Rechnung ergibt, daß die positive Lösung dieser Gleichung durch

$$x = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{b}{2}$$

gegeben ist, die Fermat nicht mehr explizit angibt.]

Kommentar.[12] Ehe wir uns dem Fermatschen *artificium* und der Frage nach seiner Begründung zuwenden, wollen wir uns vor Augen führen, wie es ausgesehen hätte, wenn Fermat seine „Methode“ direkt auf den zu maximierenden Term $x + \sqrt{b\,x - x^2}$ angewandt hätte. Dann wäre er ausgegangen von der Gleichung

$$x + h + \sqrt{b\,(x+h) - (x+h)^2} \doteq x + \sqrt{b\,x - x^2}\,.$$

Durch Umstellen ergibt sich

$$\sqrt{b\,x - x^2} - \sqrt{b\,(x+h) - (x+h)^2} \doteq h\,.$$

Quadrieren liefert

$$b\,x - x^2 + b\,(x+h) - (x+h)^2 - h^2 \doteq 2\sqrt{b\,x - x^2}\cdot\sqrt{b\,(x+h) - (x+h)^2}$$

beziehungsweise

$$b\,x - x^2 - x\,h - h^2 + \frac{b}{2} \doteq \sqrt{b\,x - x^2}\cdot\sqrt{b\,(x+h) - (x+h)^2}\,.$$

Erneutes Quadrieren und anschließendes Ausmultiplizieren der Faktoren ergibt

$$\begin{aligned} &b^2x^2 + x^4 + x^2h^2 + h^4 + \frac{b^2}{4}\,h^2 - 2\,b\,x^3 - 2\,b\,x^2h - 2\,b\,x\,h^2 + b^2x\,h + 2\,x^3\,h + 2\,x^2h^2 \\ &\quad - b\,x\,h^2 - b\,h^3 \\ &\quad \doteq b^2x^2 + b^2x\,h - b\,x^3 - 2\,b\,x^2h - b\,x\,h^2 - b\,x^3 - b\,x^2h + x^4 + 2\,x^3h + x^2h^2\,. \end{aligned}$$

Nun hebt sich die ganze rechte Seite weg, und wir erhalten

$$h^4 + \frac{b^2}{4}\,h^2 - 2\,b\,x\,h^2 + 2\,x^2h^2 - b\,h^3 \doteq 0\,. \tag{19}$$

Unter der Annahme, daß $h \neq 0$ ist, kürzen wir durch h^2, die höchste Potenz von h, die in allen verbliebenen Gliedern als Faktor enthalten ist, und bekommen

$$h^2 + \frac{b^2}{4} - 2\,b\,x + 2\,x^2 - b\,h \doteq 0\,.$$

Indem wir nun $h = 0$ setzen,[13] erhalten wir für x erneut die quadratische Gleichung (18):

$$x^2 - b\,x + \frac{b^2}{8} = 0\,.$$

Wenn wir uns daran erinnern, daß Fermat weder Klammern noch ein Wurzelzeichen noch ein Symbol für sein *adæquabitur* besaß und sich mit den unbequemen Vietaschen Bezeichnungen herumplagte, können wir verstehen, daß er ein *artificium* ersann, um sich in diesen und anderen Aufgabenstellungen, in denen Wurzelterme auftreten, das „Rechnen" zu erleichtern.[14]

Wir wollen jetzt versuchen zu verstehen, warum Fermats „Kunstgriff" zum richtigen Resultat führt, obwohl sein *artificium* nicht ganz „koscher" ist.[15] Ich betone, um dem Vorwurf des Anachronismus zu begegnen, daß ich hier als *Platonist* (und nicht als „Historiker" im Sinne Mahoneys) argumentiere. Ich möchte einfach nur verstehen, warum Fermat mit seiner Trickserei Erfolg hat, obwohl der Ansatz, den er dabei macht, die Idee seiner „Methode" nicht korrekt wiedergibt. Die in (14) gegebene Definition von y zeigt ja, daß y eine Funktion von x ist. Daher schreiben wir Gleichung (15) jetzt ausführlicher:

$$b\,x - 2\,x^2 + 2\,x\,y(x) = y^2(x)\,.$$

Nach Fermats „Methode" ist dann die Relation

$$b\,(x+h) - 2\,(x+h)^2 + 2\,(x+h)y(x+h) \doteq b\,x - 2\,x^2 + 2\,x\,y(x)$$

zu untersuchen. Indem wir die Terme auf der linken Seite ausmultiplizieren und gemeinsame Terme weglassen, erhalten wir die Gleichung

$$4\,x\,h + 2\,h^2 - b\,h - 2\,h\,y(x+h) \doteq 2\,x\,(y(x+h) - y(x))\;.$$

Wir dividieren (nicht kürzen(!)) nun unter der Annahme, daß $h \neq 0$ ist, alles durch h und erhalten

$$4\,x - 2\,h - b - 2\,y(x+h) \doteq 2\,x\,\frac{y(x+h) - y(x)}{h}\,. \tag{20}$$

Dann betrachten wir den Grenzwert der beiden Seiten für $h \to 0$, wobei wir beachten, daß x in der Nähe von $h = 0$ eine stetige Funktion von h ist. Es sei $x(h) \to x_0$ $(h \to 0)$. Der kritische Term ist dabei der Differenzenquotient. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi = \xi(h)$ mit $x(h) < \xi(h) < x(h) + h$ für $h > 0$ bzw. $x(h) + h < \xi(h) < x(h)$ für $h < 0$ derart, daß

$$y(x+h) - y(x) = y'(\xi)\,h\,.$$

Unter Beachtung von $\xi(h) \to x_0\,(h \to 0)$ folgt somit

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y'(\xi) \to y'(x_0) \quad (h \to 0)\,.$$

Lassen wir jetzt in Gleichung (20) $h \to 0$ gehen, so erhalten wir die Gleichung

$$4\,x_0 - b - 2\,y(x_0) = \,x_0\,y'(x_0)\,.$$

Im Punkt x_0 nimmt aber $y(x)$ ein (lokales) Maximum an. Also ist $y'(x_0) = 0$, und wir bekommen

$$b + 2\,y(x_0) = 4\,x_0\,.$$

FERMAT hat also genial „gemogelt“, als er y in Gleichung (16) als Konstante behandelt hat, nämlich als ob es $y(x_0)$ sei.

Über die Bedeutung von FERMATs *adæquabitur* in den Gleichungen (16) und (17) brauchen wir nicht viele Worte zu verlieren. Es ist das Gleichheitszeichen zwischen zwei verschiedenen Termen, das eine Relation zwischen h und x definiert.

Fermats præceptio

Die Schrift *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* ([Fermat Œuvres], Vol. I, p. 133–136) wurde von FERMAT durch Vermittlung von MERSENNE an DESCARTES geschickt, der sie am 10. Januar 1638 erhielt. Sie beginnt mit der Beschreibung der Methode, mit der FERMAT Maxima und Minima bestimmte:[16]

„Die ganze Lehre von der Bestimmung der Maxima und Minima beruht auf der Wahl zweier Variablen und auf diesem einen Rezept (*præceptio*):[17]

1. Es sei x eine beliebig gewählte Variable in der Fragestellung (ob diese nun ein–, zwei– oder dreidimensional sei, dem Problem entsprechend).
2. Wenn man nun die zu maximierende oder minimierende Größe in Potenzen von x ausgedrückt hat, ersetze man darin x durch $x+h$, um den zum Maximum oder Minimum zu machenden Term in Potenzen von x und h auszudrücken.
3. Nun werden diese beiden zu maximierenden oder minimierenden Terme einander gleichgesetzt (*adæquentur*), wie DIOPHANTOS sagt.
4. Und nachdem die beiden Seiten gemeinsamen Glieder fortgelassen sind, enthalten sämtliche Glieder h oder Potenzen von h als Faktor.
5. Dann werden alle Terme durch h oder durch die höchste gemeinsame Potenz von h gekürzt, so daß mindestens ein Glied das h nicht mehr als Faktor besitzt.
6. Dann werden beiderseits die Glieder, die noch h oder Potenzen von h als Faktor enthalten, gestrichen.
7. So entsteht eine Gleichung zwischen den übriggebliebenen Gliedern, oder es werden, wenn auf einer Seite nichts mehr übrigbleibt, die negativen Glieder gleich den positiven Gliedern gesetzt, was auf dasselbe hinausläuft.
8. Die Lösung dieser letzten Gleichung ergibt den Wert für x, der, hat man ihn gefunden und in den ursprünglichen Ausdruck eingesetzt, das Maximum oder Minimum liefert.“

KOMMENTAR. Diese *præceptio* hat in der Tat den Charakter eines Rezeptes. FERMAT gibt weder eine Erklärung, wie sein Vorgehen motiviert ist noch wie es sich mathematisch begründen läßt. Obwohl er in derselben Schrift auch ein Beispiel gibt, wie man mit seiner „Methode“ die Tangente in einem beliebigen Punkt einer Kurve (der Standardparabel) berechnet, beschränkt er sich in seiner *præceptio* auf die Bestimmung von Extremwerten.
Zu 1. Die bereits behandelten Beispiele zeigen, daß die Aufstellung des zu maximierenden (oder zu minimierenden) Terms von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad sein

kann. Dies wird sich analog beim Tangentenproblem noch deutlicher zeigen.
Zu 2. Wenn der Term, der etwa ein Maximum werden soll, kein Polynom in x ist, sondern, wie in Beispiel 3, einen Wurzelausdruck enthält, zieht es Fermat vor, das Problem durch einen „Kunstgriff" zu entschärfen, ehe er den nächsten Schritt tut. Ohne diesen Trick sind, wie wir gesehen haben, lästige Rechenoperationen nötig, bis die entstandenen Terme für den dritten Schritt präpariert sind.
Zu 3. Dies ist die einzige Stelle seines „Rezepts", wo Fermat das Verb *adæquare* benutzt, und zwar in der dritten Person Plural Passiv Präsens (*adæquentur*), während er in den Lösungen seiner Probleme meist die dritte Person Singular Passiv Futur (*adæquabitur*) verwendet. Damit betont er, daß es sich um *zwei* (verschiedene) Terme handelt, die jetzt *gleichgesetzt werden.* Nichts, aber auch gar nichts spricht dafür, daß die beiden verschiedenen Terme „angenähert" oder „näherungsweise‘ gleichgesetzt werden sollen, „approximativ" oder „ungefähr gleich", „pseudo-gleich" oder gar „so nahe gleich wie möglich". Alle weiteren von Fermat in seinen Lösungen vorgenommenen algebraischen Umformungen der entstehenden Gleichung setzen stillschweigend voraus, daß eine *Gleichung* vorliegt und lassen sich nur so rechtfertigen. Daß sich Fermat bei seiner Wortwahl auf die *Arithmetika* des Diophantos von Alexandria bezieht, besagt nicht viel, da dies ja natürlich nicht auf Diophants griechischen Originaltext Bezug nimmt, sondern auf die Wortwahl der Übersetzer Xylander und Bachet de Méziriac, welche die griechischen Wörter παρισότης und πάρισον durch *adæqualitas* beziehungsweise durch *adæquale* wiedergegeben haben.[18]
Zu 4. Bis es so weit ist, daß auf den beiden Seiten der Gleichung die gemeinsamen Glieder weggelassen werden können, sind bei den komplizierteren Aufgaben gelegentlich mehrere Umformungsschritte nötig, eine Tatsache, die Fermat hier diskret verschweigt. Andererseits ist er gelegentlich eines mathematischen Fehlers geziehen worden, weil er von *Potenzen* von h spricht, welche sämtliche verbliebenen Glieder auf beiden Seiten als Faktor enthalten können. So schreibt etwa Heinrich Wieleitner:[19] „Wohl nur eine gedankenlose Bemerkung von Fermat: in Frage kommt doch lediglich die erste Potenz von E [h]." Wohl eher eine gedankenlose Bemerkung Wieleitners. Ein Blick auf Gleichung (19) genügt um zu sehen, daß Fermat Recht hat.
Zu 5. Hier ist lediglich zu bemerken, daß Fermat beim Kürzen durch h stillschweigend $h \neq 0$ voraussetzt.
Zu 6. Dies ist wohl die meistdiskutierte Stelle in Fermats Rezept. Daß das Streichen der noch h (oder Potenzen von h) als Faktoren enthaltenden Glieder bedeutet, daß nun $h = 0$ gesetzt wird (wo doch gerade zuvor $h \neq 0$ angenommen wurde), ist Fermat durchaus klar. Ob er dabei so etwas wie den Grenzprozeß $h \to 0$ im Sinne gehabt haben könnte, ist schwer zu beantworten, denn um dies klar ins Auge fassen und begrifflich fixieren zu können, fehlten ihm rund 200 Jahre Geschichte der Analysis. Zur Rechtfertigung seines Vorgehens benötigt man so etwas wie stetige Ergänzung bei $h = 0$, was in den komplizierteren Fällen durch den Satz über die impliziten Funktionen gewährleistet wird. „Fermat, led by a surer instinct, developed a method which slowly but surely brought him very close to modern infinitesimal concepts." ([Weil 1973], p. 1146).
Zu 7. Hier treffen wir wieder, wie schon bei Gleichung (8), auf Fermats Bedürfnis, auf

beiden Seiten seiner Gleichungen von 0 verschiedene Terme zu haben.
Zu 8. FERMAT erwähnt hier mit keinem Wort, daß die entstandene Gleichung für $x = x_0$ mehrere Lösungen haben kann, was die Entscheidung erfordert, welche dieser Lösungen die Antwort auf das gestellte Problem liefert. Und wie man eine (relatives) Maximum von einem (relativen) Minimum unterscheidet, wird auch nicht angesprochen.

Ein beliebter Anachronismus

Nicht ohne leichte Ironie bemerkt JAN VAN MAANEN zur FERMATs *præceptio*:[20] „Spätere Autoren konnten nur schwer der Versuchung widerstehen, den Algorithmus wie folgt umzuformulieren:

$$\text{löse} \quad \lim_{e\to 0} \frac{I(x+e)-I(x)}{e} \quad \text{nach} \quad x = x_M \quad \text{auf.“}$$

In dieser oder äquivalenter Form findet sich dies in der Tat bei mehreren Mathematikhistorikern, etwa bei [Boy 1989], p. 389, [Cal 1999], p. 512, [Edw 1979], p. 123f, [Kat 1993] und, besonders hübsch, bei [Sim 1992], p. 99:[21]

> While sketching the graphs of certain polynomial functions $y = f(x)$, he [Fermat] hit upon a very ingenious idea for locating points at which such a function assumes a maximum or minimum value. He compared the value $f(x)$ with the value $f(x+h)$ at a nearby point $x+h$. For most x's the difference between these values, $f(x+h)-f(x)$, is not small compared with h, but he noticed that at the top or bottom of a curve this difference is much smaller than h and diminishes faster than h does. This idea gave him the approximate equation
>
> $$\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \cong 0\,,$$
>
> which becomes more and more nearly correct as the interval h is taken smaller and smaller. With this in mind, he next put $h = 0$ to obtain the equation
>
> $$\left[\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]_{h=0} = 0\,. \qquad (\star)$$
>
> According to Fermat, this equation is exactly correct at the maximum and minimum points on the curve, and solving it yields the values of x that correspond to these points.

Es wäre verlorene Liebesmüh, all diesen grotesken Unsinn zu korrigieren. Ich beschränke mich auf die Gleichung $(\star)$, die in dieser Form an allen oben zitierten Stellen vorkommt. Zunächst stellen wir fest, daß FERMAT nicht nur die Extrema von Polynomtermen bestimmt. Handelt es sich um andere Terme, wie in Beispiel 3, so sind vorbereitende Umformungen erforderlich, um die Terme auf Polynomgestalt (in x und h) zu bringen. Auch bildet FERMAT nie den Differenzenquotienten, sondern setzt die beiden verschiedenen Terme $f(x+h)$ und $f(x)$ gleich, so daß eine Relation zwischen x und h entsteht, beides sind *Variablen*. FERMAT vermeidet es, auf einer der beiden Seiten der Gleichung nur 0 stehen zu haben. Dann werden gleiche Glieder auf beiden Seiten entfernt, damit nur noch Glieder übrig bleiben, die h als Faktor enthalten. Das dient dazu, die gesamte Gleichung im nächsten Schritt durch h *kürzen* (!) zu können, nicht zu dividieren. Nie taucht bei FERMAT die Variable h im Nenner eines Bruchs auf. Das Ergebnis ist eine

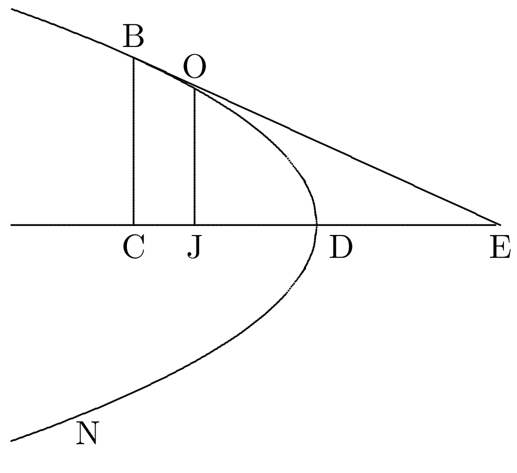
Gleichung (nie und nimmer so etwas, wo $\cong$ zwischen linkem und rechtem Term steht), die erneut eine Relation definiert, die sich von der vorhergehenden nur dadurch unterscheidet, daß sie für $h = 0$ nicht gesichert ist. Und nun muß man die Reihenfolge der Schritte beachten, die in der Gleichung ($\star$) dokumentiert ist: zunächst wird nun in dem Differenzenquotienten $h = 0$ gesetzt, wodurch *de facto* $f'(x)$ entsteht, so daß x noch eine Variable ist, deren gesuchter Wert x_0 erst im nächsten Schritt durch die Gleichung $f'(x) = 0$ bestimmt wird. Das wäre die heute übliche Methode der Extremwertbestimmung. Davon ist FERMATs Lösung weit entfernt. Er hat keinen Differenzenquotienten, aber stattdessen eine *Gleichung*, keine irgendwie geartete Approximation, *which becomes more and more nearly correct as the interval h is taken smaller and smaller.* Und in dieser Gleichung, die eine Relation zwischen h und x beschreibt, setzt er nun $h = 0$, was ihm *in einem Schritt* die Gleichung liefert, aus der die gesuchte Lösung x_0 hervorgeht. (Wie man diesen Schritt nach heutigem Wissensstand mit DINIs Satz rechtfertigen könnte, habe ich oben zu zeigen versucht.) Von der Ableitungsfunktion $x \mapsto f'(x)$ keine Spur. Es ist bemerkenswert, daß es gerade die Historiker sind, und nicht die „Platonisten", die diesen Anachronismus populär machen.

Wir wenden uns nun FERMATs zweitem Anwendungsgebiet seiner „Methode" zu.

Fermats Methode zur Berechnung von Tangenten

In derselben Schrift[22] kündigt FERMAT an, daß er auch die Bestimmung von Tangenten an irgendwelche Kurven in beliebig gegebenen Punkten mit Hilfe der beschriebenen Methode leisten könne. Wir werden dies an ebenfalls drei Beispielen nachvollziehen und kommentieren. Dabei sei schon vorab darauf hingewiesen, daß FERMAT keineswegs so etwas wie eine „lokale Steigung" in dem gewählten Punkt berechnet. Vielmehr bestimmt er als zweiten Punkt der Tangente deren Schnittpunkt mit einer in naheliegender Weise gewählten Referenzgeraden, etwa einer Symmetrieachse der betrachteten Kurve. Sein Vorgehen erläutert er als erstes an dem folgenden Beispiel.

BEISPIEL 4. Es sei die Parabel $B\,D\,N$ mit dem Scheitel D und dem Durchmesser $D\,C$ gegeben, ferner auf ihr der Punkt B, durch den die Gerade $B\,E$ zu legen ist, welche die Parabel berührt und die Symmetrieachse im Punkt E schneidet.[23]



FERMATS LÖSUNG. [Die Aufgabe besteht darin, den Schnittpunkt E beziehungsweise die Länge $\overline{CE}$ der *Subtangente* zu berechnen.] Nimmt man nun auf der Strecke BE irgendeinen Punkt O an und fällt von diesem aus das Lot OJ und vom Punkt B aus das Lot BC, so gilt

$$\overline{CD} : \overline{JD} > \overline{BC}^2 : \overline{OJ}^2 ,$$

da ja der Punkt O oberhalb der Parabel liegt. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt andererseits

$$\overline{BC}^2 : \overline{OJ}^2 = \overline{CE}^2 : \overline{JE}^2 .$$

Also gilt auch

$$\overline{CD} : \overline{JD} > \overline{CE}^2 : \overline{JE}^2 .$$

Da nun der Punkt B gegeben ist, ist auch das Lot BC gegeben und somit der Punkt C. Wir definieren nun $d := \overline{CD}$, $x := \overline{CE}$ und $h := \overline{CJ}$. Dann haben wir

$$\frac{d}{d-h} > \frac{x^2}{x^2 + h^2 - 2\,x\,h} . \tag{21}$$

Durch Multiplikation der inneren und der äußeren Glieder bekommen wir

$$d\,x^2 + d\,h^2 - 2\,d\,x\,h > d\,x^2 - x^2 h . \tag{22}$$

Nun setzen wir nach Fermats „Methode“ die Terme der beiden Seiten dieser Ungleichung gleich: [

$$d\,x^2 + d\,h^2 - 2\,d\,x\,h \doteq d\,x^2 - x^2 h ,] \tag{23}$$

lassen die gemeinsamen Glieder weg und erhalten:

$$d\,h^2 - 2\,d\,x\,h \doteq -x^2 h ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$x^2 h + d\,h^2 \doteq 2\,d\,x\,h .$$

Nun kürzen wir durch h, also:

$$x^2 + d\,h \doteq 2\,d\,x .$$

Jetzt streichen wir das noch den Faktor h enthaltende Glied $d\,h$ und haben dann

$$x^2 = 2\,d\,x .$$

Nun wird die letzte Gleichung [offenbar unter der Annahme, daß $x = 0$ als Lösung nicht in Frage kommt,] noch durch x gekürzt, und wir erhalten mit Fermat als Lösung für die Länge x der *Subtangente*

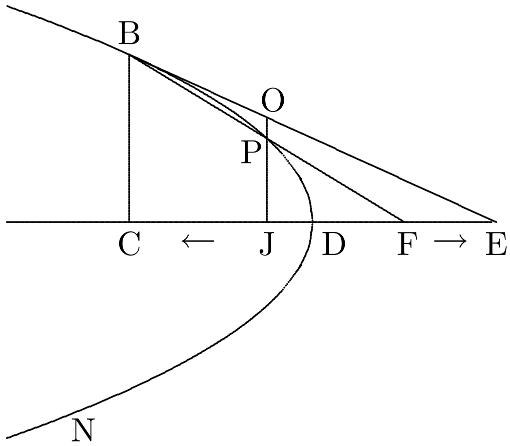
$$x = 2\,d .$$

Wir haben somit gezeigt, daß CE gleich dem Doppelten von CD ist, was ja tatsächlich auch zutrifft. *Nec unquam fallit methodus; imo ad plerasque quæstiones pulcherrimas potest extendi …*

Kommentar. Ab Gleichung (23) läuft alles wie gehabt, Zur Kontrolle setzen wir noch $F(h,x) := x^2 - 2\,d\,x + d\,h$ und haben dann $F_x(h,x) = 2\,x - 2\,d$ sowie

$$F_x(0, 2\,d) = 2\,d \neq 0 .$$

Die kritische Stelle in FERMATs *procedere* ist natürlich der Übergang von der Ungleichung (22) zur Gleichung (23). Nicht, daß es unzulässig wäre, die verschiedenen Terme auf den beiden Seiten der Ungleichung (22) gleichzusetzen. Nur, was bedeutet das? Der entscheidende Unterschied ist, daß x dabei seinen Charakter verändert. In der Ungleichung (22) bezeichnet x den (zwar als unbekannt angenommenen, aber festen) Wert der Länge der Subtangente, in Gleichung (23) hingegen ist x eine Variable, die mit h in der durch (23) gegebenen Relation steht und, wie wir bereits gezeigt haben, in einer Umgebung des Punktes $(0, 2\,d)$ eine stetige Funktion $x = x(h)$ ist, für die speziell $x(0) = 2\,d$ gilt. Um zu sehen, was dies bedeutet, ändern wir die obige Zeichnung ab.



Wir wählen, wie in der neuen Zeichnung, auf der Parabel neben B einen zweiten Punkt P und verbinden beide Punkte durch eine Gerade, eine Sekante, welche die Symmetrieachse CE im Punkt F schneiden möge. Dann haben wir analog zu oben

$$\overline{CD} : \overline{JD} = \overline{BC}^{\,2} : \overline{PJ}^{\,2} \quad \text{und} \quad \overline{BC}^{\,2} : \overline{PJ}^{\,2} = \overline{CF}^{\,2} : \overline{JF}^{\,2} .$$

Folglich ist

$$\overline{CD} : \overline{JD} = \overline{CF}^{\,2} : \overline{JF}^{\,2} .$$

Wir behalten die Bezeichnungen $d = \overline{CD}$ und $h = \overline{CJ}$ bei, definieren aber nun $x := \overline{CF}$. Dann haben wir die Relation

$$\frac{d}{d-h} \doteq \frac{x^2}{x^2 + h^2 - 2\,x\,h}\,, \tag{24}$$

was erneut auf die Gleichung (23) führt:

$$d\,x^2 + d\,h^2 - 2\,d\,x\,h \doteq d\,x^2 - x^2 h$$

führt. Mit anderen Worten: $x = x(h)$ ist die Länge $\overline{CF}$ der Subsekante CF, die für $h \to 0$ gegen die Länge $x(0) = \overline{CE}$ konvergiert..

Ist diese Deutung der „Methode“ FERMATs zur Berechnung der Tangente ein *Anachronismus*? Diese Frage läßt sich mit Bestimmtheit verneinen. DESCARTES hat, nachdem er FERMATs „Methode“ durchschaut hatte, diese in einem Brief an HARDY vom Juni 1638 genau so interpretiert, wie wir es getan haben, und am Beispiel der kubischen Parabel vorgeführt.[24] Und auch BEAUGRAND hat in seinem im Herbst 1638 entstandenen *Exposé de la méthode de Fermat pour tracer les tangentes* am Beispiel der Ellipse

FERMATS „Methode“ ebenfalls genau so dargestellt.[25] Ob FERMAT selbst erkannt hat, daß er eigentlich mit der Sekante BPF und der Länge x der zugehörigen Subsekante argumentierte, vermag ich nicht zu entscheiden.

Es ist aber aufschlußreich zu lesen, wie FERMAT versucht hat, DESCARTES seine „Methode“ der Bestimmung von Tangenten zu erklären. Wir zitieren sie hier im Wortlaut, auch deshalb, weil es die Passage ist, die ENRICO GIUSTI dem HERBERT BREGER mit dem (unberechtigten) Vorwurf vorhält, er habe sie übersehen, und als untauglichen Beweis dafür anführt, daß *adæquabitur* nicht Gleichheit bedeuten könne.[26] Hervorhebung von mir.

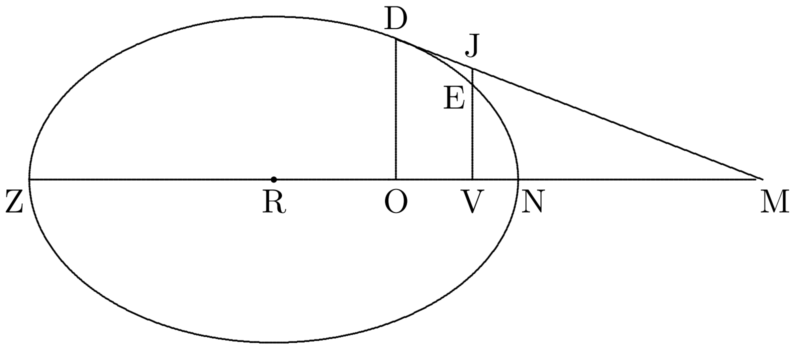
> Outre le papier envoyé à R(oberval) et P(ascal), pour suppléer à ce qu'il y a de trop concis, il faut que M. Descartes sache, qu'après avoir tiré la parallèle qui concourt avec la tangente et avec l'axe ou diamètre des lignes courbes, je lui donne premièrement le nom qu'elle doit avoir comme ayant un de ses points dans la tangente, ce qui se fait par la règle des proportions qui se tire des deux triangles semblables.
> Après avoir donné le nom, tant à notre parallèle qu'à tous les autres termes de la question, tout le même qu'en la parabole, je considère derechef cette parallèle, *comme si le point qu'elle a dans la tangente étoit en effet en la ligne courbe*, et suivant la propriété spécifique de la ligne courbe, je compare cette parallèle par adégalité avec l'autre parallèle tirée du pont donné à l'axe ou diamètre de la ligne courbe.
> Cette comparaison par adégalité produit deux termes inégaux qui enfin produisent l'égalité (selon ma mèthode), qui nous donne la solution de la question.

Dem Adressaten dieser Zeilen muß eine Zeichnung vorgelegen haben, auf die sich FERMAT bezieht. Wer dieser Adressat war, ist nicht eindeutig erkennbar, vielleicht DESCARTES, der namentlich erwähnt wird. Und auch um welche *ligne courbe* es sich gehandelt hat, ist nicht klar, ≪*tout de même qu'en la parabole*≫ läßt darauf schließen, daß FERMATS Beschreibung auf alle Kurven zutreffen soll und nicht nur auf die Parabel. Wir diskutieren diese Stelle daher an unserer erweiterten Figur.
Die Parallele, von der FERMAT im ersten Satz spricht, ist offenbar die Strecke OJ, die in O einen Punkt auf der Tangente hat und zur Strecke BC parallel ist. Durch sie entstehen die im Text erwähnten ähnlichen Dreiecke BCE und OJE. Nun aber betrachtet er die Parallele OJ, wie wenn der Punkt O, den sie mit der Tangente gemeinsam hat, in Wahrheit auf der Kurve liege, also eigentlich der Punkt P sei. Bei allem Respekt vor dem großen Gelehrten und "taking into account that brillant mathematicians usually are not so very confused when talking about their own central mathematical ideas", das ist nun doch ziemlich verwirrend und erklärt, warum FERMATS Zeitgenossen mit seiner „Methode“ der Tangenten-Bestimmung erhebliche Verständnisschwierigkeiten hatten. Sein Glück besteht wohl darin, daß auch durch die kürzere Strecke PJ zwei ähnliche Dreiecken nämlich BCF und PJF, entstehen, auch wenn er dies nicht erwähnt, ja vielleicht nicht einmal erkennt, denn der Punkt F unserer Skizze kommt bei ihm nie vor. Die Rechnungen, die FERMAT für die ähnlichen Dreiecke BCE und OJE anstellt, gelten ja analog auch für die Dreiecke BCF und PJF. Aber der Punkt P (und damit bei FERMAT auch O!) liegt damit auf der Kurve und erlaubt es ihm, *suivant la propriété spécifique*

de la ligne courbe, die algebraischen Eigenschaften der vorgelegten Kurve auch für den Punkt O in Anspruch zu nehmen. Dies liefert ihm einerseits den in der Ungleichung (21) rechts stehenden Term $\frac{x^2}{x^2+h^2-2\,x\,h}$ und andererseits darin das Zeichen $>$, woraus dann durch Umformungen die Ungleichung (22) entsteht.
Aus dieser vermeintlichen Sackgasse befreit sich Fermat nun, indem er die *deux termes inégaux*, $d\,x^2+d\,h^2-2\,d\,x\,h$ und $d\,x^2-x^2h$ (eigentlich schon $\frac{d}{d-h}$ und $\frac{x^2}{x^2+h^2-2\,x\,h}$) gleichsetzt (*comparaison par adégalité*). Was dabei hinsichtlich der Bedeutung des Buchstabens x passiert und warum nun, vom heutigen mathematischen Standpunkt aus betrachtet, mit Fermats „Methode" alles korrekt und erfolgreich zuendegeht, haben wir oben schon beschrieben.
Warum hat Fermat sein widersprüchliches Vorgehen bei allen seinen Beispielen zur Tangentenmethode immer wieder erneut verwendet? Warum hat er die Sekante, mit der er *de facto* operiert, nie erwähnt? Ich weiß es nicht, denn ich kann seine Gedanken auch nur erahnen. Jean Itard hat versucht, dies damit zu erklären, daß Fermats Begriff der Tangente noch ihrer antiken Vorstellung verhaftet gewesen sei.[27] Ich muß einräumen, daß ich die Argumentation Itards trotz wiederholter Lektüre nicht verstanden habe. Ich könnte mir eher vorstellen, daß Fermat instinktiv eine komplizierte Grenzwertbetrachtung vermeiden wollte, für die ihm zu seiner Zeit die Begriffe und Konzepte fehlten. Denn läßt man in unserer Zeichnung J gegen C gehen, so geht die Sekante in die Tangente über, was wiederum bedeutet, daß der Punkt F gegen den gesuchten Punkt E konvergiert. Wie hätte Fermat das beschreiben und interpretieren sollen?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Beispiel 5. Die Aufgabe besteht darin, die Tangente an eine Ellipse in einem gegebenen Punkt zu bestimmen.[28]



Fermats Lösung. Es sei die Ellipse ZDN mit der Achse ZN und dem Mittelpunkt R gegeben. Wir nehmen einen auf ihrem Rand liegenden Punkt, etwa D, von dem aus die Gerade DM gezogen werde, welche die Ellipse im Punkt D berührt. Außerdem wird vom Punkt das Lot DO auf ZN gefällt. Ferner definieren wir $b := \overline{OZ}$, $c := \overline{ZN}$ und $x := \overline{OM}$. Zeichnen wir nun durch einen beliebig zwischen O und N angenommenen Punkt V die zu DO parallele Gerade JEV, so schneidet diese gewiß die Tangente DM sowie die Ellipse selbst im Punkt J beziehungsweise E. Und weil die Gerade DM die Ellipse berührt, liegen alle Punkte außer D außerhalb der Ellipse. Also ist die Strecke JV größer als die Strecke EV:

$$\overline{JV} > \overline{EV}\,. \tag{25}$$

Also ist

$$\frac{\overline{DO}^{\,2}}{\overline{EV}^{\,2}} > \frac{\overline{DO}^{\,2}}{\overline{JV}^{\,2}}\,.$$

[Nach einem Theorem des Apollonios über Zentralkegelschnitte][29] gilt nun

$$\frac{\overline{DO}^{\,2}}{\overline{EV}^{\,2}} = \frac{\overline{ZO}\cdot\overline{ON}}{\overline{ZV}\cdot\overline{VN}}\,.$$

Ferner gilt

$$\frac{\overline{DO}^{\,2}}{\overline{JV}^{\,2}} = \frac{\overline{OM}^{\,2}}{\overline{VM}^{\,2}}\,.$$

Also ist auch

$$\frac{\overline{ZO}\cdot\overline{ON}}{\overline{ZV}\cdot\overline{VN}} > \frac{\overline{OM}^{\,2}}{\overline{VM}^{\,2}}\,.$$

Nun schreiben wir $h := \overline{OV}$ und haben dann

$$\begin{aligned}\overline{ZO}\cdot\overline{ON} &= b\,c\,,\\ \overline{ZV}\cdot\overline{VN} &= b\,c + c\,h - b\,h - h^2\,,\\ \overline{OM}^{\,2} &= x^2\,,\\ \overline{VM}^{\,2} &= x^2 + h^2 - 2\,h\,x\,.\end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$\frac{b\,c}{b\,c + c\,h - b\,h - h^2} > \frac{x^2}{x^2 + h^2 - 2\,x\mathfrak{h}}$$

und nach Multiplikation der äußeren und inneren Glieder:

$$b\,c\,x^2 + b\,c\,h^2 - 2\,b\,c\,x\,h > b\,c\,x^2 + c\,x^2 h - b\,x^2 h - x^2 h^2\,. \tag{26}$$

Diese beiden Produkte [auf beiden Seiten der Ungleichung] müssen nun nach meiner (Fermats) Methode gleichgesetzt werden. Und nachdem gleiche Terme gestrichen worden sind, kürzen wir was übrigbleibt, durch h. Dann bleibt

$$b\,c\,h - 2\,b\,c\,x \doteq c\,x^2 - b\,x^2 - x^2 h\,. \tag{27}$$

Löschen wir jetzt alle Glieder, die noch h enthalten, dann bleibt

$$-2\,b\,c\,x = c\,x^2 - b\,x^2\,. \tag{28}$$

Und nach Umstellen [und Kürzen durch x] ergibt dies die Gleichung

$$b\,x - c\,x = 2\,b\,c\,.$$

[Die Lösung ist also $x = \frac{2\,b\,c}{b-c}$.] Offenbar stimmt diese Lösung mit der des Apollonios überein, denn nach unserer Lösung ist die Bestimmung der Tangente gemäß der Proportion $(b-c) : c = 2\,b : x$ vorzunehmen, das heißt nach

$$\overline{ZO} - \overline{ON} : \overline{ON} = 2 \cdot \overline{ZO} : \overline{ZM}\,;$$

Aber nach Apollonios muß man wählen

$$\overline{ZO} : \overline{ON} = \overline{ZM} : \overline{MN}\,.$$

Beide Konstruktionen laufen aber, offensichtlich, auf dasselbe hinaus.

Kommentar. Bei der Analyse dieser Lösung ist der eigentliche Trick, nämlich die Identifikation der Punkte J und E, viel schwerer zu erkennen, weil dies bei dem eher beiläufigen Übergang von Ungleichung (26) zu Gleichung (27) kaum mehr erkennbar ist. Die Lösung geht auch nicht von der algebraischen Darstellung der Ellipse aus, sondern von einem geometrischen Satz, der eine Reihe von geometrischen Überlegungen erforderlich macht. Verfolgen wir jedoch die Ungleichung (26) bis zur Ungleichung (25) zurück, so erkennen wir, daß bei der *comparatio per adæquationem* der Ungleichung (26) die Punkte J und E identifiziert werden. Der Rest ist Fermats „Methode“.
Zur Kontrolle der Berechtigung des Übergangs von Gleichung (27) zu Gleichung (28) schreiben wir noch $F(h,x) := b\,x^2 - c\,x^2 - 2\,b\,c\,x + b\,c\,h + h\,x^2$, und haben dann

$$F_x(h,x) = 2\,b\,x - 2\,c\,x - 2\,b\,c + 2\,h\,x \qquad \text{und} \qquad F_x\left(0, \frac{2\,b\,c}{b-c}\right) = 2\,b\,c \neq 0\,.$$

Damit wollen wir es bei der Ellipse sein Bewenden haben lassen.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Vorbemerkungen. Fermats nachfolgende Berechnung der Tangente an das kartesische Blatt [30] in einem beliebig gewählten Punkt desselben findet sich in der Anlage *Méthode de maximis et minimis (expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes)* [31], welche Fermat einem Brief [32] an Mersenne beigefügt hatte. In diesem Anhang erläutert er zunächst erneut seine „Methode“ am Beispiel der Parabel,[33] antwortet dann aber auf eine Herausforderung, die Descartes in einem Brief[34] an Mersenne formuliert hatte:

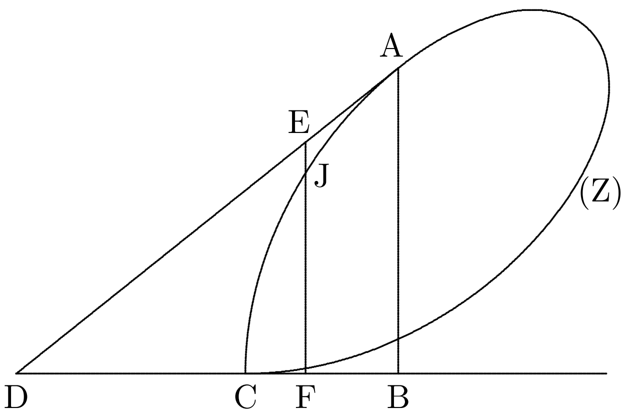
> Puis, outre cela, sa règle prétendue n'est pas universelle comme il lui semble, et elle ne se peut étendre à aucune des questions qui sont un peu difficiles, mais seulement aux plus aisées, ainsi qu'il pourra éprouver si, après l'avoir mieux digérée, il tâche de s'en servir pour trouver les contingentes, par exemple, de la ligne courbe BDN, que je suppose être telle qu'en quelque lieu de sa circonférence qu'on prenne le point B, ayant tiré la perpendiculaire BC, les deux cubes des deux lignes BC et CD soient ensemble égaux au parallélipèd de deux mêmes lignes BC, CD et de la ligne donnée P.

Wählen wir ein kartesisches Koordinatensystem und setzen wir $x = \overline{CD}$, $y = \overline{BC}$ und $p = P$, so läuft dies auf die Gleichung $x^3 + y^3 = p\,x\,y$ hinaus. Da die von Descartes beigefügte Skizze wenig Ähnlichkeit mir dem tatsächlichen Aussehen des kartesischen

Blattes erkennen läßt (weder Descartes, noch Fermat besaß eine angemessene Vorstellung vom Aussehen desselben - auch nicht im ersten Quadranten), verzichten wir auf deren Wiedergabe. In der unten gezeichneten Figur ist der Standardwert $p = 3$ gewählt und nur der Verlauf im ersten Quadranten angegeben worden.

Beispiel 6. Es sei die Kurve $CA(Z)$ mit folgender Eigenschaft gegeben: nimmt man einen beliebigen Punkt auf der genannten Kurve, wie etwa A, und fällt das Lot AB, so sind die beiden Kuben von CB und BA (zusammen) gleich dem Quader, der aus einer gegebenen Strecke N und den Strecken CB und BA gebildet wird.[35]

Fermats Lösung. Angenommen die Sache sei schon erledigt, und eine Konstruktion analog der vorhergehenden[36] mit den Strecken BD, BC, BA, CF und FE sei vorgenommen. [Wir setzen $b = \overline{BA}$, $d = \overline{CB}$, $n = N$, $x = \overline{DB}$ und $h = \overline{FB}$.] Dann kommt es darauf an, die Summe der beiden Kuben $\overline{CF}^3$ und $\overline{FE}^3$ dem aus N, $\overline{CF}$ und $\overline{FE}$ gebildeten Quader gleichzusetzen. [Wir beachten, daß $\overline{CF} = d - h$ und $\overline{FE} = \frac{b(x-h)}{x}$ ist.]



Das führt auf

$$d^3 - 3\,d^2h + 3\,d\,h^2 - h^3 + \frac{b^3}{x^3}\left(x^3 - 3\,x^2h + 3\,x\,h^2 - h^3\right) \doteq \frac{n\,b}{x}\left(d\,x - d\,h - h\,x + h^2\right) . \tag{29}$$

Nachdem wir alles mit x^3 multipliziert haben, ergibt sich

$$d^3x^3 - 3\,d^2h\,x^3 + 3\,d\,h^2x^3 - h^3x^3 + b^3x^3 - 3\,b^3h\,x^2 + 3\,b^3h^2x - b^3h^3 \doteq n\,b\,d\,x^3 - n\,b\,d\,h\,x^2 - n\,b\,h\,x^3 + n\,b\,h^2x^2 . \tag{30}$$

Weil nun aber $d^3 + b^3 = n\,b\,d$ und somit auch $d^3x^3 + b^3x^3 = n\,b\,d\,x^3$ gilt, können wir die entsprechenden Glieder in Gleichung (30) weglassen, und erhalten

$$3\,d^2h\,x^3 - 3\,d\,h^2x^3 + h^3x^3 + 3\,b^3h\,x^2 - 3\,b^3h^2x + b^3h^3 \doteq n\,b\,d\,h\,x^2 + n\,b\,h\,x^3 - n\,b\,h^2x^2 . \tag{31}$$

Kürzen durch $h \neq 0$ ergibt

$$3\,d^2x^3 - 3\,d\,h\,x^3 + h^2x^3 + 3\,b^3x^2 - 3\,b^3h\,x + b^3h^2 \doteq n\,b\,d\,x^2 + n\,b\,x^3 - n\,b\,h\,x^2 . \tag{32}$$

Nun lassen wir alle Glieder weg, die noch den Faktor h enthalten, und bekommen

$$3\,d^2x^3 + 3\,b^3x^2 = n\,b\,d\,x^2 + n\,b\,x^3\,. \tag{33}$$

Kürzen wir noch durch x^2 und lösen nach x auf, so erhalten wir

$$x_0 = \frac{n\,b\,d - 3\,b^3}{3\,d^2 - n\,b}\,, \tag{34}$$

ce qu'il falloit chercher.

Kommentar. An dieser Lösung fällt auf, daß sie auf geometrische Argumente, wie bei der Ellipse etwa, vollkommen verzichtet, wohl deswegen, weil der *galand* für Fermat völlig neu war und sein Verlauf sowie seine geometrischen Eigenschaften ihm unbekannt waren. Daher argumentiert er rein algebraisch, zumal da ihm die Gleichung, welche die Kurve implizit definiert, von Descartes direkt gegeben ist. Fermat beginnt — scheinbar ohne jede Erläuterung — damit, den Punkt E algebraisch so zu behandeln, als ob er der Punkt J sei, wodurch natürlich die Tangente im Punkt A in die Sekante durch die Punkte A und J übergeht und $x = x(h)$ zur Länge der Subsekante wird. Der Kommentar zu diesem Vorgehen wurde aber bereits kurz zuvor bei der Behandlung der Tangentenbestimmung für die Parabel gegeben:

> Quoique la ligne FE soit inégale à l'appliquée tirée du point F à la courbe, je la considère néanmoins comme si en effet elle étoit égale à l'appliquée, et ensuite la compare par adéquation avec la ligne FJ, suivant la propriété spécifique de la courbe.

Fermat weiß sehr wohl, daß er etwas tut, was (nicht nur) in der Mathematik eigentlich unzulässig ist, nämlich zwei Objekte, die definitiv verschieden sind, als identisch zu behandeln. Ab Gleichung (29) läuft alles wieder streng nach Fermats „Methode“. Bis jedoch die Gleichung (31) erreicht ist, die es gestattet, durch $h \neq 0$ zu kürzen, um in (32) eine Relation zu bekommen, in der nicht alle Terme den Faktor h besitzen, sind algebraische Umformungen erforderlich sowie die Ausnutzung der Tatsache, daß der Punkt A der definierenden Gleichung genügt. Und natürlich war es Descartes, der die Lösung (34) nicht finden konnte.

Um ein letztes Mal den Satz über die impliziten Funktionen zu verwenden, um den Übergang von (32) nach (33) zu rechtfertigen, definieren wir

$$F(h,x) := 3\,d^2x^3 - 3\,d\,h^2x^3 + h^2x^3 + 3\,b^3x^2 - 3\,b^3h\,x + b^3h^2 - n\,b\,d\,x^2 - n\,b\,x^3 + n\,b\,h\,x^2\,.$$

Dann haben wir

$$F_x(h,x) = 9\,d^2x^2 - 9\,d\,h^2x^2 + 3\,h^2x^2 + 6\,b^3x - 3\,b^3h - 2\,n\,b\,d\,x - 3\,n\,b\,x^2 + 2\,n\,b\,h\,x\,,$$

woraus mit (34) und etwas Rechnen

$$F(0,x_0) = \frac{b^2(n\,d - 3\,b^2)^2}{3\,d^2 - n\,b} \tag{35}$$

folgt. Da wir den Fall $b = 0$ sinnvoller Weise ausschließen können (das kartesische Blatt hat dort einen Knoten), wird $F_x(0, x_0)$ genau dann gleich 0, wenn $3\,b^2 = n\,d$ ist. Zusammen mit $d^3 + b^3 = n\,d\,b$ ergibt dies

$$d = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\,n\,,$$

was die d-Koordinate ist, bei der das kartesische Blatt eine vertikale Tangente hat. Der Nenner des Terms rechts in (34) verschwindet nach einer analogen Rechnung genau dann (und der Term rechts in (34) ist dann undefiniert), wenn

$$b = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\,n$$

ist, und das ist genau dort der Fall, wo der *galand* eine horizontale Tangente besitzt. In allen anderen Fällen liefert Fermats „Methode" (mit (34)) die Länge der Subtangente und somit die Tangente im Punkt (d, b).

Schlußfolgerungen

Ausgehend von der bei Breger geborgten Hypothese, daß das von Fermat verwendete Verb *adæquari* (das Substantiv *adæqualitas*) in der Bedeutung von „gleich sein" (von „Gleichheit") zu verstehen ist, haben wir an sechs ausgewählten Beispielen untersucht, ob sich Fermats Vorgehen unter dieser Annahme nach heutigen mathematischen Maßstäben rechtfertigen läßt und ob sich hinter seiner unterschiedlichen Verwendung der Verben *æquari* und *adæquari* ein tieferer Sinn verbirgt.

Die Antwort auf die erste Frage ist eindeutig. Fermats Lösungen sowohl zum Extremwertproblem als auch zum Tangentenproblem lassen sich auch unter Bregers Prämisse mathematisch streng rechtfertigen, ohne an den Gleichungen, Umformungen und Schlußweisen etwas ändern zu müssen. An keiner Stelle wäre irgendetwas gewonnen, wenn wir *adæquabitur* mit „angenähert gleich", „approximativ gleich", „ungefähr gleich", „pseudogleich" oder gar mit „so nahe gleich wie möglich" übersetzen würden. Im Gegenteil, seine „Pseudogleichungen" würden sich jeder eindeutigen mathematischen Interpretation entziehen. Das einzige substantiell moderne Hilfsmittel, welches ich eingesetzt habe (um das Weglassen der noch den Faktor h enthaltenden Glieder zu rechtfertigen), ist Dinis Satz von den impliziten Funktionen, der die stetige Ergänzung der Funktion $h \mapsto x(h)$ im Punkt $h = 0$ sichert. Ich habe ihn gewählt, weil seine Anwendung nicht die geringste Uminterpretation des Fermatschen Vorgehens erforderlich macht. Alles kann so stehen bleiben, wie es bei Fermat steht. Daß ich damit nicht behaupte, Fermat habe den Satz von Dini angewandt, brauche ich wohl nicht eigens hervorzuheben.

Die Antwort auf die zweite Frage ist ebenso eindeutig und, wegen ihrer Schlichtheit, verblüffend.[37] Fermat verwendet zwei „Gleichheitszeichen", eines, *æquabitur*, wenn es zwischen zwei Konstanten oder zwischen zwei gleichen Termen steht (wenn die Gleichung ein *théorème* ist), und das andere, *adæquabitur*, wenn die Terme, zwischen denen es steht, verschieden (*inégaux*) sind und eine *relation* definieren, aber kein *théorème* behaupten. Weil dies seit mehr als hundert Jahren, seit der unseligen Einführung des Zeichens $\sim$ durch Tannery, niemand gesehen zu haben scheint, was mich dann doch an meiner Beobachtung zweifeln läßt, hilft es mir vielleicht, Saint Nicolas Bourbaki, den Styliten der Mathematiker, um Beistand anzurufen.[38] Nehmen wir im Sinne Bourbakis an, daß die klassische reelle Analysis eine *théorie logique et quantifiée* ist, und schauen wir, wie er nun das Gleichheitszeichen einführt und sie so zu einer *théorie égalitaire* macht.

> On appelle *théorie égalitaire* une théorie $\mathcal{T}$ [logique et quantifiée] dans laquelle figure un signe relationnel de poids 2 noté = (qui se lit «égale»), ... ; si $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}$ sont des termes de $\mathcal{T}$, l'assemblage $= \boldsymbol{T}\boldsymbol{U}$ est une relation de $\mathcal{T}$ (dite *relation d'égalité*); on la désigne pratiquement par $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}$ ou $(\boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{U})$. ...
> La négation de la relation $= \boldsymbol{T}\boldsymbol{U}$ se désigne par $\boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{U}$, ou $(\boldsymbol{T}) \neq (\boldsymbol{U})$ (où le signe $\neq$ se lit «différent de»). ...
> Par abus de langage, lorsqu'on a *démontré* une relation de la forme $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}$ dans une théorie $\mathcal{T}$, en dit souvent que les termes $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}$ sont «les mêmes» ou sont «identiques». De même, lorsque $\boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{U}$ est vrai dans $\mathcal{T}$, on dit que $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}$ sont «distincts» au lieu de dire que $\boldsymbol{T}$ est différent de $\boldsymbol{U}$.

Ist etwa $\boldsymbol{T}$ der Term $x^3 + y^3$ und $\boldsymbol{U}$ der Term $(x+y)(x^2 - x\,y + y^2)$, so ist die *relation* $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}$ *démontré* oder ein *théorème*, denn es gilt

$$(\forall_{\mathbb{R}} x)(\forall_{\mathbb{R}} y)\left(x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - x\,y + y^2)\right) ,$$

und die Terme $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{U}$ sind „dieselben“ oder „identisch“. Wählen wir hingegen für $\boldsymbol{U}$ den Term $3\,x\,y$, so sind die Terme $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{U}$ „verschieden“, $\boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{U}$, denn offenbar gilt

$$(\exists_{\mathbb{R}} x)(\exists_{\mathbb{R}} y)\left(x^3 + y^3 \neq 3\,x\,y\right) \qquad \text{und daher} \qquad \neg(\forall_{\mathbb{R}} x)(\forall_{\mathbb{R}} y)\left(x^3 + y^3 = 3\,x\,y\right) ,$$

was uns aber nicht daran hindert, die *relation de égalité*

$$x^3 + y^3 = 3\,x\,y$$

hinzuschreiben und zu untersuchen, obwohl doch die Terme links und rechts des Gleichheitszeichens *definitiv verschieden* sind. Und das war für Fermat offenbar eine neuartige Situation, für die er nach einem geeigneten Wort gesucht und es in der Diophant-Übersetzung des Bachet de Méziriac gefunden hat: *adæquabitur*.

Diesen Zusammenhang scheint auch Breger nicht gesehen zu haben. Er formuliert seine Hypothese so: *Fermat used the word "adæquare" in the sense of "to put equal"*, und fügt einige Zeilen später hinzu: *In a mathematical context, the only difference between "æquare" and "adæquare" (if there is any) seems to be that the latter gives more stress on the fact that the equality is achieved.*[39] Über den zweiten Satz brauche ich kein Wort mehr zu verlieren. Aber der erste Satz bedarf noch eines Kommentars. Es wird jetzt niemanden überraschen, wenn ich behaupte, daß Fermat das Wort *adæquabitur* (wie auch das Wort *æquabitur*) im Sinne von „gleich“ benutzt. Aber wenn er bei einer seiner Lösungen zwei Terme mit den Variablen x und h *zum ersten Male gleichsetzt*, variiert er die Bezeichnung und benutzt Redewendungen wie *adæquentur*, *adæquabuntur*, *comparare per adæqualitatem*, *debet adæquari* oder *fiat per adæqualitatem*.[40]

Anmerkungen

[1]Siehe [Men 2005], p. 183, § 133 (3)!

[2]Nach dem Thesaurus Linguæ Latinæ Vol. I ([TLL 1900], p.562) handelt es sich bei den beiden Verben um Synonyma.

[3]Dieser Text ist einem längeren Interview entnommen, welches der im Juli 2008 verstorbene Wissenschaftshistoriker Michael Sean Mahoney einer namentlich nicht genannten Person gegeben hat. Der Text stand auf der Web-Seite http://his.princeton.edu/people/c89/michael_mahoney.htm. Diese ist offenbar nach dem Tod Mahoneys entweder entfernt oder unzugänglich gemacht worden. Ich bin im Besitz einer Hardcopy dieses Interviews.

[4]Der Bösewicht war André Weil ([Weil 1973]).

[5]Für die Geschichte des Theorems siehe [Kra 2002]!

[6]*Sit recta $A\,C$ ita dividenda in E ut rectangulum $A\,E\,C$ sit maximum.* ([Fermat Œuvres], Vol. I, p. 134.)

[7]Siehe [Fermat Œuvres], Vol. I, pp. 147–153 !

[8]*Secare lineam $A\,C$ ad punctum B, ita ut solidum contentum sub quadrato $A\,B$ et linea $B\,C$ sit maximum omnium solidorum eodem modo descriptorum secando lineam $A\,C$ in quovis alio puncto.* [Fermat Œuvres], Vol. I, p. 140 f.

[9]*Im Kontext der Berechnung von Tangenten* gibt es in Fermats Briefen zwei Stellen ([Fermat Œuvres], Vol. II, p. 137 und p. 155), wo er den Gebrauch des Wortes *adæquabitur* erläutert. Weil die Situation dort komplizierter ist, werden wir diese Stellen auch dort analysieren.

[10]*Sit semicirculus cujus diameter $A\,B$ et in eam perpendicularis $D\,C$. Queritur maximum rectarum $A\,C$ et $C\,D$ aggregatum.* [Fermat Œuvres], Vol. I, p. 153.

[11]Da in diesem Fall x eine affin-lineare Funktion von h ist, braucht man zu Rechtfertigung dieses Schrittes nicht den „Hammer" des Satzes über die impliziten Funktionen hervorzuholen.

[12]Im folgenden verwende ich selbst bei meinen eigenen Überlegungen das Adaequabitur-Zeichen $\doteq$, sozusagen Fermat imitierend.

[13]Zur Rechtfertigung berufen wir uns hier wieder auf den Satz über die impliziten Funktionen: wir definieren

$$F(h,x) := h^2 + \frac{b^2}{4} - 2\,b\,x + 2\,x^2 - b\,h$$

und haben dann $F_x(h,x) = -2\,b + 4\,x$, woraus mit $x_0 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{b}{2}$ folgt, daß

$$F_x(0,x_0) = 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{b}{2} - 2\,b = \frac{b}{\sqrt{2}} \neq 0\,.$$

[14]Nach einer bekannten Weisheit ist ja „Mathematik die Kunst, durch Nachdenken das Rechnen zu vermeiden"— wenn schon nicht ganz, dann wenigstens zum Teil.

[15]Der einzige Autor, der sich näher mit Fermats „Kunstgriff" befaßt hat, ist Frau Cifoletti in [Cif 1990], pp. 23–28. Die Frage, wie sich Fermats Vorgehen *rechtfertigen* läßt, hat sie jedoch weder untersucht noch auch nur aufgeworfen.

[16]Der lateinische Text ist von Paul Tannery ([Fermat Œuvres], Vol. III, p. 121–123) ins Französische und von Max Miller ([Mil 1934]) ins Deutsche übersetzt worden. Der lateinische Text erweist sich als ziemlich sperrig. Die nachfolgende ist meine eigene Übsersetzung.

[17]Die Numerierung der nachfolgenden Schritte ist von mir vorgenommen worden und findet sich nicht bei Fermat.

[18]Daß diese Stellen im griechischen Text des Diophant *mathematisch* nichts mit Fermats Methode zu Bestimmung von Maxima und Minima zu tun haben, hat Herbert Breger überzeugend nachgewiesen ([Bre 1994], pp. 199–202).

[19]Siehe [Wie 1929], p. 25, Fußnote!

[20]Siehe [Jah 1999], p. 59!

[21]Ich habe hier E durch h ersetzt.

[22]*De tangentibus linearum curvarum.* Siehe [Fermat Œuvres], Vol. I, p. 134–136 !

[23]Sit data, verbi gratia, *parabole* $B\,D\,N$, cujus vertex D, diameter $D\,C$, et punctum in ea datum B, ad quod ducenda es recta $B\,E$ tangens parabolen et in puncto E cum diametro concurrens. (Ibd. p. 135)

[24]Siehe [Fermat Œuvres], Vol. IV, pp. 48–51!

[25]Siehe [Fermat Œuvres], Vol. V, pp. 102–104!

[26]Es handelt sich um ein Fragment, welches die Herausgeber von Fermats Werken aus mir nicht ersichtlichen Gründen dem Brief Fermats vom 20. April 1638 an Mersenne angehängt haben. Siehe [Fermat Œuvres], Vol. II, p. 137 !

[27]Siehe [Ita 1948], pp. 593–595 !

[28]Siehe [Fermat Œuvres], Vol. I, p. 145 f !

[29]Konika Vol. I, Theorem 21.

[30]Die Bezeichnung „kartesisches Blatt“ oder „folium Cartesii“ ist erst später üblich geworden. Fermat nennt sie an anderer Stelle ([Fermat Œuvres], Vol. II, p. 169), wie auch andere Autoren, «*galand*».

[31]Siehe [Fermat Œuvres], Vol. II, p. 156 f!

[32]Siehe [Fermat Œuvres], Vol. II, pp. 152–154!

[33]Siehe [Fermat Œuvres], Vol. II, p. 154 f!

[34]Siehe [Fermat Œuvres], Vol. II, p. 129 f!

[35]Soit la courbe CA, de laquelle la propriété est telle que, quelque point qu'on prenne sur la dite courbe, comme A, tirant la perpendiculaire AB, les deux cubes CB et BA soient égaux au parallélépipède compris sous une ligne droite donnée, comme N, et les deux lignes CB et BA. [Fermat Œuvres], Vol. II, p. 156.

[36]Fermat bezieht sich hier auf das in seinem Brief unmittelbar vorher diskutierte Beispiel der Tangente an eine Parabel, an dem er seine „Methode“ zunächst erläutert hat, wobei er auch die Bezeichnungen der einander entsprechenden Punkte übernimmt.

[37]Der geneigte Leser mag sich zu diesem Thema den schwülstigen Unsinn in [Mah 1973], pp. 161–165 zu Gemüte führen, den dieser Historiker über mehr als vier Seiten zum Thema “*adequality*” ausbreitet.

[38]Im folgenden zitiere ich aus [Bou 1970], Éléments de mathématique. Description de la mathématique formelle, Paragraph 5.

[39]Siehe [Bre 1994], p. 197 f!

[40]Ich sollte vielleicht erwähnen, daß auch Isabella Bashmakova im gleichen Sinne schreibt: «Diophante écrit qu'il va chercher ces nombres élevés au carré par *adæqualitatem* ou par <comparaison> (παρισότητος ἀγωγῇ). ... Fermat utilise le même terme que Diophante pour désigner l'operation d'*égalisation* de $y = y_0$ et de $y_1 = f(x_0 + h)$.» [Bac 1968], p. 300 f.

Literatur

[TLL 1900] Academiæ qvinqve Germanicæ, Thesavrvs Lingvae Latinae, Volvmen I. Herausgegeben von den Akademien Berlin, Göttingen, Leipzig, München und Wien, Teubner, Leipzig, 1900

[Ala 2005] Alarcón, Sergio Alberto & Carlos Mario Suescún & Andrés de la Torre, *El método de las tangentes de Fermat.* Matemáticas: Enseñanza Universitaria (nueva serie) **13** (2005), 101–123

[And 1980] Andersen [Møller Pedersen], Kirsti, *Techniques of the calculus 1630–1660.* In: Ivor Grattan-Guinness, ed., From the Calculus to Set Theory 1630–1910: An Introductory History. Duckworth, London, 1980, p. 10–48

[Bac 1968] Bachmakova, Isabelle, *Diophante et Fermat.* Revue d'histoire des sciences et de leurs applications **19** (1968), 283–306

[Bou 1970] Bourbaki, Nicolas, Éléments de mathématique. Théorie des ensembles. Hermann, Paris, 1970

[Boy 1989] Boyer, Carl B. & Uta C. Merzbach, A History of Mathematics. John Wiley & Sons, New York, ²1989

[Bre 1994] Breger, Herbert, *The mysteries of adaequare: A vindication of Fermat.* Archive for History of Exact Sciences, **46** (1994), 193–219

[Cal 1999] Calinger, Ronald, A Contextual History of Mathematics. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999

[Cif 1990] Cifoletti, Giovanna Cleonice, *La Méthode de Fermat: Son statut et sa diffusion: algèbre et comparaison de figures dans l'histoire de la méthode de Fermat.* Société française d'histoire des sciences et des techniques, Paris, 1990

[Cou 1929] Courant, Richard, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Zweiter Band. Funktionen mehrerer Veränderlicher. Springer, Berlin, 1929

[Edw 1979] Edwards, Charles Henry, Jr., The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag, New York, 1979

[Fermat Œuvres] Tannery, Paul & Charles Henry, dir., Œuvres complètes de Fermat. Tome I–IV. Gauthier-Villars, Paris, 1891, 1894, 1896, 1912 Waard, Cornelis de, Supplément, 1922

[Giu 2009] Giusti, Enrico, *Les méthodes des maxima et minima de Fermat.* Annales de la Faculté des Sciences, Série 6, **18** Fascicule Spécial (2009), 59–85

[Hof 1963] Hofmann, Joseph Ehrenfried, *Über ein Extremwertproblem des Apollonios und seine Behandlung bei Fermat.* Nova Acta Leopoldina (2) **27** (1963) [Nr.167], 105-113

[Ita 1948] Itard, Jean, *Fermat précurseur du calcul différentiel.* Archives internationales d'histoire des sciences **27** (1948), 589–610

[Jah 1999] Jahnke, Hans Niels (Hrsg.), Geschichte der Analysis. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1999

[Jen 1969] Jensen, Claus, *Pierre Fermat's method of determining tangents of curves and its application to the conchoid and the quadratrix.* Centaurus **14** (1969), 72–85

[Kat 1993] Katz, Victor J., A History of Mathematics. An Introduction. HarperCollins, New York, 1993

[Kra 2002] Krantz, Steven G. & Harold R. Parks, The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications. Birkhäuser, Basel, 2002

[Mah 1973] Mahoney, Michael Sean, The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601–1665). Princeton University Press, Princeton, N. J., ¹1973

[Men 2005] Menge, Hermann, Lehrbuch der lateinischen Syntax und Semantik. Neu bearbeitet von Thorsten Burkard und Markus Schauer. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 2005

[Mil 1934] Miller, Max, Pierre de Fermats Abhandlungen über Maxima und Minima. Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Max Miller. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1934

[Sim 1992] Simmons, George Finlay, Calculus Gems: Brief Lives and Memorable Mathematics. McGraw Hill, New York, 1992

[Str 1968] Strømholm, Per, *Fermat's method of maxima and minima and of tangents. A reconstruction.* Archive for History of Exact Sciences **5** (1968), 47–69

[Weil 1973] Weil, André, *Review of "The mathematical career of Pierre de Fermat", by M. S. Mahoney.* Bulletin of the AMS **6** (1973), 1138–1149

[Wein 1998] Weinrich, Klaus, Die Lichtbrechung in den Theorien von Descartes und Fermat. Franz Steiner, Stuttgart, 1998

[Wie 1929] Wieleitner, Heinrich, *Bemerkungen zu Fermats Methode der Aufsuchung von Extremwerten und der Bestimmung von Kurventangenten.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **38** (1929), 24–35

Anschrift des Verfassers:

Dr. Klaus Barner
Professor emeritus
Mathematisches Institut
Universität Kassel
D-34109 Kassel
e-mail: klaus.barner@uni-kassel.de

Der Weg der Logarithmen in die Schule und wieder hinaus[1]

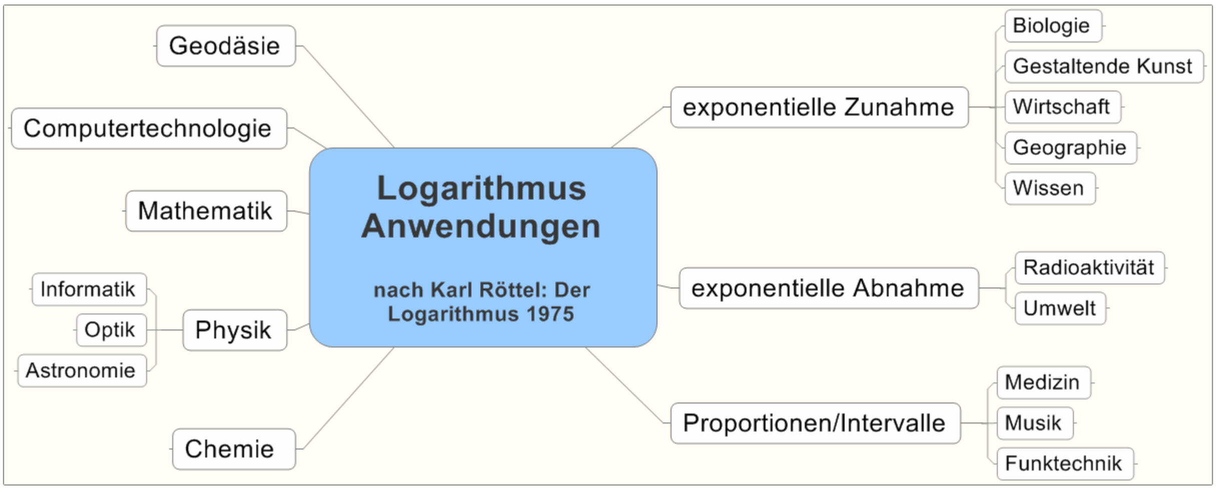
Dr. Klaus Kühn, Alling

Vorwort

Diskussionen über Bildung sind zu einem wichtigen Thema der Gegenwart geworden. Die angeblich neuen Ideen unserer Politiker dazu reduzieren weiterhin Bildung auf Ausbildung und haben wieder einmal nur den EINEN Hintergrund, die Jugend möglichst schnell in den Arbeitskreislauf zu integrieren (je jünger, je billiger). Der kürzlich eingeschlagene Weg der Verkürzung des Schuljahres ist nur eines der dazu eingesetzten Mittel und eine kurzsichtige Verbeugung vor der Industrie. Der Frust bei den Lehrern ist erheblich, weil die Lehre neu gestaltet werden muss und zum Teil die entsprechenden Lehrmittel nicht zur Verfügung stehen.

Verkürzung des Schuljahres hat auf der anderen Seite zur Folge, dass Schultage länger werden oder dass Stoff aus dem Lehrplan herausgenommen wird. So mussten z.B. die Logarithmen weichen, weil man schon seit geraumer Zeit keinen Sinn mehr in deren Vermittlung sah. Was ist schon logarithmisch ?

Wir sind gespannt, wie es den Lehrern gelingen wird, Schülern Hintergründe und Zusammenhänge zu erklären, die sich auf folgende Bereiche beziehen:



Nicht nur, dass die Schüler nicht mehr das Prinzip der Logarithmen kennenlernen, sie werden auch viele Naturgesetzmäßigkeiten nicht mehr verstehen können. Ganz abgesehen davon, dass sich der Stand der heutigen Technik ohne die vor fast 400 Jahren entdeckten Logarithmen NICHT in der rasanten Weise entwickelt hätte.

In diesem Aufsatz soll ein Teil der Geschichte der Logarithmentafeln am Beispiel ihres Einsatzes in der Schule dargestellt werden. Dazu werden die Eintragungen einer Datenbank mit über 2000 Logarithmentafeln auf deren Erscheinen, deren Inhalt und

[1] Abgekürzte Version; der vollständige Artikel steht auf Wunsch als pdf zur Verfügung

Umfang untersucht und gegenübergestellt. Diese Datenbank[2] kann selbstverständlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben und kann auch trotz Prüfung Dubletten nicht ausschliessen. Die Quellen für diese Datenbank sind die Zusammenfassung der British Association of the Advancement of Science[3], die Arbeiten von Bierens de Haan[4], James Henderson[5], Schütte[6], Lebedev, A.V.+Fedorova, R.M. [7] und Fletcher[8] sowie das Gesamtverzeichnis des deutschsprachigen Schrifttums (GV), ferner die Internetbuchhändler und -börsen.

In dieser Arbeit wird die Veröffentlichung der 5stelligen Logarithmentafeln in ein besonderes Licht gerückt, wobei die Tafeln von Oskar Schlömilch (1823 - 1901) und Friedrich Gustav Gauss (1829 - 1915) herangezogen werden, da diese im deutschsprachigen Raum als Maßstab/Repräsentanten für den Einsatz von Logarithmen(tafeln) in der Schule angesehen werden können. Auch müssen die 5stelligen Tafeln[9] von Ernst Ferdinand August (1795 - 1870), seit 1827 Direktor des köllnischen Realgymnasiums in Berlin, Erwähnung finden, deren erste Auflage im Format kl.8 (Kitteltaschenformat) bereits 1846 für den Einsatz in der Schule erschien. Dazu sagt August im Vorwort:

"Der Zweck dieser Sammlung von Tafeln ist, sowohl dem Rechner die erforderlichen Hülfsmittel darzubieten, deren er so oft bedarf, als auch dem Lehrer der Mathematik die Gelegenheit zu geben, seine Schüler in der Anwendung der gewöhnlichsten Hülfsmittel der höhern Rechenkunst mannigfach zu üben. Dabei ist zugleich darauf Bedacht genommen, dies Buch durch Reichhaltigkeit nützlich, durch Genauigkeit zuverlässig, durch Wohlfeilheit für Viele zugänglich und durch Dauerhaftigkeit für langen Gebrauch anwendbar zu machen.... Dem Lehrer wird es gewiss willkommen sein, Beispiele der verschiedensten Tafeln seinen Schülern vorlegen und sie im Gebrauch derselben üben zu können.... Dass diese Sammlung, obwohl nur auf fünfstellige Logarithmen berechnet, auch zur Erklärung und selbst zum Einsatz siebenstelliger Tafeln dienen kann, ist gewiss eine willkommene Zugabe, nicht nur für die Schule, sondern auch für solche Rechner, die sich auf den Gebrauch dieses Büchleins beschränkt sehn, das ja in der Bibliothek eines Reisenden u.s.w. so leicht einen Platz findet......" .

Im Unterschied zu seinen Herausgeberkollegen hat E.F. August auf 60 Seiten ausführlich den Gebrauch der Logarithmen beschrieben und ist auch auf deren Geschichte und Berechnungsmethoden eingegangen. Diese Ausführungen sind in späteren Ausgaben (z.B. von 1894) auf 40 Seiten kondensiert worden.

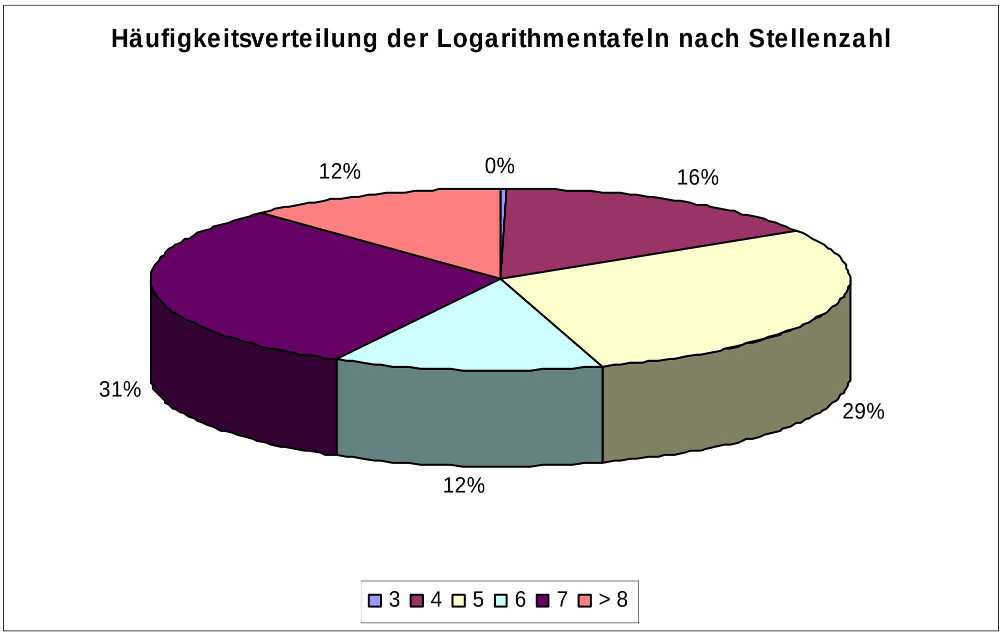
---

[2] siehe auch www.Rechnerlexikon.de - Logarithmentafeln
[3] Glaisher, J.W.L.; (Reporter) on Mathematical Tables in Report of the Fourty-Third Meeting; John Murray London 1874
[4] Bierens de Haan, David; Naamlijst van logarithmentafles - met de opgave van den tijd, de plaats en de groote, alsmede van het antaal decimalen, alles zoo verre bekend; Verhandelingen der koninklijke Akademie der Wetenschappen Deel XV, 1875
[5] Henderson, James; Bibliotheca Tabularum Mathematicarum being a descriptive Catalogue of mathematical tables; Part 1 Logarithmic Tables (A. Logarithms of Numbers); Cambridge University Press, 1926
[6] Schütte, Karl; Index mathematischer Tafelwerke und Tabellen aus allen Gebieten der Naturwissenschaften, Verlag R- Oldenbourg, 1955+1966
[7] Lebedev, A.V., Fedorova, R.M.; A Guide to Mathematical Tables, Pergamon Press 1960
[8] Fletcher, A., Miller, J.P.C.; Rosenhead, L; Comrie, L.J.¸ An Index of Mathematical Tables - Volume I and II¸ Addison-Wesley Publishing, 1962
[9] August, Ernst Ferdinand; Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln; Verlag von Veit&Comp, Berlin 1846

Einführung

Die ursprüngliche Arbeitshypothese klingt einfach: mit zunehmender Nutzung der Logarithmentafel im Laufe der Jahre verringert sich die Anzahl der Dezimalen/Stellen auf schliesslich 3.

Schon ein schneller Einblick in die o.a. Datenbank von mehr als 2000 erfassten Logarithmentafeln zeigte, dass diese Hypothese keinesfalls zu halten war. So wurde zunächst einmal festgestellt, wie die einzelnen Tafeln bezogen auf ihre Stellenzahl in der Gesamtpopulation verteilt sind, um wissenschaftliche/professionelle von schulischen Tafeln abzugrenzen.

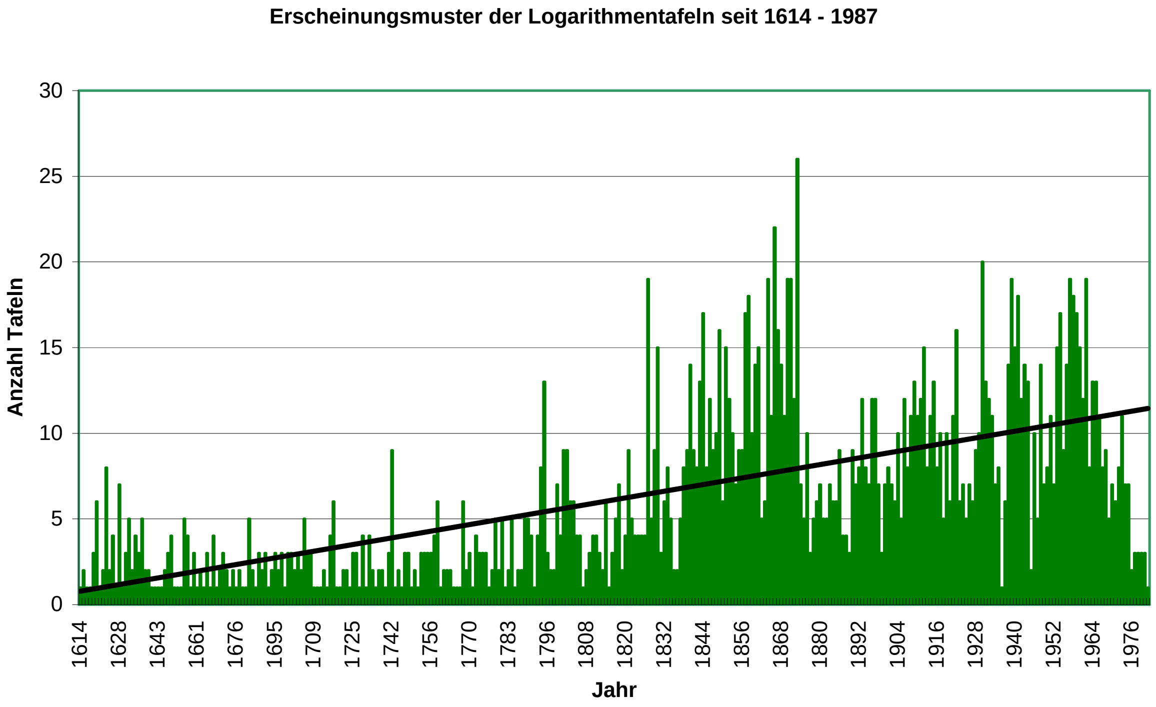


Sofern man die Anwendergrenze zwischen wissenschaftlichen/professionellen und schulischen Anwendungen bei der Stellenzahl 5 zieht, so wurden 45 % der Tafeln für den schulischen Bereich veröffentlicht, wobei dreistellige Logarithmen (lediglich 5 Erfassungen) keine Rolle spielen.

Bei den erfassten/untersuchten Tafeln handelt es sich im Wesentlichen um Tafeln aus Europa, die meisten in deutscher oder lateinischer Sprache. Bei der weiteren Fokussierung auf die schulischen Tafeln werden, mit einigen Ausnahmen, nur deutschsprachige Tafeln betrachtet:

1. wegen der besseren Zugänglich-/ Verfügbarkeit und
2. wegen des Bezuges zur deutschen Schulgeschichte und
3. wegen des Bezuges zur deutschen Industriegeschichte.

Zeitlich gesehen, ist die Gesamtheit der erfassten Logarithmentafeln im Muster und Trend der folgenden Abbildung erschienen.



Das Erscheinungsmuster der Logarithmentafeln wird von 4 Phasen bestimmt:

1. von 1614 - ca 1680 initiale Intensivphase mit bis zu 8 Tafeln im Jahr 1624
2. von 1680 - ca 1780 eine konstante Phase mit bis zu 9 Tafeln im Jahr 1742
3. von 1780 - ca 1880 eine starke Zunahme an Veröffentlichungen pro Jahr (max 26 im Jahre 1873)
4. von 1880 - 1987 nach anfänglich starkem Rückgang viele Veröffentlichungen in dichter Abfolge (max 20 im Jahre 1930)

Bei den weiteren Betrachtungen beschränken wir uns auf die 4- und 5-stelligen Logarithmentafeln, auch wenn 1869 Theodor Albrecht (1843 - 1915) " Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen. Mit besonderer Berücksichtigung für den Schulgebrauch" des Carl Bremiker (1804 - 1877) herausgebracht hat. Der Zusatz "für den Schulgebrauch" fiel in späteren Ausgaben - mindestens seit 1890 - weg. Diese Ausgaben sind bis zur 22. Auflage 1950 bei Konrad Wittwer, Stuttgart erschienen.

....

Allgemeiner Hintergrund zur Geschichte deutsch(sprachig)er Logarithmentafeln

Nach dem Erscheinen der ersten Logarithmentafel im Jahre 1614 kam es recht schnell zu einer Verbreitung von Tafeln, die entweder die Briggsschen oder die Napierschen Logarithmen enthielten, wobei sich die Briggsschen als praktischer in der Anwendung erwiesen und auch durchgesetzt haben. Hier liegen besondere Verdienste bei dem Niederländer Adrian Vlacq, der es bestens verstanden hatte, Logarithmentafeln zu vermarkten. Die erste deutschsprachige Ausgabe der Vlacqschen Tafeln "Tabellen der Sinuum, Tangentium und Secantium wie auch der Logarithmorum vor die Sinubus Tangentibus und die Zahlen von 1 bis 10000.." erschien 1673 in Amsterdam bei Joan von Ravesteyn.

Allerdings sind diese Tafeln nicht die ersten deutschsprachigen überhaupt, denn bereits 1631 hatte Johannes Faulhaber (1580 - 1635) "Zehenttausent Logarithmi, der absolut oder ledigen Zahlen von 1 biß auff 10000. Nach Herrn Johannis Neperi Baronis Merchstenij Arth und invention, welche Henricus Briggius illustriert/ und Adrianus Vlacq augiert, gerichtet." als Anhang in seiner Ingenieurs Schul von 1630 veröffentlicht. Ivo Schneider[10] schreibt dazu:

"..Durch den Krieg und seinen persönlichen sozialen Aufstieg zum 'Ingenieurn vnd Burgern in Vlm' bedingt, suchte Faulhaber stärker als in früheren Jahren seine Leser von der Brauchbarkeit der vermittelten mathematischen Methoden vor allem im Vermessungswesen und im Wehrbau zu überzeugen. Außerdem wollte er mit diesem Werk ein Kompendium der einschlägigen Literatur bis zu den neuesten Erscheinungen schaffen. 1630 erschien in Frankfurt/Main der erste und wichtigste Teil der *Ingenieurs-Schul,* der das neue Rechenhilfsmittel der Logarithmen, angewandt auf die Trigonometrie, zum ersten Male in deutscher Sprache vorstellte. Über die vor allem von Briggs entwickelten Methoden zur Berechnung der dekadischen Logarithmen natürlicher Zahlen wurde der Leser in einem Anhange informiert, dem Faulhaber 1631 zwei in Augsburg gedruckte Tafelwerke folgen liess..."

Faulhaber selbst sagt in diesem Band: "Aus diesem erklärten Bericht kann man nun mehr verstehen den 'Ursprung oder Geburt der Logarithmorum, welches ein solche herrliche schöne Kunst/ so mit Worten nicht auszureden ist/ Dann ist es nicht ein wunderbarliche Invention, daß in währendem Proceß das Extrahieren ins Halbieren verwandelt wird ? Und man die Zahlen ausrechnen und erforschen kan/daß ihre heimlichen Naturen offenbar werden müssen ? Wie ich dann zum Beschluß noch diß Exempel setzen will........".

Bei diesem Werk kann man also vom ersten deutschsprachigen mathematischen Lehrbuch mit zahlreichen Beispielen aus allen Bereichen der damaligen Rechenkunst, das eine Logarithmentafel enthält und die Logarithmen in den Berechnungen einbezieht, sprechen.

[10] Schneider, Ivo; Johannes Faulhaber 1580 -1635, Rechenmeister in einer Welt des Umbruchs, Birkhäuser Verlag Basel, Boston, Berlin 1993

Die beiden folgenden Abbildungen zeigen die Titelseite der Tafel sowie die erste Zahlenseite aus Faulhabers Ingenieurs-Schul [11].

Zehentausent
LOGARITHMI,
Der Absolut
oder ledigen Zahlen/ von
1. biß auff 10000.
Nach Herrn Johannis
Neperi Baronis Merchstenij
Arth vnd inuention, welche Heinricus Briggius illustriert/vnd Adrianus Vlacq augiert, gerichtet.
(o)
Gedruckt zu Augspurg/ durch
Andream Aperger/ auff vnser lieben Frawen Thor.
ANNO M. DC. XXXI.

Num.	Logarithmi	Num.	Logarithmi	Num.	Logarithmi
1	0,00000,00	34	1,53147,89	67	1,82607,48
2	0,30103,00	35	1,54406,80	68	1,83250,89
3	0,47712,12	36	1,55630,25	69	1,83884,91
4	0,60206,00	37	1,56820,17	70	1,84509,80
5	0,69897,00	38	1,57978,36	71	1,85125,83
6	0,77815,12	39	1,59106,46	72	1,85733,25
7	0,84509,80	40	1,60206,00	73	1,86332,29
8	0,90309,00	41	1,61278,38	74	1,86923,17
9	0,95424,25	42	1,62324,93	75	1,87506,13
10	1,00000,00	43	1,63346,84	76	1,88081,36
11	1,04139,27	44	1,64345,27	77	1,88649,07
12	1,07918,12	45	1,65321,25	78	1,89209,46
13	1,11394,33	46	1,66275,78	79	1,89762,71
14	1,14612,80	47	1,67209,78	80	1,90308,99
15	1,17609,12	48	1,68124,12	81	1,90848,50
16	1,20412,00	49	1,69019,61	82	1,91381,38
17	1,23044,89	50	1,69897,00	83	1,91907,81
18	1,25527,25	51	1,70757,02	84	1,92427,93
19	1,27875,36	52	1,71600,33	85	1,92941,89
20	1,30103,00	53	1,72427,59	86	1,93449,84
21	1,32221,93	54	1,73239,37	87	1,93951,92
22	1,34242,27	55	1,74036,27	88	1,94448,27
23	1,36172,78	56	1,74818,80	89	1,94939,00
24	1,38021,12	57	1,75587,48	90	1,95424,25
25	1,39794,00	58	1,76342,80	91	1,95904,14
26	1,41497,33	59	1,77085,20	92	1,96378,78
27	1,43136,38	60	1,77815,12	93	1,96848,29
28	1,44715,80	61	1,78532,98	94	1,97312,78
29	1,46239,80	62	1,79239,17	95	1,97772,36
30	1,47712,12	63	1,79934,05	96	1,98227,12
31	1,49136,17	64	1,80618,00	97	1,98677,17
32	1,50515,00	65	1,81291,33	98	1,99122,61
33	1,51851,39	66	1,81954,39	99	1,99563,52

A 2 100

Nicht zu vergessen sind selbstverständlich die "Aritmetische und Geometrische Progreß Tabulen/sambt gründlichem Unterricht/wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/und verstanden werden soll" von Jost Bürgi (1552 - 1632) - auch genannt Joost oder Jobst Byrgius bzw. Byrg - , die bereits 1620 8stellig veröffentlicht wurden, sich aber leider auf Grund fehlender Anleitung nicht weiter durchgesetzt hatten.

Auf deutschem bzw. kontinentaleuropäischem Boden brachte Benjaminus Ursinus (1587 - 1633/4) 1618 die erste Logarithmentafel mit den auf 5 Stellen reduzierten Napierschen Logarithmen, allerdings in lateinischer Sprache, in Coloniae/Kölln bei Berlin heraus.

[11] Freundlicherweise von Kurt Hawlitschek als Kopie aus der Ulmer Stadtbibliothek zur Verfügung gestellt.

Zu den Inhalten von Logarithmentafeln

Die Inhalte der Logarithmentafeln lassen sich generell in folgende Rubriken gliedern:

- Vorwort
- Geschichtlicher Rückblick
- Anleitung
- Beispiele
- Logarithmen
- Andere Tafeln/Tabellen
- Formelsammlungen
- Diverses

In den Vorworten wird auf den Grund der Herausgabe der vorliegenden - natürlich verbesserten - Tafel eingegangen. Dabei kommt es immer zu Bemerkungen und Ausführungen, wie und warum sich diese Tafel von den anderen bereits bekannten unterscheidet.

Ein geschichtlicher Rückblick zur Entstehung und Entwicklung der Logarithmen wird eher in seltenen Fällen gegeben. Er kommt aber vor und ist besonders in englischen Tafeln, die im 18. Jahrhundert erscheinen, sehr ausgeprägt, siehe besonders die 7stelligen Tafeln (Mathematical Tables) von Henry Sherwin (? - ?) ab 1705 oder Charles Hutton (1737 - 1823) ab 1785. In jüngeren Ausgaben dieser Tafeln sind Angaben zur Geschichte der Logarithmen nicht mehr vorhanden.

Gleiches gilt für die Anleitungen und Rechenbeispiele, die besonders in den älteren Logarithmentafeln sehr ausführlich und zum Teil umfangreich gestaltet sind.

Die Logarithmentafeln selbst kommen in den unterschiedlichsten Aufmachungen, Ausführungen und Inhalten vor. Dabei unterscheiden sich die in der Wissenschaft eingesetzten Tafeln von den schulischen besonders durch ihren Umfang, der hauptsächlich durch die verminderte Stellenzahl bei Numeri und Logarithmen/ Mantissen bedingt und natürlich auch gewollt ist.

Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass die wissenschaftlichen Tafeln in der Regel selten andere nicht-logarithmische Tafel- oder Tabellenwerke enthalten.

Der Umgang mit Formeln wird in den Tafeln sehr unterschiedlich gehandhabt. Während sie in den wissenschaftlichen Tafeln und in manchen schulischen integriert sind, gibt es bei schulischen Tafeln die Formeln in Form von Formelsammlungen, manchmal auch als Beilage.

Je nach Zielgruppe enthalten manche Tafeln ganz spezifische Inhalte.

Insgesamt werden die Inhalte der Tafeln und deren Entwicklung noch gesondert angesprochen.

Vierstellige Logarithmentafeln

Die älteste bekannte vierstellige Logarithmentafel stammt von Wolfgang von Jocher (? - ?), einem ehemaligen pfalzbaierischen Ingenieuroberlieutenant, "Neuer Vollständiger Auszug der Gemeinen Logarithmen in III Tafeln für die ebene Trigonometrie mit oder ohne Instrumente" aus dem Jahre 1795 im Eigenverlag……..
…….. Die Logarithmentafeln von Albert Schülke (? -?) erfreuten sich einer großen Verbreitung. Ihre Besonderheit lag in einem Fingerregister, über das alle Seiten identifziert werden konnten und leichten und direkten Zugriff auf diese Seiten ermöglichte. Die 59. Auflage von "Schülkes Tafeln" von 2000 ist immer noch im Handel erhältlich. (Weltbild; Euro 14,95)
Bis auf den Geodäten F.G. Gauss handelte es sich bei all den besprochenen Autoren um Lehrer, die aus der Praxis für die Praxis agierten.
Allein für den deutschsprachigen Raum sind im Logarithmentafel-Katalog weitere 47 Autoren(gruppen) vierstelliger Logarithmentafeln angeführt. Jeder Autor, jede Tafel hat ihre Eigenart, ihren spezifisch ausgerichteten Inhalt und ihre Vorlieben, die sich auch regional auswirken. Unser Wissen über die Persönlichkiet dieser Autoren ist sehr begrenzt und auch nur schwer nachzuholen.

Weitere Autoren 4stelliger Logarithmentafeln

Erschienen im Jahre ..	Autor, Nachname	Erschienen im Jahre ..	Autor, Nachname
1959-1966	Beyrodt, Gustav; Küstner, Herbert	1926-1958	Lötzbeyer, Philipp
1874-1907	Bremiker, Carl	1941+1943	Ludwig, Emil; Reuschel, Arnulf
1930+1951	Brunn, J.	1925	Martens, H.
1948	Dümmlers Tafeln	1911	Morawetz, Johann
1937	Fischer, P.B.	1906	Müller, Heinrich
1942	Friedrich, Wilhelm	1961	Oehl, Evers, Kastrop
1942	Gey, Karl	1866	Oppolzer, Theodor
1946	Giese, Gustav	1902-1933	Rohrbach, C.
1901	Greve, Emil	1943-1949	Rühlmann, M., Schmiedel, H.
1939-1941	Greve, Walther	1960	Schaefer, Werner
1947	Günther, U. (Herausgeber)	1910-1926	Schultz, E.
?	Hanxleden; Hentze; Baldermann	1939-1965	Schulz, Paul
1940+1963	Hofmann, Heinrich	1926+1938	Semiller Hermann & Adolf
1954+1971	Horn, Alfred	1896	Sickenberger, A.
1795	Jocher, Wolfgang von	1960-1980	Sieber, Helmut
1942-1959	Johnscher, Alfons	1896+1932	Treutlein, P.
1975	Kemnitz, Friedrich; Engelhardt, Rainer	1961+1973	Vogel, Alfred
1896	Kewitsch, Georg	1957-1977	Waage, Eugen
1950	Klett Tafeln	1938	Wolff, Georg
1957	Koch, A.; Putschbach, R.	1966+1969	Wörle, Karl; Mühlbauer, Paul
1948	Koch, Hans Ludwig	1927	Zacharias, Max; Meth, Paul
1955-1967	Koschemann, Otto; Halberstadt, Ernst	1864	Zech, Julius
1940	Kraft, A.	1896+1897	Zimmermann, Ludwig
1972	Laub, Josef; Schärf, Julius		

Fünfstellige Logarithmentafeln

Wie bereits ausgeführt, gab Benjamin Ursus 1618 die erste 5stellige Logarithmentafel mit Napierschen Logarithmen auf deutschem Boden heraus. 200 Jahre dauerte es, bis die 5stelligen Tafeln durch Heinrich Gottlieb Köhler[12] ab 1829 populärer wurden. Seither gab es weitere 45 Autoren(gruppen) im deutschsprachigen Raum, die 5stellige Tafeln veröffentlichten.

Autoren 5stelliger Logarithmentafeln

Erschienen im Jahre..	Autor, Nachname	Erschienen im Jahre..	Autor, Nachname
1864-1911	Adam, V.	1913+1914	Heger, R.
1909-1962	Adler, August	?	Helbing, Wolfgang
1955	Akad. Verein Hütte	1871+1893	Hertzer, H.
1884-1946	Albrecht, Theodor	1897- 1967	Jelinek, Laurenz
1846-1931	August, Ernst Ferdinand	1953+1958	Koitzsch, R.
1882-1928	Becker, Ernst Emil Hugo	?1942	Körner, Karl F.
1948	Bertele, L.	1967	Kusch, Lothar
1869-1932	Bremiker, Carl	1950-1976	Küstner, Herbert
1851	Breusing, A.	1868	Lehmann, O.
1948	Deckert, Adalbert	1872-1900	Ligowski, W.
1909	Domke, F.	1953-1974	Müller, Fritz
1930	Erlang, K.A.	1810-1837	Prasse, Moritz von
1850	Filipowski, H.E.	1884+1904	Rex, Friedrich
1935+1944	Fulst, Otto	1959+1962	Rottmann, Karl
1812	Gauss, Carl Friedrich	1959-1980	Schaefer, Werner
1870-1975	Gauss, Friedrich Gustav	1866-1982	Schlömilch, Oskar
1866-1912	Gernerth, August	1818-1823	Schmidt, G.G.
1911	Girndt, M.; Liebmann, A.	1892	Schnellinger, Josef
1915+1934	Glasenapp, S.P.	1897-1945	Schubert, Hermann
1886	Gravelius, Heinrich	1921-1967	Schulz, Paul
1884-1948	Greve, Adolf	1858	Tuxen, G.E. & J.C.
1863	Gronau, J.F.W.	1939- 1972	Voellmy, Erwin
1896-1917	Hartenstein, H.	1859-1935	Wittstein, Theodor

+ bedeutet: nur diese beiden sind bekannt; - bedeutet: in diesem Zeitraum erschienen mehr als 2 Tafeln

Als die verbreitetsten Tafeln werden die von Friedrich Gustav Gauss und Oskar Schlömilch eingehender besprochen…………….
Interessante Ausführungen zu den Inhalten der Tafeln erscheinen in den Vorworten der Tafeln, allerdings meist nur in den ersten Ausgaben. Später wird auf derartige Erklärungen gerne verzichtet, weil die Tafeln ihren Weg bereits "gemacht" hatten. An Hand einiger Zitate sollen die Gedanken der Autoren zum Enstehen der Inhalte ihrer Tafeln beipielhaft aufgezeigt werden.

---

[12] 1847 - 1898 gab H.G. Köhler ein "Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, welches die gemeinen oder Briggischen Logarithmen für alle Zahlen bis 108000 auf 7 Decimalstellen, die Gaussischen Logarithmen, die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen...enthält" bei Tauchnitz, Leipzig heraus

Näheres zur Wahl der Stellenzahl in den Tafeln

Warum sich die Logarithmentafelautoren für die in der Schule genutzten Tafeln auf weniger als die bis dahin üblichen 6 oder 7stelligen Logarithmen konzentriert hatten, klingt deutlich aus den Anmerkungen von Theodor Wittstein, Professor an der Königlichen Generalstabs-Academie Hannover (? - ?)[13], die er anlässlich der ersten Auflage 1859 schrieb,

"Diese Tafeln sind zunächst für den Gebrauch beim Unterricht bestimmt. Sie beschränken sich durchgängig auf f ü n f D e c i m a l s t e l l e n, und weichen darin allerdings von der bis dahin allgemein üblichen Praxis ab. Denn durch eine sonderbare Fügung des Zufalls hat man, wo Logarithmen gelehrt werden, es für nothwendig gehalten, die Schüler auch immer sogleich in die volle Ausführlichkeit siebenstelliger Zahlen einzuführen. Aber man darf die Sache nur einmal unbefangen ansehen, um zu erkennen, einen wie überflüssigen und beschwerlichen Ballast man beim Gebrauche siebenstelliger Tafeln für den Unterricht mit sich führt. Solche Tafeln mit ihrem nicht zu vermeidenden grossen Umfange stellen sich dem Anfänger wie schwer übersehbare Zahlenmassen dar, welche ihn eher verwirren und abschrecken als zum Gebrauche reizen; sie geben eine Genauigkeit in den Rechnungs-Resultaten, welche fast immer überflüssig ist, fordern eine unnöthige Verwendung von Zeit, und laden damit dem Schüler Arbeiten auf, welche ihn in seinem geistigen Fortschreiten in keinerlei Weise fördern...."

Weiter bezieht sich Wittstein auf Johann Traugott Müller, der sich bereits 1844 in gleicher Weise geäussert hatte.

Im gleichen Tenor wie wir ihn schon kennen, klingen die Aussagen von August Gernerth (Professor am akademischen Gymnasium in Wien, ? - ?)[14] in seiner Vorrede zur 1. Auflage von 1866:

"... Die von mir bearbeiteten Tafeln sind in ihrem wesentlichen Inhalte nach fünfstellige Tafeln. Dass ich mich in dem Haupttheile der Tafeln mit fünf Dezimalstellen begnüge, dürfte gebilligt werden, da eine größere Genauigkeit als fünf Decimalstellen gewähren, in den meisten Fällen weder erricht noch verlangt wird...
Der Zweck der Bearbeitung dieser Tafeln ist demnach, innerhalb der gezogenen Grenzen mit dem Minimum an Zeit das Maximum der Genauigkeit zu erlangen, und ich hoffe, durch Erfüllung dieses Zweckes der Schule und der Praxis eine wesentliche Erleichterung des Arbeitens zu verschaffen, und zwar umso mehr als keine der bis jetzt vorhandenen fünfstelligen Tafeln vermöge Einrichtung und Umfang diesen Zweck erreichen kann.... ."

Wahrscheinlich waren ihm die Tafeln von Wittstein, die fast gleichzeitig erschienen, noch nicht bekannt. Wichtiger ist jedoch sein Hinweis auf den "Gebrauch in Schule

[13] Wittstein, Theodor; Fünfstellige Logarithmisch-Trigonometrische Tafeln, 2. Auflage, Hahn´sche Hofbuchhandlung Hannover 1865

[14] Gernerth, August; Fünfstellige Gemeine Logarithmen der Zahlen und der Winkelfunktionen von 10 zu 10 Sekunden nebst den Proportionaltheilen Ihrer Differenzen, 2. Auflage 6. Abdruck, Friedrich Beck Wien 1893 (Henderson #168, 1. Auflage von 1866)

und Praxis", der in dieser Zeit immer manifester wurde und auch als Untertitel bei den 5stelligen Tafeln von F.G. Gauss erscheint.

Übrigens handelt es sich bei den 143seitigen Tafeln von Gernerth, die schon ab 1877 von Prof. Johann Spielmann (? - ?) herausgegeben wurden, um sehr ansprechende Ausgaben im Hochformat 8° mit einem einzigartig gut lesbaren Tabellenbild. Inhalte wie z.B. "Potenzen der Grundzahl 10 mit 15 Decimalstellen zur Berechnung der gemeinen Logarithmen der Zahlen" (15decimal Radixtabelle) gaben dem Anwender die Möglichkeit, höher als 5stellige Mantissen zu ermitteln. Auch die Erläuterungen sind umfassend und klar aufgebaut, so dass die Anwender lernen konnten, diese Tafeln ausgiebig und vielfältig zu nutzen. Wie Gernerth in seinem Vorworte auch schrieb, lag ihm besonders die Genauigkeit der Tafelwerte am Herzen. Daher hat er sehr intensiv Korrektur gelesen und die Werte mit denen bestehender Tafeln verglichen (Vega 1794, Hantschl 1833, Shortrede 1849, Schrön 1860) bevor die Werte stereotypisiert wurden. Wie lange die Gernerth´schen Tafeln auf dem Markt waren, ist uns nicht bekannt. Die letzte uns bekannte stammt aus dem Jahre 1912, 2. Auflage 11. Abdruck.

……………………………………………………………………………..

In dieser und weiteren Ausgaben wird für den Autor "Bearbeitet von" angegeben, was darauf schliessen lässt, dass die Logarithmen NICHT neu berechnet wurden, sondern von existierenden mehrstelligen Tafeln übernommen wurden. So bezieht sich Gauss auf die Tafeln von Bremiker und Schrön. Schlömilch geht nur auf die Tafeln von Schrön, die zur damaligen Zeit als die genauesten galten, und deren Aufbau ein. Schrön´s Logarithmentafeln sind bei Vieweg (wie auch die von Schlömilch) erschienen, Bremikers Tafeln in der Weidmannschen Buchhandlung.

Die Stellenzahl der Tafeln für den schulischen Gebrauch war also keine Glaubensfrage mehr, sondern eine klare pädagogische Entscheidung, z.T. gesetzlich geregelt, geworden.

Seit dem ersten Erscheinen haben sich im Laufe der Jahre die Anteile der Logarithmen in den Tafeln verringert - von fast 100% auf unter 50%, weswegen der Name Logarithmentafel in z.B. "Schülkes Tafeln" oder "Tafelwerk" geändert wurde.

Anmerkungen aus der deutschen Schul- und Industriegeschichte

Es passt, an dieser Stelle den gesamten Aufsatz, den Prof. E. Hammer 1909 in der Zeitschrift für Vermessungswesen "Zur 100. Auflage der F.G. Gauss´schen 5-stelligen logarithmischen Tafel" veröffentlichte, komplett einzuschieben, da er den "mathematisch logarithmischen Teil" der damaligen schulischen Situation beschreibt. Hier ein Auszug:

".....Man muss auch heute noch anerkennen, was der Verfasser unseres Buchs im Nachwort zur 1. Auflage sagte (1870), "dass 5-stellige Logarithmen für die Bedürfnisse des praktischen Lebens und der Wissenschaft in den meisten Fällen genügen" und dass sie deshalb auch für Schulen ausreichend sein werden, "wie dies von erfahrenen und einsichtsvollen Schulmännern bereits vielfach ausgesprochen worden ist." Auch der Schule wollte F.G.Gauss mit seiner neuen 5-stelligen Logarithmentafel dienen. Die Schule verhielt sich aber damals in Beziehung auf die Schullogarithmentafel wie in andern Dingen meist recht konservativ; es wäre ihr in unsern Tagen etwas von der damaligen Stetigkeit zu wünschen! Z.B. ist vom Preussischen Kultministerium erst 1880 die Beseitigung der 7- und 6-stelligen Logarithmentafel aus den höhern Schulen eingeleitet worden;...... Die Mittelschule dagegen soll und muss sich für eine bestimmte, billige Logarithmentafel, als Normaltafel gleichsam, entscheiden; diese sollte nach der Ansicht von F.G. Gauss und auch der meinigen (die sich auf über 35-jährige trigonometrische Lehr-und Rechenpraxis und auf 25-jährige trigonometrische Examenspraxis gründet) die fünfstellige Tafel sein, neben der ganz wohl eine vierstellige gebraucht werden kann, deren Preis ja sehr gering ist; es ist dabei auch nicht zu vergessen, dass man mit einer 5-stelligen Tafel auch sehr bequem 4-stellig rechnet. Und neben der 5-stelligen oder neben der 5- und 4-stelligen Tafel sollte unbedingt auch schon in der Schule ein billiger Rechenschieber verwendet werden......."

.....................................Über den Anteil mathematischen Unterrichts in der Zeit von 1816 bis 1938 in den verschiedenen Schultypen haben Hans-Georg Herrlitz et al. auf Seite 66 Tab. 2 berichtet[15]. Leider sind die Zuordnungen der Wert nicht immer eindeutig nachvollziehbar, so dass die abgebildete Tabelle evtl. falsch nachempfunden ist.

Prozentualer Anteil der Fächer an den Stundenplänen der höheren Knabenschulen in Preussen (1816 - 1938)

	Gymnasium						Realgymnasium				Oberrealschule		DOS		OJS	OJN
	1816	1837	1856	1882	1901	1924	1859	1882	1901	1924	1882	1901	1924	1924	1938	1938
Religion	6,3	6,4	7,5	7,1	7,4	7,1	7	6,8	7,3	7,1	6,9	7,3	7,1	7,1	4,4	4,4
Latein	23,9	30,7	32,1	28,8	26,3	21	15,5	19,3	18,7	16,2	-	-	-	-	8,8	6,6
Griechisch	15,7	15	15,7	14,9	13,9	14,2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Deutsch	13,9	9,3	7,5	7,8	10	12,3	10,2	9,7	10,7	12,3	10,9	13	14,6	17,4	12,1	12,1
Französisch/Erste Fremdsprache	-	4,3	6,4	7,8	7,7	5,9	11,9	12,1	11,1	10,7	20,3	17,9	15,8	18,2	16,5	11
Französisch/Zweite Fremdsprache	-	-	-	-	-	-	-	-	-	(9,5)	-	-	-	(17)	-	-
Englisch/ Zweite Fremdsprache	-	-	-	-	-	-	7	7,2	6,9	7,9	9,4	9,6	8,7	5,1	-	-
Englisch/Erste Fremdsprache	9,4	8,6	9,3	10,5	10	12,3	10,5	10,7	10,7	(9,1)	10,9	12,2	14,2	(6,3)	13,9	13,9
Geschichte u. Geographie/Erdk.	18,9	11,8	11,9	12,7	13,1	13	16,5	15,7	16	13	17,7	17,9	17	17	8,8	12,1
Mathematik	6,3	5,7	5,2	6,7	7	7,1	11,9	10,7	11	14,2	13	13,7	13,9	14,6	9,9	14,3
Naturwissenschaften	3,1	2,1	2,2	2,2	3,1	5,5	7	6,4	6,1	9,9	8,7	6,1	7,1	11,9	5,8	5,8
Zeichnen/Kunsterziehung	2,5	2,5	2,2	1,5	1,5		2,5	1,4	1,5	7,1	2,2	2,3	-	7,1	-	-
Schreiben/Schönschreiben	-	3,6	-	-	-	1,6	-	-	-	1,6	-	-	1,6	1,6	-	-
Singen/Musik	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5,1	5,1
Tumen/Leibeserziehung	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	14,7	14,7
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100??	100	100
Summe der Wochenstunden in 9 (1816: 10, 1938: 8) Schuljahren	**318**	**280**	**268**	**268**	**259**	**253**	**285**	**280**	**262**	**253**	**276**	**262**	**253**	**253**	**273**	**273**

Abkürzungen: DOS = Deutsche Oberschule; OJS = Oberschule für Jungen Sprachlicher Zweig; OJN = Oberschule für Jungen Naturwiss.-Math. Zweig.

Anmerkungen: Gymnasium 1837: Deutsch einschl. 4 Std. Philosoph. Propädeutik; Realgymnasium 1924: Die in Klammern gesetzten Werte gelten dann, wenn die erste neuere Fremdsprache Englisch ist; DOS: Die in Klammem gesetzten Werte gelten dann, wenn die zweite Fremdsprache Latein oder Französisch ist; OJS: Erste neuere Fremdsprache = Englisch. Einschl. obligatorischer Arbeitsgemeinschaften in einer lebenden Fremdsprache; OJN: Erste Fremdsprache = Englisch. Einschl. obligatorischer Arbeitsgemeinschaften in Naturwissenschaften und Mathematik.

Während der Anteil des Mathematikunterrichtes in den Gymnasien zwischen 5 und 7% lag, hatten die Schüler der anderen Schultypen mit geringerem altsprachlichem Anteil einen wesentlich höheren Wochenstundenanteil in Mathematik, der absolut gesehen bei ca 3 - 5 Wochenstunden lag. Es ist also davon auszugehen, dass die Mathematik in Realgymnasien, Oberrealschulen und Oberschulen intensiver gelehrt wurde und damit die Chancen für die Logarithmenunterrichtung besser standen als in den altsprachlich orientierten Gymnasien mit ca. 2 Wochenstunden Mathematik.
Die Einführung der mehr naturwissenschaftlich orientierten Schultypen resultierte aus den Bedürfnissen der Industrie nach technisch ausgebildeten Arbeitskräften. Herrlitz

[15] Herrlitz, Hans-Georg; Hopf, Wulf; Titze Hartmut; Cloer, Ernst: Deutsche Schulgeschichte von 1800 bis zur Gegenwart; Juventa Verlag Weinheim und München 2005

et al. führen dazu aus[16]: ..." Die heterogene, teils humanistische, teils realistische Vorbildung der Studienanfänger, besonders aber die Defizite der Gymnasial-abiturienten in den Naturwissenschaften und der Mathematik, wirkten sich nachteilig auf die fachwissenschaftliche Ausbildung an der Technischen Hochschule aus...."

Den folgenden Ausführungen dienten als Grundlage die beiden Bände von F.-W. Henning[17] sowie Angaben des statistischen Bundesamtes.

" [18]Der Aufbruch der Industrialisierung, die Übergangsphase von der vorindustriellen Zeit zur vollen Ingangsetzung des Industriealisierungsprozesses, zog sich über mehrere Jahrzehnte hin. Dabei ergaben sich in den einzelnen Ländern erhebliche zeitliche Unterschiede:

Land	**Periode**		**Ergänzt: Logarithmentafelautoren**
England	1750 - 1790		Sherwin, Gardiner, Hutton, Taylor
Frankreich	1780 - 1820		Rivard, Lalande, Callet
Belgien	1790 - 1820		Vlacq
Deutschland	1795 - 1835		Schulze, Vega, von Prasse; "Österreicher"[19]
USA	1800 - 1840		Loomis
Russland	1850 - 1880		
Japan	1860 - 1880		

Treibende Kräfte für die Industrialisierung in Deutschland und teilweise auch in anderen Ländern sind gewesen:

1. Die eine Weiterentwicklung *beengenden Produktionsverhältnisse* im gewerblichen (Handwerk, Verlag) und landwirtschaftlichen (feudale Abhängigkeiten) Sektor
2. Das sich verstärkende Wachstum der *Bevölkerungszahl* konnte wirtschaftlich (Ernährung und Einkommen) nur durch eine Änderung der Produktionsverhältnisse abgesichert werden.

Beide Komponeneten waren zwar in der tatsächlichen Entwicklung durch starke Wechselbeziehungen miteinander verbunden........"

[20]Von 1835 bis 1873 folgt eine erste Indutrialisierungsphase, gekennzeichnet durch den vermehrten Einsatz mechanischer Antriebe (Dampfmaschine, Spindelmaschine und Maschinenwebstuhl) und neuer technischer Verfahren (Hochofen, Walzwerke).

---

[16] ibid Seite 67
[17] Henning, Friedrich-Wilhelm; Band I: Die Industrialisierung in Deutschland 1800 - 1914; Band II: Das industrialisierte Deutschland 1914 - 1972; Verlag Ferdinand Schöningh, Paderborn 1973
[18] ibid Seite 35
[19] Faustmann, Gerlinde; Österreichische Mathematiker um 1800 unter besonderer Berücksichtigung ihrer logarithmischen Werke; TU Wien Dissertation 1992
[20] ibid Seite 112 ff

Im sozialen Bereich dehnte sich in dieser Zeit die vermögenslose und daher lohnabhängige Arbeiterschaft so stark aus, dass man im Zusammenhang mit der Beseitigung der feudalen Abhängigkeiten auf dem Lande (Bauernbefreiung) von der Schaffung einer neuen Gesellschaft sprechen kann.

[21]Die *technische Entwicklung* beruhte aber *nicht nur* auf den *Erfindungen* und technischen Neuerungen. *Vielmehr* wurde sie *auch* von einer großen Zahl technisch interessierter Leute beeinflusst, die z.T. aus den neu errichteten *technischen Schulen* kamen:

<table>
<tr><td>Jahr</td><td>Schulort</td><td></td><td rowspan="2">Ortsnaher Verlag für Logarithmentafeln</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1820</td><td>Berliner Gewerbeinstitut</td><td rowspan="10">Die meisten dieser Schulen begannen als Polytechniken und wurden bis zum Ende des 19. Jahrhunderts Technische Hochschulen.</td><td>Nicolai, Rauh</td></tr>
<tr><td>1825</td><td>Karlsruhe</td><td></td></tr>
<tr><td>1826</td><td>Darmstadt</td><td>Bergsträsser 1866</td></tr>
<tr><td>1827</td><td>München</td><td>Wolf 1851</td></tr>
<tr><td>1828</td><td>Dresden</td><td>Strien Halle,
Teubner Leipzig</td></tr>
<tr><td>1829</td><td>Stuttgart</td><td>Wittwer</td></tr>
<tr><td>1831</td><td>Hannover</td><td>Hahn</td></tr>
<tr><td>1862</td><td>Braunschweig</td><td>Vieweg</td></tr>
<tr><td>1870</td><td>Aachen</td><td></td></tr>
<tr><td>1904</td><td>Danzig</td><td>Autor: Gronau 1863</td></tr>
<tr><td colspan="4">Daneben wurden auch schon einfache Fachschulen, die man heute als Berufsschulen bezeichnen würde, für 15- bis 17jährige eingerichtet (Besuch 2 bis 6 Stunden je Woche; nur für männliche Schüler). Z.B. württembergisches Gesetz von 1836: Unterricht über Gegenstände, "die für das bürgerliche Leben vorzugsweise von Nutzen sind".</td></tr>
<tr><td colspan="4">Spezialschulen:
Baugewerkschulen, Textilschulen, Uhrmacher- und Strohflechteschulen</td></tr>
</table>

In diese Perioden fielen interessanterweise einige wichtige Neuausgaben von mehrstelligen (meist 7stelligen - wissenschaftlichen) Logarithmentafeln.

………………………………………………….

[21] ibid Seite 120

Zusammenfassung

Das 19. Jahrhundert war in Europa geprägt von einem starken Bevölkerungswachstum und der fortschreitenden Industrialisierung. Gegen "die sozialpolitischen Interessenslagen der traditionsbefangenen Elite" [22] nahm das (Aus)Bildungsangebot für breitere Bevölkerungsschichten erheblich zu.
In dieser Zeit haben sowohl die Logarithmentafeln von Ernst Ferdinand August (1846), Oskar Schlömilch (1866) und Friedrich Gustav Gauss (1870) als auch die von Albert Schülke ihren Weg **in** die Schule gefunden und jene über 100 Jahre hinweg zu erfolgreichen Best- und Longsellern gemacht. Gerade, weil in manchen Biographien der Tafelmacher [23] die Logtafeln nicht oder nur ein kleiner Teil angeführt werden, soll dieser Artikel den immensen Aufwand, der für die Autoren und Herausgeber mit dem Erstellen und Aktualisieren der Tafeln verbunden war, ins Bewußtsein rücken.
Der Weg **aus** der Schule wurde durch die Einführung der Taschenrechner im Schulbetrieb eingeleitet und führte zu einem abrupten Ende der Logarithmentafel-Nutzung zum Ende der 1970er Jahre. Wie wir wissen, haben das gleiche Schicksal die Rechenmaschine und der Rechenschieber erlebt. Zwar konnten sich mathematische Tafeln, die hauptsächlich mit naturwissenschaftlichen Konstanten und Formeln bestückt waren, länger halten, aber Logarithmen waren in diesen Tafelwerken völlig in den Hintergrund getreten.

Was bei den Logarithmen verbittert, ist, dass sie vollkomen als Unterrichtsstoff wegfallen sollen (z.B. NRW[24]) und damit den Schülern die Gelegenheit genommen wird, die Hintergründe vieler auf logarithmischer Basis ablaufender (natürlicher) Prozesse besser zu verstehen.

Aber vielleicht geht es damit doch nicht so schnell. Im aktuell gültigen Bildungsplan 2004 des Landes Baden-Württemberg steht zur Leitidee "Zahl" für die 10. Jahrgangsstufe als Inhalt "Logarithmus" ! Ebenfalls enthält der derzeit noch gültige Lehrplan von Thüringen von 1999 für die Klassenstufe 10 die Aussage "Sie lernen mit Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen weitere Funktionen kennen….". Erfreulicherweise sieht auch der aktuelle Lehrplan des Jahres 2010[25] für bayerische Gymnasien für die Jahrgangsstufe 10 wieder[26] "Das Rechnen mit Logarithmen" vor, ebenso der aktuelle österreichische Lehrplan[27].

Mögen die Logarithmen auch mancherorts trotz aller Kürzungen in der Schule im Jahre 2014 ihren 400. Geburtstag feiern können. "Log In" sollte auch dann erst richtig "In" sein.

Dr. Klaus Kühn[28]
kk@iasim.de

---

[22] Herrlitz et al. Seite 80/81
[23] rühmliche Ausnahme: Ch. Binder über Josef Schnellinger in www.austriaca.at
[24] Holland, Peter; pers. Kommunikation
[25] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=27113
[26] Röttel, Karl; pers. Kommunikation "Logarithmen waren schon mal raus"
[27] www.schule.at
[28] ist für Hinweise auf Fehler und Ergänzungen - besonders von Logarithmentafeln - dankbar

Professionally oriented education

Nada Razpet
University of Primorska, Faculty of Education Koper, Koper
University of Ljubljana, Faculty of Education

Abstract: There have been many school reforms, not only in our country, but all over the world. Two of them, in 1958 and in 1981, had a great influence on the mathematical programme and on textbook writing. We want to talk about France Križanič, his textbooks for mathematics for gymnasium and later for the "SVIO" programme (common educational training base programme).

1 Mathematical textbooks in gymnasium

Until 1958, gymnasium was divide in lower (4 grades) and upper (4 grades) gymnasium. The school reform of 1958 introduced eight-years compulsory education and lower gymnasium became a part of the primary school.
In 1963, the fist edition of a new mathematical textbook for the first grade of gymnasium "Aritmetika, algebra in analiza" (Arithmetic, Algebra and Analysis) by France Križanič was published. Textbooks for the second and third grade were published in 1964 and 1965. For the fourth class, a textbook "Mathematics" by Alojzij Vadnal was used. Križanič's fourth volume of his collection of textbooks was published in 1969. For geometry, a two-volume textbook "Geometry I and II", written by Ivan Pucelj and Ivan Štalec were used.
What was new in the new curricula? First, the number of textbooks was reduced from 8 to 6. Geometry was taught only in the first and second grade, trigonometry and analytical (coordinate) geometry were included into analysis. The main emphasis of the elementary mathematics was put on the concept "real function".
If we look at the contents of the new textbooks, we find:

Arithmetic, Algebra and Analysis I (for the first grade), published in 1963: the textbook introduces the algebraic structure of ring, natural numbers and integers, divisibility of numbers, rational numbers, linear function, graph of the linear function, linear equation, line, half plane, systems of linear equations, linear programming.

Arithmetic, Algebra and Analysis II (for the second grade), published in 1964: the textbook includes powers and roots, exponential and logarithmic functions, complex numbers, quadratic function, quadratic equation, derivatives of function, tangents and velocity, polynomials and rational functions. **Remark**: On the first page, Križanič wrote: "Do not be afraid and do not hate".

Arithmetic, Algebra and Analysis III (for the second grade), published in 1965: algebraic equation of higher degree, vectors in plane, trigonometric functions, algebraic functions of two variables, simultaneous equations, transformations in a plane and curves of the second order, algebra of sets, and combinations and probability.

Arithmetic, Algebra and Analysis IV (for the second grade), published in 1969: Algebraic structures, topology of the real line, limits, discrete analysis - series, sequences, further differential calculus, integral calculus, simple differential equations.

We see what the contents of the textbooks was in that time. However, not all the topics appearing in the textbooks were necessarily taught in all gymnasia. Nobody pushed teachers to teach all the topics. In some schools, teachers didn't use textbooks, but simply taught students through examples. The most popular methods of this kind were those of professor Ivan Štalec, as his students were very successful in national mathematical competitions.
In geometry, the classical Euclidean geometry with axioms and theorems was taught. Students had to know all axioms and theorems.

2 Professionally oriented education

The beginning of the eighties of the 20nth century was a time of the "workers' self-management" in Yugoslavia, whit "TOZD"s (basic organization of associated labor) and "SOZD"s (composite organization of associated labor). In 1981, the so-called professional "oriented education" was introduced. The basic goal of this reform was to make all kinds of education to lead directly to some profession. As a consequence, the gymnasia was abolished. All the humanities and science oriented secondary schools (with 4 years programmes), professional schools (3 years programmes) and technical education (4 years secondary schools) had the same basic training; this means that they all had the same standard, so-called "SVIO" programme, i.e. the same common educational training base. There were two sides of the new education, however, a good and bad one. The good side was that new textbooks were written, schools obtained new laboratories and new equipment for experiments, and many seminars for teachers were organized. In this respect, one would expect that the reform should bring good results. On the other hand, however, all students had to use the same textbooks for the basic subjects like mathematics, physics and other sciences, and we know that not all the students have the same capabilities and affinity for these subjects. Because there was only one basic educational standard for all schools, there were less hours in the programme for the practical work. The main goal of the reform - to make it possible for everybody to find a job after having finished the secondary school, or to go to the university level, were not achieved. Therefore, in the middle of the eighties, several changes had to be made.
We want to talk how the textbook writer Professor France Križanič reacted to these reforms and, of course, to the political situation of that time that pushed into their implementation.

3 New mathematical textbooks by Križanič

We now come to the most critical and most controversial textbooks written by Križanič. Four books were published in following years: the "first reading" (as Križanič called it) in 1980, the second in 1981, the third in 1983, and the fourth in 1985.
After the "First reading" was published, many reviews, critical evaluations and articles, most of them negative, appeared in newspapers and specialized magazines. There were many reasons for negative reactions: firstly, most teacher do not like changes, secondly, the textbooks were intended for the use of all students, but the topics treated there were often too difficult for most of them, third, teachers were not prepared for the methods used in the books. I was myself a secondary school mathematics teacher that time. May be, I was a lucky one because I was teaching in a "middle science school" where students were among the best. Most of them did not

have problems with mathematics in elementary school, so that they has good basic knowledge. And the most important thing: on our school, the wife of the author of the textbooks was also teaching. We had weekly meetings with her where she explained how to train students, which topics we could jump over or go through faster or, whether or not a topic was important for the next year and it was necessary to explain it to students with more care.

4 Math reading

We want to look deeper into the contents of the Križanič's books. Let us recall the titles of the chapters: I. Introduction, II. Rings, integers, II. Fields, rational and real numbers, IV: Vector spaces, V. Planes, VI. Linear function, VII. Powers and roots, VIII. Quadratic function, IX. Derivative - tangent - velocity, X. Integral- area under a curve - work, XI. Three-dimensional space, XII. Exponential function and logarithm, XIII. Polynomials and rational functions, XIV. Complex numbers, XV. Trigonometric functions, XVI. Mappings in the plain, XVII. Algebraic functions and equations with two variables, XVIII. Mapping between finite sets, XIX. Probability, XX. Real axes. Elementary functions, XXI. Discrete analysis, XXII. Differentiation, XXIII. Integral calculus, XXIV. Simple differential equations.

The distribution of various chapters was not necessarily in the same sequence as they were taught in school. We want first describe some of the differences with regard to pervious textbooks.

There were four textbooks (instead of 6). The geometry was not taught separately. Euclidean geometry was not presented in the classical way. Instead of points and lines, basic elements were points and vectors. There was no need for axioms and theorems, instead properties of dot and vector products of vectors were exploited. The author introduced vector spaces and connected mathematics and physics (example: derivatives of vector functions in circular motion).
He developed the concept of sets (groups, rings, fields, vector spaces). He put more emphasis on mappings from plain to a plain and from space to space. He focused mainly on functions, graphs of functions and mappings of functions (reflection in the x-axis or y-axis or line). He calculated areas using integrals, and so on. He included calculations with matrices and used them to find the equation of ellipse and hyperbola when their axes were not parallel to the coordinate axes etc.
The first and the second textbook could be used separately, because they presented independent topics. Križanič's plan was these two books to be used in the school with three grades. However, they were too difficult for most students.

5 Reactions

We now want to present same reactions of the author of the textbooks to his critics.

I received a letter, in the name of a student's mother, of coures unsigned. All the terror and horror which I produced [by my text books] was unveiled. "Do you really do not know," she wrote, "that for these topics [in the textbook], no instructor can be found for any money." This is certainly an achievement!, to create something that nobody can buy for any money.

…it is too difficult for students. The answer of the author: In the new curricula all students have the same basic programmes, so all pupils have an equal status; I choose to write for those who are better in mathematics. Still, all of them are treated equally.

…there are not enough examples in the textbooks. The author's answer: For whom there are not enough examples? Once upon a time, parents and teachers believed that we learn mathematics by practice. After we solved one thousand examples for problems of some kind, we should have been able to remember it and to solve the one thousand and first problem. But today we are supposed to understand a problem, to know how to connect the main concepts, …and not to say: It's because the teacher told so.

…solutions of examples are not simple. Among the tasks that do not have simple solutions I put some problems with "ugly" solution and a few problems without answers. Let the students know that there is at least something unsolvable and impossible in mathematics.

…the method is not appropriate for students. The author's answer: I offer you a chicken, it is your choice how to prepare the dish.

There were many comments on the text of the examples. It was claimed that the author should include "socialistic principles" and "…approach the readers and encourage them to go further". As a consequence, the author changed the text from the previous editions. Here are some examples:

Talking about vectors and how to represent a vector he wrote: *In this way, my dear reader, we can also represent the radius vector of the point T in the space.*

While we are working with this example, the reader may almost all the time be curious about what the intersection of two plains is if their normal vectors $\vec{m}$ and $\vec{n}$ are parallel. He asks himself, and he must answer by himself.

…here are some examples from the real life. *This chapter must not finish without examples. So, we have prepared some problems for calculation and a shovel. We are going to displace sand and put it on a heap or form a heap from another heap. From one problem to another we will change the shape of the heap. With a shovel we defeat gravity. ….*

This is a useful problem: A is looking at the window, on which B is leaning. B notices A and while turning around, he inadvertently drops down a flowerpot with his elbow. Neglecting air resistance, A notices that it takes 1 second for the flowerpot to fall to the ground. …. A also assumes that the wall, along which the flowerpot is falling, is vertical. So at last, equipped with the flowerpot, a protractor, logarithmic tables, and neglecting the air resistance, he should find the length of the ladder reaching B. A was satisfied while going home, thinking how to carry a vector on his shoulders. Calculate this!

Here, there are two examples of Markov chains. *In a local community people associated their work (Within the Yugoslav workers' self-management theory, workers were said to "associate their work".) as bakers and shoemakers. And they introduced their children into these two trades. The probability that a baker's sons becomes a baker ….*

As a tourist attraction, a castle is haunted. But not every night ….

6 Conclusion

In the school year 1988/89, gymnasia were reintroduced in our school system. There were different types of gymnasia. In some of them, only a few teachers used Križanič's textbooks. As a consequence, the publishing house decided to withdraw them (and all the stocks of the books were actually sent to paper mills).

It was a very hard time for the author. He had his office in the third floor of the Faculty for Natural Sciences and Technology and once he said that he would be glad if he could go in and out of his office without going through the main hall and entrance to avoid meeting his colleagues.

We would like to add some of the Križanič's comments (in free translation) in various newspapers because they show his reaction to critics and his sense of humor.

It is explained in my books how and in which way we can teach mathematics. I must emphasize that, writing the textbooks, I had not in mind specially oriented gymnasia or other mathematically oriented secondary schools. In my textbooks, I offered mathematics that I would like to see in school. This is what I had in mind and this was my wish. I have another whish, though: I do not want the mathematics syllabus to be to strictly prescribed and compulsory.

Križanič thought that teachers should be enough self-confident to choose themselves some topics from the curricula. In his book *Splošno in posebno* ("The general and the particular") he wrote: My teacher was Miho Ribarič. He often said to me: "Križanič, sit down, I am tired of you." What could I do? He was a good teacher; he saw that in the class I was able to understand everything - what a definition or a theorem is, what is to be done. And he complained or made excuses not to be allowed to teach what he wanted. Earlier, he introduced derivatives and integration in the first grade, but later the school authorities forbade it. This shocked me: How is it possible to forbid a professor to tell the students what he wants? In that time I was naive, I did not know that there exist didactics methods which determine what is allowed and what is not.

About the oriented education he wrote: "Education staff is responsible for education. There were reproaches that schools do not qualify students for the needs of the industry. With a finger pointed toward education we cried: Look at you, you do not give us people able to carry out everything that the job requires from the first working day on. So we ordered the education to be immediately better producing the required worker. ... And the education grew better ... "

At teachers' meetings, Križanič often listened and sometimes gave a comment.

Once, teachers were talking about topics which should be included within in order to achieve minimum and maximum required standards. Križanič's comment was: Minimum is zero, maximum is all that a student knows, can do and understands.

"Did you know? Listen to me! Bakers learn integrals!" "I know," said Križanič, "and I also feel guilty about it. But you must understand that: first, bakers are members of the working class, integral calculus is a part of the human culture, so bakers have the right to know it, too, do not you think so?"

What am I doing? Troubles. I exist (ergo sum), and I am teasing Slovenians. This is a "noble" mission, because when Slovenians are upset they love to live.

References

[1] Splošno in posebno, (General and specific), Studia humanitatis, Ljubljana, 2003

[2] Matematika 1, Prvo berilo (First reader), DZS, Ljubljana, 1981

[3] Matematika 2, Drugo berilo, DZS, Ljubljana, 1981

[4] Matematika 3, Tretje berilo, DZS, Ljubljana, 1983

[5] Matematika 4, Četrto berilo, DZS, Ljubljana, 1985

Das Prüfungszeugnis des Dresdner Polytechnikums für einen Mathematiker im Jahre 1885 – und sein Hintergrund

Waltraud Voss (Dresden)

Kürzlich wurde im (privat bewahrten) „Nachlass der Familie Witting“ das Prüfungszeugnis Alexander Wittings aufgefunden, ausgefertigt am 21. März 1885 durch die „Königl. wissenschaftliche Prüfungscommission für Lehramts-Candidaten am Königl. Polytechnikum Dresden“ für Herrn stud. math. Carl Johann Adolph Alexander Witting. (Abb. 1) Es ist ein seltenes Zeugnis der Dresdner Lehrerabteilung aus der Zeit des Polytechnikums und Anlass genug, auf das Studium Wittings vom SS 1881 bis zum WS 1884/85 genauer einzugehen. 1885 war die Staatsprüfung für das höhere Schulamt, die an einer technischen Bildungseinrichtung abgelegt wurde, etwas Besonderes.

1.) Die Lehrerabteilung des Polytechnikums Dresden

Nach viel früheren Anfängen, die in das Gründungsjahr 1828 hineinreichen, sah der neue Organisationsplan der Polytechnischen Schule vom 14. März 1855 explizit auch die wissenschaftliche Ausbildung von Lehrern für Mathematik, Naturwissenschaften und Technik vor. Zu dieser Zeit traten noch 14jährige in die Anstalt ein; die für die Fachstudien notwendige Vorbildung wurde ihnen in der Unteren Abteilung vermittelt. Die Zeit für diese Vorbildung wurde mit zunehmender Entwicklung des Realschulwesens in Sachsen reduziert, während die für die eigentliche akademische Ausbildung zunahm. Nachdem am 2. Juli 1860 das (erste) Regulativ für Sächsische Realschulen erlassen worden war, wurde das Eintrittsalter für die „Zöglinge“ ab Ostern 1862 auf 16 Jahre festgelegt, und die Absolventen einer Realschule wurden ohne Aufnahmeprüfung in die Polytechnische Schule aufgenommen. Für alle „Zöglinge“ begann Ostern der nur noch dreisemestrige vorbereitende „Allgemeine Kurs“, auf dem vier sogenannte Fachschulen oder Abteilungen mit je dreijährigem Unterricht aufsetzten. Die jüngste davon war die 1862 institutionalisierte „Lehrerabteilung“, in der Lehrer der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik ausgebildet wurden. An ihrer Spitze stand der Mathematikordinarius Oskar Schlömilch. Durch seine Bücher und Schriften war er in Mathematikerkreisen renommiert, genoss aber auch großes Ansehen bei Technikern und Ingenieuren. Schon in seinem ersten Dresdner Jahr wurde er von einigen erfolgreich in der Praxis stehenden Mitgliedern des Sächsischen Ingenieur- und Architektenvereins um private Weiterbildung in Mathematik gebeten. Obwohl die Dresdner Lehrerausbildung namhafte Persönlichkeiten hervorbrachte, hatte sie derzeit noch nicht den gleichen offiziellen Rang wie die Leipziger. Zum 1. Oktober 1870 bewegte sich die Polytechnische Schule einen weiteren Schritt hin in Richtung Hochschule. In den Fachabteilungen durften die „Studierenden“ nun die Vorlesungen und Übungen frei wählen. An die Stelle fester Stundenpläne traten „Studienpläne“ als Empfehlung für eine

zweckmäßige Studiengestaltung. Die Studierenden mussten bei Eintritt in die Polytechnische Schule nun mindestens 17 Jahre alt sein und – sofern sie „Inländer“, d. h. Sachsen – waren, das Reifezeugnis eines Gymnasiums oder einer Realschule 1. Ordnung vorweisen, oder aber ein Abgangszeugnis der höheren Gewerbeschule in Chemnitz mit dem Versetzungsvermerk für deren oberste Klasse. Die bisherige Zahl der Vorsemester wurde auf eins reduziert, und in den Fachabteilungen wurde nun 4 Jahre studiert.
1873 übernahm Gustav Zeuner das Direktorenamt, ein renommierter Technikwissenschaftler mit ausgewiesener Affinität auch zur Mathematik und deren Anwendungen. Zeuner führte die Polytechnische Schule über das Polytechnikum – der Name erscheint erstmals 1875 auf dem Deckblatt des „Programms“ – zur Technischen Hochschule. Inhaltlich ging es ihm um den weiteren Ausbau der technischen Disziplinen – 1875 wurde die Hochbauabteilung gegründet –, um deren theoretische Fundierung und, im Zusammenhang damit, um die Stärkung von Mathematik und Physik. Es gelang Zeuner, hervorragende Kräfte, gleich gut als Wissenschaftler und in ihrem pädagogischen Vermögen, an das Polytechnikum zu ziehen. Zum Sommersemester 1875 kam Leo Königsberger von der Universität Heidelberg nach Dresden, 1876 August Toepler von der Universität Graz. In rascher Folge wurden in den 70er Jahren naturwissenschaftliche und kulturwissenschaftliche Lehrstühle der, bereits gut ausgestatteten, „Allgemeinen Abteilung“ neu geschaffen.
Leo Königsberger begründete noch 1875 das Dresdner Mathematische Seminar und gemeinsam mit Gustav Zeuner eine separate „Sektion für reine und angewandte Mathematik“ der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden. Diese Sektion führte Mathematiker und Anwender der Mathematik zu fruchtbarem Gedankenaustausch zusammen und hatte den Charakter einer Dresdner Mathematischen Gesellschaft. Zwar folgte Königsberger bereits nach zwei Jahren einem Ruf an die Universität Wien, doch sah er sich vorher nach einem geeigneten Nachfolger um, den er, beraten von dem Leipziger Mathematikprofessor Adolph Meyer, in dem jungen ambitionierten und als Mathematiker und Hochschullehrer gleich angesehenen Axel Harnack fand.
Die „Prüfungsordnung für Kandidaten des höheren Lehramtes der technischen und mathematisch-physikalischen Richtung“ am Polytechnikum Dresden, erlassen am 24. November 1879, war ein Meilenstein in der Entwicklung der Lehrerabteilung. Sie brachte für die in Dresden ausgebildeten Lehrer endlich dieselben Anstellungsrechte für die sächsischen höheren Schulen wie sie die Lehrer hatten, die aus der Universität Leipzig hervorgingen. In Dresden studierte Semester wurden ohne besonderen Antrag in Leipzig angerechnet, so dass der Wechsel an die Landesuniversität für künftige Lehrer der Mathematik und Physik problemlos und ohne Zeitverzug möglich war. Das Studium endete mit der Staatsprüfung, die am Polytechnikum durch eine dort eigens installierte Prüfungskommission abgenommen wurde. Außer einem kgl. Kommissar gehörten ihr nur Professoren des Dresdner Polytechnikums an.

Abb. 1: Erste und letzte Seite des fünfseitigen Originalprüfungszeugnisses für Alexander Witting vom 21. März 1885

2.) Zu Alexander Wittings Studium in Dresden

Am Polytechnikum gab es zu Wittings Studienzeit vier ordentliche mathematische Professoren: Axel Harnack, Aurel Voss, Louis Burmester und Arwed Fuhrmann (Tab. 1). Als Alexander Witting im SS 1881 in das Polytechnikum eintrat, studierten immerhin 35 junge Männer in der Lehrerabteilung. Während die Studenten der technischen Richtungen ihre Studienplan-Empfehlung im „Programm“ des Studienjahres vorfanden, war das für die Lehrerstudenten nicht mehr der Fall. Entsprechend ihrer Vorbildung und ihrem Studienziel wurde ihr Studienplan nach persönlicher Vorsprache beim Abteilungsvorstand von der „Professorenkonferenz“ „maßgeschneidert“ und ihnen dann erst ausgehändigt. Wir kennen diesen Studienplan von Witting nicht, wissen aber aus den „Programmen“, welche Vorlesungen in der Zeit von SS 1881 bis WS 1884/85 wirklich gehalten wurden. Wir können voraussetzen, dass Witting zielstrebig studiert hat und von Anfang an gute Leistungen zeigte, sonst hätte er nämlich weder das Studium in Regelstudienzeit geschafft noch durchgehend Stipendien erhalten. In einem Lebenslauf, verfasst unmittelbar nach Abschluss des Studiums, nennt Witting die Namen der Professoren und Dozenten, bei denen er hörte und übte, und die Anzahl seiner Praktikumssemester in Physik (5 Semester) und Chemie (1 Semester). (Tab. 2)
Die meiste Studienzeit nahmen bei ihm selbstverständlich Mathematik und Physik, dazu Geographie, in Anspruch. Alle anderen Vorlesungen belegte er mit klarer Schwerpunktsetzung: Bei Professor Schmitt gewann er einen Einblick in die anorganische Chemie; in der Biologie beschränkte er sich auf die von Professor Vetter gelesene Zoologie; eine Einsicht in Bau und Wirkungsweise mechanischer Maschinen, einschließlich der Dampfmaschinen, gewann er in der Vorlesung von Professor Zeuner. Von den kulturwissenschaftlichen Lehrveranstaltungen, die in Dresden in einem breiten Spektrum angeboten wurden, belegte er im wesentlichen das, was die Prüfungsordnung notwendig forderte: Philosophie und Pädagogik – beides bei Professor Schultze.
Aus der Auflistung der Vorlesungen, die Wittings Dresdner akademische Lehrer während seiner Studienzeit gehalten haben (siehe (Tab. 3) (Tab. 4)), lässt sich ein hypothetischer Studienplan ableiten (Tab. 5).

3.) Ein Blick in das Zeugnis

Witting hatte zur Prüfung schriftliche (Haus-) Arbeiten in Mathematik, Physik und Pädagogik angefertigt. Im Zeugnis erscheinen jeweils Thema, Kurzbeurteilung und Zensur:
<u>Aufgabe aus der Mathematik</u>: Verhalten der parabolischen Curven und der Haupttangentencurven einer Fläche in ihren einfachen Osculationspunkten.
Das Thema bot Gelegenheit zu selbständiger Erarbeitung eines bisher weniger behandelten Stoffes. Die Arbeit ist gut disponirt, die verschiedenen Fälle sind in

richtiger, systematischer Unterordnung entwickelt und auch die wesentlichen Eigenschaften der Haupttangentencurven sind richtig erkannt worden.
(Censur: sehr gut)
Aufgabe aus der Physik: Es ist mittelst geeigneter Galvanometerbeobachtungen zu untersuchen, ob bei Substanzen mit lockerem Gefüge ein Unterschied des elektrischen Leitungsvermögens zu erkennen ist, je nach dem dieselben von galvanischen Strömen oder von Entladungen der Leydener Batterie durchflossen werden.
Die mit einer bemerkenswerthen Sorgfalt ausgeführten Beobachtungen ergaben, dass in der That ein solcher Unterschied in manchen Fällen nachgewiesen werden kann. Der Candidat hat durch die Untersuchung sowohl Geschicklichkeit im Experimentiren als auch Sicherheit in den physikalischen Kenntnissen dargethan. Auch während der Studienzeit hat der Candidat wiederholt Proben musterhaften Fleißes und besten Studienerfolges abgelegt.
(Censur: ausgezeichnet)
Aufgabe aus der Pädagogik: Wieland als Pädagoge.
Der Candidat hatte die pädagogischen Grundgedanken aus Wielands Werken in erschöpfender Weise stylistisch gut zusammengestellt und sie durch den Nachweis ihres Ursprunges kritisch erörtert. (Censur: gut)

Interessant sind besonders die Fächer der mündlichen Prüfung und der Lehrprobe. Gerade an ihnen sehen wir nämlich, was zu der Zeit den Unterschied zwischen der Lehrerbildung an einer Universität und der an einer technischen Bildungseinrichtung wie der Dresdner ausmachte. Witting wurde nicht nur in „Funktionentheorie“ (ausgezeichnet), „Philosophie und Pädagogik“ (sehr gut), „Geographie“ (sehr gut) geprüft, sondern auch in den Fächern „Analytische Mechanik“ (sehr gut) und „Darstellende und synthetische Geometrie“ (ausgezeichnet), und in der „Lehrprobe“ hatte er das Thema „Ueber die Aehnlichkeit der Dreiecke nebst Anwendung auf Feldmessung und Höhenmessung“ zu behandeln. In Darstellender Geometrie zeigte sich der Kandidat übrigens „vollständig vertraut mit den Aufgaben über Beziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum, mit der Darstellung der Körper in beliebiger Stellung und mit den wichtigsten projectiven Beziehungen“.
Lehr- und Prüfungsinhalte von Alexander Witting umfassten Geodäsie, Darstellende Geometrie und Technische bzw. Analytische Mechanik. Diese angewandt-mathematische Ausbildung war ein Vorteil der Lehrerbildung in Dresden und so derzeit an keiner Universität zu erlangen. Alexander Witting bestand die Prüfung für das höhere Schulamt mit Auszeichnung und erhielt die Lehrbefähigungen in Mathematik und Physik für alle Klassen der (sächsischen) Gymnasien und Realschulen und in Geographie bis einschließlich Obersekunda zugesprochen. Er war bestens vorbereitet für das Lehramt, für weiteres wissenschaftliches Arbeiten, für seine spätere Tätigkeit als Herausgeber, Autor und Akteur in wissenschaftlichen Gesellschaften und Vereinen. (Vgl. dazu (Voss, Pfalzgrafenweiler) und (Voss, Graz).)

4.) Zur höheren Lehrerbildung in Sachsen und Preußen

Die Gleichstellung der Lehrerbildung an Universität und Polytechnikum, wie sie in Sachsen bestand, war zur Studienzeit Alexander Wittings in Preußen noch ganz undenkbar. Dort gingen die Lehrer der Mathematik und Physik aus den Universitäten hervor, und Voraussetzung für die Ablegung des Staatsexamens war ein mindestens sechssemestriges Studium an einer deutschen Universität. Das sollte sich, bei der dominierenden Stellung Preußens im Reich, bald – zumindest mittelbar – auch auf die Dresdner Lehrerabteilung auswirken. Am 31. August 1887 wurde an der Universität Leipzig eine neue Prüfungsordnung erlassen, die, in Angleichung an die preußische, ein sechssemestriges Universitätsstudium voraussetzte. Damit war der Wechsel von der Lehrerabteilung des Polytechnikums an die Universität Leipzig nicht mehr problemlos und vor allem nicht mehr ohne Zeitverlust möglich, und die Stellung der Dresdner Lehrerabteilung verschlechterte sich, ohne dass sich an der dort geltenden Prüfungsordnung etwas geändert hätte. Erst die Bewegung zur Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts und der Lehrerbildung führte zu einer entscheidenden Änderung. Die preußische „Ordnung der Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen“ vom 12. September 1898 brachte etwas (für Preußen) Neues: sie erlaubte bei einer Studiendauer von mindestens sechs Semestern die Anrechnung von drei an einer Technischen Hochschule verbrachten Semestern auf die Gesamtstudienzeit. Mit ihr traten, zusammengefasst unter dem Begriff „Angewandte Mathematik“, Darstellende Geometrie, Geodäsie und Technische Mechanik (eingeschlossen die graphische Statik) in den für die Ausbildung und Prüfung der künftigen höheren Lehrer der Mathematik gültigen Fächerkanon. Das waren Inhalte, die an der Dresdner Lehrerabteilung zu der Zeit bereits seit Jahrzehnten vermittelt wurden! Es dauerte nun auch nicht mehr lange, bis die Dresdner Lehrerausbildung mit der Leipziger <u>wieder</u> gleichgestellt wurde. Das geschah durch die unter dem 20. Oktober 1899 erlassene neue „Ordnung der Prüfung für Kandidaten des höheren Lehramtes der mathematisch-physikalischen und chemischen Richtung an der Technischen Hochschule zu Dresden“, die weiter ging als die preußische und die zu erneuter Blüte der Dresdner „Lehrerabteilung“ führte.

Tabelle 1:
Die 4 Mathematikprofessoren am Polytechnikum Dresden 1881-1885

<u>1. Mathematische Professur</u>
Harnack, Axel (1851 Dorpat – 1888 Dresden)
Studium in Dorpat und Erlangen; Promotion bei Felix Klein in Erlangen; Habilitation und erste glänzende Lehrerfolge an der Universität Leipzig; Professor am Polytechnikum Darmstadt 1876/77 und am Polytechnikum Dresden seit Herbst 1877. Rufen an die Universität Rostock 1878 und an das Polytechnikum Aachen 1882 folgte er nicht.

Harnack: „Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Eine Einführung in das Studium“, Leipzig 1881

<u>2. Mathematische Professur</u>

Voss, Aurel (1845 Altona-1931 München)

Studium in Heidelberg und Göttingen; Promotion in Göttingen; Mathematiklehrer an einem Gymnasium in Lingen; Habilitation 1874 in Göttingen; Professor am Polytechnikum Darmstadt 1875 bis 1879 und am Polytechnikum Dresden von Herbst 1879 bis Herbst 1885; weitere Stationen seines Wirkens waren: ab 1885 TH München (Professor für Analytische Mechanik), ab 1891 Universität Würzburg, ab 1902 Universität München.
Voss: „Die Prinzipien der rationellen Mechanik“, in: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, 1901

<u>3. Mathematische Professur</u>

Burmester, Louis (1840 Ottmarschen bei Hamburg-1927 München)

Studium an der Polytechnischen Schule Dresden (Lehrerabteilung), 1864 Abschlussprüfung; Promotion in Göttingen mit dem selbstgewählten Thema zur Theorie der Isophoten; Lehrer am deutschen Realgymnasium zu Lodz im russischen Staatsdienst bis 1870; Privatvorlesungen an der Polytechnischen Schule Dresden ab SS 1871; seit 1. April 1872 Professor für Darstellende Geometrie in Dresden; einem gleichzeitig an ihn ergangenen Ruf an das Polytechnikum Aachen folgte er nicht. Ab 1887 Professor für Darstellende Geometrie und Kinematik an der TH München.
Burmester: „Lehrbuch der Kinematik“, Leipzig 1888

<u>4. Mathematische Professur</u>

Fuhrmann, Arwed (1840 Dresden – 1907 Dresden)

Studium an der Polytechnischen Schule Dresden (Bauingenieurabteilung), Abschluss 1861; Promotion in Leipzig; Assistent für Mathematik und Vermessungswesen an der Polytechnischen Schule Dresden, Privatvorlesungen seit 1866; 1869 außerordentlicher, 1874 ordentlicher Professor.
Fuhrmann: „Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik“, I-IV, 1888-1903

Tabelle 2: Alexander Wittings Lehrer am Dresdner Polytechnikum

<u>Praktika:</u>

Hempel, Walther (1851-1916), Dr.phil.: ordentlicher Professor für technische Chemie und Leiter des Laboratoriums für analytisch-anorganische Chemie
Toepler, August (1836-1912), Dr.phil.: ordentlicher Professor für Experimentalphysik und Direktor des Physikalischen Instituts

<u>Mathematik:</u>

Harnack, Axel (1851-1888), Dr.phil., Direktor des Mathematischen Seminars: Differential- und Integralrechnung, algebraische Kurven und Funktionen

Voss, Aurel (1845-1931), Dr.phil.: Analytische Geometrie, Analytische Mechanik, Teile der mathematischen Physik
Burmester, Louis (1840-1927), Dr.phil.: Darstellende Geometrie und Geometrie der Lage, Kinematik
Fuhrmann, Arwed (1840-1907), Dr.phil.: Anwendungen der Differential- und Integralrechnung, Vermessungswesen
Heger, Richard (1846-1919), Dr.phil., Gymnasiallehrer, Honorarprofessor: Teile der Mathematik und der Physik
Rohn, Carl (1855-1920), Dr.phil., 1884 außerord. Professor an der Universität Leipzig, im WS 1884/85 als Vertreter am Polytechnikum Dresden; seit 1885 Professor in Dresden, seit 1905 an der Universität Leipzig
Physik:
Toepler, August (1836-1912), Dr.phil., Professor der Physik in Bonn/Poppelsdorf, Riga, Graz, seit 1876 ordentlicher Professor für Experimentalphysik und Direktor des Physikalischen Instituts am Polytechnikum Dresden
Geographie:
Ruge, Sophus (1831-1903), Dr.phil.: Oberlehrer an der Annenrealschule in Dresden, 1872 Habilitation am Polytechnikum, ab 1874 Professor für Geographie und Ethnologie und Vorsteher der Geographischen Sammlung
Weitere naturwissenschaftliche und technische Vorlesungen:
Schmitt, Rudolf (1830-1898), Dr.phil., seit 1870 ordentlicher Professor für Allgemeine Chemie und Chemische Technologie
Vetter, Benjamin (1848-1893), Dr.phil., seit 1874 Privatdozent für Zoologie und vergleichende Anatomie, seit 1878 außerord. Professor und Leiter der von ihm begründeten Zoologischen Sammlung
Zeuner, Gustav (1828-1907), Dr.phil., seit 1873 Direktor des Polytechnikums Dresden (bis 1890), ordentlicher Professor für Mechanik und Theoretische Maschinenlehre.
Philosophie und Pädagogik:
Schultze, Fritz (1846-1908), Dr.phil., seit 1876 Inhaber des Lehrstuhls für Philosophie und Pädagogik, Direktor des Pädagogischen Seminars. - Studium in Jena und Göttingen; in Jena: Promotion bei Kuno Fischer, Lehrer, Habilitation, ao. Professor. Hauptwerk: „Philosophie der Naturwissenschaft“ (1871 Leipzig)

Tabelle 3:
Von SS 1881 bis WS 1884/85 angebotene Lehrveranstaltungen in Mathematik und Physik

Physik (August Toepler)
Jährlich für alle Abteilungen Vorlesung „Experimentalphysik“: SS „Akustik und Optik“, WS „Wärme, Magnetismus und Elektrizität“ (je 5 Semesterwochenstunden - SWS)

Im Zweijahresabstand: SS Vorlesung „Dioptrik“ (2 SWS)
In jedem Semester: Physikalisches Praktikum oder aber Physikalische Übungen speziell für die Lehrerabteilung (mit 8 SWS bzw. 4 SWS).

Mathematik

Axel Harnack:
Jährlich für alle Abteilungen “Differential- und Integralrechnung” mit Übungen, beginnend mit dem WS und fortgesetzt im darauffolgenden SS.
Im Zweijahresrhythmus: dreisemestriger Zyklus Algebraische Gleichungen (1 Semester) – Algebraische Kurven (2 Semester).
WS 1882/83: „Theorie der Differentialgleichungen“ und „Über die Fouriersche Reihe“
WS 1883/84: „Invariantentheorie und algebraische Kurven“ und „Einleitung in die Zahlentheorie“ – angekündigt
Axel Harnack verbrachte eineinhalb Jahre – WS 1883/84, SS 1884, WS 1884/85 – wegen seines Lungenleidens in Davos.

Aurel Voss:
Jährlich für alle Abteilungen im SS “Analytische Geometrie der Ebene” und im WS “Analytische Geometrie des Raumes” mit Übungen.
Im Zweijahresrhythmus: WS „Analytische Mechanik“, SS Übungen dazu
Im Zweijahresrhythmus: „Funktionentheorie“ (WS) mit Übungen und „Elliptische Funktionen (SS) mit Übungen.

SS 1881:	„Liniengeometrie“ und „Elektrodynamik“
WS 1881/82:	„Funktionentheorie“ und „Hydrodynamik“
SS 1882:	„Elliptische Funktionen“
WS 1882/83:	„Theorie des Potentials nebst Anwendung auf physikalische Probleme“ und „Analytische Mechanik“
SS 1883:	„Variationsrechnung“
WS 1883/84:	„Funktionentheorie“ mit Übungen
SS 1884:	„Elliptische Funktionen“
WS 1884/85:	Übungen zu den Elliptischen Funktionen

Louis Burmester:
Jährlich für alle Abteilungen „Darstellende Geometrie“ mit Übungen (meist 4 Stunden Vorlesungen, 4 Stunden Übungen).
Jährlich für alle Abteilungen: WS „Geometrie der Lage“, SS Übungen dazu.

SS 1881:	„Graphischen Rechnen“
WS 1884/85:	„Geometrie der Bewegung“.

Arwed Fuhrmann:
Jedes SS verkürzte „Differential- und Integralrechnung“ mit Übungen zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.

Jedes SS „Anwendungen der elementaren Mathematik (Vorlesung)“
Jährlich: Geodäsie mit Übungen und Praktika

Richard Heger:
Von Wittings 8 Studiensemestern hat Heger in dreien nicht gelesen.
Für Witting mögen interessant gewesen sein:
SS 1882: Raumkurven dritter Ordnung
WS 1882/83: Sphärische Trigonometrie
WS 1883/84: Theorie und Anwendung der Determinanten

Carl Rohn:
WS 1884/85: „Analytische Geometrie des Raumes“ und „Ausgewählte Kapitel aus der höheren Geometrie“

Für Lehrerstudenten höherer Semester war die Teilnahme am Mathematischen Seminar, bei Harnack und Voss, selbstverständlich.

Tabelle 4:
Von SS 1881 bis WS 1884/85 in Geographie von Sophus Ruge und in Philosophie / Pädagogik von Fritz Schultze gehaltene Lehrveranstaltungen

Ruge hielt in der Regel zwei Vorlesungen im Semester, überwiegend mit je 3 Stunden wöchentlich, von SS 1881 bis WS 1884/85 in dieser Reihenfolge:

- Geographie und Ethnographie von Afrika
- Neuere Geschichte der Erdkunde
- Geographie von Amerika
- Allgemeine Ethnologie
- Geographie von Australien und Oceanien
- Specielle Ethnographie
- Die Staaten Europas, außer Deutschland
- Ethnographie der kaukasischen (mittelländischen) Race
- Die germanischen und slavischen Staaten Europas
- Geschichte der Erdkunde bis zum 16. Jh.
- Deutschland
- Neue Geschichte der Erdkunde seit dem 16. Jh.
- Geographie von Asien
- Geschichte der Erforschung Afrikas
- Geschichte der Erforschung Asiens

Schultze hielt in der Regel eine Vorlesung im Semester mit 2-3 Stunden wöchentlich, von SS 1881 bis WS 1884/85 in dieser Reihenfolge:

- Geschichte und Kritik aller philosophischen Hauptprobleme (als philosophische Einleitung in die mathematisch-empirischen Wissenschaften) (SS 1881)
- Die Kantischen Probleme von Raum, Zeit und Kausalität (SS 1881)
- Neue Probleme der vergleichenden Psychologie
- Geschichte der Pädagogik
- Anthropologie
- Geschichte der neuesten Philosophie von Kant bis auf die Gegenwart
- Systematische Pädagogik
- Geschichte der Philosophie von den Griechen bis auf Kant
- Geschichte der neueren Philosophie bis auf Kant

Dazu kam für künftige Lehrer in höheren Semestern das Pädagogische Seminar.

Tabelle 5:
Möglicher Studienplan Alexander Wittings

Da Witting für Geographie eine recht weitgehende Lehrbefähigung – immerhin bis einschließlich Obersekunda – zugesprochen bekam, wird er in jedem Semester eine der Vorlesungen Professor Ruges belegt haben.
Bei Professor Schultze wird er mindestens die beiden ersten Vorlesungen und die „Systematische Pädagogik“ gehört haben. In höheren Semestern war die Teilnahme am Pädagogischen Seminar Pflicht.
„Elektrodynamik“ und „Hydrodynamik“ (beides Voss), die in seinem 1. und 2. Semester gehalten wurden, wird Witting für das 5. und 6. Semester vorgesehen haben. Sie wurden aber während seines Studiums nicht wieder angeboten, da Voss durch Vertretungsaufgaben infolge des Ausfalls von Harnack über drei Semester hinweg in Anspruch genommen war.
Seit dem WS 1883/84 konnte Witting bei Axel Harnack wegen dessen Erkrankung nicht mehr studieren. Harnack hatte für das WS 1883/84 die Vorlesungen „Invariantentheorie und algebraische Kurven“ und „Einleitung in die Zahlentheorie“ angekündigt; er konnte sie nicht halten, sie wurden auch nicht vertreten. Witting hat also während seines Dresdner Studiums über diese Gebiete nichts hören können.

Damit wäre folgender durch Witting realisierter Studienplan möglich:

SS 1881

Toepler:	Experimentalphysik – Akustik und Optik (Vorlesung)
Burmester:	Graphisches Rechnen
Fuhrmann:	Geodäsie mit Übungen
Harnack:	Theorie der algebraischen Gleichungen
Voss:	Analytische Geometrie der Ebene

Schultze: Geschichte und Kritik aller philosophischen Hauptprobleme (als philosophische Einleitung in die mathematisch-empirischen Wissenschaften)
Schultze: Die Kantischen Probleme von Raum, Zeit und Kausalität
Ruge: Geographie und Ethnographie Afrikas

WS 1881/82
Toepler: Experimentalphysik - Wärme, Magnetismus und Elektrizität (Vorlesung)
Harnack: Differential- und Integralrechnung mit Übungen
Harnack: Theorie der höheren algebraischen Kurven I
Voss: Analytische Geometrie des Raumes
Burmester: Darstellende Geometrie
Schultze: Neue Probleme der vergleichenden Psychologie
Ruge: Geographie von Amerika

SS 1882
Toepler: Dioptrik
Toepler: Physikalisches Praktikum
Harnack: Differential- und Integralrechnung mit Übungen
Harnack: Theorie der höheren algebraischen Kurven II
Burmester: Darstellende Geometrie
Heger: Raumkurven dritter Ordnung
Ruge: Geographie von Australien und Oceanien

WS 1882/83
Harnack: Theorie der Differentialgleichungen
Harnack: Über die Fouriersche Reihe
Voss: Theorie des Potentials nebst Anwendung auf physikalische Probleme
Voss: Analytische Mechanik
Burmester: Geometrie der Lage
Heger: Sphärische Trigonometrie
Ruge: Die Staaten Europas, außer Deutschland

SS 1883
Burmester: Übungen zur Geometrie der Lage
Voss: Variationsrechnung
Toepler: Physikalisches Praktikum
Schmitt: Allgemeine Chemie
Hempel: Chemisches Praktikum
Schultze: Pädagogisches Seminar
Ruge: Geschichte der Erdkunde bis zum 16. Jh.

WS 1883/84

Voss:	Funktionentheorie mit Übungen
Heger:	Theorie und Anwendung der Determinanten
Toepler:	Physikalisches Praktikum
Schultze:	Systematische Pädagogik
Schultze:	Pädagogisches Seminar
Ruge:	Deutschland
Vetter:	Zoologie

SS 1884

Voss:	Elliptische Funktionen
Toepler:	Physikalisches Praktikum
Schultze:	Pädagogisches Seminar
Ruge:	Geographie von Asien
Zeuner:	Maschinenlehre
Fuhrmann:	Geodätisches Praktikum

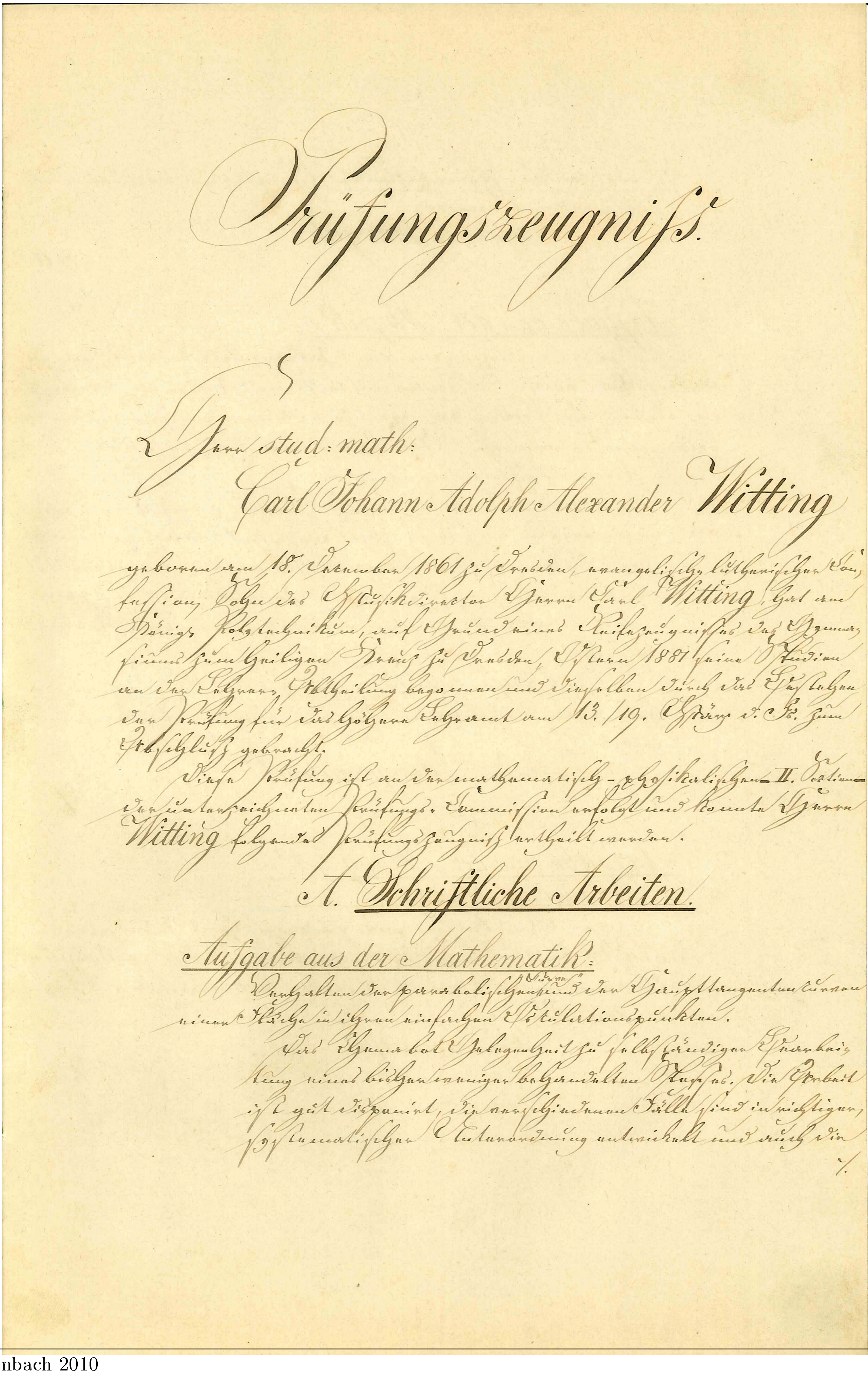
WS 1884/85

Toepler:	Physikalisches Praktikum
Voss:	Übungen zu den Elliptischen Funktionen
Rohn:	Ausgewählte Kapitel aus der höheren Geometrie
Schultze:	Pädagogisches Seminar

Quellen:

Prüfungszeugnis von Alexander Witting, ausgefertigt am 21. März 1885. – „Nachlass Familie Witting“ (Helga Witting, privat)
„Programme“ des Polytechnikums Dresden für die Zeit von SS 1881 bis WS 1884/85
Voss, Waltraud: „…eine Hochschule (auch) für Mathematiker …“. Dresdner Mathematiker und die höhere Lehrerbildung: 1825-1945. – Augsburg 2005
Voss, Waltraud: Prof. Dr.phil. Alexander Witting (1861-1946): Akteur in mathematisch-naturwissenschaftlichen Fachvereinigungen, Autor und Herausgeber. - Vortrag, 11. Tagung der Fachsektion Geschichte der Mathematik der DMV vom 20.-24. Mai 2009 in Pfalzgrafenweiler (Tagungsband, 2010).
Voss, Waltraud: Alexander Wittings Abhandlung für die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission (IMUK) und Briefe Felix Kleins dazu. – Vortrag, Gemeinsame Jahrestagung der ÖMV und der DMV Graz 2009 (erscheint in Graz 2010)

Verfasserin: Waltraud Voss, Dr.rer.nat. et phil.habil., Dresden (waltraud.voss@tu-dresden.de)



Prüfungszeugniß.

Herr stud. math.

Carl Johann Adolph Alexander Witting

geboren am 18. December 1861 zu Dresden, evangelisch-lutherischer Confession, Sohn des Musikdirector Herrn Carl Witting, hat am Königl. Polytechnikum, auf Grund eines Reifezeugnisses des Gymnasiums zum heiligen Kreuz zu Dresden, Ostern 1881 seine Studien an der Lehrer-Abtheilung begonnen und dieselben durch das Bestehen der Prüfung für das höhere Lehramt am 13./19. März d. J. zum Abschluß gebracht.

Diese Prüfung ist an der mathematisch-physikalischen II. Section der unterzeichneten Prüfungs-Commission erfolgt und konnte Herrn Witting folgendes Prüfungszeugniß ertheilt werden.

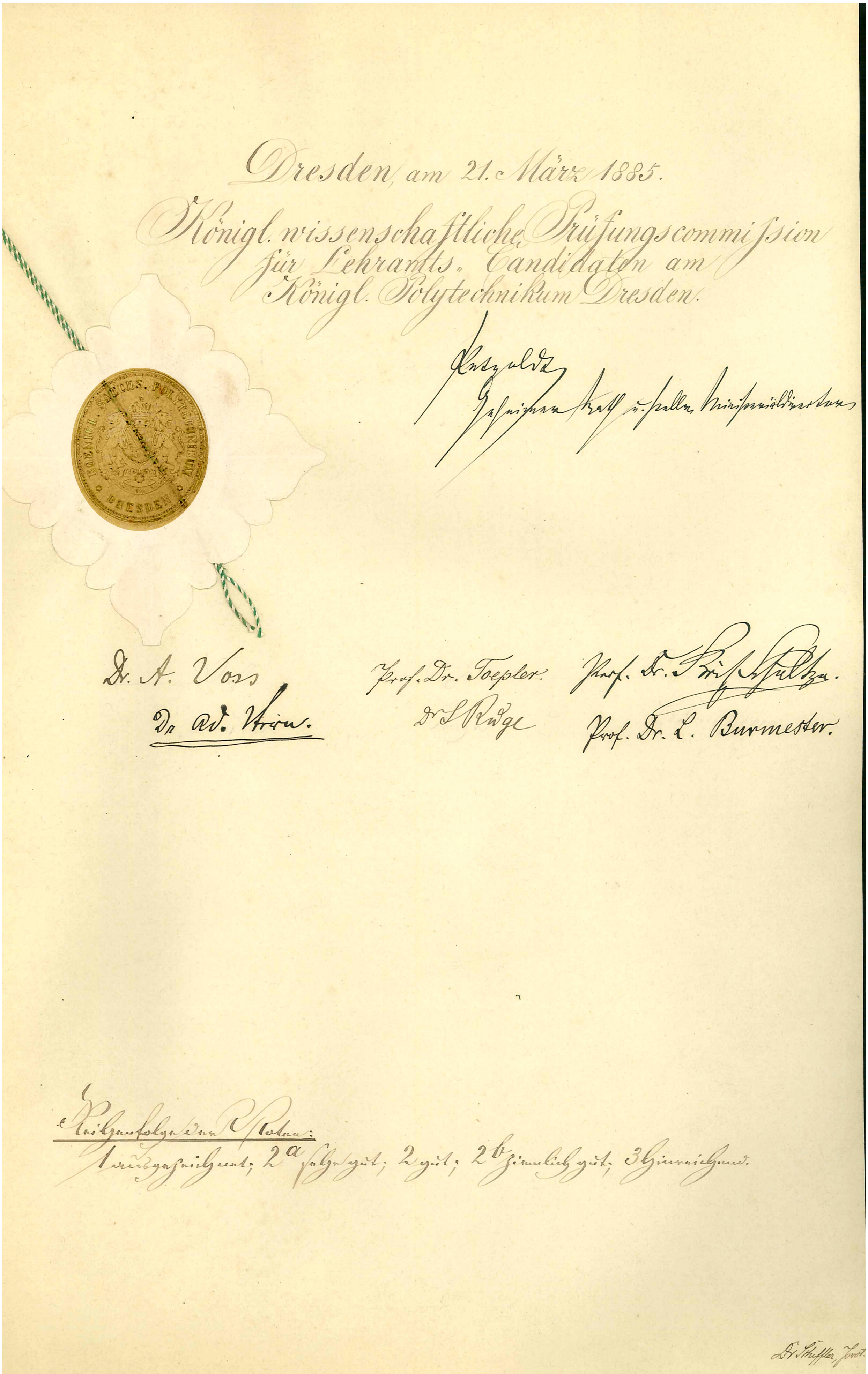
A. Schriftliche Arbeiten.

Aufgabe aus der Mathematik:

Verhalten der parabolischen Curve und der Haupttangentencurven einer Fläche in ihren einfachen Osculationspunkten.

Das Thema bot Gelegenheit zu selbständiger Bearbeitung eines bisher wenig behandelten Stoffes. Die Arbeit ist gut disponirt, die verschiedenen Fälle sind in richtiger, systematischer Unterordnung entwickelt und auch die

/.



Dresden, am 21. März 1885.

Königl. wissenschaftliche Prüfungscommission für Lehramts-Candidaten am Königl. Polytechnikum Dresden.

[illegible]
Geheimer Rath u. vortr. Ministerialdirector

Dr. A. Voss   Prof. Dr. Toepler   Prof. Dr. Fritz Schultze.
Dr. Ad. Stern.   Dr. S. Ruge   Prof. Dr. L. Burmester.

Reihenfolge der Noten:
1 ausgezeichnet; 2a sehr gut; 2 gut; 2b ziemlich gut; 3 genügend.

Dr. Stiefler, Prof.

Language in the mathematical education, in Hungary in 19th century

Kati Munkacsy

ELTE, Budapest

The aim of the research

is to show the birth of the mathematical culture in Hungarian language. At the turn of the 17-18th century it was astonishing if a Hungarian mathematician could write in Hungarian, 100 years later the language of Hungarian mathematics became Hungarian, and it was astonishing if they published their works in German or in French.
This change has not been the topic of any research yet.

Method of the research

is analysis of literature, collecting and analysing data of other studies relevant to this research.

Results of the research

I. Before the 19th century

From 1000 to 1844 Latin was the official language of administration, culture, science in Hungary. At schools we find various language environments.

Primary school

- Oláh Miklós declared in 1560: Language of education in primary schools is Hungarian
- XVII–XVIII Some Hungarian text books were written in Hungarian, for example: Maróthy György. Arithmetica (1743)

Secondary schools

- From 1777 Ration Educationis: some subjects can be taught in Hungarian
- The Emperor Joseph II decreed in 1784 German as a official language (6 years long period) (Gergely, 1998)
- From 1791 Hungarian language had been a facultative subject
- Frances I ordered Hungarian language to become a compulsory subject (Magyar Törvénytár, 1901)

Higher education

German was the language of industry and commerce and (applied) science. It was very early that German books written by authors born in Hungary were published, e.g. Ch. Pühler: Ein kurtze und grundliche anlaytung zu dem rechten verstand Geometriae, Geometria Practica 1563.

But most of the mathematics books were in Latin, e.g. :
Pal Mako, Kerekgedei Makó Pál

Compendiaria matheseos institutio (1764)
Calculi differentialis et integralis institutio (1768)
De arithmeticis et geometricis aequationum resolutionibus libri duo (1770)

II. In the 19th century

In the 19th c. there was a political and cultural reform and also a reformation of Hungarian language. 'The nation lives in its language' – said Széchenyi. He founded HAS, Hungarian Academy of Science (MTA) by offering one year's income of his estate for the purposes of a learned society in 1825. Society members gathered in six sections: I. Linguistics, II. Philosophy, III. Historiography, IV. Mathematics, V. Jurisprudence, VI. Natural Science.

At the parlamentary gatherings the question if Hungarian language should become the official language was continuously on schedule. From 1844 German and Hungarian were official languages in the Habsburg Monarchy, in the Hungarian Kingdom it was the Hungarian (Magyar Törvénytár, 1896). From 1844 the language of education is Hungarian. Latin became a compulsory subject (not the language of education)

Unfortunately the Hungarian war of independence was lost in 1849, and in the Hungarian higher education foreign professors were employed. They were usually good experts but they spoke in German, therefore their relationship with Hungarian colleagues and students was contradictory.

In this era scientists spoke several languages, e.g. Farkas Bolyai published his works in three languages:

- *Arithmetica eleje*, Marosvásárhely, 1830
- *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi*, Marosvásárhely, 1832–33
- *Az arithmetikának, geometriának és physikának eleje*, Marosvásárhely, 1834
- *Arithmetica eleje kezdőknek*, Marosvásárhely, 1850
- *Űrtan elemei kezdőknek*, Marosvásárhely, 1850
- *Kurzer Grundriss eines Versuches die Arithmetik darzustellen*, Marosvásárhely, 1851

From 1860 Hungarian was the language of education again (Leo von Thun) .
From 1867 in A-H M German and Hungarian were again the official languages (Kozári, 2005).

New universities were established

- 1872 Kolozsvár, Cluj (1921 Szeged)
- 1872 Budapest, BME

The language of education has been Hungarian. Professors published their works in Hungarian, in German, in French. Some of these were e.g. Hunyadi Jenő, Kőnig Gyula, Vályi Gyula, Geőcze Zoárd. They were Hungarian mathematicians, they taught and spoke in Hungarian and they could publish in German and in French.
Their works were published in Hungary in the journal of HAS. First of course this took place in Hungarian and then this journal had German editions to create good international scientific connections.
Hungarian mathematicians also published their works in the best foreign journals, e.g. Comptes rendus, Mathematische Annalen, Archiv für Mathematik und Physik.

Conclusions

Mathematical works in Hungarian language are unknown in Europe - works in German language do not look Hungarian. To resolve this contradiction further research are needed.

References

- 19. századi magyar történelem 1790-1918. Szerkesztette Gergely András Korona Kiadó, Budapest, 1998.
- Magyar Törvénytár 1740-1835. Franklin – Társulat Magyar Irodalmi Intézet és Könyvnyomda, Budapest, 1901., 163. p., 1791:16 törvénycikk
- Magyar Törvénytár 1836-1868. Franklin – Társulat Magyar Irodalmi Intézet és Könyvnyomda, Budapest, 1896., 198. p.
- Magyarország története a 19. században Szöveggyűjtemény Szerkesztette Pajkossy Gábor Osiris Kiadó, Budapest, 2005., 54. p.
- Mathmatische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Magyar Tudomanyos Akademia, Konigliche Ungarische 1891 http://www.archive.org/stream/mathematischeun00gesegoog/mathematischeun00gesegoog_djvu.txt
- Szenassy B. History of mathematics in Hungary until the 20th century, Akademiai Kiado, Budapest, 1992

Comptes rendus
http://www.elsevier.com/wps/find/journaldescription.cws_home/600301/description#description

Mathematische Annalen
http://www.springer.com/mathematics/journal/208

Archiv für Mathematik und Physik
http://www.haraldfischerverlag.de/hfv/Einzelwerke/mathematik_physik_engl.php

MATHEMATIK UND IHRE ANWENDUNGEN IN CHRONOLOGIE UND GEODÄSIE IM WERK VON WILHELM MATZKA[1]

MICHAELA CHOCHOLOVÁ

Kurzfassung: Wilhelm Matzka (1798–1891) war ein bedeutender Mathematiker und Universitätsprofessor des 19. Jahrhunderts in den Böhmischen Ländern. Sein Hauptinteresse galt der Mathematik, jedoch hat er sich auch mit ihren vielen Anwendungen beschäftigt. In diesem Artikel wird besonders seine wissenschaftliche Tätigkeit in den Gebieten der Chronologie und Geodäsie behandelt. Damit wird sein breites Spektrum von Fachinteressen gezeigt und seine Persönlichkeit von einem anderen Blickpunkt beleuchtet.[2]

1 Lebensbahn von Wilhelm Matzka

Wilhelm Matzka wurde am 4. November 1798 im südmährischen Leipertitz geboren, studierte am Gymnasium in Komotau (1809–1817) und an der philosophischen Fakultät in Prag (1817–1819). Nach seinem Studium ist er in das österreichische Militär in Wien eingetreten, wo er (zuerst als Bombardier, später als (Ober)Feuerwerker und Leutnant des Bombardierkorps) beinahe achtzehn Jahre diente (bis 1837).

Im Jahre 1837 wurde er an der Philosophischen Lehranstalt in Tarnow zum ordentlichen Professor der reinen Elementar-Mathematik ernannt, und wirkte dort bis zum Jahr 1849. Zwischenzeitlich, hat er im Jahre 1843 an der Universität in Olmütz das Rigorosum (in allgemeine Geschichte und Philosophie) bestanden und promovierte zum Doktor der Freien Künste und Philosophie.

Im Jahre 1849 kam er zurück nach Prag, wo er zum ordentlichen Professor der Elementar-Mathematik und praktischen Geometrie am Polytechnikum ernannt wurde. Schon ein Jahr später, im Jahre 1850, wurde er als ordentlicher Professor der Mathematik an die Prager Universität berufen, wo er bis zum Jahr 1871 vorgetragen hat.

In dieser Zeit war er ein Mitglied der wissenschaftlichen Prüfungskommission für Gymnasial-Lehramtskandidaten in den Böhmischen Ländern für Mathematik, sowie mehrmals Dekan und Prodekan des philosophischen Professoren-Kollegiums. Seit dem Jahr 1850 war W. Matzka ein ordentliches Mitglied der *Königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*. In demselben Jahr wurde er vom Kaiser Franz Josef I. mit goldener Medaille *Literis et artibus* (für Wissenschaften und Kunst) ausgezeichnet. In Anerkennung seiner vieljährigen Verdienste wurde ihm *der Ehrentitel eines kaiserlichen Rathes* (1869) und später *der Ehrentitel eines Regierungsrathes* (1873) verliehen.

W. Matzka ist am 9. Juni 1891 in Prag gestorben und wurde auf dem *Olšany-Friedhof* bestattet.

---

[1] Diese Veröffentlichung wurde durch Beihilfen der Projekte GA ČR P401/10/0690 der Tschechischen Fördergesellschaft (*Prameny evropské matematiky*) und SVV-2010-261 315 des Tschechischen Ministeriums für Schulwesen unterstützt.

[2] Über Wilhelm Matzka's Leben, pädagogisches Wirken und wissenschaftliches Werk siehe auch [9], [10], [11] und [12].

2 Wissenschaftliche Interesse

W. Matzka hat in seiner mehr als sechzigjährigen schriftlich-wissenschaftlichen Tätigkeit 69 Schriftstücken veröffentlicht.[3] Diese wurden deutschsprachig als Lehrbücher und Fachartikel, sowie als historische, methodische und populäre Studien herausgegeben.[4]

Das Spektrum seines Interesses war sehr umfangreich. Die Mehrheit seine Werke hat er der Mathematik und Physik gewidmet. Im Bereich der Mathematik hat er sich viel mit der Fragen der Geometrie und Trigonometrie beschäftigt. Er hatte auch an modernen Themen Interesse, hat über komplexe Zahlen, Determinanten oder Logarithmen geschrieben, und versuchte so, den Kontakt zur europäischen Mathematik zu halten.[5] Seine Werke zeichnen sich durch eine begreifliche Bearbeitung der neuen mathematischen Themen aus, durch eigene Durcharbeitung und Verbreitung, sowie Einführung von originellen methodischen Annäherungen. Die Werke Matzka's waren schon in seiner Zeit in den wissenschaftlichen Kreisen bekannt und für einige Mathematiker inspirierend. Die Anführungen und Bewertungen von einigen finden wir in der Fachliteratur bis zur heutigen Zeit.

Außer über die mathematischen und physikalischen Themen hat er dazu noch über Chronologie, Astronomie, Geodäsie und Musik geschrieben. Seine Bemühung war dabei, die erwähnten Wissenschaften durch die Anwendung der Mathematik einzuführen und zu begründen, die Themen allgemein oder in ihren speziellen Partien mathematisch auszubauen und zu behandeln.

3 Anwendungen der Mathematik

Die Mathematik nimmt bezüglich der allgemeinen Gültigkeit ihrer Erkenntnisse unter allen Wissenschaften eine Sonderrolle ein. Über viele Jahrhunderte hat sie Anregungen aus den empirischen Wissenschaften (z.B. aus Astronomie, Geodäsie oder Physik) aufgenommen und umgekehrt die Grundlagen für den Fortschritt dieser Fächer bereitgestellt. Wie oben bereits erwähnt, hat sich auch W. Matzka für die Anwendungen der Mathematik in verschiedenen Bereichen interessiert.

---

[3] Von seiner Tätigkeit sind noch 7 Manuskripte überliefert.

[4] Die Werke Matzka's wurden entweder einzeln herausgegeben oder in folgenden Fachperiodika veröffentlicht: *Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*, *Annalen der k. k. Sternwarte in Wien*, *Annalen der Physik und Chemie*, *Archiv der Mathematik und Physik*, *Astronomische Nachrichten*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* und *Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*.

[5] Über Matzka's Werk siehe auch [9], besonders über seinem Werk über komplexe Zahlen und Determinanten siehe [10] und [11]. In den Werken *Beiträge zur höheren Lehre von den Logarithmen* (Archiv der Mathematik und Physik 15(1850), S. 121–196 + 1 Tafel), *Ein Beitrag zur systemmässigen Abhandlung der natürlichen Logarithmen in der Algebra, im Geiste Nepper's und Euler's* (Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften 1878, S. 206–235), *Ein kritischer Nachtrag zur Geschichte der Erfindung der Logarithmen* (Archiv der Mathematik und Physik 34(1860), S. 341–354 + 1 Tafel) und *Elementarlehre von den Logarithmen auf einen neuen, verständlicheren und umfassenderen Begriff vieler Hilfszahlen gegründet, blos die Kenntniß der gewöhnlichsten Zifferrechnungen voraussetzend, ohne Algebra gemeinfaßlich zergliedert* (Prag, 1850, 128 S.) hat sich W. Matzka mit den Logarithmen beschäftigt. Er hat die Lehre ausführlich wissenschaftlich und historisch behandelt und hat versucht die Logarithmenlehre durch seine eigene Methode zu vereinfachen und damit sie an den Schülern der Unterschulen, sowie an praktischen Rechenkünstlern vermitteln.

Bei den Bestimmungen von Ereignissen und Handlungen wird die Angabe der Zeit und des Ortes gefordert, wann und wo sie entweder bereits geschehen sind, oder gegenwärtig geschehen oder erst noch geschehen sollen. Darum werden ***die Chronologie und Geographie****, als Zeit- und Erdkunde, schon längst treffend die beiden Augen der Weltgeschichte genannt. Andererseits dient allen Wissenschaften, deren Objecte Größe besitzen, die Mathematik, als Größen- und Zahlenlehre, nicht blos zur Begründung, sondern auch zur Ausbildung und Vervollkommnung. Daher dürfte es wohl nicht unverdienstlich sein, auch die Chronologie, als eine der nützlichsten und schwierigsten Hilfswissenschaften der Weltgeschichte und Urkundenlehre (Diplomatik), so weit als möglich, durch die Lehren der höheren Arithmetik (théorie des nombres) zu begründen und zu vereinfachen.* ([18], S. V)

4 Chronologie

4.1 Kurz über die Chronologie allgemein

Die Geschichte der menschlichen Gesellschaft vollzieht sich in Raum und Zeit. Schon seit undenklichen Zeiten streben die Menschen danach, die Zeit zu begreifen, die Philosophen sie zu erklären und die Naturwissenschaftler ihre allgemeine Definition zu erbringen. Die Kompliziertheit des Sachverhaltes bekundet schon Augustinus' (ca. 354–430) Aussage. *Was ist also die Zeit? Wenn mich niemand danach fragt, weiß ich es, wenn ich es aber einem, der mich fragt, erklären sollte, weiß ich es nicht.*

Im Laufe der Zeit hat sich die Chronologie als die wissenschaftliche Disziplin von Zeitmessung, ihren Formen und dazu angewendeten Mitteln entwickelt. Zu den praktischen Anwendungen gehören die Zeitrechnung der vergangenen Zeiten und ihre Übertragung in die moderne Zeitrechnung, die Teilung der Zeiteinheit und die Feststellung eines objektiven Messverfahrens der Zeit, die Berechnungen der christlichen (beweglichen) Feste usw.

Im Bestreben nach Feststellung der objektiven Erkenntnisse haben auch manche Mathematiker die Chronologie bedeutend beeinflusst. Die Namen von Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Augustus de Morgan (1806–1871) und Isaac Newton (1643–1727) sollten in diesem Zusammenhang erwähnt sein. Ihre Tätigkeit in diesem Bereich hat ebenso andere Mathematiker inspiriert; unter diesen hatte W. Matzka eine große Bedeutung.[6]

4.2 Chronologie im Werk vom Wilhelm Matzka

Das allererste wissenschaftliche Werk W. Matzka's ist unter dem Name ***Analytische Auflösung dreier Aufgaben der Calendarographie*** [16] im Jahre 1828 erschienen und wurde durch die Aufgaben inspiriert, die der julianische und gregorianische Kalender darbietet.

Die drei vorgelegten Hauptaufgaben hat W. Matzka mittels algebraischen Formen (die er in der Einleitung eingeführt hat) ausführlich gelöst. Auf Grund der mathematischen Ableitung, hat er die mit Kalender verbundene Problematik auf eine wissenschaftliche Ebene gesetzt, begründet und unterstützt. Außerdem hat er einige Hilfstäfelchen entwickelt und gelöste Beispiele aufgezeigt. Damit hat er die praktische Anwendbarkeit offensichtlich gemacht und die Lösungsweise dem Praktiker ansprechend vermittelt.

[6] Mehr über die Geschichte und Gegenwart der Chronologie siehe [2], [3], [16], [18], [20] und [24].

Eine genauere Vorstellung vom Inhalt des Artikels [16] sowie von der Art der Lösung gibt uns ein dort gelöstes Beispiel. Folgende Aufgabe sei zu lösen: *Die katholische Kirche feiert das Schutzengelfest stets an demjenigen Sonntage, welcher der nächste an dem 1. September ist; man fragt nun: in welchen Jahren unseres Jahrhunderts fällt dieses Fest auf den 1. September selbst?* ([16], S. 341)

Unter Verwendung der abgeleiteten allgemeingültigen Formeln ist die Aufgabe gelöst in folgender Art und Weise:

… Setzt man sonach in der Gleichung

$$\left[N = 100S + 28\vartheta + 4 \cdot \left(\frac{3h + 4L + 4b}{7}\right)_r + b\right]$$

$L = 6$, $S = 18$ *und* $h = 5$, *so sind alle Jahre welche diese Eigenschaft haben und zu dem gegenwärtigen Jahrhunderte gehören in dem Ausdrucke … enthalten, und man findet … die Jahre 1805, 1811, 1816, 1822; 1833, 1839, 1844, 1850; 1861, 1867, 1872, 1878; 1889, 1895; in welchen das Schutzengelfest mit dem 1. September zusammentrifft.*[7] ([16], S. 341–342)

Der Höhepunkt W. Matzka's Schaffens im Gebiet der Chronologie ist die umfangreiche Monografie ***Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange, mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre, nebst einem Vorschlage zu einer streng wissenschaftlich geregelten Zeitrechnung; durch höhere Arithmetik begründet und erläutert*** [18], welche er im Jahre 1844 in Wien veröffentlicht hat.[8]


Die Chronologie
in ihrem
ganzen Umfange,
mit
vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung
in der
Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre,
nebst einem
Vorschlage zu einer streng wissenschaftlich geregelten Zeitrechnung;
durch höhere Arithmetik
begründet und erläutert
von
Wilhelm Matzka,
Doctor der Philosophie, k. k. öffentl. ordentl. Professor der Mathematik an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow, emeritirtem Lieutenant und Lehrer der höheren Mathematik und Mechanik im k. k. Bombardier-Corps zu Wien.

Wien, 1844.
In der Fr. Beck'schen Universitäts-Buchhandlung.

[7] Es sei N ein gegebenes Jahr einer Ära, S die Zahl der in N enthaltenen vollen Hunderte, $h = \left(\frac{2\left(\frac{S}{4}\right)_r + 1}{7}\right)_r$ im gregorianischen Kalender, L der Sonntagszeiger; wobei $\left(\frac{A}{n}\right)_r$ den bei dieser Division sich ergebenden Rest vorstellt. Für b und ϑ nimmt man die Werte 0, 1, 2 und 3.

[8] W. Matzka hat dieses wertvolle Werk [18] seinem ehemaligen Lehrer Franz Ignac Cassian Halaschka (1780–1874), ordentlichem Professor der Physik an der Universität in Prag und dem Regierungsrath der k. k. Studien Hofkomission in Wien, gewidmet.

In der Einleitung benannt *Vorbegriffe zur Chronologie* hat W. Matzka (auf beinahe sechzig Seiten) Grundbegriffe und allgemeine Sätze der höheren Arithmetik eingeführt (Kongruenz und Teilen der Zahlen in den allgemeinsten Fällen, von Funktionen und Reihen usw.), die in der Chronologie vielfach Anwendung finden. Diese Zusammenstellung wurde so allgemein und gründlich geschrieben, dass sie auch als Anhang zu Lehrbüchern der höheren Algebra dienen könnte.

Das Hauptthema *die Chronologie* erstreckt sich in zwei Teilen. Im Teil *Allgemeine Chronologie* hat W. Matzka der Gegenstand der Chronologie, ihre Fachbegriffe, die Grundsätze und Methoden der Zeitrechnung eingehend erläutert.[9] Im Teil *Besondere Chronologie* hat er die Zeitrechnung der christlichen Völker sehr ausführlich behandelt, wobei er seine Aufmerksamkeit besonders der Berechnung der christlichen (beweglichen) Feste widmete. Das Alles hat er mit den in der Einleitung eingeführten mathematischen Formeln unterstützt und damit genügend gezeigt, wie die höhere Mathematik zur Begründung und Vereinfachung der Chronologie dient. Danach hat er sich noch mit der Zeitrechnung der Römer, Ägypter, Babylonier, Griechen, Juden, Araber und Perser ähnlich beschäftigt.[10]

In einer besonderen Zugabe hat er einen Vorschlag zu einer genauen und wissenschaftlich angeordneten Zeitrechnung gemacht. Die angeführten Methoden hat er vor allem für die Anwendung in der Weltgeschichte und Astronomie ausgedacht. Das Werk [18] hat er mit einem Anhang vom Hilfstafeln, arithmetischen Schemen und Formeln zur Bestimmung der christlichen Festrechnung beschlossen.

Als unbefangene Beurteilung und Würdigung wünschte sich W. Matzka sehr die *einhellige und unveränderte Benützung* seines Werkes *von anerkannten historiographischen und astronomischen Autoritäten*, sowie vielleicht einst auch *in dem bürgerlichen Verkehr*. Der vollständige Umfang der *Chronologie* Matzka's [18], und noch mehr, ihre streng wissenschaftliche Behandlung durch die Zahlentheorie waren und sind bis auf den heutigen Tag zweifellos bewundernswerte Verdienste. Andererseits war das Werk gerade durch seine Gelehrsamkeit für die Historiker vermutlich zu anspruchsvoll.[11] Die Bedeutung seines Werkes ist jedoch eindeutig durch seine Wiederherausgabe nach mehr als hundertsechzig Jahren nachgewiesen.[12]

Die Arbeiten von Gauss über die Osterberechnung regten mehrfach die Mathematiker zur Beschäftigung auch mit der technischen Chronologie an; das bedeutendste der einschlagenden Werke ist das von W. Matzka, Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange, Wien 1844. So gelehrt und geistreich indessen auch dieses Buch ist, so wird die Mehrzahl der Historiker doch vorziehen, die erforderlichen Berechnungen auf einfachere und bequemere, wenn auch weniger wissenschaftliche Weise auszuführen. ([23], S. 4)

---

[9] Als ein verdienstlicher Beitrag in die allgemeine Chronologie können die Prinzipien der Ausgleichung der bürgerlichen Zeitrechnung mit der mittleren astronomischen, und die allgemeine Erforschung und der Umtausch der Ären gezählt werden.

[10] In diesem Teil wurde W. Matzka von den zwei berühmten chronologischen Werke inspiriert; d.i. [13] und Ideler L.: *Lehrbuch der Chronologie* (Berlin, 1831), welche die durchgängige, gründliche und kritisch erforschte Resultate geben.

[11] Die Erfolge W. Matzka's sind in den Kontext der chronologischen Weltentwickelung in [2] und [23] eingeordnet.

[12] Matzka W.: *Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange, mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre, nebst einem Vorschlage zu einer streng wissenschaftlich geregelten Zeitrechnung; durch höhere Arithmetik begründet und erläutert*, Nabu Press, 2010.

12.

Vergleichung der historischen Zeitrechnung mit der christlichen.

Soll der d^{te} Tag des Jahres a, oder der n^{te} Tag der historischen Aere, welche um $g = 1748295$ Tage nach der byzantinischen anfängt, mit dem d'^{ten} Tage gregorianischen Styles des Jahres a' oder mit dem n'^{ten} Tage der Aere nach Chr. Geb., welche um $g' = 2011919$ Tage nach der byzantinischen beginnt, zusammen fallen, und mit Rücksicht auf die bestehende Ausnahme

$$k = q\frac{a'}{100} - q\frac{q\frac{a'}{100}}{4} - 2$$

die Voreilung des gregorianischen Styles vor dem julianischen seit dem Jahre $a' = 1582$ n. Chr. vorstellen, vor diesem Zeitpunkte aber Null sein, (§. 47, II); so hat man die Gleichungen

$$n = 365(a-1) + q\frac{a - 1 - q\frac{a-3}{32}}{4} + d$$

$$n' = 365(a'-1) + q\frac{a'-1}{4} + d' - k$$

$$n + g = n' + g'.$$

Hieraus folgt

$$n - n' = g' - g = 263624 = 365.722 + 94$$

$$= 365(a - a') + q\frac{a - 1 - q\frac{a-3}{32}}{4} - q\frac{a'-1}{4} + d - d' + k,$$

mithin ist für die Reduction der christlichen Zeitrechnung auf die historische

$$a = a' + 722 - \alpha$$

$$d = q\frac{a'-1}{4} - q\frac{a - 1 - q\frac{a-3}{32}}{4} + d' - k + 94 + 365\alpha$$

und für die Reduction der historischen Zeitrechnung auf die christliche

$$a' = a - 722 + \alpha$$

$$d' = q\frac{a - 1 - q\frac{a-3}{32}}{4} - q\frac{a'-1}{4} + d + k - 94 - 365\alpha;$$

wobei $\alpha = 0$ oder 1 anzunehmen ist, damit d oder d' weder negativ noch zu groß ausfalle.

Im März des Jahres a' nach Chr. endigt sich also das historische Jahr $a' + 721$ und beginnt das Jahr $a' + 722$, oder das Jahr a' nach Chr. beginnt im 10. Monate des historischen Jahres $a' + 721$ und endet im Jahre $a' + 722$.

Umgekehrt im zehnten Monate des historischen Jahres a
endet das Jahr $a - 722$ n. Chr.
und beginnt „ $a - 721$ „
oder das historische Jahr a
beginnt im März des Jahres $a - 722$ n. Chr.
und endet „ „ „ $a - 721$ „

Beispiel. Welches historische Jahr beginnt im Jahre 1843 n. Chr. und an welchem Tage?

Hier ist $a' = 1843$, also $a = a' + 722 = 2565$, $\alpha = 0$. Ferner ist $d = 1$; $a - 3 = 2562 = 32.80 + 2$, $a - 1 - 80 = 2484 = 4.621$; $a' - 1 = 1842 = 4.460 + 2$;
daher $d' - k = 621 - 460 + 1 - 94 = 68$

$$\begin{array}{r} 0 \text{ März} = 59 \\ \hline d' - k = 9 \text{ März alt. St.} \\ k = 12 \\ \hline d' = 21 \text{ März n. St.} \end{array}$$

Im Jahre 1843 nach Chr. fängt demnach das historische Jahr 2565 am 21 März an; und wirklich tritt an diesem Tage die (wahre) Frühlingsnachtgleiche unter dem Meridiane Wiens um 7 Uhr 3 Min. Morgens ein.

Zugabe. Vorschlag zu einer genauen und wissenschaftlich angeordneten Zeitrechnung für Geschichte und Astronomie. – Vergleichung der historischen Zeitrechnung mit der christlichen. ([18], S. 505–506)

Das Interesse an den arithmetischen Untersuchungen von Gegenständen und Fragen der christlichen Zeitrechnung ist W. Matzka auch weiterhin erhalten geblieben. Anfangs der achtziger Jahre des 19ten Jahrhunderts hat er mit dem Werk ***Zur christlichen Zeitrechnung und für deren Verbesserung*** [20] auf die Ergebnisse seiner umfassenden Monographie [18] fließend angeknüpft.

In seinem ersten Teil hat er versucht die Berechnung von Zahlen der christlichen Zeitrechnung (z.B. des Datums des gregorianischen Ostersonntages und der Osterzeit allgemein) zu vereinfachen. Im zweiten Teil hat er *Erforschung, Entwurf und Vorschlag einer universellen rationalen Zeitrechnung* behandelt. W. Matzka's Ideen zur Verbesserung bestehender Einrichtungen wurden in [24] folgendermaßen bewertet.

Der böhmische Mathematiker Wilhelm Matzka schlug 1880 [20], *also lange nach der Gregorianischen Reform, einen Kalender mit einer Zyklus-Dauer von 62 Jahren vor. Darin sind 15 Schalttage enthalten. Nach 7 oder 6 olympischen Schalt-Perioden á 4 Jahre wird erst nach dem 5. Jahr erneut geschaltet. Dann folgt der zweite Teil des Zyklus mit 6 oder 7 olympischen Schalt-Perioden und erneuter Schalt-Verzögerung bis zum Ende des Zyklus'. Das Matzka-Jahr ist 365,241936 Tage lang, ist also ein zu kurzes Kalender-Jahr. Man müsste nach ca. 3.795 Jahren einen zusätzlichen Schalt-Tag einfügen.* ([24], S. 11)

4.3 Chronologie in anderen Werken zu Matzka's Zeit

W. Matzka war der erste Autor, welcher eine Abhandlung zum Thema der Chronologie in der Zeitschrift *Journal für die reine und angewandte Mathematik* publiziert hat (siehe [16]). In den folgenden Jahren sind noch einige Fachartikel zu demselben Thema in dieser Zeitschrift erschienen, welche an die Werke von C. F. Gauß [3] und W. Matzka (bzw. an die Werke von einigen Astronomen und Historikern dieser Zeit) verweisen. Als Beispiele können die Abhandlungen Piper's *Zur Kirchenrechnung* [22] und Nesselmann's *Beiträge zur Chronologie* [21] angegeben werden.

Im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts wurden zahlreiche Werke über Chronologie, verschiedenen Umfangs, vielfältiger Zielrichtung und Arten der Bearbeitung publiziert. Einige sollten besonders den Historikern dienen, anderen versuchten die Chronologie wissenschaftlich zu begründen und zu bearbeiten oder sie populär an die Bevölkerung zu vermitteln und zu verbreiten. Neben dem zweiteiligen, sehr hochwertigen Werk Ideler's *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie* [13] seien noch spätere Werke von F. J. D. Arago *Astronomie populaire* (Band 4) [1], J. P. Kulik *Der tausendjährige Kalender* [14], F. Rühl *Chronologie des Mittelalters und der Neuzeit* [23] und B. M. Lersch *Einleitung in die Chronologie oder Zeitrechnung verschiedener Völker und Zeiten nebst christlichem und jüdischem Festkalender* [15] erwähnt.

5 Geodäsie

5.1 Kurz über die Geodäsie allgemein

Geodäsie hat sich als die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche, als ein Teil von Geographie abgespaltet. Ihren Ursprung hat die Geodäsie in der Notwendigkeit, Land aufzuteilen, Grundstücks- und Eigentumsgrenzen zu definieren und Landesgrenzen zu dokumentieren. Im Laufe der Zeit wurden durch die Bedürfnisse von Kartografie und Navigation ständig höheren Ansprüchen auf ihre Genauigkeit gestellt. Gerade die Anwendung von mathematischen, geometrischen und physikalischen Methoden liefert der Geodäsie exakte und vertrauenswürdige Ergebnisse.[13]

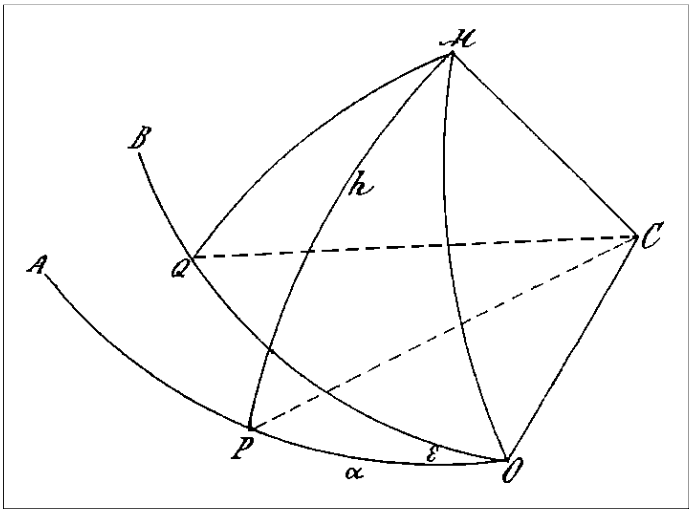
Von mehreren geodätischen Bereichen hat sich W. Matzka vorzugsweise für die niedere Geodäsie interessiert. Diese beschäftigt sich mit ausführlichen Lage- und Höhenmessungen, einzelnen Messungsmethoden, verwendeten Instrumenten und Hilfsmitteln; im Allgemeinen mit Abmessungen, Berechnungen und Darstellung der Ergebnisse.

5.2 Geodäsie im Werk vom Wilhelm Matzka

Im Jahre 1849 hat W. Matzka zwei wissenschaftliche Werke über die Geodäsie veröffentlicht, [17] und [19].

In der Abhandlung ***Berechnung der Fehler der Horizontalwinkel bei geneigter Ebene des Messtisches oder des Horizontalkreises am Winkelmesser*** [17] hat er die Größe des Fehlers in den Horizontalwinkeln, welche eine von Horizonte abweichende Stellung der Ebene des Messtisches oder der Horizontalkreises an einem Winkelmesser verursacht, bzw. die Bestimmung des größtmöglichen Fehlers beschrieben.

Am Anfang definierte er die primären veränderlichen Größen (der Neigungswinkel ε, der Horizontalwinkel α, der Fehler im Horizontalwinkel $\Delta\alpha$, der Höhenwinkel h usw.) und diskutierte dann die Bedingungen für die Parameter ε, h, α in Abhängigkeit von $\Delta\alpha$.



Weiterhin hat er mehrere Methoden zur Bestimmung des Fehlers im Horizontalwinkel $\Delta\alpha$ gezeigt. Entweder durch Benutzung von einigen Formeln, und zwar

$$\operatorname{tang} \Delta\alpha = \frac{u \cos\alpha}{1 + u \sin\alpha}, \qquad u = \sin\varepsilon \ \operatorname{tang} h - \operatorname{sinv} \varepsilon \sin\alpha$$

oder

$$\operatorname{tang} \Delta\alpha = (v+1) \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tang} h, \qquad v = \frac{\sqrt{1+8n^2}+1}{2}, \qquad n = \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin h}$$

[13] Für eine ausführlichere Einleitung in die (höhere) Geodäsie siehe z.B. Torge W.: *Geodäsie*, 2. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, 2003.

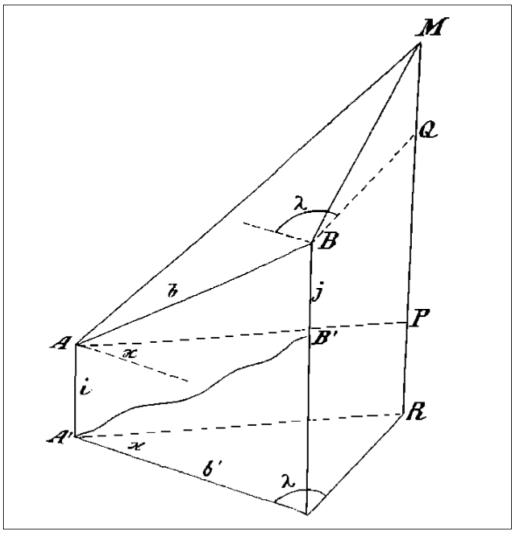
oder da die Neigung ε der Messtischplatte nur immer sehr klein ist, kann man versuchen, $\Delta\alpha$ in eine nach den Potenzen von ε aufsteigende Reihensumme zu entwickeln. Dabei hat er die Methoden gleich auf einige praktische Beispiele angewandt um alles deutlich erklärt.

Zum Schluss berechnete er eine Tafel, *in welcher zu gewissen Neigungswinkeln ε des Messtisches und für gewisse Höhenwinkel h der Visur nicht allein jener grössten Fehler $\Delta\alpha$, sondern auch derjenige Horizontalwinkel α, bei dem er statt findet, aufgeführt ist.* Damit können die Beträge des größten Fehlers $\Delta\alpha$ im Horizontalwinkel α in besonderen Fällen ziemlich schnell beurteilt werden.

Das Werk ***Ueber trigonometrische Höhenmessung*** [19] hat W. Matzka mit folgenden Worten eingeleitet und hat sich vorgenommen durch neue mathematische Erkenntnisse zu einem Fortschritt der Geodäsie beizutragen.

... Denn es kann einen besonnenen Mathematiker nur zum Lächeln bewegen, wenn er die Lobpreisungen der Uebereinstimmung mancher barometrischen Höhenmessung mit einer oft noch alten und mittels mangelhafter Instrumente oder Methoden ausgeführten trigonometrischen liest, nachdem man doch, unbekümmert um das Wieweitsicher des Endergebnisses, beiderlei Formeln durch allerhand Weglassungen von sogenannten unmerklich kleinen Grössen zu beliebten Filigranformeln zugeschnitten hat, um auch wissenschaftlichen Dilettanten, wie wenig sie auch von Logarithmen und Goniometrie verstehen mögen, das Vergnügen zu verschaffen, derlei Höhenberechnungen vornehmen und mit ihren Resultaten prunken zu können. Viel Schuld an der Sucht, diese Höhenformeln so zuzustutzen, hat das Vorurtheil der meisten praktischen Mathematiker, die gesuchte Grösse selbst aus einem einzigen geschlossenen Ausdrucke sämmtlicher Rechnungsangaben zu berechnen ... ([19], S. 1–2)

In zwei Teilen hat er die trigonometrische Höhenmessungen auf kurze und weite Entfernungen behandelt. In denen hat er nicht nur die Grundbegriffe (die Standlinie (Basis), die Verwechslung der Horizonte, der Höhenunterschied usw.), allgemeingültige Sätze und Beziehungen eingeführt, sondern hat er auch eine Menge den Speziallfällen in Abhängigkeit von der Stellung der Basis diskutiert und ihre verschieden Lösungsweisen gezeigt. Alles hat er sorgfältig durch Ableiten der mathematischen Formeln untermauert und mit grafische Schemen ergänzt, zusätzlich hat er auf einige Ergebnisse weiterer Mathematiker hingewiesen.



9

12.

II. Die Basis befinde sich mit dem Höhenpunkte nicht im Alignement. (Taf. I. Fig. 7.)

Finden sich im Terrain keine zwei geeigneten Standorte mit dem Höhenpunkte M im Alignement, so wählt man zwei andere passliche Punkte A' und B'. Lothrecht über ihnen in A und B misst man einerseits die Höhenwinkel $MAP=\varepsilon$ und $MBQ=\eta$, und andererseits entweder, wenn man mit einem Horizontalwinkelmesser (Theodoliten) versehen ist, die Horizontalwinkel $\varkappa$ und λ, die, wie hoch auch A über A' und B über B'' liegen mag, den zu ihnen parallelen Winkeln $RA'B''$ und $RB''A'$ gleichen, oder, wenn man einen Borda'schen Kreis hat, die geneigten Winkel $MAB=\alpha$ und $MBA=\beta$. Nebstbei misst man noch die Instrumentenhöhen $A'A=i$ und $B'B=j$, so wie das Gefälle $(B'-A')=g'$, und endlich die Horizontaldistanz $A'B''=b'$ der Aufstellungspunkte.

Auch hier ist wie vorhin das Gefälle der Basis

$$(B-A)=g=g'+i-j,$$

folglich die Basis $AB=b=\sqrt{b'^2+g^2}$.

1. Hat man die Horizontalwinkel $\varkappa$ und λ gemessen, so ist im horizontalen Dreiecke $A'B''R$

$$RA'B''=\varkappa,\quad RB''A'=\lambda;$$

daher

$$\text{die Horizontaldistanz } A'R=AP=b'\frac{\sin\lambda}{\sin(\varkappa+\lambda)},$$

$$\text{,,} \qquad \text{,,} \qquad B''R=BQ=b'\frac{\sin\varkappa}{\sin(\varkappa+\lambda)};$$

daher findet man (gemäss a):

$$\text{den Höhenunterschied } (M-A)=AP.\operatorname{tg}\varepsilon=b'\frac{\sin\lambda}{\sin(\varkappa+\lambda)}\operatorname{tg}\varepsilon,$$

$$\text{,,} \qquad \text{,,} \qquad (M-B)=BQ.\operatorname{tg}\eta=b'\frac{\sin\varkappa}{\sin(\varkappa+\lambda)}\operatorname{tg}\eta.$$

2. Hat man dagegen die geneigten Winkel α und β gemessen, so ist im geneigten Dreiecke ABM

$$\text{die Distanz } AM=b\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$\text{,,} \qquad \text{,,} \qquad BM=b\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)};$$

daher findet man (gemäss b, α)

$$\text{den Höhenunterschied } (M-A)=AM.\sin\varepsilon=b\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\varepsilon,$$

$$\text{,,} \qquad \text{,,} \qquad (M-B)=BM.\sin\eta=b\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\eta.$$

Jedenfalls gilt wie vorhin die Controlgleichung

$$(M-A)-(M-B)=(B-A)=g.$$

Trigonometrische Höhenmessung auf kurze Entfernungen. – Die Basis befindet sich mit dem Höhenpunkte nicht im Alignement. ([19], S. 9–10, Fig. 7)

5.3 Geodäsie in anderen Werken zu Matzka's Zeit

Die mathematische Behandlung von geodätischen Aufgaben hat in der Fachzeitschrift *Archiv der Mathematik und Physik* in den vierziger und fünfziger Jahren des neunzehnten Jahrhunderts neben Arithmetik, Geometrie, Astronomie oder Physik einen Stammplatz eingenommen. Außer oben behandelten geodätischen Abhandlungen Matzka's ([17] und [19]) sind mehrere Beiträge von Johann August Grunert (1797–1872), Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald und Herausgeber des *Archivs der Mathematik und Physik* (z.B. [7] und [8]), und von Christian Ludwig Gerling (1788–1864), Professor der Mathematik an der Universität zu Marburg (z.B. [4], [5] und [6]) zu bemerken.

6 Resümee

W. Matzka hat von seinen fachlichen Fähigkeiten im mathematischen Bereich in hervorragender Art und Weise Gebrauch gemacht. Mittels geeigneter Anwendungen hat er geholfen, die Chronologie und Geodäsie auf eine fundierte wissenschaftliche Basis zu setzen. Er präzisierte ihre Methoden und Ergebnisse und zeigte originelle Wege um spezielle Aufgaben zu lösen.

Quellenverzeichnis

[1] Arago F. J. D.: *Astronomie populaire*, tome quatrième, Paris, 1857, 854 S.

[2] Bláhová M.: *Historická chronologie*, Libri, Praha, 2001, 948 S.

[3] Gauss C. F.: *Berechnung des Osterfestes*, Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmls-Kunde 2, August 1800, S. 121–130.

[4] Gerling Ch. L.: *Lehrsätze und Formeln aus der analytischen Geometrie und mathematischen Geographie, welche in der practischen Geometrie zur Anwendung kommen*, Archiv der Mathematik und Physik 5(1844), S. 58–77 + 1 Tafel.

[5] Gerling Ch. L.: *Nachträge zur Ausgleichungs-Rechnung*, Archiv der Mathematik und Physik 6(1845), S. 141–146.

[6] Gerling Ch. L.: *Ueber die Genauigkeit der Ketten-Messungen*, Archiv der Mathematik und Physik 6(1845), S. 375–379.

[7] Grunert J. A.: *Das Pothenot'sche Problem, in erweiterter Gestalt; nebst Bemerkungen über seine Anwendung in der Geodäsie*, Archiv der Mathematik und Physik 1(1841), S. 238–248.

[8] Grunert J. A.: *Ueber das Rückwärtseinschneiden mit dem Messtische oder das Problem der drei Punkte*, Archiv der Mathematik und Physik 13(1849), S. 345–364 + 1 Tafel.

[9] Chocholová M.: *Wilhelm Matzka and his Position in the Austro-Hungarian Mathematics*, in Bečvářová M., Binder Ch. (eds.): Mathematics in the Austrian-Hungarian Empire, History of Mathematics, volume 41, Matfyzpress, Prague, 2010, S. 81–92.

[10] Chocholová M.: *Wilhelm Matzka and the Historical Development of Complex Numbers*, in Šafránková J., Pavlů J. (ed.): WDS 08 Proceedings of Contributed Papers, Part I, Matfyzpress, Praha, 2008, S. 38–42.

[11] Chocholová M.: *Wilhelm Matzka (1798–1891) and his Algebraical Works*, in Barbin E., Stehlíková N., Tzanakis C. (ed.): History and Epistemology in Mathematics Education, Proceedings of the 5th European Summer University, Vydavatelský servis, Plzeň, 2008, S. 845–853.

[12] Chocholová M.: *Wilhelm Matzka (1798–1891), Wien und Prag*, in Ch. Binder (ed.): IX. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, Wien, 2008, S. 106–112.

[13] Ideler L.: *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie*, erster und zweiter Band, Berlin, 1825 und 1826, 583 S. + 668 S.

[14] Kulik J. P.: *Der tausendjährige Kalender, Ein nützliches Handbuch für Historiographen, Diplomatiker, Archivare, Richter, Advokaten, Landgeistliche, und überhaupt für jene, welche die in den alten Manuskripten, Geschichtbüchern, und Urkunden vorkommenden chronologischen Daten zu bestimmen haben*, Prag, 1831, 217 S.

[15] Lersch B. M.: *Einleitung in die Chronologie oder Zeitrechnung verschiedener Völker und Zeiten nebst christlichem und jüdischem Festkalender*, Aachen, 1889, 179 S.

[16] Matzka W.: *Analytische Auflösung dreier Aufgaben der Callendarographie*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 3(1828), S. 337–346.

[17] Matzka W.: *Berechnung der Fehler der Horizontalwinkel bei geneigter Ebene des Messtisches oder des Horizontalkreises am Winkelmesser*, Archiv der Mathematik und Physik 13(1849), S. 113–137 + 1 Tafel.

[18] Matzka W.: *Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange, mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre, nebst einem Vorschlage zu einer streng wissenschaftlich geregelten Zeitrechnung; durch höhere Arithmetik begründet und erläutert*, in der Fr. Bech'schen Universtiäts-Buchhandlung, Wien, 1844, VIII + 543 S.

[19] Matzka W.: *Ueber trigonometrische Höhenmessung*, Archiv der Mathematik und Physik 12(1849), S. 1–39 + 1 Tafel.

[20] Matzka W.: *Zur christlichen Zeitrechnung und für deren Verbesserung*, Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, VI. Folge, 10(1879–1880), Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe Nr. 5, 75 S.

[21] Nesselmann G. H. F.: *Beiträge zur Chronologie*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 26(1843), S. 32–80.

[22] Piper F.: *Zur Kirchenrechnung, Formel und Tafeln*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 22(1841), S. 97–104.

[23] Rühl F.: *Chronologie des Mittelalters und der Neuzeit*, Berlin, 1897, 312 S.

[24] Wetzel S.: *Alternativen zum Gregorianischen Kalender*, Deutsche Gesellschaft für Chronometrie – Mitteilung Nr. 114, 2008, S. 10–16.

Addresse

Mgr. Michaela Chocholová, Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Fakultät der Mathematik und Physik, Karls-Universität Prag
Sokolovská 83, 186 75 Prag
Tschechische Republik
e-mail: *chochol@karlin.mff.cuni.cz*

Bach's Chaconne and Harmonic Meaning Thereof

Authors: Miloš Čanak and Jasna Fempl Mađarević

1. Introduction

During his stay in Köthen (1717 – 1723), Johann Sebastian Bach composed 3 sonatas and 3 partitas for solo violin. This opus of 6 piece is recognized worldwide as the crème de la crème of the entire violin repertoire.

The collection consists of the following 3 pairs:

I sonata - G minor	I partita – H minor
II sonata – A minor	II partita – D minor
III sonata – C major	III partita – E major

Pairs I and III depict a third (terza) interval (G-H. C-E) and the pair II , a fourth interval (A-D). The first six notes form a circle of fifths: C-G-D-A-E-H).
Partita II in D minor consists primarily of 4 basic movements of a suite (allemande, courante, sarabande, and gigue) complemented by a concluding, fifth movement, chaconne which by far surpasses in powerfulness and significance all the previous four movements. In its outer form it consists of 32 variations. Each of them can be divided into two thematic cores so that we can clearly distinguish 64 basic components. Since each of them consists of four measures, this makes a total of $256 = 2^8$ measures or bars. Owing to its specificity this movement is often performed separately, starting in D minor only to switch to D major in the middle section and finally, it ends in D minor again. What is it in this piece of music that never cases to amaze all true violinists and listeners?

At the turn of the 18th century, the chaconne appears as a dance song (according to some historians it originates all the way from Mexico) in triple meter with frequent repetition of a single melody pattern. This form of chaconne, however, gradually disappears in the course of the century, evolving into a new form of polyphonic variations similar to that of passacaglia. Sometimes, these two forms of polyphonic variations are almost impossible to tell apart, since both are often characterized by repetition of melodic bass patterns and development of either polyphonic or homophonized variations above it. A number of chord combinations with the emphasized upper section may appear as thematic material of a chaconne as well.

Although a lot can be said about chaconne as a musical form, the very mention of it always brings in mind Bach's magnificent piece for solo violin in a variational form. Music theorists believe it embodies Bach's sense for thoughtful, magnificent, excitingly pathetic expression. This masterpiece is a true confirmation of Bach's exceptional improvisation fantasy and his ability to give to his inventions such an organized form that its specificities, allures and humors are still not fully illuminated.
This is how a music connoisseur sees and speaks about Bach's music. However, it can be viewed from entirely different angles revealing new, rather surprising insights. These insights multiply augment the admiration for and enjoyment in chaconne and, combined, they bring to light its universal, harmonic meaning. The journey we are about to embark upon will take us through the teaching of elements, chess game, Yi Jing, mathematics and some other regions and fields.

2. Chaconne and the teaching of elements

The teaching of elements has been present in various civilizations since the dawn of time. According to it, all the things that have been created in both the macrocosm, microcosm, i.e., in the big and the small universe, have been made through actions of these elements. Even the idea of the Godhead as the highest comprehensible entity may be divided in aspects analogous to the elements.
In the earliest scriptures of the Orient the elements are designated as “tattvas” (tattwas). According to the Indian succession of the tattvas, it runs as follow:

1. Principle of Ether or “Akasha” (Akasa)
2. Principle of Fire
3. Principle of Air
4. Principle of Water
5. Principle of Earth

The Indian doctrine states that four somehow grosser tattvas have emerged from the fifth, the Akasha principle. Thus, Akasha is the ultimate cause and is to be regarded as the fifth force, the so called quintessence.

The first element to emerge from Akasha was Fire. This element as well as all the other elements, does not manifest its impact only in our roughly material plane but also in everything else that has ever been created. The basic characteristics of the Principle of Fire are heat and expansion. Therefore, in the beginning of all things created must have been fire and light, and the Bible reads: “Fiat lux – Let there be light (There shall be light)”. The origin of Light is, of course, to be sought in Fire.

The next Principle, Water, compared to Fire has quite the opposite qualities: coldness and shrinkage. These two elements, fire and water, are the basic elements with the help of which all has been created.
The third Principle, Air plays the role of a mediator between the Fiery and the Watery Principles, establishing, in a certain way, the neutral equilibrium. In its mediating role, the Principle of Air has assumed the quality of warmth from the Fire and that of humidity from the Water. Without these two qualities any life would be inconceivable.

The Earthy Principle has been born out of the interaction of the three abovementioned elements as the last element which by its specific quality, the solidification, involves all the three elements. But at the same time, the action of the three elements has been limited with the result of space, measure, weight and time having been born.

Man is the true picture of God, created in the likeness of the Universe. All that is big in the Universe is reflected, to a smaller extent, in Man. We can only notice the activity of the elements in Man if we observe him as a unity of body, soul and spirit.

The first thing we notice about a human body is the head to which we assign the Fiery Principle because all that is active and fiery takes place in the head. The stomach is the venue of all the opposite, Watery activities, secretion, activities of the stomach juices, etc. Breasts certainly belong to the Air having a mediation role since the breathing is performed entirely mechanically. The Earthy Principle with its binding properties presents the integrity and wholeness of the human body with all its bones and meat.

The way the elements function in the body dictates the way the soul affected by the four types of temperament is going to behave. According to the prevailing element, there are choleric, sanguine, melancholic and phlegmatic personalities. The choleric nature originates from the Fiery element, the sanguine from the Airy one, the melancholic nature is created by the Watery element while the phlegmatic temperament is attributed to the Earthy element.
The four elements are expressed also in the soul as an immortal creation and the image of God. The Fiery Principle, the driving part designates the will (willingness). The Airy Principle is embodied in the intellect (mind), the Watery one in the life and feelings. However, it is the Earthy element that is responsible for the integration of all the three elements in the awareness of the personal self.

In music as one of the essential modes of human expression the presence of the elements is manifoldly obvious. At this point we shall list examples of only two of their numerous modes of expression.

1. The science of musical instruments is a branch of musicology studying the origin, development and functioning of particular forms and types of instruments. Historical development of musical instruments as tools of musical expression of Man brings us back to the earliest period of human civilization and the enormous variety thereof makes it hard to classify the instruments. However, nowadays, a classification into five basic groups according to the manner of tone production is most commonly in use:

(i) Chordophones - producing tones by way of vibrating strings stretched between two points.

(ii) Membranophones, from the group of percussion instruments, produce sounds by way of vibrating stretched leather membrane.

(iii) Idiophones, also percussion instruments, produce sounds by way of vibrating the very body of the instruments made of wood or metal (xylophones, castanets, cymbals, triangle)

(iv) In case of aerophone instruments, the tone is produced by way of vibrating a column of air inside the instrument's tube or pipe.

(v) In case of electrophones, electrical oscillations turn into acoustic ones before being emitted.

Here, it is possible to establish a connection with the elements. First of all, aerophone instruments can be associated with the Airy element due to vibration of the air column. Membranophones, due to the domination of rhythmic expression are easily associated with Water. Fire agrees with string instruments, which can produce both chords and melodies, and Earth corresponds to idiophones. Finally, electronic instruments, owing to the progress of science, are capable of simulating and imitating any of the instruments belonging to the above groups and therefore they can be brought into connection with the “all-inclusive” element, ether (Akasha).

2. In mathematical theory of music, the so called local musical structures, i.e., scales, chords, rhythms and melodies are studied separately. However, these four structures also closely define the four basic musical progressions. The tone scale is a single direction, gradual succession of tones of a certain tonal system within the span of an octave. The chord, however, is a harmony of at least three different tones organized based on a single, basic, constructive interval. Until the 20th century, this basic interval was a third (terza) and therefore the third is the only chord interval found in traditional harmony. Here, we shall observe the rhythm in the simplest possible manner, as a time sequence of tones of various duration, while the melody is defined as a succession of tones leaving the impression of a more or less rounded up formal entity.

Without venturing into more detailed explanations, the presence of the teaching of elements is, here again, obvious. For the purpose of interpretation of individual elements we shall use an analogy with the game of chess. (relationship between the chess and the teaching of elements is discussed in detail in M. Čanak’s book: "Mathematics and Music” (see [1]).

Just as the chess figure of Queen combines in itself the movements of the Rook (straight) and the Bishop (diagonal) and is agreeable with the element of Fire, the same goes for melody progression combining the ability to move along the tones of a scale as well as to progress with the tones of a "dissolved" chord.

Rook moves in straight directions (horizontally or vertically) and can step on each and every field on the chess board and is in compliance with the element of Earth. The same can be said about the progression along a scale that can encompass all the tones of a tonal system.

Bishop moves diagonally and can step only on one half of the square fields on the chessboard, i.e., either white or black ones (white or black bishop). Bishop conforms with the element of Air which in turn conforms with the chord progression in which only some tones are included and the others are skipped.

The element of Water is associated with the movements of Knight as well as with rhythmic movements. The rhythm may be associated with the rhythmic movements of a noble horse or the rhythm of the waves (water) breaking against the rocky coastline.

Formally, Bach's chaconne can be expresses numerically as 64 x 4 = 256 indicating 64 thematic cores each consisting of 4 measures which amounts to a total of 256 measures. Number 4 refers not only the number of measures per core, but much more importantly, it indicates the presence and perfect harmonization of the foresaid four elements, four music progressions and four local musical structures: scales, chords, rhythms and melodies. Each and every thematic core is dominated by one of the above aspects but the domination harmonically changes during the performance of the composition, moving from one place to another.

Even at first glance, number 64 leads us towards the major spiritual systems of the Universe such as chess with its 64 square fields and Chinese book of changes, "Yi Jing” with 64 hexagrams. Can we find connections and analogies between Bach’s chaconne and these systems? The answer is, of course, affirmative and corroborated by numerous examples of which we shall only dwell upon one per each of the systems.

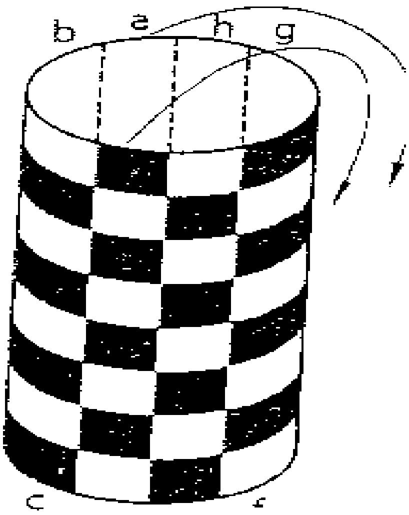
3. Chaconne and chess

Who knows how many chess enthusiasts, amazed by a game of chess played my grandmasters excitedly shouted: "This is true music on the chessboard”. Russian pianist Aptekarev, too, once said: “Chess is the music of the brain".

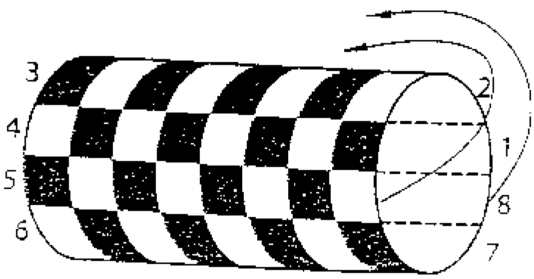
Throughout historical development of chess, numerous attempts, more or less successful, have been made to change the rules of the game in order to make it more interesting and dynamic. More often than not, the changes targeted the chessboard, the figures and the movements thereof.

One of the most interesting changes in the chess game is reflected in creation of the so called cylinder (cylindrical) chess. Cylinder chess problems enjoy high popularity in chess compositions. An ordinary chessboard can be used to make two (types of) cylinder(s). The vertical cylinder chessboard is formed by joining the vertical edges of an ordinary board (picture 1) and the horizontal one by joining the horizontal edges (picture 2).

Picture 1



Picture 2



When switched to the cylinder chessboard from the ordinary one, some problems otherwise solvable on the ordinary board become unsolvable. Numerous new and different situations and possibilities can occur on the cylinder chess board.

Inventors of the vertical cylinder chess probably never thought about the fact that it quite resembles the mathematical model of a pineapple and a pine cone and that chess fields are in accord with the pineapple and pine cone scales. In the book: M. Čanak: "Mathematics and Music - Truth and Beauty - One Golden Harmonic Thread", Belgrade, 2009 (see [1]) it is shown that these scales and pine cones are spirally sequenced, resembling the tones of a musical scale, circles of fifths and octaves. This means that the same musical model can be transferred onto the chessboard in the same way.

In his study, Pavle Bidev writes: "Just like music, chess was built based on the principle of an octave because the harmony of polar elements is possible only on the basis of number 8", but he does not offer any concrete explanation. The simplest one would be to compare the chessboard together with its field markings with the periodic table of elements or the table

of crystal classes with symmetric numbers thereof. There, the horizontal lines will correspond to scales, vertical to octaves and the path of movements of a chess figure will be a musical melody. Finally, the entire game played and finished by two great grandmasters of chess will be just like what a great crystallographer, Ilarion Ilarionovich Shafranovskii experienced in the world of crystals: “a magic symphony played on the chess board." Many true chess enthusiasts have clearly enjoyed and described this mystical experience.
All the foresaid tells us that Bach's chaconne behaves in the same way. Each chessboard field matches one of the 64 schematic cores of the chaconne. If we listen to the chaconne carefully, we get the impression of a slow circular ascension along the pine cone or pineapple spiral. This ascension is manifested on the cylinder-shaped chessboard if we make it by joining vertical edges of an ordinary chess board, connecting the field H1 with the field A2. This way we create a continual spiral line on the cylinder connecting all 64 fields from A1 to H8.
This is also the way branches, leaves and flowers on trees and elsewhere in the world of plants behave, the phenomenon known as "*phyllotaxis"* in botany. This term denotes the most favorable sequence of plant leaves for the purpose of acquiring the optimum exposure to sunlight, i.e., the natural aspiration of the plant towards the sun and life. And what the nature did by the will of the Creator, the great artist did completely spontaneously and intuitively with only one, tiny difference. Listening to the chaconne, we indeed ascend towards the sun and sunlight but when we reach the summit, the end, we realize that we are, once again, at the very beginning. And this seeming paradox is best explained by Riemann surfaces in the theory of functions of a complex variable.

4. Chaconne and Yi Jing

64 Hexagrams constitute the foundation of the philosophical-spiritual system of Yi Jing. Each hexagram consists of six lines, either solid, unbroken, or broken (open) lines with a gap in the center. The open lines are named Yin and the solid are referred to as the Yang lines. The first term symbolizes the quality of the Yin principle: earthly, passive, female, dark, etc. and the second stands for all the opposite qualities: heavenly, active, male, illuminated. Neither is better, per se, than the other, since both principles have equal roles in the totality of existence.

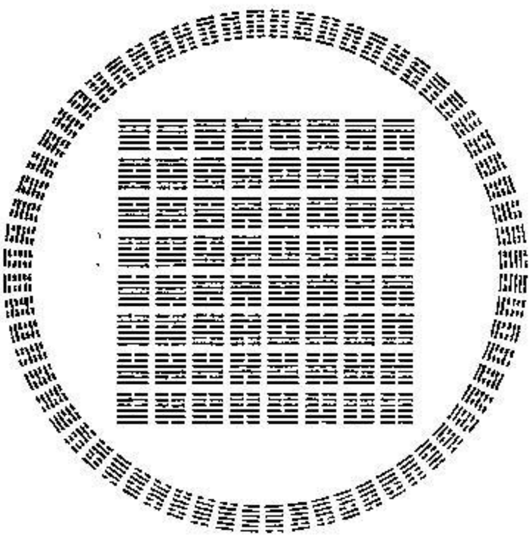
On the other hand, the basic building elements in the tonality of the classical music and its chords are the musical intervals of major and minor thirds. The sounding of a major third is characterized by strength and cheerfulness, powerfulness and enthusiasm, energy and stability while the minor third is of quite the opposite nature, soft and tender, darker and often moody and languorous. This already implies a strong analogy with Yang and Yin, the male-female principle, i.e., solid and open lines.

Such an approach could also be applied to other musical unisons and progressions. It is entirely natural to select a major and a minor second for Yang and Yin and lining thereof in succession creates various diatonic and chromatic scales. It is also natural to select any musical interval for Yang while Yin could be a complementary interval complementing the previous up to the octave. If Yang is a major third, Yin shall be a minor sixth and if Yang is a fourth it is complemented by a fifth as Yin. This closely resembles the theory of probability according to which the sum of the probability of realization of an event ν and the opposite probability $\bar{\nu}$ is always 1. ($\nu + \bar{\nu} = 1$).

In the same way, stacking trigrams and hexagrams in Yi Jing may be brought in connection with musical progressions or chords, i.e., simultaneous sounding of more than one different tones.

An even more profound tie between music and Yi Jing is revealed precisely through Bach's chaconne. In Picture 3, 64 hexagrams forming the circle symbolize Heaven and those forming the square, Earth. The totality of the hexagrams forms a complete system and the foundation of the Yi Jing, and, with appropriate interpretations and certain additional procedures, these hexagrams can describe any and all changes in nature and man. However, this same picture can be used as a presentation of the chaconne and its 64 composite parts. Piled into the square as an integral unit that can be displayed in a music notebook, together they represent a complete set of all the most important elements of violinism and the music itself. On the other hand, these elements could be arranged circularly, just like the stars in the sky. There, the slow journey from one point to the other corresponds to the listening of the chaconne and all its variations as an authentic artistic experience.

Picture 3



5. Mathematics and Bach's Chaconne

Bach certainly did not think much about mathematics while composing his divine chaconne and the violinists performing this work of art are sure to be even further from the thought. Still, there are scores of serious papers and articles on the subject "Bach and mathematics". Of all Bach’s compositions, the chaconne appears to be the most challenging piece for mathematicians owing to its unusual structure. Interestingly enough, even the complex analysis, a highly serious and spiritual field of mathematics, finds in the chaconne an inspiration and material for its explorations. In this paper we shall list only two of many examples thereof.

In his study “Johann Sebastian Bach and Mathematics”, (see [2]) Miloš Čanak points out Bach's immeasurable merit for the foundation of the tempered tone tuning. However, the mathematic foundation of this tonal system is a geometric series of numbers with a $q = \sqrt[12]{2}$ ratio. Indeed, if we line up the frequency numbers of the tones within an octave we shall get the following geometric series:

c	des	d	es	e	f	fis	g	as	a	b	h	c'
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2^2}$	$\sqrt[12]{2^3}$	$\sqrt[12]{2^4}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^6}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[12]{2^8}$	$\sqrt[12]{2^9}$	$\sqrt[12]{2^{10}}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	$\sqrt[12]{2^{12}} = 2$

Further to the point, in his other paper “Dualitatsprinzip und musikalische interpretation der komplexen zahlen” (see [3]), M. Čanak demonstrates that complex numbers are suitable for interpretation of chords, intervals and other musical structures. Of particular importance is the connection between the basic musical major-minor tonal systems from one side and the complex numbers and functions and conjugations thereof from the other. If, for instance, a major triad is denoted in the form of a complex number, then the corresponding conjugate complex number is to be used for the parallel minor triad.

The same study then goes on showing that complex numbers operations, too, have their musical meaning. Of particular significance in that respect is the complex numbers root extraction. This operation precisely describes a tempered tonal system and the 12 tones of the system "behave" exactly the same way as the 12 solutions of the so called binomial equation $z^{12} - 1 = 0$ $(z = x + iy)$ evenly dispersed along the unit circle.

The same idea is even more powerfully expressed both locally and globally in case of Bach’s chaconne. Formally, it is composed of 256 measures consisting of 64 groups of 4 measures or 4 thematic cores each which some music theorists refer to as 64 variations. Let us first dwell upon one such 4-measure group.

Each and every such group in its 4 measures contains 4 different and separate harmonic sets. Resembling the work of a four-stroke engine or clock mechanism this is also a practical example of a perfect musical mechanism in which, evenly and cyclically, measure by measure, these 4 harmonic sets are alternated in succession. The succession thereof can be compared, in terms of mathematics, with solving the algebraic equation $z^4 - 1 = 0$. All solutions of $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i$ are derived from the basic solution $z_0 = 1$ through successive multiplying by i and successive 90˚ rotation. If we venture one more step further, we can single out, from each of the harmonic sets, one basic tone representing it, thus obtaining the four key tones D, C, B A forming the "basic code" of Bach's chaconne. This code which is repeated 64 times poses a single descending musical progression per se.

Spiritually speaking an ascending melody progression corresponds to man's exit from the starting flow (point) towards the outside world and a descending melody progression denotes his return to his own self. In that sense, this repetition of the code and the four harmonic sets could be compared to the repetition of prayers or mantras in religious communities addressed to the Maker whose presence we feel deep in ourselves.

Still, it would be quite frivolous, even incorrect to reduce the chaconne to 64 repetitions of one same thing. Far from that, the great master made sure that each repetition be somewhat different and that in the wide flow of tones, harmonies and melodies it is almost impossible to notice the basic D, C, B, A code. Occasionally, he would switch to D, Cis, B, A for a harmonic minor or resort to D, Cis, H, A for a melodic minor or major. Right along the minors of the code there are always numerous other tones, chords and other embellishments and, also on occasions, a basic tone in the code is left out or its third counterpart is heard instead. One might even wonder if Bach was actually thinking about this code while composing the chaconne or it emerged quite spontaneously.

The 64 repetitions of the groups of 4 measures which, with the exception of 4 basic harmonic sets are completely different in every other aspect could be compared to the solutions of the algebraic equation $z^{64} - 1 = 0$ $(z = x + iy)$. These solutions, too, are different but uniformly spaced along the unit circle and unified by the same, common principle.

Interestingly, revealed are also analogies between Bach's chaconne and a complex phenomenon of the complex analysis such as Vekua complex differential equation. Due to the time and space limitation, on this occasion we shall discuss only the basic idea.

The most concise, homogenous canonic form for the equation is

$$w\frac{1}{z} = A\,(z, \bar{z})\,\bar{w}$$

with an unknown function $w(z, \bar{z}) = u(x, y) + v(x, y)$. where the coefficient $A(z, \bar{z})$ is a differentiable function along the variable $\bar{z}$ in a field of Ω. The basic known facts in the theory of Vekua differential equation are as follows:

I

If we take a closer look at the equation (1) itself, we can see 4 aspects that could be brought into connection with the teaching of elements and the corresponding chaconne's aspects.

a) In equation (1) beside the unknown function $w(z, \bar{z})$ there is also a conjugate function $\bar{w}$. Such equations are essentially more difficult to solve than those without conjugation. On the other hand, we saw that the relation between a complex function and its conjugate counterpart corresponds to the major-minor relationship in music. And Bach switches from D minor to D major right in the middle of the chaconne only to return to D minor again significantly contributing to the richness and sounding.

b) The form of the differential equation itself corresponds to the form of Bach's chaconne.

c) The $A(z, \bar{z})$ coefficient of Vekua equation is known and is used for expression of the general solution of the equation. It is the starting point for finding a solution. In the chaconne, this corresponds to the topic or the first four measures which pose as a basis for the variations to come.

d) The general solution of Vekua equation (1) contains a random analytical function $\Omega(z)$. By assigning to this function various values at will, it is possible to obtain an infinitesimal number of different solutions which means that there is a high degree of freedom allowed within the limitations with respect to the equation form and given coefficient. The great composer found himself in a similar situation. If we assume that at the very beginning he restricted himself by selecting the musical form of a chaconne, the basic theme and the total number of measures he was still left with enough freedom to express himself musically and he did so in a best possible manner. After all, all genuine artists, scientists and creators constantly move between restrictions and freedoms in their activities which pose a unique form of Yin and Yang of life.

II

In his already mentioned book [1], M. Čanak studies the 4 basic types of symmetries and dualities in music which can be associated with the teaching of elements and are, of course, present in the chaconne as well. In addition, this duality principle can be found existing in quite an analogue and similar way in case of Vekua differential equation, particularly with respect to the coefficient sign, coefficient form and the form of general solution. Here are 4 expressions thereof:

1. If *w* is one of the solutions of the equation (1) then V = in is the solution of the equation

$$w\frac{1}{z} = -\ A\,(z,\ \bar{z})\ \bar{w}$$

and vice versa. Equations (1) and (2) are called mutually associated equations.

2. Duality with respect to the coefficient: in addition to the family of ultimately integrable Vekua equations

$$w\frac{1}{z} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi+\bar{\varphi}}\ \bar{w} \tag{3}$$

where $\varphi\ (z)$ is the given analytic function, there is a dual family in the form of

$$w\frac{1}{z} = -\ \frac{\varphi'(z)}{\varphi+\bar{\varphi}}\ \bar{w} \tag{4}$$

3. Duality with respect to the form of the general solution: The general solution of the ultimately integrable Vekua equation (1) may be found in the form

$$w = c\ _x\ Q'(z) + (Q + \bar{Q}\ )u \tag{5}$$

as well as in the dual form

$$w = c\ _x\ Q'(z) + (Q - \bar{Q}\ )u \tag{6}$$

where Q (z) is a random analytical function and the unknown constant *c* as well as the unknown function $u = u\ (z,\ \bar{z}\ )$ are determined in the process of solving.

4. In the course of solving the equation (1) an important role is played by the auxiliary differential equation

$$u\frac{1}{z} = cu\bar{u} \tag{7}$$

where *c* is the given real constant. It can be shown that the general solution thereof is in the form

$$u = -\ \frac{1}{c}\,\frac{\varphi'(z)}{\varphi+\bar{\varphi}} \tag{8}$$

where φ *(z)*stands for a random analytical function. Similarly, it is possible to show that there is one more form of the solution of the same equation, namely

$$u = -\frac{1}{c}\frac{\varphi'(z)}{\varphi-\overline{\varphi}} \tag{9}$$

What is it in Bach's chaconne that could be compared with the auxiliary differential function (z)? What is it that constantly present throughout the chaconne, thus constituting its unavoidable part? First of all, this could be the sequences in the meaning of lowering or raising intonation degree of a musical motif. A series of sequences resembling the arches of a bridge often bridges two different musical happenings, just like the auxiliary equation (z) which forms a bridge for solving the Vekua equation. (1). Johann Sebastian Bach was the unsurpassed master of creation and utilization of sequences. In his chaconne, they are equally beautiful and inspirational individually as well as when turning into some other musical content.

III

In his paper [4] , M. Čanak shows that solving the Vekua equation (1) could be performed using the successive iteration method in the form

Each and every successive step and successive iteration are expressed through the previous iteration, given coefficient A (z, $\bar{z}$) and integral operator.

Bach acts in exactly the same way. His variations corresponding to iterations of Vekua equation are organically derived each from the previous one, while using the basic theme. The only difference is that instead of an integral operator he uses a composition procedure and his own creativity.
The paper [4] proves that the series of iterations (10) converge towards the solution of Vekua equation (1). In case of Bach's chaconne such a proof would be quite superfluous. Each and every careful listener hears and perceives the convergence of the chaconne's variations quite well, feeling that the great master leads him upwards, clearly and firmly, towards the final destination. This all happens entirely spontaneously and naturally, like the branches, leaves and flowers of a plant climbing spirally up, towards the sun and sunlight.

Indeed, Bach's chaconne is the one and only.

Literature
[1] Čanak M, “Matematika i muzika”, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd 2009.

[2] Čanak M, “Johann Sebastian Bach und die Mathematik”, VIII Ősterreichisches Symposion zur Geschlichte der Mathematik, Miesenbach 2006, pp.94-101.

[3] Čanak M, “Dualitatsprinzip und musikalische interpretation der komplexen zahlen”, The Teaching of Mathematics, Beograd 2006, vol. IX, 2, pp.31-40.

[4] Čanak M, “Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus mit analytischen Koeffizienten und Methode der verallgemeinerten areolären Reihen”, Publications de L’Institut mathématique, Beograd 1983., t. 33(47) pp. 35-39.

Prof. dr Miloš Čanak, State University of NOVI PAZAR

Jasna Fempl Mađarević, "MM ARHIMEDES”, V Grammar School Belgrade

sýmphonon · sýmmetron · rhythmós · harmonía

Remarks on the "Golden Triangle"
Music & Mathematics & Architecture

WERNER SCHULZE

All that is spatial has a sound.
Tone emerges from harmony.
Harmony emerges from concord.
Harmony and concord are the roots
from which music, laid down by the ancient kings, emerged.

Lü Pu Wei (3rd century B.C.): *Lü-shih Ch'un-chiu (Spring and Autumn),* vol. III/5

1 Introduction to Harmonic Thinking

The idea that the universe originated in sounds, or consists of sounds, was widely believed in ancient civilisations. At first this belief was outlined in myths and symbols. But when the Greeks evolved "from mythology to philosophy", this concept was still accepted, and it was reflected by the Pythagoreans and even by Plato.

Contemporary *Harmonic Thinking* (English *Harmonics,* German *Harmonik,* Spanish *Investigación Armónica,* Italian *Armonica* or *Ricerca Armonicale)* is based on this Pythagorean-Platonic tradition. Our main interest belongs less to its *history,* but more to the *system* of this scientific-artistic field and its *application* to other subjects. Harmonic research occurs like the "living voice", the "interdisciplinary dialogue" which combines the arts and the sciences on the mathematical roots of music.

Harmonic Thinking has his fundaments in *numbers* (ἀριθμός: x), *proportions* (λόγος: x:y), *means* (μεσότης: x:m:y), and *analogies* (ἀναλογία: x:y = X:Y ἀνὰ λόγον a:b), especially *analogies between nature, man and music.* In that way relationships are established, which wouldn't come to light through the individual sciences itself: Numbers and proportions (proportionalities) rule the tone durations (rhythms) and intervals in music, but at the same time they are understood as universal laws, which correspond to psychic and intellectual dispositions of man as well as to the arts (τέχναι), to ethical and political laws (for instance the question of δικαιοσύνη), to logic, philosophy, psychology, to macro- and micro-cosmos, to the course of the planets (ἁρμονία τῶν σφαιρῶν), and so on. A harmonic order of the world becomes visible, or, better to say, audible.

In this article we give an example of this Harmonic Thinking, which we may call a "Golden Triangle". It consists of the trinity "Mathematics & Music & Architecture". At the beginning we show a diagram developed from the "Bauhüttenbuch" written by Villard de Honnecourt (first half of 13th century). It is an interdisciplinary dialogue between geometry, music theory & architecture.

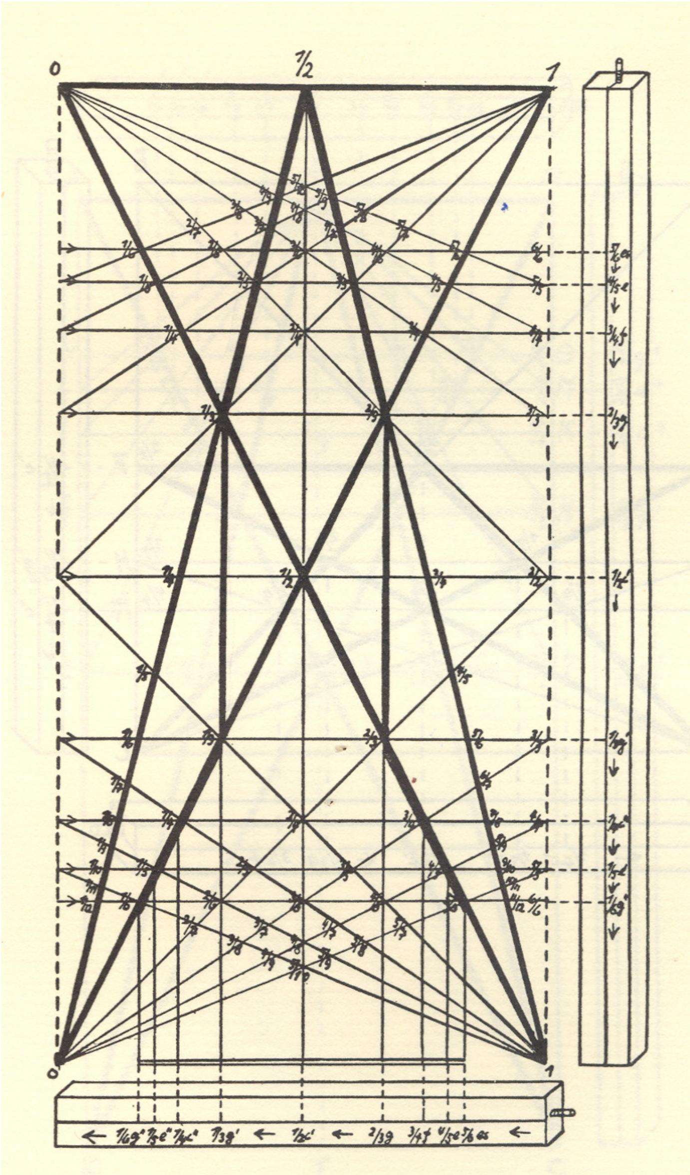


Figure 1
Hans Kayser: *Ein harmonikaler Teilungskanon,* Zürich 1946, 38

2 The Quality of the Numbers 2 and 3

The numbers *1, 2, 3* are the basic principles in Platos cosmology, which we find in his dialogue “Timaios”. All metaphysical categories are described with these numbers, all originates from them, and these numbers create the soul of the cosmos, which consists in an analogy to the Dorian scale. Timaios 35B - 36B:

“And he [The God, Demiourgos] began the division in this way. First he took one portion from the whole, and next a portion double of this; the third half as much again as the second ; the fourth double of the second; the fifth three times the third; the sixth eight times the first; and the seventh twenty-seven times the first.

Next, he went on to fill up both the double and the triple intervals, cutting off yet more parts from the original mixture and placing them between the terms, so that within each interval there were two means, the one exceeding the one extreme and being exceeded by the other by the same fraction of the extremes, the other exceeding the one extreme by the same number whereby it was exceeded by the other.

These links gave rise to intervals of 3/2 and 4/3 and 9/8 within the original intervals. And he went on to fill up all the intervals of 4/3 with the interval 9/8, leaving over in each a fraction. This remaining interval of the fraction had its terms in the numerical proportion of 256 to 243."

Epinomis 990 E – 991 B Plato's secretary Philipp of Opus (4th century BC) describes the numbers 2 and 3 as fundamentals of the four termini *sýmphonon, sýmmetron, rhythmós,* and *harmonía.* It is a typical Platonic way of thinking when he explains:

„Universal nature moulds form and type by the constant potency (ἀναλογία) and its converse about the double in the various progressions. The first example of this ratio (λόγος) of the double in the advancing number series is that of 1 to 2; double of this is the ratio of their second powers (κατὰ δύναμιν), and double of this again the advance to the solid (στερεόν) and tangible (ἁπτόν), as we proceed from 1 to 8 [this can be understood as the progression $2^0 \rightarrow 2^1 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2^3$, or as the analogy $1 : 2 \div 4 : 8$].

The advance to a mean of the double, that mean which is equidistant from lesser and greater term [the arithmetic mean], or the other mean which exceeds the one term and is itself exceeded by the other by the same fraction of the respective terms [the harmonic mean]. These ratios of 3:2 and 4:3 will be found as means between 6 and 12 [8 = harmonic mean, 9 = arithmetic mean between 6 and 12] why, in the potency of the mean between these terms [6, 12], with is double sense, we have the gift from the blessed choir of the Muses to which mankind owes the pleasure (χάρις) of *sýmphonon* & *sýmmetron,* and *rhythmós* & *harmonía."*

It is necessary to give a short explanation of these terms: *sýmphonon* = musical tones or spatial elements, bound together; *sýmmetron* = lengths of space or time, bound together; *rhythmós* = organism of time units, bound together to the whole of phrases/melodies in music; *harmonía* = organism of single tones, bound together to the whole of a scale/mode/melody.

At the same time (3rd century BC) the Chinese scholar Lü Pu Wei *(Lü-shih Ch'un-chiu,* vol. VI) describes the numbers 2 (female, yin) and 3 (male, yang) as the fundaments of the Chinese tone system with its 12 tone positions. (Of course, Chinese music is pentatonic, but changes month per month within the totality of 12 tones.)

	Length of bamboo tubes		*Musical intervals:*	
	yin-lü	yang-lü	*fifth up, fourth down*	
Basic measure		81		*c*
shang sheng: 3:2	54	+	*g*	
hsia sheng: 3:4	+	72		*d*
	48	+	*a*	
	+	63		*e*
	42		*b*	
	144 +	216	= 360 (= days per year)	
	144 : 216 = 2 : 3 (Yin/Yang)			
		57		*f sharp*
hsia sheng	76	+	*c sharp*	
shang sheng	+	51		*g sharp*
	68	+	*d sharp*	
	+	45		*a sharp*
	60		*e sharp*	
	204 +	153	= 357 (= days per year, approximately)	
	204 : 153 = 4 : 3 (Yin/Yang)			

It is also the application of the laws of music to the art of building which dates back to Greek antiquity. We know most about its practice through *De architectura libri decem* by the Roman writer Vitruvius Pollio (84-14 B.C.). In Renaissance time Leon Battista Alberti (1404-1472) and Andrea Palladio (1508-1580) became famous for her architectural designs based on musical laws.

The aim of this article with the Epinomis-based title *"sýmphonon · sýmmetron · rhythmós · harmonía"* is to demonstrate the influence of music to architecture, but also the influence of architecture to music. We understand architecture as the music of space, and music as the architecture of time. In fact, architecture and music are the most opposite arts, but at the same time they exist like sister-arts. In the sector of Applied Harmonics the relationship between music and architecture is the most important.

3 Triangle Figures: Plato - Ramon Llull – Aulis Blomstedt

In our context it sounds unusual to mention Ramon Llull (1232-1316), whose name is built in a mirror-symmetric form (LLULL). This famous Catalan-Mallorquine scholar dreamed that law, medicine, knowledge of nature, mathematics, logic and especially theology could become a unified whole because they are all linked by a common denominator: namely, by Llulls *ars (ars combinatoria, ars universalis, ars generalis ultima).* From Llulls (theo-)logical figures we show only this one:

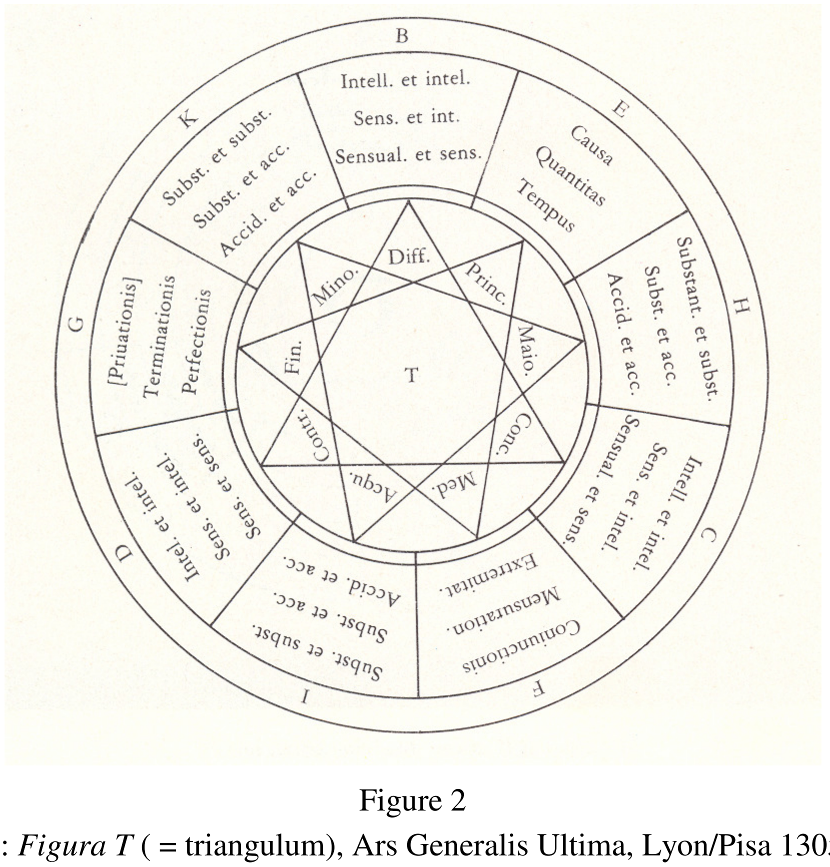


Figure 2

Ramon Llull: *Figura T* (= triangulum), Ars Generalis Ultima, Lyon/Pisa 1305-1308, II.1:
3 triangles, all with 3 attributes, analytic symbols, numbers, letters, or other elements

x, y, z are the elements we are using now. With these 3 elements we are able to explain our statement that Harmonic Thinking is based on the unity of numbers (singularity), proportions (duality), means (trinity), and analogies (quaternity). We demonstrate this in the following way:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & x^3 & & & \\
 & & : & & : & & \\
 & x^2y & & : & & x^2z & \\
 \div & & & & & & \div \\
 xy^2 & : & & xyz & & : & xz^2 \\
 : & & & & & & : \\
 y^3 \quad : & & y^2z & \div & yz^2 & & : \quad z^3
\end{array}
$$

Figure 3

Canon xyz

1st line: the singularity of a number (ἀριθμός)
2nd line: the duality of a proportion (λόγος)
3rd line: the trinity of a mean (the geometric mean) (μεσότης)
4th line: the quaternity of an analogy (the Platonic-geometric analogy) (ἀναλογία)

The whole scheme corresponds to the Platonic-geometric analogy, which is the Platonic version of the Neo-Pythagorean τετρακτύς (quaternity): *xyz* is like the heart, the centre or the soul of this triangle figure. That's the reason we name the figure *Canon xyz* (κάνων: in German also "Gefüge", "Grund-Gefüge"). Each term of this triangle figure has three elements, so our triangle figure is not a combinatory (com2natory), but a conternatory (con3natory) scheme. It shows the unity of three λόγοι:

λόγος x:y (lines from the top to the left),
λόγος x:z (lines from the top to the right),
λόγος y:z (lines from the left to the right).

The unity of these three λόγοι became important in music theory: $x/y \cdot y/z = x/z$, where x/z means the sum of two intervals x/y and y/z. On the other hand $x/z = x/y \cdot y/z$ is the splitting (διαίρεσις) of one interval into two. And the scheme x/y "plus" $y/z = x/z$ also corresponds to the syllogistic scheme:

Socrates / human being (x/y)
human being / death (y/z)
-> Socrates / death (x/z)

Plato describes Figure 3 (Gorgias 508 A, Timaios 31 B - 35 A, Politeia 546, Politeia 587 B) explaining we should draw it in the form of the Greek letter Lambda (Λ). Harmonic Research names the figure "Lambdoma", and it corresponds to the Pythagorean-Platonic quaternity (τετράς, τετρακτύς) with the famous "Oath on Pythagoras":

οὐ μά τὸν ἁμετέρᾳ παραδόντα τετράκτυν,
παγὰν ἀενάου φύσεως ῥίζωμά τ' ἔχουσαν.

Verily, by Him who gave our soul the tetraktys,
Holding the power and root of everlasting being.

Instead of the analytic symbols now we use numbers:

x=1, y=2, z=3

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{2} & & 3 & & \\
 & \mathbf{4} & & \mathit{6} & & 9 & \\
 \mathbf{8} & & \mathbf{12} & & \mathbf{18} & & \mathbf{27}
\end{array}
$$

Figure 4

Canon 6

1/2 x 2/3 = 1/3
Octave + Fifth= Duodecime

Platon: *Timaios* 35 A - 36 D: this scheme as the basic numbers in cosmology
(2 = ταὐτόν, "the same", 3 = τὸ ἕτερον, "the different")
As metaphysical principles they create the soul of the world.

Philipp of Opus: *Epinomis* 990 E: progression 1 → 2 → 4 → 8

Philippe de Vitry (1291-1361): *Ars nova*
Measurements of tone durations are based on the proportions 1:2 and 1:3.
These proportions mark the relation of
maxima : longa, longa : brevis, brevis : semibrevis.

Harmonic Thinking understands this "mathematical unity" or "mathematical organism" of numbers as follows: 1. frequencies of tones, easy to demonstrate with the length of strings of a monochord. Because the number 2 is not used, all 10 tones are different. (Number 2, yin in Chinese philosophy, means the inactive female principle, in music theory 2 means *the same,* ταὐτόν, the octave); 2. measures in geometry and architecture (3 dimensions).

Figure 5

From the time measurement of *Ars nova* to the *Taktarten* of classical music:
Leopold Mozart (1719-1787): *Versuch einer gründlichen Violinschule (A Treatise on the Fundamental Principles of Violin Playing),* Augsburg 1756,
I.2: "Von dem Takte"

Further development of figure 4 shows figure 6:

x=2, y=3, z=4

8

12 16

18 *24* 32

27 **36** **48** **64**

Figure 6

Canon 24

2/3 x 3/4 = 1/2
Fifth + Fourth = Octave

Platon: *Politeia* 546, use of this figure in metaphysics

Further development of figure 6 shows figure 7:

x=3, y=4, z=5

27

36 45

48 *60* 75

64 **80** **100** **125**

Figure 7

Canon 60

3/4 x 4/5 = 3/5

Fourth + Major third = Major sixth

If we look to *Canon 60* developed by the Finnish architect Aulis Blomstedt (1906-1979), the Pythagorean-Platonic fundament of his basic numbers is obvious (but unknown by the architect). There exists an analogy between Platonic cosmology and modern architecture. It is possible to make the Platonic cosmological thinking visible through architectural principles, which are also audible.

64	80	100	125
4^3	$4^2 \cdot 5$	$4 \cdot 5^2$	5^3
d flat	*f*	*a*	*c sharp*

48	60	75
$3 \cdot 4^2$	$3 \cdot 4 \cdot 5$	$3 \cdot 5^2$
a flat	*c*	*e*

36	45
$3^2 \cdot 4$	$3^2 \cdot 5$
e flat	*g*

27

3^3

b flat

Figure 8a

Aulis Blomstedt: *Canon 60*

Figure 8b

Aulis Blomstedt: *Canon 60,* in musical notes (1. structure, 2. scale)

Further development of figure 6 shows figure 7:

x=4, y=5, z=6

If we add the musical notes, again we have an arithmetical-architectural-musical organism of numbers, which offers a new order.

64
c

80 96
e *g*

100 *120* 144
g sharp *b* *d*

125 150 180 216
b sharp *d sharp* *f sharp* *a*

Figure 9

Canon 120

4/5 x 5/6 = 4/6 = 2/3

Major third + Minor Third = Perfect Fifth

Walter Odington (14th century, monk, engaged in mathematics and music theory): In his book *De speculatione musices* he was one of the first who described this division (διαίρεσις) of the fifth (2:3), which brought to light the natural proportions of the major (4:5) and minor (5:6) third, the most important step in the development of the so-called "natural tone system". Figure 9 is also related to a system, which is called "Tonnetz", founded in 18th century by Conrad Henfling (1648-1716) and Leonhard Euler (1707-1783).

4 Music and Architecture

As we explained at the beginning, not only single numbers, but also proportions (x : y), means (x : m : y), proportionalities (x : y = ax : ay) and analogies (x : y = X : Y ἀνὰ λόγον a : b) are the basic fundaments in Greek mathematics, music theory, astronomy, philosophy, ethics, state theory, and other fields of investigation. These mathematical principles are important for all relationships between music and architecture in past and present.

Some architects of the 20th and 21st century based their work on musical laws, conscious of it or not. And, vice versa, composers took principles from architecture to create their compositions, conscious of it or not. A few names: *Antoni Gaudí* (1852-1926): the importance of the hyperbolic paraboloid, and of natural and geometric fundaments of architecture. *Le Corbusier* (1887-1965): the Fibonaccci-based modulor. The Finnish architect *Aulis Blomstedt* (figure 8a): analogies between the measurements of buildings and human being in correlation to the mathematical fundaments of music. *Iannis Xenakis* (1922-2001), architect and composer, who worked together with Le Corbusier, became famous for his design of the Philips-Pavillon in the form of a hyperbolic paraboloid at the World Exhibition Brussels 1958. At the same time Xenakis composed "Metastasis", which is based on similar geometric-architectural ideas. *Werner Schulze* (1952): Variations for piano "Aus Stein gehauen", related to the Viennese church „Zur heiligsten Dreifaltigkeit" (Holy Trinity) designed by the sculptor Fritz Wotruba. Japanese architect *Hiroki Watanabe* (1968): "Architectone" - Architectural design based on musical principles.

Bibliography

Leon Battista Alberti: *De re aedificatoria libri X,* 1452

György Doszi: *The Power of Limits,* Boulder 1981 *(Die Kraft der Grenzen. Harmonische Proportionen in Natur, Kunst und Architektur,* München 1984)

Joscelyn Godwin: *Harmonies of Heaven and Earth. The Spiritual Dimension of Music from Antiquity to the Avant-Garde,* London 1987

Marcel Granet: *Das chinesische Denken,* München 1963

Kenneth Sylvan Guthrie: *The Pythagorean Sourcebook and Library. An Anthology of Ancient Writings Which Relate to Pythagoras and Pythagorean Philosophy,* Michigan 1987

Rudolf Haase: *Harmonics in Architecture,* abacus 2, Museum of Finnish Architecture, Helsinki 1980, 93-113

-- : *Der Briefwechsel zwischen Leibniz und Conrad Henfling. Ein Beitrag zur Musiktheorie des 17. Jahrhunderts,* Frankfurt 1982

Hans Kayser: *Ein harmonikaler Teilungskanon,* Zürich 1946

-- : *Paestum,* Heidelberg 1958

Ernst Levy: *A Theory of Harmony,* ed. S. Levarie, Albany 1985

Werner Schulze: *Stütze und Last. Zur Architekturphilosophie Schopenhauers.* Grenzgebiete der Wissenschaft, 42/4, Innsbruck 1993, 329-343

-- : *Architecture as Music - Score as Design,* Space Design. Journal of Art and Architecture, Tokyo 1995, 97-100

-- : *Number and Proportion in Plato's Political Theory,* Plato's Political Philosophy and Contemporary Democratic Theory. 8th International Conference on Greek Philosophy, Athens 1997, 184-200

-- : *Architektur ist gefrorene Musik.* Kunstpunkt 19, Wien 2000, 18-19

-- : *Tetras and Tetraktys,* Greek Philosophy and Epistemology. 12th International Conference on Greek Philosophy, II, Athens 2001, 141-157

-- : *LLULL. Ein Logo-Mysterion,* Wien 2001

André Studer: *Architektur – Mensch – Mass,* Bern 1976

-- : *Geistige Gestaltungsprinzipien und Sinn der Anwendung der Harmonik in der Architektur,* Bern 1977

Marcus Vitruvius Pollio (Vitruv): *De architectura libri X*

VOJTĚCH JARNÍK (1897–1970) AND HIS STUDIES IN GÖTTINGEN

Martina Bečvářová, Ivan Netuka

Jarník's childhood and studies

Vojtěch Jarník was born in Prague on December 22, 1897. His father Jan Urban Jarník (1848–1923), a professor of Romance philology at Charles University, was a well-known authority on French, Romanian and Albanian languages, poetry and folklore.

Jarník studied at *c. k. vyšší reálné gymnasium*, located in Ječná street in the center of Prague quite close to where the Jarníks lived. After his graduation, he entered the Philosophical Faculty of Charles University and from 1915 to 1919 he was attending lectures in mathematics, physics, philosophy, psychology, chemistry and Czech and German literature. He was taught mathematics by Karel Petr (1868–1950), Bohuslav Hostinský (1884–1951), Karel Rychlík (1885–1968), Jan Sobotka (1862–1931), Bohumil Bydžovský (1880–1969) and Václav Láska (1862–1943), and physics by Bohumil Kučera (1874–1921), Václav Posejpal (1874–1935), Vladimír Václav Heinrich (1884–1965) and František Záviška (1879–1945).[1] During his studies at the University as well as afterwards Jarník was influenced by the mathematician Petr.

Early mathematical work

Immediately after completing his studies in 1919, Jarník started working as an assistant to Jan Vojtěch (1879–1953), professor of the Technical University in Brno. However, he spent only two academic years there and in 1921 returned to Prague and became an assistant to Petr. Under Petr's supervision he wrote his dissertation *O kořenech funkcí Besselových* [On the zeros of Bessel functions] which he successfully defended in the academic year 1920/1921.[2] He received the title RNDr.

[1] It is interesting to mention that Jarník, during regular studies at Charles University, had 98 hours of physics and 113 hours of mathematics, more than half of which were taught by Petr.

[2] There is no copy left in the Archives of Charles University. For some information, see Jarník's article *O kořenech funkcí Besselových* [On the zeros of Bessel functions], Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění, II. třída, 29(1920), No. 28, 6 pages.

after final examinations at the then newly founded Faculty of Sciences of Charles University in 1921.

Petr continued to influence Jarník's studies in mathematical analysis and number theory. At the beginning of the twenties when Petr was finishing his textbook *Počet differenciální* [Differential calculus],[3] Jarník helped him with the proof-reading and even contributed some improvements to the text.

Jarník's extraordinary mathematical erudition was firmly demonstrated in his paper *O funkci Bolzanově* [On the function of Bolzano] (1922)[4] in which he examined in detail a recently discovered manuscript of Bernard Bolzano (1781–1848), dating from the 1830's.[5] Jarník proved, among other things, that Bolzano's function is in fact the oldest example of a continuous nowhere differentiable function; this might have been the stimulus for Jarník's future interest in real function theory. Jarník's assessment of the work *Functionenlehre*,[6] which had been discovered among the papers in Bolzano's inheritance, was of great importance.[7]

Mathematics in Göttingen

After the First World War, the University in Göttingen reached its academic peak: a high level of work prevailed not only in mathematics, but also in physics, chemistry, biology as well as in the social sciences and humanities. In Göttingen there was a vibrant scientific atmosphere owing to the large and revitalized academic community, which included

[3] K. Petr: *Počet differenciální (část analytická)*, Jednota československých mathematiků a fysiků, Praha, 1923, xvi + 466 pages.

[4] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 51(1922), pp. 248–264.

[5] Bernard Bolzano was a mathematician, philosopher and theologian. From 1805 to 1820 he was the head of the Department of Religious History at the Philosophical Faculty in Prague. Because he criticised the Austrian authorities and church, as well as the political and social system, he was retired and spent many years under the police control. As a consequence of his activities he disappeared from teaching, publishing and public life. Only few of his mathematical and philosophical works were published during his life. Many of them remained in manuscripts and were not easy to read; they were finally studied in the twentieth century. About his life and work see *The Bernard Bolzano Pages at the FAE*: http://www.sbg.ac.at/php/bolzano.

[6] B. Bolzano: *Functionenlehre*, edition "Spisy Bernarda Bolzana", vol. 1, Královská česká společnost nauk, Praha, 1930, xx + 184 + 24 + vi pages.

[7] Later Jarník gave probably one of the best qualified evaluation of Bolzano's results in analysis. For more information see V. Jarník: *Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis*, Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists, Praha, 1981. (Translated by J. Jarník from the Czech version: *Bolzano a základy matematické analýzy*, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1981.) Bolzano's works are available in the *Czech Digital Mathematics Library* (http://www.dml.cz).

gifted students, distinguished visitors from all over the world, and guest professors who came to present papers, give seminars or hold regular lectures.

In the second decade of the 20th century, the Göttingen mathematical community consisted of four ordinary professors, three or more extraordinary professors, some guest professors, several private docents, lecturers, senior and junior assistants, about two hundreds undergraduate and graduate students and visitors. Among the members of the staff of the University in Göttingen we can find many outstanding mathematicians as for example: Felix Bernstein (1878–1956), Paul Bernays (1888–1977), Richard Courant (1888–1972), Gustav Herglotz (1881–1953), David Hilbert (1862–1943), Edmund Landau (1877–1938), Hermann Minkowski (1864–1909), Otto Neugebauer (1899–1990), Emmy Amalie Noether (1882–1935) and Hermann Weyl (1885–1955).

During the 1920's and at the beginning of 1930's many visiting professors spent some time in Göttingen in order to lecture or to collaborate with others there (for example Emil Artin (from Hamburg), Reinhold Baer (from Freiburg), Ruth Moufang (from Frankfurt), Richard von Mises (from Berlin), John von Neumann (from Berlin), George Polya (from Zurich), Oswald Veblen (from Princeton)). At the same time, some of the future outstanding mathematicians studied in Göttingen or worked there as Courant's, Hilbert's or Landau's assistants (for example Herbert Busemann, Max Deuring, Saunders MacLane, Gerhard Gentzen, Olga Taussky) and many mathematicians obtained their *Habilitation* in mathematics, applied mathematics or mathematical physics at the University in Göttingen. Some of them continued their careers as private docents, extraordinary professors or ordinary professors there; others lectured at German universities as well as at European mathematical institutions or later moved on to positions in the USA.[8]

Jarník and his studies in Göttingen

From the 1870's onwards, the most talented and outstanding mathematicians and physicists from the Czech lands went abroad, enabled by government scholarships and funding, in order to extend and deepen their mathematical knowledge and skills. They travelled mainly to Germany, France or Italy and studied in the most prestigious mathematical centers of the period, at Berlin, Göttingen, Hamburg, Leipzig, Munich, Paris, Strasbourg, Milano, and Rome. Here, they hoped to be more closely involved in the latest mathematical trends and methods and to

[8] For more information about the academic staff in Göttingen see [BN], [E] and [Sch].

become acquainted with the newest ideas in the field; they also hoped to be able to have their first papers accepted by respected journals and their first monographs issued by internationally known publishing houses; and finally, they sought out the most advanced education methods which they could bring back with them on their return to universities and polytechnics in the Czech lands.

Karel Petr recognized early Jarník's outstanding mathematical talent and gave him full support to study abroad. In 1923 Jarník left Prague and travelled to Göttingen where he studied and worked until February 1925. He was apparently most influenced by E. Landau,[9] an outstanding specialist in mathematical analysis and number theory. (It should be mentioned that Jarník had studied analytic number theory and Landau's well-known works before his visit to Göttingen.) Once there, he regularly attended the lectures of E. Landau and E. Noether,[10] which were well

[9] Edmund Landau studied at the University in Munich and then at the University in Berlin where he graduated (1899). After obtaining his degree (1901) he lectured in Berlin. In 1909 he moved to Göttingen where he was named an ordinary professor of mathematics. He had to stop his lectures at the University in Göttingen in November 1933 because of the disgusting boycott led by the young student Oswald Teichmüller, fanatic Nazi and member of the SA. After his resignation Landau moved to Berlin where he died on February 19, 1938. He was interested in analytic number theory, theory of functions of complex variables etc. His monographs *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (1909), *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* (1916), *Vorlesungen über Zahlentheorie* (1927) and *Grundlagen der Analysis* (1930) inspired many young mathematicians.

[10] Emmy Amalie Noether was a daughter of Max Noether, professor of mathematics in Erlangen. After her studies at the "Höhere Töchter Schule in Erlangen" (1889–1897) she took the examinations of the State of Bavaria and became a certificated teacher of English and French at girls schools (from 1900). She never accepted this position as she decided to study mathematics at Erlangen University (1900–1902). She then continued in Nürnberg (1903) and finally completed her studies at Göttingen University (1903–1904) where she attended lectures by O. Blumenthal, D. Hilbert, F. Klein and H. Minkowski. In 1907, she obtained a doctorate in Erlangen under P. Gordan. From 1907 to 1915 she helped her father with his lectures at Erlangen University but was not named an assistant; for a woman it was then impossible. In 1915 she moved to Göttigen where she lectured thanks to the support of Hilbert. After a long battle with the university authorities, she was appointed professor of mathematics (1922) and she taught there up to 1933. In 1933, she had to emigrate to the USA; Nazi laws made her academic career no longer possible. She obtained a position at Bryn Mawr College in Pennsylvania and she also lectured at the Institute for Advanced Study in Princeton. Noether was incredibly influential for modern abstract algebra. From 1907 up to 1919 she was interested in solving Jordan's and Hilbert's problems, from 1920 up 1926 she worked on ideal theory and from 1927 she studied and solved many problems on non-commutative algebra. She opened new and modern directions in abstract algebra which influenced the development of mathematical thinking. Her fundamental results were extended, generalized and popularized by her pupils and co-workers (for instance, B. L. van der Waerden).

received and inspiring for younger mathematicians. He also took part in their seminars and was in close touch with their students.

In the academic year 1927/1928 Jarník paid his second long-term visit to Göttingen and continued his collaboration with Landau.[11] He also regularly visited the lectures of K. Grandjot,[12] P. S. Aleksandrov,[13] B. L. van der Waerden[14] and E. Landau.[15] It should be noted that Landau deeply influenced Jarník's professional career and without any doubt he was Jarník's second important "mentor". Throughout

[11] Jarník's second stay was supported by the International Education Board from which he received a scholarship to spend one academic year in Göttingen to work on number theory with Landau. Jarník was strongly recommended and supported by Petr. For more information see [SS], pp. 293.

[12] Karl Grandjot (1900–1979) studied at the University in Göttingen and he graduated there with the thesis *Über das absoluten Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen* (1922). From 1925 to 1929 he was a private docent in Göttingen; he then moved to Chile and became an ordinary professor of mathematics. He taught at the Pedagogical Institute of the University of Santiago de Chile until 1965 when he was retired. He was interested in analysis and geometry of numbers.

[13] Pavel Sergeevich Aleksandrov (1896–1982) studied mathematics under V. V. Stepanov, N. N. Luzin and D. F. Egorov at the University in Moscow (1913–1916). Then he shortly taught at the University in Smolensk (1920–1921). From 1921 he lectured at the University in Moscow where he gave lectures on several interesting and modern topics (functions of real variable, topology, Galois theory etc.). In the academic year 1923/1924, he studied at the Mathematical Institut of the University in Göttingen, from 1924 until 1932 he went to Germany mostly every summer, lectured there and collaborated with R. Courant, F. Hausdorff, D. Hilbert, H. Hopf, E. Noether and other German mathematicians. A large part of the academic year 1927/1928 he spent at Princeton in the USA where he collaborated with S. Lefschetz, O. Veblen and J. W. Alexander. Aleksandrov's first outstanding results are connected with topology and theory of functions of real variables. In many papers from the 1920's and 1930's he developed the basis of topology, homology and cohomology theory, theory of dimension, theory of bicompact spaces. In the 1940's he discovered the ingredients of an exact sequence of the kernel of a homomorphism, and later he worked on the theory of continuous mappings of topological spaces. Some of his works are also connected with geometry, functional analysis, mathematical logic, foundations and history of mathematics. For more information see [AKMO], [BeNe] and [ZD].

[14] Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996) studied in Amsterdam, Göttingen and Hamburg and finally finished his studies in 1926 in Amsterdam. The next year, he was named an assistant of mathematics and then a private docent at the University in Göttingen. In the twenties and thirties he lectured mathematics as a full professor in Göttingen, Gröningen and Leipzig. After the war he taught in Leipzig, Baltimore, Amsterdam and Zurich. He was interested in algebra (ideal theory, Galois theory, group theory, abstract algebra), algebraic geometry, number theory, topology, probability and statistics, history of mathematics, astronomy and sciences. His monographs *Modern Algebra I., II.* (J. Springer, Berlin, 1st edition, 1930, 1931, viii + 243 pages, vii + 216 pages) were published in several editions in many languages and influenced generations of mathematicians.

[15] Jarník chose Landau's lecture on higher analysis (summer semester 1927/1928).

Landau's life, they were in the close touch and often collaborated together.[16] It should be mentioned that Jarník had a bound collection of the most of all Landau's reprints.

From the second half of the twenties, Jarník was interested in number theory (especially in problems of lattice points) and theory of real functions. He wrote his articles in the Czech, German and French languages and published them in Czech or German journals.

Thanks to his studies in Göttingen and his conversations with German mathematicians, and under their influence, Jarník finished more than ten works, some of which were published in Mathematische Zeitschrift, Mathematische Annalen and Annali di matematica pura ed applicata.[17] At the end of the twenties and during the thirties, Jarník continued in his study of number theory and Diophantine approximations. He published his results in Mathematische Zeitschrift, Monatshefte für Mathematik und Physik, Tôhoku Mathematical Journal as well as in Czech journals.[18]

Jarník's notes of Göttingen mathematical lecture courses

Among the most special archival materials from this period deposited in the Archive of the Academy of Sciences of the Czech Republic are fourteen "notebooks" which contain the lectures of E. Noether, K. Grandjot, P. S. Aleksandrov and B. L. van der Waerden. These notebooks were kept by V. Jarník, the future prominent mathematician, during his studies at Göttingen in the academic years 1923/1924, 1924/1925 and 1927/1928.

The notebooks were discovered by Jindřich Bečvář in 2004 when he was preparing an extensive monograph on the life and work of Vladimír Kořínek (1899–1981), a leading Czech algebraist of the 20th century.[19] Kořínek's unusually vast archival collection containing his personal, pedagogical and professional materials as well as some materials of his friends and colleagues from Charles University and the Czech Academy of Sciences is of special interest as it allows us to trace the development of mathematics in Czech lands.

---

[16] For more information about their collaboration see [BeNe] and [No].

[17] Fore more information about Jarník's publication activities see [BeNe] and [No].

[18] For more information see the bibliography of Jarník's scientific works published in [No].

[19] Kohoutová Z., Bečvář J.: *Vladimír Kořínek (1899–1981)* (in Czech), Edition History of Mathematics, volume 27, Research Center for the History of Sciences and Humanities, Prague, 2005.

Although Jarník and Kořínek were good friends and colleagues, we are not able to explain how Jarník's notebooks came to be deposited in Kořínek's archival collection. As we described in the chapter devoted to Jarník's life, we know that he studied modern structural algebra under Noether in the academic year 1923/1924 and 1924/1925: the notebooks contain her lectures titled *Invariantentheorie* (summer semester 1923/1924), *Körpertheorie* (summer semester 1923/1924), *Gruppentheorie II* (winter semester 1924/1925), *Hyperkomplexe Zahlen und Gruppencharaktere* (winter semester 1927/1928); the theory of numbers and modern structural algebra under van der Waerden in the academic year 1927/1928: the notebooks contain his lectures titled *Allgemeine Idealtheorie* (winter semester 1927/1928) and *Algebraische Zahlen* (summer semester 1927/1928); modern algebra under Grandjot in the winter semester in 1927/1928: the notebooks contain two of his lectures titled *Algebra II* and *Galoissche Theorie*; and analysis under Aleksandrov in the summer semester 1927/1928: the notebook contains his lecture titled *Punktmengen und reelle Funktionen.* It is not without interest that Jarník attended lectures predominantly on modern algebra and very rarely those on number theory and analysis, although these two topics represent his main mathematical subjects.

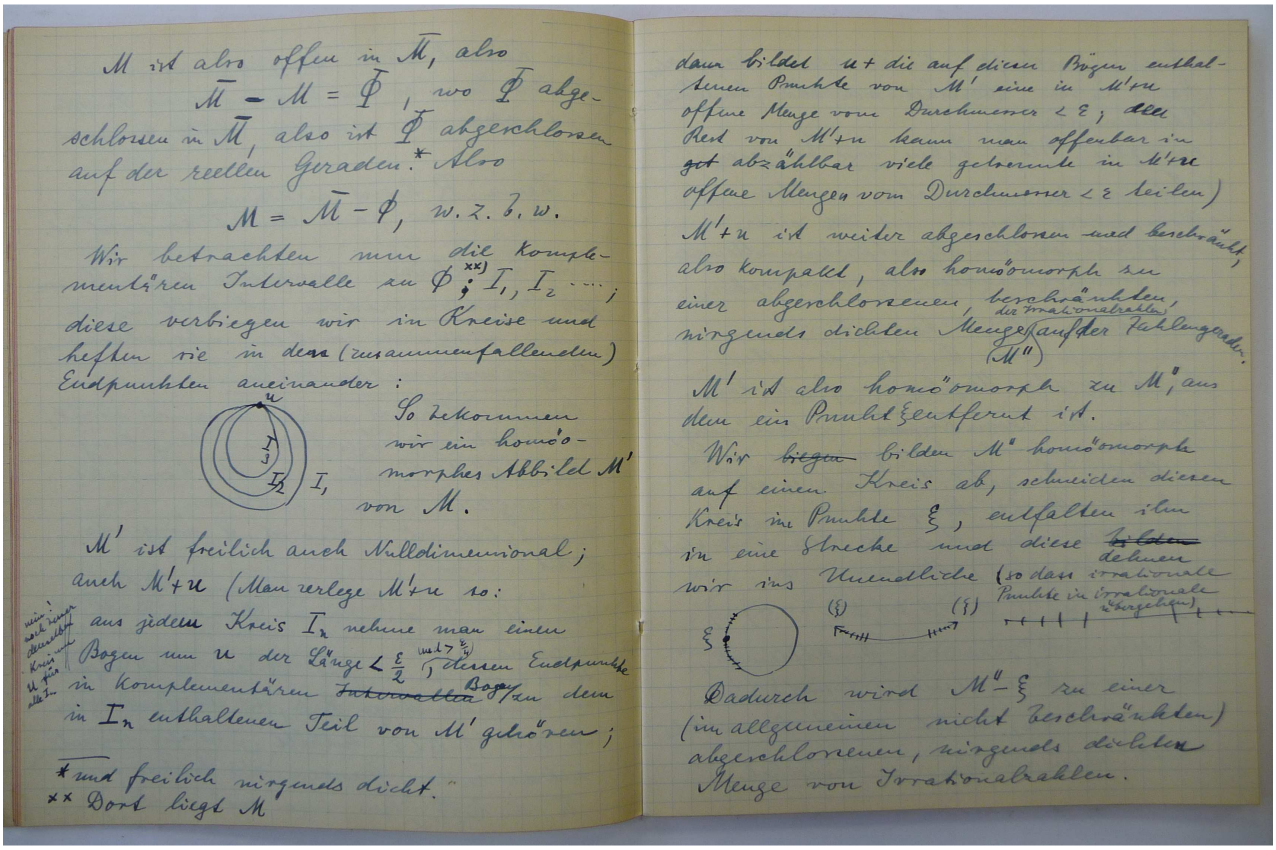
Basic characterization of Jarník's notebooks

Jarník's notes were kept in rectangular exercise books (16,4 $\times$ 20,6 cm) each with a hard black cover; they have been preserved in an amazingly good condition. His German notes are carefully written in blue ink; almost everything is legible. They have few grammatical and syntactic mistakes, almost no corrections and contain very few inaccuracies.[20] Each notebook has 120 pages, usually completely filled with notes. On the interior page of the cover, Jarník's Göttingen address is written (in the academic year 1927/1928 – Dr. V. Jarník, Göttingen, Bühlstrasse 28).

Jarník's notebooks give us a record of Göttingen's mathematical lectures and seminars, which were very popular in the Czech lands before the Second World War. They also provide information on mathematics and teaching in Göttingen, information not generally known even in Germany. Most importantly, they were written by an excellent Czech mathematician who possessed an acute understanding of the material being presented. Since we do not have many similar documents from that time, they are a unique contribution to our understanding of this

[20] Only the records of Noether's lectures are not quite so clear, but as we know from the recollections of her students, she was not a good lecturer.

period, and should be interesting not only for mathematicians, but also for historians, linguists and everyone who wants to learn something about mathematics in the first half of the 20th century.



Short description of Aleksandrov's lecture course "Punktmengen und reelle Funktionen"

The fifth notebook is devoted to the lecture course of Aleksandrov titled *Punktmengen und reelle Funktionen.* The first 107 pages of the notebook contain Aleksandrov's lectures, the last nine pages of the notebook contain a short part of van der Waerden's lecture titled *Algebraische Zahlen* which continues in Jarník's ninth notebook, and the remaining four pages are blank.

In this notebook Jarník did not write down the dates of the lectures as he usually did in other notebooks. From his inscription we know that he attended Aleksandrov's lectures in Göttingen in the summer semester 1927/1928. We do not know precisely the period in which the course was delivered and how many lectures it consisted of. However, Aleksandrov stayed in Göttingen between June 4 and August 4, 1928.[21]

[21] Fore more information see [BeNe] and Aleksandrov's letters to F. Hausdorff which are available in *Nachlass Hausdorff*, Kapsel 61, Universitäts-und Landesbibliothek Bonn, Handschriftenabteilung.

In [BeNe], on the basis of our studies, we tried to give an overview of the notions and results presented in the course. We gave the definitions, theorems as well as remarks, and at several places we added comments on the methods of proofs. We tried to trace the origin of the results in order to place the material in historical context. Several quotations and bibliographical comments illustrate the fact that the first quarter of the 20th century was a fascinating period for the development of descriptive set theory, real analysis and point-set topology.[22]

Aleksandrov's course on point sets and real functions has several remarkable features which we can mention. The course

– reflects the state-of-the-art in important parts of these fields of mathematics in 1928

– is very *modern* in the sense that practically all results presented were less than thirty years old, the majority were less than ten years old, and some were not yet published

– centers around several excellent results established by P. S. Aleksandrov himself as well as by his collaborators and colleagues such as P. S. Urysohn and M. Ya. Suslin; in particular, we have in mind the proof of the Continuum Hypothesis for Borel sets, the A-operation, properties of analytic sets, topologically complete spaces and the role of zero-dimensional spaces

– includes principal results and concepts that have become standard facts presented today in basic university courses for mathematicians

– has a strong topological flavour even though it provides results in the context of the real line, Euclidean spaces, and metric spaces, and the notion of a topological space is not even mentioned; this reflects the fact that Aleksandrov was one of the leading architects in the construction of topology as a mathematical subject

– uses mathematical language which is fully set-theoretical and a style of exposition of results and their proofs that is similar to the contemporary way of presenting mathematics; perhaps the main difference is that the use of transfinite numbers and transfinite induction is much more frequent in comparison with the present state and the same applies to the use of continued fractions

[22] See [BeNe], pp. 91–110.

– shows only a few differences in notation from today: $x \subset A$, $A+B$, AB, $A-B$, ΣA_n, ΠA_n were later replaced by $x \in A$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\bigcup A_n$, $\bigcap A_n$, respectively, the empty set is, unlike our $\emptyset$, written as 0, $\lim_{n=\infty}$ unlike our $\lim_{n\to\infty}$; also the distinction between f (= a function) and $f(x)$ (= the value of f at the point x) is not usually respected.

In summary, the course was delivered by a distinguished expert whose impact on contemporary mathematics is felt till today.

Jarník's notes can be naturally divided into three parts: *Punktmengen* (47 pages), *Bairesche Funktionen und Borelsche Mengen* (24 pages) and *Suslinschen Mengen* or *A-Mengen* (36 pages).[23]

The lecture course is framed into the context of Euclidean spaces or metric spaces. Completeness of metric spaces and topologically equivalent metrics are discussed at first, then zero-dimensional spaces are treated. Here topological ideas come into the picture quite strongly. The exposition is based on the article published by Aleksandrov and Urysohn in Mathematische Annalen in 1928, four years after Urysohn's tragical death. Then the transfinite induction definition of Borel sets is given and the role of G_δ-sets is emphasized (the set of continuity points of an arbitrary function, the importance for measure theory). Next, extension properties of continuous (or homeomorphic) mappings are discussed and topological completeness, based on important results of Aleksandrov and Hausdorff, is studied. It is shown, using Hausdorff's approach, that G_δ-sets are nothing else than topologically complete spaces. Baire functions and Borel sets, as well as their interplay, are treated. In particular, the existence of α-th class Baire functions not belonging to any lower class is proved. A special attention is paid to the notion of analytically representable functions extensively studied by Baire and Lebesgue during the first decade of the 20th century. The last part is devoted to analytic (or Suslin) sets, discovered ten years before the lecture course was delivered. Analytic sets, as a result of the A-operation, are introduced and their set-theoretic properties are established. Especially their relation to Borel sets is analyzed; in particular, Borel sets are characterized as those analytic sets having an analytic complement. The Continuum Hypothesis for uncountable analytic sets is proved. This generalizes the famous Aleksandrov's result for Borel set from 1916.[24] At the end, a short survey of some then new results from descriptive set theory is given.

[23] The transcription of Jarník's notebook can be found in [BeNe], pp. 51–90.

[24] Alexandroff P.: *Sur la puissance des ensembles mesurables B*, C. R. Acad. Sci.

Jarník as a professor in Prague

From 1921, Jarník was continuously, excepting that period of Nazi occupation when Czech institutions of higher education were forcibly closed, a member of the staff of Charles University. After his return from the first German visit in 1925, Jarník defended in 1925 his *Habilitation* thesis (devoted to lattice points).[25] On December 19, 1925, he became an associate professor (docent) and he started to incorporate modern mathematical methods and theories in his lectures. His first regular lecture after his *Habilitation* (1925/1926) concerned the Lebesgue integral.[26] The following year, together with his colleagues, he opened a special seminar for students named *Discussions on newer directions in mathematics*. In 1929, Jarník was appointed an extraordinary professor and six years later he was appointed a full professor of Charles University. The decade before the Second World War was probably the most propitious time for his scientific work and pedagogical activities.

In 1931, Jarník added an appendix to Petr's book *Počet integrální* [Integral calculus], which is the very first Czech text on naive set theory, titled *Úvod do theorie množství* [Introduction to set theory].[27] He also reread and corrected Petr's manuscript.

Later, in 1936, he wrote an appendix *O derivovaných číslech funkcí jedné reálné proměnné* [On Dini's derivates of functions of one real variable] in which he summarized his new results on differentiability of typical continuous functions. The appendix appeared in Čech's book *Bodové množiny* [Point sets] (1936).[28]

From the end of the twenties, Jarník intended to write newer and more modern Czech textbooks on real analysis, and in the late thirties he started publishing his books on differential and integral calculus. The first was titled *Úvod do integrálního počtu* [Introduction to the integral calculus].[29] In addition, during the war he had worked on books which later appeared in four volumes under the names *Diferenciální počet I, II* [Differential calculus I, II] and *Integrální počet I, II* [Integral

---

Paris 162(1916), pp. 323–325. This is the first paper by Aleksandrov and a germ of the A-operation, which opened the way to Suslin sets, is presented there.

[25] See V. Jarník: *O mřížových bodech v rovině* [On lattice points in plane], Rozpravy České akademie pro vědy, slovesnost a umění, II. třída, 33(1926), No. 36, 23 pages.

[26] The lecture notes of the course have unfortunately not been found.

[27] Appendix to K. Petr: *Počet integrální*, 2nd edition, Praha, 1931, pp. 655–725.

[28] Appendix to E. Čech: *Bodové množiny*, Praha, 1936, pp. 245–265.

[29] Praha, 1938, 168 pages.

calculus I, II].[30] These textbooks, of monographic character, influenced generations of Czech mathematicians. The four-volume work concluded with two texts, *Diferenciální rovnice v reálném oboru* [Differential equations in real domain][31] and *Matematická analýza pro 3. semestr* [Mathematical analysis for the 3rd semester of studies][32] and the book *Diferenciální rovnice v komplexním oboru* [Differential equations in complex domain].[33] While the *Diferenciální počet I* and *Integrální počet I* have an introductory character, the second two volumes *Diferenciální počet II* and *Integrální počet II* were written in the real analysis monographic style and contain some unique sections, including a concise and very instructive chapter on computational methods of integral calculus in $\mathbb{R}^n$. Unfortunately, they were published only in the Czech language, and thus unavailable to most foreign students.

In 1926 Jarník was elected a member of *Česká královská společnost nauk* [Bohemian Royal Society of Science]; in 1934 he became an extraordinary member and in 1946 a regular member of *Česká akademie pro vědy a umění* [Czech Academy of Sciences and Arts]. From 1916 he was also a member of *Jednota českých matematiků a fysiků* (later Jednota československých matematiků a fysiků) [Union of Czech Mathematicians and Physicists] (later Union of Czechoslovak Mathematicians and Physicists), and for several decades he was active in its Central Committee and later was named an honourary member of *Jednota* (1962). From 1935 to 1950 he was Editor-in-Chief of the mathematical section of *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* [Journal for Cultivation of Mathematics and Physics] and succeeded in raising the journal to international level.

Jarník's activities after the war

From 1945, Jarník continued teaching mathematics at Charles University. He also held numerous positions there. From 1947–1948 he was the Dean of the Faculty of Sciences of Charles University, from

[30] *Diferenciální počet I*, Praha, 1st edition, 1946, 448 pages (2nd edition, 1951, 448 pages, 3rd edition, 1953, 449 pages, 4th edition, 1955, 451 pages, 5th edition, 1963, 390 pages, 6th edition, 1974, 390 pages); *Diferenciální počet II*, Praha, 1st edition, 1953, 595 pages (2nd edition, 1956, 609 pages, 3rd edition, 1976, 688 pages); *Integrální počet I*, Praha, 1st edition, 1948, 324 pages (2nd edition, 1954, 295 pages, 3rd edition, 1956, 299 pages, 4th edition, 1963, 243 pages, 5th edition, 1984, 243 pages); *Integrální počet II*, Praha, 1st edition, 1955, 760 pages (2nd edition, 1976, 760 pages).

[31] On the basis of the lectures of Prof. V. Jarník prepared by Vladimír Petrův, Učební texty vysokých škol, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1963, offset, 245 pages.

[32] Učební texty vysokých škol, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, rotaprint, 246 pages (2nd edition, 1984, 246 pages).

[33] Academia, Praha, 1975, 283 pages.

1948–1949 the Vice-Dean at the same Faculty, from 1950–1953 the Vice-Rector of Charles University, and from 1958–1960 the Dean of the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University. In spite of his ever increasing administrative responsibilities, Jarník assiduously devoted himself to his teaching. All his lectures were perfectly thought out, scrupulously prepared, read with equanimity and pedagogical mastership. Without doubt he was one of the best teachers at Charles University in the twentieth century.[34] Both through his scientific and teaching activities he influenced several generations of Czech and Slovak mathematicians. Jarník retired from the University in 1968. He died in Prague on September 22, 1970.

Jarník's mathematical and scientific achievements

During his long career Jarník wrote about 90 scientific works. Almost a third of them are devoted to problems of lattice points, another third to Diophantine approximations and geometry of numbers, about twenty papers concern the theory of real functions.[35] Jarník was an expert in traditional fields of mathematical analysis and also one of the first Czech mathematicians who mastered set theory and topology, measure theory and the theory of the integral. He was probably the first Czech mathematician whose scientific results received a wide and lasting international response and continue to be cited to the present day.

In 1952 he was among the founding members of Czechoslovak Academy of Sciences. In 1952–1955 he was the chairman of its Mathematics-Physics Section and in 1964–1966 the chairman of the Scientific Board for Mathematics of the Academy. For extraordinary scientific results he was awarded the State Prize (1952), the Order of Work (1967) and the Order of Republic (1967). At the end of his pedagogical career, he became "Doctor Honoris Causa" (Charles University, 1968) and he obtained the Silver Medal for Merit in Sciences and Humanity (Czechoslovak Academy of Sciences, 1968). For more than twenty years, he was a member of the editorial board of *Czechoslovak Mathematical Journal* and the journal *Acta Arithmetica*, which specialized in number theory.[36]

REFERENCES

[AKMO] Arkhangel'skii A. V., Kolmogorov A. N., Mal'cev A. A., Oleinik O. A.,

[34] For more information about Jarník's teachnig see [Ne].

[35] Jarník's influential contributions to Diophantine approximations, lattice point theory, number theory, real analysis as well as graph theory are analysed in [No], where the complete bibliography of Jarník's publications is provided.

[36] More detailed information about Jarník's life and his mathematical achievement can be found in [BeNe], [K], [KN], [Ne], [No], [NS], [W1] and [W2].

Pavel Sergeevich Aleksandrov (On his eightieth birthday), Russian Mathematical Surveys **31 (5)** (1976), 1–13.

[BeNe] Bečvářová M., Netuka I., *Jarník's notes of the lecture course Punktmengen und reelle Funktionen by P. S. Aleksandrov (Göttingen 1928)*, Edition History of Mathematics, volume 43, Matfyzpress, Prague, 2010.

[BN] Burmann H.-W., Neuenschwander E., *Die Entwicklung der Mathematik an der Universität Göttingen*, Die Geschichte der Verfassung und der Fachbereiche der Georg-August-Universität zu Göttingen, Göttinger Universitätsschr. Ser. A, **16** (1994), 141–159.

[E] Ebel W., *Catalogus Professorum Gottingensium 1734–1962* [Catalogue of Professors in Göttingen], Göttingen, 1962 (German).

[K] Kurzweil J., *Seventieth birthday of Professor Vojtěch Jarník*, Czechoslovak Mathematical Journal **17 (92)** (1967), 624–628.

[KN] Kurzweil J., Novák B., *Professor Vojtěch Jarník ist gestorben*, Czechoslovak Mathematical Journal **21 (96)** (1971), 493–524.

[Ne] Netuka I., *In memoriam Prof. Vojtěch Jarník (22. 12. 1897 – 22. 9. 1970)*, Mathematica Bohemica **123** (1998), 219–221.

[No] Novák B. (ed.), *Life and work of Vojtěch Jarník (1897–1970)*, Society of Czech Mathematicians and Physicists, Prometheus, Praha, 1999.

[NS] Novák B., Schwarz Š., *Vojtěch Jarník (22. 12. 1897 – 22. 9. 1970)*, Acta Arithmetica **20** (1972), 107–123 (English).

[Sch] Scharlau W., *Mathematische Institute in Deutschland 1800–1945*, Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden, 1990.

[SS] Siegmund-Schultze R., *Rockefeller and the internationalization of mathematics between the two World Wars*, Birkhäuser, Basel, 2001.

[W1] http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/∼history/Printonly/Jarnik.html.

[W2] http://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=50630.

[ZD] Zdravkovska S., Duren P. L. (eds.), *Golden years of Moscow mathematics*, Second edition, History of Mathematics 6, Mathematical Society, Providence, RI, London Mathematical Society, London, 2007.

Address

Martina Bečvářová
Institute of Applied Mathematics
Faculty of Transportation Sciences
Czech Technical University
Na Florenci 25
110 00 Prague 1, Czech Republic
e-mail: nemcova@fd.cvut.cz

Ivan Netuka
Mathematical Institute
Faculty of Mathematics and Physics
Charles University
Sokolovská 83
186 75 Prague 8, Czech Republic
e-mail: netuka@karlin.mff.cuni.cz

Ladislaus von Bortkiewicz

Annette B. Vogt (Berlin)

Thor Andersson (1869-1935), the Swedish political economist and industrialist, who became the founder and first editor of the "Nordic Statistical Journal" wrote in 1931:
"The founder of the present-day statistical science is William (Wilhelm) Lexis. The greatest of his pupils was Ladislaus von Bortkiewicz, who was a professor at the University of Berlin 1901-1931. One of von Bortkiewicz's foremost pupils, Karl Freudenberg, has said that the classical period of theoretical statistical science began about 1876 with the publication of Lexis' first great work and ended on July 15th 1931, the day of von Bortkiewicz's death."[1]

Ladislaus von Bortkiewicz was born on August 7 in 1868 in St. Petersburg in Imperial Russia to a Polish family. He got an excellent education and studied first jurisprudence and law in St. Petersburg. Later he studied at the Göttingen University, and from 1895 until 1897 he studied at the - then Prussian - University in Strassburg and became Privatdozent. He was interested in statistics thanks to his advisors Wilhelm Lexis (for the PhD) in Göttingen and Georg Friedrich Knapp (for the Habilitation) in Strassburg. In 1898 he published his first book "The Law of Small Numbers" (Das Gesetz der kleinen Zahlen) in which he dealt with the Poisson distribution. Thanks to this publication, a brochure of sixty pages, his name became widely known.[2] After a short intermezzo in St. Petersburg where he worked for the Railway System and taught at the Alexandrovsky Lyceum (1899-1901) he remained in Berlin for 30 years until his death.

Ladislaus von Bortkiewicz (1868-1931) was an extraordinary economist, statistician and mathematician. He taught at the Berlin University (Friedrich-Wilhelms-Universität) - as well as at the business school (Handelshochschule), which was established in 1906. In 1901 he became professor (außerordentlicher Professor) for economics (Staatswissenschaft) and statistics at the Berlin University. From 1913 until 1931 he was one of the directors of the Statistical Seminar, the "Staatswissenschaftlich-Statistische Seminar", together with the economists Max Sering (1857-1939), Heinrich Herkner (1863-1932) and Ludwig Bernhard

[1] Andersson, Thor. Ladislaus von Bortkiewicz 1868-1931. (Obituary). In: Nordic Statistical Journal 3 (1931), p.9 (pp. 9-26).
[2] See Gumbel, Emil J. Bortkiewicz, Ladislaus von. In: Intern. Encycl. of the Social Sciences 2 (1968), p. 128 (pp. 128-131).

(1875-1935). Only in 1920 he got a full professorship "ad personam" (persönliches Ordinariat).

In 1906 von Bortkiewicz also became a professor for mathematics and statistics at the business school where he taught until the winter 1922/23. In the class room No. 109 was a portrait of him. In February 1938 the porter (pedell) reported to the director, that this portrait was "missing". And he mentioned it was stolen because the persons who had done it were thinking, that he was not an "Aryan" ("weil die Täter annahmen, er sei nicht deutschblütig" gewesen).[3]

The work of Bortkiewicz covered classical economics, population statistics and theory, mathematical statistics and theory of probability, mathematical economics and physical statistics. The fields were very different, but they were analogously related to the methods he used. He contributed to the development of all these fields and, especially published what would become classic works in mathematical statistics. Bortkiewicz published many articles but no complete volumes of his mumerous investigations. He was very high acknowledged by the economist Joseph Schumpeter (1883-1950) and the mathematician Emil Julius Gumbel (1891-1966), who had to go into exile because of the Nazi regime. Both published about Bortkiewicz in exile, in 1960 and 1968, and especially valued his work on political economy. According to Schumpeter: "By far his most important achievement is his analysis of the theoretical framework of the Marxian system /1906 and 1907; 1907/, much the best thing ever written on it and, incidentally, on its other critics. A similar masterpiece is his paper on the theories of rent of Rodbertus and Marx /1910-1911/."[4]

Until his death von Bortkiewicz lived in Berlin-Halensee, Johann-Sigismundstr. 2, together with his sister Helene von Bortkiewicz (ca. 1867-1939). Here he died on July 15 in 1931 after a long illness. The daily newspapers "Berliner Tageblatt" and "Vossische Zeitung" published obituaries on him. On the memorial ceremony his colleague from the University, the professor for economy Hermann Schumacher (1868-1952), was the speaker. Related to the fact that von Bortkiewicz never was married, Schumacher pointed out:

[3] See Archive HU: WH Nr. 603/1, Bl.3. (Wirtschaftshochschule, Akte vB, Meldung des Pedell vom 11.2.1938)
[4] Schumpeter, Joseph A. Ladislaus von Bortkiewicz. 1868-1931. In: Schumpeter, Joseph A. Ten Great Economists from Marx to Keynes. New York: Oxford Univ. Press, 1960, p. 303 (p. 302-305). It was first published in: The Economic Journal, vol. XLII, No.166, June 1932. Also quoted in Gumbel (1968), p. 129.

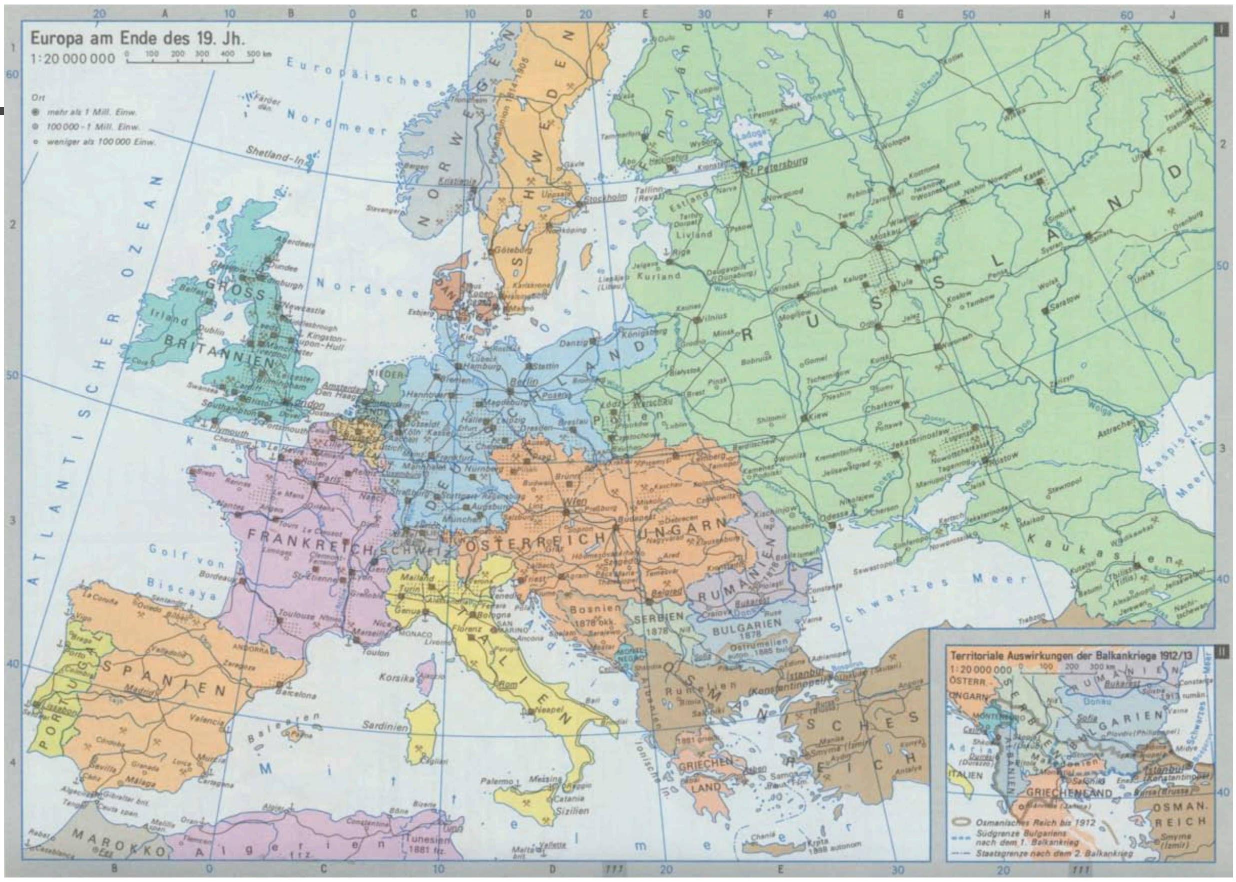
"Bortkiewicz hat sich der Wissenschaft mit einer Hingabe gewidmet, als ob sich auf sie das Bibelwort bezöge: "Du sollst keine Götter neben mir haben." Vor allem betrachtete er es als heilige Pflicht, den Schatz theoretischer Erkenntnisse aus anderthalb Jahrhunderten in seiner Wissenschaft zu hüten und vor Beeinträchtigungen zu bewahren."[5]

When Helene von Bortkiewicz died in October 1939 probably all papers of von Bortkiewicz were gone, including his manuscripts and his letters. Thor Andersson described very detailled the style of working of von Bortkiewicz, how he prepared his lectures. Andersson mentioned 25 boxes with such manuscripts. And he had the wish that a "collection of works of von Bortkiewicz will draw much of value from the manuscripts of his lectures."[6] Thor Andersson died in 1935, and no "collected papers" were ever published.

With the establishement of the "Ladislaus von Bortkiewicz chair" he comes back to the Berlin University. We should think of him: an extraordinary scientist who was strict, disciplined and hard on his critics but generous to his colleagues.

[5] Schumacher, Hermann. LvB. Gedächtnisrede, 18.7.1931. In: Allg. Statist. Archiv, Bd. 21, Jena 1931, S. 573 (S. 573-576).

[6] Andersson, Thor. Ladislaus von Bortkiewicz 1868-1931. (Obituary). In: Nordic Statistical Journal 3 (1931), p.26 (pp. 9-26).


Europa am Ende des 19. Jh.
1:20 000 000
Europäisches Nordmeer
Nordsee
ATLANTISCHER OZEAN
Golf von Biscaya
GROSS BRITANNIEN
NORWEGEN
SCHWEDEN
RUSSLAND
FRANKREICH
Schweiz
ÖSTERREICH UNGARN
ITALIEN
SPANIEN
PORTUGAL
MAROKKO
Algerien
RUMÄNIEN
SERBIEN
BULGARIEN
GRIECHENLAND
OSMANISCHES REICH
Schwarzes Meer
Kaspisches Meer
Mittelmeer
Territoriale Auswirkungen der Balkankriege 1912/13

Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin, Unter den Linden

Handelshochschule Berlin

Ladislaus v. Bortkiewicz †

Von

Oskar Anderson, Varna

Am 15. Juli 1931 starb in Berlin infolge einer Herzkrankheit Professor L. v. Bortkiewicz. Sein unerwarteter Tod, der ihn mitten aus einer fruchtbaren Forschertätigkeit, bei völlig klarem Geist und beinahe unverminderter Arbeitskraft dahinraffte, ist ein herber Schlag für die internationale Wissenschaft, die in ihm einen hervorragenden Nationalökonomen und einen der wenigen wirklich Großen im Bereiche der mathematischen Statistik verliert.

Ladislaus v. Bortkiewicz wurde am 7. August 1868 in St. Petersburg geboren. Obwohl aus einer polnischen Familie stammend, ist er doch ganz im russischen Kulturkreis aufgewachsen. In St. Petersburg hat er auch auf der Universität studiert. Die ersten bedeutenden wissenschaftlichen Arbeiten des jungen Bortkiewicz erschienen seit Anfang der neunziger Jahre in den Memoiren der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften, in der Revue d' Economie Politique und etwas später (1894) in Conrads Jahrbüchern. Er unterschrieb sich damals noch „von Bortkewitsch“ — hierin ganz der russischen Transkription seines Namens folgend. Durch W. Lexis und G. F. Knapp gefördert, konnte Bortkiewicz sich 1895 an der Straßburger Universität habilitieren, woselbst er im Laufe von zwei Jahren über Arbeiterversicherung und theoretische Statistik las. In die Straßburger Zeit fällt auch der Anfang jener engen wissenschaftlichen Beziehungen, die Bortkiewicz mit einem anderen großen russischen Statistiker, mit dem um 6 Jahre jüngeren A. A. Tschuproff, verbanden, der gerade damals bei Knapp promovierte. Diese Freundschaft endigte nur mit dem frühzeitigen Tode Tschuproffs im Jahre 1926. Nach Rußland zurückgekehrt, dozierte Bortkiewicz im Laufe der Jahre 1899 bis 1901 am Petersburger Alexander-Lyzeum — einer privilegierten Hochschule, aus der eine Reihe der bedeutendsten russischen Staatsmänner hervorgegangen ist. Im Jahre 1901 erhielt er hierauf den Ruf nach Berlin als außerordentlicher Professor für Nationalökonomie und Statistik (die Ernennung zum ordentlichen Professor erfolgte übrigens erst 1920). Der Berliner Universität ist Bortkiewicz im Laufe von 30 Jahren, bis zu seinem Tode, treu geblieben.

Das wissenschaftliche Lebenswerk Bortkiewiczs läßt sich in gedrängter Form wie folgt darstellen. In der theoretischen Statistik war er der anerkannte Meister und Führer einer Schule oder, richtiger gesagt, einer Strömung, die als die „kontinentale“ bekannt, in den

BORTKIEWICZ, LADISLAUS VON

Ladislaus von Bortkiewicz (first spelled Bortkewitsch as in the Russian transcription) was born of Polish descent in 1868 in St. Petersburg and studied at the university there. His first papers (1890 and 1891) were published in Russian. He continued his studies in Göttingen under Lexis, where he wrote his doctoral thesis (1893). In 1895 he became *Privatdozent* in Strassburg and subject to the influence of Knapp, but he returned in 1899 to Russia, where he taught at the Alexandrowsky Lyceum in St. Petersburg. He became associate professor at the University of Berlin in 1901, and finally in 1920 he became full professor *ad personam* of economics and statistics. He remained in Berlin for thirty years, until his death in 1931. With rare exceptions he wrote in German. He was one of the few representatives of mathematical statistics in Germany and as such a lonely figure, highly respected but rarely understood.

Besides classical economics, the work of Bortkiewicz covered population statistics and theory, actuarial science, mathematical statistics, probability theory, mathematical economics, and physical statistics—fields separate in content but analogous in methodology. He contributed to the process of consolidating each of these disciplines and did classic work in mathematical statistics.

Emil J. Gumbel (1968)

Miloš Milovanović
Mathematical Institute of SASA
Milosm@mi.sanu.ac.rs

THE ANTHROPOSOPHY OF PROFESSOR RADOJČIĆ

Abstract. In this paper we present life and scientific work of dr Miloš Radojčić (1903-1975), professor of the University of Belgrade and corresponding member of the Serbian Academy of Science and Arts. In the background of all of Radojčić's scientific work was the teaching of anthroposophy and in it geometry. It led him to, at the time, most contemporary problems in mathematics and mathematical physics.

I

Miloš Radojčić belongs to the group of Serbian scientists of which little has been and is written about. He passed unnoticed, almost invisible through Serbian science, but only as a man – not as a scientist. His work, although still not fully evaluated, bears a mark of an ingenious personality with broad and well-founded interests ranging from mathematics and physics to philosophy, religion and art.

Based on some of his qualities, he would be one of those intellectuals between two wars, actually in the first phase of that period, who appreciated and nourished not only their field of study but also the general culture. That circle of people brought a new spirit to our milieu, the spirit that was later pushed out by narrow specialists. The broadness of the view made those people appreciate not only their own science but other values as well, and made them look at their own results with modesty, with more doubts about their real significance. This broadness is reflected in Radojčić as an artistic talent that he exhibited as he engaged in music as an amateur, in art almost as a professional, in poetry, but also in philosophy and science, since everything he did was imbued with threads of an artistic soul, refined to the utmost sensitivity.

II

He was born in Zemun, on August 31st in 1903. Four grades of, at the time, elementary school he completed in Zemun, where he also started gymnasium but only completed the first grade. During the First World War he received his education in France and Switzerland, where he completed the second through the sixth grade of gymnasium, and the seventh and the eighth grade along with the final examination he completed in 1921 in the town of his birth.

The same year he enrolls at the Department of Mechanical Engineering at the Technical Faculty in Gratz , but abandons it the next year, disappointed by the pragmatism of the instruction, that some professors emphasized in particular and with pride. His outstanding artistic soul, especially in fine arts, was looking for a profession imbued with art. For this reason he enrolls at the architecture at the Technical Faculty in Belgrade, but stays there for only one semester; because Radojčić perceived art as a way of wisdom, and he did not find that studying architecture. In 1923 he transfers to the Mathematical group at the Faculty of

Philosophy in Belgrade where he graduated in 1925, since he was able to get credit for the work done while studying technique. In 1928 he got his PhD from the Faculty of Philosophy for the doctoral thesis *Analytical Functions Expressed in Terms of Convergent Series of Algebraic Functions*.

Professor's Radojčić scientific activity deals for the most part with the theory of analytical functions and can be classified into three thematic circles. The first one Radojčić himself defined as expressing general multiform analytical functions, on any type of their domain in terms of convergent series of algebraic functions. At the very beginning of his career, in his PhD thesis Radojčić gave his generalization of the well-known theorems of Weirstrass and Runge for the case of an analytical function on an arbitrary region of the corresponding Riemann's surface. Radojčić added on this result and improved it on many levels in his thesis and in a series of later articles published before and after the war. The final form of the result, which among other things contains the theorem stating that any analytical function on any region of its Riemann's surface can be uniformly approximated by a series of algebraic functions, can be considered as a maximum possible generalization of the above mentioned theorems of Weireschtrass and Runge. It is important to say that those results of Radojčić represented for the long period of time the most important achievements in its field. It was only twenty years after the publishing of Radojčić's thesis that the German mathematician Helene Florak produced the results comparable by the importance and difficulty to those of Radojčić; however, her result only nicely complement those of Radojčić and cannot be, by any means, considered their substitute.

The second thematic circle dealt with the problem of dividing Riemann's surface into leaves, which was one of the basic problems of the geometric theory of functions during one period of its development. Radojčić proved many central theorems related to these complex problems and introduced a general approach to the process of dividing any Riemann's surface into leaves for the case of unbounded Riemann's surface, when it is possible to talk about such a division in the usual sense. According to the competent opinion of the German mathematician E. Urlich, those theorems achieved the maximum possible results within the realm of the applied method. These and other results, published for the most part in the journals of our Academy and University, did not receive the needed publicity, which in turn enabled the appropriate response of the international mathematical audience to the similar results obtained by almost identical method by Japanese mathematician Shimizu, who published his papers in the world known journal. Upon closer examination of those papers, however, one can form an impression that the priority should be on professor Radojčić's side, both in time and essence. Both Radojčić and Shimizu used those theorems as a base for their further studies of automorphous functions. According to one of the major Radojčić's results obtained during further investigations, every meromorphous function is in a certain sense automorphous.

The third group of his papers deals with geometrical and topological properties of analytical function in the vicinity of essential singularities, with the special consideration of, so called, problem of the type of the Riemann's surface. This is about stating the criteria so that the Riemann's surface is of elliptical, parabolic or hyperbolic type. Here, among other things, Radojčić offered two variants of conditions sufficient for Riemann's surface to be of parabolic or hyperbolic type.

All of these Radojčić's papers belong to the geometric theory of analytical functions. He can be considered an independent pioneer of certain methodological concepts of the theory of analytical functions. Also, it can be said that certain geometrism, a subtle and fluid geometric spirit and thinking style, represents an important component and a deep dimension of both internal unity and continuity of professor Radojčić's scientific work and his overall figure as a mathematician. Actually, this spirit represents that life-forming center, whose fertile and inspiring glow permeates all areas of his mathematical work, including his invaluable contributions to the introduction, establishment and design of all forms of contemporary instruction of geometry at the University of Belgrade.

In 1938, after being promoted to Assistant Professor at the Department of Mathematics of the Faculty of Philosophy, Radojčić, parallel to lecturing in the theory of analytical functions, took upon himself the task of establishing the first course of synthetic geometry, entitled *Elementary Geometry*. In 1945, when the new curriculum was made, Radojčić proposed the introduction of two new geometric disciplines: descriptive and higher geometry. Such an ambitious plan could not be carried out that easily with an insufficient number of teachers. Radojčić took upon himself obligation to teach three geometric disciplines: descriptive, elementary and higher geometry.

The course *Elementary Geometry* was not only the first systematic course of synthetic geometry, but also the first axiomatic course ever taught at the University of Belgrade. In his lectures, professor Radojčić started to develop a rigorous approach to defining concepts and proving theorems, an approach never previously applied at the University of Belgrade, that called for proving even the most obvious assertions not included in axioms. In a certain way, Radojčić presented in this course his own axiomatic approach to Euclidean geometry. Being of the opinion that the deductive method was more evident when the number of starting concepts was minimum possible, his starting concepts were the *point* and relations *between* and *congruent*. Since he defined the line and the plane using the order of points, in Radojčić's work axioms of order preceded axioms of belonging. In his book *Elementary Geometry,* based on this course, he pointed out that this approach was consistent with the using of set theory in building geometry, where the line and the plane are seen as sets of points, not as particular elements of space.

Radojčić's work on axiomatically establishing the special theory of relativity is also of great importance for the deeper understanding of his relationship with geometry. He considered Einstein's relativistic physics to be a return of geometry to the source of the experience of which it long ago descended and the once again established lost link between physics and geometry; the link that showed that actually geometry was a part of mathematical physics. In his discussions of geometry, he named this approach *internal viewpoint,* since it derived geometry from the immediate internal experience of physical reality, to which we also belong [5].

In the list of Radojčić's scientific works eight units are related to this area. The summary of this work is presented in the monograph *Une construction axiomatique de la théorie de l'espace-temps de la Relativité Restreinte*, published in the Special editions of the Academy of Science and Arts in 1973. Since he published the first paper in 1933 and the final monograph in 1973, it is evident that his interest in the theory of relativity lasted for full forty years.

Axiomatic establishing of the space-time continuum of the theory of relativity interested mathematicians since the beginnings of its existence. In the papers that followed, some authors accept for the most part already formed structures and apply them to the topic of their interest, resulting in a short paper and relatively small number of axioms. Radojčić, however, believes that the topic of such fundamental and elementary importance, such as kinematics of the theory of relativity, that involves elementary geometry as well, deserves an independent and, in the contemporary sense, elementary treatment. In this way, he starts with axioms that are, in their physical interpretation, closest possible to the observable facts, avoiding to use even the analogy with the axiomatic system of the elementary geometry.

Guided by his own language minimalism, Radojčić chooses for his basic concepts signals or flashes of light, named *instantaneous events* and points they originated from or can be seen at, named *material points.* Along with these two concepts, there are three basic relations: *to happen, to be seen* and *before*. The whole theory is based on five basic concepts and 27 axioms classified into nine groups. Radojčić derives Lawrence's transformations for light-metric bodies as a logical consequence of basic geometric properties of the spread of the light. In this way, Lawrence's transformations are totally independent from the physical experiment, to the point that they cannot be even overruled by the experiment. Experiments are required only to establish whether solid bodies, which provide on Earth the base for all measurements, even cosmical events, have properties of light-metric bodies. The affirmative answer to this question, stating that solid bodies are indeed systems of light-metric bodies, already lies in the fact that every spectral line measured in the matter of solid state aggregation, has the constant wave length.

The work of professor Radojčić was neither the first nor the only breakthrough made by Serbian scientists into the geometric kernel of the theory of relativity. Already in 1910, Vladimir Varićak, professor at the University of Zagreb, highly versed in non-Euclidean geometry, gave an interpretation of the special theory of relativity in the geometry of Lobachevski [12]. The following year, in 1911 he reaches a completely new understanding of the connection between those two theories and proves that, just as the Newtonian kinematics is derived from the Euclidean geometry, so can the basic theorems of Einstein's non-Newtonian kinematics be derived from the geometry of Lobachevski. The work of professor Radojčić, along with papers of Vladimir Varićak represented rare contribution of our science to the theory of relativity.

In 1959 professor Radojčić leaves the country. It is speculated that the reason lies in his inability to withstand the socio-political reality of the time he lived in, the reality that inundated also the University of Belgrade. He used the UN announcement about the scientific-technical aid to the undeveloped countries of Africa and Asia and from 1959 until 1964 worked as a professor at the University of Khartoum, Sudan. After that he moved to the National Center for Scientific Research in Paris, residing in a small town Thonon-les-Bains near Swiss border. There he died on May 14th, 1975.

With the exception of scientific papers and text books, everything that Miloš Radojčić published appeared before the German occupation of Yugoslavia. Nevertheless, his unpublished documents still exist in Goetheanum[1], in the Swiss town of Dornach, near Basel. Some tens of thousands of pages on cosmology, biology, philosophy, poetry, history, religion, literary interpretations and literary translations and studies and more all wait to be processed and, in a meaningful way, offered to readers. In his written legacy there are no papers related to mathematics [2].

III

Anthroposophy is a mystic doctrine based on the teaching of Austrian philosopher, scientist and artist Rudolf Steiner. Steiner was initially the secretary general of the Theosophist society[2] for Germany, but he felt that the theosophist teaching was too much under the influence of Hinduism and Buddhism. Therefore, he felt a need to reveal a spiritual

[1] Goetheanum in Dornach serves as a world center of Anthroposophist society and the main center of The School of the spiritual science. The building, based on the project by Rudolf Steiner, was erected between 1925 and 1928 and was named in honor of the famous German poet and precursor of the anthroposophist movement.

[2] Theosophist society was founded in 1875 aiming to promote the thinking system developed in the papers of Helena Blavacka. Theosophy claims that all religions are attempts to assist the mankind in reaching the higher perfection by "spiritual hierarchy" and consequently, that every religion contains a part of the truth. Practically, this religious syncretism is mainly characterized by meditative techniques of India and Far East, through which it made a far-reaching impact on world culture by spreading them even in the countries they came from and where they were far from being widely used.

path in the authentic tradition of the West, an endeavor he carried on until his death. He was looking for a spiritual understanding of philosophy that enabled perceiving the world and the history of mankind as a consequence of the influence of higher forces – spiritual beings, which led the mankind step by step on the evolution ladder. During his life he wrote more than twenty books and gave great number of lectures, resulting in over 360 volumes of his collected works.

Professor Radojčić was an anthroposophist. In anthroposophy he saw the aspiration of his time to the conscious revival of the primordial spirit of life in the midst of all-devouring desert of materialism. In particular, he emhasized the aim of anthroposophy to conduct its research in a spirit that permeated the contemporary culture i.e. the scientific spirit. What is important for characterization of the spirit of contemporary culture is less the state of religion, even arts and more the state of the science. The force of that spirit was most completely realized in the contemporary physics and it is very significant coincidence that the appearance of anthroposophy coincided with the rapid advances in physics at the beginning of the 20th century. This sets anthroposophy apart from both a dreamy utopism and non-critical acceptance of the given truths, both being an expression of a way a spirit is enslaved by a soul's lower forms.

Among numerous anthroposophist papers on various topics a special place holds the paper *On our medieval painting's magical world*, published in the magazine *National Defense* in 1940. The text reveals a thinker of an extraordinary spiritual courage ready to guide the reader all the way to the frontier where individual consciousness touches horizons of all mankind and all times, by journeying deep inside himself in search for the secret of the time long gone. Without doubt, this text is one of the best studies of medieval painting ever written.

Over the centuries – he says – not only do the external circumstances of life change, but also the world inside a man and that change is deeper and more dramatic than ever thought in our time. From one century to the other, not only do customs, beliefs and all that enters the soul from the outside change but also the soul's abilities and spiritual powers. Thus, we are separated from the Middle Ages by a very concrete spiritual gap, which prevents us from comprehending the medieval art in the contemporary cultural and civilization context.

> *What roams around in the consciousness of today's painter, "problems" that preoccupy him, did not even exist in the soul of a medieval painter of ours and vice versa: what bothered a painter of that time during the sleepless nights, spent praying or lights of his vision that illuminated him throughout his earthly life, all that, naturally, does not exist for the contemporary painter. It has to be said: in spite of us standing today face to face with a new, powerful wave of spirituality, such a form of soul and spiritual life that once existed will never again provide a foundation of the art of painting; because mankind moves forward, through deaths and resurrections, and future spirituality will never be the same as the one that passed.*

While becoming absorbed in the mood that our old painting awakes, Radojčić notices the sentiment close to the feeling of an evening, a sunset, an evening twilight, even a night.

> *Already with first impressions that our old paintings provoke, we are overcome by a feeling of twilight; perhaps not because paintings tarnished of the century long fume of wax candles and icon lamp, but because it is really twilight that is being painted. All that is happening, happens at twilight, even when the painter did not have the evening on his mind, but a day or a night. On those paintings there is no real day to*

be found: in every day there is a mysterious presence of night or an evening day. And night is not that dark, but filled with visions of an unearthly day.

The answer to the question why is this, he finds in souls of painters of that time. While dealing with the general progress of the mankind, he points out that the ancient human consciousness bears high resemblance to the world of dreams. It was that the human soul was filled with sights that spoke instead of logical thoughts and that was one all-encompassing primordial clairvoyance. Spiritual depths or heights of the universe, reachable neither by senses nor plain thinking, were within reach of such clairvoyance. Over many a century that clairvoyance slowly faded and its innate place was overtaken by a freedom, which logical, critical thought brought along. Various ancient religious texts foresee this eclipse of clairvoyant powers and describe it as a night, through which the mankind would have to pass. It is that night that Radojčić recognizes as the appearance of materialism at the beginning of Modern times. Relative to this night, the late Middle Ages represent hours of an evening twilight. Those are the hours of the ancient clairvoyance's twilight, in the last glistening of colors prior to total darkness.

Radojčić then writes about one strange occurrence – days and nights befriend each other in the same painting, as it is often seen on our old frescoes. The Earth emits light from its strange rocks and objects on it and the sky is dark blue, like during the night. This is because old painters aspired not to paint the external world, but to pour the depths of their soul into paintings. The earthly world with its external light eclipses the splendor of the internal worlds. The painter's soul was being obsessed by this and thus, that surfaced also on the walls. Sky of the day would tell a story that the external light denied the human eye the depth of dark abysses of the universe, that the sky is closed, that it accepts neither a cry nor a prayer. But this is not how a pious medieval man felt. For him, the dark abyss was nearby, day and night. To the extent that the medieval man aligned himself with the dazzling sights that paid visits to people in older times, while the ancient clairvoyance was still awake, this dark abyss served him just right.

Entering the world of shapes, Radojčić discovers, for us, unusual geometric law that he calls counter perspective. This is a phenomenon that, contrary to our usual sense of space, where two parallel lines get closer in the distance, on medieval paintings exactly the opposite happens: as they get further from the observer, parallel lines get further from each other as well. Instead of ascribing this aberration to the poor skillfulness of the medieval painter, Radojčić meets it halfway and asks himself where does the idea of perspective in painting of modern time and modern geometric consciousness come from.

Roughly speaking, word perspective translates from Latin as: looking through something, transparency, in other words seeing through the depths of the space distances. In its nature, the painting does not exist in a space, but in a plane. Nevertheless, the perspective strives to create an illusion of three-dimensional space even in a two-dimensional plane. It is therefore only with the perspective that painting, in a certain sense, moves from the plane into the space; from its two-dimensional non-material world into our plain world of three-dimensions. "Is it not that the world of paintings is a separate world?" – The painter of the time passed would ask us and if he could, in modern sense, explain his feelings, maybe would add the following: "Architecture and sculpture must answer to the space, painting must not. The painter, in his field, strives to express spiritual impressions. The painter of Middle Ages needs only that which reveals to the eye something about a soul and a spirit. If your perspective is such, give it to me. But lo and behold - with your perspective you do not wish to express an internal impression, but the external *sensation of looking into the space." And really, our desire to paint true to perspective is rooted in the desire of these natural-scientific and materialistic times that we stay true first and foremost to the external perception of the external world. On the contrary, "wrong perspective" – I would say "counter perspective" of our old painters is rooted in the desire that a man remains true first and foremost to an internal sensation, an impression of the internal world.*

A desire that a man remains true to an external sensation, characteristic for the Modern times, causes our and painter's eye to resemble that of a hunter, who aims – measures. This either did not exist in old painting or, if it did, existed on a much smaller scale. First, there were rules posed by medieval symbolism and second, the real medieval painter painted out of pure sentiment, not connected to the outside world. The painting, as if out of a dream, descended on a wall. A dream is a cradle of reality and this is what medieval painter wants to proclaim with his art. The world we inhabit in reality is not introverted, but it opens up to infinity. On all sides one small, narrow gap of infinity opens up. What is far away is large, because it transforms into pure spirit, into stellar dimension; what is close is small, because it is confined to the earthly world. According to that old perspective, everything that recedes from the earth to infinity becomes larger.

Such a deep, intuitive grasp of the meaning of basic geometric terms and laws is, no doubt, in the foundation of Radojčić's scientific work. Generally speaking, the object of his scientific work is geometry; either a geometric theory of functions, the research of geometry of Riemann's surfaces or geometric foundation of the theory of relativity, where Radojčić did not treat geometry as an abstract, formal-logical construct, but first and foremost as a branch of mathematical physics. Furthermore, he treated physics as a spiritual science that reveals internal laws of a being, which even the matter itself freely abides by. In his text, published in 1956, about Albert Einstein, he portrays Einstein as a revolutionary hero who took space and time out of invisible shackles of scientific thought and enabled a unifying understanding of the whole physical world, an understanding never imagined before him [6]. The point is that Einstein's theory places the observer in the center of physical system, and defines space-time relations as subjective perception mediated by light signals. In the same way, counter perspective places the observer in the center of image deriving geometry from subjective perception and the medium is again light, but the light of divine revelation.

In addition to counter perspective, Radojčić notices one more relativistic phnomenon in the painting of Middle Ages. If a painter of today wishes to present two episodes of an event, he will paint either two paintings or only one episode, sacrificing the other. The medieval painter, so close to the vivid, imaginative point of view, wanted to portray fluid, ever-changing pictures of his awaken dreaming as immediate as possible, including the possibility that one being or an object is seen on two different places at the same time. While painting in this way, he was at ease with synthetic compression of time to the same extent as we are at ease with analytical splitting it into moments.

Giving an instantaneous picture of an event means imposing stationary position to something that is not stationary. To a certain degree, this is an illusion similar to representing different moments in the same picture. It is only that we are, with our habits and at the present level of the evolution, closer to the first illusion than the second. On the contrary, old painters felt that both illusions carry certain truth within. In the world of life, no form stays motionless, but it changes, ever so slightly, just like pictures in dreams. It is such forces that old painting has. In the soul of an observer, it provokes magical metamorphoses that speak of secret connections in the deeper nature of the world.

The power of such metamorphoses is most strikingly seen on the earth's relief that is in the background or on the ground in many paintings. Cracked, broken, bare stone mountains rise ever steeper towards the summit and resemble jagged waves. Formed in this way, it seems that they would like to remind us that the world of solid matter was once liquid, not only in the sense of contemporary science but also in the spiritual sense, meaning that the kingdom of matter is frozen kingdom of the ancient life cursed into a dream of death.

> *How much secrecy there is in the way how, right after the first sudden rise, all those mountains break down into abyss in front of an empty, dark sky. A man has an impression that the "end of the world" is right here, very near and that with the bodily eyes one stares into a void, into nothingness; with the spirit, though, into an interminable sea of spirit. On some painting, on the contrary, it seems that the hard stone disappears into the dark blue, as if the sky melts it, forming statically impossible shapes, similar to ice bergs melting in the sun. – Oh, those magical feelings, so terrifying to the times that skim the surface, so familiar to the medieval souls immersed into a spiritual sea.*

This is exactly the same claim that the real geometry is in its essence fractal, which almost half a century later Mandelbrot developed in his famous book[3]. In the context of the quoted paragraph, one can understand better Radojčić's interest in the geometric theory of functions, especially in the behavior of analytical functions in the vicinity of essential singularities[4]. From this viewpoint, his personality comes through as a road of integral consciousness, unreachable to the world hopelessly splited into an artistic dream and a scientific reality. All of his anthroposophist texts emphasize the thought that it is only through an artistic sensation that one can reach the knowledge, that is made of much more than only empty abstractions and external sensory experience.

The language of dreams – the language of art is the language of life itself. The life contains all terms, but it is not contained in any one term. It is only with such knowledge that we may approach the search for meaning in the echoes of ancient shrines.

IV

The digitization of the works of professor Radojčić started with his PhD thesis, which was digitized in July of 2008 at the mathematical Institute of the Serbian Academy of Science and Arts. Also digitalized are his papers about geometric theory of functions, anthroposophist texts, and monograph about axiomatic foundation of the special theory or relativity and textbooks *General Mathematics* and *Elementary Geometry*. All this is exhibited as a part of the virtual library of the National Center for Digitization [13]. Papers published in *Publication de l'institute mathematique* can be found on page [14].

It would be important to digitize his unpublished works, so that a broad circle of experts could evaluate them. Among the unpublished works, a special value holds the

[3] The idea of fractal was introduced in 1975 by B. Mandelbrot. Under fractal he understood certain singular mathematical objects that do not adhere to the topological theory of dimensions. The word fractal comes from Latin term *fractus*, which means broken, but also irregular in the sense of fragments. In his book *Fractal Geometry of Nature* in 1982 he claims that the majority of natural phenomena cannot be described using objects of classical geometry, because in its essence, the nature is a fractal phenomenon.

[4] Singularities of a function are points where function behaves in a unique matter, which excludes them from the general investigation of the function's behavior in a certain area. In complex analysis, the points of essential singularity are the points where a function behaves irregularly to the extent that there is no limit of a function at that point. Those are the points of abyss, where a function experiences an irreparable breakage, just as the quoted paragraph describes.

original translation and interpretations of *The Gospel according to John*, of which one professor of the Faculty of the Ortodox Theology gave opinion saying that the writer's knowledge of Serbian language was extraordinary, that his theological education was enviable and that many parts of interpretations were magnificent.

V

In the brave endeavor to write about such a complex and ingenious personality like Miloš Radojčić, I was trying to speak using his own words and the words of those who knew him. Therefore, listed below are some of his texts, out of which, without hesitation, I took over whole sentences. The complete bibliography of Radojčić can be found in the book [1]. In that book are also newly printed papers [6] and [10], as well as couple of texts about him, that I did not specifically annotate.

1. Драган Трифуновић *Тиха и усрдна молитва Милоша Радојчића* Народна књига АЛФА, Београд 1995.
2. Раде Дацић, Миодраг Матељевић *Живот и дело спрских научника – Милош Радојчић*, Српска академија наука и уметности, Београд 2004, књига 9, стр. 207-242.
3. Душан Адамовић, Драгомир Лопандић *Др Милош Радојчић,* Математички весник 13(28), Београд 1976, стр, 245-252.
4. Миодраг Томић *Милош Радојчић,* Годишњак САНУ LXXXII, Београд 1976, стр. 194-196.
5. Милош Радојчић *О становиштима у геометрији,* Први конгрес мат, физ. и астр. СФРЈ, Блед 8-12. 1. 1949, књига 2, Београд 1951, стр. 37-48.
6. Милош Радојчић *Алберт Ајнштајн и његово доба,* Годишњак нашег неба, Математички институт САН, Београд 1956, стр. 160-170.
7. Милош Радојчић *Une construction axiomatique de la théorie de l`espace-temps de la Relativité Restreinte*, Acad. Serbe des Sc. Et des Arts, Monographie, t. CDLXII, Beograd 1973, p. 165
8. Милош Радојчић *Елементарна геометрија. Основи и елементи Еуклидове геометрије,* Београд 1961, стр. 434
9. *Упознај самога себе – Часопис за антропософију и уметност,* Југословенско антропософско друштво, Београд 1931-1940.
10. Милош Радојчић *О чаробном свету средњевековног сликарства ,* Народна одбрана, Београд, 10(1940), 42,43,44,45
11. Милош Радојчић *О Дисовој Тамници,* Југословенско антропософско друштво – Библиотека лепих наука, књига 5, Београд 1929, стр. 32
12. Ђуро Курепа *Владимир Варићак,* Гласник мат, физ. и астр. 3(1948), стр. 64-76
13. http://elib.matf.bg.ac.yu:8080/virlib/
14. http://elib.mi.sanu.ac.rs/pages/browse_journals.php
15. http://www.goetheanum.org/

Emanuel Czuber (1851-1925) und die statistischen Forschungsmethoden

Hans-Joachim Girlich, Leipzig

Der Einfluss des Weltkrieges auf die Beschäftigung mit Mathematik zeigte sich in beeindruckender Weise im Handeln eines betagten Ruheständlers. Der Hofrat Professor Dr.-Ing. e. h. Emanuel Czuber entschloss sich – einem Aufruf von Felix Klein[1] folgend – nicht mehr weitere Umgestaltungen an dem 2. Band seines mehrbändigen Lebenswerkes *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung* vorzunehmen[2], sondern stattdessen gleich zu den englischen Standardwerken von G.Udny Yule: *An Introduction to the Theory of Statistics* und George H. Knibbs: *The Mathematical Theory of Population* überzugehen und diese dem nur deutschsprachigen Leser zugänglich zu machen.
Hat etwa das Kriegsgeschick Zweifel an seiner Darstellung der angewandten Mathematik genährt?
Zur mutmaßlichen Erklärung dieser Vorgehensweise wird Czubers Werdegang vom Studium der Mathematik und Geodäsie, über dem des Realschullehrers in Prag, zum Professor an der Technischen Hochschule in Brünn und ab 1891 in Wien skizziert, sowie der Wandel seiner Vorstellungen von den speziellen menschlichen Massenerscheinungen bis zu den statistischen Methoden entwickelt. Czubers Buch *Die statistischen Forschungsmethoden* wurde 1938 in der dritten Auflage von dem Leipziger Statistiker Felix Burkhardt erweitert. Die neue Fassung wird mit dem Original und modernen Statistik-Werken verglichen. Der Hinweis auf Einschnitte an mathematischen Instituten in Deutschland nach Beendigung des 2. Weltkrieges soll abschließend unterstreichen, dass Mathematik nicht im Elfenbeinturm betrieben, sondern im Sinne des gestellten Tagungsthemas sehr wohl von den herrschenden politischen Kräften beeinflusst wird.

[1] „Aus Erfahrungen des Weltkrieges ergibt sich die offenkundige Notwendigkeit, für die allgemeine Verbreitung exaktwissenschaftlicher Kenntnisse und der Einsicht in ihre praktische Verwendbarkeit noch eingehender und umfassender vorzusorgen als bisher." DMV-Jahresbericht 27(1918), S. 223.
[2] Vgl. Vorwort, S. IV, Band 2, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1921.

Lehrjahre in Prag

Emanuel Czuber wurde am 19.1.1851 in Prag[3] geboren. Hier verbrachte er seine Schulzeit (Matura 1869) und studierte an der Ingenieurfachabteilung am Deutschen Polytechnikum, wobei er bereits vor Abschluss dem Geodäten Karel Kořistka (1825-1906) assistierte, der die Lehrkanzel für Praktische Geometrie leitete.
Von 1874 an arbeitete er zwölf Jahre an der II. deutschen Staats-Oberrealschule als Supplent, wirklicher Lehrer bzw. Professor für Mathematik und darstellende Geometrie. Im Jahre 1876 erwarb er die venia docendi für Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung. Daraufhin wurde ihm die Redaktion der *Prager Technischen Blätter* angetragen, die er gleich für die Veröffentlichung einer Reihe von Arbeiten nutzte, begonnen noch 1876 mit den *Bemerkungen über die mathematische Behandlung von Beobachtungsergebnissen*. Daneben publizierte er als Lehrer an einer höheren Unterrichtsanstalt im *Archiv der Mathematik und Physik* Arbeiten über Kettenbrüche,Kegelflächen, darstellende Geometrie, aber auch schon 1878 über das ungewöhnliche Thema: *Vergleich zweier Annahmen über die moralische Bedeutung von Geldsummen.* Dahinter zeigte sich alsbald ein besonderes Interesse für die Mathematik des Zufalls. So übertrug Czuber aus dem Französischen ins Deutsche die *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung*[4] von A. Meyer, die dieser in den Jahren 1849 bis 1857 an der Universität Lüttich gehalten hatte und die posthum veröffentlicht werden sollten. Dabei ging die deutsche Bearbeitung weit über das Original hinaus. Insbesondere arbeitete Czuber zwei Kapitel um und erweiterte sie beträchtlich. Das betraf einmal das achte Kapitel zur Ausgleichungsrechnung, wobei er Helmerts Lehrbuch[5] heranzog sowie das neunte Kapitel über die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Sterblichkeit und ähnliche Fragen unter Benutzung der Werke von Zeuner[6] und Knapp[7].

[3] Persönliche Daten entnahmen wir dem Nachruf von Czubers langjährigem Kollegen E. Doležal, DMV-Jahresbericht 37(1928), S. 287-297.
[4] Unter diesem Titel bei B. G. Teubner in Leipzig 1879 erschienen.
[5] F. R. Helmert: *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.* Leipzig 1872.
[6] G. Zeuner: *Abhandlungen aus der mathematischen Statistik*. Leipzig 1869.
[7] G. F. Knapp: *Theorie des Bevölkerungswechsels*. Braunschweig 1874.

Der Weg vom Realschullehrer zum ordentlichen Hochschullehrer erforderte in Wien anerkannte weitreichende Forschungsergebnisse. Diese erzielte Czuber mit Arbeiten wie zur Theorie der Fehlerellipse und zu den geometrischen Wahrscheinlichkeiten.[8]Letztere baute er zur Monographie *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*[9] aus, deren Qualität durch eine von Herman Schuermans besorgte französische Übersetzung[10] sowie den Beitrag von Magdalena Hykšova auf dem IX. Symposium gewürdigt wurde.

Historiograph in Brünn und Wien

Im Jahre 1884 wurde Czuber zum ordentlichen Professor der Mathematik an die Deutsche Technische Hochschule nach Brünn berufen. Hier schuf er das historiographische Werk *Theorie der Beobachtungsfehler*[11]. Im Vergleich zur Bearbeitung der Meyerschen *Vorlesungen* löste sich Czuber von der anwendungsorientierten Darstellung und konzentrierte sich darauf, „ein möglichst umfassendes und zusammenhängendes Bild der wissenschaftlichen Grundlagen der Fehlertheorie und ihrer Entwicklung zu geben.“[12] Aus heutiger Sicht[13] gelang damit Czuber der Übergang von Todhunters klassischer Personengeschichte[14] zu einer Historiographie der Normalverteilung und ihrer Statistik. Die Anerkennung der Zeitgenossen ließ nicht lange auf sich warten. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung übertrug auf ihrer Jahresversammlung in Wien1894 (in Verbindung zur Tagung der Deutschen Gesellschaft der Naturforscher und Ärzte) Czuber die Aufgabe, einen möglichst vollständigen Bericht über die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verfassen.[15] Parallel dazu wurde

[8] Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Math.-Nat. Classe 82(1880) S. 698-723, 90(1884) S. 719-742.

[9] Veröffentlicht von B. G. Teubner, Leipzig 1884.

[10] Probabilités & moyennes géométriques. Hermann, Paris 1902.

[11] B. G. Teubner, Leipzig 1891.

[12] Czuber: *Theorie der Beobachtungsfehler,* Vorwort, S.III.

[13] Vgl. z.B. A. Hald: *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930.* John Wiley, New York 1998.

[14] I. Todhunter: *A History of the Mathematical Theory of Probability.* From the Time of Pascal to that of Laplace. Macmillan, London 1865.

[15] Vgl. dazu das Vorwort von Czubers *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 7.Band, Leipzig 1899.

ein mathematisches Lexikon geplant. Czuber folgte in seinem 279 Seiten umfassenden Bericht nicht dem historischen Gang, sondern bevorzugte eine sachliche Gliederung, um der Ideenbildung mehr Aufmerksamkeit schenken zu können. Dabei entspricht die Struktur des Berichts in 7 Abschnitten bis auf kleine Änderungen in der Anordnung und in der Anzahl der Struktur der Kapitel der *Vorlesung* von 1879. Vielleicht war dieses Vorgehen auch richtungsweisend für die Väter der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*[16], von einem alphabetisch geordneten Begriffssystem abzurücken und den Aufbau des Inhalts in den Resultaten und Methoden der mathematischen Forschung als Gruppierungsprinzip zu erheben. Der DMV-Bericht von Czuber war grundlegend zumindest für Band I, 2. Teil, Heft 6, darinTeilpunkt D. *Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung* , wobei folgende Berichtsabschnitte in folgende Enzyklopädie-Artikel eingingen: Abschnitte 1- 4 in I D 1. *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Czuber), 6. Abschnitt in I D 2. *Ausgleichungsrechnung (Bauschinger),* 7. Abschnitt sowohl in I D 4a. *Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik* (Bortkiewicz) als auch in I D 4b. *Lebensversicherungs-Mathematik* (Bohlmann).

Hochschullehrer in der Kaiserstadt

Im Jahre 1891 erreichte den gewählten Rektor der Deutschen TH Brünn Emanuel Czuber ein Ruf nach Wien. Er übernahm die Lehrkanzel für Mathematik II an der Technischen Hochschule Wien in der Nachfolge von Anton Winckler. Damit verbunden war die mathematische Grundausbildung für Ingenieure.[17] Eine besondere Aktivität war 1894 die Einführung eines versicherungstechnischen Kurses. Bei der Ausbildung von Versicherungstechnikern war Czuber Vorreiter in deutschen Landen vor Lexis und Bohlmann in Göttingen sowie Hausdorff in Leipzig. Bereits 1898 wurde Czuber Präsident des Verbandes der österreichisch-ungarischen Versicherungstechniker und 1899 Hofrat. Das ausgearbeitete Studienmaterial gelang als Band IX

[16] B. G. Teubner, Leipzig 1904 (Walther von Dyck: Einleitender Bericht).

[17] Vgl. dazu E. Czuber: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, 2 Bände, Leipzig 1898 (inkl. Differentialgleichungen); ders.: *Einführung in die höhere Mathematik*, Leipzig und Berlin 1909 (inkl. analytische Geometrie).

in *B.G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*[18] zu veröffentlichen. Ein breiter Leserkreis fand sich vor allem durch die Aufnahme einer Einleitung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, die, mit vielen Beispielen versehen, auch den primären Versicherungstechnikern einen bequemen Zugang zum orginären Teil *Lebensversicherungsrechnung* ermöglichte. In den folgenden Jahren bemühte sich Czuber, die neuen Entwicklungen auf dem Gebiet der Stochastik in sein Lehrwerk einzuarbeiten, so dass das Material bald zwei Bände füllte. Der erste Band wurde 1908 insbesondere durch den Teil *Kollektivmaßlehre* erweitert, denn die Untersuchungen von Heinrich Bruns (1848-1919) verschafften den Ideen von G.T. Fechner (1801-1887) einen Durchbruch.[19] (Czubers Student Richard von Mises (1883-1953) präzisierte später den Kollektivbegriff, erlebte jedoch seine Rechtfertigung nicht mehr[20]). Der zweite Band erfuhr 1910 eine umfangreiche Bearbeitung der Teile Statistik und Versicherung. Dabei wurde auch die von Karl Pearson (1857-1936) vorgeschlagene Klassifizierung von Häufigkeitsverteilungen über zwei gewöhnliche Differentialgleichungen und deren Identifizierung mittels der Momentenmethode eingearbeitet.[21] Schließlich fand in der 3. Auflage des 1. Bandes 1914 die von Bachelier (1870-1946) entwickelte Beschreibung stochastischer Prozesse[22] ihre Aufnahme, die allerdings erst 1931 die erforderliche mathematische Schärfe erfuhr.[23]
Czuber hat mit seiner zweibändigen *Wahrscheinlichkeitsrechnung* ein bahnbrechendes Werk der angewandten Mathematik geschaffen, das zusammen mit den Bänden zur Analysis (vgl. Anm.17) wohl nicht zuletzt ausschlaggebend für die Verleihung des Ehrendoktors der Technischen Hochschule München im Jahr 1918 war.

---

[18] E. Czuber: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung.* Leipzig 1903.
[19] H. Bruns: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre*. Leipzig 1906; G.F.Lipps(Hrg.): *Collectivmaßlehre von Gustav Theodor Fechner*.Leipzig 1897.
[20] M. v. Lambalgen: *Von Mises' definition of random sequences reconsidered.* The Journal of Symbolic Logic 52 (1987), S.725-755.
[21] Vgl. W. P. Elderton: *Frequency-Curves and Correlation.* London 1906.
[22] L. Bachelier: *Calcul des probabilités.* Paris 1912.
[23] H.-J. Girlich: *A.N. Kolmogoroff (1903-1987) und die Ursprünge der Theorie stochastischer Prozesse.* Algorismus 44 (2004), S. 407-421.

Statistische Methode(n)

Aus gesundheitlichen Gründen hatte Czuber bereits 1919 den Lehrbetrieb in Wien aufgegeben und sich auf seinen Landsitz in Gnigl unweit Salzburg zurückgezogen, aber ohne vor Ablauf seines 70. Lebensjahres in den Ruhestand zu treten. Der Wegfall vielfältigster Anforderungen in der Metropole brachte ihm endlich die Zeit, über Statistik erneut nachzudenken und weitere Projekte in Angriff zu nehmen. Insbesondere wollte er einen Zugang zu der neueren Behandlungsweise statistischer Fragen eröffnen, die in den letzten zwei Dezennien von englischen Statistikern entwickelt worden war. Dazu eignete sich das bewährte Lehrbuch von Yule[24], das aus dessen Unterrichtspraxis am University College in London hervorgegangen war und insbesondere Regression und Korrelationstheorie berücksichtigte[25]. Czuber übernahm das Material und die Anordnung des Stoffes weitgehend von Yule. Nur im Dritten Abschnitt ersetzte er, unter Verwendung des Kollektivbegriffs, Yules Anfänge einer Stichprobentheorie durch eine Grundlegung nach Bortkiewicz und Lexis. Für die Anwendungsbeispiele aber benutzte er verschiedene andere Quellen zu möglichst vielen Wissenschaftsgebieten. Damit rückte Czuber von seiner früheren Auffassung von Statistik deutlich ab, bei der nur menschliche Massenerscheinungen wie Geburt und Tod mittels mathematischer Methoden behandelt wurden. Er versuchte diese nun zu spezifischen „ statistischen Methoden“ einer eigenständigen Wissenschaftsdisziplin im Sinne von Yule zu qualifizieren. Das Manuskript konnte Czuber in Gnigl im April 1920 abschließen, das Buch erschien 1921 bei Seidel in Wien.[26]
Der Professor der Statistik der Universität Padua C. Gini (1884-1965) begründete am 1.7.1920 mit dem ersten Heft eine neue statistische Zeitschrift.[27] Gini war Herausgeber und Eigentümer. Ihm zur Seite stand eine „Direktion“ (Board) , der L. March (Paris), F.P. Cantelli (Rom), G.H. Knibbs (Melbourne) und Gelehrte aus 6 weiteren Ländern, aber, kurz nach dem Weltkrieg, kein Vertreter der

[24] G.U.Yule: *An Introduction to the Theory of Statistics*. London 1911. Die 7. verbesserte Auflage erschien 1924, die 11. mit M.G. Kendall als Koautor 1937.
[25] G.U. Yule: *Notes of Karl Pearson’s lectures on the theory of statistics, 1894-1896*. Biometrika 30(1938), S. 198-203.
[26] E. Czuber: *Die statistischen Forschungsmethoden*. Wien 1921, vgl. Vorwort.
[27] *Metron - Rivista internationale di statistica*. Rovigo 1920.

Mittelmächte angehörte.[28] Im Programm der *Statistischen Rundschau Metron* wurde aber „strikteste Teilnahme der Schriftsteller aller Nationen“ unbedingt erbeten.[29] Czuber war der erste, der dieses Angebot nutzte und sehr bald in die Direktion von *Metron* aufgenommen wurde.. Gleich hinter der programmatischen Eröffnung über die „statistische Methode“[30] publizierte er hier eine Arbeit[31] und nahm Verbindung zu Knibbs auf, dessen Beitrag im gleichen Heft Czuber anregte, dessen bedeutsames Buch[32] in komprimierter Form ins Deutsche zu übertragen: *Mathematische Bevölkerungstheorie* erschien dann auch 1923 bei B.G. Teubner in Leipzig. An gleicher Stelle (im gleichen Jahr) wurden Czubers *Philosophische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*[33] veröffentlicht. In diesem Werk versucht er im Nachhinein seine zweibändige *Wahrscheinlichkeits-rechnung* mit der spezifischen philosophischen Forschung des letzten Jahrzehnts zu verbinden, die durch A. Meinong[34] und K. Marbe[35] geprägt wurde. Auf die weiterführende, ihm wohl bekannte[36] Untersuchung von R. v. Mises[37] geht Czuber hier leider noch mit keiner Silbe ein.

Czuber-Burkhardt und der Krieg

Am 22.8.1925 verstarb Emanuel Czuber in Gnigl. Seine Bücher zur angewandten Stochastik lebten weiter. Allein im Jahre 1938 legte B.G. Teubner von der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* den 1. Band in

[28] Angehörige der Mittelmächte durften erst 1928 wieder an den Internationalen Mathematiker-Kongressen teilnehmen.
[29] Metron 1.N.1 (1920), S. 21. Auch Wissenschaftler aus Sowjet-Russland (wie z.B. E. Slutsky und A. Tschuprow) sandten daraufhin bedeutende Abhandlungen nach Italien.
[30] L. March: *La méthode statistique*. Metron 1.N.1 (1920), S. 22-52.
[31] E. Czuber: *Über Funktionen von Variablen, zwischen welchen Korrelationen bestehen*. Metron 1.N.1 (1920), S. 53-61.
[32] G. H. Knibbs: *The Mathematical Theory of Population*. Melbourne 1917.
[33] Reihe *Wissenschaft und Hypothese*, Band 24, Leipzig und Berlin 1923.
[34] A. Meinong: *Über Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit*. Leipzig 1915.
[35] K. Marbe: *Die Gleichförmigkeit in der Welt*. München 1916.
[36] Vgl. Czuber (1921), Anm. 26, S. 172, Fußnote 2.
[37] R. v. Mises: *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Mathematische Zeitschrift 5 (1919), S. 52-99. Vgl.aber E.Czuber: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Band 1, 4. Auflage, Leipzig 1924, Zusätze 9. S. 438-442.

der 5. und den 2. Band in der 4. Auflage wieder auf und L. W. Seidel brachte in Wien *Die statistischen Forschungsmethoden* in der 3. erweiterten Auflage, herausgegeben von F. Burkhardt (1888-1973).[38] Der Herausgeber hat an der Czuberschen Darstellung wenig geändert, dafür neue Gegenstände aus der Bevölkerungsstatistik und der Analyse der Zeitreihen sowie Zahlenmaterial aus der amtlichen Statistik hinzugefügt, so dass der Umfang des Buches um mehr als ein Drittel zunahm. War dadurch die Bezeichnung „Czuber-Burkhardt“ auf dem rotbraunen Bucheinband gerechtfertigt? Die Neuauflage[39] von Czubers Werk der klassischen Statistik bewirkte nicht zuletzt die Beförderung von Burkhardt zum planmäßigen Professor und 1943 zum Ordinarius und damit von Hans Richter (1912-1978) zum ao. Professor für Versicherungsmathematik in Leipzig.
Der Qualitätssprung in der mathematischen Statistik durch die Arbeiten von R. A. Fisher (1890-1962), J. Neyman (1894-1981) und E. S. Pearson (1885-1980) ist im „Czuber-Burkhardt“ noch nicht reflektiert, sondern wurde erst in Harald Cramérs Buch *Mathematical Methods of Statistics* aufbereitet, das 1946 in Princeton erschienen ist, als Burkhardt und Richter nach Alliiertem Kontrollrats-Beschluss ihre Professuren in Leipzig bereits verloren hatten.[40]
Zehn Jahre später normalisierten sich die Verhältnisse auch im deutschsprachigen Raum. Leopold Schmetterer (1919-2004) veröffentlichte ein richtungsweisendes Standardwerk zur modernen Statistik[41], der Seidel-Verlag einen unveränderten Nachdruck der 3. Auflage von Czubers *Forschungsmethoden.* Burkhardt arbeitete wieder als Ordinarius für Statistik in Leipzig. Er regte zwei seiner Promovenden an, die Statistik eng mit Gesellschaftswissenschaften[42] zu verbinden und Richter (seit 1955 Professor für Mathematische Statistik und Wirtschaftsmathematik auf einem neuen Lehrstuhl an der Universität München) eröffnete 1956 die seitdem jährlich stattfindende Tagung über Mathematische Statistik in Oberwolfach.[43]

---

[38] H.-J. Girlich: *Felix Burkhardt (1888 bis 1973)- ein sächsischer Pionier der Statistik in Deutschland*. Statistik in Sachsen 3-4/ 2006, S. 51-58.
[39] Vgl. *Allgemeines Statistisches Archiv* 28 (1939), S. 111.
[40] Universitätsarchiv Leipzig PA1190, PA237.
[41] L. Schmetterer: *Einführung in die mathematische St*atistik. Wien 1956.
[42] E. Herrde, O. Kuhn: *Grundlagen der Statistik für Wirtschaftler*. Berlin 1956.
[43] D. Bierlein, V. Mammitzsch: *Hans Richter zum Gedenken*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 82(1980), S. 95.

Karl Menger (1902 – 1985): How to write a history of a mathematician? Vignettes from a work in process.[1]

Abstract

In the early 1920's Karl Menger presented simultaneously and independently from Paul Urysohn (1898-1924) a new concept of "dimension" and "curve" to the scientific community. While his solution for the quest of "dimension" was part of his dissertation, Menger quickly climbed up the academic leader. After spending two post-doc years in Amsterdam as an assistant to Brouwer (1881-1966) he received a call from the University of Vienna. Under Menger's care the Mathematical Seminar of the University of Vienna became one of the hot beds in the new field of topology, largely because of his discussion circle, the so called "Mathematical Colloquium." While looking at Menger's mathematical contributions as well as at his role in the scientific life of interwar Vienna, one cannot neglect his biography. Thus, questions upon how to write history of Mathematics arose, which are results of the dissertation (in progress) "The Dimensions of Karl Menger".

1. Approaching Menger's first contributions in dimension theory

1.1. The unquestioned use of the term "dimension" and the need for a new concept of 'dimension'

Before looking at Karl Menger's first mathematical contributions in the field of dimension theory, one must consider why there was a need within the mathematical community for an exact definition of the mathematical term "dimension".[2]

[1] The author would like to thank Ms. Sarah Teetor for proofreading this paper.

[2] The following presentation of the "crisis" that appeared in the late 19th century concerning the term ‚dimension' adapts a talk given by Hans Hahn (1879-1934) entitled "The Crisis of Intuition" and can be found in a more detailed form in a lecture given by the author at the History of Science conference in Budapest (2009) - Hans Hahn, "Die Krise Der Anschauung," in *Krise Und Neuaufbau in Den Exakten Wissenschaften. Fünf Wiener Vorträge* (Wien: 1933). and Bernhard Beham, "'the Crisis of Intuition' - Austrian-Hungarian Contributions in the Quest of Defining the Mathematical Term 'Dimension' from the 1850's to the 1920's," in *Mathematics in the Austrian-Hungarian Empire. Proceedings of a Symposium Held at Budapest on August 1, 2009 During the Xxiii Ichst*, ed. Christa Binder Martina Becvarova, *History of Mathematics* (Prague: 2010).

Since the writings of the ancient Greek mathematicians and philosophers, an elementary idea of dimension based on quantity took place in mathematical thinking.[3] This idea corresponds with our intuitive standpoint that a square includes more points than a line furthermore that a cube includes more points than a line and a square.

Thus, traces of this ancient connection between quantity and dimension can be found into the 19th century; e.g. Bernhard Riemann (1826-1866) and Hermann Helmholtz (1821-1894) created an informal theory of continuous manifolds in which dimension is based on the number of coordinates that are necessary to locate a point in space, square or on a line.[4]

The first important shift that questioned the relation quantity/dimension came from Georg Cantor (1845-1918). While Cantor was comparing two sets for the notion of equality, he discovered cardinality through mappings and correspondence to the real numbers. He then thought of adopting this approach towards dimensional matters.[5] Thus Cantor asked in a letter to Richard Dedekind (1831 -1916), if a *"surface (perhaps a square including its boundary) can be put into a one-to-one correspondence with a line (perhaps a straight line segment including its endpoints) so that to each point of the surface there corresponds a point of the line and conversely to each point of the line there corresponds a point of the surface?"*[6]

Finally, Cantor could show in his 1878 article "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre"[7] that a continuous square (or even a cube) could be mapped one-to-one onto a continuous line segment. Although one must admit that this mapping is discontinuous, Cantor's contribution had shown that there was a need for a new concept of dimension.

The reaction of his fellow mathematicians came promptly. In order to "save" the old intuitive idea of dimension, five mathematicians tried to prove that such one-to-one continuous mapping between different dimensional objects which Cantor applied in his paper was simply impossible [Invariance Theorem]. Due to the usage of calculus and geometrical reasoning these early proofs of the Invariance Theorem could not go beyond the third dimension.[8] Nevertheless, the mathematical

---

[3] Tony Crilly with the Assistance of Dale Johnson, "The Emergence of Topological Dimension Theory," in *History of Topology*, ed. Ioan .M. James (Amsterdam: 1999). 2

[4] Ibid. 7

[5] Dale M. Johnson, "The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology. Part 1," *Archive for History of Exact Sciences* 20 (1979). 132

[6] Cited after Ibid. 132

[7] Georg Cantor, "Ein Beitrag Zur Mannigfaltigkeitslehre," *Crelle Journal - Journal für die Reine und die Angewandte Mathematik* 84 (1878).

[8] An excellent analysis of some early efforts to prove the Invariance of Dimension can be found in Johnson, "The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology. Part 1."146-162

community thought that at least one of these five mathematicians had proven the Invariance Theorem, which would have saved the concept of dimension based on quantity.[9]

Whereas the majority of the mathematicians believed the question of dimension to be answered, the Italian Mathematician Guiseppe Peano (1858-1932) shattered the definition of dimension again. In 1890 Peano published an only four page long article entitled “Sur une courbe, qui remplit une aire plane”[10] in which he had constructed in a purely analytical way a curve, which covers all point of a unit square. At the same time Peano dealt the dimension concept a severe blow; he opened the first chapter of the fascinating field of space-filling curves.[11]
No matter how intriguing Peano’s curve is, his creation lacks some important mathematical properties: Firstly, the creating function of Peano’s space-filling curve is not injective, which means that some points of the unit square are covered several times by the function.
Secondly, the Peano’s curve is not derivable.[12]

Nonetheless the echo of the mathematical community was enormous, and right after the publication of Peano’s paper, David Hilbert (1862-1943) presented another space-filling curve at the Annual Meeting of the German naturalists and medical doctors.[13] Whereas Peano had constructed his curve purely analytically, Hilbert provided for the first time a visualisation of a space-filling curve.[14]

As a result of the contributions by Cantor, Peano and Hilbert previously mentioned, the mathematical community around 1900 was aware of the need of a new and exact dimension concept.

---

[9] Johnson, "The Emergence of Topological Dimension Theory." 9
[10] Giuseppe Peano, "Sur Une Courbe, Qui Remplit Une Aire Plane," *Mathematische Annalen* 36 (1890).
[11] An excellent introduction to the field of space-filling curves can be found in Hans Sagan, *Space-Filling Curves*, ed. F.W. Gehring J.H. Ewing, P.R.Halmos, *Universitext* (New York: 1994).
[12] Johnson, "The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology. Part 1." 171 – Additionally, the author would like to thank Prof. Schmitt for his remarks on the Peano curve.
[13] David Hilbert, "Über Die Stetige Abbildung Einer Linie Auf Ein Flächenstück," in *63. Versammlung Der Deutschen Naturforscher Und Ärzte Zu Bremen 1890*, ed. O. Lassar (Leipzig: 1891).
[14] The first diagramms of Hilbert’s space-filling can be found in Ibid. which have been later published (with only marginal changes in the text) in: David Hilbert, "Über Die Stetige Abbildung Einer Linie Auf Ein Flächenstück," *Mathematische Annalen* 38 (1891). and David Hilbert, "Über Die Stetige Abbildung Einer Linie Auf Ein Flächenstück," *Prace Matematyczno-Fizyczne* 5 (1894).

1.2. Philosophical approaches to the concept of the dimension and Menger/Urysohn's solution

By the turn of the century several outstanding mathematicians had tried to rethink the concept of dimension. Based on the inappropriate mathematical tools available at the time, some mathematicians like Bernhard Bolzano (1781-1848) or Henri Poincaré (1854-1912) tried to solve the quest of defining the mathematical term dimension with a philosophical approach.

Almost 50 years before Poincaré the -Bohemian free-thinker and mathematician Bolzano[15] had started comtemplating the concept of dimension in his book "Paradoxes of the Infinite", which was reissued with mathematical notes by Hans Hahn in the 1920's.[16] In the paragraph "Paradoxien des Raumes" (Paradox of space) of his treatise,[17] Bolzano shed a new light on the concept of dimension. Contrary to Riemann and Helmboltz, who had connected dimension number with the quantity of parameters necessary to locate a point in a geometric object, Bolzano took a completely new course. In order to distinguish various forms of "expansions" – geometrical objects – Bolzano compares them with their neighbouring objects. *"Although Bolzano's approach towards dimension number cannot be seen as ultimate,"* as Hahn stated,[18] Bolzano's early attempt traces the idea of a "neighbourhood" of points and their "boundaries". Both notions became key definitions in topology and helped to solve the quest of finding an exact dimension definition in the early 1920's.
However, Bolzano's philosophical ideas were hardly known within the mathematical community at the beginning of the 20th century.

On the other hand, Poincaré's philosophical ideas towards dimension[19] were well known within the mathematical community. Menger himself mentioned that he had followed the footsteps of the French mathematician, whereas Bolzano's thoughts were unknown to him.[20]

---

[15] For biographical notes on Bolzano see e.g. Eduard Winter, *Bernard Bolzano, Ein Lebensbild*, ed. Eduard Winter, *Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe* (Stuttgart: 1969).
[16] Bernhard Bolzano, *Paradoxien Des Unendlichen. Herausgegeben Aus Dem Schriftlichen Nachlasse Des Verfassers Von Dr. Fr. Prihonsky. Mit Anmerkungen Versehen Von Hans Hahn*, vol. 99, *Die Philosophische Bibliothek* (Leipzig: 1920).
[17] Ibid.80
[18] Ibid. 149
[19] Poincaré's thoughts on dimension had been published in several articles in the French journal „Revue de Metaphysique et de Morale". His articles were subsequently reissued in the following two books: Henri Poincaré, *Letzte Gedanken* (Leipzig: 1913), Henri Poincaré, *Wissenschaft Und Hypothese*, trans. Autorisierte Deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann, Zweite verbesserte Auflage ed. (Leipzig: 1906).
[20] Karl Menger, "My Memories of L. E. J. Brouwer," in *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics*, ed. Karl Menger (Dordrecht: 1979). 240

In 1903 Poincaré doubtfully questioned the concept of dimension in his paper, „L`Espace et ses trois Dimensions“,[21] which was later added in an revised form in a collection of his philosophical writings.[22] After criticising the status quo, Poincaré searched for a distinction between points, lines and curves. From Poincaré' s point of view, the core of dimension can be found while cutting geometric objects into pieces. According to this thought, the French mathematician had formulated a recursive definition of dimension, based on the notion of the cut. Thus, Poincaré, stated: *"It is the cut, upon which everything is built."*[23]

Finally, the combination of philosophical approaches such as Poincaré had offered and the new tools of point-set topology that arosed in the first decades of the 20th century brought an end to the quest of dimension. In the early 1920' s Karl Menger and Paul Urysohn (1898-1924) simultaneously and independently presented the following small intuitive dimension concept:

"A set S of points of the space is at most n-dimensional if each point of S lies in arbitrarily small neighbourhoods whose boundaries have at most (n-1)-dimensional intersections with S. The set S is n-dimensional if it is at most n-dimensional but not at most (n-1)-dimensional. The empty set, called -1-dimensional, is the starting point of the recursive definition."[24]

1.3. The genesis of Menger' s dimension theory, a case study of Lakatos' theory

When reading through Menger's posthumously published memoirs (Reminiscences of the Vienna Circle and the mathematical Colloquium) one gets the impression that the young untrained student Menger could solve the eminent problem of dimension after the first session of Hahn' s seminar entitled "Neues über den Kurvenbegriff" (New ideas on the concept of curve) in spring 1921:

"After a weekend of complete engrossment in the problem I felt I had arrived at what appeared to be a simple and complete solution."[25]

---

[21] Dale M. Johnson, "The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology. Part 2," *Archive for History of Exact Sciences* 25 (1981). 103
[22] Poincaré, *Letzte Gedanken*.
[23] Translated by the author himself - Ibid. 66 - *„Es ist der Schnitt auf dem sich alles aufbaut"*
[24] Karl Menger, *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics* (Dordrecht: 1979). 212
[25] Karl Menger, *Reminiscences of the Vienna Circle and the Mathematical Colloquium*, ed. Brian McGuiness Louise Golland, Abe Sklar, vol. 20, *Vienna Circle Collection* (Dortrecht: 1994). 41

After reading these lines, it is astonishing that Menger published his first dimensional results by the end of 1923[26] and not right away in 1921. Therefore, I track Menger's tackling of the problem (spring 1921) until the first publication[27] of the definition cited above.

In my dissertation I confront the genesis of Menger's dimension theory in Menger's own words[28] to a historical reconstruction of the issue using the remaining correspondence in Menger's collected papers at Duke University, North Carolina[29] as well as treatises on the history of topology.[30]

In his autobiography Menger describes the delay in publishing his first results as a result of his contraction of tuberculosis, a common disease in interwar Vienna.[31] Thus Menger had to leave Vienna for almost a year for Aflenz,[32] the Styrian Davos.[33] According to Menger's writings, after his recovery he immediately published his results and finished his studies at the University of Vienna.[34]

Although the outbreak of tuberculosis was indeed a serious factor that delayed the publication of his results, a historical analysis of the development of Menger's dimension concept reveals another picture:

---

[26] Karl Menger, "Antwort Auf Eine Note Von Brouwer," *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37 (1930). 181

[27] Karl Menger, "Über Die Dimensionalität Von Punktmengen. Erster Teil," *Monatshefte für Mathematik und Physik* 33 (1923).

[28] Aside from Menger's posthumosly published memoirs, Menger wrote on the genesis of his dimension concept throughout the late 1920's mainly in order to claim his priority on the issue while disputing with Brouwer, e.g. see: Menger, "Antwort Auf Eine Note Von Brouwer.", Karl Menger, "Bericht Über Die Dimensionstheorie," *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 35 (1926), Karl Menger, "Zur Dimensions- Und Kurventheorie. Unveröffentlichte Aufsätze Aus Den Jahren 1921-1923," *Monatshefte für Mathematik und Physik* 36 (1929).

[29] The inventory of the collected papers of Karl Menger located at Duke University is available online - http://library.duke.edu/digitalcollections/rbmscl/mengerkarl/inv/ (August 17th 2010)

[30] Beside the works by Johnson - Dale M. Johnson, "Commentary on Menger´s Work on Dimension Theory," in *Karl Menger: Selecta Mathematica*, ed. Abe Skalar Bert Schweizer, Karl Sigmund, Peter Gruber, Edmund Hlawka, Ludwig Reich, Leopold Schmetterer (Wien: 2002), Johnson, "The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology. Part 1.", Johnson, "The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology. Part 2." - van Dalen provides in his two volume Brouwer biography an excellent chronology of the Menger-Brouwer dispute as well as information on Menger and his contributions towards dimension theory: Dirk van Dalen, *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer 1881-1966*, 2 vols., vol. 1. The Dawning Revolution (Oxford: 1999), Dirk van Dalen, *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer 1881-1966*, 2 vols., vol. 2. Hope and Disillusion (Oxford: 2005).

[31] Menger, *Reminiscences of the Vienna Circle and the Mathematical Colloquium*. 45f.

[32] Ibid. 46

[33] For an historic account on the positive aspects of the climate of Aflenz on lung diseases see: Adolf Ritter von Kutschera-Aichbergen, "Aflenz Am Fuße Des Hochschwab, Das Steirische Davos. Ein Neuer Wintercurort Für Lungenkranke.," *Mittheilungen des Vereins der Ärzte der Steiermark* 26. Jahrgang 1890 (1890).

[34] Menger, "My Memories of L. E. J. Brouwer."237-239

After being introduced to the key notions of point-set topology as well as the heart of the problem by Hahn in the spring of 1921, the young Menger struggled for almost two years to elaborate his ideas and put them into press. Aside from his treatment at Aflenz, his first publication had to be postponed several times due to objections posed by Hahn based on counterexamples that forced Menger to revise his assumptions.[35]

Therefore, the genesis of Menger's contributions towards dimension theory can be seen as a case study of Lakatos’ theory outlined in ‘Proofs and refutations – The logic of mathematical discovery’.[36]

According to the Hungarian philosopher of science Imre Lakatos (1922-1974)[37] mathematical progress resulted from improving existing conjectures and theorems through proofs and refutations. Following Lakatos’, firstly a raw version of a theorem or conjecture has to be stated and then proven. During the proof of this first conjecture, several counterexamples may arise. Thus, the previous statements must be revised with respect to the counterexamples. Therefore, the revised version of the previous statement incorporates to some extent the counterexamples, and the circle of proofs and refutations starts again.

The following passages should provide an outline of the survey of first topological contributions based on Lakatos’ theory, which will be an eminent part of the dissertation.[38]

Although it cannot be retraced how in spring 1921 Menger developed the idea of approaching dimension via observing points and their boundaries as well as the intersections of these boundaries, the following thought-experiment, which Menger formulated first in a review essay on dimension theory in 1925[39], could be seen as the root of his definition:

“A simple experiment that I [Menger] devised differentiates between these three classes of physical objects [solids – surfaces – curves]: remove from an object a point and all points sufficiently near to it. The dimension of the object determines the tool required for the performance of the experiment. In the case of a wooden block, a saw is needed in order to cut the solid along

---

[35] In the late 1920’s Menger himself lay open in the following article the reviews that Hahn had posed to him: Menger, "Zur Dimensions- Und Kurventheorie. Unveröffentlichte Aufsätze Aus Den Jahren 1921-1923."

[36] Imre Lakatos, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery* (Cambridge: 1976).

[37] For biographical notes as well as information on Lakatos‘ work see: George Kampis, ed., *Appraising Lakatos. Mathematics, Methodology, and the Man* vol. 1, *Vienna Circle Institute Library* (Dordrecht: 2002).

[38] In accordance with the purpose of this paper, which should give insight into dissertation in progress, this passage does not cover Menger’s first contributions and its revisions as detailed as it is scheduled in the dissertation.

[39] Menger, "Bericht Über Die Dimensionstheorie."

surfaces. If the object is a cardboard surface, then a pair of scissors suffices, and the cuts are along curves. If the object is a wire curve, then all that is needed are pliers with which we have to pinch the curve in dispersed points. Finally, if the object is dispersed like a pile of sand, then no tool at all is required since nothing has to be dissected." [40]

Consequently, in 1921 Menger had succeeded Poincaré's footsteps. Moreover, he had combined the thoughts of the French mathematician with tools of the uprising point-set topology and deposited his first definition of a curve by the end of 1921 at the Austrian Academy of Science.[41] Whereas Hahn's remark to use the notion 'connected' was satisfying within the definition of the curve,[42] it caused troubles for a new concept of dimension.

Based on zero-dimensional set, which Menger defined as a *"non-empty set that contains non-connected parts"*[43] he built up his first dimension definition. However, just before Menger wanted to publish this result in the fall of 1922,[44] Hahn in the position of the editor of the Viennese Journal „Monatshefte für Mathematik und Physik" had to inform Menger that his approach was already put into doubt by a counterexample given by Waclaw Sierpinski (1882-1969).[45]

In 1922 Sierpinski constructed in his paper "Sur les ensembles connexes et non connexes" a non-connected set, whose disjoint subsets had (due to the construction) one point in common.[46]
As a result, Menger had to rethink the zero-dimensional/non-connected sets as starting point for a recursive dimension definition. In order to put his results into the press as soon as possible, Menger wrote already from his sickbed in February 1922 a quick revision of his definition to Hahn.[47] Whereas Lakatos' theory presumes that counterexamples are included in the revised statement, Menger terminated the non-connected sets in favour of open boundary sequences in his revised definition in a letter to Hahn.[48] Moreover, Menger defined in his revised definition the empty set,

[40] The thought experiment given in his 1925 essay can be found in a similar form in English in: Menger, 1994 #17} 48
[41] "Versiegeltes Schreiben Nr. 872 - "Zur Theorie Der Punktmengen" Von Karl Menger," in *Versiegelte Schreiben (1902-1931)* (Wien: Archiv der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, 13. Dezember 1921). - The content of this deposited note can be found in Menger, "Zur Dimensions- Und Kurventheorie. Unveröffentlichte Aufsätze Aus Den Jahren 1921-1923." 411-412
[42] Menger, "Zur Dimensions- Und Kurventheorie. Unveröffentlichte Aufsätze Aus Den Jahren 1921-1923." 412
[43] Translated by the author himself - Ibid. 416: „Wir nennen nulldimensional eine nichtleere Menge, welche keinen zusammenhängenden Teil enthält."
[44] Menger, "Antwort Auf Eine Note Von Brouwer." 180
[45] Menger, "Zur Dimensions- Und Kurventheorie. Unveröffentlichte Aufsätze Aus Den Jahren 1921-1923." 416 – see footnote 11
[46] Menger later included Sierpinski's counterexample in his book on dimension theory - Karl Menger, *Dimensionstheorie* (Leipzig: 1928). 139-148
[47] Menger, "Zur Dimensions- Und Kurventheorie. Unveröffentlichte Aufsätze Aus Den Jahren 1921-1923." 418 – see footnote 16
[48] Ibid. 418-419

and only this one, as -1 dimensional. This adapted definition was quite similar to the previously cited small intuitive dimension definition by Menger/Urysohn. Nevertheless, to Menger's misfortune the publication of his results in fall 1922 had to be postponed again, due to objections by Hahn concerning an embedding theorem, which Menger proposed in his manuscript.[49]
In the following months Menger worked hard on the embedding theorem and at the same time opened a fruitful research field for himself[50] as well for Witold Hurewicz (1904-1956).[51]

In the fall of 1923 after another year of hardship, Menger finally could read the proof sheets[52] of his article that to be come published under the title "The dimension of point-sets. Part I" – "Über die Dimension von Punktmengen. Erster Teil"[53]. Whereas previous publication had been postponed due to his poor health or revisions posed by Hahn, fate intervened again: His close friend Otto Schreier (1901-1929)[54] wrote him from the annual meeting of the German Mathematicians' Association that Urysohn had made equivalent contributions and had published them already in a French journal.[55] With the help of Hahn and after adding a reference to Urysohn's work, Menger managed to publish his article by the end of 1923.[56]

For Menger the quest of his priority over the concept of dimension, which he had elaborated since spring 1921, was opened. But that's another story to be told.

Although the genesis of Menger's first topological contributions has been presented here very briefly, the strong relation between Menger's mathematical work and his biography, namely the status of his poor health and his treatise at Aflenz, appear clearly. Thus, in the case of Menger one cannot look at his mathematical contribution without looking at his fascinating biography and vice versa.

[49] Ibid. 422 – see footnote 22
[50] Karl Menger, "Einige Überdeckungssätze Der Punktmengenlehre," *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Wien* 133 (1924).
[51] Witold Hurewicz, "Über Eine Verallgemeinerung Des Borelschen Theorems " *Mathematische Zeitschrift* 24 (1925).
[52] Menger, "My Memories of L. E. J. Brouwer." 240
[53] Menger, "Über Die Dimensionalität Von Punktmengen. Erster Teil."
[54] For biographical notes see e.g. Bernhard Beham and Karl Sigmund, "A Short Tale of Two Cities: Otto Schreier and the Hamburg-Vienna Connection," *The Mathematical Intelligencer* 30, no. 3 (2008).
[55] Otto Schreier, "Postcard from Otto Schreier to Karl Menger (24.9.1923)," in *Karl Menger Papers* (Duke University, Durham, NC: Rare Book, Manuscript and Special Collection Libary, 1923).
[56] Menger, "My Memories of L. E. J. Brouwer." 240

2. Biographical notes on Menger's 'formative years' 1902-1927

Although there are several obituaries[57] and biographical essays[58] on Menger's fascinating life and work, no biography had been published to date. Thus, the author is going to fill this gap with his dissertation, which is going to cover Menger's 'formative' years – from his childhood up to 1927 when he received a call from the University of Vienna.[59] As mentioned above, Menger's life cannot be seen without his mathematical contributions. Thus, questions on writing a biography of a mathematician arise, which will be part of the last section of this paper.

On January 13th, 1902 Karl Menger was born in Vienna [60] as the son of the eminent economist Carl Menger (1840-1921). With a father who was tutor to the crown-prince Rudolf and had founded the "Austrian School of Economics",[61] Menger *"must have felt the pressure to succeed"*[62] as Sigmund presumed.

From 1913 to 1920 Menger attended the "Staatsgymnasium XIX" in the posh Viennese cottage district of Döbling.[63] It is worth noting that at this school the later Nobel laureates Wolfgang Pauli (1900-1958) and Richard Kuhn (1900-1967) studied together.[64] Indeed, Kuhn and Pauli also shared the same classroom, which later was given the name "class of geniuses". The school was founded in 1885 by a local citizen's initiative,[65] which was reflected in the progressive curricula of the school. Aside from a classic education in Latin and Greek, English and science experiences were part of the schedule at the Döblinger gymnasium.[66]

---

[57] Edmund Hlawka, "Karl Menger. Nachruf Mit Schriftenverzeichnis," *Almanach der Östereichischen Akademie der Wissenschaften* 136. Jahrgang (1987). Seymour Kass, "Karl Menger," *Notices of the AMS* 43, no. 5 (1996).
[58] Louis Golland and Karl Sigmund, "Exact Thought in a Demented Time: Karl Menger and His Viennese Mathematical Colloquium," *The Mathematical Intelligencer* 22, no. 1 (2000), Robert Leonard, "Ethics and the Excluded Middle. Karl Menger and Social Science in Interwar Vienna," *ISIS* 89, no. 1 (1998), Karl Sigmund, "Karl Menger and Vienna's Golden Autumn, in Karl Menger, Selecta Mathematics I (Eds. Schweizer Et Al) Springer Wien-New York 2002. ," in *Karl Menger. Selecta Mathematica* ed. B. Schweizer K. Sigmund, A. Sklar, P. Gruber, E. Hlwaka, L. Reich and L. Schmetterer (Wien: 2002), Karl Sigmund, "Menger´S Ergebnisse - a Biographical Introduction," in *Karl Menger. Ergebnisse Eines Mathematischen Kolloquiums*, ed. K. Sigmund E. Dierker (Wien: 1998).
[59] After finishing the dissertation the author will continue with compiling a biography of Menger. Thus the next step will cover the most, would-be impressive period of Menger's mathematical and social life onwards: His Viennese years from 1927 up to his emigration in 1937/38, where he established the famous 'Mathematical Colloquium'.
[60] Karl Menger, "Rigorosenakt Nr. 5975 - Curriculum Vitae; Karl Menger," in *Rigorosenakten - Philosophische Fakultät* (Wien: Archiv der Universität Wien, 1924).
[61] Golland and Sigmund, "Exact Thought in a Demented Time: Karl Menger and His Viennese Mathematical Colloquium." 34-35
[62] Sigmund, "Menger´s Ergebnisse - a Biographical Introduction." 7
[63] "Karl Menger - Zeugniskataloge Für Die Schuljahre 1912/13 Bis 1919/1920 " in *Archiv des Bundesgymnasiums XIX. in der Gymnasiumsstraße 83* (Wien).
[64] Hlawka, "Karl Menger. Nachruf Mit Schriftenverzeichnis." 343
[65] Friedrich Weissensteiner, "Hundert Jahre Döblinger Gymnasium," in *100 Jahre Gymnasium Gymnasiumsstraße (1885-1985)*, ed. Elternverein des Bundesgymnasiums Wien 19 (Wien: 1985). 11-12
[66] Beham and Sigmund, "A Short Tale of Two Cities: Otto Schreier and the Hamburg-Vienna Connection." 27

Following Menger’ s notebooks dating back from his Döblinger school days, he was fascinated by physics, namely by Albert Einstein’s’ s relativity theory.[67] One can assume that Menger thought that he could “escape” from the shadow of his father by becoming a physicist. Thus, during his schooldays Menger contemplated Einstein’ s theory, gave presentations at school[68] and right after graduating began to study physics at the University of Vienna in the fall of 1920.[69]

However, Menger not only pursued a career as a scientist, he also dreamt of becoming a writer. Probably as a result of his mother, who should have been a novelist,[70] Menger started to write a play in the style of Dante based on the medieval legend of the pope Joan. Thanks to notes by Arthur Schnitzler[71], with whom Menger discussed his drama project, it can be traced that Menger kept working on the play throughout the first semester at the University. In fall of 1923, probably due to harsh critique by Schnitzler on his play's manuscript[72] and to the promising mathematical surveys, Menger gave up his literary ambitions.

Menger’s shift from pursuing a career as a physicist to a mathematician was caused by Hahn’s Seminar “Neues über den Kurvenbegriff” in the spring of 1921.[73] In his first seminar lecture Hahn had explained why the mathematical community was in need of a new and exact concept of dimension. Immediately, Menger was fascinated by the question and eagerly tried to solve the problem.[74] As stated above, Menger developed the core of the small intuitive dimension concept right away in the spring of 1921. However, while elaborating his ideas further, in February 1922 he had contracted tuberculosis and had to leave Vienna for almost a year.[75] Far away from the academic life at the Viennese Mathematical department and its library, Menger found the *“contemplation, for reading great literature, for studying mathematics in some depth without oral help, and for developing my own ideas.”*[76] Only by mail Menger could discuss his mathematical

[67] Karl Menger, "Tagebuch No.1," in *Karl Menger Papers* (Duke University, Durham, NC: Rare Book, Manuscript and Special Collection Libary), Karl Menger, "Tagebuch No.2," in *Karl Menger Papers* (Duke University, Durham, NC: Rare Book, Manuscript and Special Collection Libary).
[68] Menger, "Tagebuch No.1.", Menger, "Tagebuch No.2."
[69] Menger, *Reminiscences of the Vienna Circle and the Mathematical Colloquium*. 38
[70] Sigmund, "Karl Menger and Vienna's Golden Autumn, in Karl Menger, Selecta Mathematics I (Eds. Schweizer Et Al) Springer Wien-New York 2002." 7
[71] Akademie der Wissenschaften, *Tagebuch Arthur Schnitzler 1917-1919* (Wien: 1995), Akademie der Wissenschaften, *Tagebuch Arthur Schnitzler 1920-1922* (Wien: 1993), Akademie der Wissenschaften, *Tagebuch Arthur Schnitzler 1923-1926* (Wien: 1995).
[72] Wissenschaften, *Tagebuch Arthur Schnitzler 1923-1926*. 86 – Translated by the author himself: „Meet Karl Menger in the morning, told him the adequate about his drama „Gottlose Komödie“ - „Früh war da Karl Menger; sagte ihm das gebotene über seine „Gottlose Komoedie“
[73] Menger, *Reminiscences of the Vienna Circle and the Mathematical Colloquium*. 38-41
[74] Ibid. 41
[75] Menger, "My Memories of L. E. J. Brouwer."238
[76] Ibid. 46

progress. Thus, his correspondence with Schreier traces the development of Menger's dimension theory.[77]

After Menger's recovery in 1923 he published his first article in light of Urysohn's contributions[78] and tried to make his work popular within the mathematical community in the spring of 1924.[79] Thus, he sent out pre-prints of his paper to topologists all over Europe, among them was L.E.J Brouwer[80].

Thanks to Brouwer, Menger managed to publish his results in a Dutch journal[81] and in the eminent "Mathematischen Annalen"[82]. Additionally through the correspondence with Brouwer, Menger was inspired by Brouwer's philosophical approach towards the foundation of mathematics. Thus, after his graduation in the fall of 1924, he visited Brouwer in spring 1925 in order to be introduced by Brouwer himself to intuitionism.[83]

During his stay in Amsterdam it was agreed with Brouwer that Menger would come to study for one year with him, beginning in fall 1925 and supported by the Rockefeller Foundation.[84] Nonetheless, fate intervened again: in June 1925 Menger's mother passed away and as a result Menger broke down.[85] In the Austrian mountains Menger found the peace to recover and to elaborate his ideas on dimension further.[86] While in the mountains, Brouwer offered the young Menger a position as his assistant in order to safeguard Menger's financial as well as his academic future.[87]

Although the circumstances of Menger's move to the Netherlands could not been more promising, the relationship between Brouwer and Menger became more and more tensed during his two-year stay in Amsterdam. Whereas Menger had been Brouwer's protégé since spring 1924 and had

---

[77] Several letters from Otto Schreier to Karl Menger can be found in Menger's collected papers at Duke University.
[78] Schreier informed Menger about Urysohn's work in: Schreier, "Postcard from Otto Schreier to Karl Menger (24.9.1923)."
[79] Menger, "My Memories of L. E. J. Brouwer." 241
[80] For detailed information on Brouwer's life and work see: Dalen, *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer 1881-1966*, Dalen, *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer 1881-1966*.
[81] Karl Menger, "Über Die Dimension Von Punktmengen," *Proceedings of the Sciences of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* 27 (1924).
[82] Karl Menger, "Grundzüge Einer Theorie Der Kurven," *Mathematische Annalen* 95 (1925).
[83] Menger, "My Memories of L. E. J. Brouwer." 240-241
[84] Karl Menger, "Personal Histroy Record Submited in Connection with Application for a Fellowship [Antragsbogen Für Rockefeller Stipendium]," in *IEB - International Eduacation Board* (Sleepy Hollow, NY: Rockefeller Archive Center, 1.6.1925).
[85] Karl Menger, "Letter from Karl Menger to L.E.J. Brouwer," in *Brouwer Archive* (3. 7. 1925).
[86] The following paper is a result of Menger's studies after his break down:Menger, "Bericht Über Die Dimensionstheorie."
[87] L. E. J. Brouwer, "Letter from L.E.J. Brouwer to Karl Menger," in *Karl Menger Papers* (Duke University, Durham, NC: Rare Book, Manuscript and Special Collection Libary, 8. 7. 1925).

received support from him to publish his ideas and to get an academic position, the two highly temperamental men began to dispute over priority matters.[88] Since the tragic death of Urysohn near the French coast,[89] Brouwer felt obligated to watch over Urysohn's paper with the help of Alexandroff. Moreover, the two mathematicians posthumously published Urysohn's manuscripts.[90] As a result of this work, according to Menger, Brouwer stressed the link between his own work and Urysohn's work too heavily.[91] Additionally, Brouwer claimed to be the precursor of the Menger/Urysohn dimension concept.[92] As van Dalen assumed, *"Menger [...] was inclined to see conspiracies to do him out of his rightful place at the top [meaning the founder of the dimension theory]*."[93]

Thus, Menger left Amsterdam in 1927 in anger. Thanks to his first mentor Hahn,[94] he received a call at the University of Vienna, where he taught from fall 1927 until 1937. During this period, Vienna became one of the hot beds in European mathematics, mainly due to Menger's action, as Oswald Veblen (1880-1960) had observed in a letter to the Rockefeller Foundation in 1933:

"I spent several days in Vienna a year ago [1932] and got the impression that it was the best place in Europe with respect to the general atmosphere to which a student is exposed (I mean mathematical atmosphere, of course). This seemed to be due chiefly to Menger's own seminar and to the one conducted by Menger and Hahn together."[95]

After his emigration Menger stayed first at Notre Dame University, Indiana where he tried to reconstruct the Viennese "Mathematical Colloquium";[96] week by week he and some of the most talented students, such as Kurt Gödel (1906-1978)[97] or Abraham Wald (1902-1950)[98] gathered

[88] An excellent and detailed survey of the Brouwer-Menger dispute can be found in: Dalen, *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer 1881-1966*. 643-671

[89] For an eye-witness report on Urysohn's tragic death see: Paul Alexandroff, "Pages from an Autobiography," *Russian Mathmatical Surveys* 35, no. 3 (1980). 318-319

[90] Paul Alexandroff, "Die Topologie in Und Um Holland in Den Jahren 1920-1930," *Nieuw Archief voor Wiskunde* (1969). 118

[91] Menger, "My Memories of L. E. J. Brouwer." 245

[92] Hlawka, "Karl Menger. Nachruf Mit Schriftenverzeichnis."344

[93] Dalen, *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer 1881-1966*. 527

[94] Menger, "My Memories of L. E. J. Brouwer." 247

[95] Oswald Veblen, "Letter from Oswald Veblen to W.E.Tisdale," in *IEB - International Eduacation Board* (Sleepy Hollow, NY: Rockefeller Archive Center, 10.7.1933).

[96] Golland and Sigmund, "Exact Thought in a Demented Time: Karl Menger and His Viennese Mathematical Colloquium." 44

[97] Biographical notes can be found e.g. in John Dawson Karl Sigmund, Kurt Mühlberger, *Kurt Gödel: Das Album - the Album [Katalog Der Ausstellung "Gödels Jahrhundert"]* (Wiesbaden: 2006).

[98] Menger provides in the following paper aside from an account on Wald's mathematical contribution also some biographical notes: Karl Menger, "The Formative Years of Abraham Wald and His Work in Geometry," *The Annals of Mathematical Statistics* 23, no. 1 (1952).

together and thought about problems between mathematics, logic, philosophy and economics.[99] With the lost of the Viennese atmosphere and his students, the relaunch of 'Colloquium' could not live up to Menger's expectations and he soon terminated this project.[100] From 1946 until his retirement Menger found his scientific home at the Illinois Institute of Technology in Chicago.[101] As a result of Menger's teaching duty at the Institute of Technology, he *"critically discussed the usual approaches towards teaching calculus and devised some more transparent notations."*[102] To Menger's displeasure his radical revision of the traditional calculus textbooks[103] was ignored by the mathematical community.[104] On the contrary, his investigation of algebra of function was highly received by the community and has become known as Menger algebra.[105]
Thus, Sigmund had noticed according to Menger's second scientific life in the United States from 1937 until his death in 1985:

"It seems that after Menger's emigration, his career lost its momentum. Within the American mathematical community, he certainly held a respected position, but he did not experience the tremendous success of fellow emigrants John von Neumann, or Stanislaus Ulam or Abraham Wald [...]."[106]

3.Thoughts on writing biographies in the History of Mathematics

My biographical approach to Karl Menger is shaped by the problem of "dimension". Therefore, the issue of how to present Menger's mathematical contributions has become a central question for my work. From this question several thoughts on writing a biography arose, that surround the balance of mathematics and history within the biography.

Firstly, in order to measure the impact of Menger's mathematical contributions in the 1920's, it is essential to summarize the so-called "crisis of intuition" and attempts that have been made to solve the problem before Menger entered the mathematical stage. Critics might argue that an

[99] K. Sigmund E. Dierker, *Karl Menger. Ergebnisse Eines Mathematischen Kolloquiums. Mit Beiträgen Von J.W.Dawson Jr., R. Engelking, W. Hildenbrand. Geleitwort Von G. Debreu. Nachwort Von F. Alt* (Wien: 1998).
[100] Golland and Sigmund, "Exact Thought in a Demented Time: Karl Menger and His Viennese Mathematical Colloquium." 44
[101] Hlawka, "Karl Menger. Nachruf Mit Schriftenverzeichnis." 346
[102] Sigmund, "Karl Menger and Vienna's Golden Autumn, in Karl Menger, Selecta Mathematics I (Eds. Schweizer Et Al) Springer Wien-New York 2002. ." 11
[103] Karl Menger, *Calculus. A Modern Approach* (Boston: 1956).
[104] Kass, "Karl Menger." 560f.
[105] Golland and Sigmund, "Exact Thought in a Demented Time: Karl Menger and His Viennese Mathematical Colloquium." 44
[106] Sigmund, "Menger´s Ergebnisse - a Biographical Introduction." 11

excurse to the roots of dimension theory dating back to the mid-19th century dismisses the aim of the project, focussing on Menger and his contribution. Thus, the author of Menger's biography is permanently balancing between focussing on Menger and the chronological reconstruction of his life, as well as analyzing his mathematical contributions in the broader context of the development of dimension theory.

Secondly, while presenting the mathematics in which Menger was involved and which he shaped, I have tried to explain the mathematical content in such a way that a common intellectual audience could follow the general paths of thought. However, having a broad indented audience in mind means that technical details of the proofs need to be shorted or excluded, a common practice to be found in state of the art intellectual biographies of mathematicians. In order to be aware of the dangers of popularizations meant in the sense of misinterpretations of scientific results, one must constantly ask oneself where to set the bar for the maths and additionally consider the correct presentation (modern vs. historical notations, terms that have changed their meanings, ...).
While a biography truly cannot be a mathematical textbook, skipping over too much of the mathematical background will definitely lower the quality of Menger's biography, where dimension theory played an eminent role as pointed out previously in this paper.

Thirdly, although the genre 'biography' has been criticised within academia during the past decades, lately it has enjoyed its revival in the history of science. The genre 'biography' provides itself a method which, through the use of Menger's intellectual events and thought processes, allows a 'human' or personal presentation of the ideas of dimension theory to a wider audience through the framework of their own historical development in the mind of an individual. In this sense, the old genre has regained its power and often makes hidden ideas more interpretable and comprehensible as well as recontextualises mathematics in the context of its creation. Thus, I believe that it is a very appropriate tool for addressing a broader audience. Various discussions with mathematicians at a Summer University in Turku, Finland (2009) have shown me that young mathematicians are extremely interested in the biography of famous mathematicians and their personal working spheres. Some of them told me that it has helped them to understand how ideas are generated and the methodology of mathematics. Hence to this very end, one of the important aspects of my biography is drawing out the trials of Menger and the steps and missteps, revealing to my audience its strong affiliation with what Lakatos describes as mathematical method.

To summarize, the genre of the biography of a mathematician, and biography in general, which is now experiencing a renaissance in history of science, is for me the perfect "bridge" between the two "towers" of internal and external history of mathematics.

Address

Mag. Bernhard Beham

Josefinengasse 10/11

A-1020 Vienna

Austria

Email: bernhard.beham@univie.ac.at

Bibliography

Paul Alexandroff, "Die Topologie in und um Holland in den Jahren 1920-1930," *Nieuw Archief voor Wiskunde,* 1969: 109-12.

———, "Pages from an Autobiography," *Russian Mathmatical Surveys* 1980 35: 315-58.

Bernhard Beham, "'the Crisis of Intuition' - Austrian-Hungarian Contributions in the Quest of Defining the Mathematical Term 'Dimension' from the 1850's to the 1920's," in *Mathematics in the Austrian-Hungarian Empire. Proceedings of a Symposium Held at Budapest on August 1, 2009 During the Xxiii Ichst*, edited by Christa Binder Martina Becvarova (Prague, 2010).

Bernhard Beham, and Karl Sigmund, "A Short Tale of Two Cities: Otto Schreier and the Hamburg-Vienna Connection," *The Mathematical Intelligencer*, 2008 30: 27-35.

Bernhard Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen. Herausgegeben aus dem Schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Prihonsky. Mit Anmerkungen versehen von Hans Hahn*. Vol. 99: *Die Philosophische Bibliothek* (Leipzig, 1920).

L. E. J. Brouwer. "Letter from L.E.J. Brouwer to Karl Menger." In *Karl Menger Papers*. Duke University, Durham, NC: Rare Book, Manuscript and Special Collection Libary, 8. 7. 1925.

Georg Cantor, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre," *Crelle Journal - Journal für die Reine und die Angewandte Mathematik*, 1878 84: 242-58.

Dirk van Dalen, *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer 1881-1966*. 2 vols. Vol. 1. The Dawning Revolution (Oxford, 1999).

———, *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer 1881-1966*. 2 vols. Vol. 2. Hope and Disillusion (Oxford, 2005).

K. Sigmund E. Dierker, *Karl Menger. Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums. Mit Beiträgen Von J.W.Dawson Jr., R. Engelking, W. Hildenbrand. Geleitwort Von G. Debreu. Nachwort Von F. Alt* (Wien, 1998).

Louis Golland, and Karl Sigmund, "Exact Thought in a Demented Time: Karl Menger and His Viennese Mathematical Colloquium," *The Mathematical Intelligencer*, 2000 22: 34-45.

Hans Hahn, "Die Krise der Anschauung," in *Krise und Neuaufbau in den Exakten Wissenschaften. Fünf Wiener Vorträge* (Wien, 1933), 41-64.

David Hilbert, "Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück," in *63. Versammlungd Der Deutschen Naturforscher und Ärzte zu Bremen 1890*, edited by O. Lassar (Leipzig, 1891), 11-12.

———, "Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück," *Mathematische Annalen,* 1891 38: 459-60.

———, "Überd Die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück," *Prace Matematyczno-Fizyczne,* 1894 5: 13-14.

Edmund Hlawka, "Karl Menger. Nachruf, mit Schriftenverzeichnis," *Almanach der Österreichischen Akademie der Wissenschaften,* 1987 136. Jahrgang: 343-61.

Witold Hurewicz, "Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems " *Mathematische Zeitschrift,* 1925 24: 401-21.

Dale M. Johnson, "Commentary on Menger´s Work on Dimension Theory," in *Karl Menger: Selecta Mathematica*, edited by Abe Skalar Bert Schweizer, Karl Sigmund, Peter Gruber, Edmund Hlawka, Ludwig Reich, Leopold Schmetterer (Wien, 2002), 23-32.

———, "The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology. Part 1," *Archive for Hisotry of Exact Sciences,* 1979 20: 97-188.

———, "The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology. Part 2," *Archive for History of Exact Sciences*, 1981 25.

Tony Crilly with the Assistance of Dale Johnson, "The Emergence of Topological Dimension Theory," in *History of Topology*, edited by Ioan .M. James (Amsterdam, 1999), 1-24.

George Kampis, ed. *Appraising Lakatos. Mathematics, Methodology, and the Man* Vol. 1: *Vienna Circle Institute Library* (Dordrecht, 2002).

"Karl Menger - Zeugniskataloge für die Schuljahre 1912/13 Bis 1919/1920 " In *Archiv des Bundesgymnasiums XIX. in der Gymnasiumsstraße 83*. Wien.

John Dawson Karl Sigmund, Kurt Mühlberger, *Kurt Gödel: Das Album - the Album [Katalog Der Ausstellung "Gödels Jahrhundert"]* (Wiesbaden, 2006).

Seymour Kass, "Karl Menger," *Notices of the AMS* 1996 43: 558-61.

Adolf Ritter von Kutschera-Aichbergen, "Aflenz am Fuße des Hochschwab, Das Steirische Davos. Ein neuer Wintercurort für Lungenkranke.," *Mittheilungen des Vereins der Ärzte der Steiermark,* 1890 26. Jahrgang 1890: 65-115.

Imre Lakatos, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery* (Cambridge, 1976).

Robert Leonard, "Ethics and the Excluded Middle. Karl Menger and Social Science in Interwar Vienna," *ISIS*, 1998 89: 1-26.

Karl Menger, "Antwort auf eine Note von Brouwer," *Monatshefte für Mathematik und Physik,* 1930 37: 175-82.

———, "Bericht über die Dimensionstheorie," *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung,* 1926 35: 113-50.

———, *Calculus. A Modern Approach* (Boston, 1956).

———, *Dimensionstheorie* (Leipzig, 1928).

———, "Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre," *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Wien,* 1924 133: 421-44.

———, "The Formative Years of Abraham Wald and His Work in Geometry," *The Annals of Mathematical Statistics,* 1952 23: 14-20.

———, "Grundzüge einer Theorie der Kurven," *Mathematische Annalen,* 1925 95: 277-306.

———. "Letter from Karl Menger to L.E.J. Brouwer." In *Brouwer Archive* 3. 7. 1925.

———, "My Memories of L. E. J. Brouwer," in *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics*, edited by Karl Menger (Dordrecht, 1979), 237-55.

———. "Personal History Record Submitted in Connection with Application for a Fellowship [Antragsbogen Für Rockefeller Stipendium]." In *IEB - International Education Board*. Sleepy Hollow, NY: Rockefeller Archive Center, 1.6.1925.

———, *Reminiscences of the Vienna Circle and the Mathematical Colloquium*. Edited by Brian McGuiness Louise Golland, Abe Sklar. Vol. 20: *Vienna Circle Collection* (Dortrecht, 1994).

———. "Rigorosenakt Nr. 5975 - Curriculum Vitae; Karl Menger." In *Rigorosenakten - Philosophische Fakultät*. Wien: Archiv der Universität Wien, 1924.

———, *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics* (Dordrecht, 1979).
———. "Tagebuch No.1." In *Karl Menger Papers*. Duke University, Durham, NC: Rare Book, Manuscript and Special Collection Library
———. "Tagebuch No.2." In *Karl Menger Papers*. Duke University, Durham, NC: Rare Book, Manuscript and Special Collection Library
———, "Über die Dimension von Punktmengen," *Proceedings of the Sciences of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1924 27: 639-48.
———, "Über die Dimensionalität von Punktmengen. Erster Teil," *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1923 33: 139-60.
———, "Zur Dimensions- und Kurventheorie. Unveröffentlichte Aufsätze aus den Jahren 1921-1923," *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1929 36: 411-32.
Giuseppe Peano, "Sur une courbe, qui remplit une aire plane," *Mathematische Annalen*, 1890 36: 157-60.
Henri Poincaré, *Letzte Gedanken* (Leipzig, 1913).
———, *Wissenschaft und Hypothese*, Translated, Autorisierte Deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. Zweite verbesserte Auflage ed (Leipzig, 1906).
Hans Sagan, *Space-Filling Curves*. Edited by F.W. Gehring J.H. Ewing, P.R.Halmos: *Universitext* (New York, 1994).
Otto Schreier. "Postcard from Otto Schreier to Karl Menger (24.9.1923)." In *Karl Menger Papers*. Duke University, Durham, NC: Rare Book, Manuscript and Special Collection Libary, 1923.
Karl Sigmund, "Karl Menger and Vienna's Golden Autumn, in Karl Menger, Selecta Mathematics I (Eds. Schweizer Et Al) Springer Wien-New York 2002. ," in *Karl Menger. Selecta Mathematica* edited by B. Schweizer K. Sigmund, A. Sklar, P. Gruber, E. Hlwaka, L. Reich and L. Schmetterer (Wien, 2002), 7-21.
———, "Menger´s Ergebnisse - a Biographical Introduction," in *Karl Menger. Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, edited by K. Sigmund E. Dierker (Wien, 1998), 5-33.
Oswald Veblen. "Letter from Oswald Veblen to W.E.Tisdale." In *IEB - International Education Board*. Sleepy Hollow, NY: Rockefeller Archive Center, 10.7.1933.
"Versiegeltes Schreiben Nr. 872 - "Zur Theorie der Punktmengen" Von Karl Menger." In *Versiegelte Schreiben (1902-1931)*. Wien: Archiv der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, 13. Dezember 1921.
Friedrich Weissensteiner, "Hundert Jahre Döblinger Gymnasium," in *100 Jahre Gymnasium Gymnasiumsstraße (1885-1985)*, edited by Elternverein des Bundesgymnasiums Wien 19 (Wien, 1985), 11-25.
Eduard Winter, *Bernard Bolzano, Ein Lebensbild*. Edited by Eduard Winter: *Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe* (Stuttgart, 1969).
Akademie der Wissenschaften, *Tagebuch Arthur Schnitzler 1917-1919* (Wien, 1995).
———, *Tagebuch Arthur Schnitzler 1920-1922* (Wien, 1993).
———, *Tagebuch Arthur Schnitzler 1923-1926* (Wien, 1995).

On magic squares, Latin squares and other squares

Harald Gropp

d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

0. Introduction

0.1 Religion and mathematics

Due to the special theme of the Miesenbach 2010 Symposium it will be indicated how it should be investigated how religion, language, society, and culture can influence the development of mathematics, in this case the construction and the use of magic squares and related objects. Whereas the history of Sudoku, a game which is played on one of the Miesenbach evenings, is quite short, the history of Latin squares goes back at least 800 years, and the first magic squares were constructed even earlier.

Mathematicians which could be discussed are Thabit ibn Qurra (826-901), possibly a Mandaean, Ibrahim ibn Ezra (ca. 1089-1164), a Jew, al-Buni (died 1225), a Muslim, Moschopoulos (ca. 1300), an Orthodox Christian, and Michael Stifel(1487-1567), a Western Christian. In this short paper just two of them will be discussed.

Later, in the context of Latin squares, Leonhard Euler (1707-1783) opens the development of European combinatorics which leads us till the turn of the millennium a few years ago. In the midth of the nineteenth century the astronomer Thomas Clausen (1801-1885) got interested in these squares.

0.2 Definitions and general remarks

The definitions concerning magic squares and Latin squares are given in the beginning.

A magic square of size n is a square matrix of order n whose entries are all different (normally the first n^2 numbers) such that the sum of all entries in a column or in a row or in the two diagonals is a constant number.

A Latin square of order n is a square matrix of order n with n different entries such that every element occurs once in each row and in each column. Two Latin squares are said to be orthogonal if every ordered pair of elements occurs exactly once among the pairs of coordinates of entries in the corresponding position of the matrix.

Since this paper has to be short there are no examples of magic or Latin squares given here explicitly. The reader is referred to the cited literature. Furthermore, it should be mentioned that this short paper should be the start of further research on the topic mentioned above rather than a final and exhaustive report.

1. Magic squares

„WAFḲ, Pl. Awfāḳ, magisches Quadrat, d.h. ein schachbrettartig in Felder geteiltes und nach bestimmten Regeln mit Zahlen, Buchstaben oder Worten beschriebenes Quadrat, das als Talisman gegen Krankheiten und zu allen möglichen anderen Zwecken umgehängt oder sonst zu allerhand Zauberei benutzt werden kann.“ [ru]

These are the first words by Julius Ruska [ru] in his entry on magic squares in the „Encyklopädie des Islam“ nearly 80 years ago. In this description not only the mathematical properties of magic squares are described but also their use in daily life for magical purposes.

The recent entry of Jacques Sesiano [se1] in the English „Encyclopedia of Islam“ only considers the questions of mathematical construction of magic squares.

„One of the most impressive achievements in Islamic mathematics, in any case the most original one, ist he development of general methods for constructing magic squares. “ [se1]. Sesiano goes on by defining magic squares and by discussing many constructions.

Altogether, the discussion of magic squares in history is between magic squares as magic objects (religion and cultural history) and magic squares as squares with certain properties (mathematics). It should not be forgotten that because of the widespread interest in these squares in the past they are investigated from the viewpoint of alchemy (see e.g. [ka]).

How in detail the knowledge of magic squares was transferred from the Islamic East tot he Christian East and the Christian West is still not well known. Basic facts are contained in a paper of Folkerts [fo]. He concludes as follows.

„Weitere Studien arabischer und lateinischer Quellen werden hoffentlich mehr Licht in das reizvolle, aber wegen seiner mannigfaltigen Beziehungenschwer zu ergründende Gebiet der magischen Quadrate bringen.“ [fo]. Nearly thirty years later the situation has not really improved.

Magic squares probably originated in the Far East. The Chinese part of their history is described in the book of Swetz [sw]. There are different routes from the East to the West within the region of Islam including the Iberian peninsula and Northern Africa. For further information on magic squares in the Islamic countries see the recent book of Sesiano [se2].

The Arabic or Hebrew letters or numbers (as representatives of letters) in magic squares are related to corresponding names in a religious context whereas the sizes of magic squares (which usually range from 3 to 9) are closely related to astrology and medicine. In this sense the magic squares are deeply rooted in a religious and cultural context which also influences their further transfer to the Christian European world.

The constant of a magic square can be related to a word or a name in Hebrew or Arabic if the sum of the letters of the word (each letter corresponds to a number) equals this number. Such a magic square is „worth“ more than a usual one from a certain point of view.

The sizes of small magic squares correspond to certain planets (3: Moon, 4: Mercury, 5: Venus, 6: Sun, 7: Mars, 8: Jupiter, 9: Saturn; or the opposite order) and play a role in an astrological (and hence also medical) context.

2. Three examples

2.1 Al-Buni (died 1225)

Ahmad al-Buni discussed magic squares in one of his main works, the Shams al-Ma'arif al-Kubra (Sun of Great Knowledge). Al-Buni was probably born in Algeria. At least, his name refers to the town of Annaba (Bône). Maybe he later worked in Egypt.

Al-Buni used the idea to combine two orthogonal squares in ordert o construct a magic square. Sometimes they are Latin, sometimes not. If the squares are orthogonal (definition see above) and one provides single values and the other provides n times ist values the corresponding sums are all different, and the square may be magic.

The reader is referred to the book of El-Gawhary [ga] concerning photographs of Latin squares in the work of al-Buni, but also concerning the whole cultural and religious embedding of his work until the twentieth century in Egypt.

2.2 Michael Stifel (1487-1567)

„ ….. nim alle zalen von 1. bis auff 36 / jede jnn sonderheit geschrieben / Vnd so du sie setzest auff diese weiß / wie jnn dieser figur folget / so findestu auff jeder zeil 111. vntersich / vnd nebensich / das ist / nach der lenge vnd nach der breitte. Die zalen aber alle zusamen genomen / machen gerad vnd eben die zal des thiers / Nemlich / 666." ([st1], cited after Aubel [au]).

Michael Stifel is interested in a magic square of size 6 containing the numbers between 1 and 36 such that the constant is 111. The sum of all the numbers in the square is 666 and is related to the number oft he beast in the Bible. Again the magic squares played a „religious role".

Michael Stifel was a contemporary of Luther and a follower of his reformation. Besides his activities as a Lutheran priest he was interested in questions of numbers as symbols. For a detailed discussion on Stifel's life and work see Aubel [au]. As above Stifel tried to use his mathematical skills in religious books such as [st1]. He developed a „Wortrechnung" for the Latin script („Wie sich die Lateinisch sprach / so recht vnd fein schicket / auff diese rechnung" [st1]).

Stifel introduced the use of letters as numbers in Latin script in a similar way as it works in the long tradition of Semitic languages such as Hebrew and Arabic. The first number of the alphabet corresponds to 1, the second to 2, the tenth corresponds to 10, the eleventh to 20 and so on. In this way it is possible to convert words and names into numbers and use them as weapons in propaganda fights against the enemies, in this case against the Catholics. Stifel was probably inspired by the connection of magic squares and such symbolic numbers in Muslim contexts. Twelve years later he wrote a mathematical book on arithmetics [st2] in Latin language and constructed magic squares systematically.

2.3 Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler wrote three papers on combinatorical topics, one on the Königsberg bridges (which will not be discussed here), one on magic squares [eu1], and one on Latin squares [eu2]. In the first paper he constructed magic squares by means of orthogonal Latin squares and focussed on Latin squares in the second one, starting a systematic research on this topic.

3. Latin squares

Whereas from a modern point of view there is a clear distinction between magic squares and Latin squares, such squares and similar squares play comparable roles in the medieval Islamic world. In this sense we find Latin squares in the work of al-Buni 800 years ago containing a set of n letters in a square such that each letter occurs once in each row and once in each column. Al-Buni needed such Latin squares as prerequisites for the construction of magic squares. He mainly used two orthogonal squares in a similar way as Euler much later, however in some cases only one square was Latin which may be sufficient.

Euler mentioned the following conjecture in his paper of 1782 [eu2]. He stated that one could conclude that there is no orthogonal pair of Latin squares of order n=6, 10, 14, and so on.

„ ….. et je n'ai pas hésité d'en conclure qu'on ne sauroit produire aucun quarré complet de 36 cases, et que la même impossibilité s'étende aux cas de n=10, n=14 et en général à tous les nombres impairement pairs.“ [eu2]

In fact, there is no orthogonal pair of order 6. This was proved by Tarry [ta] in 1900 and maybe already by Clausen (see below). For all other values 4m+2, however, there exists such a pair. The example for n=10 was finally found with the help of a computer in 1960 by Bose, Shrikhande, and Parker [bo].

4. Thomas Clausen (1801-1885)

„Der Beweis der vermutheten Unmöglichkeit für 10, so geführt wie er ihn für 6 geführt hat, würde, wie er sagt, vielleicht für menschliche Kräfte unausführbar seyn.“ [pe].

On August 10, 1842 the astronomer in Altona (Schumacher) reported to the astronomer in Göttingen (Gauss) on a possible proof of Thomas Clausen, Schumacher's assistent, concerning the nonexistence of two orthogonal Latin squares of order 6 and his conjecture that a similar proof for order 10 would be impossible, at least for humans. The interested reader is referred to the author’s paper [gr] on Clausen and his possible achievements.

Anyhow, Clausen was born into a poor farmer’s family in the south of Denmark and lived the second part of his life as astronomer (finally the director of the observatory) in Tartu in Imperial Russia. He was quite interested in mathematics and published many mathematical papers. The only hint concerning his possible proof above is contained in letters between Schumacher and Gauss. For certain reasons it might be that he really proved Tarry’s result of 1900 already around 1840 (compare [gr]) but a direct proof is still missing.

5. Squaring the square

Last but not least, squares in a more conventional way will be discussed. The question is how squares can be partitioned into subsquares. Of course, this is very easy. Just divide a square into 4 equal subsquares, or into 9 equal subsquares etc. What can be difficult is to write numbers or letters into these subsquares such that certain conditions are fulfilled as in the case of magic or Latin squares (see above).

However, if it is required that all the subsquares are mutually incongruent (i.e. of different sizes), the problem turns out to be quite difficult. Moreover, as far as I know this problem was not discussed in early centuries.

The smallest such square (concerning the number of subsquares) was discovered by Duivestijn in 1978 and consists of 21 subsquares. The following code will enable the reader to reconstruct it: [50,35,27][8,19][15,17,11][6,24][29,25,9,2][7,18][16][42][4,37][33]. Ist total size is 112.

There is a solution whose total size is a bit less (110) which needs 22 subsquares. Ist code is [60,50][23,27][24,22,14][7,16][8,6][12,15][13][2,28][26][4,21,3][18][17].

6. Conclusion

Squares in general belong to the base objects of geometry and played a role in the history of mankind „since ever“. However, the special squares of this talk (square matrices with certain conditions and subdivided squares) are of a very particular character in the history of mathematics. Motivated by the religious and cultural background and by „applications“ in astrology, medicine, and magic they were investigated until in modern mathematics they could also be used in other „more usual“ applications. A lot of detailed research has still to be done in order to better understand this interesting part of the history of mathematics.

References:

[au] M. Aubel, Michael Stifel, ein Mathematiker im Zeitalter des Humanismus und der Reformation, Algorismus 72, Augsburg (2008).

[bo] R.C. Bose, S.S. Shrikhande, E.T. Parker, Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture, Canadian J. Math.12 (1960), 189-203.

[eu1] L. Euler, De quadratis magicis, Sankt Peterburg (1776), printed in Commentationes arithmeticae 2 (1849), 593-602.

[eu2] L. Euler, Recherches sur une nouvelle espèce de quarrées magiques, Verhandlingen Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen Vlissingen 9 (1782), 85-239.

[fo] M. Folkerts, Zur Frühgeschichte der magischen Quadrate in Westeuropa, Sudhoffs Archiv 65 (1981), 313-338.

[ga] M. El-Gawhary, Die Gottesnamen im magischen Gebrauch in den al-Buni zugeschriebenen Werken, Bonn (1968).

[gr] H. Gropp, Thomas Clausen, a Danish astronomer and mathematician, in: L.D. Andersen, O. Geil(eds.), Proc. 8th Nordic Combinatorial Conference, Aalborg (2004), 71-81.

[ka] V. Karpenko, Two thousand years of numerical magic squares, Endeavour 18 (1994), 147-153.

[ru] J. Ruska, Wafk, in: Enzyklopaedie des Islam (1934).

[pe] C.A.F. Peters (ed.), Briefwechsel zwischen C.F. Gauß und H.C. Schumacher, Altona (1860).

[se1] J. Sesiano, Wafk, in : Encyclopedia of Islam (2004).

[se2] J. Sesiano, Les carrés magiques dans les pays islamiques, Lausanne (2004).

[st1] M. Stifel, Ein Rechen Büchlin Vom EndChrist, Wittenberg (1532).

[st2] M. Stifel, Arithmetica integra, Nürnberg (1544).

[sw] F. Swetz, Legacy of the Luoshu, Wellesley (2008).

[ta] G. Tarry, Le problème de 36 officiers, C.R.Assoc.Franc.Avanc.Sci.nat. 1 (1900), 122-123.

Goethe Vorbild für die Einstellung deutscher Bildungsbürger zur Mathematik?

Ivo Schneider

Verschiedene Indizien suggerieren einen Zusammenhang zwischen einer bis heute feststellbaren überwiegend negativen Haltung der Deutschen zur Mathematik und einer an Goethe orientierten Werthaltung des deutschen Bildungsbürgertums. So legt eine sicherlich grobe Analyse eine Parallelität zwischen Zeiten eines relativ großen oder umgekehrt geringen Interesses am Werk Goethes und einem geringen oder umgekehrt höheren Prestige der Mathematik in Deutschland nahe. Als Beispiel können die Perioden des deutschen Kaiserreichs bis zum Ersten Weltkrieg und die dem Weltkrieg folgende der Weimarer Republik dienen; im Kaiserreich sank das Interesse an Goethes Werk beträchtlich, während Mathematik, exakte Natur- und Ingenieurwissenschaften auch sichtbar an Gründungen wie dem Reichspatentamt, der physikalisch-technischen Reichsanstalt und schließlich der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft sich eines beträchtlichen politischen Wohlwollens und wirtschaftlicher Förderung erfreuten. Nach dem verlorenen Ersten Weltkrieg führten Lebensphilosophie oder die anthroposophische Bewegung von Rudolf Steiner zu einer neuen Blüte des Goetheinteresses, während Mathematik und Naturwissenschaften sowie die diesen als nachgeordnet eingestuften Ingenieurwissenchaften, als wahre Ursachen der Niederlage diffamiert, erhebliche Einbußen an Fördermaßnahmen oder in den Stundendeputaten an den Gymnasien hinnehmen mußten.

Dem kann man z. B. entgegenhalten, dass sich Goethes Lebenszeit und die eines der größten deutschen Mathematiker, des eine Generation jüngeren Carl Friedrich Gauß, immerhin um mehr als eine halbes Jahrhundert überschnitten; beide wußten um das Werk des anderen, das sie aber nicht so hoch schätzten, um je, trotz verschiedener Gelegenheiten dazu, eine persönliche Begegnung zu versuchen[1]. Gauß hatte zwar schon als junger Mann als Astronom größere öffentliche Aufmerksamkeit beansprucht, stand aber mit seinen Leistungen als Mathematiker völlig außerhalb jeder Wahrnehmung durch eine bildungsbürgerliche Öffentlichkeit.

Dass Göttingen seinen Status als ein Weltzentrum der Mathematik auch in der Weimarer Republik beibehalten konnte und erst mit der Machtübernahme durch die Nazis aus bekannten Gründen einbüßte, scheint ebenfalls wegen der in der Zwischenkriegszeit feststellbaren Blüte des Goetheinteresses der erwähnten Parallelität zu widersprechen. Speziali-

[1] Kurt-Reinhard BIERMANN, Gauß und Goethe – Versuch einer Interpretation ausgebliebener Begegnung. In: *Goethe Jahrbuch* Bd. 92, 1975, S. 195-219

sierung und hohe Komplexität der angewandten Methoden der in Göttingen erzielten Ergebnisse mathematischer Forschung rückten die Front damaliger mathematischer Forschung bereits so weit weg von den im Bildungssystem vermittelten Mathematikkenntnissen, dass jede Verbindung dazu unüberbrückbar unterbrochen erschien.
Vor diesem Hintergrund erscheint es berechtigt zu fragen, inwieweit Goethe als Alibi für eine bildungsbürgerliche Geringschätzung der Mathematik dienen kann. Soweit sich Bildungsbürger wissentlich oder implizit für ihre Geringschätzung der Mathematik auf Goethe beriefen, bezogen sie sich vor allem auf Äußerungen in Goethes *Farbenlehre* und auf Goethes Reaktionen auf die negative Bewertung der *Farbenlehre* durch die "Mathematiker", zu denen Goethe auch die Vertreter der bereits mathematisierten Naturwissenschaften rechnete.
Dass Goethes Verhältnis zur Mathematik differenzierter gesehen werden muß und Goethe mit seiner kritischen Haltung gegenüber der Mathematik und ihren Vertretern in seiner Zeit nicht allein stand, soll zunächst am Beispiel der Astronomie deutlich werden, deren Vertreter wie Gauß oder Laplace zu den führenden Mathematikern ihrer Zeit zählten.
Die Astronomie beanspruchte am Übergang vom 18. zum 19. Jahrhundert eine Führungsrolle unter den Naturwissenschaften, weil sie mit Hilfe der Mathematik für praktisch jedermann überprüfbare und in der Vergangenheit ausnahmslos bestätigte Voraussagen künftiger Konstellationen im Sonnensystem machen konnte. Die Astronomie genügte dem Ideal einer vollständigen Beschreibung oder, je nach Verständnis, Erklärung aller möglichen Erscheinungen des Kosmos unter einer auf Newton zurückgehenden Voraussetzung. Danach lassen sich alle Erscheinungen reduzieren auf den Bewegungszustand der als diskret strukturiert angenommenen Materie im Raum. Für die Beschreibung des Bewegungszustands solcher Materie, von deren kleinsten Entitäten bis zu den größten Himmelskörpern, erschien es ausreichend, geeignete abstandsabhängige Kräfte aufzufinden, die die Materie anziehen oder abstoßen. Der Ausbau der Newtonschen Mechanik mit den vor allem von Euler und französischen Mathematikern wie Lagrange und Laplace entwickelten Methoden der Analysis führte bei Laplace zu der Überzeugung, dass alle Ereignisse des Kosmos von seinen größten bis zu seinen kleinsten Entitäten vollkommen determiniert ablaufen. Laplace kleidete seinen Determinismus in das Bild einer Intelligenz, die aufgrund der Kenntnis sämtlicher den Zustand des Kosmos zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreibenden Beziehungen den Zustand des Kosmos zu jedem anderen Zeitpunkt in Vergangenheit oder Zukunft anzugeben vermag. Der Mensch wird sich nach Laplace asymptotisch dem Wissen dieser fiktiven Intelligenz annähern, wobei er sich in dem jeweils einer vollständigen Beschreibung durch die Mathematik noch nicht erschlossenen Bereich

mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung orientieren kann[2]. Die für Laplace unerläßliche Voraussetzung für die Möglichkeit zu neuer Erkenntnis zu kommen waren die Methoden der Mathematik und ihre Sprache, um sie zu beschreiben. Eine solche als Anwendungsimperialismus der Mathematik bezeichnete Rolle traf auf die entschiedene Kritik der Vertreter der romantischen Naturphilosophie.

Für die Anhänger der romantischen Naturphilosophie, der auch viele Vertreter der Physik in Deutschland angehörten, war das durch eine Reduktion der sinnlich erfahrbaren Eigenschaften der Materie auf eine sinnlich nicht mehr erfahrbare Welt von Materieteilchen erkaufte Ideal unannehmbar.

Das Beispiel des Philosophen Hegel zeigt, welche Kluft noch in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts zwischen den Erkenntnismitteln der Mathematiker und Naturwissenschaftler einerseits und der Philosophie andererseits bestanden. Hegel hatte in seiner Dissertation *De orbitis planetarum* von 1801 die durch das Titius-Bodesche Gesetz nahegelegte Existenz eines Planeten zwischen Mars und Jupiter geleugnet, obwohl das Gesetz durch die im selben Jahr entdeckte Ceres bestätigt zu sein schien. Hingewiesen auf den Planeten Ceres als eine "Tatsache", soll Hegel geantwortet haben "Umso schlimmer für die Tatsachen". Historisch verbürgt ist jedenfalls das vollständige Unverständnis von Astronomen wie Gauß für Hegels Verhalten sowie das Fehlen jeder Bereitschaft Hegels, die Entdeckung der Ceres als für seine Arbeit relevant anzuerkennen. Wie aus Hegels Brief an Goethe vom 20. Februar 1821 ersichtlich, ging es ihm wie den Vertretern der romantischen Naturphilosophie um einen ganz anderen Begriff des Verstehens eines physikalischen Phänomens, der durch den Newtonschen Reduktionismus und seine Einkleidung in die Sprache der Mathematik nicht erfüllt werden konnte.

Für die Vertreter der romantischen Naturphilosophie und damit auch für Goethe war grundlegend der Gedanke der Einheit aller Natur in der gesamten Vielfalt ihrer Erscheinungen, die sich jeweils qualitativ wie Farbe aus dem Gegensatz von Hell und Dunkel als Modifikationen der für sie relevanten polar entgegengesetzten Eigenschaften erklären lassen sollten. In diesem Sinn lehnte Goethe Newtons Erklärung der Natur des Lichts vehement ab:

> Newton als Mathematiker steht in so hohem Ruf, das der ungeschickteste Irrtum, nämlich das klare, reine, ewig ungetrübte Licht sei aus dunklen Lichtern zusammengesetzt, bis auf den heutigen Tag sich erhalten hat, und sind es nicht Mathematiker, die dieses Absurde noch immer verteidigen und gleich dem gemeinsten Hörer in Worten wiederholen, bei denen man nichts denken kann?

[2] Ivo SCHNEIDER, Die Mathematisierung der Naturwissenschaften vor dem Hintergrund der Bildungsvorstellungen des 19. Jahrhunderts. In: *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* 11, 1988, S. 207-217.

Ebenso heftig wie Goethe seinen Standpunkt vertraten Vertreter der Physik, die wie der Herausgeber der *Annalen der Physik und der physikalischen Chemie* Ludwig Wilhelm Gilbert nicht der Fraktion der romantischen Naturphilosophie angehörten, ihr Mißfallen über Goethes *Farbenlehre*, die sie als eine Mischung aus Dichtung und Wahrheit, ein "bodenloses Hypothetisiren" oder als "mystische Ansichten" einer sich unbefugt im Bereich der Naturwissenschaften tummelnden Poesie bezeichneten.
Es wäre allerdings verfehlt, sich wie die Bildungsbürger, die sich für ihre Einstellung zur Mathematik auf Goethe berufen zu können glauben oder glaubten, allein auf Goethes Äußerungen über die Mathematik und ihre Vertreter im Zusammenhang mit der *Farbenlehre* zu beziehen. Goethe, hat sich verschiedentlich über die Mathematik in anderem Zusammenhang ziemlich positiv geäußert.
Obwohl Goethe entgegen herkömmlichen Vorurteilen mindestens durchschnittliche Kenntnisse in Geometrie und Algebra erworben hatte und diese auch im fortgeschrittenen Alter zu erweitern suchte, hat er niemals für sich beansprucht, fachlich über mathematische Leistungen urteilen zu können. Was Goethe an den Mathematikern seiner Zeit kritisierte, ohne auf deren mathematische Fähigkeiten eingehen zu wollen oder zu müssen, war der von Laplace formulierte umfassende Anspruch, dass grundsätzlich jede Naturerscheinung mathematisch erklärt werden, d. h. ihre Eigenschaften, ihre Einbettung in Zeit und Raum, mathematisch vollkommen dargestellt werden kann. Goethe hat dieses Erklärungsmonopol der Mathematik für die Natur immer bestritten, wobei er auch Kant mit der Aussage in der *Kritik der Urteilskraft* als Bundesgenossen ansehen konnte, dass es für die Gegenstände der organischen Welt nie eine Erklärung "nach bloß mechanischen Prinzipien der Natur", also nie einen "Newton des Grashalms" geben würde. Ohne dass er sich aufgerufen fühlte, diese Grenzen anzugeben, war Goethe bereit, die Leistungen der Mathematik innerhalb des durch Messen und Wägen zugänglichen quantifizierbaren Bereichs der Natur vorbehaltlos anzuerkennen. So überraschte Goethe seine Anhänger in den weniger bekannten "Materialien zur Geschichte der Farbenlehre" mit einer durchaus positiven Bewertung von "Newtons Charakter", den er in seiner *Farbenlehre* z. T. in derbster Weise kritisiert hatte, wobei er allerding von seiner grundsätzlichen Kritik an Newtons Vorgehensweise nicht Abstand nahm:

> Newton war ein wohlorganisirter, gesunder, wohltemperirter Mann, ohne Leidenschaft, ohne Begierden. Sein Geist war constructiver Natur und zwar im abstractesten Sinne; daher war die höhere Mathematik ihm als das eigentliche Organ gegeben, durch das er seine innere Welt aufzubauen und die äußere zu gewältigen suchte. Wir maßen uns über dieses sein Hauptverdienst kein Urtheil an, und gestehen gern zu, daß sein eigentliches Talent außer unserm Gesichtskreise liegt; aber, wenn wir aus eigener Überzeugung sagen können: das von seinen Vorfahren Geleistete ergriff er mit Bequemlichkeit und führte es bis zum Erstaunen weiter; die mittleren Köpfe seiner Zeit ehrten und verehrten ihn, die

> besten erkannten ihn für ihres Gleichen, oder geriethen gar, wegen bedeutender Erfindungen und Entdeckungen, mit ihm in Contestation: so dürfen wir ihn wohl, ohne näheren Beweis, mit der übrigen Welt für einen außerordentlichen Mann erklären.
>
> Von der praktischen, von der Erfahrungsseite rückt er uns dagegen schon näher. Hier tritt er in eine Welt ein, die wir auch kennen, in der wir seine Verfahrungsart und seinen Succeß zu beurtheilen vermögen, um so mehr, als es überhaupt eine unbestrittne Wahrheit ist, daß so rein und sicher die Mathematik in sich selbst behandelt werden kann, sie doch auf dem Erfahrungsboden sogleich bei jedem Schritte periclitirt und eben so gut, wie jede andere ausgeübte Maxime, zum Irrthum verleiten, ja den Irrthum ungeheuer machen und sich künftige Beschämungen vorbereiten kann.

Ohne auf eine Reihe weiterer positiver Äußerungen über die Mathematik und auch einige Mathematiker einzugehen[3], für die Goethe im Gegen–satz zu der ihm selbst bekannten Meinung, er sei ihr Feind, in Anspruch nahm, dass sie "niemand höher schätzen kann als ich", seien hier nur noch zwei Punkte hervorgehoben:

1. Goethe hat als für das Bildungswesen in Sachsen-Weimar Verant–wortlicher der Mathematik immer einen wichtigen Platz in den Schulen und an der Universität zugewiesen und eine Reihe von Mathemati–kern unterstützt, etwa indem er ihnen zu Stellen verholfen hat.
2. Die Aussagen der Mathematik waren für ihn bei aller von ihm bewunderten Strenge bloße Tautologien, wie das folgende Zitat belegt[4]:

   > Was wollen denn die meisten dieser Axiome bedeuten, worauf die Geometrie so stolz ist? Sie sind eigentlich nur der Ausdruck einer einfachen Idee durch zwei verschiedene Zeichen oder Worte. Derjenige der sagt, daß 2 mal 2 4 sei, hat der mehr Kenntniß, als derjenige welcher sagen möchte: 2 mal 2 ist 2 mal 2? Die Ideen des Ganzen, der Theile, des Größeren, des Kleineren, sind sie nicht, eigentlich zu reden, dieselbe einfache und einwohnende Idee; indem man die eine nicht haben kann, ohne daß die übrigen alle sich zu gleicher Zeit darstellen. Schon haben einige Philosophen bemerkt, daß wir gar manchen Irrthum dem Mißbrauch der Worte verdanken. Ist es vielleicht derselbige Mißbrauch woher die Axiome sich ableiten? Übrigens will ich hierdurch den Gebrauch derselben nicht durchaus verdammen; nur wünsche ich, bemerklich zu machen, worauf er sie einschränkt. Dadurch sollen nämlich die einfachen Ideen uns durch Gewohnheit mehr eigen werden, damit sie uns mehr bei der Hand seien, wenn wir sie auf verschiedene Weise zu brauchen denken. Ich sage fast eben dasselbe, obgleich mit schicklichen Einschränkungen von den mathematischen Theoremen. Ohne Vorurtheil betrachtet schmelzen sie zu einer sehr kleinen Zahl ursprünglicher Wahrheiten zusammen. Man untersuche eine Folge von geometrischen Propositionen, die eine aus der andern hergeleitet ist, so daß

---

[3] Eine ganze Reihe von Artikeln hat sich seit Rudolf Steiner mit dem Thema "Goethe und die Mathematik" befaßt, für die stellvertretend die Arbeit von Karl Heinz Weiers stehen kann, die 1990 im Programm des Max Planck Gymnasiums Trier veröffentlicht wurde und die im Inter–net unter: http://www.mpg-trier.de/d7/read/goethe_mathe.pdf zu finden ist.

[4] In Goethes Schriften zur Naturwissenschaft: Allgemeine Naturlehre: I. Theil: Über Mathematik und deren Mißbrauch, so wie das periodische Vorwalten einzelner wissenschaftlicher Zweige.

zwei nachbarliche Sätze sich unmittelbar und ohne Zwischenraum berühren, so wird man gewahr werden, daß sie alle zusammen nur die erste Proposition sind, die sich, so zu sagen, in stetiger Folge, nach und nach in dem Übergang einer Consequenz zur andern entstellt, die aber doch eigentlich durch diese Verkettung nicht vermannichfaltigt worden ist, sondern nur sich verschiedenen Formen bequemt hat. Es ist ohngefähr als wenn man einen solchen Satz durch eine Sprache ausdrücken wollte, die sich unmerklich von ihrem Ursprung entfernt hat, und daß man ihn nach und nach auf verschiedene Weise darstellte, welche die verschiedenen Zustände, durch welche die Sprache gegangen ist, bezeichnete. Einen jeden dieser Zustände würde man in seinem unmittelbaren Nachbar wieder erkennen, aber in weiterer Entfernung würde man ihn nicht mehr anerkennen, ob er gleich immer von dem nächstvorhergehenden Zustande abhängt, wie denn auch immer dieselbige Idee ausgedrückt werden sollte. Eben so kann man die Verkettung mehrerer geometrischer Wahrheiten als Übersetzungen ansehen, mehr oder weniger verschieden, mehr oder weniger verflochten, aber immer denselbigen Satz, oft dieselbe Hypothese ausdrükkend.

Er verkannte die Möglichkeit, etwa durch das Wechselspiel zwischen mathematischen Weltmodellen und ihrer experimentellen Überprüfung Erkenntnisse zu gewinnen, die er allein der nichtmathematischen Intuition vorbehalten wissen wollte.

Auf die Frage, wie Goethe bei einer solchen Einstellung zu einem Modell für bildungsbürgerliche Geringschätzung der Mathematik werden konnte, gibt es keine einfache Antwort. Goethe war sich mit den führenden deutschen Philosophen von Kant bis Hegel einig, dass das von Laplace und seiner Schule vertretene Erklärungsmonopol der Mathematik für alle Na–turerscheinungen abzulehnen ist. Als derjenige, der der Generation von Deutschen, die etwa zwischen 1890 und dem Ende des Ersten Welt–kriegs geboren waren, das Gefühl gab, dass eine Aussage erst dadurch ihre Weihe erhält, wenn sie in die Worte des inzwischen wieder olym–pischen Goethe gekleidet war, war Goethe zum Sprachrohr der romantischen Naturphilosophie und der Philosophen seiner Zeit geworden. Rudolf Steiner, der als Goetheforscher und Goethepropagator wesentlich zu Goethes Renaissance in der Weimarer Republik beigetragen hatte, hatte Goethe zu einem Mathematiker stilisiert, der für seine Mathematik keiner mathematischen Kenntnisse im herkömmlichen Sinne bedurfte[5]:

Goethes Geisteswesen war nun ein solches, daß er die Mathematik selbst zu pflegen keine Veranlassung empfand. Aber sein Erkennen war von ganz mathematischer Art. Er nahm, was die äußere Natur betrifft, durch eine reine, geläuterte Beobachtung auf, verwandelte es aber dann im inneren Erleben so, daß es mit seinem Seelenwesen Eins wurde, wie das bei den freigeschaffenen mathematischen Formen der Fall ist. So wurde sein Denken über die Natur im schönsten Sinne ein dem mathematischen nachgebildetes. Goethe war als Naturdenker ein mathematischer Geist, ohne Mathematiker zu sein.

In diesem Sinne bedurfte der an Goethe orientierte Bildungsbürger we–

[5] Rudolf Steiner im *Goetheanum* III 3, 1923

der für seine Lebensführung noch für seine Welterkenntnis der Mathe–matik.
Auch wenn heute eine Berufung auf Goethe für eine bestimmte Einstellung obsolet erscheint und auch wenn vor dem Hintergrund eines diffus gewordenen Bildungsbegriffs ein Bildungsbürgertum im herkömmlichen Sinne nicht mehr existiert, wirkt dessen Haltung bis heute etwa in einem Kulturbegriff nach, in dem die Mathematik noch immer keinen Platz hat.

Karel Vorovka and Philosophy of Mathematics

MAGDALENA HYKŠOVÁ

Abstract: The aim of this paper is to commemorate the inventive Czech philosopher of mathematics, philosopher and mathematician Karel Vorovka (1879–1929). The main stress is put on his work in the field of philosophy of mathematics.

1 Personality of Karel Vorovka

Karel Vorovka was born on February 3, 1879 in Prague. In 1897 he started to study mathematics and physics at the Philosophical Faculty of Charles University in Prague, from 1901 he taught at the Realschule in Prague, two years later he became full professor in Pardubice, since 1905 he taught as full professor at the Realschule in Prague. In 1902 Vorovka became doctor of philosophy on the basis of the doctoral thesis devoted to integral theory [12]; nevertheless, soon he turned his interest towards philosophy and philosophical problems of mathematics. In 1919 he habilitated for philosophy of natural sciences at the Philosophical Faculty of the Prague university; as the habilitation work, the book [20] was accepted. Two years later he was appointed extraordinary professor of philosophy of exact sciences at the recently established Faculty of Science of the same university, in 1924 he became ordinary professor there. In the time period 1913–1922 Vorovka was the member of the scientific board of the Union of Czechoslovak Mathematicians and Physicists. From 1920 to 1927, together with Ferdinand Pelikán, Vorovka edited the idealistically oriented journal *Ruch filosofický* [Philosophical Action] that was established as an intentional antipole of the positivistically oriented journal *Česká mysl* [Czech Thought]; during the mentioned 8 years he published 52 contributions there (11 papers, 41 reports and notes). In 1927 Vorovka established the journal *Filosofie* [Philosophy] that came to an end after his death; in two volumes he published 16 contributions (among them 5 papers). He took also part in the international philosophical congresses in Naples (1924) and Boston (1926) and in the Polish philosophical congress with Slavonic guests in Warsaw (1927). On September 1, 1910 Vorovka married Jaroslava Novotná; this couple had two children: the son Karel (*July 17, 1911) and the daughter Libuše (*March 5, 1921). Karel Vorovka died on January 15, 1929.[1]

To a certain extent, Vorovka's orientation and work was influenced by his long-lasting friendship with two schoolmates: Otakar Zich (1879–1934), composer, musicologist and aesthetician, who attended the same primary and grammar school, as well as the university, and after the studies worked as the secondary school teacher of mathematics and physics, later the professor of aesthetics at Charles University in Prague, and Arnošt Dittrich (1878–1959), physicist and astronomer, the founder of Czechoslovak archeo-astronomy and Vorovka's schoolmate during the last four years of the grammar school and the university study. Dittrich started to work as a secondary school professor, too, in 1920 he habilitated for cosmic physics, seven years later he became the director of the observatory in today Hurbanovo in Slovakia and in 1934 he was appointed extraordinary professor at the Prague university. All Dittrich's publications were related to relativity theory on which he applied pieces of knowledge of astronomy. Einstein's relativity theory represented the confirmation of Dittrich's own results and the support

[1] For more details, see [1].

against his opponents; he was also one of the first proponents and defenders of Einstein's relativity theory. Dittrich later recalled discussions with Vorovka on this theory in the paper [2]; Vorovka was first rather cautious (see [16]) but then he participated in discussions of university professors of physics on this topic and when "anti-Einsteinism" reached the Czech Lands, he came out firmly against the opponents of Einstein's relativity theory. In the first volume of Ruch filosofický, Vorovka published the critical review of the paper by Oskar Kraus,[2] that aroused the discussion in the following issue. Other critical reviews and remarks by Vorovka, Dittrich and other advocates of relativity theory together with subsequent discussions can be found in other volumes of the same journal; the last discussion concerned the paper by Einstein's critic Bohuslav Hostinský and appeared in the 6th volume.[3]

2 Philosophy of Mathematics

As Vorovka himself often remarked, he was strongly influenced by Henri Poincaré. The first explicit reference can be found in the treatise [13] explaining the principle of Poincaré's *conventionalism*, according to which the foundations of mathematics are *conventions* – arbitrary agreements whose choice is almost free, guided by our experience, considerations of convenience, usefulness etc. and the necessity to avoid a contradiction. For example, all geometric axioms are conventions; the choice of Euclidean geometry among other ones is the work of an unconscious opportunism, we prefer it because it is the most comfortable.

Poincaré's impact can best be illustrated by Vorovka's own words from the beginning of [13]: *The following considerations arouse while I was reading the book La valeur de la Science. In this book, as well as in his earlier work La Science et l'Hypothèse, the renowned mathematician Henri Poincaré brought a number of enriching philosophical ideas and he presented them in such a magnificent form that no mathematician or philosopher would set those books aside without a feeling of gratitude to the famous author. These works are written with a particular sincerity. The author does not impose his opinions, but proposes all possible objections against them. When the reader supposes to have absolute certainty and to master the final solution of a problem, Poincaré presents new unexpected doubts at the end of the chapters, and this always gives an impulse to think.* ([13], p. 217)

2.1 Logic and Intuition

Another important topic of Vorovka's work, also influenced by the ideas of Henri Poincaré, concerned the relevance of logical and intuitive elements for mathematics. Similarly as Poincaré, Vorovka perceived an intuition to be some abstract knowledge. In the treatise [18],[4] he characterizes this concept as follows: *Poincaré clarifies this more or less uncertain idea of intuition by providing psychologically interesting records from works of famous mathematicians, and he also likes to return several times to the comparison with a game of chess. In order to understand this game, it is not sufficient to check the correctness of the moves, according to the given rules; to understand a player's*

[2] Kraus O.: *Fiktion und Hypothese in der Einsteinschen Relativitätstheorie*. Annalen der Philosophie 2(1921), 335–396; Ruch filosofický 1(1920–1921), 216–219.

[3] Hostinský B.: *Úvahy o principu relativnosti* [Considerations on Relativity Principle], Ruch filosofický 6(1926), 193–212; critique by A. Dittrich: ibid, 288–292; critique by F. Nachtikal: ibid, 293–294; discussion: ibid, 295–296.

[4] The paper represents the extended variant of the lecture *H. Poincaré as Philosopher* held by Vorovka in the Union of Czech Mathematicians and Physicists on January 25, 1913, as one of the series of lectures commemorating the personality of H. Poincaré.

strategy, to comprehend the purpose of his moves, we must see the aim to which the game is leading from a distance. In quite a similar way when we prove something in mathematics, it is not enough to find the conclusions logically correct, but it is necessary to understand why the definitions, conclusions, theorems are ordered in that particular way, not in another one. This organic unity can be perceived in one single bright moment, and if this ability is necessary for studying a complete proof, it is even more required for finding new truths. Both a mere empiricism and a mere logic would be only groping in the dark if they were not associated with the most intellectual, the most internal power of genius, often opposing all senses, a power which moves the whole mechanism of logic and which is perhaps the very true intellect: that is intuition. ([18], p. 156)

These ideas inspired Vorovka to the work on the book *Considerations on Notion in Mathematics* [20] that was later accepted as the habilitation treatise. Here the word “notion” is used in the sense of intuition or abstract cognition. The basis of the treatise is the dispute between Bertrand Russel and Henri Poincaré, and the classical problem of universals is transferred to the quarrel between *logicism* and *psychologism*. Recall that according to logicism, mathematics is the part of logic, all mathematical concepts can explicitly be defined from logic and all mathematical propositions can be deduced from logical axioms and definitions by the mere logical deduction; this field recognizes the concept of *autonomous truth* (e.g., abstract mathematical propositions) that exists out of time and space and out of human consciousness (a mathematician does not create anything, he only discovers existing truths). Psychologism is then defined widely as the opposite of logicism; it recognizes the concept of *thought truth* that exists only if it is the part of human culture. Vorovka starts with the detailed discussion of logicism and its imperfections and argues that purely formal and symbolic definitions cannot be the ideal of exact thinking. Thinking cannot do without real definitions. Not only natural sciences, but also definitions of geometry and arithmetic have to proceed inductively from observations; intuition concerns not only external, but also – and above all – internal experience. When it is applied to the real world, logicism needs some artificial construction. After this critique Vorovka turns to the systematic exposition of psychologism based on sensory perception. He makes an effort to show that the validity of a highest abstract truth is conditioned by the internal psychical experience.

Later Vorovka turns from psychologism "to the neighbourhood of logicism", but still believes in rational intuition (see [21]).

2.2 Chance, Probability, Causality

The influence of Henri Poincaré is apparent in many other Vorovka's treatises. From all of them, let us look at the papers dealing with probability theory and its philosophical meaning. The first [14] was published in 1912 and its character was rather mathematical: it discussed the classical gambler's ruin problem, including the history of its solutions and the proposal of the new proof of the fact that if the number of repetitions is not bounded, one of the players will certainly be ruined.

Other treatises of Karel Vorovka from this group are more philosophical. In the couple of papers [15] and [17] Vorovka criticizes the efforts to base the theory of logical induction on probability theory, challenges to the caution when using probability theory in real situations and tries to persuade the readers that it cannot solve the problem of causality; he also stresses that the concept of cause and effect should be replaced by the concept of correlation. The first of the mentioned treatises was published in 1913 in the mentioned philosophical journal Česká mysl under the title *Philosophical Reach of Probability Theory* [15]. Here Vorovka criticizes philosophical interpretations of probability including the contributions of Pierre-Simon Laplace [3], Tomáš Garrigue Masaryk [4] and Václav Šimerka [10]. Let us mention that Masaryk belonged to the proponents of *logical interpretation of probability* that identifies probability with the degree of rational belief; in the treatises [4] and [5] he praised probability calculus as the tool for building inductive logic and thus disproving Hume's sceptical opinion. Šimerka's papers [10] and [11] belong to the field of *subjective interpretation of probability* that was independently developed by Bruno de Finetti and Frank Plumpton Ramsey in the 1930's and that perceives probability as the degree of belief of a particular individual. Vorovka clarifies the most substantial problem of the logical interpretation, which is the determination of prior probabilities in Bayes' formula for the probability of certain hypothesis, conditioned by an available evidence. Unlike Masaryk, Vorovka claims that Hume's objections are justified and they cannot be disproved by probability theory. He insists that probability calculus and Hume's scepsis belong to two completely different intellectual areas and it is not possible to bring them into a rational relation. He compares the application of probability calculus to Hume's scepsis to cutting an atom by a knife, and the introduction of Hume's scepsis into probability calculus to sharpening the atoms in the knife.

Similar ideas can also be found in the paper *On Probability of Causes* [17] published one year later in the journal Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky [Journal for Cultivation of Mathematics and Physics; bellow abbreviated ČPMF], which was mainly intended for secondary school students. The character of this article is therefore rather popularizing; it contains less philosophy and more mathematics and illustration examples. Vorovka again investigates the possibilities of the use of Bayes' theorem (he calls it "Theorem on the probabilities of causes") for the proof of the causal connection of certain events, and shows that these possibilities are very limited. He formulates the basic problem in the following way: Certain phenomenon was observed, that must have been caused by one of a finite number n of different events (causes); denote the prior probability of the k^{th} event by ω_k. Suppose that the events are pairwise excluding and no other possibilities exist, i.e., $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$. If the k^{th} of these events comes about, then the observed phenomenon arises with the probability p_k. Using Bayes' theorem, probability that the cause of the observed phenomenon was the k^{th} event (in other words, the k^{th} hypothesis is true) can be expressed in the form

$$h_k = \frac{\omega_k p_k}{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_n p_n} .$$

Vorovka continues with the discussion of the problem how to assess the prior probabilities ω_k. Using several examples he shows that in some cases it is relatively simple, but other times it is more complicated or even impossible. For example, imagine that Peter plays dice with an unknown player; the highest win goes to the player who gets two sixes in the first throw. When the unknown player starts to play, he rolls two sixes. What is the probability that he is a sharpie? If we put $\omega_1 = \omega_2 = 1/2$ (in the sense of Laplace principle), this probability would be 0.97, which contradicts the common sense. We cannot therefore solve this problem without more information. Nevertheless, the conclusion of the paper partly softens the critique: *Yet Bayes' theorem should not be underestimated. After all, it is substantial for probability theory; on one hand, for the applications to events ruled by the law of large numbers, on the other hand for the logical coherence of the whole calculus...* ([17], p. 93)

Let us add that the treatise [15] contains an interesting discussion, how it is possible to determine prior probabilities in some cases with the help of Poincaré's method of arbitrary functions. More than ten years later Vorovka published a short paper [23] in which he reacted against the efforts to exclude the concept of causality from the scientific research. He concludes: *Functional and conditional thinking will always need to its complementarity the causal thinking.* ([23], p. 115)

3 Philosophy

To the Czech speaking audience, Vorovka is known above all as philosopher; towards the end of his life he characterized himself as follows: *Vorovka is an idealist, eclecticist, who adopts a lot of pragmatism. From psychologism he came closer to logicism but he does not identify with it, since he believes in rational intuition. He does not regard philosophy as science. Philosophy needs the will and it is the expression of the personality. It is an attempt on the cognition with only subjective certainty. An attempt to which we are imperatively forced. Such an attempt Vorovka calls gnosis...* ([7], p. 23).

Even in purely philosophical works, the impact of Vorovka's education in mathematics and physics is clearly evident. It is supported not only by various examples and comparisons (e.g., he compares truth and reality to two opposite magnetic poles), but also by the method of thought. It is perhaps most apparent in the philosophical treatise *Scepticism and Gnosticism* [21] published in 1921. For example, two parts of this book concern probability theory: the second part is devoted to the exposition, why it is not possible to measure the doubt about some opinion by probability; he considers a subjective degree of belief to be immeasurable. The following chapter is aimed at the behaviour under uncertainty and utility theory (although without the world *utility*); Vorovka remarks that the decision whether to take part in a chance game depends not only on probabilities, but also on the appraisal of potential profits and losses. He mentions the contributions of Carl Menger, Daniel Bernoulli and Pierre-Simon Laplace to utility theory. Vorovka compares life to a chance game in which we often decide not on the basis of certainty, but by probabilities. He writes: *Who wants to live in the perfect certainty, he can hardly live to see the evening. Are we perfectly sure that there will be pressure in a hydrant and voltage in a switch? With any breath a destructive microbe can get into our body, also with any swallow of water! Are we perfectly sure that a heart or brain attack will not strike us down soon? And yet we work and plan the distant future. It would be ridiculous to write about such things if our Czech hearts were not closer to timorousness than to free and independent thoughts.* ([21], p. 25)

In the treatise [21] Vorovka also returns to the problem of universals: *Neither the extreme nominalism nor the extreme realism is right... It would be a cheap wisdom to say that the correct way is in the middle. What does a correct way mean? An eager beaver who is able to navigate between any "yes" and "no", bobbing on both sides, certainly knows. But a philosopher does not... Let us be careful, not to create a sterile bastard speaking two languages, a centaur, half a horse and half a man, when merging rationalism with empirism, logicism with psychologism, universal with singular. The thing is not to merge these opposites by some noetic apparat bolted complicatedly for this purpose, but to boost them metaphysically and to exploit them without any discount... The basic good tone of nominalism remains untouched, but accompanied by steadily stronger tone of Platonic realism.* ([21], pp. 100–101)

On the occasion of the 100$^{\text{th}}$ anniversary of the birth of Immanuel Kant, Vorovka published a detailed analysis of his philosophy in the relation to exact sciences [22]. He tries to show that it is not possible to deny a priori elements of our cognition, independent of a sensory experience. In this treatise Vorovka characterizes his attitude to the problem of universals by the following words: *The world of things in themselves does not exist. Our mind forms a unique world with all realities, with the whole actuality, in which continuous* *paths lead to all its parts. But instead of unrecognizable things in themselves it is necessary to accept the existence of realities which our cognition penetrates only very slowly. Where the spatial and time notion is failing (atomic or astral dimensions, trillions oscillations), our uninstructive, purely logic-mathematical thinking enters to investigate realities not accessible to our notion at least in the respect of their relations. As far as natural sciences are considered, I do not agree with Kant's idealism nor with Mach's nominalism nor with the rough materialistic nor energetic realism, but I request critical realism to be the basis of cognition in scientific theories. At the same time I claim that the realities that are subjects of physics and chemistry do not exhaust the whole actuality, but are only its parts, and science gives us just one-sided aspects of these parts.* ([22], p. 139)

Let us add that Vorovka himself prized above all his extensive book on the history, present and perspectives of American philosophy [24], published posthumously in 1929. Here not only Vorovka assesses the results of American philosophy and displays his sympathy with the West, but also displays his own philosophical views. Let us mention that in the conclusion he formulates the minimal (and therefore achievable) aim of philosophy by the following words: *Philosophy as a science is a logical study and a critique of scientific activities from the point of view reaching the broadest possible area of human experience.* ([24], p. 421)

4 Conclusion

The aim of this contribution was to briefly commemorate the personality of Karel Vorovka. It was focused on his work in the field of philosophy of mathematics; interested readers can find more details in [6] and [7]. Let us add that Vorovka was also interested in didactics of mathematics and physics. For example, he published an extensive treatise on Czech mathematical textbooks for secondary schools ([19], pp. 1–56), which contains a detailed historical overview of older textbooks as well as the survey of new trends introduced to mathematics education after the reform in 1909; methods of particular textbooks are analysed and compared with the methods used in other coutries.

References

[1] Dittrich A.: *Karel Vorovka*. ČPMF 59(1930), 9–21.

[2] Dittrich A.: *Vorovkův poměr k nauce o relativitě* [*Vorovka's Attitude to Relativity Theory*]. In: [7], 64–74.

[3] Laplace P.-S. de: *Essai Philosophique sur les Probabilités*. Paris, 1814.

[4] Masaryk T. G.: *Humova skepse a počet pravděpodobnosti* [Hume's Scepsis and Probability Calculus]. J. Otto, Praha, 1883 [German variant published as [5]].

[5] Masaryk T. G.: *Dav. Hume's Skepsis und die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Carl Konegen, Wien, 1884.

[6] Mazliak L.: *An introduction to Karel Vorovka's philosophy of randomness*. Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique 3(2007), no. 2, 14 pp.

[7] Pelikán F. (ed.).: *Vorovkův sborník* [Vorovka's Proceedings]. Československá grafická unie a.s., Prague, 1937.

[8] Serret J. A.: *Cours de calcul différentiel et intégral*. Gauthier-Villars, Paris, 1880.

[9] Serret J. A.: *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack*. II. díl, Teubner, Leipzig, 1881.

[10] Šimerka V.: *Síla přesvědčení* [Power of Conviction]. ČPMF 11(1882), 75–111 [German variant published as [11]].

[11] Šimerka V.: *Die Kraft der Überzeugung*. Sitzungsberichte der Philos.-Historischen Classe der Kaiserlichen Akad. der Wiss. 104(1883), 511–571.

[12] Vorovka K.: *Integrál partikulární jakožto obálka* [Particular Integral as an Envelope]. ČPMF 32(1903), 229–240.

[13] Vorovka K.: *Konvencionalism* [Conventionalism]. Česká mysl 10(1909), 217–228.

[14] Vorovka K.: *Poznámka k problému ruinování hráčů* [Note on Gambler's Ruin Problem]. ČPMF 41(1912), 562–567.

[15] Vorovka K.: *Filosofický dosah počtu pravděpodobnosti* [Philosophical Reach of Probability Calculus]. Česká mysl 14(1913), 17–30.

[16] Vorovka K.: *Filosofické direktivy a skutečný vývoj přírodních věd* [Philosophical Directives and Real Development of Natural Sciences]. Živa 23(1913), 129–131.

[17] Vorovka K.: *O pravděpodobnosti příčin* [On Probability of Causes]. ČPMF 43(1914), 81–93.

[18] Vorovka K.: *Jak soudil H. Poincaré o vztazích mathematiky k logice* [H. Poincaré's Opinions on the Relationships of Mathematics and Logic]. ČPMF 43(1914), 154–162.

[19] Vorovka K., Červenka L., Posejpal V.: *Die Lehrbücher für Mathematik, darstellende Geometrie und Physik an den Mittelschulen mit böhmischer Unterrichtssprache*. Berichte über den math. Unterricht in Österreich, Heft 13, A. Hölder, Wien, 1914.

[20] Vorovka K.: *Úvahy o názoru v matematice* [Considerations on Notion in Mathematics]. ČAVU, Prague, 1917.

[21] Vorovka K.: *Skepse a gnóse* [Scepticism and Gnosticism]. Gustav Voleský, Prague, 1921.

[22] Vorovka K.: *Kantova filosofie ve svých vztazích k vědám exaktním* [Kant's Philosophy in Its Relations to Exact Sciences]. JČMF, Prague, 1924.

[23] Vorovka K.: *Poznámka o kausálním myšlení* [Remark on Causal Thinking]. Ruch filosofický 5(1925), 112–115.

[24] Vorovka K.: *Americká filosofie* [American Philosophy]. Filosofická knižnice No. 5, Sfinx, Praha, 1929.

Acknowledgement: This work was supported by the grant GAČR 401/09/1850.

Address

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
Faculty of Transportation Sciences
Czech Technical University in Prague
Na Florenci 25, 110 00 Prague 1
Czech Republic
e-mail: hyksova@fd.cvut.cz

The role of religious and philosophical factors in the live of Russian mathematical community at the end of the XIX-th – the first quarter of the XX-th century[1]

S.S. Demidov

There are many factors which influenced the development of mathematics from the explicitly obvious ones as economic and political to the not so obvious as the philosophical and religious ones. At the end of the XIX-th – the first quarter of the XX-th century the history of mathematical studies in Russia gives us an excellent example of the influence of these last ones. We can see a manifestation of such an influence in Moscow in that period – during the process of the birth and of the first steps of Moscow school of theory of functions created by D.F. Egorov and N.N. Luzin – in the school formed (together with the Leningrad-Petersburg school) the basement of the Soviet mathematical school born in the years 30-th.

To interpret these arguments we must expose some facts from the history of mathematical studies in Russia during XIX-th century.

1. The formation of the centre of mathematical studies in Moscow. Towards the end of the years 1820-s it were formed in Russia two mathematical centres – St.-Petersburg with the Imperial Academy of Sciences, where M.V. Ostrogradskii and V.Ya. Bunyakovskii worked, and Kazan, where N.I. Lobachevskii worked. Moscow with its University (the oldest in Russia – founded in 1755) remained, concerning regards mathematics, a provincial city. The situation began to change in 1830's. Two

[1] This work was made by the financial support of Russian Foundation for Basic Research (project № 08-06-00099a) and this of Russian Foundation for Humanities ((project № 08-03-00305a).

professors played a decisive role in this process – N.E. Zernov (1804 – 1862) and N.D. Brashman (1796 – 1866).

Zernov graduated from Moscow University in 1822, and in 1827 he received his Master Degree. In 1834 he became an adjunct, and in 1835 an extraordinary professor at Moscow University. In 1837 he received a Doctoral Degree for his thesis entitled “Treatise on the Integration of Partial Differential Equations”, which was the first doctoral thesis on mathematics in Russia. It was “an elaborated, and not without originality, description of the classical methods of integration of partial differential equations” [1, p. 220]. Zernov became a professor of the chair of “pure mathematics” and significantly raised the level of mathematical education in Moscow University. Although he was educated in Moscow and never visited another country, he was apt to adopt new ideas from abroad. His textbook “Differential Calculus and its Applications to Geometry” (Moscow. 1842) in many aspects – although not completely – followed Cauchy`s ideas on the reform of mathematical analysis.

Brashman graduated from Vienna Polytechnic School. In his life a very important role played the well known astronomer, director of Vienna observatory, J.J. Littrow, who was N.I. Lobachevskii`s professor and a corresponding member of the Petersburgian Academy of Sciences. Littrow advised him to go to Russia, and supported him with his introduction’s letters. In 1825 – 1834 Brashman worked at Kazan University (together with N.I. Lobachevskii) and from 1834 at Moscow University, where he held the chair of “applied mathematics”. At Moscow University he lectured eloquently on various mathematical topics. His scientific papers published in “Scientific Notices of Moscow University”, “Bulletin of the St. Petersburgian Academy of Sciences”, “Comptes Rendus” of the Paris Academy of

Sciences revealed the high level of his mathematical talent. For his scientific results he was elected corresponding member of Petersburgian Academy of Sciences.

Through Zernov and Brashman`s efforts, mathematical education in Moscow became very elevated. The result of their activities converged to a number of excellent mathematicians who determined the high level of mathematical studies in Russia in the second half of the XIX and in the beginning of the XX century. We can quote: O.I. Somov, A.Yu. Davidov, N.V. Bugaev, and at last the greatest Russian mathematician of the second half the XIX century, P.L. Chebyshev (1821 – 1894). In Moscow Brashman's disciple Chebyshev made his first steps in the science, there he made and defended (1846) his first dissertation – master dissertation (магистерская диссертация).

2. Petersburgian mathematical school of Chebyshev. In 1847 Chebyshev came to Petersburg where he continued his scientific career. In 1850 he was elected extra-ordinary and in 1860 ordinary academician. In St.Petersburg one of the most famous mathematical schools of the XIX and the XX centuries was formed around him, the school remain in history as Chebyshev's school.

In the history of mathematics P.L. Chebyshev first of all is well known through his distinguished results in theory of probability, in number theory and in theory of approximation of functions by polynomials. From all this he acquired an international acknowledgement. Chebyshev was remarkable teacher, who created the famous school known for its achievements in probability theory (A.A. Markov, A.M. Lyapunov), in number theory (A.N. Korkin, E.I. Zolotariov, A.A. Markov, G.F. Voronoi), in constructive function theory (E.I. Zolotariov, A.A. Markov, V.A. Markov), in mathematical physics and in analytical mechanics (A.M. Lyapunov, V.A. Steklov, N.M. Gyunter). In this school it was significant: 1) to stress the applied character (there was only one exception – number theory, traditional field for Petersburgians from Euler's epoch); 2) the constant tendency to the rigorous and, at the same time, effective solution of mathematical problems, to the construction of an algorithm which permits the reception of a solution of the mathematical problem as an exact numerical answer, or as an suitable approximate solution; 3) the tendency to simplicity and to the elementary character of the utilized tools. Such a trend of the school`s activities determined the lack of confidence in the new directions of Western mathematics (for example Riemann`s ideas were regarded as mathematical decadence) and in the contemporary tendencies in mathematics. At the same time the comprehension of mathematics and its place in the world had a positivist character. "We solve concrete problems with concrete rigorous methods (rigorousness was understood in the sense of exact determination of possible errors in the utilized methods) and we do not want to support any vague philosophical speculations (for example in G. Cantor`s way)".

In a most extremist form, the attitude of the Petersburgian school was expressed by A.A. Markov who after Chebyshev`s death became the actual leader of that school. His anti-religious, anti-monarchial, liberal, pro-Western trends dominated this period (see [4]).

3. ***Moscow Philosophical Mathematical School.*** Another situation was formed in Moscow. In 1864 there was founded one of the oldest mathematical societies, the Moscow Mathematical Society. Its first president was N.D. Brashman and vice-president A.Yu. Davidov [3]). "According to its importance [for the development of mathematics in Russia in the XIX century – S.D.], wrote the famous Russian historian of mathematics A.P. Yushkevich [1, c. 317], the Moscow Mathematical Society became the number two in the country after the Academy of Sciences". One

of its founding members was P.L. Chebyshev. Among the members of the Society we can see a modest teacher of the Moscow Peterschule (Moscow German Gymnasium) K.M. Peterson (1828 – 1881) [1]. During his student years at Dorpat University where his mentor was F.G. Minding he began his research on the theory of surfaces. Therefore, his original field of research was the continuation of C.F. Gauss – F. Minding's line. Peterson`s papers were mainly published in "Matematicheskii Sbornik" in Russian so he only slowly became known in the West. With his works K.M. Peterson put the foundation of the Moscow school of differential geometry (B.K. Mlodzeevskii, D.F. Egorov) which acquired Western esteem only at the end of the XIX century.

Applied mathematics became the second main direction for the studies of Muscovites. This field was studied by N.E. Zhukovskii (1847 – 1921) and his disciples [1]. Muscovites could also receive also interesting results on the theory of functions of a complex variable and on the theory of probability (N.E. Zhukovskii, P.A. Nekrasov etc.) [5,6,7].

The mathematical face of Muscovites was determined first of all by their studies in the differential geometry and in applied mathematics. The typical features for their mathematical works were the predilection for clear geometrical constructions and the heightened interest to the philosophy, specifically to the religious one.

Just the philosophical aspirations of Muscovites became the foundation for the development yet another direction of researches – of "arithmology". By this term the most influential Moscow mathematician of the end of the XIX and the beginning of the XX centuries N.V. Bugaev (1837 – 1903) named his variant of the theory of discontinuous functions. In the history of mathematics it is known first of all by his results in the number theory [1]. In his creativity an exceptional role played his permanent and profound interest to the philosophy and to the philosophical comprehension of mathematics in its development [8 - 11]. This interest was manifested very early. At first he was a positivist – in that period positivism became very à la mode. But in the 1880's he evolved into idealism and took an exceptional interest in Leibniz`s ideas. One of questions which worried him was the problem of the freedom of the will – there is not a place in the deterministic world of Laplace for the freedom of the will. Bugaev saw the reason of the such desperate situation in the analytical world view established in the contemporary science: the mathematical foundation of the modern science and, wider, of the modern world view became the analysis of the smooth functions (first of all of the analytical functions).

In the same time, Bugaev said [8] that the philosophy, psychology, natural sciences show us that the discontinuity is one of the most important characteristic of the world processes. It is why the modern scientific world view must be established not only on the analysis of the smooth functions, but also on the analysis of the discontinuous functions. The developed by Bugaev own philosophical system was named by him "evolutionary monadology" [9-12], and the corresponding theory of discontinuous functions – «arithmology» [8]. In his arithmology Bugaev took as a start point the functions of number theory. As a result the set of discontinuous functions studied in the arithmology is limited by the functions which are piecewise smooth or by the limits of the consequences of such functions. It's clear that the construction of a enough rich theory of discontinuous functions was impossible in this way. But during the last decade of the XIX-th century Bugaev and his disciples wrote many papers on the arithmology. One of the first among his disciples who understood that this way have not perspective was D.F. Egorov. Bugaev remains a trace on the history of

Russian philosophy [12]: his ideas influenced strongly P.A. Florenskii, A.F. Losev [13].

This philosophical tendency was the reason to name the school, formed in Moscow in the last third of the XX century, “Moscow Philosophical Mathematical School” (see P.A. Nekrasov [14]).

The Petersburgians observed with disapproval the passions which reigned in Moscow and the curriculum of the Muscovites. Sometimes such a relation led to open conflicts. Such a serious battle became the debate in 1887 – 1892 on V.G. Imshenetskii`s results on the methods of integration of linear differential equations [1, p.433]). The Muscovites (K.A. Andreev, P.A. Nekrasov etc.) supported the academician against his Petersburgian colleagues (A.A. Markov, A.N. Korkin, K.A. Posse). The reason for another serious conflict was S. Kovalevskaya`s famous results on the integration of equations on the motion of rigid body around a fixed point, which were awarded by the French Academy of Sciences in 1888. A.A. Markov found gaps in her proofs and attacked her very aggressively. Muscovite mathematicians P.A. Nekrasov and G.G. Appelrot took her under their protection and tried to complete these gaps [15]. At the end the conflicts between A.A. Markov and P.A. Nekrasov on the central limit theorem in probability theory became known [6]. After the death of P.L. Chebyshev, who till the end of his life preserved his relation with Alma Mater, this confrontation was intensified.

4. A birth of the Moscow school of the theory of functions. Of course, it was not very convenient for the young, ambitious Muscovites: although they gained the esteem and recognition of their European colleagues, they couldn’t stand not being considered among the representatives who could contribute to the elaboration of very modern mathematics. So they searched for topics which could permit them to attain the vanguard of mathematical studies. At the same time these topics of research had to remain at a certain distance from the main interests of the Petersburgians' ones: they did not want to play the role of their disciples. The theory of functions of a real variable became such a topic of research – a new direction elaborated in the 1890's from Cantor`s set theory by French mathematicians E. Borel, R. Baire and H. Lebesgue.

This choice made by the Muscovites was natural. First of all, because through N.V. Bugaev`s efforts the interest in studying discontinuous functions reigned in Moscow, and Moscow mathematicians discerned the theory, which was expected, in the new French research. At the same time, the theological character of some of Cantor`s constructions did not repel the Muscovites as, for example, E. Borel, who precisely eliminated Cantor`s discussions of those issues from the French translations of Cantor`s works, or the Petersburgian mathematicians, who did not want to consider Cantor`s set theory as mathematics at all, declaring it as theology.

1911 is the date of the birth of Moscow school of function theory. In this year in the Comptes Rendus of the French Academy of Sciences D.F. Egorov`s paper "Sur les suites des fonctions mesurables" was published containing his theorem on the sequences of measurable functions: if such sequence converges almost everywhere to finite function on (a,b) then such a convergence will be uniform on the subset of (a,b), the measure of which differs arbitrarily slightly from the measure of (a,b). The next year in the same journal appeared a paper of his pupil N.N. Luzin on so-named C-property. Following this, the events developed at a dizzy speed. In 1915 Luzin`s famous dissertation "The Integral and the Trigonometric Series" was published. In 1917 the first generation of Luzin`s pupils was formed: D.E. Menshov, M.Ya. Suslin, A.Ya. Khinchin, P.S. Aleksandrov. Immediately, their results became well known in

Europe. In 1916 the discovery of A-sets by M.Ya. Suslin advanced at once the Moscow school to the vanguard of mathematics of this epoch.

Very interesting was the reaction to these events by the leaders of Petersburgian school. In the Soviet mathematical community there remained a very popular anecdote about V.A. Steklov who showed Luzin`s thesis to somebody, accompanying this with the following rhetorical question: “Regard please, there are not here even formulas. Is that mathematics?” Another Petersburgian academician, Ya.V.Uspenskii, in his letter of 1926 (!!!) to another member of the Academy, A.N. Krylov, gave this characterization for N.N. Luzin as a mathematician: “About Luzin I know that he is a very good specialist in his field – set theory and related to it Cantor`s and Lebesgue`s nonsense; an excellent professor who created in Moscow a school of his pupils and, through his influence, abolished the real mathematics in Moscow.” (I quote from [16, p. 193]).

5.Conclusion. History of the birth of Moscow school of the function theory of D.F. Egorov – N.N. Luzin gives an excellent example of the influence of the philosophical context on the development of mathematics.

This influence is realized “here and now” and became a result of a complicate synthesis of a series of factors which became suddenly (“here and now”) decisive. Besides it was necessary to have their certain combination – the same factor in the different conditions can produce quite different result. So the antireligious position of the petersburgian mathematical elite determined their rejection of G. Cantor’s set theory. E. Borel’s antireligious position didn’t prevent him to be its propagandist (admittedly he eliminated from the French translations Cantor’s papers all the fragments of the theological character). For the explication of such difference we have to search in special features of the environment in which this factor acted, in personal qualities of the characters. If we speak on the reaction of the leaders of the petersburgian mathematical community we have to take in consideration the aggressive antireligious spirit of the Russian democratic intelligentsia of this time (the left wing of which was the Bolsheviks !) and the pathological ideological intolerance of their master – A.A. Markov. In the same time the antireligious position of E. Borel didn't assume so sharp demonstrative form – in every case he could perceive the attraction of the new mathematical theory, he could agree even to the organization of the religious ceremony of his own funeral because he thought that such ceremony could be certain consolation fir his religious widow [17]. Such gesture was not possible for Markov – for him the situation itself of a religious wife was impossible !

In conclusion: a few words on the role of the philosophical and religious factors in the further development of mathematics in Moscow – in the mathematical community with the reach philosophical traditions. In 1917 Russia affronted difficult times – during the First world war in Russia began the revolution which outgrew to the civil war. In the new Soviet state the philosophical opinions different from Marxist ones (including positivist and religious-philosophical) could exist perhaps only as the object of the Marxist critique. The attitude of the Soviet ideology to the religion is well known. As a result the question of the philosophical opinions different from Marxist ones on the development of the mathematical studies in the USSR is a very difficult problem due to the absence of documentary evidences – such a kind of materials could not be published in the Soviet Union. Every non-official philosophizing and the religious practice disappeared in the underground and could be a reason of persecution. Both leaders of Moscow school of function theory – D.F. Egorov and N.N. Luzin – became the objects of the organized hunting. The first one was arrested in 1930 according to the case of the catacomb church and was dead in exile in Kazan in 1931 [18]. This case was manufactured by OGPU and a real reason of Egorov's arrest was his open rejection of the Soviet ideology and his openly demonstrated religiousness. (D.F. Egorov was an active participant of the movement "Name Worshipping" blossomed in the beginning of the XX-th century in the Russian orthodoxy [18].) In 1936 a massed ideological attack against N.N. Luzin was organized [19]. His ideological enemies saw in the base of the charged brought against him his participation in the idealist Moscow Philosophical Mathematical School. Among the accusations there was for example the following: Luzin's idealist interpretation of the notion of the natural number. The problem of Luzin's philosophical views and its influence on his mathematical creativity (first of all on his comprehension of the foundations of mathematics) is very important and very difficult. The necessary information could be received or from analysis of his published works, or could be find in the archives (first of all in Luzin's archive). The last one could bring to us the success, although during the somber years of Stalin's terror the men feared to express their thoughts even on the papers.

The central problem here is Luzin's comprehension of the nature of the infinity, of the natural number, of the mathematical entities. Recently L. Graham and J.-M. Kantor proposed the hypothesis [20] that the comprehension by the Name Worshipping of the "Name of God" and of the nature of word perceived by N.N. Lusin and by his disciples became the catalyst of them studies and permitted them to make a spurt in the descriptive set theory. We don't consider it possible to speak on the direct influence of the Name Worshipping on the Muscovites' studies on the descriptive set theory (there are not any foundations for ranking N. N. Luzin and his disciples among the persons connected with doctrine of the Name Worshipping, the

active partisan of this doctrine D.F. Egorov had not a direct attitude to studies in the descriptive set theory [21]) and we want to change the way a problem is posed: how influenced the philosophical context on the development of the studies on the set theory (including the descriptive set theory) at the end of the XIX-th – the first third of the XX-th century. It's impossible to say that this question was not touched in the literature. It arose for example in the works on the famous discussion on the axiom of arbitrary choice (see for example [22]). However it was never studied as a independent and complex problem. The particular attention in this study must be gave to any main persons (E. Borel, H. Lebesgue, N.N. Luzin, W. Serpinski – certainly this list must be added but in every case it will not be large) and to their comprehension of the nature of the mathematical entities, of the nature the infinity and of the limits of the permissibility of the utilization in mathematics of the infinity in the context of their philosophical views. It is very interesting, from our point of view, to understand the philosophical background of the such concepts as «nommer» and «l'ensemble nommé», introduced by H. Lebesgue. A special attention to these concepts chez Lebesgue was called by L. Graham and J.-M. Kantor, who looked to connect the descriptive set theory with the ideas of the Name Worshipping.
Which was the philosophical context of the use of this word by Lebesgue ? Although Lebesgue didn't live under the totalitarian yoke and had not the habit to hide his ideas from the paper to reply to this question will not be simple.

Bibliography

1. Юшкевич А.П. (Yushkevich A.P.) История математики в России до 1917 года (History of Mathematics in Russia before 1917). M.: Наука. 1968. (In Russian.)

2. Полякова Т.С. (Polyakova T.S.) История математического образования в России (History of Mathematical Education in Russia). М.: Изд-во Московского университета. 2002. (In Russian.)

3. Демидов С.С. (Demidov S.S.), Токарева Т.А. (Tokareva T.A.), Тихомиров В.М. (Tikhomirov V.M.) The Moscow Mathematical Society. In: European Mathematical Society. Newsletter. 2003. Issue 50. P.17 – 19; 2004. Issue 51. P.25 – 27.

4. Гродзенский С.Я. (Grodzenskii S.Ya.) Андрей Андреевич Марков (Andrei Andreevich Markov). 1856 – 1922. Москва: Наука. 1987. (In Russian.)

5. Petrova S.S., Solovyev A.D. The Origin of the Method of Steepest Descent. In: Historia Mathematica. V. 24. 1997. P. 361 – 375.

6. Соловьев А.Д. (Solovyev A.D.) П.А. Некрасов и центральная предельная теорема (P.A. Nekrasov and the Central Limit Theorem of Probability Theory). В: Историко-математические исследования. 2-я серия. Вып. 2 (37). 1997. С. 9 – 21. (In Russian.)

7. Seneta E. The Central Limit Problem and Linear Least Squares in pre-Revolutionary Russia. The Background. In: Math. Sci. V. 9 1984. P. 37 - 77

8. Бугаев Н.В. (Bugaev N.V.) Les mathématiques et la conception du monde au point de vue de la philosophie scientifique. In: Verhandl. Des Ersten Inter. Mathematiker-Kongresses in Zürich (1897). Leipzig. 1898. S. 206 – 223.

9. Демидов С.С. (Demidov S.S.) Н.В. Бугаев и возникновение московской школы теории функций действительного переменного (Bugaev and the Birth of Moscow School of the Theory of Functions of a Real Variable). В: Историко-математические исследования. Вып.29. 1985. С.113 – 124. (In Russian.)

10. Demidov S.S. N.V. Bougaev et la création de l'école de Moscou de la théorie des fonctions d'une variable réelle. (Sur un épisode dans l'histoire du développement des idées de Leibniz en Russie). In: Leibniz Werk und Wirkung. IV. Internationaler Leibniz-Kongress. Vorträge. II. Teil. Hannover. 1985. S. 63 – 74.

11. Demidov S.S. N.V. Bougaev et la création de l'école de Moscou de la théorie des fonctions d'une variable réelle. In: Folkerts M. , Lindgren U. (Eds.) Mathemata. Festschrift für Helmut Gericke. 1985. S. 651 – 673.

12. Lossky N.O. History of Russian Philosophy. New York: International Universities Press. 1951.

13. Demidov S.S., Ford Ch. On the Road to a Unified World View: Priest Pavel Florensky – Theologian, Philosopher and Scientist. In: Koetsier T., Bergmans L. (Eds.) Mathematics and the Divine: A Historical Study. Amsterdam: Elsevier B.V. 2005. P. 595 – 612.

14. Некрасов П.А. (Nekrasov P.A.) Московская философско-математическая школа и ее основатели (Moscow Philosophical Mathematical School). В: Математический сборник. Т. 25. Вып. 1. 1904. С.1 – 249. (In Russian.)

15. Михайлов Г.К. (Mikhailov G.K.), Степанов С.Я. (Stepanov S.Ya.) К истории задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в случаях Гесса и Ковалевской и их геометрического моделирования (A Contribution to the History of the Problem of the Rotation of Solid Body around a Fixed Point) . В: Историко-математические исследования. 1-я серия. Вып. 28. 1984. С. 223 – 246. (In Russian.)

16. Ермолаева Н. С. (Ermolaeva N.S.) Новые материалы к биографии Н.Н. Лузина (New Documents Concerning the Biography of N.N. Luzin). В: Историко-математические исследования. Вып. 31. 1989. С. 60 – 102. (In Russian.)

17. Полищук Е.М. Эмиль Борель, 1871 – 1956. Ленинград: Наука. 1980. (In Russian.)

18. Демидов С.С. (Demidov S.S.) Профессор Московского университета Дмитрий Федорович Егоров и имеславие в России в первой трети XX столетия (Professor of the Moscow University Dmitrii Fiodorovich Egorov and the Doctrine on the Veneration of the Name of God in Russia at the First Third of the XX-th Century). В: Историко-математические исследования. 2-я серия. Вып. 4 (39). 1999. С. 123 – 155. (In Russian.)

19. Демидов С.С. (Demidov S.S), Левшин Б.В. (Liovshin B.V.) (Ред.) (Eds.) Дело академика Н.Н. Лузина (The Affair of the Academician N.N. Luzin). Санкт-Петербург: Изд-во РПУ. 1999. (In Russian.)

20. Graham L., Kantor J.-M. Naming Infinity. A true history of religious mysticism and mathematical creativity. Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press. 2009.

21. Геронимус А. (Geronimus A.), Демидов С.С. (Demidov S.S.), Паршин А.Н. (Parshin A.N.) Некоторые замечания к статье Л. Грэхема и Ж.-М. Кантор. (Some remarks on the paper of L. Graham and J.-M. Kantor.) В: Вопросы истории естествознания и техники. 2006. N 3. С. 79 – 86. (In Russian.)

22. Медведев Ф.А. (Medvedev F.A.) Ранняя история аксиомы выбора (Early history of a choice). М.: Наука. 1982. (In Russian.)

Dimitrije Nesic, Pioneer of Serbian Mathematics

Jasna Fempl Mađarević

"He who wants to restrict himself to the present
disregarding the past, he shall never really understand it"

(Leibnitz)

In order to be able to give and an objective assessment of the significance and contribution of the first Serbian formally educated mathematician - Dimitrije Nesic (* 1836 †1904), we must try to transfer ourselves back to the time and space of the 19th century Serbia! Mathematicians of today might be tempted to offer just a benevolent smile to the not so impressive number of Nesic's references and the fact that he had no doctorate degree. But let us go back to the past.

Introduction

Serbia, in the heart of the Balkans, has since the 14th century been de-facto a divided country, most of which was under the rule of the Ottoman Empire, but whose northern parts had been under the rule and influence of the Hungarians, and later Austro-Hungarian Empire.

Serbian mathematics education had also developed under these two main spheres of influence but also having Serbian Orthodox Priests as a driving force behind the somewhat late coming of Enlightenment.

.

In the north (Vojvodina), educational institutions had developed under the influence and through the support of the Austro-Hungarian Empire, and in Serbia proper (mainly in Belgrade and Kragujevac) they developed despite the Ottoman influence and amid the striving for independence by the Serbs.

The beginnings, 1717-1863

Although the first primary school in Vojvodina (northern part of Serbia) was opened in 1717 in Sombor, no books on mathematics appeared until Vasilije Damjanovic (1734-1792) published in 1767 *Nova Serbskaja Aritmetika (The New Serbian Arithmetic)*, which was at the same time the first book on mathematics, published in Serbian language.

By 1800 there were two elementary schools in Belgrade, but the First Serbian Uprising against the Ottomans (1804-1813) led to the foundation of many more such schools throughout Serbia proper, and the founding of the first Great (equivalent to High) School of Belgrade in 1808.
By this time, the first teacher training school *(Norma)* was already functioning in Sombor (Vojvodina). *Norma* was founded in 1778 by Avram Mrazovic (1756-1826), son of a Serbian Orthodox priest educated in Pesta and Vienna. Maria Teresa (1717-1780), Austro-Hungarian Empress, nominated Mrazovic as the chief of the developing educational institutions in Sombor, which was at the time the seat of Serbian culture in the north.

In Serbia proper, the Great School of Belgrade was led by Ivan Jugovic, (1772-1813) one of the most educated Serbs at the time, who was also the school's first teacher. Jugovic was a protege of Dositej Obradovic (1742-1811) the first Serbian writer, and the teacher of the son of Karadjordje (1762-1817) who led the First Uprising in 1804.

The requirements for enrolment in the High School were a knowledge of reading, writing, and some arithmetic. According to Jugovic's plan, the education in the Great School was to last for three years and the following subjects were studied: general history, general geography with drawing, statistics, mathematics, composition, German language, common prayers, state and criminal law, moral instruction, church singing, fencing, and training with rifles. Jugovic taught mathematics and was apparently a skilful mathematics teacher, especially in fractions.

Prior to 1830 Serbia had 16 town schools and several village schools. In the period from 1835 to 1836, 26 elementary schools were opened at the state expense. The Great School of Belgrade, being closed in 1813, was reopened in 1830. Report from 1833 indicates that the school was developing after the 'gymnasium' model, although at this time it still had only one teacher. In 1833, the school was transferred to Kragujevac, where in 1835 it was further modeled into a gymnasium having gained four grades and four teachers, and offering mathematics as a subject in the first three grades.

Some of the teachers in all of these schools were educated in Norma in Sombor, but a new teacher training college was needed for wider and more organized education of teachers in Serbia proper. For a short while, from December 1837 to June 1838, a Military Academy operated initially in Pozarevac, then Belgrade and finally Kragujevac. Stefan Krkalovic, a former officer in the Austro-Hungarian army, was its director and teacher of advanced mathematics. This marked the first reference to advanced mathematics in the history of Serbian culture, and is significant as marking of a triumph of Austro-Hungarian influence over the cultural strife and educational developments that began almost a century earlier.

The first Serbian Military Academy was short lived. It is not known whether this was a result of a Turkish objection; nevertheless it led to the founding of the first Lyceum in 1838 in Kragujevac, which marked the beginning of the undergraduate study of mathematics in Serbia. The first curriculum for the Lyceum included philosophy, general history, mathematics, natural law, European statistics, drawing, German, French, and the Bible studies.

Biography

Dimitrije Nesic was born in 1836 as the eldest child in the family of a Belgrade craftsman. However, instead of treading in his father's footsteps, he attended the gymnasium and Lyceum and then he studied at the Technical College in Vienna and the Polytechnical School at Karlsruhe under the scholarship of the Serbian Government, i.e., its Ministry of Education and Religion. Upon his return, he was appointed as the first Principal of the prominent II Belgrade Gymnasium and he wrote his first mathematics textbooks but he will be especially remembered for his engagement in collecting experiences all over the advanced Europe for the needs of the young Principality of Serbia and using them to write the first draft Law on Application of Metric Measures. He wrote a book “Metric Measures” which clarified the reasons for introduction of the new system in Serbia in the most comprehensible manner. Thus disappeared groats and kreutzers, fathoms and poods, okas and other “monetary and measurement units” which, until then, did more to generate confusion then to assist in development of science, industry and the state economy in general.

At the same time, in 1862, Dimitrije Nesic was also elected a professor of mathematics at the Lyceum, which became the Belgrade College the next year. He was a professor at the Belgrade College until his retirement in 1894. There, he taught Euclidean geometry, algebra, trigonometry, analytical geometry, differential and integral calculus and combinatorics for years all by himself with no other lecturers or assistants until the arrival of Bogdan Gavrilovic in 1887. At the time, Serbia was simply short of any formally educated mathematicians.

Always the first, Dimitrije Nesic was also the first professor to retire from the Belgrade College leaving his department in the capable hands of his best student, very talented Mihajlo Petrovic. His contribution to the education processes in Serbia was significant.

Through his textbooks he modernized the mathematics lessons because he firmly believed that providing his students with good and reliable textbooks was his priority.
He wrote and published:

- Trigonometry, Belgrade 1875 (496p + XIV)
- Science of Combinations, Belgrade 1883 (132 + VIII)
- Algebraic Analysis, I part; Belgrade 1883 (582 + X)
- Algebraic Analysis, II part; Belgrade 1883 (670 + XII)

In addition, he also published 13 scientific papers in the *Gazette of the Serbian Learned Society* and the *Voice of the Serbian Royal Academy*,
The textbooks he wrote outlived him: mathematics was taught based on Dimitrije Nesic's teaching materials all the way until the outbreak of the World War II. He was among the first 16 members of the Serbian Royal Academy of Science appointed by a decree issued by King Milan Obrenovic. These founding members were in charge of preparing the statute, rules and all other terms for acceptance of future members. Dimitrije Nesic was the third President of the Academy and while still in the office, in 1890, he was elected Associate Member of the Yugoslav Academy of Science and Fine Arts in Zagreb.

Dimitrije Nesic , scientist, mathematician, great educator and cultural worker died in 1904 at the age of 68 and he was buried with honors of the Serbian Academy of Science, Belgrade University and in presence of numerous friends and admirers of his work at the Belgrade's New Cemetery. The parting speech at his funeral was given by Mihajlo Petrovic, often called Mika Alas, professor's successor, who mentioned in his speech that for all he had done, for his patriotism and love for the people and the fatherland as well as for his public and political engagements, Dimitrije Nesic was decorated with *the Order of St. Sava of first and second class* and *the Order of White Eagles of fourth class.*

Conclusion

From the present day perspective, Dimitrije Nesic has but few scientific works, but, was he really able to do more at the time? His greatest merit lies in the fact he spent his entire working and retirement life trying hard to spread his knowledge and his understanding of certain eternal truths such as

1. Science has no limits
2. Mathematical sciences are the property of the whole world and it is therefore necessary that mathematicians from Belgrade be constantly in touch with scholars all over the "big world".

His well-remembered inaugural speech at the Serbian Royal Academy of Science "Leibnitz's Infinitesimal Method and Fight between Newton and Leibnitz over Supremacy in Invention of Infinitesimal Calculus" shows his profound knowledge and awareness of contemporary mathematical flows as well as his desire to instill a breath of fresh air into the lungs of the Belgrade mathematical circles.

We shall finish our presentation dedicated to Dimitrije Nesic by quoting a verse written by a famous Serbian poet

"Where I came to a standstill, thou shall leave;
What I could not fulfill, thou shall achieve"

Dimitrije Nesic paved the way to a genuine, scientific development of mathematics in Serbia which later gave birth to a number of well-known European mathematicians.

Literature

1. Dragan Trifunovic: "Dimitrije Nesic – The Dawn of Serbian Mathematics"
2. Dimitrije Nesic: "Leibnitz's Infinitesimal Method", Belgrade, 1996
3. Dragan Trifunovic: "8 Centuries of Mathematics among the Serbian Population". Belgrade 1996

Jasna Fempl Mađarević, "MS ARHIMEDES", V Grammar School Belgrade
Email: ssimetic@sbb.rs

Kniende und schweigende Universität

Marko Razpet

Pädagogische Fakultät in Ljubljana

1 Professor Križanič – Leben und Werk

Professor France (Franz) Križanič wurde am 3. März 1928 in Maribor (Marburg an der Drau) geboren. Er besuchte die Grundschule in Maribor, Apače (Anstall) und Ljubljana (Laibach). Große Weltwirtschaftskrise, Verlust des Vermögens und Anleihen zwangen seine Eltern oft neue Wohnorte zu suchen. Im Beginn des zweiten Weltkrieges wohnte seine Mutter mit beiden Kindern bei ihren Eltern in Ljubljana. In jener Zeit starb sein Vater in Sladki Vrh (Süßenberg an der Mur).

Während des zweiten Weltkrieges besuchte France Križanič das Realgymnasium in Ljubljana. Diese Schule hat er als ein immer unruhiger Geist auf eigene Faust sogar für ein Jahr verlassen, denn ihm gefielen die Differential- und Integralrechnung, die an der technischen Schule gelehrt wurden, aber nicht am Gymnasium. Später ist er zu früherem Realgymnasium wieder zurückgekehrt und dort schließlich das Abitur im Jahr 1946 erfolgreich abgelegt. Schon als Schüler interessierte er sich für Politik und Literatur und schrieb sogar eigene Gedichte auf. Sie sind meistens verlorengegangen. Er hatte auch eine natürliche Begabung für die fremden Sprachen, was ihm immer zugute kam.

Gleich nach dem Abitur, angeregt durch seine Mathematiklehrer, begann Križanič mit großem Eifer seine Studien an der Universität in Ljubljana. In seiner Zeit konnte man Mathematik in der Abteilung Mathematik und Physik an der Philosophischen Fakultät studieren. Von seinen besten Lehrern erwähnen wir nur Professoren Josip Plemelj (1873-1967) und Ivan Vidav (1918–). I. Vidav diplomierte und doktorierte bei Plemelj im Jahr 1941 und wurde Assistent zwei Jahre später. Im Jahr 1949 wurde er zum außerordentlichen und 1953 zum ordentlichen Professor ernannt.

Križanič diplomierte im Jahr 1951 an der Naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät, denn während seines Studiums wurde die Universität re-organisiert, so dass Mathematik nicht mehr eine Abteilung bei den Philosophen war. Man weiß nicht viel aus seinen Studentenzeiten. Seine Kollegen erzählten oft, dass Professor Plemelj wegen seiner Beschäftigung mit Poesie nicht besonders zufrieden war. Doch Križanič, berühmt nach seinem Eigensinn, warf nicht gleich die Flinte ins Korn. So erlangte er im Jahr 1955 den Doktorgrad in Mathematik bei Professor Vidav mit dem Thema *Lineare Funktionale im Banach-Raum und das Grundlemma der Variationsrechnung*. Aus seiner Dissertation veröffentlichte er in den nächsten Monaten drei Abhandlungen.

Im Jahr 1951 wurde Križanič Assistent in Abteilung Mathematik an der Naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät. Er begründete gleich ganz unformale Seminare, wo er Vorträge aus Funktionalanalysis, moderne Gruppentheorie, Theorie der Differentialoperatoren, Approximationsmethoden der Funktionalanalysis und Theorie der Banach-Algebren hielt. Seine Tätigkeit stellte in jener Zeit eine echte Erfrischung in der Abteilung Mathematik, denn eher studierte man meistens klassische Fächer, zum Beispiel Analysis, Differentialgleichungen, Zahlentheorie, analytische Funktionen und darstellende Geometrie. Weil es für Vorträge aus Funktionalanalysis keine anderen Lehrbücher zur Verfügung gab, benutzte er rumänische Skripten. An diesen Seminaren nahmen auch Mathematiker anderer Fakultäten und Physiker teil. Damit wurden die Grundsteine zur Begründung einer angesehenen Schule der Funktionalanalysis in der Abteilung Mathematik gelegt. Als Assistent lehrte er auch an mehreren Mittelschulen, was ihm gewisse Erfahrungen zum späteren Schöpfungen auf dem Gebiet von Lehrbüchern für Gymnasien brachte. Im allgemeinen Mangel der Professoren für Mathematik hielt er Honorarvorträge an der Biotechnischen Fakultät, Fakultät für Elektrotechnik und am Josef Stefans Institut, an dem er einen Kurs der linearen Analysis für postgraduale Studenten veranstaltete. Er schloss sich am Institut auch zur Arbeit einer elektronisch orientierten Gruppe an und führte einen Vorbereitungskurs aus Algebra der Schaltnetze und aus Entwicklung der elektronischen digitalen Rechner.

Zwischen 1953 und 1959 kandidierte er um ein Stipendium zum Studium in Ausland. Bei drei französischen, zwei englischen und zwei sowjetischen Ausschreibungen war er erfolglos, erst in drittem Versuch bekam er das

Stipendium der sowjetischen Regierung. Damit konnte er von April 1959 bis Jänner 1960 an der staatlichen Universität in Moskau bei Professor I. M. Gelfand (1913–2009) studieren. Im Jahr 1959 wurde Križanič zum Dozenten, im Jahr 1964 zum außerordentlichen und im Jahr 1975 zum ordentlichen Professor in Abteilung Mathematik in Ljubljana ernannt.

Im akademischen Jahr 1960/61 wurde Fakultät für Naturwissenschaften und Technologie in Ljubljana begründet. Zu dieser Fakultät gehörte auch Mathematik für Pädagogen und auf neu begründete Technische Mathematik. Es geschah, dass das Interesse für das Lehramt auf einer Seite abnahm, auf anderer Seite aber das Interesse für die technische Mathematik einen großen Aufschwung machte, was auch ein Verdienst von Professor Križanič war, der durch seine populärwissenschaftlichen Werke **Zeitvertreibende Mathematik** (1951) und **Kreuz und quer durch die Mathematik** (1960) viele jungen Leute zum Mathematikstudium angeregt hat. Viele von denen wurden erfolgreiche Ingenieure, Forscher, Assistenten, Dozenten und Professoren in Slowenien und im Ausland. Für beide Bücher erhielt der Verfasser den Levstik-Preis, der für Kinder- und Jugendliteratur verliehen wird.

Das postgraduale Studium der Mathematik war bis 1970 in Slowenien noch nicht offiziell organisiert, so dass man an anderen Universitäten studieren musste um Magistergrad zu erlangen, meistens in Zagreb (Agram). Auf diese Weise bekam die slowenische Mathematik neue Doktoranden. In jenen Zeiten galt nämlich das Magisteriumgesetz, das den Magistergrad vor dem Doktorat zu erreichen befahl. Auch da hatte Professor Križanič viel Verdienst, denn von 1970 entwickelte sich das postgraduale Studium viel schneller.

In der Abteilung Mathematik hielt er durch seine ganze akademische Kariere Vorträge aus verschiedenen Fächern, zum Beispiel: Differentialgleichungen, Mathematik I und II, Geschichte der Mathematik, numerische Analysis, elektronische Rechner mit Programmierung, höhere Algebra und Analysis für Physiker. In Rahmen des postgradualen Studiums in der Abteilung Mathematik und an dem Institut für Mathematik, Physik und Mechanik führte er auch Kurse in allgemeiner Topologie, funktionalanalytischen Methoden in numerischer Analysis, algebraischer Topologie, Theorie der Lie-Algebren, Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, topologischen Gruppen, Theorie der Lie-Gruppen und Darstellungstheorie. Auch an der Fakultät für

Elektrotechnik und in Abteilung Physik war er tätig, und zwar mit der Theorie der nichtlinearen Schwingungen und Gruppentheorie für postgraduale Studenten. Er nahm nämlich die Physik immer für einen untrennbaren Teil der Mathematik. Seltene Mitglieder der Abteilung waren in dieser Hinsicht mit ihm einverstanden.

Professor Križanič war auch bei der Verwaltung der Abteilung, Fakultät und Universität tätig. Von 1967 bis 1969 war er Dekan der Fakultät für Naturwissenschaften und Technologie. Eben im Jahr 1967 wurde er an die Universität in Florida eingeladen, aber er leistete nicht Folge der Einladung, denn er hat bereits die Kandidatur für Dekan angenommen. Er war Mitglied mehrerer Komissionen und Abteilungsvorsteher. Zweimal war er auch der Vorsitzende der Gesellschaft der Mathematiker, Physiker und Astronomen Sloweniens.

Professor Križanič schrieb auch ganz neue und moderne Lehrbücher auf: in den sechziger Jahren Arithmetik, Algebra und Analysis I, II, III und IV für Gymnasien und Mathematik – Lesebücher I, II, III und IV in den achtziger Jahren für alle Mittelschulen. Selbstverständlich war er auch Verfasser mehrerer Universitätslehrbücher in slowenischer Sprache, die in seiner Bibliographie am Ende zitiert werden. Zur weiteren Ausbildung der Mathematiker passen auch seine wissenschaftlichen Artikel, Darstellungen neuer mathematischen Bereiche, Neuigkeiten im Mathematikunterricht, Darstellungen seiner Mitarbeiter in ihren Jubeljahren, Buchwertungen und Übersetzungen interessanter Aufsätze in der lokalen Zeitschrift *Obzornik za matematiko in fiziko — Rundschau für Mathematik und Physik*.

Professor Križanič schrieb seine mathematischen Texte in einem ganz neuen Stil im Vergleich mit anderen Verfassern. Seine Texte sind nämlich nicht langweilig oder saftleer, sondern geistreich, mit zahlreichen Bemerkungen und Ergänzungen, und manchmal sogar witzig. Trotzdem sind sie mathematisch ganz korrekt und ausgeschliffen. Er suchte sehr mutig nach entsprechenden Ausdrücken in seiner Muttersprache für neue Begriffe, die mit der Entwicklung der Mathematik kamen. Auf diese Weise wurde sein Beitrag zur slowenischen mathematischen Terminologie sehr bemerkenswert. Die ehemaligen Studenten erinnern sich noch immer gerne an seine immer interessanten und geistreichen Vorträge.

Im Laufe der letzten zehn Jahre vor seiner Pensionierung im Jahr 1996 lehrte er Mathematik für Studenten der Physik. In dieser Zeit beherrschte er TEX und PostScript so gut, dass er seine letzten Monographien samt den Abbildungen selbst gesetzt hat. Professor Križanič starb am 17. Jänner 2002 in Ljubljana. Zu seinem Nachlass gehören auch zwei Bücher: *Allgemeines und Einzelnes – Redereien und Weigerungen* (2003) – seine Autobiographie – und von ihm oft versprochene *Partielle Differentialgleichungen* (2004). Beide erschienen nach seinem Tod.

Und woher der Titel dieses Aufsatzes? In den eisernen Zeiten, wann die Universität wegen der damaligen politischen Verhältnisse nahe daran war, ihre Unabhängigkeit zu verlieren, gab Križanič in einer öffentlichen sehr gefühlvollen Rede seine berühmte Aussage (in freier Übersezung): *Wir haben keine Universität mehr und es ist besser, dass sie nicht existiert.* **Kniende und schweigende Universität** *ist eine nationale Schande, Schande für sie und Schande für denjenigen, vor dem sie kniet und schweigt.*

2 Professor Križanič — Bibliographie

2.1 Bücher und Skripten

1. *Kratkočasna matematika*, Ljubljana, MK, 1951. — **Zeitvertreibende Mathematik**.

2. *Križem kražem po matematiki*, Ljubljana, MK, 1960. — **Kreuz und quer durch die Mathematik**.

3. *Elektronski aritmetični računalniki*, Ljubljana, MK, 1960. — **Elektronische arithmetische Rechner**.

4. *Vektorji, matrike, tenzorji*, Ljubljana, MK, 1962. — **Vektoren, Matrizen, Tensoren**.

5. *Aritmetika, algebra in analiza – I. del*, Ljubljana, DZS, 1963. — **Arithmetik, Algebra und Analysis – Erster Teil**.

6. *Aritmetika, algebra in analiza – II. del*, Ljubljana, DZS, 1964. — **Arithmetik, Algebra und Analysis – Zweiter Teil**.

7. *Aritmetika, algebra in analiza – III. del*, Ljubljana, DZS, 1965. — **Arithmetik, Algebra und Analysis – Dritter Teil**.

8. *Aritmetika, algebra in analiza – IV. del*, Ljubljana, DZS, 1969. — **Arithmetik, Algebra und Analysis – Vierter Teil**.

9. *Operatorski račun in integralske transformacije*, Ljubljana, Univerza v Ljubljani, 1965. — **Operatorenrechnung und Integraltransformationen**.

10. *Vektorska in tenzorska analiza*, Ljubljana, MK, 1966. — **Vektor- und Tensoranalysis**.

11. *Linearna algebra in linearna analiza*, Ljubljana, MK, 1969. — **Lineare Algebra und lineare Analysis**.

12. *Funkcije več kompleksnih spremenljivk*, Ljubljana, IMFM, 1971. — **Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen**.

13. *Dinamični sistemi*, Ljubljana, Fakulteta za elektrotehniko, 1972. — **Dynamische Systeme**.

14. *Topološke grupe*, Ljubljana, IMFM, 1974. — **Topologische Gruppen**.

15. *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, Ljubljana, DZS, 1974. — **Gewöhnliche Differentialgleichungen und Variationsrechnung**.

16. *Liejeve grupe*, Ljubljana, DMFA, 1976. — **Lie-Gruppen**.

17. *Liejeve algebra*, Ljubljana, DMFA, 1978. — **Lie-Algebren**.

18. *Linearna algebra*, Ljubljana, DMFA, 1978. — **Lineare Algebra**.

19. *Ukročena Matematika – Zapoznelo opozorilo na računske zakone ali fižol namesto množic*, Presek **8** (1980/81) 5, Ljubljana, DMFA. — **Der Mathematik Zähmung – Eine vor den Rechengesetzen zu spät kommende Warnung oder Bohnen anstatt Mengen**.

20. *Matematika – prvo berilo*, Ljubljana, DZS, 1981. — **Mathematik – Erstes Lesebuch**.

21. *Matematika – drugo berilo*, Ljubljana, DZS, 1981. — **Mathematik – Zweites Lesebuch**.

22. *Matematika – tretje berilo*, Ljubljana, DZS, 1983. — **Mathematik – Drittes Lesebuch**.

23. *Matematika – četrto berilo*, Ljubljana, DZS, 1985. — **Mathematik – Viertes Lesebuch**.

24. *Linearna analiza na grupah*, Ljubljana, DZS, 1982. — **Lineare Analysis auf Gruppen**.

25. *Nihalo, prostor in delci*, Ljubljana, Slovenska matica, 1982. — **Pendel, Raum und Teilchen**.

26. *Temelji realne matematične analize*, Ljubljana, DZS, 1990. — **Grundlagen der reelen mathematischen Analysis**.

27. *Linearna algebra in linearna analiza*, Ljubljana, DZS, 1993. — **Lineare Algebra und lineare Analysis**.

28. *Vektorska in tenzorska analiza – abeceda globalne analize*, Ljubljana, DZS, 1996. — **Vektor- und Tensoranalysis – das Abc der globalen Analysis**.

29. *Splošno in posebno – nakladanja in otepanja*, Ljubljana, Studia humanitatis, 2003. — **Allgemeines und Einzelnes – Redereien und Weigerungen**.

30. *Parcialne diferencialne enačbe*, Ljubljana, DZS, 2004. — **Partielle Differentialgleichungen**.

2.2 Mathematische Aufsätze

1. *Kvadratura kroga*, Obzornik mat. fiz. **2** (1952) 3, S. 97-107. — **Quadratur des Kreises**.

2. *Enoliste konformne upodobitve*, Obzornik mat. fiz. **2** (1953) 5-6, S. 142-151. — **Einblattrige konforme Abbildungen**.

3. **Die Verallgemeinerung des du Bois-Reymondschen Lemmas der Variationsrechnung**, BSY Zagreb **2** (1955) 2, S. 42.

4. *O osnovnem lemma variacijskega računa*, Razprave SAZU Ljubljana, 1956, S. 21-33. — **Über Grundlemma der Variationsrechnung**.

5. *Linear functionals on Banach spaces and the fundamental lemma of the calculus of variations*, Publications de l'institute mathématique, Beograd X, 1956, S. 59-60. — **Lineare Funktionale im Banach-Raum und das Grundlemma der Variationsrechnung**.

6. *Peti Hilbertov problem*, Obzornik mat. fiz. **4** (1956) 3, S. 119-121. — **Hilberts fünftes Problem**.

7. *Spektralna teorija linearnih operatorjev v Hilbertovem prostoru*, Obzornik mat. fiz. **4** (1956) 4, S. 149-160. — **Spektrale Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum**.

8. *Osnovni pojmi teorije mrež*, Obzornik mat. fiz. **5** (1956) 2, S. 49-57. — **Grundbegriffe der Verbandstheorie**.

9. *O ločni dolžini gladkih krivulj in o površini gladkih ploskev*, Obzornik mat. fiz. **9** (1962) 1, S. 19-35. — **Über die Länge glatter Kurven und über den Flächeninhalt glatter Flächen**.

10. *Sodilo deljivosti in njegova usoda*, Obzornik mat. fiz. **9** (1962) 3, S. 134-135. — **Kriterium der Teilbarkeit und sein Schicksal**.

11. *Dinamično programiranje*, Obzornik mat. fiz. **21** (1974) 3-4, S. 86-93. — **Dynamische Programmierung**.

12. *Topološka dinamika*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 1-2, S. 48-72. — **Topologische Dynamik**.

13. *Raztegi in ulomki*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976) 5-6, S. 159-161. — **Streckungen und Brüche**.

14. *Preprosti zgledi iz topološke dinamike*, Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 1, S. 1-9. — **Einfache Beispiele aus topologischer Dynamik**.

15. *Geometrijska podoba odvoda*, Obzornik mat. fiz. **25** (1978) 1-2, S. 35-52. — **Geometrische Gestalt der Ableitung**.

16. *Znanstveno delo Ivana Vidava*, Obzornik mat. fiz. **25** (1978) 2, S. 71-86. — **Wissenschaftliche Arbeit von Ivan Vidav**.

3 Benutzte Literatur

1. F. Križanič, *Splošno in posebno – nakladanja in otepanja*, Ljubljana, Studia humanitatis, 2003.

2. P. Legiša, *Nekaj spominov na Franceta Križaniča*, Obzornik mat. fiz. **55** (2008) 5, S. 171-175.

3. M. Omladič, *Ob 80. obletnici rojstva Franceta Križaniča*, Obzornik mat. fiz. **55** (2008) 5, S. 167-171.

4. A. Suhadolc, *In memoriam prof. Francetu Križaniču*, Obzornik mat. fiz. **49** (2002) 3, S. 84-86.

5. Professor Križanič — Nachlass

Oscar Buneman (1913 - 1993) und die Anfänge der Computational Plasma Physics

Rita Meyer-Spasche,
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, EURATOM-Association,
D-85748 Garching, Germany; meyer-spasche@ipp.mpg.de

Oskar Bünemann wurde am 28. 9. 1913 in Mailand geboren, in eine bremisch-hamburgische Kaufmannsfamilie. Als Oskar Bünemanns Großeltern sich in La Habana auf Cuba kennenlernten und 1879 dort im deutschen Konsulat heirateten, waren E.W. HERMANN Bünemann (*1850 in Bremen) Zigarrenhändler und Elisabeth F. Michaelsen (*1852 in Hamburg) Lehrerin. Da die einfache Lehrers-Familie Michaelsen den Bünemanns nicht vornehm genug war und sie deshalb gegen die Ehe waren, fuhr Elisabeth allein nach Hamburg und gewann die Schwiegereltern für sich. Auf dem Rückweg nach New York - Cuba wurde ihr Schiff im Sturm schwer beschädigt und ging fast unter. Später kehrte die Familie nach Hamburg zurück, wo 1885 Oskars Vater August OSCAR geboren wurde und 1910 Elisabeth Hüffmeier (*1889 in Hamburg) heiratete. August OSCAR war zunächst Kaufmann in Mailand [23] und später Prokurist bei der Firma Hugo Hartig in Hamburg [1]. Der Mitinhaber der Firma, Dr.jur. Albert Cohen, wanderte 1933 mit Frau und zwei Kindern nach Belgien aus. Das spätere Schicksal der Familie ist unbekannt [20].

Oskar Bünemann wuchs in Hamburg auf, schloss 1932 als *primus omnium* die 'Gelehrtenschule des Johanneums' (humanistisches Gymnasium) ab und begann in Hamburg, Mathematik und Physik zu studieren. Studienziel: Doktorexamen, Staatsexamen, Höherer Lehrberuf [1, 23]. Er hatte als Student ein sehr persönliches Verhältnis zu *Prof Emil Artin (1898 - 1962)*. Man musizierte zusammen und hörte zusammen Musik. Das ging so weit, dass die beiden sich in den Wandelgängen der Universität gegenseitig musikalische Themen und Motive zupfiffen [26]. Als die Nazis zu einer Abstimmung für Deutschlands Austritt aus dem Völkerbund aufriefen, druckte Oskar Bünemann zusammen mit seinem jüdischen Kommilitonen *Kurt Mehrgut* Plakate: *'Austritt aus dem Völkerbund bedeutet Aufrüstung und KRIEG – stimmt mit NEIN!'* und klebte sie nachts an Hauswände im Uni-Viertel.[1] Denunziert durch den Untermieter der Familie Mehrgut, wurde der noch nicht ganz

[1] 'In einem mit Reichstagswahlen verbundenen Plebiszit über den Austritt stimmten am 12. Nov. 1933 nach offiziellen Angaben über 95% der Deutschen mit 'Ja'.' [25].

volljährige Oskar Bünemann am 10.04.1934 von der Gestapo verhaftet und unwiderruflich von der Universität verwiesen. Es folgten Untersuchungsgefängnis und Prozess, Verurteilung zu eineinhalb Jahren Jugendstrafe, Haft im Jugendgefängnis Hahnöfersand und Entlassung am 4.09.1935. Als er 1935 ganz überraschenderweise *vorzeitig*[2] aus der Haft entlassen wurde und einen Pass bekam, um nach England emigrieren zu können, wandten sich Oskars Eltern an den Zahlentheoretiker Prof Artin, der ihn an den Zahlentheoretiker *Prof Louis Mordell (1888 - 1972)* in Manchester empfahl. An der dortigen Universität lernte Oskar Bünemann die damals politisch gleichgesinnte *Mary Behrens* kennen, die aus einer gutbürgerlichen Manchesteraner Kaufmannsfamilie stammt. Die zwei heirateten 1942. 1943 nahm er die englische Staatsbürgerschaft an und änderte seinen Namen in *Oscar Buneman* [16, 23, 26, 27]. Diese Namensänderung erleichterte der Anglo-Welt, ihn beim korrekten Namen zu nennen. Tatsächlich hat es die Variante 'Buneman' aber auch schon im 17. Jahrhundert in Norddeutschland gegeben (siehe z.B. [29]).

An der Universität Manchester erhielt er einen B.Sc. in Mathematics und einen M.Sc. in Applied Mathematics[3] mit einer Arbeit über nichtlineare Differentialgleichungen. Nach Ausbruch des 2. Weltkrieges im September 1939 wurde er aus der Arbeit an seiner Promotion bei *Douglas Hartree (1897 - 1958), FRS,* herausgerissen und zusammen mit anderen Ausländern in ein Lager in Canada gebracht. *Thomas Gold (1920 - 2004)*, ein anderer Internierter, sagte später: 'He and (Sir Herman) Bondi were the prime movers in the camp university and I certainly learnt a lot more from them than I would have, had I remained in Cambridge for those nine months' [17].

Hartree erreichte durch einen Brief, dass Oscar Buneman nach etwa 9 Monaten nach Manchester zurückkehren konnte [19, p.136], um für das Britische Militär in Hartrees Magnetron-Gruppe mitzuarbeiten. Dabei mag geholfen haben, dass Hartree bei *Ernest Rutherford (1871 - 1937)*, dem 1. Präsidenten des *Academic Assistance Council*, promoviert hatte und in der Arbeitsgruppe des Vizepräsidenten Archibald V. Hill im 1. Weltkrieg an *anti-aircraft ballistics* gearbeitet hatte. Die 1933 gegründete Emigranten-Hilfsorganisation *Academic Assistance Council* hat die Internierung deutscher Hitler-Flüchtlinge als *feindliche Ausländer* mehrfach im Britischen Parlament zur Sprache gebracht und die Vergeudung von Können und Talent angeprangert.[4] Besonders aktiv war Prof. *Archibald V. Hill (1886 - 1977)*, Nobelpreisträger in Physiologie, Member of Parliament for Cambridge University, Secretary of the Royal Society [18].

Nach Manchester zurückgekehrt, schloss O. Buneman 1940 seine Promotion ab und arbeitete anschließend zusammen mit Hartree, dem Lehrer David Copley und *Phyllis Lockett Nicolson (1917 - 1968)* an der selbst-konsistenten numerischen Simu-

[2] Sein Mitstreiter Kurt (Georg) Mehrgut, (*31.03.1914 in Hamburg, Absolvent des Johanneums, immatrikuliert für SoS 1932, WS 1932/33 (Nr. 24.233) und WS 1933/34 (Nr. 26.988) in der Medizinischen Fakultät der Uni HH, im SoS 1933 an der Uni Innsbruck), war bis 1936 in Haft. 1936 Flucht nach Prag, 1937 Flucht nach Holland, deportiert 1941, ermordet im KZ Mauthausen am 10.09.1941 [28, 30].

[3] Die Grenzen zwischen Angewandter Mathematik und Theoretischer Physik verlaufen anders als die zwischen Applied Mathematics und Theoretical Physics, deshalb wird hier nicht übersetzt.

[4] 'Kinder sterben, weil fehlende fähige Ärzte interniert sind!'

lation von Elektronenbahnen in Magnetrons [11, 19]. Ihre Ergebnisse waren äußerst wichtig für das bessere Verständnis von Magnetrons und damit für die Entwicklung der MikroWellenTechnik. Sie waren entscheidend für die Entwicklung der Radar-Technik. *'It has often been said that while the atomic bomb ended the war, radar won it'* [13]. Hartree war so sehr Avantgarde bzgl. der Benutzung von Computern, dass er 1947 seine Antrittsvorlesung in Cambridge über den Einfluss von Computern auf die Mathematische Physik hielt. Zum allgemeinen Thema wurde dies erst um 1970 [21].

Ab 1944 arbeitete Buneman als Mitglied der britischen Gruppe am Manhattan Projekt im Lawrence Berkeley Lab: numerische Simulation von Ionen-Bahnen zwecks Trennung von Uran-Isotopen im CALifornia University cycloTRON [17]. 1945 wechselte er zum kanadischen Reaktor Projekt und 1946 bis 1950 arbeitete er im AtomEnergie-ForschungsZentrum Harwell, UK mit mehreren mathematischen Modellen für Neutronendiffusion.

1950 bis 1960 war er Mitglied im Peterhouse College in Cambridge und *lecturer for mathematics* an der Universität Cambridge. Er arbeitete weiterhin über Magnetrons und an numerischen Methoden und hatte häufigen Kontakt zu Douglas Hartree, der 1946 bis 1958 an der U Cambridge Prof of Mathematical Physics war. Vor allem aber wandte O. Buneman sich Fragen der Plasmaphysik zu: Grundlagen-Fragen zu Strahlen und Strömungen geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern, aber auch elektromagnetischen Phänomenen in kosmischen Plasmen. Persönlich von *Hannes Alfvén (1908 - 1995)* eingeladen, nahm er 1956 in Stockholm am *Symposium on Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics* der *International Astronomical Union* teil. Die auf dieser Tagung entstandenen persönlichen Kontakte waren für ihn und für die Entwicklung der Plasmaphysik in den folgenden Jahren sehr wichtig. Hannes Alfvén und Oscar Buneman reisten auch zusammen im Zug durch Europa, um für mehr Forschung über Plasmen, Teilchenstrahlen und elektromagnetische Effekte im Weltraum zu werben.

In den folgenden Jahren entdeckte O. Buneman mehrere Instabilitäten: während seines Sabbatical-Aufenthaltes 1957-58 an der Stanford University unabhängig von D. Farley die heute nach 'Farley-Buneman' benannte Instabilität und 1959 die 'Buneman-Instabilität' [2]. Auch die 'slipping stream'-Instabilität entdeckte er, übernahm dann aber den Namen 'diocotron-Instabilität' von den französischen Kollegen.

1960 bis 1984 war er Prof of Electrical Engineering an der Stanford University. In Stanford begannen mehrere sehr fruchtbare Kooperationen: * mit Strahlenphysikern, die die Buneman-Instabilität in der Magnetosphäre der Erde entdeckten und mit denen er dann über Whistler-Wellen arbeitete; * mit dem Numeriker *Gene Golub (1932 - 2007)* im Stanford Computer Science Department, mit dem er ein gemeinsames Seminar abhielt und auch gemeinsam den Doktoranden Roger Hockney betreute [3, 4, 5, 6]; * mit C.W. Birdsall's Plasma Simulationsgruppe an der UC Berkeley; * mit den Computational Fluid Dynamics Leuten vom NASA Ames Forschungszentrum; * mit den Plasma-Fusions Forschern am Lawrence Livermore National Lab.

Nach seiner Emeritierung blieb er weiterhin beruflich aktiv: 21 papers und KonferenzBeiträge in den Jahren 1985 bis 1992, die insgesamt 340 mal in den von ISI erfassten Medien zitiert wurden [24]. Im Sommer 1993 sollte er den Plenums-Eröffnungsvortrag auf dem IEEE Plasma Meeting halten. Da er am 24. Januar 1993 starb, hielt stattdessen *Bruce Langdon* einen Vortrag zu seinem Gedenken [14]. Er starb an Krebs.

In den Jahren 1994 bis 1996 erschienen noch 6 Artikel, bei denen O. Buneman als KoAutor genannt ist (36 Zitierungen) [24]. Insgesamt sind bei ISI 103 Zeitschriftenartikel und Konferenzbeiträge aufgelistet, aus der Zeit 1950 bis 1996. Reports (wie z.B. [5]) und Beiträge in Büchern (wie z.B. [11]) fehlen in dieser Zählung.

Oscar Buneman hatte vier Söhne: O. Peter Buneman, FRS, ist Mathematiker - Informatiker und Prof. an der University of Edinburgh. Nach ihm sind die Buneman-Graphen [7] und der Buneman-Levy Algorithmus benannt. Michael Buneman lebt in Madrid, Kelvin in Berlin und Paul in Californien.

Nachrufe: [12, 13, 14, 15, 16, 17]. Einige Zitate daraus:

'He was a marvellous companion in those trying times. He was one of the very few non-Jewish refugees from Nazi oppression in the camp. Evidently he had strong principles and saw the Nazi hell that was being created.' Thomas Gold, Physiker, über Oscar Buneman im Lager in Kanada 1939 - 1940, [17].

'When a subject seized his interest, he threw himself into it – mind, body, and soul. It was not enough that he, himself, was excited about it; he insisted on exciting equal enthusiasm for it in his colleagues' [17, p.2].

Ehrungen: Fellow of the American Physical Society (1948); Fellow of the Cambridge Philosophical Society (1950); 'Founder of the particle simulation of plasmas and of the PIC methods' [8].

Oscar Buneman Awards:[5] die werden regelmäßig auf den *International Conferences on the Numerical Simulation of Plasmas (ICNSP)* für die aufschlussreichsten (most insightful) Visualisierungen (still und bewegt) verliehen, erstmals 1998 auf der 16-ten ICNSP in Santa Barbara [22].

Dank Ich danke allen, die mich mit Fragen, Antworten oder Anregungen unterstützt haben, insbesondere Gertrud Bünemann [26], Michael Buneman [27], Eckart Krause [28], Christian Lauckner [23, 26], Alexander Odefey Uni Hamburg und Annette Vogt MPI für Wissenschaftsgeschichte. Christa Binder gebührt besonderer Dank für Themenstellung und Organisation der Tagung.

Literatur

[1] Universität Hamburg: *Karteikarte des Studenten Oskar Bünemann*, heute (2010) im *Zentrum für Studierende*; mehrere Einträge: 18.04.1932: Antrag auf

[5]Sowohl der Titel 'Founder of the particle simulation methods' als auch die 'Oscar Buneman Awards' wurzeln in der Aufsehen erregenden Arbeit [2], die er später so kommentierte: *'...the publication of two pages of graphic computer output in* Physical Review*, showing electron and ion space-time orbits, made quite a stir.'* [11, p.61]. In den von ISI erfassten Medien wurde sie bis heute 607 mal zitiert [24].

Einschreibung, von Oskar Bünemann ausgefüllt (Nr. 24.241); 15.03.1934 (Ende des WS): Datumstempel ganz oben über der ersten Zeile; 28.05.1934: Exmatrikel erteilt; 1.06.1934: Personalpapiere abgeholt (Unterschrift des Vaters).

[2] O. Buneman (1959): Dissipation of currents in ionized media. Phys. Rev. **115** 503 - 517;

[3] Roger W. Hockney (1965): *A fast direct solution of Poisson's equation using Fourier analysis*, J. Assoc. Comput. Mach. **12**, p. 95

[4] Roger W. Hockney (1966): *The Computer Simulation of Anomalous Plasma Diffusion and the Numerical Solution of Poisson's Equation*, PhD Thesis, Computer Science Dept. Stanford U.

[5] O. Buneman (1969): *A Compact Non-Iterative Poisson Solver* SUIPR-Report No 294, 11 pages, Stanford University, Institute for Plasma Research,

[6] B.L. Buzbee, G.H. Golub, C.W. Nielson (1970): On direct methods for solving Poisson's equation, SIAM J Numer Anal **7**, p. 4

[7] O. Peter Buneman (1971): The recovery of trees from measures of dissimilarity, in: F.R Hodson, D.G Kendall, P.T Tautu, **eds.**, *Mathematics in the Archaeological and Historical Sciences*, Edinburgh University Press, pp. 387 - 395 .

[8] R.W. Hockney, J.W. Eastwood (1981, 1988): *Computer Simulation using Particles*, 540 pages, McGraw Hill (1981); Hilger Bristol (1988);

[9] F. Nebeker (1988) 'The ACM Conference on the History of Scientific and Numeric Computation, Princeton 1987', Annals of the History of Computing, vol. 10, no. 1, pp. 69-73,

[10] *A History of Scientific Computing*, S.G. Nash, **ed**, ACM Press 1990; (Proceedings of the conference reported about in [9])

[11] Oscar Buneman (1990): Particles in their self-consistent fields: From Hartree's Differential Analyzer to Cray Machines, in: [10, pp. 57-62];

[12] Ronald N Bracewell (Jan/25/93): Oscar Buneman, email message in NA Digest of Jan. 31, 1993, Volume 95, Issue 5, `http://www.netlib.org/na-net/`

[13] Stanford University News Service (01/26/93): Oscar Buneman, pioneer of computer simulation of space, dies at 79; archived release, `http://news.stanford.edu/pr/93/930126Arc3435.html`

[14] Bruce Langdon (1993): Remembrances of Oscar Buneman. `http://www.physics.ucla.edu/icnsp/buneman.htm`

[15] R.N. Bracewell, R.A. Helliwell, A.M. Peterson (1993): MEMORIAL RESOLUTION, OSCAR BUNEMAN (1914 - 1993) `http://histsoc.stanford.edu/pdfmem/BunemanO.pdf`

[16] Joachim W. Schmidt (1993): Oscar Buneman; In: *Uni HH - Berichte und Meinungen aus der Universität Hamburg*, hrsg. vom Präsidenten der Universität Hamburg, **24** 1993 Nr.2, S. 53-54

[17] Ruth Buneman, R.J. Barker, A.L. Peratt, S.H. Brecht, A.B. Langdon, H.R. Lewis (1994): A Tribute to Oscar Buneman – Pioneer of Plasma Simulation; IEEE Transactions on Plasma Science **22**, no 1

[18] Jean Medawar, David Pyke (2001): *Hitler's Gift. The True Story of the Scientists Expelled by the Nazi Regime*, Arcade Publishing

[19] Charlotte Froese Fischer (2003): *Douglas Rayner Hartree*, World Scientific, New Jersey

[20] Verein zur Erforschung der Geschichte der Juden in Blankenese: *Namensliste*, Stand Sept. 2005; `http://www.viermalleben.de/4xleben/namensliste.htm`

[21] R. Meyer-Spasche (2006): Einige Anmerkungen zum Einfluß von Computern auf Mathematik und Physik, in: *Von der Tontafel zum Internet. Der Einfluß des Mediums auf die Entwicklung der Mathematik*, Christa Binder, **ed.**, TU Wien, pp. 171 - 174;

[22] *International Conferences on the Numerical Simulation of Plasmas (ICNSP)*, `http://icnsp09.ist.utl.pt/buneman.php`

[23] `http://www.waldesnacht.de/publik/`, Version 24. März 2010: öffentlich zugänglicher Teil der Familienchronik der Familien Bünemann, Lauckner et al. mit Einträgen bzgl. mehr als 2200 Personen, ab 1536

[24] `http://www.isiknowledge.com/`, Version 12. Mai 2010, ISI Web of Knowledge - Science - Thomson Reuters

[25] Stiftung Haus der Geschichte der BRD: Der Austritt Deutschlands aus dem Völkerbund, Version 19. Mai 2010, `http://hdg.de/lemo/html/nazi/aussenpolitik/voelkerbund/index.html`

[26] persönliche Mitteilungen von Christian Lauckner über ein Telefongespräch mit Gertrud Bünemann (*18.04.1920), Schwester von Oscar Buneman, Oberstudienrätin i.R., ehemals Musiklehrerin des Helene-Lange-Gymnasiums in Hamburg,

[27] persönliche Mitteilungen von Michael Buneman, Sohn von Oscar Buneman und Mary Behrens, Stiefsohn von Lord Brian Flowers (1924 - 2010), FRS

[28] persönliche Mitteilungen von Eckart Krause, Arbeitsstelle und Bibliothek für Universitätsgeschichte, Universität Hamburg

[29] Rostocker Hausgeld-Register der 1.-11. Fahne 1685, Version 28.07.2010, `http://www.vigerust.net/by/rostock1685_hausgeld.html`

[30] Stolpersteine in Hamburg, 28.07.2010, `http://www.stolpersteine-hamburg.de`

Die Stelle der Mathematik in Griechenland nach der Befreiung des Landes (1827): Das Beispiel der Kyparissos Stephanos (1857-1917).

Christine Phili

Einleitung

Während der Zeit, in der Ioannis Kapodistrias (1777 – 1831) Staatshalter war, und nach der Befreiung des Landes im Jahr 1827 machte die Bildung grosse Fortschritte. Kapodistrias war ausdrücklich gegen[1] die Gründung der Universität oder der Akademie, weil die Wiederorganisation des Landes nur Volksschulen[2] und Gymnasien[3] verlangte. Doch die Gründung der Militärischen Schule[4] nach dem Modell der französischen Polytechnischen Schule in Nafplion, 1829, zeigte deutlich, dass die Notwendigkeit bestand, höhere Institutionen im neu gegründete Staat einzurichten.

II. Die Entwicklung der Mathematik im neuen Staat.

Während eines Besuches in Paris (Oktober 1827) erbat der griechische Politiker Kapodistrias von der französischen Regierung einige Offiziere als Staatsräte.[5] Der Name von J. H. Pauzié[6] (1792-1848), Hauptmann der Artillerie wurde in den ersten Jahren mit der Militärischen Schule in Verbindung gebracht. Er organisierte zuerst eine Schule der Artillerie,[7] in der Mathematikunterricht vorrangig war. Leider war diese Schule nur von kurzer Dauer.

Am Ende 1828 akzeptiere Kapodistrias Pauziés Antrag, eine Polytechnische Militärische Schule zu gründen. Diese Schule began am 1 Juli 1829 mit dreijährigem Studium. J.H. Pauzié lehrte Mathematik nach dem Programm de l' École Polytechnique und erste Uebersetzungen von Carandinos[8] wurden bei den Vorlesungen der: Geometrie, Eléments de Géométrie, Wien 1829 (von Legendre), Arithmetik, Eléments d' Arithmétique, Wien 1829 (von Bourdon), Trigonometrie, Traité de Trigonométrie, Korfu 1830 (von Legendre)[9] eingesetzt.

---

[1] Siehe Projekt von Alexander Sturza im Buch von D. Antoniou, *The beginnings of the educational plan in the new Hellenic State. The project of the Committee in 1833*. Athen 1992 s. 193 (auf griechish).

[2] Es bestehen 71 Volkschulen mit 6.000 Schülern. Die Uebersetzung des Buches *Manuel des Écoles élémentaires ou exposé de la méthode d' enseignement mutuel von Ch. Sarazin* (1830) hat bei der Volkslbildung eine wichtige Rolle gespielt.

[3] Kapodistrias gründete 1829 in Agina das erste Gymnasium nach dem Modell der französischen École Centrale, mit 500 Schülern, eine Kirche Seminar auf der Insel Poros und eine landwirtschaftliche Schule in Argos.

[4] Siehe E. Stasinopoulos, *Geschichte der militärischen Schule (1828-1953*) Athen 1954 (in griechischer Sprache).

[5] Unter ihnen waren: A. Th. Garnot, der Geograph J. P. Peytier, beide von der französischen Polytechnischen Schule und S. Voulgaris, von den Ionischen Inseln stammend.

[6] Siehe A. Fourcy, *Histoire de l' École Polytechnique.* ed Belin Paris 1987 s. 441.

[7] Sie bestand nur fünf Monate und wurde spätter, Anfang 1929, in die Zentrale Kriegschule eingegliedert.

[8] S. Ch. Phili, La reconstruction des mathématiques en Grèce: l' apport de Ioannis Carandinos (1748-1834*). L' Europe Mathématique* Paris 1996 s. 305-319.

[9] S. Ch. Phili, Mathematics and Mathematical Education in the University of Athens from its foundation to the beginning of the XXth century. *Archives Internationales d' Histoire des Sciences* Vol. 51 2001 s. 74-98.

Der erste Professor für Mathematik, Dimitri Despotopoulos, lehrte zu Anfang auch bei den "Vorsprechenden". Er hatte an der Ionischen Akademie mit Ioannis Carandinos studiert,[1] welcher ihn erwähnte. Laut Programm der militärischen Schule, unterrichtet er Arithmetik, Geometrie und Algebra.

Als Otto von Bayern (1815-1867), aus dem Haus Wittelsbach den Thron bestieg (1834), nach dem Meuchenmord von Kapodistrias 1831, begann in Griechenland eine neue und schwierige Periode. König Otto fing für die Militärische Schule eine neue Epoche an.

Professor G. L. Mauer, Mitglied der Regentschaft[2] (1833-1835), hatte ein Projekt zur Gründung einer Universität erarbeitet, aber als König Otto volljährig wurde, nahm er Armanspergs Vorschlag nicht an. Wahrscheinlich wollte König Otto, um die Epoche seiner Regierungszeit hervorzuheben, seinen Namen mit der neuen Institution in Verbindung bringen. Die Ottonische Universität[3] wurde nach dem deutschen Muster organisiert, wo der *ordo philisophicus* die drei Fakultäten des Departments der Philosophie beinhaltete. Die Athener Universität hatte ausländischen Einfluss. Der deutsche Einfluss ist nicht zu übersehen: Seit der Gründung der Universität bis 1922 hatten von den 261 Professoren 57% in deutschsprachigen Ländern studiert, 26% in französisch sprachigen Ländern und 4% in beiden Ländern. Vor allem war der deutsche Einfluß an der philosophischen Fakultät vorherrschend. 43 hatten in Deutschland, 6 in Frankreich, 3 in England und nur 3 in Griechenland studiert.

Diese neue Institution, einzigartig im Osten, war unter mannigfaltigem Druck unter Regierungskontrolle. Natürlich waren die ersten Wissenschaftler, welche in grosser Anzahl der neuen Institution angehörten, die Griechen der Diaspora. So waren die ersten Mathematikprofessoren Constantin Negris (1804-1880), aus der Polytechnischen Schule (Jahrgang 1829) und Georg Vouris (ca. 1750-1860) aus Wien.

Trotz der unermesslichen Schwierigkeiten, wie das Fehlen von neuen methodisch didaktischen Büchern, zahlreichen Vorlesungen,[4] wenigen Studenten, politischer Unbeständigkeit (die Regierungszeit von König Otto war sehr unpopular), hatten die Pioniere der Ottonischen Universität zwei grosse Vorhaben zu vollbringen: Erzieher für die Gymnasien auszubilden und gleichzeitig die hervorragenden Studenten nach Westeuropa, vor allem nach Frankreich oder nach Deutschland, zu schicken, damit sie später die neuen Professoren wurden, und auf diese Weise erneuerte sich die Professorenschaft.

Unter den bayerischen Offizieren war der Aristokrat, Oberleutnant Ritter Friedrich von Zentner, den König Ludwig von Griechenland erwählt hatte. Der Ritter,

[1] Ch. Phili, Ioannis Carandinos (1784-1834), L' initiateur des mathématiques françaises en Grèce. *Archives Internationales d' Histoire des Sciences* 2007 s. 79-124.

[2] Otto war noch minderjährig.

[3] Während der ersten Periode (1837-1864) führte sie diesen Namen. Mit der neuen Dynastie (aus dem Haus der Glücksburg – Hohenzollern) wurde die Universität Nationale Universität genannt (1863-1911) und von (1911-1922) lautete sie Nationaluniversität und später die Kapodistrtische Universität. Schliesslich wurde 1922 daraus die Nationale und Kapodistrische Universität. Der Titel besteht bis heute.

[4] Ausser den klassischen Vorlesungen, wie Algebra, Geometrie, Differential und Integralrechnung, Mechanik Astronomie, hatten die Studenten auch andere Vorlesungen wie: Geologie, Mineralogie, Chemie, Zoologie, Psychologie, Geschichte, Logik, Philosophie, Metaphysik, griechische und lateinische Literatur. Hier müssen wir betonen, dass die grösste Erneuerung die Vorlesungen über Euklid, Archimedes, Apollonius waren, und zwar aus Originaltexten auf altgriechisch.

mit grossem Kulturgut in den Künsten, Wissenschaften und militärischen Wissenschaften, schlug 1836 die Gründung einer Technischen Schule vor.

Am 31. Dezember 1836 gründete König Otto daraufhin mit einer königlichen Verordnung am 12. Januar 1837 die Technische Hochschule[1] nach dem Modell der königlichen Schule für Bauwerk in München und der Technischen Schule in Lyon, La Martinière.[2]

Der Unterricht, elementare Mathematik, Architektur und Zeichenkunst wurde an der Polytechnischen Schule[3] nur an Sonntagen[4] und Feiertagen gehalten. Also in den Tagen, an deren die Handwerker nicht arbeiten. Ab 1840 erweiterten sich die Vorlesungen auf neue Bereiche zu denen Arithmetik, Geometrie, Maschinenkonstruktion, Architektur, Wachs – und Gipsplastiken, Skizzieren, Aufriss und Schönschreiben zählten.

Nach dem 3. September 1843, dem Beginn der griechischen Konstitution, wurden ausländische Professoren abgesetzt, unter ihnen auch von Zentner und andere bayerische Handwerksmeister [z.B der dänische Architekt Theophilos Hansen[5] der von 1837 bis 1843 an der Polytechnischen Schule unterrichtete].

Im Wirklichkeit basiert die Entwicklung der Mathematik in Griechenland (1837-1920) auf die Anstrengungen einiger geistvollen Professoren welchen mit Enthusiasmus, Eifer und Wille den Schwierigkeiten entgegentreten, nach Carandinos "Einleitung" in die zeitgenössische Mathematik.

III. Das Beispiel der Kyparissos Stephanos (1857-1917)

Kyparissos Stephanos bildet ein ausgezeichnet Beispiel für Griechenland.

[1] Siehe F. von Zentner, *Das königreich Griechenlands in Hinsicht auf Industrie und Agrikultur. Gesammelte Notizen von Ritter Friedrich von Zentner Königlich* – bayerischer Kammerjunker und Oberleutnant, Ritter des Königlich – griechischen Erlöserordens und Mitglied mehrerer Industrievereinen des In-und Auslandes .München 1844.

[2] Nach dem Namen ihres Stifters General Claude Martin.

[3] Nach dem Namen der franzoesischen Polytechnischen Schule oder nach dem griechischen Wort πολύ (viel) und τέχνες (Kuenste).

[4] Wir müssen betonen, dass 1836 diese Institution deswegen die Sonntagschule genannt wurde.

[5] Später baute er in Wien die Akademie der schönen Künste, das Parlament, den Saal des Musikvereins und die Börse.

Aber wer war Kyparissos Stephanos? Am Anfang des 20. Jahrhunderts war Kyparissos Stephanos ein sehr bekannter Mathematiker in Europa.[1] Wir müssen auch betonen, dass Stephanos Mitglied von einigen internationalen Komittees wie das Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques unter Poincaré Präsident, oder der Unterrichtung der Mathematik mit F. Klein als Präsident wurde. Er zeigt in der Entwicklung der Mathematik merkwürdige Initiativen wie z.B. eine Übersetzung ins Französische des Erlanger Programms, zehn Jahren vor H. Padé. Leider wurde Mittag-Leffler trotz Poincaré Unterstützunge, dieser Publikation in *Acta Mathematica* untersagt.

Kyparissos Stephanos, welchen Blaschke als genial[2] bezeichnete, hatte die Hochachtung seiner Kollegen, während seines Aufenthalts in Paris (1878-1884) und in seiner gesamten Lebenzeit.

Seine Forschungen in Algebra und Geometrie in berühmten Zeitschriften wurden schnell bekannt, F. Klein, G. Darboux und D. Hilbert beziehen sich systematisch auf diese.

F. Klein widmente ihm einen Paragraph in seinem Buch *Vorlesungen über höhere Geometrie*[3] (Das Pentacykl der Stephanos) und bezieht sich auch auf ihn in *Vorlesungen über das Ikosaeder*.[4]

G. Darboux hatte Stephanos in Sorbonne als Student und bezieht sich auf ihn in seinem Buch *Cours de Géométrie analytique*.[5]

Wir wissen, dass Hilberts erste Forschungen in Invariantentheorie waren. Hilbert 1885 mit der Dissertation über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen promovierte, und 1886 habilitierte sich mit einer Arbeit über invariantentheoritische Untersuchungen in binären Formengebiet.

Auch auf diesem Gebiet hatte Stephanos guten Ruf, der junge Hilbert bezieht sich auf Stephanos Artikeln.[6]

---

[1] Siehe V.V. Bobynin, Entsiklopedicheskii Slovar' Brokganza I Efrona t. XXXIA Sankt Petersburg 1901 s. 636; [Ohne Namen], Cyparissos Stephanos, *Gaceta de Matématicas* Madrid, Marzo-Abril-Mayo 1905 s. 61-64. Wir bedanken Prof. J. Llombart für diese Information. Siehe auch A.J. Oettingen, "Stephanos, Kyparissos" in *Poggendorff's Biographische Litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der Exacten Wissenschaften*, Vierter Band 2 voll. Leipzig, Verlag von Johann Abrosius Barth II 1904 ss. 1291-1292; P. Weinmeister, "Stephanos, Kyparissos *in Poggendorff's Biographisch Litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der Exacten Wissenschaften* Band V 2 voll. Leipzig Berlin Verlag Chemie II 1926 s. 1206.

[2] Siehe W. Blaschke, *Ueber die Beitrag die alte und neuere Griechenland in der mathematische Wissenschaft Aufstieg*. Konferenz des 13 April 1938. Bericht der griechische mathematische Gesellschaft Bd. 19 A΄ s. 172 (auf griechisch).

[3] Dritte Auflage bearbeitet und herausgegeben von W. Blaschke. Berlin Springer Verlag 1926 s. 121-123.

[4] Leipzig 1884 s. 5.

[5] Paris 1917 s. 165.

[6] D. Hilbert, Ueber binäre Formenbüsche mit besonder Kombinanteigenschaft: "Diese Formel ist auf den Wege symbolischer Rechnung bereits von C. Stephanos gefunden worden" vgl. Dessen Abhandlung "Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne". *Mémoires présentés par divers savants à l' Institut de France* Bd. 27 s. 32. D. Hilbert, *Ges. Abh*. 2e Aufl. Band II Berlin 1934 s. 123. Siehe auch sein Artikel: Ueber Büchsel von binären Formen mit vogeschiebener Funktionaldeterminante "Das gekenzeichnete Probleme hat in neuer Zeit vielfaches Interesse erweckt, aber nur in dem einfachsten Fällen v=3 und u=4 durch C. Stephanos und A. Brill erfolgreiche Bahandlung gefunden." D. Hilbert idem s. 164. Hilbert zitiert in diesen selben Artikel: "Ein weiterer Forschritt ist die Berechnung dieser Anzahl durch A. Mayer, H. Schubert und C. Stephanos und er beziehnt sich auf Stephanos Thèse d' État. Er belonet er "Bernits Stephanos hat auf eine allgemeine Bedingung aufmerksam gemacht welche für die beide Formen φ_1 und φ_2 gilt und eine Folge der Relation (3) ist "idem s. 168. Am Ende Hilbert unterstreicht: "Dieselbe Werte findet Stephanos mittels

Später bringt Hilbert neue Bergriffe hinein, zeigt neue Lehrsätze wie den Nullstellensatz, und erneuert diese Theorie.

H. Minkowski gratuliert seinem Freund in einem Brief (9 Febr. 1892) für seine neue Forschungen und ohne Bedenken, stellt Stephanos neben P.A. Gordan (1837-1912). Aber Minkowski, der Stephanos beim Züricher Mathematiker-Kongress getroffen hat, glaubt dass sein Freund einen neuen Gesichtpunkt in diese Theoriegebracht hat:

"Jetzt, wo Du in Deinen letzten Satze sogar das rauchlose Pulver gefunden hast, nachdem schon Theorem I nur noch vor GORDANS Augen Dampf gab, ist es wirklich an der Zeit, dass die Burgen der Raubritter STROH, GORDAN, STEPHANOS und wie sie alle heissen mögen, welche die einzelreisenden Invarianten überfielen und in's Burgverliess sperrten, dem Erdboden gleich gemacht werden, auf die Gefahr hin, dass aus diesen Ruinen niemals wieder neues Leben spriest".[1]

Während seines Aufenthalts in Paris, wo Stephanos seine Thèse d' État mit Hermite vorbereitet, arbeitet er auch wie ein Archivar in der französischen mathematischen Gesellschaft. Auf diesem Posten hat er die internationalen Verhältnissen zwischen Mathematikern ausführlich zu erörten. Er war auch Taufzeuge (Parrain) für Poincaré, S. Kowaleska und S. Lie in der französischen mathematischen Gesellschaft.

Als er nach Athen zurückkehrte wurde er 1884 als Professor erwählt und durch seinen Unterricht[2] Stephanos bildet die neue Generation der Mathematiker, welche international den Land Ehren brachten. Seinen vornehmen Studenten P. Zervos (1878-1952), G. Remoundos (1878-1952) und N. Hadjidakis (1872-1942) werden zusammen arbeiteten um die Zeitgenössischen mathematische Theorien weiter zu tragen in ihre Heimat am Anfang des 20ten Jahrhunderts.[3]

Aber in Athen der unermüdlich Forscher verwandelt sich in einen methodischen Organisator, welcher ein neuer Mentor auf dem Gebiete der Technik werden möchte. Diese Idee war formuliert 1892 in der griechischen biotechnischen Gesellschaft. Diese Gesellschaft hat als Ziel, die Handwerker auf höchster Ebene zu bringen. Die Gegenstände waren: Arithmetik, Geometrie, Physik, Naturgeschichte, Chemie, Freihandzeichen, geometrisches und technisches Zeichen, Modellieren und Bauhandwerk. Stephanos nimmt als Sekretär teil am ersten Internationalen Congress des Technischen Unterrichts in Paris am Anfang des 20. Jahrhunderts. In seineBericht[4] erklärt er den Status der Gesellschaft und er hat einige Bauten der Handwerker Schüler in die Ecole des Beaux-arts als Geschenk gemacht.

Stephanos begründet auch 1902 die erste Handels-schule und einige Universität Professoren unterrichten ehrenamthich.

---

direkter Rechnung" idem s. 170 und "Diese Invariante k. wurdet zuerst von C. Stephanos behandlet" idem.

[1] *Hermann Minkowski Briefe an David Hilbert.* Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1973 s. 45.

[2] I. Hadjidakis (1844-1921) aus Kreta nach seiner These unterstütze, uber die linearen und homogenen differenzialen Gleichungen, fortsetz seines Studium zu erst in Paris (1868-1869) und dann in Berlin (1869-1873) wie er selbst erklärte besuchte (als Hörer) die Vorlesungen von: Kronecker, Kummer und Weierstrass. Als er nach Athen zurückehrte wurde er auch 1884 als Professor erwählt und er bemerkte schnell das Fahlen der didaktischen Büchern auf jedem Niveau, so er anfangt zu vervollständigen diese Lücke.

[3] S. Ch. Phili, The formation of the mathematical community in Grece at the turn of the XIXth Century. Berichten des Internationalen Kongresses der Geschichte der Wissenschaften, Stadt der Mexico July 2001. http://www.smhct.org/proceedingsxxiichs.htm.

[4] Congrès International de l' Enseignement Technique, Commercial et Industriel 6-11 Août 1900 Paris Librairie Nony p. 203.

Er war auch der erste Ecologist in Griechenland (er hat die Gesellschaft der Freunde des Waldes gegründet), und der erste Gewerkschaftler für die Professoren der Volks und Ober-Schulen. Durch Stephanos als Präsident haben die Professoren eine Dauerstellung bekommen.

Stephanos ist sehr gebildet, er hat französische Bildung, kennt die berühmten französischen Intitutionen und ihren wissenschaftlichen Einfluss. Natürlich hatte Griechenland keine Möglichkeit ähnliche Institution zu begründen. Aber Stephanos, welcher immer beitragen wollte, seine Heimat zu entwickeln, initiierte eine griechische "Ecole Normale" für die Professoren der Volks- und Ober-Schulen. 1910 wurde diese Schule gegründet und arbeitet bis jetzt.

Griechenland hatte keine Tradition Forschung zu betreiben mit seiner politischen Unbeständigkeit und mit seinem Fehlen von Geldmitteln. Die Entwicklung der Mathematik war eine herkulische Arbeit. Stephanos war ein grosser Organisator, welcher seine Karriere als Forscher verlor.

Er war gegen die Begründung der Griechischen Mathematischen Gesellschaft weil er glaubte dass zu erst müssen wir gute Mathematikern haben und dann erst könne eine solche Gesellchaft gegründet warden.

Stephanos war ein wirklicher Weltbürger und er hatte die Möglichkeiten berühmte Mathematiker der 19. und 20. Jahrhunderts zu kennen. Er war Mitglied der Deutschen Mathematiker Vereinigung, der Französischen Mathematischen Gesellschaft, Korrespondierendes Mitglied der Circolo Matematico di Palermo, Mitglied der Redaktion der Rendiconti, der l' Enseignement Mathématique, Mitglied des Coimbra Institut (gegründet in 1852 wie Akademie), Mitglied in dem Komitte der International Gesellschaft für Handelsunterricht.

Money, money money und ein "schreiender Mangel". Die Besetzung des Mathematiklehrstuhls an der Universität Jena im 19. Jahrhundert

Karl-Heinz Schlote (Leipzig)

Im Jahre 1802 wurde dem seit 1789 als ordentlicher Professor für Mathematik an der Universität Jena tätigen Johann Heinrich Voigt (1751-1823) der Lehrstuhl für Physik übertragen. Dies war zu diesem Zeitpunkt keine Besonderheit, gehörten doch in der Tradition des 18. Jahrhunderts viele Teile der Physik als Teilgebiete zur angewandten Mathematik. Doch für fast acht Jahrzehnte sollten dann die beiden Disziplinen in einer Professur vereinigt sein. Wer auch nur einen groben Eindruck von der Entwicklung der Mathematik und Physik im 19. Jahrhundert hat, weiss dass zu diesem Zeitpunkt, also um 1880, die Vertretung der beiden Fächer in Lehre und Forschung nicht mehr von einer Person geleistet werden konnte. Nur an der Universität Rostock herrschte noch eine ähnliche Situation. Was waren die Ursache für diese Entwicklung? Haben die Philosophische Fakultät und die anderen Gremien der Universität Jena bzw. die zuständigen Regierungen die Fortschritte in der Wissenschaftsentwicklung ignoriert und nicht für eine angemessene Repräsentation der Mathematik und Physik gesorgt? Im Folgenden soll der mühevolle Weg zur Einrichtung von getrennten Professuren für Mathematik und Physik an der Alma mater Jenensis skizziert werden.

Die Einrichtung der Professur für Mathematik und Physik und die Ära Fries

Was waren die Gründe für die Zusammenlegung der Professuren für Mathematik und Physik? 1801 starb der ordentliche Professors für Physik Laurenz Johann Daniel Suckow (1722-1801). Dieser hatte gleichzeitig die Kameralwissenschaften gelehrt, so dass sich die Philosophische Fakultät vor die Aufgabe gestellt sah, künftig in angemessener Weise für eine Repräsentation der beiden Fächer an der Salana zu sorgen. Da Voigt schon in den vorangegangenen Jahren auch Vorlesungen zur Physik gehalten hatte, erschien es der Philosophischen Fakultät die einfachste Lösung, die Physik an Voigt zu übertragen, die vakante Professur in einen neuen Lehrstuhl für ökonomische und Kameralwissenschaften zu verwandeln und so den Fortbestand dieses für die Universität wichtigen Lehrgebietes zu sichern. Sie unterbreitete einen entsprechenden Denominationsbericht und führte zur Begründung die „ihrer Natur nach" enge Verbindung der beiden Fächer Mathematik und Physik an und folgerte daraus, „daß der Fall einer dereinst wieder nothwendig werdenden Trennung nicht eintreten kann".[1] Voigt hatte die Professur bis zu seinem Tode 1823 inne.
Bei der Wiederbesetzung der Professur hielt die Fakultät an der Zusammenfassung der Mathematik und Physik in einer Professur fest. Es wurde kein Dokument gefunden, ob die Frage einer Trennung beider Fächer überhaupt diskutiert wurde. Zu diesem Zeitpunkt war es noch nichts ungewöhnliches, wenn die Mathematik und Physik miteinander oder mit anderen Fächern verknüpft waren.
Die Fakultät äußerte sich im Denominationsbericht zur Möglichkeit, einen Jenenser Hochschullehrer zu berufen. Die Dozenten Johann Friedrich Christian Werneburg (1777-1851) und Ludwig Wahl (1793-1831) schieden aus. Mit Jakob Friedrich Fries (1773-1843) verfügte die Fakultät jedoch über einen „einheimischen Gelehrten", der „dieser Stelle vollkommen würdig" sei und, wie seine Werke zum System der theoretischen Physik, zur Astronomie und zur mathematischen Naturphilosophie[2] und die Tätigkeit an der Universität Heidelberg zeigten,

[1] Universitätsarchiv Jena, M 215, Bl. 63
[2] Entwurf des Systems der theoretischen Physik zum Gebrauche bey seinen Vorlesungen. Mohr und Zimmer, Heidelberg 1813; Populäre Vorlesungen über die Sternkunde gehalten zu Heidelberg im

“gründliche physikalische und mathematische Kenntnisse [...] mit den philosophischen“ verbinde.[3] Wenn die Erhalter der Universität Fries diesen neuen Wirkungskreis zuweisen würden, so wäre dies zum „größten Vortheil“ der Universität, doch wisse die Fakultät nicht, ob derselbe „nicht wieder in seinem früheren Wirkungskreise der Philosophie thätig auftreten“ solle. Außerdem benannte die Fakultät noch vier auswärtige Gelehrte: den Breslauer Professor für Mathematik Heinrich Wilhelm Brandes (1777-1834), den Ordinarius für Naturwissenschaften an der Universität Tübingen Gustav Schübler (1787-1934), den ehemalige Jenenser und damalige Professor für Physik an der Bonner Universität Carl Dietrich von Münchow (1778-1836) und den Gießener Professor für Physik Georg Gottlieb Schmidt (1768-1837).
Der Weimarer Großherzog berief Fries, fortan waren somit Mathematik und Physik noch mit der Philosophie verknüpft.
In seiner mathematischen Naturphilosophie, die Fries in den folgenden Jahre weiterentwickelte, wies er der Mathematik eine zentrale Rolle zu. Er bestimmte „alle menschliche Wissenschaft [als] *Naturwissenschaft*“. „Alle unsere wissenschaftliche Erkenntniß [betreffe] diese Unterordnung der Erscheinungen in der Sinnenwelt unter ihre Gesetze“.[4] „Jedes wissenschaftliche Ganze“ war nach Fries „aus *Philosophie*, *Mathematik* und *Empirie* zusammengesetzt“.[5] Die Mathematik bildete einen Grundpfeiler bei der Erkenntnisgewinnung in den Naturwissenschaften. Sie schrieb „allen Naturlehren mit Nothwendigkeit die obersten Gesetze der Bewegung und der Grundkräfte, durch welche alles bewirkt wird, so wie die obersten Formen aller Processe, unter denen die körperlichen Stoffe in Wechselwirkung kommen, vor.“[6] Von diesem allgemeinen philosophischen Standpunkt aus präsentierte Fries dann einen systematischen und in sich schlüssigen Überblick über die Mathematik, seine Vorstellungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung seien noch besonders hervorgehoben.

Die Nachfolge Fries

Am Anfang des Jahres 1843 erkrankte Fries schwer und verstarb im August desselben Jahres. Die Philosophische Fakultät hielt an der Vertretung der Physik und Mathematik durch eine Professur fest, eine Entscheidung, die zumindest retrospektiv fragwürdig erscheint. Nach vier Sitzungen einigte sie sich am 17. Oktober auf einen Denominationsbericht, in dem an erster Stelle der Berliner Extraordinarius Heinrich Wilhelm Dove (1803-1879) und an zweiter der Leipziger Professor August Ferdinand Möbius (1790-1868) als Nachfolger vorgeschlagen wurden. Beides waren bedeutende Gelehrte, was sich die Fakultät durch Gutachten von dem Physiker Wilhelm Weber (1804-1891), dem Astronom Peter Andreas Hansen (1795-1874) und dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) hatte bestätigen lassen. Zuvor hatte die Fakultät betont, dass Fries Mathematik und Physik auf „gleich ausgezeichnete Weise“ vertreten habe und aus diesem Grund keiner der Jenenser Dozenten für das Fries’sche Ordinariat in Frage käme. Überzeugt, einen der beiden Kandidaten für das Ordinariat gewinnen zu können, verzichtete die Philosophische Fakultät auf eine klare Entscheidung bezüglich eines dritten Kandidaten und fügte lediglich noch eine Liste von sieben weiteren Wissenschaftlern an, die in Betracht kamen. Diese waren, in der Reihenfolge ihrer Nennung, die Professoren Heinrich Buff (1805-1878) aus Gießen, Wilhelm Eisenlohr (1799-1872) aus Karlsruhe, Christian Ludwig Gerling (1788-1864) aus Marburg, Johann August Grunert (1797-1872) aus Greifswald, der Weimarer Gymnasiallehrer und Fries-Schüler Ludwig Kunze (1805-1890),

Winter 1811 auf 1812. Mohr und Zimmer, Heidelberg 1813; Die mathematische Naturphilosophie nach philosophischer Methode bearbeitet. Ein Versuch. Mohr und Winter, Heidelberg 1822

[3] Universitätsarchiv Jena, A 675, Bl. 4v

[4] Fries Die mathematische Naturphilosophie nach philosophischer Methode bearbeitet. Ein Versuch. Mohr und Winter, Heidelberg 1822, S. 1

[5] Ebenda, S. 4

[6] Ebenda, S. 32

der Breslauer Professor Georg Friedrich Pohl (1788-1849) sowie der ehemalige Dresdener Gymnasiallehrer Karl Snell (1806-1886).[7]

Neben diesem Bericht der Philosophischen Fakultät reichte der Prof. Wilhelm Karl (Carl) Friedrich Suckow (1770-1848) Ende Oktober 1843 ein Separatvotum ein und betonte, wie unzeitmäß die Vereinigung von Mathematik und Physik in einer Professur war.:

„Nach dem Standpunkt, welche die genannten Wissenschaften [Mathematik und Physik] gegenwärtig einnehmen und nach dem Umfang, welchen sie in der neuern Zeit erlangt haben, möchte es wohl schwerlich gelingen, einen Gelehrten zu finden, der <u>gleich</u> <u>gründliche</u> und <u>umfaßende</u> <u>mathematische</u> und physicalische Kenntnisse in sich vereint und der geeignet ist, in beiden auf eine dem Universitäts-Zweck entsprechende Weise als Lehrer aufzutreten. Daher ist auch, Jena allein ausgenommen, auf allen mir [W. K. Fr. Suckow] bekannten übrigen Universitäten, die Lehrstelle der Mathematik von der der Physik getrennt und selbst in Jena hat die Vereinigung beider Professuren erst seit meines Vaters Tode [Lorenz Johann Daniel Suckow] bestanden. Wer den Forderungen, die man an einen Lehrer der Physik zu stellen berechtiget ist, genügen soll, kann, zumal bei den in neuerer Zeit so raschen Fortschritten dieser Wissenschaft und bei der Nothwendigkeit fortgesetzter [sic!], nicht zugleich auch Mathematiker von gleicher Bedeutsamkeit sein und umgekehrt.“[8]

Friedrich Suckow unterliefen in seiner Argumentation zwar einige Fehler und bei der von den Physikern verwendeten Mathematik hatte er auch keine höhere Mathematik im Blick, doch ist seine Begründung im Wesentlichen korrekt. Suckow untermauerte sein Votum dadurch, dass er die von der Philosophischen Fakultät genannten Kandidaten entsprechend ihrer Lehr- und Forschungstätigkeit entweder als Mathematiker (Grunert, Möbius, Kunze) oder als Physiker (Dove, Pohl, Eisenlohr) klassifizierte und folgerte, dass sie entsprechend der Forderung der Fakultät nicht den Anforderungen entsprächen beide Disziplinen zu vertreten. Abschließend erwähnte er das Fehlen von Jenenser Kandidaten im Denominationsbericht und brachte seinen Sohn Gustav Suckow ins Spiel, der aufgrund seiner langjährigen Lehrtätigkeit und seiner einschlägigen Veröffentlichungen für die Stelle qualifiziert sei. Letzterer hatte sich bereits zuvor an das Staatsministerium in Weimar gewandt und um Berücksichtigung bei der Wiederbesetzung der Professur gebeten.[9]

Das Weimarer Ministerium folgte den Vorschlägen der Fakultät und hat seinerseits die Trennung beider Professuren vermutlich nicht erwogen, was angesichts der knappen Finanzen verständlich erscheint. Für den neuen Stelleninhaber wurde auch ein deutlich geringes Gehalt eingeplant, als es Fries zum Schluss bezogen hatte. Entgegen der Erwartung der Philosophischen Fakultät lehnten die beiden Erstgenannten die Berufung ab. Daraufhin beschloss das Weimarer Ministerium auf Drängen des Meininger Herzogs, die ursprüngliche Liste aufzugeben und erneut die Meinung der Philosophischen Fakultät einzuholen. Insbesondere sollte die Fakultät zu Karl Snell Stellung nehmen, zu dessen Gunsten zwei Empfehlungsschreiben eingegangen waren. In diesem Prozess rückte nun Karl Snell an die erste Stelle. Der Senat der Universität und der interimistisch agierende Kurator Andreas Gottlieb Hoffmann (1796-1864) schlossen sich der Fakultätsmeinung an. Am 21. März berichtete Hoffmann an das Ministerium: „Snell scheint alles in sich zu vereinigen, was von dem zu berufenden Professor nur irgend gewünscht werden kann, und man darf sich zu ihm versehen, daß er die von ihm vertretenen Fächer bei uns wieder recht in Aufnahme bringen würde. Er hat auch auswärts einen sehr geachteten Namen, was bis jetzt bei Kunze nicht der Fall ist. Sein Eintritt in das hiesige Lehrerpersonal wäre ein würdiger Ersatz für den Geheimen Hofrath Fries [...]“[10] Diese ein-

[7] Thüringer Staatsarchiv Altenburg (ThStAABG), Geheimes Ministerium, 1667, Bl. 40-43
[8] ThStAABG, Geheimes Ministerium, 1667, Bl. 44-44v, Hervorhebung im Original
[9] ThStAABG, Geheimes Ministerium, 1667, Bl. 53-54
[10] ThStAABG, Geheimes Ministerium, 1667, Bl. 63v

seitig positive Beurteilung von Snell unterschied sich deutlich von der von der Fakultät ein halbes Jahr zuvor abgegebenen, als Snell nur einer von sieben Kandidaten war.
Die Verhandlungen mit Snell führt rasch zum Erfolg, Anfang April 1844 nahm er den Ruf zum ordentlichen Professor für Mathematik und Physik an und begann noch während des Sommersemesters mit den Vorlesungen. Snell hatte sich dem Wunsch nach schnellstmöglichen Beginn der Vorlesungen kaum entziehen können, da die Philosophische Fakultät ihm am 28. April 1844 mit der Ehrenpromotion die „nöthigen akademischen Grade" verliehen und ihm so den Start der akademischen Karriere erleichtert hatte.[11] Außerdem unterstützte ihn auch das interimistische Kuratel der Universität speziell hinsichtlich einer besseren Ausrüstung für die physikalischen Vorlesungen. Snell bemühte sich nach besten Kräften um einen zeitgemäßen modernen Unterricht in Mathematik und Physik und wurde dabei zeitweise von Dozenten unterstützt. So in den Jahren bis 1848 von Oskar Schlömilch (1823-1901), der dann aus finanziellen Gründen eine Stelle an einem Realgymnasium in Eisenach annahm und wenig später an das Dresdner Polytechnikum wechselte. Mit Fries teilte Snell das Interesse an der Philosophie, ohne ein Anhänger von dessen Naturphilosophie zu sein.
Der ab März 1850 als Privatdozent wirkende Hermann Schaeffer (1824-1900), einer der ersten Schüler von Snell, konnte jedoch die durch den Weggang von Schlömilch entstandene Lücke nicht schließen.

Kurator Seebeck und die Bemühungen um die Aufteilung des Lehrstuhls

Zunehmend wurden nun Defizite in der Vertretung der Mathematik und Physik spürbar. Da aber die notwendigsten Vorlesungsverpflichtungen abgesichert waren, bot sich der Philosophischen Fakultät kaum eine Gelegenheit, eine Änderung herbeizuführen. Eine Verbesserung der Situation bedeutete stets die Einrichtung einer weiteren Professur. Dies hätte man auch inhaltlich sehr gut mit den inzwischen erzielten Fortschritten der beiden Disziplinen begründen können, doch angesichts des geringen Etats bedurfte es weiterer Gründe, damit ein solcher Antrag Erfolg haben konnte. Ab Mitte der 1850er Jahre versäumte speziell der neue Kurator der Universität keine Gelegenheit, um auf dieses Manko hinzuweisen. Moritz von Seebeck (1805-1884) hatte 1851 sein Amt als Kurator angetreten und zu seinen ersten Aufgaben gehörte es, einen langfristigen Haushaltsplan der Universität aufzustellen, der unter Einhaltung der geringen finanziellen Möglichkeiten der Herzogtümer allen dringenden Bedürfnissen der Alma Mater Jenensis gerecht werden sollte. Seebeck legte dazu 1854 mit dem „Generalbericht" ein umfassendes Programm vor, das die Lage der Universität Jena so verbessern sollte, „um im Wettlauf mit ihren besser dotirten und somit bevorzugten Schwesternanstalten auch ausdauernd zu bestehen".[12] Er scheute sich dabei nicht, nachdrücklich darzulegen, dass dies nicht ohne zusätzliche Finanzmittel erreicht werden könne. Hinsichtlich der Mathematik und der Physik hielt er eine Vertretung durch je eine Professur als unumgänglich, wobei er die Fortschritte der Physik und die Bedeutung dieses Faches für die naturwissenschaftlichen Untersuchungen in anderen Gebieten besonders betonte. Gleichzeitig würdigte er den wichtigen Beitrag, den junge Dozenten für die vielfältige und niveauvolle Gestaltung des Lehrplanes an der Salana leisteten, und hielt dies auch künftig für unverzichtbar. Die Professuren für Mathematik und Physik gehörten für ihn neben anderen zur notwendigen Grundausstattung. Obwohl Seebeck nur die seiner Meinung nach notwendigsten Maßnahmen in seinem Programm formuliert hatte, erwies es sich als zu ambitioniert. Hier soll nur auf die weitere Entwicklung des mathematisch-physikalischen Lehrstuhls eingegangen werden.

[11] Universitätsarchiv Jena, M 304, Bl. 140, 197, 324
[12] ThStAABG, Geheimes Ministerium Nr. 1522, unpaginiert, Generalbericht des Curators der Großherzoglich und Herzoglich Sächs. Gesammt-Universität über den Zustand und die Bedürfnisse derselben nebst dem Entwurf eines Normal-Etats der academischen Lehrbedürfnisse vom 7 März 1854

Snell und Schaeffer haben in den folgenden Jahren den Unterricht in den beiden Fächern nach besten Kräften bestritten. Seebeck hat 1860 im Zusammenhang mit dem Antrag auf eine Gehaltserhöhung von Schaeffer, 1870/71 in Verbindung mit dem Antrag auf eine einmalige Renumeration für Ernst Abbe (1840-1905) bzw. in seinem Bericht über die für die Lehrzwecke der Universität nächstnötigen Mehraufwendungen, 1872 in dem Bericht zu der im Rahmen einer Neuregelung der Universitätsfinanzen zusätzlich verfügbaren Mittel sowie 1874 in seinem Bericht zum Universitätsetat für 1875 auf die notwendige Aufteilung der Professur hingewiesen. In dem Bericht über die nötigen Mehraufwendungen hieß es beispielsweise: „Bei der philosophischen Facultät ist es, wie ich schon öfters aus anderen Anläßen vorgestellt habe, ein schreiender Mangel, daß der Lehrstuhl der Physik, diesen vornehmsten und vorgeschrittensten naturwissenschaftlichen Disciplin, die allein auch zu einer streng methodischen Naturforschung zu schulen vermag, hier noch mit dem der Mathematik combinirt ist.“ Dies gilt insbesondere, „nachdem beide Disciplinen sich viel umfänglicher entwickelt und für wichtige practische Interessen eine viel weiter reichende Bedeutung gewonnen haben“.[13]
Mitte der 1870er Jahre verschärfte sich die Situation. Snell hatte sich für das Sommersemester 1874 zur Wiederherstellung seiner Gesundheit beurlauben lassen und war wiederholt in den folgenden Jahren krank. Die Vertretung der Mathematik und Physik lastete zu diesem Zeitpunkt auf den Schultern der Extraordinarien Schaeffer und Abbe sowie des Privatdozenten Gottlob Frege (1848-1925). Hatte das Weimarer Ministerium 1872 Seebecks Vorschlag noch ignorieren und der Errichtung einer Professur für Pädagogik den Vorrang geben können, so verstärkte sich durch Snells Krankheit die Notwendigkeit, die Besetzung der Professur neu zu regeln. 1874 hatten die Regierungen zunächst das dringende Bedürfnis festgestellt, die Mittel zur Unterhaltung der Universität Jena erheblich zu verstärken, ohne jedoch schon zu konkreten Maßnahmen zu kommen. Im Jahre 1877 hieß es dann in dem Ministerialdekret als Ergebnis der Beratungen des Etats für die Finanzperiode 1878/80 „Was zunächst die nöthige Vermehrung der Lehrstühle anbelangt, so erfordert die so hoch gesteigerte Bedeutung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Studien die Begründung einer besondern ordentlichen Professur für Physik neben der bisher mit ihr verbundenen Mathematik und die Ausstattung derselben mit einem Uebungsinstitute.”[14] Der Finanzausschuss bestätigte diese Aussage, doch dies bedeutete noch nicht, dass die notwendigen Finanzmittel bereit standen. Es sei noch darauf hingewiesen, dass das Interesse hier stets vorrangig der Physik galt.

Die Errichtung eines mathematischen Ordinariats

Ursprünglich hatten die Mitglieder der Philosophischen Fakultät die Vorstellung, dass Snell weiterhin auf dem Gebiet der Mathematik lehren sollte, während der neue Ordinarius für die physikalischen Vorlesungen sorgt. Die Realisierung sah dann doch anders aus. Nachdem Snell auf Grund seiner Krankheit bereits ein Jahr lang keine Vorlesung hatte halten können, wandte er sich im Februar 1879 an den Dekan mit der Bitte, im Ministerium die Berufung eines Ordinarius für Mathematik zu beantragen. Der gegenwärtige Zustand könne nicht ohne empfindliche Schädigung der Universität länger fortbestehen.[15] Für eine Physikprofessur wäre ohne die Errichtung eines entsprechenden Instituts kaum ein Kandidat zu gewinnen. Außerdem wollte Snell, falls er wieder in die Lehrtätigkeit eintreten könne, die allgemeine Physik lesen. Der Dekan und die Fakultät griffen die Anregung auf und formulierten einen entsprechenden Antrag an die Regierungen, wobei sie einige Argumente von Snell verstärkten. So würden „die für das mathematisch-physikalische Fach an unserer Universität vorhandenen

[13] ThStAABG, Gesamtministerium Nr. 1059, unpaginiert, Bericht des Curators vom 21. Dezember 1871 (korrigiert 1870)
[14] ThStAABG, Gesamtministerium Nr. 1061, unpaginiert, Auszug aus Ministerialdekret vom 20. Januar 1877
[15] Universitätsarchiv Jena, M 621, Bl. 32-34

Lehrkräfte seit längerer Zeit den gegen früher sehr gesteigerten Anforderungen auf diesem Lehrgebiete nicht mehr genügen" und die „Universität kaum noch eine den heutigen Ansprüchen genügende wissenschaftliche Ausbildung auf diesem Felde darzubieten vermöge[n]."[16] Außerdem könnten die Pflichten in der Lehrerausbildung nur noch unvollkommen erfüllt werden. Schließlich begründete die Fakultät noch ihr Abweichen von früheren Anträgen und betonte, dass man auch auf eine baldige vollständige Vertretung der Physik hoffe. Der Kurator charakterisierte den Antrag der Philosophischen Fakultät als wohl begründet, unterstützte ihn nachdrücklich und betonte, dass die Errichtung der Professur so dringend sei, und dass diese, obschon eine dauernde Belastung des Etats, nicht von der Feststellung des nächsten Finanzplanes abhängig gemacht werde könne.[17] Diesmal waren die Bemühungen von Erfolg gekrönt. Die Regierungen der Erhalterstaaten stimmten der Errichtung der Professur zu und forderten die Philosophische Fakultät zu Vorschlägen auf. Diese nominierte als Kandidaten: 1. Johannes Thomae (1840-1921) (Universität Freiburg), 2. Aurel Voß (1845-1931) (Polytechnikum Darmstadt) und 3. Jakob Lüroth (1844-1910) (Polytechnikum Karlsruhe), wobei Thomae wegen seiner vielseitigen Forschungen und seiner besonderen Eignung für die Jenenser Bedürfnisse auf den ersten Platz gesetzt worden war. Schließlich erneuerte die Fakultät noch ihre Bitte, um „baldigste Anstellung eines ordentlichen Professors der Physik".[18] Am 6. Juni 1879 schickte Kurator August von Tuercke (1818?-1884) nach der Zustimmung durch Prorektor und Senat das Fakultätsschreiben mit seiner Befürwortung an das Kultusministerium in Weimar.[19] Dabei machte er noch die für die weitere Entwicklung der Mathematik in Jena wichtige Anregung, mit der Professur zugleich ein mathematisches Seminar zu errichten.[20] Thomae nahm den Ruf an und am 10 Juli 1879 erfolgte nach ministerieller Verfügung die formale Berufung durch die Universität. Er trat die Stelle zum Beginn des Wintersemesters 1879/80 an. Gleichzeitig nahm das mathematische Seminar mit 15 Teilnehmern seine Arbeit auf.[21]

Mit der Berufung Thomaes hatte die Philosophische Fakultät einen ersten wichtigen Schritt getan, um einen seit langem bestehenden Missstand zu beseitigen, und de facto eine eigenständige Repräsentanz von Mathematik und Physik durch je einen Lehrstuhl erreicht. Als ein grundlegendes Hemmnis für die vollständige Beseitigung dieses Missstandes und bei der Anpassung des Lehrbetriebs an die Fortschritt der beiden Wissensgebiete erwies sich die ungenügende finanzielle Ausstattung der Alma Mater Jenensis. Auch die Begründung eines separaten physikalischen Lehrstuhls musste wegen unzureichender Finanzmittel auf einen späteren Zeitpunkt verschoben werden. Der Aufschwung von Mathematik und Physik an der Jenaer Universität wurde letztlich vor allem durch die unerwartete Hilfe von Außen möglich. Im Januar 1881 vermachte der Altenburger Finanzrat Ernst Ludwig Reichenbach (1789-1881) in Form der Reichenbach-Stiftung der Universität ein beachtliches Vermögen. Dies ermöglichte 1882 die Schaffung eines Physikordinariats und dessen Besetzung. Gleichzeitig einigten sich die Regierungen der Erhalterstaaten auf die Finanzierung des Institutsbau für die Physik. In den folgenden Jahren haben die Reichenbach-Stiftung und vor allem die 1889 gegründete Carl Zeiss-Stiftung beträchtliche Mittel zur Förderung von Mathematik und Physik bereitgestellt und einen neuen Abschnitt in der Entwicklung von Physik und Mathematik eingeleitet.

[16] ThStAABG, Gesamtministerium Nr. 1301, Bl. 6-7
[17] ThStAABG, Gesamtministerium Nr. 1301, Bl. 2-3
[18] Universitätsarchiv Jena, BA 438, Bl. 141v-142v.
[19] ThStAABG, Gesamtministerium Nr. 1301, Bl. 18-20
[20] ThStAABG, Gesamtministerium Nr. 1301, Bl. 19v-20
[21] ThStAABG, Gesamtministerium Nr. 1490, Bl. 1

The translation and the use of Euler's Algebra in Brazil[1]

Circe Mary Silva da Silva[2]

Context in the 19th Century

At the beginning of 19th Century, when the Portuguese Royalty arrived in Brazil, we didn't have a system of education. We didn't have secondary school, press, library, etc. Prince João VI created a lot of institutions, and important was the Military Academy in 1810. In September 1808, the *Gazeta of Rio de Janeiro* was the only newspaper that regularly circulated in Rio de Janeiro. In this newspaper the people could read news of England, Portugal, France, Germany and other countries, but only a few from Brazil. We can say the newspaper didn't express people's life. There was not news about political controversy in the country. It seems Brazil was a paradise.

Using the metaphor of Ricceur (2007) to bring the absent to the present, we have tried reading and interpreting a textbook – *Elements of Algebra* of Leonhard Euler – from the "absent" context of nineteen -century colonial Brazil to convey to the "present" an image of what an able translator managed to imprint from the paradigmatic work of Leonhard Euler - considered one of the most representative of the eighteenth century mathematicians in Europe. We will treat, in this text, the textbook that became an important reference to understanding the teaching of mathematics at university-level education of military personnel and engineers in the nineteen -century Brazil.

Euler's Book

Ginzburg believes that a great part of an investigative work is the search for tracks that stay in the path and that we might call clues, which allow us to slowly surround our object, pulling the end of the thread to unravel the skein. The road we

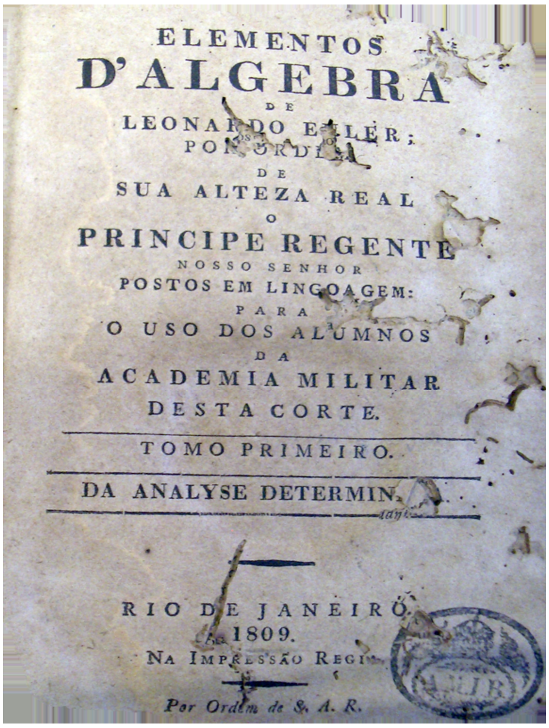
[1] I would like to thank the CAPES for its financial support to participate at X. ÖSTERREICHISCHES SYMPOSION ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK.

[2] Circe Mary Silva da Silva is a Professor of the Post-graduation Program in Education at the Federal University of Espírito Santo.

have traveled has been a little like this: we had the information through secondary literature[3] that there was a translation into Portuguese of the Elements of Algebra by Leonhard Euler.

We searched for this book for several years in second-hand book stores, collections of university libraries and also in the National Library of Rio de Janeiro. Along the way, we found many copies of Lacroix's books, both original and French translations, which show the importation of books to have been a common practice, as well as evidence of its use in the country.

The discovery of a copy dated 1809, in the Biblioteca de Obras Raras[4] (Library of Rare Books) at Federal University of Rio de Janeiro, in 2006, proved the existence of a translation. When handling the book we could not help noticing its poor condition (Figure 1).


ELEMENTOS
D'ALGEBRA
DE
LEONARDO EULER;
POR ORDEM
DE
SUA ALTEZA REAL
O
PRINCIPE REGENTE
NOSSO SENHOR
POSTOS EM LINGOAGEM:
PARA
O USO DOS ALUMNOS
DA
ACADEMIA MILITAR
DESTA CORTE.
TOMO PRIMEIRO.
DA ANALYSE DETERMIN.
RIO DE JANEIRO.
1809.
NA IMPRESSÃO REGIA.
Por Ordem de S. A. R.

ELEMENTOS
D' ALGEBRA
DE
LEONARDO EULER;
POR ORDEM
DE
SUA ALTEZA REAL
O
PRÍNCIPE REGENTE
NOSSO SENHOR.
POSTOS EM LINGUAGEM
PARA
OS ALUNOS
DA
ACADEMIA MILITAR
DESTA CORTE.
TOMO PRIMEIRO.
DA ANÁLISE DETERMINADA.

RIO DE JANEIRO

1809
NA IMPRESSÃO RÉGIA

POR ORDEM DE S. A. R.

Fig. 1: Translation of the book *Elements of Algebra* of Leonhard Euler

To analyze the translation's process it is necessary to ask some questions: Why was interest aroused into translating this work into Portuguese, at a time when

[3] Several authors have made comments on the existence of the translation into Portuguese, among them, CAMARGO, AMA; MORAES, R. B.
[4] http://www.ct.ufrj.br/bor/

the Brazilian press had only just started up? Where was it used? Were there new editions of this work? Who did this translation? How was this translation used?

The first question is not difficult to answer, because it is in the Law, that created the Academy. The Royal Charter for the establishment of the Royal Military Academy[14] specified in detail, in its Title II, the programs and books that would be adopted in the various chairs.

> The first year's professor will teach arithmetic, algebra up to equations of the third and fourth degree, Geometry, Linear Trigonometry, and in addition giving also the first notions of Sphere. Since students will not be accepted by the board without knowing the first four arithmetic operations, the professor would teach algebra, while limiting himself as much as possible to the famous Euler's method, in his same science elements, under which the Lacroix principles and Arithmetic and Algebra, will form the textbook for his course and then explain the excellent Geometry, Legendre's Linear Trigonometry, also giving the first ideas of spherical trigonometry, thus covering also the principles of a very interesting Course on Mathematics, which seek to make all the students understand the beauty and extension of the algebraic calculation with potencies, exponential quantities, logarithmic, and calculations of annuities, as well as acquainting them with the formulas of trigonometry that will show its broad applications, working hard to exercise them in the various problems and trying to develop that such a creative spirit, in the mathematical sciences that leads to more discoveries. (Letter of the Law of December 4, 1810).

Although the cover page of the translation into Portuguese shows the date 1809, it is believed that it had not been published until 1811. Moreover, the newspaper *Gazeta do Rio de Janeiro* the only newspaper that regularly circulated in Rio de Janeiro, announced all the publications by *Impressão Régia*. All the editions of *Gazeta do Rio de Janeiro* were analyzed since its first issue in 1808, until 1813. We found in one of the editions, dated April 24, 1811, a small note that "[...] new release: *Elements d'Algebra* by Leonardo Euler" (fig.2)

6.ª	4$640	19$360		75$410	99$410
Granadeiros.	18$000	17$800	3$280	108$400	147$480
Caçadores.		6$720		11$520	18$240
Ditas de Henriques.	1$280	17$025			18$305
Somma.	165$680	205$185	27$760	640$090	1:038$715

José Joaquim da Cunha de Azeredo Coutinho de Sousa,
Coronel.

Sahírão á luz: *Elementos d'Algebra de Leonardo Euler; por Ordem de S. A. R. o Principe Regente nosso Senhor, postos em lingoagem para o uso dos Alumnos da Academia Militar desta Côrte, Tom. I.º, da Analyse Determinada.* Vendem-se nas Casas de Paulo Martin, filho, na rua da Quitanda; e de Manoel Jorge, na rua do Rozario, a 1$600 reis.

RIO DE JANEIRO NA IMPRESSÃO REGIA.

Fig. 2 Newspaper Gazeta do Rio de Janeiro, 24/01/1811

The Translator

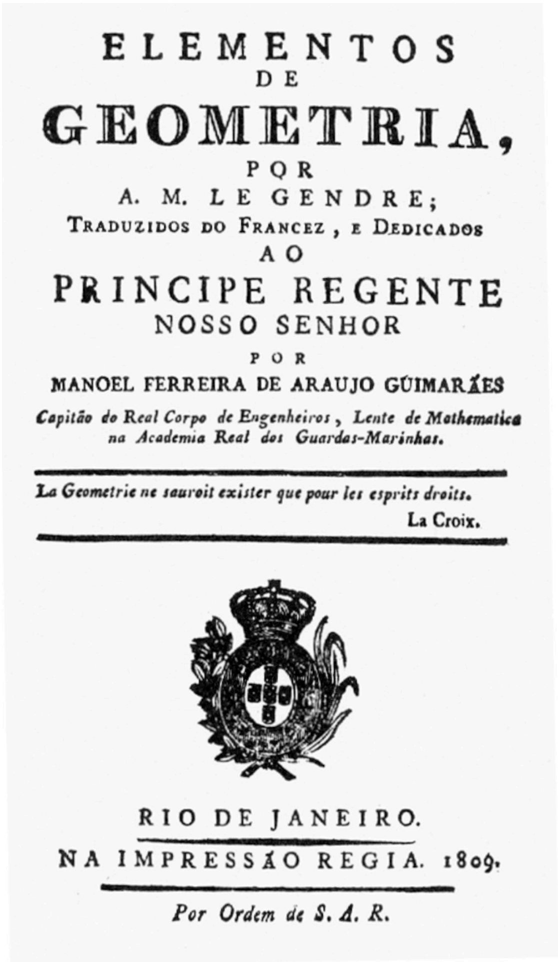
The book has no indication of a translator, nor any reference to which version of his work the translation refers to. Some clues indicate a possible name for the translator - Manuel Ferreira de Araujo Guimarães, a professor at the Royal Military Academy. We suspect that it has been translated from the French version, as Guimarães spoke French fluently and had done other translations of French books into Portuguese. Possibly the edition used was that of 1774.

Manuel Ferreira de Araújo Guimarães (1777-1838) was born in Bahia. He traveled to Portugal and stayed there from 1791 to 1805, having studied at the Royal Navy Academy during the years 1798 to 1801. At this time he started the translation of books from French into Portuguese: in 1800 – *The Basic and Complete Course on Pure Mathematics* by Lacaille (SILVA, 1996), and in 1802, he translated the book of Cousin - *The Elementary Treatise Of Mathematical Analysis.* He was a substitute professor of Mathematics at the Royal Academy of Marine Guards and member of the Royal Marine Society. His literature and journalistic skills were revealed after his return to Brazil.

In 1823, he became a member of the Board of Directors of the Military Academy in Rio de Janeiro. Furthermore, he was a member of the board of directors of Impressão Régia, the first publisher in Brazil. In Brazil, he translated and published the following books: *Elements of Geometry* by Legendre in 1809 (with reprints in 1812, 1815), the *Legendre Treatise of Trigonometry* in 1809; *Algebra to*

Geometry of Lacroix in 1821. He was also the translator of Euler`s Elements of Algebra.

In Brazil he translated two books from Adrien Legendre: the Elements of Geometry[5], that was the first book in Publishing House *Impressão Régia* (fig. 3).



ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA,
POR
A. M. LE GENDRE;
TRADUZIDOS DO FRANCEZ, E DEDICADOS
AO
PRINCIPE REGENTE
NOSSO SENHOR
POR
MANOEL FERREIRA DE ARAUJO GUIMARÃES
Capitão do Real Corpo de Engenheiros, Lente de Mathematica na Academia Real dos Guardas-Marinhas.

La Geometrie ne sauroit exister que pour les esprits droits.
La Croix.

RIO DE JANEIRO.
NA IMPRESSÃO REGIA. 1809.
Por Ordem de S. A. R.

Fig. 3 Elements of Geometry (1809)

The initiatives of Manuel Guimarães, aiming to disseminate the Brazilian production and also the European science, both activities were successfully developed, show a remarkable leadership in the Brazilian intellectual context at the time, that being very distant from European centers, and under the policy of foreign barriers, did not have favorable conditions for the development of a spirit of autonomous research. Guimarães wrote the first textbook of Geodesy and Astronomy

[5] First edition in French, 1794.

in Brazil of which we know. *The Elements of Astronomy*, published in 1814, was written for the use of students of the Royal Military Academy in Rio de Janeiro.

The use Euler's Book in the Academy

From 1811 until 1825 there was very much controversy about the use of Euler's Algebra. Which is the best: Euler or Lacroix?

The handwritten documents found in the National Archives, show that Euler's book was used as a textbook:

> The board of management of the Military Academy upon recognition of the inconvenience of a heterogeneous course, has at different times (by virtue of the Letter of the Law of December 4, 1810) represented the need to replace them with another uniform and regular, and their claims were answered when Your Royal Highness had ordered the previous year that Lacroix's algebra instead of Euler's be used in the 1st year's class.

In 1825, another reference to the book of Euler:

> In a letter on the same date of February 23rd, we also express to Your Excellency the need to print the Lacroix geometry and trigonometry, in order to complete your Course of Pure Mathematics, having already designated His Royal Highness to have to substitute in the 1st year Euler's Algebra , that the experience had shown only to serve to consume time uselessly…

The books recommended or indicated for use at the Military Academy needed the approval of the Legislative Assembly, which involved a lengthy process. There were difficulties in reconciling books with programs, and some books were not even listed as available due to no reprints or even translations. A long report indicates which books were recommended for each class.

Lacroix's books were very popular and successful in the Academy. It includes a short list of works on education published between 1808 and 1814 at Impressão Régia, in Rio de Janeiro.

Year	TITLE	TRANSLATOR
1810	Tratado Elementar de Aritmética por Lacroix	Francisco Cordeiro da Silva Torres
1811	Elementos de Álgebra por M. Lacroix	Francisco Cordeiro da Silva Torres
1812	Elementos de Geometria Descritiva com aplicações as artes de Lacroix	José Vitorino dos Santos Souza Preface, Notes from translator
1812	Tratado Elementar de aplicação de álgebra à geometria por Lacroix	José Vitorino dos Santos Souza Introduction and Appendix from Translator
1812	Elementos de Geometria por Lacroix	José Vitorino dos Santos Souza
1812	Tratado Elementar de Cálculo Diferencial por Mr. Lacroix (First Part)	Francisco Cordeiro da Silva Torres
1813	Complementos dos Elementos de Álgebra de Lacroix	Without Information
1814	Tratado Elementar de Cálculo Integral por Mr. Lacroix (Second Part)	Francisco Cordeiro da Silva Torres

Thus, we can say that in 1837, the book adopted for the teaching of algebra was that of Lacroix and not Euler's. It appears that the book of Euler was used as a textbook for about 10 years in the early years of the creation and consolidation of the Military Academy in Rio de Janeiro. Nothing can be said about its further use. The book is not available in university libraries and book stores or online. A single specimen was found in the Library of Rare Books in Rio de Janeiro, which allows us to suggest that there were no reprints and that probably few copies still exist in Brazil.

Lacroix's Algebra book seems to have been considered more appropriate for the education of students in that academy. One reason may be the fact that most of Lacroix's books had been translated into Portuguese and teachers of the Academy were more inclined to a standardization of the authors. Thus, the choice was the author Lacroix, who was already very popular and adopted in France at the time.

The Translation

For a better understanding of how we understand the activity of translation, we use Bakthin. For him the very symbolic human activity is to translate. By the activity of translating we can see "the same" through someone else's eyes ("the other's"). We will approach the particularities with which Guimarães tries to see the "other" and expresses this "other".

When we analyze a translated textbook, we still have another aspect to consider - how much of this version still carries the quality of the original, the translator's role and the importance of the translated to the local context.

We base the analysis of the translation into Portuguese on the following texts: *Élémens d'Algebre*. Tome premier. Lyon: Jean-Marie Bruyset, 1774; *Élémens d'Algèbre*. Paris: Courcier, 1807, *Elements of Algebra*, 5th edition, translation by Francis Horner. London, Longman, 1840; *Vollständige Anleitung zur Algebra*, Reclam Verlag, Stuttgart, 1959.

The extremely poor conservation status of the single copy of the work existing in BOR / UFRJ, made the handling and reading of the text difficult. There is no preface in the book, nor translation of the prefaces of the other languages' versions. There is no index, nor any comment on the work.

Some times he comes close to it, but other times he moves away. After the first two chapters one can already say that this translation is not faithful to the original. There are small details that the translator omits or changes.

By removing a portion of paragraph 175, perhaps the author wanted to avoid an error, on which the original author states that $0^0 = 1$. This was an omission of Guimarães, as in the French versions of 1774 and 1807 the translators kept the original. In a few paragraphs the translator prefers to use different symbols from the original, for example, in § 275, he uses a^2 instead of aa. In § 324 of chapter 7, the translator removed all seven examples which showed the square root extraction method, as they appeared in the books of arithmetic, as well as a footnote with the indication to consult Garnier`s book of arithmetic. The deleted paragraphs constituted examples that complemented the text. As in the book analyzed the final pages are missing, one does not know how far the translator managed to impart to Portuguese from the French version. The last page started Chapter 8, of the third session, about geometric progressions. The sheet was torn.

ELEMENTOS D'ALGEBRA.

PRIMEIRA PARTE.

Que trata da Analyſe determinada.

SECÇÃO PRIMEIRA.

Dos differentes methodos de calcular as grandezas ſimples ou incomplexas.

CAPITULO I.

Das Mathematicas em geral.

1.

DA'-ſe o nome de *grandeza*, ou *quantidade*, à tudo o que he capaz de augmento e diminuição. Por tanto, a extensão, o peſo, a duração, &c. são grandezas, ou quantidades.

2.

Cada parte das Mathematicas ſe encarrega da ſua eſpecie de quantidades; mas ſempre trata da quantidade, e procura os meios de a medir.

3.

Não podemos medir, ou determinar, huma quantidade, ſenão olhando outra da meſma eſpecie como co-

Fig. 4. First page, Euler, 1809.

Final comments

The translation into Portuguese reveals some terminological fluctuations, but these do not impair the understanding of the text. The omission of examples and a few sentences, as well as footnotes and prefaces lead the reader away from the original text.

When the book of Euler's Algebra was translated and published in Brazil (in 1811), university teaching of mathematics had not been institutionalized yet, and maybe the depth at which some topics had been presented discouraged its use in Royal Military Academy for the training of troops and military engineers. Lacroix's Algebra book seems to have been considered more appropriate for the education of students in that academy. One reason may be the fact that most of Lacroix's books had been translated into Portuguese and teachers of the Academy were more inclined to a standardization of the authors. Thus, the choice was the author Lacroix, who was already very popular and adopted in France at the time.

One cannot underestimate the role played by this translation into Portuguese, as it was the only book of Euler available in Portuguese language. It is noteworthy that the translator Guimarães brought to Portuguese language a work of quality, that with its didactic innovations became a bestseller at the time, being used in major higher education institutions in Europe and North America.

A historical analysis of textbooks of creative authors such as Leonhard Euler allows a deeper insight into the history of mathematics education and the history of mathematics as it shows one of the activities of the mathematician to make knowledge accessible to a wide audience - it delves in the task of making academic knowledge popular.

Sources and References

Manuscripts of the National Archives

Gazeta do Rio de Janeiro - all issues for the years 1809, 1810, 1811, 1812. View on line at the National Library. Available at http://bndigital.bn.br

Law Letter dated December 4, 1810. Bulletin of the Brazilian Society of Cartography. Mar. 2004, n. 52. Available at www.cartografia.org.br/boletim/Boletim52.pdf

Bakhtin, M. Aesthetics of verbal creation. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

CAMARGO, A.M. A. MORAES, R. B. Bibliografia da Impressão Régia do Rio de Janeiro. São Paulo: Kosmos, 1993.

EULER, L. Elements d'Algebra. New York: Royal Press, 1809.

____. Elements of Algebra. London, printed for Longman, 1840.

____. Vollständige Anleitung zur Algebra. Stuttgart: Reclam-Verlag, 1959.

____. Élémens d'Algebre. Lyon: Jean-Marie Bruyset, 1774.

____. Élémens d'Algèbre. Paris: Courcier, 1807.

_____. Elementos de algebra. Translation into Portuguese from Guimarães. Rio de Janeiro: Impressão Régia, 1809.

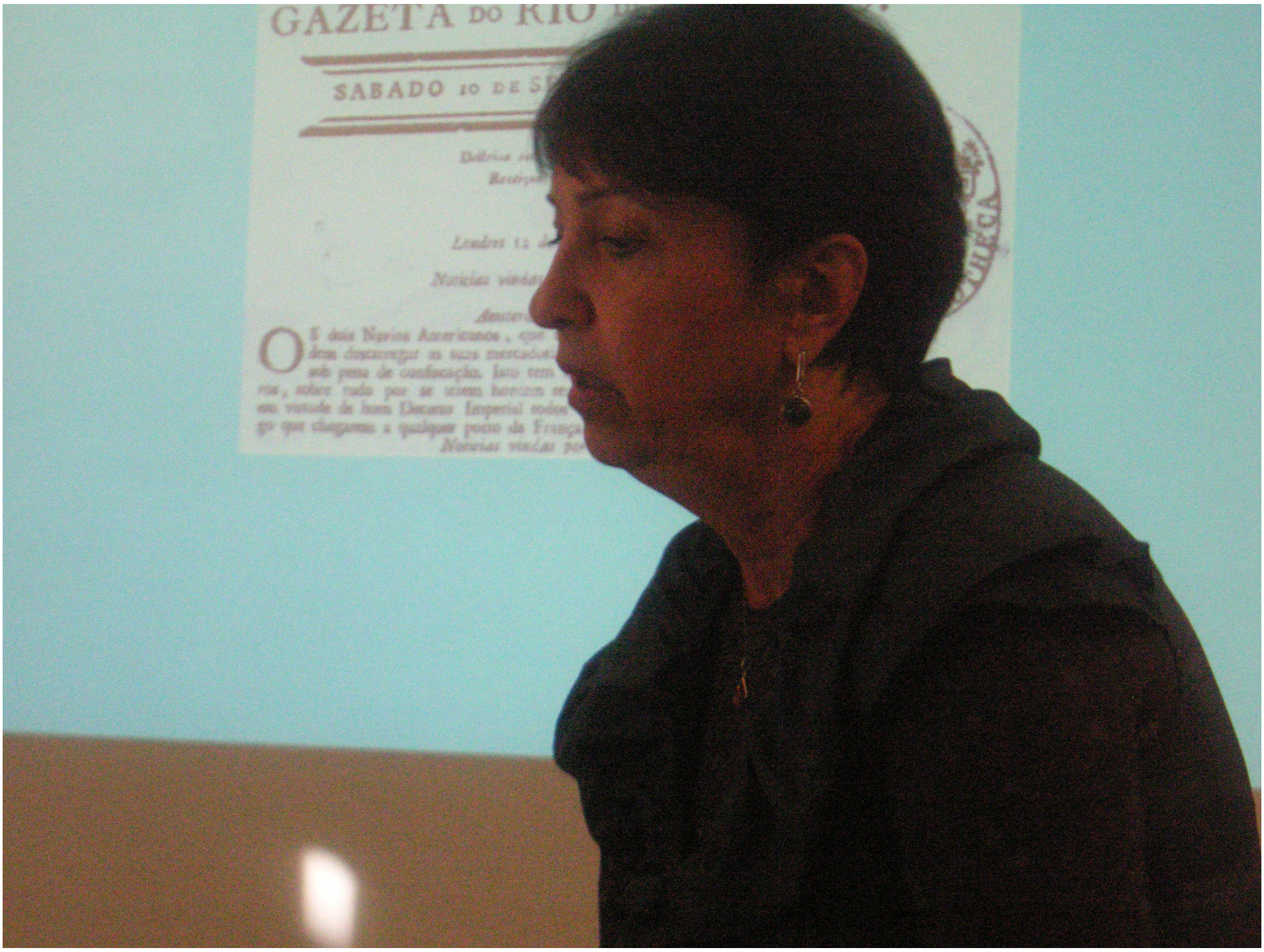
GINZBURG, C. The wire and the tracks. São Paulo: Companhia das Letras, 2007.

RICCEUR, P. Memory, history, forgetting. Campinas: Editora Unicamp, 2007.

SILVA, C. M. Marco do ensino superior da matemática no Brazil. Temas & Debates, n. 5, Year VII, 1994.

____. "The variation of the spherical triangles" Manuel Araújo Guimarães: first printed in mathematics, in Brazil, after the release of the press in 1810. Revista da SBHC, n. 15, p. 53-66, 1996.

____, The most popular textbook of Leonhard Euler and its repercussion in Brazil. Brazilian Journal of History of Mathematics, v. 9, p. 33-52, 2009.




Betr.: Betätigung im antifaschistischen Sinne:
Infolge des plötzlichen To
Mutter ist es mir erst
heute möglich, Unterlagen üb
im antifaschisti-
schen Sinne einzureichen.
1. Entgegen dem Arie
Geheimrat
Dr.Dr.Eugen Würzburger,
Statistischen
Landesamts von 1902 bis 192
tatistik an der
Universität Leipzig von 191
seinem Tode
im Jahre 1938 wissenschaftli
et. Als er die
ihn in seiner
Universität nicht mehr betret
Wohnung auf oder traf mich mit i
2. Die Bearbeitung der dritten
Die statistischen Forschungs
durchgeführt, obgleich mi
Czuber sei „Nichtarier"
auch das Lehrbuch „Wahr
in der Statistik und t
der 1933 von der natio
Professor an der Unive
Abschliessend d
liess.

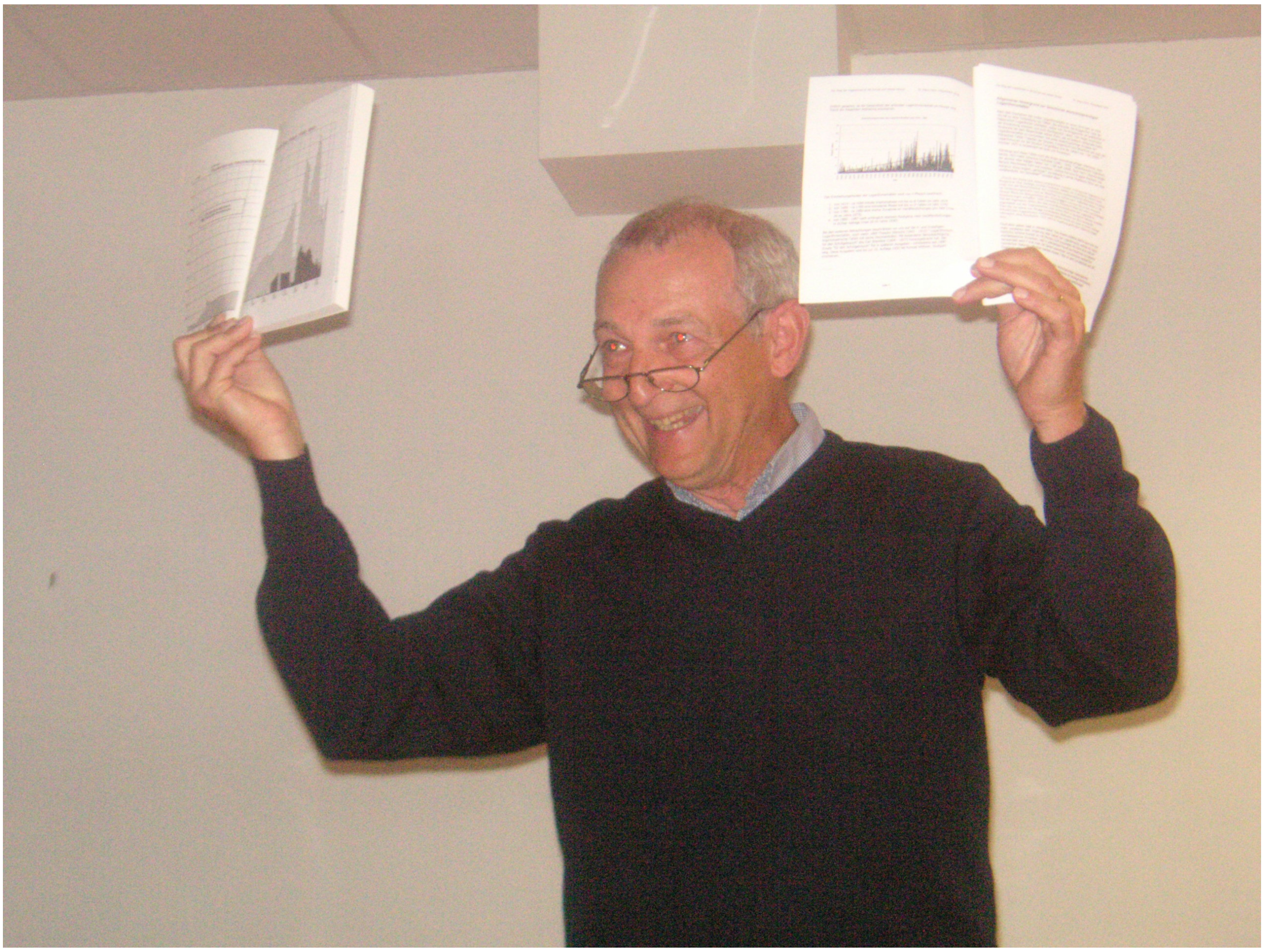

– Robert Recorde
und das Gleichheitszeichen
X. Österreichisches
zur Geschichte der
Miesenbach / Niederösterreich, 31.

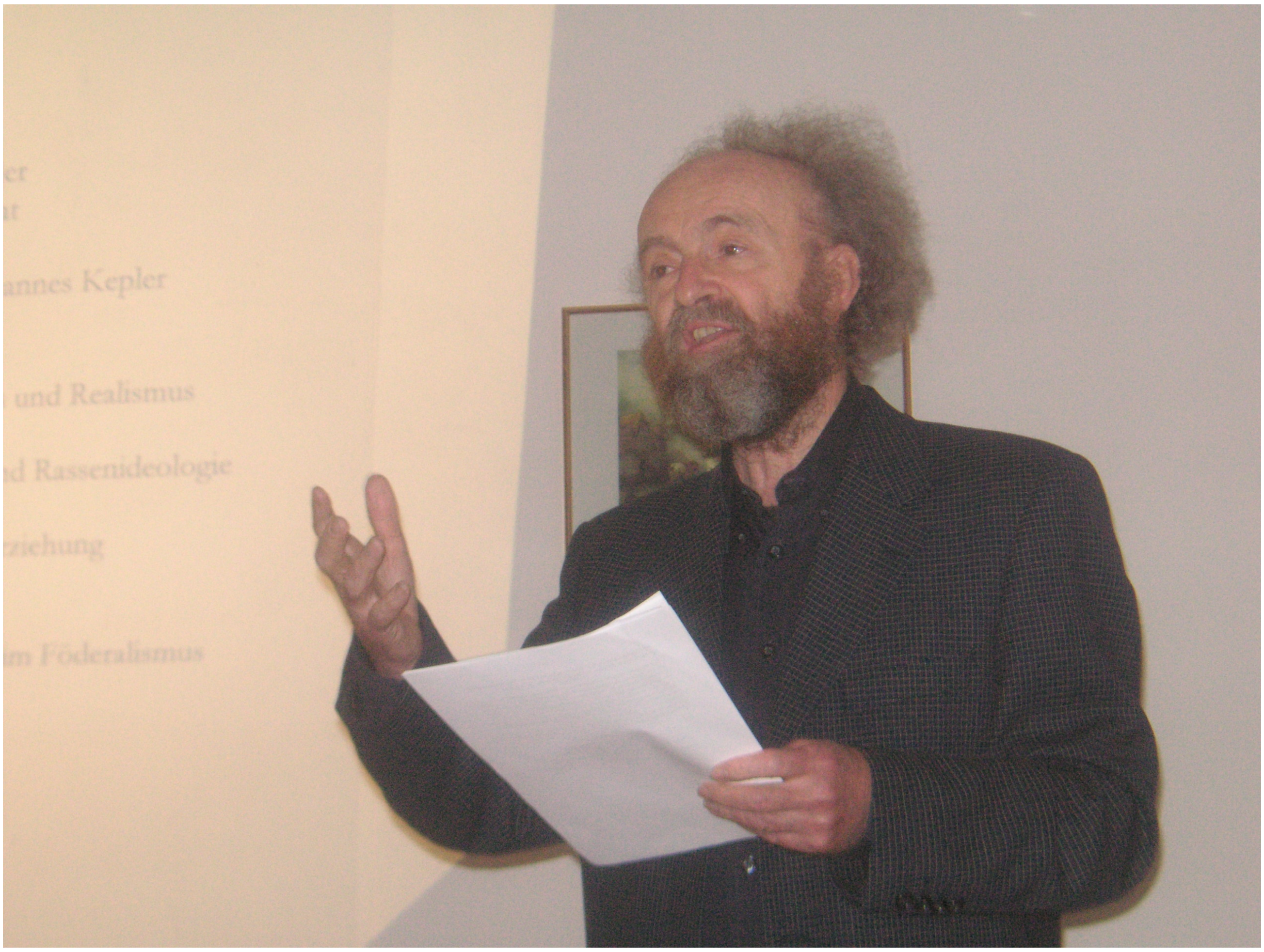

BONN
BÔN


ey, money und
ender Mangel"
des Mathematik
der Universität
. Jahrhundert
K.-H. Sc
Miesenbach, Jun


TODAY


Mathematicians and Physicists,
Acta Arithmetica 20(1972), 107-123.
Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Friedr.
Braunschweig, Wiesbaden, 1990.
Society, London, 2007.




annes Kepler
und Realismus
nd Rassenideologie
ziehung
im Föderalismus


az (1921.)
elgrade (1922.)
grade (1923.)
d in Terms of
Functions

Teilnehmer

* Klaus Barner 52
Mathematisches Institut, Universität Kassel,
D 34109 Kassel, Deutschland
Klaus.Barner@uni-kassel.de

* Bernhard Beham 195
Josefinengasse 10/11, A 1020 Wien, Österreich
bernhard.beham@univie.ac.at

* Martina Bečvářová 155
Katedra aplikované matematiky, Fakulta dopravní, ČVUT v Praze,
Na Florenci 25, CZ 11000 Praha 1, Tschechien
becvar@karlin.mff.cuni.cz

Christa Binder
Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien,
Wiedner Hauptstr. 8-10/101, A 1040 Wien, Österreich
christa.binder@tuwien.ac.at

Wolfgang Breidert
Baumgartenstraße 9, D 76316 Malsch, Deutschland
Wolfgang.Breidert@gmx.de

Miloš Čanak _(verhindert, schriftlich)_ 132
State University of Novi Pasar, YU 11000 Belgrad, Serbien
miloscanak12@yahoo.com

* Michaela Chocholová 120
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik,
Fakultät der Mathematik und Physik, Karls Universität Prag,
Sokolovská 83, CZ 18675, Prag 8, Tschechien
chochol@karlin.mff.cuni.cz

* Sergui Demidov 233
Institute for the History of Science and Technology,
Sskii per 1/5, RU 103012 Moscow, Russia
ssd@ssd.pvt.msu.su

* Stefan Deschauer 41
Fachrichtung Mathematik, Professur für Didaktik der Mathematik,
TU Dresden, D 01062, Deutschland
Stefan.Deschauer@tu-dresden.de

Cornelia Faustmann
Kaisersteingasse 6, A 2700 Wiener Neustadt, Österreich
cornelia.faustmann@aon.at

Gerlinde Faustmann
Kaisersteingasse 6, A 2700 Wiener Neustadt, Österreich
gerlinde.faustmann@aon.at

* Jasna Fempl-Madjarević 132, 248
5th Belgrade Gymnasium, KMM Arhimedes and Math. Institute,
Vidikovacki venac 27, YU 11000 Belgrad, Serbien
ssimetic@sbb.rs

Menso Folkerts
Geschichte der Naturwissenschaften, Universität München,
Museumsinsel 1, D 80538 München, Deutschland
M.Folkerts@lrz.uni-muenchen.de

* Hans-Joachim Girlich 187
Mathematisches Institut der Universität Leipzig,
Joannisg. 26, D 04103 Leipzig, Deutschland
girlich@math.uni-Leipzig.de

Detlef Gronau
Riglergasse 6/5, 1180 Wien, Österreich
detlef.gronau@chello.at

* Harald Gropp 213
Hans-Sachs-Straße 6, D 65189 Wiesbaden, Deutschland
d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

* Myriam-Sonja Hantke 16
Ellenbeek 3, D 42489 Wülfrath, Deutschland
Myriam-Sonja.Hantke@web.de

* Magdalena Hykšová 226
Faculty of Transportation Sciences, Czech Technical University Prague,
Na Florenci 25, CZ 11000 Prag 1, Tschechien
hyksova@fd.cvut.cz

* Friedrich Katscher 11
Mariahilferstraße 133, A 1150 Wien, Österreich
dr.katscher.vienna@chello.at

* Klaus Kühn 82
Schlagfeldstraße 9, D 82239 Alling-Biburg, Deutschland
kk@iasim.de

Gerhard Lindbichler
Senfgasse 1/7/3, A 1100 Wien, Österreich
gerhard.lindbichler@chello.at

* Rita Meyer-Spasche 266
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik,
D 85748 Garching, und Römerstr. 10, 80801 München, Deutschland
meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de

* Miloš Milovanović 178
Mathematikcal Institute of SASA, YU 11000 Belgrad, Serbien
milosm@mi.sanu.ac.rs

* Katalin Munkácsy 117
Centre of mathematics education, ELTE,
Rumbach S.u.3, H 1075 Budapest, Ungarn
katalin.munkacsy@gmail.com

* Christine Phili 272
Department of Mathematics, Faculty of
Applied Mathematics and Physics, National Technical University,
Zografou Campus, GR 15780 Athen, Griechenland
xfili@math.ntua.gr

* Franz Pichler
Schallenbergerweg 7, A 4048 Puchenau, Österreich
franz.pichler@jku.at

* Marko Razpet 256
University of Ljubljana, Faculty of Education,
Kareljava ploš čad 16, SL-1113 Ljubljana, Slowenien
Marko.Razpet@fmf.uni-lj.si

* Nada Razpet 97
University of Primorska, Faculty of Education Koper;
University of Ljubljana, Faculty of Education; Slowenien
nada.razpet@fmf.uni-lj.si

* Ulrich Reich 46
Kurpfalzstraße 14, D 75015 Bretten, Deutschland
familiereich@web.de

Michael von Renteln
Institut für Analysis, Universität Karlsruhe,
Englerstraße 2, D 76131 Karlsruhe, Deutschland
Michael.vonrenteln@math.uni-karlsruhe.de, von.renteln@web.de

* Herwig Säckl 1
Traberweg 1, D 93049 Regensburg, Deutschland
herwsaeckl@aol.com

* Karl-Heinz Schlote 278
Elie-Wiesel-Str. 55, D 04600 Altenburg, Deutschland
schlote@saw-leipzig.de

Peter Schmitt
Fakultät für Mathematik, Universität Wien,
Nordbergstr. 15, A 1090 Wien, Österreich
Peter.Schmitt@univie.ac.at

* Ivo Schneider 219
Roßmarkt 10, D 80331 München, Deutschland
ivo.schneider@unibw.de

* Circe Mary Silva da Silva Dynnikov 284
Federal University of Espirito Santo, Brasilien
cmdynnikov@gmail.com

* Werner Schulze 146
Internationales Harmonik Zentrum, Universität für Musik Wien,
Anton-von-Webern-Platz 1, A 1030 Wien, Österreich
schulze@mdw.ac.at

* Annette Vogt 169
MPI für Wissenschaftsgeschichte,
Boltzmannstraße 22, D 14195 Berlin, Deutschland
vogt@mpiwg-berlin.mpg.de

* Waltraud Voss 103
TU Dresden, Universitätsarchiv, D 01062 Dresden, Deutschland
Waltraud.Voss@tu-dresden.de

Reiner Wieland
Linzerstr. 115/11, A 1140 Wien, Österreich
reiner.w@gmx.at

Bilder: *Alle Bilder von Peter Schmitt und Marko Razpet (Gruppe, pp. 36,173–177,264,277,297,309, sowie 299,304,310 unten)*

(nach der Titelseite) Aufmerksames Publikum / Gruppenbild / Im Seminarraum

---

p. 36: Myriam-Sonja Hantke / p. 81: Klaus Barner / p. 102: Nada Razpet

p. 145: Jasna Fempl-Madjarević / p. 171: Annette Vogt
pp.173–177 Ausflug ins Aviaticum und zum Myrafall:

p. 173: Reiner Wieland, Michaela Chocholová, Herr Hornung (Wirt), Gabriela Reich, Gisela von Renteln, Martina Bečvářová, Frau Pichler, Annette Vogt, (Fritz Katscher, *verdeckt*, Peter Schmitt Franz Pichler), Herwig Säckl, Stefan Deschauer *(teilweise verdeckt)*

p. 174: Herwig Säckl, Michaela Chocholová, Reiner Wieland, Fritz Katscher, Christa Binder, Karl-Heinz Schlote, Jasna Fempl-Madjarević, Frau Pichler, Franz Pichler / p. 175 Myrafall

p. 177: Herwig Säckl, Ulrich Reich, Karl-Heinz Schlote, Reiner Wieland

p. 225: Ivo Schneider / p. 255: Jasna Fempl-Madjarević / p. 264: Marko Razpet

p. 277: Christine Phili / p. 294: Circe Mary Silva da Silva Dynnikov

---

p. 295: Menso Folkerts *(oben)*, Michael von Renteln

p. 296: Annette Vogt, Wolfgang Breidert, Waltraud Voss, Frau Girlich *(oben)*, Hans-Joachim Girlich

p. 297: Herr Dynnikov, Circe Mary Silva da Silva Dynnikov, Nada und Marko Razpet *(oben)*, Ulrich Reich

p. 298: Bernhard Beham (oben) und Michaela Chocholová

p. 299: Rita Meyer-Spasche *(oben)*, Karl-Heinz Schlote

p. 300: Stefan Deschauer *(oben)*, Wolfgang Breidert

p. 301: Magdalena Hykšová *(oben)*, Detlef Gronau

p. 302: Martina Bečvářová *(oben)*, Katalin Munkácsy

p. 303: Klaus Kühn *(oben)*, Herwig Säckl

p. 304: Christine Phili und Sergiu Demidow *(oben)*, Miloš Milovanović

p. 309: *Spaziergang:* Nada Razpet, Reiner Wieland, Peter Schmitt, Christa Binder, Annette Vogt, Gerlinde Faustmann, Waltraud Voss

p. 310: ein Vortrag (Myriam-Sonja Hantke) *(oben)*, Landschaft bei Miesenbach


(Abb. 1)
(Abb. 2)
(in: Fukagawa Hidetoshi/Tony Rothman: Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry, with a foreword by Freeman Dyson, Princeton University Press, Princeton/Oxford 2008, plate 5 and 10)