Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte

IX. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

Mathematik – Abbild der Wirklichkeit oder Produkt des Geistes?

Tagung, 12. bis 18. Mai 2008, Miesenbach (Niederösterreich)

Kurzfassungen der Vorträge

Herausgeber:

Dr. Christa Binder
Institut für Analyis und Scientific Computing
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8-10/101
A 1040 Wien, Österreich

Tel.: +43 1 58801 10129
FAX: +43 1 59901 10199
e-mail: christa.binder@tuwien.ac.at

Danksagung:

Ohne die großzügige Hilfe der folgenden Institutionen
wäre die Durchführung der Tagung nicht möglich gewesen.
Dafür herzlichenDank.

Ministerium für Wissenschaft und Forschung
Amt der Niederösterreichischen Landesregierung, Abteilung Kultur und Wissenschaft
International Commission on the History of Mathematics (ICHM)
Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien
anonyme Spender

KULTUR NIEDERÖSTERREICH

Layout und Druckvorlage: Peter Schmitt

PROGRAMM

Dienstag, 13. Mai 2008

Mittwoch, 14. Mai 2008

Donnerstag, 15. Mai 2008

Ausflug nach Baden bei Wien

Freitag, 16. Mai 2008

Samstag, 15. Mai 2008


KAISER
STOP

(oben) Mittagspause im Gastgarten: *(von links)*
Fritz Katscher, Enid Grattan-Guinness, Menso Folkerts,
Ivor Grattan-Guinness, Alexander Odefey, Alireza Djafari-Naini

(links) Gruppenbild: *(von links)*
(vorne) Michaela Chocholová, Hans-Joachim Girlich, Christa Binder, Annette Vogt,
Ivor Grattan-Guinness, Iasna Fempl-Madjarević, Peter Schmitt
(zweite Reihe) Magdalena Hykšová, Frau Girlich, Waltraud Voss *(verdeckt)*,
Sergui Demidov, Detlef Gronau, Frau Djafari-Naini
(dritte Reihe) Harald Gropp, Alexander Odefey, Menso Folkerts, Christina Phili,
Katalin Munkacsy, Stefan Deschauer, Martina Bečvářová, Alireza Djafari-Naini,
Rita Meyer-Spache, Gerlinde Faustmann

(nächste Seite) Im Seminarraum: *(von links)*
(1. Reihe) Monika Löffladt, Gisela von Renteln, Ülo Lumiste
(2. Reihe) Günter Löffladt, Rita-Meyer-Spache, Alexander Odefey, Wolfgang Breidert, Detlef Gronau

(Verzeichnis aller Bilder: Seite 158)

Zur Algebra in den Rigischen Rechenbüchern

Stefan Deschauer, Dresden

Einleitung

Die Rigischen Rechenbücher[1] wurden im 17. bis 19. Jahrhundert der Reihe nach von den „Schulhaltern“ FRIEDRICH WEDEMEYER (1627, 1637, 1647), MAURITIUS LANGE (1650?), ERICUS POMMERGARDT (1671), JOHANN WOLCK (1688, 1703), JOACHIM ANDREAS HELMS (1737), JOHANN HEINRICH FLOR (1769, 1792, 1808) und BERNHARD JOHANN GISEVIUS (1819) geschrieben. Dabei handelte es sich im Unterschied zu den meisten anderen Schriften der praktischen Kaufmannsrechnung um Auftragsarbeiten: Grundsätzlich erteilte der Rat der Stadt Riga den Auftrag, ein neues Rechenbuch zu verfassen, insbesondere dann, wenn das alte Rechenbuch vergriffen war oder neue Maß- und Münzsysteme, neue Handelserfordernisse oder neue kaufmännische Rechenmethoden eine Überarbeitung oder Neubearbeitung erforderlich machten.
Im Rahmen eines DFG-Projekts analysiere ich derzeit die Besonderheiten dieser Rechenbücher.

Algebraische Besonderheiten

Bei algebraischen Aufgaben verwenden die Verfasser die Terminologie der Deutschen Coss, wobei sie die Symbole teilweise in (abgekürzter) Wortform wiedergeben, was im Hinblick auf die von VIÈTE (1591) geschaffene moderne Symbolik als Anachronismus betrachtet werden kann. Eine ganz ähnliche Terminologie findet sich in der (allerdings wesentlich älteren) *Arithmetica / Wolgegründte Rechnung* … von GEORG STICHEL (Leipzig 1551)[2].
Aufgaben mit der zugehörigen algebraischen Lösungsmethode werden nur in den Büchern von POMMERGARDT, WOLCK und HELMS vorgestellt. Auch bei WEDEMEYER finden sich, in verschiedenen Kapiteln verstreut, Aufgaben, die nur algebraisch gelöst werden können, doch führt der Autor jeweils nur das Ergebnis an. POMMERGARDT, der sich eng an das Werk seines Schwiegervaters WEDEMEYER anlehnt, hat diesem Mangel in vielen Fällen abgeholfen und den algebra-

[1] Vgl. RECKE, JOHANN FRIEDRICH V. / NAPIERSKY, KARL EDUARD (Hrsg.): Allgemeines Schriftsteller- und Gelehrten-Lexikon der Provinzen Livland, Esthland und Kurland. 4 Bde. Mitau 1827–1832. – Nachträge und Fortsetzungen …, hrsg. v. THEODOR BEISE. 2 Bde. Mitau 1859-1861. (Mitau ist das heutige Jelgava in Lettland.)
Die ersten beiden Auflagen des Buchs von WEDEMEIER und das Buch von LANGE konnten noch nicht aufgefunden werden. Darüber hinaus ist sogar die Datierung des letztgenannten Werks unklar, das das von v. RECKE/NAPIERSKY angegebene Jahr 1650 nicht vereinbar ist mit den Angaben von HELMS (Vorrede S. X 4ᵛ): Demnach wäre LANGE der Begründer der Rigischen Rechenbuchtradition gewesen und WEDEMEIER sein Nachfolger. – Alle anderen Bücher befinden sich z. B. in der Lettischen Akademischen Bibliothek, bis auf die 2. Auflage des WOLCKschen Werks, das in der Litauischen Nationalbibliothek aufbewahrt wird.

[2] vgl. DESCHAUER, STEFAN: Zur Algebra im Rechenbuch von GEORG STICHEL (Leipzig 1551). In: Wanderschaft in der Mathematik – Tagung zur Geschichte der Mathematik in Rummelsberg bei Nürnberg (4.5. bis 8.5.2005). Algorismus (Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, hrsg. v. M. FOLKERTS), Heft 53. Augsburg 2006, 70–80

ischen Lösungsweg ergänzt. Ein Teil dieser Aufgaben findet sich, wie bei WEDEMEYER, verstreut in verschiedenen Kapiteln zum kaufmännischen Rechnen, ein anderer Teil sowie zahlreiche gegenüber WEDEMEYER neue Aufgaben werden in einem eigenen Kapitel behandelt. Diese Einteilung legt die Vermutung nahe, dass POMMERGARDT der erstgenannten Gruppe von Aufgaben noch eine gewisse Praxisnähe zuerkennt, während er die anderen eher als „Kunstaufgaben" versteht. WOLCK, der nächste Autor, hat offenbar mit der „Tradition WEDEMEYER / POMMERGARDT" einen deutlichen Bruch vollzogen[3]. Sein Kapitel *Schertz Auff-Gaben* enthält völlig andere algebraische Probleme als die, die bei POMMERGARDT auftraten. Das Werk von HELMS – inzwischen (1710) ist Riga von der schwedischen Oberhoheit in die russische übergegangen – lehnt sich im Hinblick auf die algebraische Aufgabensammlung eng an WOLCK an. Neue Aufgaben findet man im Wesentlichen nur unter der Rubrik „Historische Aufgaben", wo jüngere Ereignisse der Rigaer Stadtgeschichte – Überschwemmungen (1709, 1727), Blitzeinschlag in den Turm der Peterskirche (1721), Explosion des Pulverturms (1721) „algebraisch verpackt" werden. Eine WOLCKsche Aufgabe zur (erfolglosen) Belagerung Rigas durch den Zaren (1656) ist entfallen, und der Brandstifter GABRIEL FRANCKE (1677) wird nun zusammen mit seinem schwedischen Mittäter genannt, den WOLCK verschwiegen hatte …[4]
Es ist zu bedauern, dass die algebraische Überlieferung der Rigischen Rechenbücher bereits mit HELMS endet, sonst hätte man sehr wahrscheinlich den Wechsel zur modernen Symbolik verfolgen können.
FLOR begründet im Vorwort, warum er in seinem Buch auf algebraische Aufgaben gänzlich verzichtet: *Unnatürlich werden … die Aufgaben, durch alzu erhöhete und verringerte Preisen, durch die* ***Vermischung der Arithmetic mit der Algebra****; durch Abweichung von der abzuhandelnden Lehre; durch ungangbare und verjährte Münzsorten; durch alzu grosse oder kleine Quantitäten und durch unrichtige Nebenumstände. Aufgaben, die mit Fleiß erdacht, leicht versteckt und künstlich aufgegeben sind, sind deswegen nicht zu verachten; sie können nützlich, sie können ein Probierstein seyn und wenn sie recht gebraucht werden, den Verstand der Jugend schärfen.* ***Allein in der Arithmetic müssen die Aufgaben arithmetisch und nicht algebraisch seyn.***[5]
Ebenso hält es GISEVIUS, der das FLORsche Vorwort wieder mit abdruckt.

Aufgabenbeispiele

1) POMMERGARDT, O v^{v}–Ovj, Nr. 58: Ochsenhäute (im Kapitel „Gewinn und Verlust")
2) POMMERGARDT, T iij^{v}–Tiiij, Nr. 13: Kapital und Rente (im Kapitel „Auf Interesse")
3) WOLCK, S. 308, Nr. 2: Rechenmeister (im Kapitel „Scherzaufgaben")

[3] Einen ersten Hinweis darauf liefert das Vorwort seines Buchs, in dem der Vorgänger mit keinem Wort erwähnt wird.
[4] Das zugehörige algebraische Problem ist dabei allerdings durch ein einfaches Restproblem ersetzt worden.
[5] z. B. 1. Auflage 1769, S. X 5

58. Item/ einer kaufft für eine Summa Thal. $32\frac{2}{5}$ Decher Ochsenheute / verkaufft den Decher wiederum für etliche Thaler auff 4 mahl so viel Monat zu borge / als ihm der Decher kostet/ verleuret des Jahrs an 100 Rthl. $\frac{1}{750}$ seines angelegten Häuptguts / und wann der Verlust mit dem Häupt-Gut wird *multipliciret*/ so kommen 729 Reichsthal. Ist die Frage / wie theur der Decher erstes Kauffs gekaufft / und wieder verkaufft sey? Facit erstes Kauffes um $8\frac{1}{3}$ Reichsthal. / und um $8\frac{1}{4}$ Reichsthal. wieder hin gegeben. Mache es nach der *Coss*.

1 D: —— 1 *rad*: Rth. —— $32\frac{2}{5}$ Decher.

$\frac{1}{750}$) $32\frac{2}{5}$ *rad*. Einkauf.

12 Mon: $\frac{54}{1250}$ *rad*: verl. —— 4 *rad*: Mon:

100: $\frac{18 Z.}{1250.}$ verl: —— $32\frac{2}{5}$ *rad*.

$\frac{729 \text{ Cub:}}{156250}$ mit $32\frac{2}{5}$ *radices*.

kompt $\frac{118098 Z:Z:}{781250}$ gleich — 729 Rth.

729) 118098 Z:Z: —— 729

162 Z:Z: —— 1

2) 162. Z:Z: — gleich — 781250.

v) 81. Z:Z: — gleich — v. 390625.

v) 9. Z: —— gleich —— 625.

3. *rad*: —— gleich —— 25.

1. *rad*. —— gleich —— $8\frac{1}{3}$ Rthl.

so viel hat der Decher Einkaufs gekostet / und auf $33\frac{1}{3}$ Monat verborget.

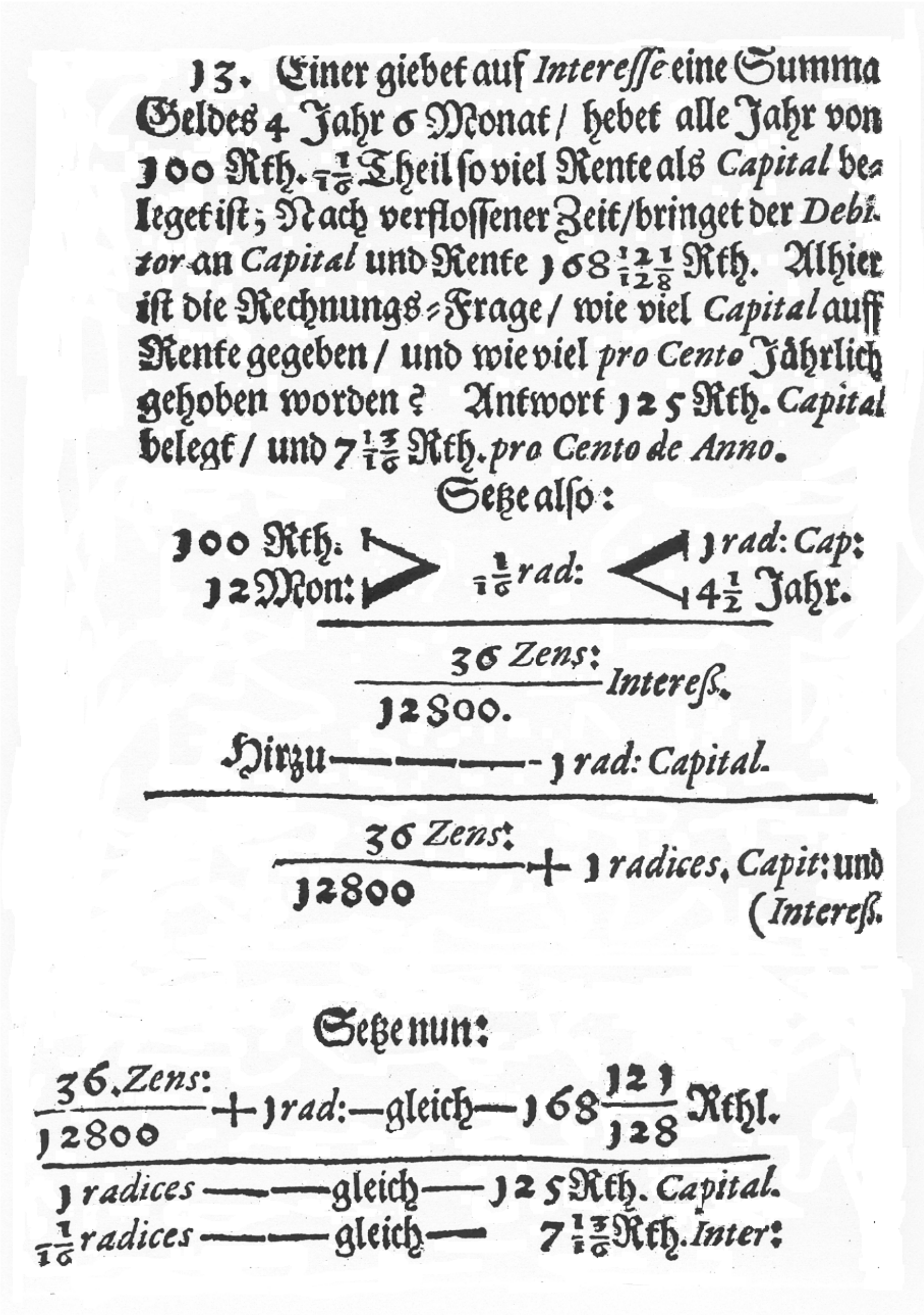
12 Mon: —— $\frac{2}{25}$ Rth. verl: —— $33\frac{1}{3}$ Mon:

1 Rth. nim von 100 Resten 99 Rth. Setze.

100 Rth. Eink. —— 99 Rth. verk. —— $8\frac{1}{3}$ Rth.

Antw: $8\frac{1}{4}$ Rth. ist der Decher wieder verkaufft.

Ochsenhäute wurden zu Sohl-, Pfundleder, schwerem Riemen- und Sattlerleder weiterverarbeitet. Decher ist ein Stückmaß (1 Decher = 10 Stück), Mit Rth. oder Rthl. wird die Münzeinheit „Reichsthaler“ abgekürzt, Z. ist Zensus, Z:Z: bedeutet Zensus de Zensu, v ist ein Hinweis auf das Ziehen der Quadratwurzel.



13. Einer giebet auf *Interesse* eine Summa Geldes 4 Jahr 6 Monat / hebet alle Jahr von 100 Rth. $\frac{1}{16}$ Theil so viel Rente als *Capital* beleget ist; Nach verflossener Zeit / bringet der *Debitor* an *Capital* und Rente 168 $\frac{121}{128}$ Rth. Alhier ist die Rechnungs-Frage / wie viel *Capital* auff Rente gegeben / und wie viel *pro Cento* Jährlich gehoben worden? Antwort 125 Rth. *Capital* belegt / und 7 $\frac{13}{16}$ Rth. *pro Cento de Anno*.

Setze also:

100 Rth. / 12 Mon: > $\frac{1}{16}$ *rad:* < 1 *rad: Cap:* / 4$\frac{1}{2}$ Jahr.

$\frac{36 \text{ Zens:}}{12800}$ *Intereß.*

Hirzu ——— 1 *rad: Capital.*

$\frac{36 \text{ Zens:}}{12800}$ + 1 *radices, Capit:* und (*Intereß.*

Setze nun:

$\frac{36.\text{Zens:}}{12800}$ + 1 *rad:* — gleich — 168 $\frac{121}{128}$ Rthl.

1 *radices* —— gleich —— 125 Rth. *Capital.*

$\frac{1}{16}$ *radices* —— gleich —— 7 $\frac{13}{16}$ Rth. *Inter:*

„Interesse“ bedeutet Zins, „Debitor“ ist der Schuldner. Das Diagramm oben soll wohl die richtige Durchführung der Rechenoperationen veranschaulichen. Ein Lösungsverfahren zur quadratischen Gleichung fehlt, unvermittelt wird das Ergebnis (125 Rth.) genannt. Der Aufgabe liegt nur die einfache Verzinsung zugrunde.

2. Item 3 Rechenmeister sitzen bey einander/ reden von ihrem Alter/fähet der erste an und spricht/das duplat und $\frac{1}{4}$ meines Alters nebst 6 Jahr / ist gerad 5 Jahr mehr als euer beyder Jahr / spricht der ander: mein Vater und ich seynd zusammen 90. Jahr alt / darzu bin ich meines Vaters ältester Sohn/ und dennoch 4 Jahr jünger als einer von euch beyden/ der dritte aber beschleust die Rede/ sprechend: ich bin 13 Jahr älter als einer von euch / und mein Alter zweymahl und $\frac{1}{3}$ meines Alters darzu/auch euer beyder Alter weniger 5 Jahr sämptlich in 5 dividirt, thun gerad 32 Jahr/ist nun die Frage/ nach eines jeden Alter? Antw: der erste 32 Jahr/ der ander 28 Jahr/ der dritte 45 Jahr.

1 rad der Mittelste	2 rad + 26
1 rad ÷ 4 der Jüngste	$\frac{1}{3}$ rad + $4\frac{1}{3}$
1 rad + 13 der Älteste	2 rad ÷ 9
	5) $4\frac{1}{3}$ rad + $21\frac{1}{3}$
	$\frac{13}{15}$ rad + $4\frac{4}{15}$

$\frac{13}{15}$ rad + $4\frac{4}{15}$ Jahr — æq — 32 Jahr

13 rad + 64 — æq — 480

÷ 64

13 rad — æq — 416

1 rad — æq — 32 Jahr der Erste

1 rad ÷ 4 Jahr — æq — 28 Jahr der And

1 rad + 13 Jahr — æq — 45 Jahr der dritte

Der Autor ist dem Anspruch dieser interessanten Aufgabe nicht gerecht geworden: Sein Ansatz für das jeweilige Alter der Rechenmeister ist richtig, muss aber begründet werden. Dazu dient u. a. auch die Aussage des 1. Rechenmeisters, die in WOLCKs Rechnung gar nicht berücksichtigt wird.

Friedrich Katscher (Wien, Vienna)

Hieronimo Cardano and the Inquisition

The great Italian mathematician HIERONIMO CARDANO (1501-1576) who in 1545 in his book *Ars magna* (The Great Art, namely algebra) was the first to publish the methods to solve cubic and quartic equations was arrested by the inquisition on 6 October 1570 in Bologna where he was a university professor for theoretical medicine. It was unknown why but it was guessed that the reason was that in 1554 he had published a horoscope of Jesus Christ, which now proved to be wrong. Cardano stayed in prison for 77 days, and afterwards in house arrest for another 86 days.

In 1998 the hitherto secret archives of the Vatican were opened for "qualified research", and documents where found, which finally clarified what had happened to Cardano in 1570 and afterwards. A letter showed that on 7 May 1570 the inquisitor of Como (north of Milan) had denounced Cardano for heretic passages in his book *De rerum varietate* (On the variety of things) of 1557, especially for insulting attacks on members of the Dominican order, which recruited almost all inquisitors. In reality Cardano was innocent. The affronts against the Dominicans had been added by a proof-reader (corrector) of the Swiss publisher.

The inquisitor of Bologna sent almost weekly a report on the interrogations and the state of health of the 69 years old prisoner to the chief of the inquisition in Rome, and this one gave precise directives.

In March 1571 Cardano was condemned to abjure, all his nonmedical books were prohibited until they were corrected, and he was not allowed any longer to give lectures.

The publishing house of the Vatican will publish a book probably in autumn 2008 on the inquisition and the history of science with more than 1000 pages of documents, and almost 1000 pages of introduction and annotations where all the details about Cardano and the inquisition will be found.

Friedrich Katscher (Wien)

Hieronimo Cardano und die Inquisition

Der italienische Mathematiker HIERONIMO CARDANO (1501-1576), der 1545 in einem grundlegenden lateinischen Buch mit dem Titel *Ars magna* (die Große Kunst, nämlich die Algebra) als erster die Lösungsmethoden für algebraische Gleichungen dritten und vierten Grades veröffentlichte, wurde am Freitag dem 6. Oktober 1570 in Bologna, wo er Universitätsprofessor für theoretische Medizin war, verhaftet. Er blieb genau elf Wochen im Gefängnis. Dort wurde er, wie er es in seiner Autobiographie ausdrückte, *civiliter*, also anständig, behandelt. Anschließend war er 86 Tage in Hausarrest.

Jahrhunderte lang blieb es ein Rätsel, was man Cardano eigentlich vorgeworfen hatte. Er selbst schrieb nie den Grund seiner Verhaftung noch ob er verurteilt wurde und wenn ja, von welchem Gericht, obwohl man natürlich annahm, dass die Inquisition dahinter steckte. Er machte zwar schon 1562 eine Andeutung, die man aber erst vor einigen Jahren als solche erkannte. Man vermutete immer, dass man ihn deshalb verfolgt hatte, weil er 1554 in seinem Kommentar zu dem vierteiligen griechischen Werk über Astrologie (Tetrabiblos), *Claudii Ptolemæi Pelusiensis IIII de Astrorum Iudicijs* (4 <Bücher> über die Vorhersagen der Sternbilder von Claudius Ptolemäus aus Pelusium, Seiten 163-166; *Opera omnia*, Band V, 221-222), ein Horoskop von Jesus Christus veröffentlichte. Diese Vermutung erwies sich aber als falsch.

Am 22. Jänner 1998 wurden die bisher geheimen Archive des Vatikans für "qualifizierte Forschungen" geöffnet, und obwohl alle Akten der Inquisitionsprozesse inklusive der Urteile verloren gegangen sind, hat man Briefe gefunden, aus denen man rekonstruieren kann, was im Falle Cardano geschehen ist. Die Ergebnisse der diesbezüglichen Forschungen wurden in italienischen Zeitschriften und Büchern veröffentlicht, doch werden sie hier zum ersten Mal auf Deutsch präsentiert, wobei auch wichtige Erkenntnisse des Referenten hinzugefügt werden.

Alles ins Rollen gebracht hat der nachfolgende Brief, der sich im Archiv der Kongregation für die Glaubenslehre (Congregatio pro Doctrina Fidei) im Vatikan, Protocolli H (II.a.7), Seiten 336 recto - 337 verso, befindet. Er wurde vom Inquisitor von Como (nördlich von Mailand), dem Dominikaner Gaspare Sacco, an den Vizepräfekten des Heiligen Offiziums und Chef der Inquisition in Rom von 1565 bis 1576, den Kardinal von Pisa, Scipione Rebiba (ca.1505-1577), geschrieben:

> Ill.$^{\text{mo}}$ et R.$^{\text{mo}}$ Monsr S. <Illustrissimo et Reverendissimo Monsignor Signor; Hochverehrter und ehrwürdigster Monsignor Herr>
>
> Schon vor einigen Monaten wurde mir ein Buch gebracht, von einem Girolamo Cardano aus Mailand verfasst, der in Bologna über Medizin

> liest. In welchem Buch, betitelt De Veritate rerum, sich dieser Cardano nach meinem Urteil *mal credente anzi incredulo* (fehlgläubig, sogar ungläubig) zeigt und Fehler, Ketzereien und viel Aberglauben lehrt. Und unter anderen im 2. Buch des oben genannten Buches im Kapitel 13, wo er von himmlischen Einflüssen spricht, vergrößert er sie sosehr, dass er leugnet, dass Gott in diesen niedrigen Angelegenheiten tätig ist. Er leugnet die Macht von bösen Geistern und nennt die heiligen Märtyrer verrückt und durch himmlische Einflüsse angestachelt, ihre Habseligkeiten und ihr Leben für unsichere Sachen zu verlieren. Und im Buch XV in Kapitel 80, Seite 737, nennt er die Richter gottlose, ungerechte Missetäter und Apostaten <vom Glauben Abgefallene> und raubgierige Wölfe und macht sich über den heiligen Augustin lustig. Und im Kapitel 81, wo er über Wunder schreibt, sagt er am Anfang und auf Seite 749 am Ende, dass die Wunder Fiktionen sind und der Großteil durch das Zeugnis von Priestern gefunden wird, deren besonderes Kennzeichen es ist, zu lügen. Er lehrt dann Chiromantie <Zukunftsdeutung aus den Handlinien>, Hydromantie <Wahrsagekunst aus dem Wasser> und anderen Aberglauben, der vom heiligen Konzil von Trient <1545-1563> verdammt wurde, und viele andere Fehler, wie man sehen kann. Es scheint mir <erforderlich>, S.S. ill.^{ma} <Sua Signoria illustrissima; Euer hochverehrter Wohlgeboren> Aviso davon zu geben, damit dieses Buch als schädlich verboten und der unbotmäßige Verfasser bestraft wird, der in Bologna Vorlesungen hält und dabei mündlich die oben genannten und noch schwerere Fehler lehren kann. Und von alldem habe ich auch dem ehrwürdigen Pater Inquisitor in Bologna geschrieben. S.S. ill.^{ma}, welcher ich mich ergebenst mit jeder Ehrerbietung empfehle, wird jene Vorkehrung treffen, die ihm geboten erscheint.
> Aus Como am 7. Mai 1570.
> Von S.S. ill.^{ma} geringstem Diener Frater Gaspare Sacco, Inquisitor von Como

Das beanstandete Buch hieß in Wirklichkeit *De rerum varietate libri XVII* (17 Bücher über die Vielfalt der Dinge) und wurde ein Bestseller. Zu Lebzeiten Cardanos erschienen drei Ausgaben, zwei 1557 in Basel bei dem Drucker und Verleger Heinrich Petri, eine im Groß-, die andere im Kleinformat, und ein Raubdruck ein Jahr später, 1558, in der französischen Stadt Avignon. Aus den Seitenangaben ergibt sich, dass Sacco die Ausgabe aus Avignon studiert und beanstandet hatte. 1559 brachte Petri auch eine deutsche Übersetzung von Heinrich Pantalon unter dem Titel *Offenbarung der Natur* heraus.

Hier ist die Übersetzung der Stelle über die Richter, die in der Ausgabe von Avignon auf den Seiten 736/737 zu lesen ist und sich in den *Opera omnia* Cardanos in Band III auf Seite 292 befindet:

> Im Allgemeinen bestand diese Täuschung im Wesentlichen aus drei <Dingen>... und <drittens> dem Betrug der Richter. Denn einst war es erlaubt, dass diejenigen anklagten und verurteilten, denen das Hab und Gut der Verurteilten zufiel. Weshalb sie viele Märchen erfanden, damit es nicht so erschien, dass diese Unglücklichen unrechtmäßig verurteilt wurden. Außerdem wurde in ihrer Untersuchung und in ihren Geständnissen nichts als Nichtssagendes oder Falsches oder Widersprüchliches oder Unwichtiges gefunden außer religiöser Geringschätzung. Einige verleugneten nämlich Christus, andere nähten das Messopfer <die Hostie> selbst in ihre Kleidung, andere bespuckten Bilder Gottes oder verübten andere ähnliche Dinge. Die Gewalt gegen diese Unglücklichen und Geisteskranken wurde zum ersten Mal vom allerweisesten Senat von Venedig aufgehoben, als er die zunehmende Raubgier dieser Wölfe bemerkte, dass sie gänzlich Unschuldige in der Hoffnung auf Beute verurteilten. Man fragte nicht, <ob der Angeklagte> ein Verächter der Verehrung Gottes <war>, sondern ein Besitzer von Reichtümern.

Wahrscheinlich hätte diese Schmähung der Richter Sacco kalt gelassen, obwohl auch er eigentlich ein religiöser Untersuchungsrichter war. Aber dort, wo im Buch von der **Raubgier dieser Wölfe** – **horum luporum rapacitatem** – die Rede war, stand rechts eine Randbemerkung, und zwar **Dominicani**, **Dominikaner**. Und Sacco war wie fast alle Inquisitoren ein Mitglied des Dominikanerordens, der 1216 von dem später heilig gesprochenene Spanier Domingo, lateinisch Dominicus, de Guzmán (1170-1221) gegründet worden war. Aber das Buch enthielt noch etwas viel Ärgeres: Im Index der Sachen und Begriffe, dem Stichwortverzeichnis am Ende, stand unter dem Buchstaben D:

Dominicani inquisitores, lupi rapaces, also **Dominikanische Inquisitoren, raubgierige Wölfe.** (Seite) **737**.

Diese vier Worte waren wie eine Ohrfeige für alle Dominikaner! Diese Beschimpfung war wahrscheinlich der Hauptgrund, warum Cardano in die Hände der Inquisition fiel, warum er seine Stellung als Universitätsprofessor in Bologna verlor, warum er ins Gefängnis der Dominikaner und nachher in den Hausarrest kam und sich sein Leben völlig änderte.

Dabei war Cardano an diesen beleidigenden Einfügungen völlig unschuldig, denn die Randbemerkung und der Eintrag im Index (nachgedruckt in der Ausgabe von Avignon) stammten nicht von ihm. Das ergibt sich aus einer Stelle in *De libris propriis* (Über die eigenen Bücher) im zweiten Teil seines Buches *Somniorum synesiorum... libri IIII* (Vier Bücher von den Erkenntnissen der Träume), Basel 1562, Seite 35, nachgedruckt in den *Opera omnia*, Band I, Seite 112. Das war die Andeutung, von der am Anfang die Rede war:

> Als das Buch De veritate rerum in Basel gedruckt wurde, fügte irgendein Rachsüchtiger, der seinen eigenen Schaden erlitten hatte, den

> er als Unrecht empfand, im Kapitel über Hexen oder Vampire einige Wörter hinzu, die die Brüder Dominikaner erzürnten, obwohl mir nichts weniger zweckdienlich war oder in meiner Absicht lag. So schienen die durch die Missgunst eines grausamen Schicksals gegen mich vorbereiteten Pfeile nicht zu genügen, wenn ich nicht auch für die Vergehen eines anderen schuldig gemacht würde. Ich beschwerte mich sofort bei dem Drucker Heinrich Petri, in anderer Hinsicht ein rechtschaffener Mann, der (da er anständig war) diese Hinzufügung von jenem <Rachsüchtigen> mit mir bedauerte. Doch die Sache ging weiter. Als ich ihm auch schrieb, war er weit entfernt, sich zu entschuldigen, lachte mich sogar aus und sagte: Was ist Dein Interesse, dass vier Worte <Dominikanische Inquisitoren, raubgierige Wölfe> hinzugefügt wurden? Was ist daran ein so großes Vergehen? Was hätte ich tun können, da ich fern von ihm war und er von mir? Außerdem wurde es <das Buch> mit diesem Schandfleck <den vier kritisierten Wörtern> in Avignon gedruckt...

Der einzige, der die Randbemerkung sowie die vier Worte im Index einfügen konnte, war ein Korrektor in der Druckerei von Heinrich Petri in Basel, der durch die Dominikaner gelitten hatte und sich rächen wollte. Aus diesem Zitat von 1562 geht hervor, dass Cardano schon bald nach dem Erscheinen von *De rerum varietate* im Jahr 1557 von Dominikanern heftig kritisiert worden sein musste. Es ist daher erstaunlich, dass er erst 1570, also 13 Jahre nach dem Druck des Buches in Basel, deshalb von der Inquisition verfolgt wurde.

Die Akten und Urteile aller römischen Inquisitionsprozesse existieren nicht mehr. Kaiser Napoleon I., der den Kirchenstaat besetzt hatte, hatte nämlich 1809 dem französischen Gouverneur in Rom, General Miollis, befohlen, alle Archive des Heiligen Stuhls in ein in Paris geplantes zentrales Weltarchiv der eroberten Länder zu transportieren. In 3.239 schweren Kisten mit einem Gesamtgewicht von 408.459 kg wurden die Papiere in die französische Hauptstadt gebracht. Nach dem Sturz Napoleons wurden jedoch 1815 bis 1817 nur rund 2.220 Kisten, teilweise beschädigt, nach Rom zurück befördert. Ein Drittel der Dokumente wurde als "unnötig" betrachtet und vernichtet oder als Abfallpapier in Frankreich verkauft, weil nicht genug Geld für den Rücktransport vorhanden war. Und darunter waren alle Prozessakten.

Der Inquisitor von Bologna, dem damaligen Wohnort Cardanos, der daher für seinen Fall zuständig war, hieß Antonio Balducci (ca. 1520-1580). Er sandte jede Woche einen genauen Bericht über die Verhöre und den Gesundheitszustand des 69jährigen Gefangenen nach Rom und Rebiba, immer als Kardinal von Pisa bezeichnet, verlangte Klarstellungen und gab präzise Direktiven.

Wahrscheinlich alle 22 den Fall betreffenden eigenhändigen Briefe Balduccis an Rebiba befinden sich im Vatikanarchiv, datiert vom 27. September 1570 bis 7. April 1571. Und 7 Briefe von Rebiba an Balducci, vom 10. Februar 1571 bis 13.

Juni 1571, sind in der Biblioteca comunale (Stadtbibliothek) des Archiginnasio in Bologna. Die Briefe Rebibas an Balducci aus dem Jahr 1570 und vom Jänner 1571 sind leider verloren gegangen. Außerdem existieren 4 Briefe Cardanos an Rebiba und einer, den Cardanos treuer Schüler und Helfer Rodolfo Silvestri (ca. 1545-1609) in seinem Namen schrieb.

Aus der erhalten gebliebenen Korrespondenz und anderen Dokumenten wissen wir nun, was mit Cardano während dieser Zeit geschah.

Am 16. Dezember 1570 bat Balducci die Kongregation für die Inquisition um einen Gnadenakt für den alten und kranken Cardano. Und tatsächlich verließ er nach 77 Tagen, am Freitag dem 22. Dezember 1570, das Gefängnis und wurde unter Hausarrest gestellt.

Am 18. Februar 1571 lesen wir in einem Brief Rebibas:

> ...und es scheint uns, dass es erledigt werden soll, indem man ihn de vehementi abschwören lässt, und mit dem Verbieten seiner besagten Bücher, in denen sich Fehler befinden...

Am 10. März 1571 folgten dann genauere Anweisungen des Kardinals von Pisa an Balducci:

> Über die Behandlung Cardanos, über die Sie mit Ihrem <Schreiben> vom XXIV. des vergangenen <Monats> meine Ansicht suchten, sagen wir Ihnen, dass Sie ihn privat coram congregatione abschwören lassen sollen und ihm dann sagen, dass Unser Herr <der gegen Ketzerei besonders scharfe Papst Pius V., 1504-1572, im Amt 1566-1572, Dominikaner, 1558-1566 Großinquisitor> nicht will, dass er weiter Vorlesungen hält noch irgendein Werk drucken lässt. Und das wird genügen, dass er es weiß, ohne es sonst in das Urteil einzufügen.

Nach dem Datum und der Unterschrift Rebibas folgt dann eine handschriftliche lateinische Bestätigung:

> Ich Hieronymus Cardanus akzeptiere diese Anordnungen durch den Ehrwürdigen Pater Inquisitor am XVII dieses Monats <17. März>.

Am 18. März wurde der Hausarrest aufgehoben. Das Datum der Abschwörung war der 22. März bei einem Treffen der Kongregation für die Inquisition in Bologna. Es gab drei Grade der Abschwörung: *de levi, de gravi* und *de vehementi*, leicht, schwer und streng. *Coram congregatione*, vor der Kongregation, war milder und weniger entwürdigend als *coram publico*, in aller Öffentlichkeit.

Am 29. Oktober 1572 verbot die 1571 neu geschaffene Kongregation für den Index (das Verzeichnis der von der Kirche verbotenen Bücher) alle Bücher Cardanos *quæ de medicina non tractant donec corrigantur*, die nicht von Medizin handeln, solange bis sie korrigiert sind. Aber erst 20 Jahre nach Cardanos Tod, im Index von 1596, wurden sechs seiner Bücher genannt mit dem Zusatz: und alle übrigen nichtmedizinischen, außer sie wurden ausgebessert. Die mathematischen Werke wurden jedoch stillschweigend erlaubt.

Ende September 1571 verließ Cardano Bologna. Am 7. Oktober traf er in Rom ein, wo er seine letzten Lebensjahre verbrachte und sogar 1573 von Papst Gregor XIII. (der 1582 den Kalender reformierte) eine Pension erhielt. Er schrieb weiter Bücher und versuchte das Verbot ihrer Veröffentlichung aufheben zu lassen. Es ist nicht sicher, ob der zumeist angegebene Todestag – 21. September 1576 – stimmt. Und es ist unbekannt, wo der große Mathematiker begraben ist.

Anmerkung. Eine *Kongregation* der römischen *Kurie*, der zentralen Verwaltungsbehörde des Papstes, ist gewissermaßen ein von Kardinälen geleitetes Ministerium. Die *Sacra Congregatio Romanæ et universalis Inquisitionis seu Sancti Officii* (Heilige Kongregation der römischen und universellen Inquisition oder des Heiligen Offiziums) wurde 1542 durch eine Bulle (einen päpstlichen Erlass) von Papst Paul III. geschaffen. Papst Pius V. (vor seiner Wahl zum Kirchenoberhaupt acht Jahre lang Großinquisitor) gründete 1571 die *Congregatio Indicis librorum prohibitorum* (Kongregation des Index <Verzeichnisses> der verbotenen Bücher). Das lateinische Wort *inquisitio* heißt eigentlich nur (gerichtliche) Untersuchung, doch wirkte die Inquisition wie ein Gericht der Kirche, um Ketzer aufzuspüren, ihnen den Prozess zu machen und sie zu verurteilen, wobei auch die Folter eingesetzt wurde und Todesurteile möglich waren.

Pius X. entfernte 1908 aus dem Namen der Inquisitionskongregation die Worte *Romanæ et universalis Inquisitionis*, so dass sie fortan nur *Sacra Congregatio Sancti Officii*, kurz Heiliges Offizium, hieß. Paul VI. gab der Kongregation 1965 den neuen Namen *Congregatio pro Doctrina Fidei* (Kongregation für die Glaubenslehre). Der Index wurde 1966 offiziell abgeschafft.

Literatur

Baldini U., Cardano negli archivi dell'Inquisizione e dell'Indice. Note su una ricerca, *Rivista di storia della filosofia*, 53 (1998), 761-766.

Baldini U.–Spruit L., Cardano e Aldrovandi nelle lettere del Sant'Ufficio romano all'Inquisitore di Bologna, *Bruniana e Campanelliana*, 6 (2000), 145-163.

Baldini U., L'edizione dei documenti relativi a Cardano negli archivi del Sant'Ufficio e dell'Indice: Risultati e problemi, *Cardano e la tradizione dei saperi* (ed. M. Baldi e G. Canziani), Mailand 2003, 457-515.

Ochman J., Le procès de Cardan, *Tijdschrift voor de Studie van de Verlichting*, 7 (1979), 125-159.

Wahrscheinlich im Herbst 2008 wird in der Libreria Editrice Vaticana das von Prof. Ugo Baldini (Universität Padua) 1998 und 2003 angekündigte Werk über die Inquisition und die Wissenschaftsgeschichte mit mehr als 1000 Seiten Dokumenten und fast 1000 Seiten Einleitung und Anmerkungen erscheinen.

HOW TO FIX AN ELECTION HONESTLY?

IVAN PETROV SALABASHEV'S NOVEL VOTING PROCEDURE IN BULGARIA, 1879–1880

Martina Bečvářová

Abstract

In the article according archival sources we will try to show how mathematical knowledge and methods helped to solve the problem of the election of the first exclusively Bulgarian government in the peaceful election in 1879 and 1880. We will describe the situation in Bulgaria, the role of a mathematician, politician and financier Ivan Petrov Salabashev (1853–1924) in this story and his forgotten electing method.

1. The Situation in Bulgaria

By the end of the 19th century the wars with Turkey had been coming to close. In 1878, due to the results of the Berlin congress, Romania, Montenegro and Serbia became independent, and in the North-Western part of contemporary Bulgaria the independent Bulgarian principality came into existence. Nevertheless, the South-Eastern part of Bulgaria, so-called Eastern Rumelia, remained under the Turkish hegemony and received the status of a special autonomous region. In 1885 both Bulgarian regions united, but the state of Bulgaria gained independence only in 1908.

Until the end of the 1870's, there was no grammar school or college where instructions were given in the Bulgarian language. The Bulgarians could study at Turkish schools or in Greek orthodox seminaries or monasteries. Those who were better off or nationalistically inclined went abroad (Romania, Russia, Austria, Bohemia, etc.). Only in the 1880s, Bulgaria relieved itself of the Turkish hegemony and started to create its own educational system of grammar schools and universities.

Since the beginning of the 1870's many Bulgarian students had been coming to Bohemia for higher education. Bohemia provided them with an education in the Czech language that was higher in the quality, cheaper and closer to their concerns than that which was available in Romania or Austria. In addition, in Bohemia the idea of "panslavism" and the efforts to help oppressed Slavonic "brothers" in Balkan were widespread. Thanks to several Czech educated people, large communities of Bulgarian students were established in some Czech towns (for example, Tábor, Písek and Hradec Králové). Besides their studies, they kept close relations with the followers of the Bulgarian national liberation movement in Romania. In their memoirs, the writer Josef Holeček (1853–1929) and the mathematician Antonín Václav Šourek (1857–1926) recalled their studies with Bulgarian friends. Bulgarian students, who graduated in Bohemia, brought some aspects of the local educational system and other activities to the new Bulgarian state. Thus, in this way, Czech mathematicians contributed both directly and indirectly to the development of Bulgarian national education and science in the second half of the 19th century in Eastern Rumelia, the Bulgarian principality and later in united Bulgaria.

One of the students who went through these complicated studies in Bohemia was Ivan Petrov Salabashev, the Bulgarian mathematician, politician and specialist in diplomacy.

2. Ivan Petrov Salabashev (1853–1924)

Ivan Petrov Salabashev was born in Thrakia in Stara Zagora on January 7, 1853 to a family of a rich merchant. First, he went to a Bulgarian elementary school in his native town. Then from 1870 to 1872 he attended the grammar school in Tábor, and then from 1872 to 1873 the grammar school in Prague. During his studies he showed deep interest in mathematics and descriptive geometry. It is said that as a student in Tábor he found an error in a Czech school textbook on descriptive geometry. After graduation he continued his studies at the Czech Technical University in Prague and attended lectures at the University of Prague. His teachers were Gabriel Blažek, Emil Weyr, Augustin Pánek, František Tilšer and František Josef Studnička. At the Czech Technical University he focused on mathematics.[1]

With the assistance of Emil Weyr, he presented his first mathematical results at a meeting of the Royal Bohemian Society of Sciences that was held on May 5, 1875. His work, on kinematical geometry, was published under the title *O křivkách psaných vrcholem pohybujícího se trojúhelníka* (The curves circumscribed by the apex of a moving triangle).[2] It was the first original work of a Bulgarian mathematician. Salabashev studied curves originated by creating the apex C of the triangle ABC when the apices A and B move on pre-determined curves. Salabashev divided his work into several parts. At first, he studied a case when the points A and B moved on transversal k and l and the curve took the shape of an ellipse. Then he studied another case when the point A moved on a circle k with radius r, whose centre was on the straight line l, and the point B moved on the straight line l; the triangle ABC degenerated so that the point C lay inside the abscissa AB. There were two possible variants: $AC = CB = r$, the curve stated the shape of an ellipse, and $AB = OA = r$, the curve resulted from the equation $\rho^2 (1 + 9\mathrm{tg}^2 \varphi) = 4r^2$. In both cases he looked for the characteristics of the resulting curves.[3] In 1876 he passed a state examination and left Bohemia.

During his studies Salabashev became involved in the liberation of Bulgaria from a Turkish rule and was in contact with revolutionary Ljuben Karavelov (1834–1879). Thanks to assistance of his Czech friends he published articles about Bulgarian political and economic problems, culture, language, tradition, etc.

When the Serbian-Turkish war broke out in 1876, he left for Belgrade and joint the Serbian army as a volunteer. After being disappointed with the situation in the army (disorder, misbehaviour towards volunteers, the manner of issuing, commands etc.), within a month he left for Romania, which was the centre of Bulgarian resistance. In the school year 1876–1877

[1] In the lists of students at the Czech Technical University for years 1873/1874, 1874/1875 and 1875/1876 we can find the names of lectures which he attended, his teachers' names and the results of his examinations: *Mathematics I.* (G. Blažek: Eminente 9 – Eminente), *Physics* (K. V. Zenger: E 8 – E), *Mineralogy* (J. Krejčí, no examination), *Descriptive geometry* (F. Tilšer, no examination), *Mathematics II.* (Em. Weyr: E 10 – E), *Functions of complex variables* (Em. Weyr, no examination), *Theory of probability* (A. Pánek, no examination), *Technical mechanics* (Č. Haussmann, no examination), *Analytical mechanics* (G. Blažek: E 10 – E), Physics (K. V. Zenger, no examination), *Chemistry* (F. Štolba, no examination).

[2] *Zprávy ze zasedání Královské české Společnosti nauk* (Reports on the Meetings of the Royal Bohemian Society of Sciences), 1875, pp. 66–70.

[3] This mathematical exercise is a very good one for the students of secondary schools who are interested in mathematics. I recommend solving it by the application of classical methods of analytic and descriptive geometry and then by the modern programme Cabri Geometry. Students will discover many new correlations.

he lived in Klosterneuburg near Vienna. There he concentrated on mathematics and on improving his German. The following two years he taught mathematics at the grammar school in Bolgrad in Bessarabia (today in Ukraine). He became known as a passionate teacher, a chess player, a revolutionary and a talented mathematician.

3. Salabashev's Political Career in Bulgaria

3. 1. The Beginning of his Political Career

In summer 1879 Salabashev returned to Bulgaria and became a secretary in the Ministry of Education of Eastern Rumelia. Under his leadership, a transformation of Bulgarian schools following to the Czech model started. In the school year 1879–1880 he invited to Bulgaria some of the Czech grammar school teachers who had been his classmates and friends during his studies in Prague. He initiated a close cooperation with Konstantin Jireček (1854–1918), who became a secretary and later the first Minister of Education of the Bulgarian principality.

In autumn 1879 he was elected a deputy of the Regional Chamber of Eastern Rumelia as a representative of the *Либералната партия* (Liberal Party). At the age of twenty six, he started his political career, which lasted almost thirty years. He became the youngest deputy of the first Chamber and solved successfully the problem of the election of the first exclusively Bulgarian government by means of mathematical methods.

3. 2. Problem of Election

The question is how to select, among 56 deputies, out of which 30 were Bulgarians, 17 Turks and 9 Greeks, a 10-member government consisting entirely of Bulgarians. Every deputy has right to choose 6 candidates. Finally, 10 candidates with the largest number of votes will be elected. All coalitions are possible.

First, let us show the predicted results as they were expected in Europe and Bulgaria:

Nationality	Man date	Valua tion	Possibilities
Bulgarians	30	53,6%	6 or 5
Turks	17	30,3%	4 or 5
Greeks	9	16,1%	0 or 0

On the eve of the elections on October 25, 1879, the Bulgarian deputies met in Plovdiv in the house of the local Metropolitan and opened long-term discussions about the selection of the members of the exclusively Bulgarian government committee. They speculated as follows: Turks have 17 deputies, and if they agree (and they do), at least one of their candidates will get 17 votes. It means that there is probability that a Turkish deputy will be a member of the committee. The Greeks have only 9 deputies, so they have almost no chance to have any representation in the above committee. The variants of the solution of this problem were very interesting:

- *Joining forces with the Greeks and bribing them*. This proposal was refused immediately, because it was known that the Greeks were not reliable and had betrayed the Bulgarians many times before. In addition, they wanted independence and even if the Bulgarians bribed them, they would have gained at most 70% of the seats: 7 or 8 of them were not enough for the establishment of the exclusively Bulgarian committee.

- *Committing a fraud and manipulating with ballots.*
- *Reaching an agreement because the Turks and the Greeks do not join forces.* Our strength is in unity.
- *Recognising that a solution is not possible.*

3. 3. Salabashev's Solution

Salabashev only sat silently and wrote numbers and letters representing the elected members as if he was absent-minded. The other deputies explained this fact by his respect for the patriarchs, because he was the youngest deputy. When they had no arguments, he offered his solution. He said briefly and self-confidently that he had a plan that would enable the election of 10 Bulgarian candidates for the exclusively Bulgarian committee. The others laughed and cried: *He is crazy! We shall not listen to him! The young people must obey the old and experienced ones!* But Salabshev was not discouraged, and started to explain his plan. We shall elect 10 candidates and each of them will get 18 votes, because we are 30 and each of us has 6 votes. It means 30 x 6 = 180 votes. If we elect honestly, than we shall divide these 180 votes among 10 candidates and each candidate will get 18 votes. The Turkish candidate can get only 17 votes. It is enough to reach an agreement on our 10 candidates and choose the system of voting. We do not have to join forces with the Greeks. It will not be a fraud. It is enough to apply combinatorics from secondary school and victory will be ours! Calls of disagreement followed again. *Stupidity! This is not an exercise of combinatorics. Nobody in Bulgaria learns it, nobody knows it! We shall not listen to him! It is the young man who should listen to the old and experienced ones!*

3. 4. The Process of Explanation

The older deputies almost sent him off, but two educated ones, Gregor Karadžov, the director of the grammar school in Plovdiv, and Dimitr Naumov, the chairman of the court in Stara Zagora, tried to convince the others to give Salabashev a second chance. They would risk nothing. But the chairman did not want to waste time and proposed that he would give Salabashev a chance only when he would make a bet with him. He asked him to bet 50 Turkish liras against his own 50. The situation was complicated by the fact that Salabashev had only 2 liras. Nevertheless, his friends succeeded in lowering the amount of the bet to 25 and then to 5 liras. They lent him 3 liras and explained to the chairman that it was enough for making a bet.

Salabashev could continue the second round of his explanation. He said that he would mark the candidates by 10 symbols А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К and he would prepare 30 options. On the first ballot first 6 letters would be written, on the second ballot first two letters would be taken away and two further letters would be added instead, and so on. Thus each of ten deputies would have 18 votes and the ballots would differ from one another. It would be neither a fraud nor manipulation with ballots. The reaction was negative again. *We do not believe! We do not understand it! He should explain it properly and then test it!*

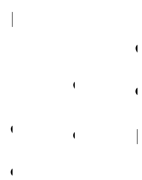
So Salabashev gave the third round of his explanation. He stated that he would choose 6 candidates from 10. If the variations without repetition are applied, it will result in 151 200 options, because 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 = 151 200. In addition, he explained that when the preferences were not calculated, i.e. the sequence of candidates on the ballots was not taken into account, it would be possible to use the combinations without repetition and only 210 options would remain, because (10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5) : (6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1) = 210. And then he showed that even 210 options were too many and it was possible to reduce their number, when the candidates were divided into designated couples. Thus only 5 couples would remain and 3 would be chosen irrespective of their sequence. It meant that 10 voting options would be obtained, because (5 x 4 x 3) : (3 x 2 x 1) = 10. This operation could even be simplified by keeping the alphabetical order of couples in the course of every voting. As the next table shows,

1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	1
5	1	2
1	**2**	**3**

it was enough to make 5 different ballots, because the 6th one was the same as the 1st. Every ballot would be made six times and thus the exclusively Bulgarian committee could be elected.

3. 5. The Result of Explanation

It was interesting that even this detailed explanation was not understood. The deputies said it was filled with too much mathematics. Even the following illustration shown by Salabashev that did not involve any numbers did not help:



He thought that it was clear that every couple occurred three times in the respective series. It meant that every Bulgarian candidate would get 18 votes. It is hard to believe that most of the 30 deputies did not understand it at all.

Therefore Salabashev had to offer the fourth explanation, which consisted in a mock test voting. It was carried out twice in order to be more convincing. He prepared the ballots and then voting and counting of votes were implemented. After two successful results everyone realized that the victory was within reach and they started to celebrate.

Even the bet had an interesting end. The unnamed chairman was persuaded and dismayed. He seemed to obtain an understanding of the importance of mathematics for politics and therefore, since the 1880's, teaching of mathematics was emphasized in Bulgaria. He offered Salabashev the reward but the mathematician refused it. It is said that he responded proudly: *I cannot profit from the ignorance. This is matter taught at secondary schools! Every graduate of a Czech secondary school knows it!* Thus his respect in political and cultural circles increased.

3. 6. Elections

During the election on October 26th 1879 the Bulgarian deputies followed the instructions and the ten-member exclusive Bulgarian government committee was established. Europe was surprised and Turkey shocked. Nobody could explain how it was possible, because the probability of such a result was, in the opinion of experts, only 1:210. The elections of October 1880 had the same result. It was a great shock for all participants. One of the Bulgarians, who finally understood this election system, revealed the process in Vienna. From there both Germans and subsequently Turks were informed. As a result, a new nonviolent change of the election system was introduced. However, for the Turks it came too late, because the process of the unification of Eastern Rumelia and the Bulgarian principality had already started. It was impossible to stop these developments peacefully.

Thanks to this success, the role of mathematics in politics and civic life was appreciated, and mathematical education in Bulgaria was strengthened both at the elementary and secondary schools level. However, Salabashev's voting method became forgotten.

3. 7. Political Salabashev's Activities

In 1880, Salabashev assembled a group of deputies and young educated men and established an exclusively Bulgarian political party – *Народнолибералната партия* (National Party) – that succeeded in the peaceful separation of Eastern Rumelia from Turkey and in the proclamation of united Bulgaria.

Salabashev's political career looked to be promising. In 1882–1884 he was a minister of the government of Eastern Rumelia. However, at the end of summer 1884 he resigned his office because he was disappointed with Bulgarian politics, intrigues, corruption and purchasable politicians, parties and even officers. He moved to Kazanlak (a small town in central Bulgaria) and changed activities completely becoming a trader in the famous attar of roses. When the political situation changed and Stefan Stambolov (1854–1895) became the Prime Minister of Bulgaria, Salabashev came back to politics. In 1888–1890 he was the Minister of Finance, in 1891–1893 the Minister of Justice and in 1892–1894 he was the Minister of Finance again. In 1890–1893, 1893–1894, 1901 and 1903–1908 he was a deputy of the Bulgarian parliament. During that period he succeeded in completing the construction of railways between Jambol and Burgas and between Sofie and Pernik, starting the construction of railways between Šumen and Kaspičan and between Sofie and Roman, and implementing the planning of works in the line Belovo (today Blagoevgrad) – Plovdiv – Stara Zagora – Nova Zagora – Jambol. Thus the cornerstone was laid for the development of the transportation network of Bulgaria. His Ministry succeeded also in minting the first Bulgarian golden coins. As the Minister of Justice he gained recognition for the application of the new Bulgarian legislation and laws that were drawn up in the European style. He stressed the logics of laws and regulations and took care of the mathematical exactness, brevity and clarity of the individual sentences. After the fall of the government and the murder of the Prime Minister Stefan Stambolov, Salabashev left politics for a while again. In 1903 he joined the new party – *Демократическата партия* (Democratic Party). When Alexandr Malinov (1867–1938) became the Prime Minister, Salabashev became the Minister of Finance for the period 1908– 1910. In 1910 he was appointed the Bulgarian ambassador in Vienna. He served in diplomatic services until 1914 and contributed to the solution of problems concerning the Turkish heritage after the end of the Balkan wars.

4. Nonpolitical career in Bulgaria

In 1880 Salabashev had became well-known in his country by his translation of the novel *Around the World in Eighty Days* written by Jules Gabriel Verne (French original *Le tour du monde on quatre-vingts jours*, 1873). In the following year he was one of the founders of the *Naučno-knižovno družestvo* (Society of Science and Typography), one of the future parts of the Bulgarian Academy of Science; he became a corresponding member in 1881 and a regular member in 1884.

In 1881, he established together with his friends, poets and revolutionaries I. Vazov (1850–1921), K. Veličkov (1855–1907) and S. Bobčev (1853–1940) the popular journal *Nauka* (Science). From 1881–1885, he was its editor-in-chief. There, he published articles about the importance of mathematics, teaching of mathematics calculations with fractions, percentages etc. At the end of 1881 he established the new section named *Zadavky* (Competitions) where he published difficult mathematical exercises, puzzles and brain-teasers.

At the end of 1894 he was again disappointed with political frictions and returned to mathematics. He started to set interesting exercises for the new educational journal *Světlina* (Illumination). At the same time he tried to support education and science using his own finances and his political influence. On February 2nd 1898, when the *Fiziko-matematičeskoto družestvo* (Society for Physics and Mathematics in Sofia) was established, he was appointed its chairman and a member of honour. He contributed a financial donation to this first Bulgarian professional association to support all its activities, initiating publishing the journal *Spisanie* (Reports). The Bulgarian championship in mathematics for students still bears his name.

In 1922 the Bulgarian Chess Club was established and Salabashev was appointed its first chairman. He played chess regularly, even as a minister, in the Union Club in Sofia, and propagated it in various ways. He died in Sofia on June 14, 1924.

5. Conclusion and a Puzzle

In 1892, in the second number of the journal *Světlina* (Illustration) Salabashev published a mathematical brain-teaser for the students of secondary schools. He provided the journal with a large amount of money and added the following challenge: If no one solves it in four months, he would publish his solution in the 6th number of the journal. The formulation of the exercise was as follows:

In the summer, when the day is longest, a biker rode on the plain from Stara Zagora to Plovdiv evenly in the direction of the sun. Determine the speed at which he rode, when he arrived at Plovdiv and how many kilometers he covered.

Nobody solved the exercise in time, and so Salabashev kept his promise and published his correct solution. Let us notice that this interesting and difficult puzzle combines the knowledge of mathematics with that of physics, astronomy and geography.

References

[1] Čobanov I., Rusev P.: *B'lgarski matematici*, Državno izdatelstvo „Narodna prosveta", Sofija, 1987.
[2] Grov K.: *Ivan Salabašev*, Obučenieto po matematika, 1981, pp. 16–20.

[3] Juchnovski I.: *B'lgarska akademija na naukite. Členove i rkovodstvo 1869–2004. Spravočnik*, B'lgarska akademija na naukite, Centralna biblioteka, Sofija, 2005.
[4] Lafčiev S. N.: *Jubileen sbornik na fiziko-matematičeskoto druž estvo v Sofija po slučaj 40-godišnijamu jubilej*, Fiziko-matematičeskoto druž estvo, Sofija, 1939.
[5] Milušev Ja.: *Česki profili v obščestvenoto razvitie na sledosvoboždenska B'lgarija*, Akademično izdatelstvo „Marin Drinov", Sofija, 2005.
[6] Rychlík J.: *Dějiny Bulharska*, Lidové noviny, Praha, 2000.

WWW pages

[1] http://www.minfin.government.bg/bg/page/107
[2] http://www.geocities.com/capitolhill/rotunda/2209/Bulgaria.html?20071
[3] http://bulharsko.proweb.cz/deji13.htm

Archival sources

[1] Archives of the Czech Technical University in Prague (Salabashev's studies at the grammar schools and at the Technical University).
[2] Archives of the Czech Academy of Sciences in Prague (Salabashev's mathematical article).
[2] Archives of Charles University.
[3] Czech National Library in Prague, Bulgarian National Library in Sofia.

Note

This article is extend version of the lecture presented at the 9th Austrian Symposium on the History of Mathematics (May 2008, Miesenbach, Austria).

Acknowledgments

I would like to express my gratitude to the professor Ivor Grattan-Guinness who has corrected the English of my text and who gave me many interesting advices. Of course, the responsibility of possible mistakes rest entirely with me.

Address:

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Department of Applied Mathematics
Faculty of Transportation Sciences
Czech Technical University
Na Florenci 25
Prague 1, 110 00, Czech Republic
Email: nemcova@fd.cvut.cz

Scientists of Tartu (Dorpat) University as promoters of the research in Geometry

lo Lumiste

The university in Tartu (Dorpat), Estonia, was founded in 1632 by edict of the Swedish king Gustav II Adolph, and reopened after the Nordic War in 1802 by Russian tsar Alexander I. The serious research work in mathematic starts only from 1821 when the special professorship was created and occupied by M. Bartels.

Johann Martin Christian BARTELS (1769-1836) was born in Braunschweig, studied in Helmstedt and Gttingen universities, and obtained the Doctor's degree in Jena University for a thesis about variational calculus in 1803. As a teenager he was an assistent to the teacher of arithmetic in Katharinen-Volksschule and in Collegium at Braunschweig, where one of his pupil was Gauss, to whom he was later connected with the friendship and correspondence. In 1805 Bartels obtained a respectful invitation to occupy the professorship of mathematics at the newly founded university at Kazan in Russland, and after a long journey through Tartu (Dorpat, Derpt) and St. Petersburg reached Kazan in February 1808. His best outstanding disciple there was N. I. Lobachevsky, later the rector of the Kazan University and creator of the first non-euclidean geometry.

In 1821 Bartels arrived Tartu and worked here 15 years. Earlier he had no possibility to publish. Only now he could present to the publicity his experience of the long-lasted pedagogical work and his research results. Some of the latter were first printed in the prize works of his talanted students, the sons of the professor of drawing and engraving C.A. Senff, Carl Julius and Carl Eduard Senff. In his own paper in Latin, "presented customarily by settling to work as an ord. prof. of mathematics at Academia Caesarea Dorpatensi", and printed by the university printing-office in 1822, Bartels introduced in the theory of spatial curve the moving trihedral of the curve.

In 1831 St. Peterburg Academy of Sciences published the Bartels's work "A short account of the fundamental formulae of geometry in three dimensions" (20 pages in French, read in Academy 1825). This matter was then presented to his student Carl Julius Senff (1804-1832) for the graduation prize work "Systematic representation of principal propositions of analytic geometry in the space", printed in 1829 by the university printing-office (in German). In comparison with Bartels's work here also the general theory of the second order curves and surfaces is developed, so that all this turned to be a little course of spatial analytic geometry; later on Bartels included in 1833 this material into his university text-book (vol.I, in German).

This fruitful work was continued by the younger brother Carl Eduard SENFF (1810-1850), who by graduation in 1830 presented a capacious prize work "Principal theorems from the theory of curves and surfaces", which was awarded the gold medal and printed in 1831 as a little book in Latin. This book can be considered as a first attempt to present all existing theory of spatial curves and surfaces, including the famous Gauss's memoir of 1827, as a unit differential geometry (if to use the later terminology). Also some original achievements were included. In the preface Senff noted that, for the most part, his work followed Bartels's methods: "More than the other pieces, to him belong the method of obtaining the curvature of a curve in Ch.IV, Sections 1,2,3, as well as the analysis in Ch.V, Section 5". This comment suggest that Senff incorporated Bartels's lecture notes into his prize work. For the first time the moving frame ("*variable axium systema*") was introduced explicitely in the theory of spatial curves. Bartels had studied also the infinitesimal displacement of such a frame and obtained the fundamental formulae for the tangent, principal normal, and binormal unit vectors, which in a modernized presentation are

$$\langle \mathbf{n}, d\mathbf{t} \rangle = -\langle \mathbf{t}, d\mathbf{n} \rangle = d\sigma,$$

$$\langle \mathbf{b}, d\mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{n}, d\mathbf{b} \rangle = d\sigma',$$

$$\langle \mathbf{t}, d\mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{b}, d\mathbf{t} \rangle = 0.$$

Here $d\sigma$ and $d\sigma'$ are considered as the arc length differentials of the corresponding spherical maps, i.e. in the present denotation $d\sigma = kds$, $d\sigma' = \kappa ds$, where k and κ are the curvature and torsion. So these formulae are completely equivalent to the famous Frenet' formulae, deduced by F.Frenet 17 years later. These formulae enabled Senff to give in his book considerably simplified deductions of some known results: Lancret identity, expressions for the curvature and torsion of the generalized evolute of a spatial curve.

Also in the theory of surfaces there are some supplements in Senff's book. The Gauss's *Theorema Egregium* is proved in terms of a notation more suitable than that used by Gauss himself. The lines of curvature are defined for the first time in the case when the surface is given by parametric equations (note that theses lines were not investigated by Gauss, although the "parametric" treatment was introduced by him).

Bartels and Senff laid the foundation of the Tartu (Dorpat) centre of differential geometry, already observed by some of historians of geometry (Struik, Reich, a.o.). Senff was the successor of Bartels on the professorship of pure mathematics. This centre strengthened considerably when in 1843 on the new established professorship of applied mathematics arrived from Berlin F. Minding.

Ernst Ferdinand Adolf MINDING (1806-1885) was born in Kalisz, grew up in Hirschberg (now Jelenia Gora), studied in 1824-1828 classical philology and philosophy in Halle and Berlin universities. Actuated by his interests he was formed, mostly by self-instruction, a prominent mathematician. Working as a secondary school teacher he wrote the doctoral dissertation on approximate calculation of double integral and defended it at Halle in 1829. From 1830 he was a private dozent in Berlin University and published his important works on the theory of surfaces: on the geodesic curvature and the foundations of the theory of surface bending, on the rotation surfaces of constant negative curvature. In these works Minding enriched considerably the Gauss's inner geometry of surfaces. The problem of surface bending was for a long time called "the problem of Minding", his trigonometry on the surface of constant Gaussian curvature was in 1867 decisive for E. Beltrami to give the interpretation for Lobachevskian planimetry.

In Tartu Minding worked 40 years (1843-1883), was elected in 1864 a corresponding member and in 1879 a honorary member of St. Petersburg Academy of Sciences. Here his mathematical interests widened considerably, although he continued research also in the theory of surfaces. In 1849, 1863, and 1875 he gave some interesting detail results about the minimal surfaces. In 1864 by the university was printed a Minding's memoir in Latin, with dedication to the Pulkovo observatory on the occasion of its 25th jubilee. Here one of the first geometric interpretation of the analytical mechanics was given, in particular, the possibility was foreseen to treat the movement process of a dynamic system as a geodesic line of a Riemannian manifold (note that a developed theory of the latter did not exist yet). Thanks to the activity of A. Kneser, who, working as a professor in Tartu, could see this memoir, it was republicated in *Math Annalen*, Bd. 55, 1902.

In 1876 more then 70 years old Minding returned to the isoperimetric problem on the curved surface, to his youth problem, and proved that only the closed curves of constant geodesic curvature can be the solutions. The next promoter of this problem in 1942 was Erhard SCHMIDT (1876-1959), a son of Tartu professor of physiology, who graduated in 1900 at Tartu University and became a professor and rector of the Berlin University.

Due to the activity of Minding and Senff, especially to Senff's book, the theory of surfaces was at Tartu in better hands as in any other university. The result let to wait not too long.

A son of an unskilled workman in Riga, Karl PETERSON (1828-1881), studied mathematics in Tartu University 1847-1852. Among the other lectures he attended the original courses of Senff and Minding on the theory of curves and surfaces. In 1853 he finished a work "On the Bending of Surfaces" (ber die Biegung der Flchen) and obtained the candidate degree for it. Although Minding gave his high evaluation to this dissertation, nevertheless it remained unpublished (the traditions had been changed) and for a long time was preserved in the archives as a small copy-book filled by a thick Gothic script. Only after Peterson's death, when his later investigations published in Moscow in the first volumes of the "Matematicheskii sbornik" (1866-67) and his book "ber Kurven und Flchen" (Moscow and Leipzig, 1868) had excited a wider interest, P. Stckel published in 1901 a short biography of K. Peterson with a little excerpt from the candidate dissertation, obtained through the medium of A. Kneser. Still the Kneser's report was allegedly not as through as it should have been, and the main merits of this dissertation were left without any attention.

The complete dissertation was translated into Russian by Jaan Depman, a Leningrad professor of Estonian nationality (with the assistance of Jaan Sarv, a professor of Tartu University) and published in 1952, together with a series of commentaries. After that it became clear that Peterson had derived the two fundamental equations of the theory of surfaces (in addition to the Gauss equation in his *Theorema Egregium*) 4 years before G. Mainardi and 15 years before D. Codazzi, and also formulated the fundamental theorem of surface theory (with a short preliminary argument) 14 years before O. Bonnet. In the international journals on the history of mathematics the Peterson achievements have been dealt with by K. Reich in 1973 and profoundly by E.R. Phillips in 1979, based on the Russian materials.

Note that in the argument by Peterson is clearly seen the impact of Bartels through Senff's book: in many discussions he rests on the above Bartels's formulae and uses the same notations $d\sigma$ and $d\sigma'$. Also the statement that curvature and torsion as some functions of the arc length parameter determine the line is used; this statement belongs evidently to folklore of Tartu geometers (although the strong proof is usually ascribed to R.E.E. Hoppe and was given in 1862).

After graduation Peterson could not find the engagement in Tartu University and had to proceed in Moscow. However among Minding's colleagues at Tartu there was one who dealt with some geometrical problems and achieved the original results. This was an astronomer-observer Thomas CLAUSEN (1801-1885). After working by Schumacher in Altona as an observer, and some time in Munich Optical Institute as a successor of recently dead Fraunhofer, Clausen accepted in 1842 the invitation to began work at Tartu observatory as an observer. Here his attention was turned to the classic Gauss work in surface theory, like by Minding, but direct impact was given by Jacobi. In a paper by Jacobi there was proved synthetically that for every triangle on a curved surface the difference between the sum of inner angles and two right angles is equal to the area of the spherical image of this triangle, if only the principal normals of the side lines at the vertices coincide and the spherical map on the unit sphere is made by the principal normals. (Recall that Gauss's theorem deals with the geodesic triangle.) Immediately after his arriving Tartu Clausen published in Schumacher's "Astronomische Nachrichten" a short paper where he doubted about the correctness of Jacobi's paper. Namely, he guessed that Jacobi had tried to reduce his theorem to the Gauss's theorem by choosing such a surface on which the side lines were the geodesic lines. Clausen showed that such a surface does not exist in general. Together with this he published a bit later in the same journal a more capacious paper, in which he gave a new proof for the Gauss's theorem dividing the triangle by the geodesic arcs into the increasing number of decreasing triangles and estimating the quantities of this theorem by the latter.

Clausen's suspicion and criticism caused Jacobi to seize again the pen. In the same year 1842 and in the same journal he published a paper, now often cited, in which he gave a new, more strict and complete proof of his theorem, and some new related propositions. According to one of them the spherical image by the binormals of a closed line with continues curvature divides the sphere into two parts of the same area. Clausen in his subsequent paper in 1843 considered the Jacobi's work and proof brilliant and added his own proof, which he hoped to be even more clear.

In 1847 Clausen gave for a second order surface, without proof, a connection $K^3 = ck^4$ between the curvature k of a geodesic line and Gaussian curvature at a point of this line, as well as a connection $k_2 = c_1k_1$ between the normal curvature k_1 of a curvature line of this surface and the other pricipal curvature k_2 along this line, where c, c_1 are some constants. The second connection was given also by O. Bonnet in 1848, but only for the ruled second order surface; evidently Bonnet was not aware of the Clausen's announcement.

A most profound treatment of the 19th century centre of differential geometry at Tartu is given in 1973 by K. Reich in her dissertation, but nevertheless Clausen is missing there. Despite this she called Dorpat "a splended research centre in the 19th century".

The scientists connected with Tartu had some achievements also in such a subject of geometry as geometrical constructions. Here first the activity of a graduator of the Tartu (Dorpat) university Magnus Georg PAUCKER (1787-1855) is worth mentioning. From 1824 he was a professor of Academia Petrina at Miitavi (now Jelgava, Latvia). Gauss in a work of his youth "Disquisitiones arithmeticae" (1801) showed that a regular polygon with a prime number n of vertices can be constructed by ruler and a pair of compasses only if $n = 2^{2^k} + 1$. Here $k = 0$ and $k = 1$ give regular triangle and pentagon, the constructions of which were known already in the ancient times. The next values $k = 2, 3, 4$, etc. give $n = 17, 257, 65537$, etc. The construction for 17 was first published by C.F. v. Pfleider in 1802, for 257 by F.J. Richelot in 1832. Paucker had made self-dependently, before Richelot, the necessary calculation for the case 257, and presented it in the Curland Society of Literature and Arts. The corresponding information in periodical had attracted the attention by Gauss and caused him to write a letter to Paucker. In 1822 in the annual of the society Paucker published his results and as an appendix gives some excerpts from the Gauss's letter. This made clear that Gauss made the necessary calculations already in 1796 for the cases 17 and 257, but did not publish (only had announced in the Literaturzeitung of Jena 1796).

3

Also the problems connected with the lunes of Hippokrates had been investigated by Clausen and Paucker. In the Crelle's journal Clausen published in 1840 a paper, in which he showed how to find two new types of squarable lunes with proportions 5:1 and 5:3 of circular arcs. A generalization of the Hippokrates's problem is the question how to find the curvilinear triangles, whose sides are the circular arcs and which can be squared by ruler and compasses. These were a topic of a Paucker's research which was published in his text-book "Die ebene Geometrie der Geraden Linie und des Kreises" (Knigsberg, 1823). In his Tartu period Clausen's scientific activity was worthily acknowledged: 1844 Knigsberg University on the occasion of its 300th jubilee awarded Clausen the degree of honorary doctor of philosophy. After Mdler's retiring Clausen was appointed in 1865 the ordinary professor of astronomy at Tartu (although his official education was limited by seven years of home-instruction, given by local pastor Georg Holst). In 1869, when the 50th jubilee of St. Petersburg University was celebrated, Clausen was elected, together with Minding, a honorary member of the university.

The successors of Minding on the post of the professor of applied mathematics at Tartu University were Otto STAUDE (1857-1928) and Adolf KNESER (1862-1937), who came to Tartu in 1886 and 1889, correspondingly. Both made here some investigations in the theory of algebraic lines. Their collegue on the post of the professor of pure mathematics was from 1888 Friedrich SCHUR (1856-1932), who had then published several papers on the geometry of second order line complexes and of the third and fourth order algebraic surfaces, also his classic investigations on Riemannian geometry and on applicable hypersurfaces in Euclidean space.

Hilbert's book "Grundlagen der Geometrie" (1899) gave a new foundation to geometry. Nevertheless it gave rise to some critics. For instance, Henri Poincaré wrote in *Journal des savants*, 1902: "Wouldn't be better to give the axioms in the second group a form which ... separates them from the first group?".

O. Veblen in USA was the first to respond to this question by his paper in 1904, where he gave independent axioms for betweenness and showed that the lines and planes can be then defined as special sets of points, and the axioms of incidence can be then proved. This approach was developed further in the doctoral dissertation "Foundations of Geometry" (in Estonian) of the professor of Tartu University Jaan SARV (1877-1954), published in "Acta et Comment. Univ. Tartuensis (Dorpatensis)", A19, 1931. He extended the geometry, based on the betweenness, to the higher dimensions, and by means of the coordinates solved also the problems with the congruence. Introducing the coordinates by harmonic row of points he assumed the continuity and concluded that the coordinates are the real numbers, including the irrational numbers. Some superfluities in his axiomatics were then eliminated by his colleagues Jri NUUT (1892-1952) and Arnold TUDEBERG (from 1936 HUMAL) (1908-1987) in 1932 and 1934, correspondingly. This accomplished axiomatics was then used by the AUTHOR of the present report in 1964 in his text-book "Foundations of Geometry" (in Estonian) and in a paper "On models of betweenness" (in Russian; Proc. Estonian SSR Acad. Sci., v. 13). In the first the congruence was introduced by the concepts of "flag" and "movement", the latter as an element of the subgroup of the group of collineations (i.e. transformations which preserve the betweenness) with trivial acting on the set of flags. In the second paper there is proved by a new introduction of coordinates, after showing the Desarguesian theorem in the bundle of lines, that a betweenness model in dimension $n > 2$ can be considered as a convex domain of a n-dimensional linear space over an ordered skew field. Note that the theory of betweenness models was meanwhile called by J. Hashimoto in 1958 the "betweenness geometry", and then the betweenness plane, when $n = 2$, by R.I. Pimenov in 1968 the "Lumiste plane". The theory of such a plane (non-desarguesian, of Moufang-type etc.) is recently anew investigated by the author in 2007.

Concluding, there can be remarked that in 1961 Jri Nuut terminated his investigations on hyperbolic cosmology by a monograph, the first volume of which "Lobachevskian Geometry in Analytic Treatment" was published by Acad. Sci. SSSR in Russian. The present author, after self-improving in Moscow by S.P. Finikov, G.F. Laptev, and A.M. Vassiljev, renewed the differential geometric investigations in Tartu, which have led now to the author's monograph "Semiparallel Submanifolds in Space Forms" (Springer, 2008).

4

Carl Friedrich Hindenburg
und das Herausbilden deutschsprachiger Journale für Mathematik

Hans-Joachim Girlich, Leipzig

Der sächsische Gelehrte C.F. HINDENBURG begründete die deutsche kombinatorische Schule, die bis ins 19. Jahrhundert hinein die akademisch betriebene Mathematik in Deutschland stark beeinflusste.[1]
In einer der ältesten noch zugänglichen Kurzbiographien zu HINDENBURG, deren Details wir auch weiterhin nutzen werden, schrieb 1831 STIMMEL:

> Als Erfinder der combinatorischen Analyse hat sich H. einen unsterblichen Namen erworben.[2]

HINDENBURGS wissenschaftliches Werk wurde 100 Jahre nach seinem Tode kritischer gesehen. Die Mathematiker NETTO sowie PRINGSHEIM und FABER reduzierten die kombinatorische Schule auf ihren Kern, die algebraische Analysis[3] und nahmen ihr den Anspruch auf Dominanz in der Analysis. In jüngster Zeit wurde HINDENBURG gewürdigt durch Arbeiten von JAHNKE, vorrangig im Hinblick auf den mathematischen Unterricht in Deutschland[4], von PECKHAUS zur Algebra der Logik[5], und von KÜHN sowie GIRLICH zur Lehrtätigkeit an der Universität Leipzig[6].
HINDENBURGS Wirken als Herausgeber wird meist nur registrierend erwähnt. Nur GÜNTHER betonte sein Verdienst, die erste Fachzeitschrift für Mathematik geschaffen zu haben[7]. Anlässlich des 100jährigen Bestehens von CRELLES *Journal für die reine und angewandte Mathematik* im Jahre 1927 gab LOREY ein einseitiges Urteil über das Scheitern von HINDENBURGS *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* ab[8]. Das ist uns Anlass, den Lebensweg von HINDENBURG etwas genauer zu verfolgen und seine Leistungen beim Befördern verschiedener Publikationsformen der Mathematik im Vergleich zu späteren Aktivitäten in Wien (VON ETTINGSHAUSEN) und Berlin (CRELLE) herauszustellen.

I. Hindenburgs Lehrjahre

Am 13. Juli 1741 wurde CARL FRIEDRICH HINDENBURG als Sohn des Kaufmanns JOHANN GOTTLOB HINDENBURG in Dresden geboren. Das berichtete bereits WEIZ im Jahre 1780.[9] NETTO benannte 1739 als Geburtsjahr. Diese Angabe wird gestützt durch den Eintrag Nr.449 von 1754 des Schülerverzeichnisses vom Gymnasium in Freiberg, das 30 km südwestlich von Dresden gelegen ist und das Carl

[1] [BE 2006], Bd.12, S.478.
[2] [St 1831], S.253.
[3] [Ne 1908]; [PF 1909].
[4] [Ja 1990]; [Ja 1993].
[5] [Pe 1997].
[6] [Kü 1988]; [Gi 2008].
[7] [Gü 1908], S.4.
[8] [Lo 1927],S.4.
[9] [Wz 1780], S.112.

Friedrich von seinem 15. Lebensjahr an besuchte. Mit dem Ziel, ein Studium der Medizin an der Universität Leipzig aufzunehmen, wurde er am 21. Mai 1757 in deren Matrikel inskribiert.[10] Er besuchte Vorlesungen bei den Professoren der Anatomie und Chirurgie, Therapie bzw. Physiologie CHRISTIAN GOTTLIEB LUDWIG (1709-1773), JOHANN GOTTFRIED JANCKE (1724-1773) und ERNST GOTTLOB BOSE (1723-1788). Der Dekan der medizinischen Fakultät LUDWIG war mit seinem berühmten Vorgänger JOHANN ERNEST HEBENSTREIT (1703-1757) im Auftrag des Kurfürsten von Sachsen 1731 als Naturforscher in Afrika und beeindruckte mit einer naturwissenschaftlichen Beobachtung der Lebensvorgänge. Anfänge einer Experimentalwissenschaft in der Verbindung von empirischer Betrachtung und WOLFFschem Rationalismus erlebte HINDENBURG in den Veranstaltungen des Professors der Physik JOHANN HEINRICH WINKLER (1703-1770), der zum Zwecke der Demonstration eine physikalische Sammlung aus Instrumenten und Modellen aufbaute und einsetzte. Eine weitere Form der Auswertung von Beobachtungen lernte HINDENBURG bei dem Astronomen und Professor der Mathematik GOTTFRIED HEINSIUS (1709-1769) kennen.

Zur eigenen wissenschaftlichen Arbeit wurde HINDENBURG durch die Professoren JOHANN AUGUST ERNESTI (1707-1781) und CHRISTIAN FÜRCHTEGOTT GELLERT (1715-1789) angeregt, die über Dichtkunst, Beredsamkeit und Moral lasen. Seine ersten beiden Veröffentlichungen waren der Philologie der alten Sprachen verpflichtet. So untersuchte er textkritisch[11] noch 1763, im letzten Jahr an der Universität, MUSAIOS Epos *Hero und Leander*, das bereits CHRISTOPHER MARLOWE (1564-1593) bearbeitet hatte und nach FRIEDRICH SCHILLERS Ballade zu FRANZ GRILLPARZERS Liebestragödie *Das Meer und der Liebe Wellen* emporstieg. HINDENBURGS Studienzeit im preußisch besetzten Leipzig endete gleichzeitig mit dem Siebenjährigen Krieg und er musste sich als Hauslehrer verdingen. Trotz neuer Aufgaben, die gleich erörtert werden sollen, blieb er auch der Philologie treu und publizierte 1769 eine Arbeit über XENOPHONS *Memorabilien*[12], wofür er großes Lob bei ERNESTI erntete und den Weg zum Magisterium in Leipzig bereitete, das er am 14.2.1771 mit dem Titel Magister artium diplomaticus erhielt.

> Nach vollendeter akademischer Laufbahn 1763 kam er durch Gellerts Empfehlung als Erzieher zu dem damals schon als außerordentliches mathematisches Genie sich auszeichnenden Hrn von Schönberg, begleitete späterhin seinen Zögling auf die Leipziger Hochschule...[13]

GELLERT hatte 1757 Kontakt zu einem Herrn von SCHÖNBERG auf Gut Meineweh[14] das zum sächsischen Amt Weißenfels gehörte. War etwa CURT ADOLPH DIETRICH von SCHÖNBERG HINDENBURGS erster Zögling, der am 11.5.1765 in die Leipziger Matrikel eingeschrieben wurde? Zu dem Geschlecht derer von SCHÖNBERG Meissnischen Stammes gehörte auch der Oberberghauptmann CURT ALEXANDER von SCHÖNBERG auf Oberschöna bei Freiberg in Sachsen. Dessen Sohn CURT

[10] [Ne 1908], S.202, [FM 1754], [Er 1909], S.164. Ein weiteres Indiz für das Geburtsjahr 1739 liefert [LT 1808], in dem über ein Begräbnis am 21.3. berichtet wird: „Ein Mann 69 J. Hr. M. Carl Frdr. Hindenburg, der Physik ordentl. Prof., ...". Recherchen in den Taufregistern Dresdener Kirchen blieben bisher ohne Erfolg.
[11] [H 1763].
[12] [H 1769].
[13] [St 1831], S.252.
[14] [Dö 1853], S.15.

Friedrich sollte von Hindenburg auf ein Studium der Mathematik und Naturkunde vorbereitet werden, das dieser 1769, knapp 10 Jahre alt, in Leipzig begann. Durch den Vorlesungsbesuch mit seinem Zögling kam er bald in persönlichen Kontakt mit dem Nachfolger von Heinius in Leipzig, den durch Christian Wolff in Halle geschulten Georg Heinrich Borz (1714-1799). Dieser half ihm, von der Literatur der alten Griechen abzurücken und neue Felder zu erschließen. Curt Friedrich von Schönberg (1759-1834) war ein mathematisches Wunderkind. Mit 12 Jahren veröffentlichte er seine erste Arbeit über Kegelschnitte oder war es nur ein Kommentar zu Hindenburgs Bearbeitung einiger Abschnitte von Kästners *Algebra*? Allerdings ließ er 1773 eine beachtliche Abhandlung zur algebraischen Analysis der Kegelschnitte folgen, die auch von Kästner profitiert, aber von der Anlage her über die Vorlagen hinausgeht[15]. 1777 ging er mit seinem Mentor nach Göttingen, um bei diesem berühmten Mathematiker Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800) unmittelbar zu studieren. Mit 18 Jahren wurde er an der Leipziger Universität zum Magister artium diplomaticus promoviert.
Hindenburg selbst veröffentlichte in Göttingen zwei grundlegende Arbeiten zur Kombinatorik,in denen er an seine erste mathematische Publikation von 1776 anschloss. Einen Teil der Ergebnisse hatte er bereits zu einer Dissertation zusammengefasst, mit der er 1778 in Leipzig sich habilitierte. 1779 wurde er Korrespondent der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen.[16]

II. Professor an der Universität Leipzig

Der Magister Hindenburg begann seine Lehrtätigkeit an der Leipziger Universität im Sommersemester 1780 mit Vorlesungen zur reinen Mathematik, Geometrie und Analysis sowie zur Astronomie. Dabei stützte er sich auf Kästners Lehrbücher[17]. Sein Vorlesungsprogramm zur Mathematik, aber auch seine weiterführenden Forschungen zur Kombinatorik, fanden solchen Anklang, dass er bereits 1781 als außerordentlicher Professor vereidigt wurde.[18] Der Unterricht in reiner und angewandter Mathematik oblag bisher in erster Linie den beiden Ordinarien, dem schon betagten Borz für Mathematik und Christian Benedict Funk (1736-1786) für Physik. Hindenburg kam durch die Lehrveranstaltungen mit Funk in engeren Kontakt und war mit ihm und dem Professor der Oekonomie Gottfried Nathan Leske (1752-1786) von der Notwendigkeit eines wissenschaftlichen Publikationsorgans überzeugt. Leske hatte bereits 1779/1780 *Abhandlungen zur Naturgeschichte, Physik und Ökonomie* in der Leipziger Weygandschen Buchhandlung in zwei Teilen veröffentlicht. Darin waren mit Anmerkungen versehene Übersetzungen von Arbeiten bedeutender ausländischer Autoren gesammelt. Zusammen mit der Dessauer *Buchhandlung der Gelehrten* brachten sie 1781 eine neue Zeitschrift heraus und fungierten zu dritt als Herausgeber des *Leipziger Magazin zur*

[15] [vS 1770], S.4; [Kä 1760] §322-418, [Kä 1761]; [vS 1773].
[16] [H 1778], [H 1779], [H 1776], [H 1778D],[Ar 1928],S.78.
[17] [Kü 1988], Anlage 4.
[18] [UAL 1781], PA 579, Bl. 2, [H 1781].

Naturkunde, Mathematik und Oekonomie. Dabei ließen sie eigene Arbeiten über Akustik, Landwirtschaft und Geometrie drucken, aber auch fremde Beiträge über Meteorologie, Geographie und Rezensionen neuer Bücher. Das Ableben von FUNK brachte HINDENBURG 1787 die ordentliche Professur für Physik an der Philosophischen Fakultät.[19] Seine bisherigen Bewerbungen auf ein vakantes Ordinariat in den Geisteswissenschaften wurden mehrmals abschlägig beschieden, da er als Mathematiker gebraucht wurde und als Nachfolger von BORZ vorgemerkt war. Da dieser aber nicht abtreten wollte, wurde HINDENBURG für das nun freie Physik-Ordinariat erwählt, obwohl er bisher keine Forschung auf diesem Gebiet betrieben, dafür aber Vorlesungen über Mechanik, Hydrodynamik und Optik gehalten hatte. Mit einer Arbeit über Wasserpumpen wurde er nachträglich für Physik habilitiert.[20] Er setzte die von seinen Vorgängern WINKLER und FUNK begonnene Etablierung der Experimentalphysik auf dem Gelände des Dominikanerklosters fort, das 1543 vom Landesherren der Universität übereignet worden war. So ließ HINDENBURG den primitiven Physikhörsaal, den Funk aus vier ehemaligen Klosterzellen des Paulinums notdürftig eingerichtet hatte, zweckmäßig ausbauen, um dort auch optische Versuche vorzuführen. Die für die Experimente erforderlichen physikalischen Instrumente waren in Nebenräumen untergebracht, die HINDENBURG zur besseren Aufbewahrung durch Schränke ausstatten und später die physikalische Sammlung aus eigenen Mitteln erweitern konnte.[21]

Seit dem Sommersemester 1782 hielt HINDENBURG regelmäßig Vorlesungen über Astronomie. Allerdings fehlten in Leipzig die Möglichkeiten zu systematischer Himmelsbeobachtung. Die Vorstellungen der Universität führten im Oktober 1786 zu einem amtlichen Bescheid des Kurfürsten, den Turm der Pleißenburg zu einer Sternwarte einzurichten. Der von den Professoren BORZ und HINDENBURG vorgelegte Entwurf wurde mit einem von Stadtbaudirektor DAUTHE geleiteten Umbau realisiert. Der Hindenburg-Schüler CHRISTIAN FRIEDRICH RÜDIGER (1760-1809), zum Observator und Extraordinarius 1791 ernannt, übernahm die der Universität 1794 übergebene Sternwarte und begründete mit seinen Nachfolgern CARL BRANDAN MOLLWEIDE (1774-1825) und AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790-1868) den ausgezeichneten Ruf der Leipziger Astronomie im 19. Jahrhundert.[22]

Innerhalb der Universitätshierarchie hat HINDENBURG viele Ämter bekleidet. 1790 fungierte er als Dekan der Philosophischen Fakultät, 1791 wurde er zum Rektor der Universität gewählt, 1793 Kollegiat des kleinen Fürstenkollegiums, 1794 Procancellarius, seit 1798 Kollegiat des großen Fürstenkollegiums. Er gehörte zu den hervorragenden Mitgliedern der Fürstlich Jablonowskyschen Societät der Wissenschaften, war Ehrenmitglied der Churfürstlichen Sächsischen Leipziger ökonomischen Gesellschaft und seit 1794 auswärtiges Mitglied der L'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg.[23]

---

[19] [UAL 1787], PA 579, Bl.7.
[20] [Kü 1988], Anlage 4, [H 1787].
[21] [Sc 1985], S.5-19.
[22] [Br 1878].
[23] [BB 1987], S.146.

III. Herausgeber mathematischer Literatur

Durch den plötzlichen Tod von FUNK und LESKE im Jahre 1786 ergab sich für HINDENBURG, der bisher im Leipziger Magazin durch Einrücken nur weniger Beiträge zur Mathematik eine eher bescheidene Rolle gespielt hatte, eine neue Situation, aus der er durch Reduktion der Fachgebiete der Zeitschrift auf die Mathematik und durch Gewinnung des Direktors der Berliner Sternwarte, JOHANN BERNOULLI (1744-1807) als prominenten Mitherausgeber, Vorteil ziehen konnte. Aus der vorangegangenen vieljährigen Beziehung dieser beiden Gelehrten erwachsen, schrieb BERNOULLI bereits 1785 in Dankbarkeit über HINDENBURG:

> ... dessen Ruhm durch vortreffliche Schriften sich mehr und mehr ausgebreitet hat, und den itzt ganz Deutschland als einen seiner scharfsinnigsten Mathematiker dieses Jahrhunderts verehret. [24]

HINDENBURG redigierte unverzüglich das nun umbenannte *Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik* und nutzte es auch zur Diskussion seiner kombinatorisch-analytischen Forschungen. Das war das erste wissenschaftliche Journal der mathematischen Wissenschaften. Es wurde aufgewertet durch Arbeiten von KÄSTNER aus Göttingen und nachgelassenen Schriften von JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777), den beiden bedeutendsten deutschen Mathematikern der 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts. HINDENBURG wurde somit zum Begründer der „kombinatorischen Schule“. Er griff Ideen des großen Polyhistors GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716) auf, die dieser in seiner Leipziger *Dissertatio de Arte Combinatoria* angedeutet hatte, und entwickelte daraus, sowie nach dem zweiten Teil der *Ars conjectandi* von JACOB BERNOULLI (1654-1705) neue Ansätze zu Strukturen und Verfahren der Kombinatorik, die insbesondere für die Algebra und unter Beachtung der *Introductio in analysin infinitorum* von LEONHARD EULER (1707-1783) auch für die Analysis erfolgversprechend waren. Diese Forschungsrichtung wurde von seinen Studenten und Mitarbeitern HIERONYMUS CHRISTOPH WILHELM ESCHENBACH (1764-1797), HEINRICH AUGUST ROTHE (1773-1842) und MORITZ VON PRASSE (1769-1814) ausgebaut[25]. Der wissenschaftliche Austausch mit Fachkollegen außerhalb Leipzigs auf diesem speziellen Gebiet wurde von HINDENBURG organisiert mittels der Fachzeitschrift *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* im Jahre 1795, die auch das 1789 eingestellte neue Leipziger Magazin fortsetzte, außerdem durch die Herausgabe einer Bücherserie *Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen*, von der der erste Band 1796 erschienen ist. Die aufgenommenen Aufsätze waren ursprünglich zum Einrücken ins *Archiv* zugesandt worden, aber

> wegen der nöthigen Abwechselung der Materien ... besonders herauszugeben.[26]

Die Mitwirkung namhafter Mathematiker wie KÄSTNER (Göttingen), CHRISTIAN KRAMP (Köln), JOHANN WILHELM PFAFF (Helmstedt), GEORG SIMON KLÜGEL (Halle), JOHANN NICOLAUS TETENS (Kopenhagen) bekundete das allgemeine Interesse und

[24] [Be 1787], S.VIII, Vorbericht vom 4. April 1785.
[25] [H 1781], [Es 1789],[Ro 1793], [vP 1796].
[26] [H 1796], vgl. Anfang des Vorberichts.

führte zu entsprechenden mathematischen Fortschritten. Doch die Kriegsunruhen, verbunden mit dem Einfuhrverbot von Büchern und Zeitschriften nach Russland, zwangen die Schäfersche Buchhandlung, HINDENBURGS *Archiv* mit dem elften Heft einzustellen. Die Sammlung dagegen wurde 1800 mit dem 2. Band fortgesetzt. Das Buch *Über combinatorische Analysis und Derivations-Calcul* (der vorgesehene dritte Band) wurde vom Schwickertschen Verlag 1803 noch herausgebracht. Hier wurden erstmalig auch französische Aufsätze veröffentlicht. Es bildet in der Auseinandersetzung mit Arbeiten von BURMANE (Mannheim) und ARBOGAST (Straßburg) das abschließende Werk von HINDENBURG.[27]

Damit schien auch diese spezielle Forschungsrichtung im Wesentlichen erschöpft gewesen zu sein. Die Aktivitäten derart orientierter Mathematiker verlagerte sich vor allem auf den mathematischen Unterricht und auf das Verfassen geeigneter Lehrbücher zur kombinatorischen Analysis. Diese erstrecken sich von dem Zweibänder des Erfurter Mathematikprofessors WEINGÄRTNER, der noch unmittelbar an HINDENBURG anschloss, bis zu dem modernen Analysis-Vorkurs des stärker EULER verpflichteten ANDREAS VON ETTINGSHAUSEN[28] (1796-1878),der ein Jahr später seine berühmten Wiener *Vorlesungen über die höhere Mathematik* folgen ließ sowie die *Zeitschrift für Physik und Mathematik*, über die 1832 sein Kollege an der k.k. Universität zu Wien ANDREAS BAUMGARTNER (1793-1865) berichtete:

> Diese Ansichten bestimmten mich, in Verbindung mit Hrn. Professor von Ettingshausen im Jahre 1826 die Herausgabe einer Zeitschrift zu unternehmen, die zwar hauptsächlich für Physik bestimmt war, aber auch die Mathematik in ihr Gebiet aufnehmen sollte, um auch zur grösseren Verbreitung dieser Wissenschaft etwas beizutragen, die ungeachtet ihrer inneren Kraft und wissenschaftlichen Vortrefflichkeit doch ein eigenes Journal nicht erhalten zu können, und daher eines Geleites zu bedürfen schien. Allein der Erfolg entsprach den Erwartungen nicht, weil die Zahl der mathematischen Leser geringer ausfiel als derjenigen, welche sich durch die mathematische Formelsprache zurückschrecken liessen. Darum tritt die Physik nun, nachdem zehn Bände der physikalisch-mathematischen Zeitschrift vollendet sind, in den alleinigen Besitz dieser Blätter ... [29]

Das Scheitern einer wissenschaftlichen Zeitschrift kann auch davon abhängen, welchen Stellenwert die Herausgeberschaft im gesamten zu bewältigenden Aufgabenspektrum des Herausgebers als Gelehrten oder Staatsmann hat. So übernahm VON ETTINGSHAUSEN 1834 die Lehrkanzel der Physik und der noch 1851 geadelte Freiherr VON BAUMGARTNER öffentliche Arbeiten bis hin zum Staatsminister und zum Präsidenten der Akademie der Wissenschaften zu Wien, sodass die genannte physikalische Zeitschrift nicht einmal acht Bände erreichen konnte. 1848 wurde BAUMGARTNER mit der obersten Leitung des österreichischen Eisenbahnbaus betraut. Die Berlin-Potsdamer Eisenbahn wurde 1838-1840 nach dem Entwurf des Mathematikers und Baumeisters AUGUST LEOPOLD CRELLE (1780-1855) errichtet. Dieser begründete 1826 in Berlin das *Journal für reine und angewandte Mathematik*, das zu seinem Tode bereits 50 Bände umfasste und bis heute noch existiert. Was CRELLE als Herausgeber von den

[27] [H 1800], [H 1803].
[28] [We 1800/1801], [vE 1826].
[29] [Ba 1832], S. IV/V, vgl. auch [BS 2008].

Universitätsprofessoren HINDENBURG und VON ETTINGSHAUSEN unterschied, war die Möglichkeit, als hoher Staatsbeamter den offiziellen Bezug seiner Zeitschrift an den preußischen Lehranstalten durchzusetzen. Vielleicht noch stärker wirkte er durch seinen anregenden und unterstützenden Kontakt zu vielen jungen Mathematikern, begonnen mit NIELS HENRIK ABEL (1802-1829), dessen erste Arbeiten er selbst aus dem Französischen ins Deutsche übersetzte, JAKOB STEINER (1796-1863) und CARL GUSTAV JACOBI (1804-1851), die allein 24, 51 bzw.98 hochkarätige Beiträge für das Crelle-Journal lieferten.[30]

Literatur

[Ar 1928] ARNIM, M.: *Mitgliederverzeichnis der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*. Dieterich, Göttingen 1928.

[Ba 1832] BAUMGARTNER, A. (Hrsg.): *Zeitschrift für Physik und verwandte Wissenschaften*. Heubner, Wien 1832, Band 1.

[Be 1787] BERNOULLI, J. (Hrsg.): *Joh. Heinrich Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel*. Fünfter und letzter Band, De la Garde, Berlin 1787.

[BB 1987] BORODIN, A.I., BUGAI, A.S.: *Hervorragende Mathematiker*: Biographisches Wörterbuch (russ.), Kiew 1987.

[BE 2006] *Brockhaus Enzyklopädie*, F.A. Brockhaus, Leipzig Mannheim 2006

[Br 1878] BRUHNS, C.: *Die Astronomen der Sternwarte auf der Pleissenburg in Leipzig.* Edelmann, Leipzig 1878.

[BS 2008] BINDER, C., SCHMITT,P.: *Andreas von Ettingshausen und das Symbol* $\binom{n}{k}$. Algorismus, Augsburg 2008 (im Druck).

[Ca 1908] CANTOR, G. (Hrsg.): *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 4. Band von 1759 bis 1799,* B.G. Teubner, Leipzig 1908.

[Dö 1853] DÖRING, H.: *Gellert 2) Christian Fürchtegott*. In: Allgemeine Encyklopädie der Wissenschaften und Künste, hrsg. von J.S.Ersch und J.G.Gruber, Bd.57, Leipzig 1853.

[Ec 1974] ECCARIUS, W.: *Der Techniker und Mathematiker August Leopold Crelle (1780-1855) und sein Beitrag zur Förderung und Entwicklung der Mathematik im Deutschland des 19. Jahrhunderts*. Inauguraldissertation, Karl-Marx-Universität Leipzig 1974.

[Ec 1976] ECCARIUS,W.: *August Leopold Crelle als Herausgeber des Crelleschen Journals.* Journal für die reine u. angewandte Mathematik 286/287 (1976), 5-25.

[Er 1909] ERLER, G. (Hrsg.): *Die jüngere Matrikel der Universität Leipzig. III.Band (WS 1709-SS 1809)*, Giesecke & Devrient, Leipzig 1909.

[Es 1789] ESCHENBACH, H.C.W.: *De serierum reversioni formulis analytico-combinatoriis exhibita specimen.* Breitkopf, Leipzig 1789.

[FM 1754] *Freyberger (Schul-) Matrikel*, Freiberg/Sachsen 1754.

[Gi 2008] GIRLICH, H.-J.: *Carl Friedrich Hindenburg zum 200.Todestag am 18.März 1808.* Jubiläen 2008, Universität Leipzig 2008 (im Druck).

[30] [Ec 1974], [Ec 1976], S.22.

[Gü 1808] GÜNTHER, S.: *Geschichte der Mathematik in selbständigen Werken, monographischen Arbeiten und Biographien ...* In [Ca 1908], 1-36.
[H 1763] HINDENBURG, C.F.: *Specimen Animadversionum philologico-criticarum in Musaeum.* Lipsiae 1763.
[H 1769] HINDENBURG, C.F.: *Animadversiones, quibus Xenophontis Memorabilium Socratis dictorum et factorum libri emendantur et illustrantur.* Crusius, Lipsiae 1769.
[H 1776] HINDENBURG, C.F.: *Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen, durch Abzählen oder Abmessen bequem und sicher zu finden.* Crusius, Leipzig 1776.
[H 1778] HINDENBURG, C.F.: *Infinitinomii Dignitatum indeterminatarum leges ac formulae*. Dieterich, Gottingae 1778.
[H1778D] HINDENBURG, C.F.: *Methodus nova et facilis Serierum infinitarum exhibendi Dignitatis exponentis indeterminati*. Langenhemiana, Lipsiae 1778
[H 1779] HINDENBURG, C.F.: *Infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati Historia Leges ac Formulae.* Dieterich, Gottingae 1779.
[H 1781] HINDENBURG, C.F.: *Novi systematis Permutationum Combinationum ac Variationum primas lineas et Logisticae Serierum.* Breitkopf, Lipsiae 1781.
[H 1787] HINDENBURG, C.F.: *Antliae novae hydaulico-pneumaticae mechanismus et descriptio.* Saalbach, Lipsiae 1787.
[H 1796] HINDENBURG, C.F. (Hrsg.): *Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis ... Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen.* Erste Sammlung. Fleischer, Leipzig 1796.
[H 1800] HINDENBURG, C.F. (Hrsg.): *Sammlung combinatorisch-ananlytischer Abhandlungen.* Zweyte Sammlung. Fleischer, Leipzig 1800.
[H 1803] HINDENBURG, C.F. (Hrsg.): *Über combinatorische Analysis und Derivations-Calcul.* Schwickert, Leipzig 1803.
[Ja 1990] JAHNKE, H.N.: *Mathematik und Bildung in der Humboldtschen Reform.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1990.
[Ja 1993] JAHNKE, H.N.: *Algebraic Analysis in Germany, 1780-1840: Some Mathematical and Philosophical Issues.* Historia Mathematica 20 (1993), 265-284.
[Kä 1760] KÄSTNER, A.G.: *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen*. Vandenhoek, Göttingen 1760.
[Kä 1761] KÄSTNER, A.G.: *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*. Vandenhoek, Göttingen 1761.
[Kü 1988] KÜHN, H.: *Die Mathematik im deutschen Hochschulwesen des 18. Jahrhunderts.* Dissertation, Karl-Marx-Universität Leipzig, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, 1988.
[Lo 1927] LOREY, W.: *August Leopold Crelle zum Gedächtnis*. Journal für reine u. angewandte Mathematik 157 (1927), 3-11.
[LT 1808] *Leipzig. Ein Tageblatt für Einheimische und Auswärtige.* 75. Stück. Montags den 28. März 1808, S.299.
[Ne 1908] NETTO, E.: *Kombinatorik*. In [Ca 1908], 201-221.

[Pe 1997] PECKHAUS, V.: *Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft.* Akademie Verlag, Berlin 1997.

[PF 1909] PRINGSHEIM, A., FABER, G.: *Algebraische Analysis*. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II C1. B.G.Teubner, Leipzig 1909.

[Ro 1793] ROTHE, H.A.: *Formulae de serierum reversione demonstratio universalis* ... Sommer, Lipsiae 1793.

[Sc 1985] SCHREIER, W.: *Die Physik an der Leipziger Universität bis zum Ende des 19. Jahrhunderts.* Wissenschaftliche Zeitschrift der Karl-Marx-Universität Leipzig, Math-Nat.R. 34 (1985), 5-19.

[St 1831] STIMMEL: *Hindenburg (Karl Friedrich).* In: Allgemeine Encyklopädie der Wissenschaften und Künste, hrsg. von J.S. Ersch und J.G. Gruber, Bd.107, Leipzig 1831.

[UAL 1781] Universitätsarchiv Leipzig, PA 579: *Carl Friedrich Hindenburg*, Bl.2, 1781.

[UAL 1787] Universitätsarchiv Leipzig, PA 579: *Carl Friedrich Hindenburg*, Bl.7/8, 1787.

[vE 1826] VON ETTINGSHAUSEN, A.: *Die combinatorische Analysis als Vorbereitungslehre zum Studium der theoretischen höhern Mathematik*. Wallishausser, Wien 1826.

[vP 1796] VON PRASSE, M.: Usus logarithmorum infinitinomii in theoria aequationum. Rabenhorst, Lipsiae 1796.

[vS 1770] VON SCHÖNBERG, C.F.: *Von den krummen Linien*. Langenheim, Leipzig 1770.

[vS 1773] VON SCHÖNBERG, C.F.: *Abhandlung von den Tangenten, Quadraturen und Rectificationen der Kegelschnitte.* Crusius, Leipzig 1773.

[We 1800/1801] WEINGÄRTNER, J.C.: *Lehrbuch der combinatorischen Analysis nach der Theorie des Herrn Professor Hindenburg.* Fleischer, Leipzig, Erster Theil 1800, Zweyter und letzter Theil 1801.

[Wz 1780] WEIZ, F.A.: *Das gelehrte Sachsen.* Schneider, Leipzig 1780.

Carl Friedrich Gauß' Verhältnis zur Musik

Alexander Odefey

Im Rahmen der bisherigen Untersuchungen zur Biographie von Carl Friedrich Gauß ist sein Verhältnis zur Musik nur am Rande behandelt worden. Durch systematische Auswertung der bekannten Quellen sowie durch Heranziehung mehrerer bislang nicht berücksichtigter Materialien läßt sich zeigen, daß die Beschäftigung mit Musik in Gauß Leben einen erheblich breiteren Raum eingenommen haben muß, als man bisher angenommen hat.

Aus Gauß' Kindheit und Schulzeit in Braunschweig – zunächst ab 1784 in der Volksschule (Katharinenschule), ab Ostern 1788 dann im Gymnasium Catharineum – sind keine Informationen über eine Beschäftigung mit Musik überliefert. Eine etwas andere Situation liegt im Hinblick auf seinen anschließenden Aufenthalt am Braunschweiger Collegium Carolinum vor, das er ab dem 18. Februar 1792 besuchte und das in seinem Niveau deutlich über dem eines gewöhnlichen Gymnasiums stand. Zu Gauß' engsten Freunden aus dieser Zeit gehörte Wilhelm Arnold Eschenburg (1778–1861), dessen Vater Johann Joachim Eschenburg (1743–1820) seit 1767 am Collegium Carolinum als Professor für Literatur, Philosophie, Archäologie und Mythologie tätig war und in seinen Vorlesungen nachweislich auch auf Aspekte der Musik zu sprechen kam, so in seiner zweiteiligen Vorlesung *Enzyklopädische Grundzüge der sämtlichen Wissenschaften und Künste*, die er etwa im Sommersemester 1793 und im Wintersemester 1793/94 hielt. Darüber hinaus war er ein großer Musikliebhaber, der sich um das Musikleben in Braunschweig kümmerte, Konzerte organisierte, sogar mit den beiden ältesten Söhnen Johann Sebastian Bachs (1685–1750), Wilhelm Friedemann (1710–1784) und Carl Philipp Emanuel (1714–1788), in brieflichem Kontakt stand und schließlich eine bedeutende Zahl an Schriften mit musikalischem Bezug publizierte. Gauß sprach viele Jahre später selbst davon, der Eschenburgsche Familienkreis sei ihm „wie ein unter besonderer Obhut eines gütigen Schutzengels stehender Tempel des reinsten irdischen Glücks“ erschienen, und man wird vermuten dürfen, daß er hier mit Musik in Kontakt gekommen ist. Bemerkenswerterweise befanden sich unter den Bücherbeständen des Nachlasses von Gauß insgesamt acht Texthefte von Opernaufführungen in Braunschweig bzw. Hannover in den Jahren 1782 bis 1790. Es handelt sich dabei um Werke der italienischen Komponisten Giuseppe Sarti (1729–1802), Giovanni Paisiello (1740–1816) und Antonio Salieri (1750–1825) sowie des Spaniers Vicente Martin y Soler (1754–1806), die alle zu den einflußreichsten Opernkomponisten des späten 18. Jahrhunderts gehörten. Gauß selbst war natürlich viel zu jung, als daß er bei diesen Aufführungen hätte anwesend sein können. Zudem dürften seine Eltern aufgrund ihrer niedrigen gesellschaftlichen Stellung kaum Braunschweiger Opernvorstellungen besucht haben, die in den hier relevanten Jahren zum einen im kleinen Hoftheater auf dem Burgplatz, zum anderen im großen Haus am Hagenmarkt stattfanden. Denkbar wäre, daß Gauß die Texthefte irgendwann geschenkt bekam oder sie antiquarisch erwarb. Mit einiger Wahrscheinlichkeit ließe sich aber auch vermuten, daß er sie von seinem verehrten Lehrer Eschenburg erhielt.

Gauß beendete seine Ausbildung am Collegium Carolinum 1795. Am 15. Oktober immatrikulierte er sich in Göttingen. Ein entscheidender Grund für die Wahl dieser Universität war, wie Gauß selbst bekannte, die hervorragende Ausstattung der dortigen Universitätsbibliothek. Da die Ausleihregister auch aus jener Zeit nahezu komplett erhalten sind, läßt sich nachprüfen, welche Bücher er wann ausgeliehen hat. Zunächst ist jedoch festzuhalten, daß Gauß in Göttingen eine weitere, sein ganzes Leben andauernde, enge Freundschaft schloß: mit Wolfgang (Farkas) Bolyai (1775–1856), der sich im Oktober 1796 für ein Mathematikstudium an der Universität einschrieb. Bolyai verfügte über eine große musikalische Begabung und begann nach Angaben seines Sohnes Gregor (1826–1890) in Göttingen damit, Violine zu spielen. Es existieren mehrere Belege dafür, daß Wolfgang Bolyais hier erwachendes Interesse an Musik auch auf Gauß übergesprungen ist. Dies kommt einerseits in einem Brief zum Ausdruck, den Gauß, als er in den Semesterferien bei seinen Eltern in Braunschweig war, am 29. September 1797 an Bolyai in Göttingen schrieb. Er lädt darin den Studienfreund ein, ihn in seiner Heimatstadt zu besuchen, und fährt dann fort: „Schliesslich habe noch zu melden dass wir vielleicht mit einander zurückreisen können; denn soviel von mir abhängt wird meines Bleibens hier so gar viel nicht sein, und ich sehne mich, der keuschen Jungfrau Geometria und so Gott will der geistreichen Demoiselle Musica zu opfern." Andererseits läßt sich an dem bereits erwähnten Ausleihregister der Göttinger Universitätsbibliothek ablesen, daß Gauß in diesem Jahr 1797 – und nur in diesem – mehrmals verschiedene Bücher mit musikalischer Thematik entliehen hat: Neben musiktheoretischen Schriften von Leonhard Euler (1707–1783) und Jean-Jacques Rousseau (1712–1778) waren es insbesondere drei Werke, die sich explizit mit dem Klavierspiel befassen: Carl Philipp Emanuel Bachs *Versuch über die wahre Art das Clavier zu spie-*

len, Friedrich Wilhelm Marpurgs (1718–1795) *Anleitung zum Clavierspielen* und Georg Simon Löhleins (1725–1781) *Clavier-Schule.* Man wird demnach davon ausgehen dürfen, daß Gauß 1797 entgegen der bislang in der Forschung vertretenen Auffassung doch ein Musikinstrument gespielt hat, nämlich das Klavier. Daß dies auch im folgenden Jahr noch der Fall gewesen sein dürfte, legen Eintragungen in seinen mathematischen Notizheften, den sogenannten *Schedae*, nahe. So liest man gleich im ersten der Hefte, das mit „Jul 1798" datiert ist, inmitten diverser mathematischer Rechnungen den Vermerk „Pralltriller". Anhaltspunkte dafür, daß Gauß auch in späteren Jahren noch Klavier gespielt hat, etwa durch einen Hinweis auf das Vorhandensein eines Tasteninstruments in seinen Wohnungen, wurden leider bisher nicht gefunden. Ebenfalls keine Belege haben sich erhalten für die naheliegende Vermutung, Gauß und Bolyai könnten die *Akademischen Winter-Concerte* besucht haben, die von Johann Nikolaus Forkel (1749–1818), dem Göttinger Akademischen Musikdirektor, organisiert und geleitet wurden und regelmäßig sonnabends von 17 bis 19 Uhr stattfanden.

Ende September 1798 verließ Gauß Göttingen und kehrte nach Braunschweig zurück. In den folgenden neun Jahren lebte er – die meiste Zeit mit finanzieller Unterstützung durch Herzog Carl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig-Lüneburg (1735–1806), der ihm ja bereits Mittel für seine Studien am Collegium Carolinum und an der Göttinger Universität zur Verfügung gestellt hatte – als Privatgelehrter in seiner Heimatstadt. Gauß gelang in dieser Zeit die Fertigstellung mehrerer grundlegender rmathematischer Schriften sowie die Bahnberechnung des Kleinplaneten Ceres, die ihm große Anerkennung auf den Gebieten der Mathematik wie der Astronomie sicherten. Mit seinem Freund Wolfgang Bolyai, der sein Studium in Göttingen im Juni 1799 beendet hatte und nach Ungarn zurückgekehrt war, blieb er in brieflichem Kontakt. In verschiedenen dieser Briefe ist von Musik die Rede. Auch Johanna Osthoff (1780–1809), die Gauß am 9. Oktober 1805 heiratete, war offenbar musikalisch. Anhand der Korrespondenz mit ihrer Freundin Dorothea Köppe läßt sich vermuten, daß das junge Ehepaar Gauß Opernvorstellungen im Braunschweiger Theater am Hagenmarkt gesehen hat.

Nach dem Tod seines Förderers Herzog Carl Wilhelm Ferdinand am 10. November 1806 veränderte sich Gauß' finanzielle Situation, und er nahm wenig später einen Ruf nach Göttingen als Professor für Astronomie und Direktor der Sternwarte an. Am 21. November 1807 traf er mit seiner Frau Johanna und dem kleinen Sohn Joseph in der Universitätsstadt ein, die für mehr als 47 Jahre sein Wohnort werden sollte. Aus den ersten Jahren seiner Professorentätigkeit in Göttingen könnte ein von Gauß geschriebenes Notenblatt stammen, das sich im Gauß-Nachlaß der SUB befindet, bislang aber in der Forschung unbeachtet geblieben ist. Es handelt sich dabei um den einzigen zur Zeit nachweisbaren Beleg dafür, daß er Notenschrift beherrschte. Das Blatt zeigt Johann Friedrich Reichardts (1752–1814) kongeniale Vertonung von Johann Wolfgang von Goethes (1749–1832) Gedicht *Der König in Thule*: den Text aller sechs Strophen sowie eine 16 Takte umfassende Gesangsmelodie in der Tonart g-Moll und im Viervierteltakt, versehen mit der Vortragsanweisung „Langsam und schauerlich leise". Reichardts Lied ist höchstwahrscheinlich zu Beginn des 19. Jahrhunderts entstanden. Erstmals veröffentlicht wurde es 1805/1806 in einer Anthologie, 1809 erschien es als Beilage in der Allgemeinen Musikalischen Zeitung, 1809 und 1811 schließlich in Leipzig bei Breitkopf & Härtel innerhalb der Ausgabe *Goethe's Lieder, Oden, Balladen und Romanzen mit Musik von J. F. Reichardt*. Gauß kann die Abschrift also frühestens gegen Ende seiner Braunschweiger Zeit erstellt haben.

Ein fester Bestandteil des kulturellen Lebens in Göttingen waren Wohltätigkeitskonzerte, die sogenannten *Concerte zum Besten der Armen*. Die ersten beiden dieser Konzerte fanden in den Jahren 1807 und 1813 statt. Nachdem Forkel die *Akademischen Winter-Concerte* 1815 eingestellt hatte, war es sein Nachfolger im Amt des Akademischen Musikdirektors, Johann August Günther Heinroth (1780–1846), der ab 1818 große Anstrengungen unternahm, um das Musikleben der Stadt wieder auf ein höheres Niveau zu heben. Er initiierte einen Konzertzyklus für die Wintersaison, gründete eine *Sing-Akademie* und veranstaltete ab 1819 auch wieder Wohltätigkeitskonzerte, zuerst jährlich, später dann in größeren zeitlichen Abständen. Glücklicherweise sind zu mehreren dieser *Concerte zum Besten der Armen* noch Unterlagen im Stadtarchiv Göttingen vorhanden, darunter Subskriptionslisten. In nicht weniger als sieben Listen findet sich der Name von Carl Friedrich Gauß. Da in fast allen Fällen der Kauf mehrerer Eintrittskarten unter seinem Namen verzeichnet ist, wird man davon ausgehen dürfen, daß er die Konzerte, die in den Kirchen St. Johannis oder St. Nicolai (Ende 1822 zur neuen Universitätskirche geweiht) stattfanden, mit seiner zweiten Ehefrau Minna, geb. Waldeck (1788–1831) besucht hat. Nachweisbar ist Gauß' Teilnahme in den Jahren 1813, 1819–1823 und 1838, zu vermuten ist aber, daß er auch manche der zehn weiteren Wohltätigkeitskonzerte gehört hat, die für die Jahre 1822 bis 1850 belegt sind, bei denen sich die Subskriptionslisten jedoch zum überwiegenden Teil nicht erhalten haben. Vielleicht war Gauß auch noch bei anderen Konzerten in Göttingen anwesend: Durch den Aufschwung, den das Musikleben der Stadt nach Heinroths Amtsantritt 1818 erlebt hatte, etablierte sich Göttingen in den folgenden Jahren als lohnendes Ziel für auswärtige Künstler. So war Carl Maria von Weber (1786–1826) vom 11. bis 18. August 1820 zu Besuch, Louis Spohr (1784–1859) im November desselben Jahres und im Mai 1823, Nicolò Paganini (1782–1840) im Jahre

1830 und Franz Liszt (1811–1886) im Herbst 1841.

Vom 14. September bis zum 3. Oktober 1828 wohnte Gauß als persönlicher Gast bei Alexander von Humboldt (1769–1859). Er hatte dessen Einladung zur Teilnahme an der von Humboldt organisierten 7. Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte in Berlin (18.–24. September) angenommen. Musikalische Veranstaltungen bildeten einen Schwerpunkt des Rahmenprogrammes der Tagung. So brachte Carl Friedrich Zelter (1758–1832), hochgeschätzter Leiter der Berliner Singakademie, Komponist bedeutender Lieder und Duzfreund Goethes, am Vorabend der Versammlung Händels Oratorium *Das Alexander-Fest* HWV 75 zur Aufführung. Am nächsten Tag dirigierte der junge Felix Mendelssohn Bartholdy (1809–1847) im Rahmen der Eröffnungsfeier eine von ihm eigens für diesen Anlaß komponierte Kantate, die später so genannte *Humboldt-Kantate*, deren Text von Ludwig Rellstab (1799–1860) verfaßt worden war. Außerdem erklangen unter Zelters Leitung acht Chorlieder. Weitere 15 Lieder für Männerchor wurden am 23. September in einem gemeinsamen Konzert der beiden Berliner Liedertafeln unter Zelter bzw. Karl Friedrich Rungenhagen (1778–1851) vorgetragen, darunter Kompositionen von Johann Friedrich Reichardt und Karl Ludwig Hellwig (1773–1838) sowie von Zelter und Rungenhagen selbst. Gauß hat die zu diesen musikalischen Darbietungen herausgegebenen Textbücher aufbewahrt; sie finden sich in der Gauß-Bibliothek der SUB Göttingen. – Schließlich kann man auch in Gauß' Korrespondenz einige Belege dafür entdecken, daß Musik für ihn und seine Familie durchaus von Bedeutung gewesen sein muß. Leider scheint Notenmaterial, das sich im Gauß-Nachlaß befunden hat und vielleicht Auskunft über familiäres Musizieren hätte geben können, nicht mehr auffindbar zu sein.

Literatur

[1] G. Waldo Dunnington: *Carl Friedrich Gauss. Titan of Science,* New York 1955, Reprint by The Mathematical Association of America, with additional material by Jeremy Gray and Fritz-Egbert Dohse, Washington, D.C. 2004

[2] Ralf Eisinger: *Das Hagenmarkt-Theater in Braunschweig (1690–1861),* Braunschweig 1990

[3] Sigrid Fährmann: *Aspekte kulturellen Lebens in Göttingen im 19. Jahrhundert: Musik, Theater, Kunst und Vereine,* in: Ernst Böhme und Rudolf Vierhaus (Hrsg.): Göttingen. Geschichte einer Universitätsstadt. Band 2: Vom Dreißigjährigen Krieg bis zum Anschluss an Preußen –

Der Wiederaufstieg als Universitätsstadt (1648–1866), Göttingen 2002, S. 905–944

[4] Axel Fischer: *Johann Nikolaus Forkels „Akademische Winter-Concerte“ und das Göttinger Musikleben um 1800,* in: Arnfried Edler und Joachim Kremer (Hrsg.): Niedersachsen in der Musikgeschichte. Zur Methodologie und Organisation musikalischer Regionalgeschichtsforschung. Internationales Symposium Wolfenbüttel 1997, Augsburg 2000, S. 197–209

[5] Menso Folkerts: *Carl Friedrich Gauß' Aktivitäten an der Universität Göttingen,* in: Nachrichten der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, II. Mathematisch-Physikalische Klasse, Jahrgang 2002, Nr. 2, S. 23–131

[6] Menso Folkerts: *Neues zur Handbibliothek von C. F. Gauß,* in: Mitteilungen der Gauß-Gesellschaft Göttingen 44 (2007), S. 43–57

[7] Franz Schmidt und Paul Stäckel (Hrsg.): *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai,* Leipzig 1899, Reprint New York und London 1972

[8] Ulrich Konrad: *Johann August Günther Heinroth. Ein Beitrag zur Göttinger Musikpflege und Musikwissenschaft im 19. Jahrhundert,* in: Martin Staehelin (Hrsg.): Musikwissenschaft und Musikpflege an der Georg-August-Universität Göttingen. Beiträge zu ihrer Geschichte, Göttingen 1987, S. 43–77

[9] Martha Küssner: *Carl Friedrich Gauß und seine Welt der Bücher,* Göttingen 1979

[10] Heinrich Mack (Hrsg.): *Carl Friedrich Gauß und die Seinen. Festschrift zu seinem 150. Geburtstage* (Werkstücke aus Museum, Archiv und Bibliothek der Stadt Braunschweig, Bd. 2), Braunschweig 1927

[11] Fritz Meyen: *Johann Joachim Eschenburg 1743–1820. Professor am Collegium Carolinum zu Braunschweig. Kurzer Abriß seines Lebens und Schaffens nebst Bibliographie* (Braunschweiger Werkstücke. Veröffentlichungen aus Archiv, Bibliothek und Museum der Stadt, Bd. 20), Braunschweig 1957

[12] Alexander Odefey: *Humboldt, Gauß und Dirichlet begegnen Mendelssohn, Zelter und Chopin – Die Berliner Naturforscherversammlung von 1828 sub specie musicae,* in: Alexander Odefey (Hrsg.): „Zur Historie der

Mathematischen Wissenschafften". Beiträge zur Geschichte der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik. Festschrift für Karin Reich zum 65. Geburtstag, Diepholz etc. 2008, S. 145–184

[13] Alexander Odefey: *„… und ich sehne mich, der keuschen Jungfrau Geometria und so Gott will der geistreichen Demoiselle Musica zu opfern" – Carl Friedrich Gauß und die Musik,* in: Mitteilungen der Gauß-Gesellschaft Göttingen 45 (2008) [im Druck]

[14] Manfred Pirscher: *Johann Joachim Eschenburg. Ein Beitrag zur Literatur- und Wissenschaftsgeschichte des achtzehnten Jahrhunderts,* Phil. Diss. Münster 1960

[15] Karin Reich: *Carl Friedrich Gauß,* München 1977, 2. Aufl. München 1985, überarbeitete und erweiterte Neuausgabe (zusammen mit Gerd Biegel): „erst rechnen, dann sprechen gelernt". Carl Friedrich Gauß. Genie aus Braunschweig – Professor in Göttingen, Braunschweig 2005

[16] Johann Friedrich Reichardt: *Goethes Lieder, Oden, Balladen und Romanzen mit Musik,* Teil II, 3. und 4. Abteilung sowie verstreut überlieferte Kompositionen, hrsg. von Walter Salmen (Das Erbe deutscher Musik, hrsg. von der Musikgeschichtlichen Kommission e. V., Bd. 59), München und Duisburg 1970

[17] Wolfgang Sartorius von Waltershausen: *Gauss zum Gedächtniss,* Leipzig 1856

[18] Isa Schikorsky: *Das Collegium Carolinum als Reformanstalt. Der beschwerliche Weg zwischen Lateinschule und Universität,* in: Walter Kertz (Hrsg.): Technische Universität Braunschweig. Vom Collegium Carolinum zur Technischen Universität. 1745–1995, Hildesheim etc. 1995, S. 3–51

[19] Paul Stäckel (Hrsg.): *Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen. Erster Teil: Leben und Schriften der beiden Bolyai,* Leipzig und Berlin 1913, Reprint New York und London 1972

[20] Martin Staehelin: *Musikalische Wissenschaft und musikalische Praxis bei Johann Nikolaus Forkel,* in: Martin Staehelin (Hrsg.): Musikwissenschaft und Musikpflege an der Georg-August-Universität Göttingen. Beiträge zu ihrer Geschichte, Göttingen 1987, S. 9–26

Werner Schulze (Wien)

FIBONACCI I & II. Demonstratio Musico-Mathematica

<u>Introduction</u>: Remarks on the numbers 2 and 3 in Greece and China

Plato's secretary Philipp of Opus (4th century BC): 2 and 3 as fundamentals of sýmphonon, sýmmetron, rhythmós, harmonía

Philipp: *Epinomis* 990 E – 991 B:

"Universal nature moulds form and type by the constant potency *(analogía)* and its converse about the double in the various progressions. The first example of this ratio *(lógos)* of the double in the advancing number series is that of 1 to 2; double of this is the ratio of their second powers, and double of this again the advance to the solid and tangible *(haptón),* as we proceed from 1 to 8 [$2^0 \to 2^1 \to 2^2 \to 2^3$].

The advance to a mean of the double, that mean which is equidistant from lesser and greater term [the arithmetical mean], or the other mean which exceeds the one term and is itself exceeded by the other by the same fraction of the respective terms [the harmonic mean]. These ratios of 3:2 and 4:3 will be found as means between 6 and 12 [6:8 = 9:12] - why, in the potency of the mean between these terms [6, 12], with is double sense, we have the gift from the blessed choir of the Muses to which mankind owes the pleasure of *sýmphonon* and *sýmmetron,* and *rhythmós* and *harmonía."*

Lü Pu Wei (3rd century BC): 2 and 3 as fundamentals of the 12 tones in music

[Chinese music is pentatonic, but changes month per month within the totality of 12 tones.]

Lü Pu Wei: *Lü-shih Ch'un-chiu* (Frühling und Herbst), 6. Buch

	Length of bamboo tubes: yin-lü	yang-lü	*Musical intervals: fifth up, fourth down*	
basic measure		81		*c*
shang sheng: proportion 3:2	54	+	*g*	
hsia sheng: proportion 3:4	+	72		*d*
	48	+	*a*	
	+	63		*e*
	42		*b*	
	144 +	216 = 360 (= days per year)		
	144 : 216 = 2 : 3 (Yin/Yang)			
		57		*f sharp*
hsia sheng	76	+	*c sharp*	
shang sheng	+	51		*g sharp*
	68	+	*d sharp*	
	+	45		*a sharp*
	60		*e sharp*	
	204 +	153 = 357 (= days per year)		
	204 : 153 = 4 : 3 (Yin/Yang)			

<u>Fibonacci Sequence I</u>: Greek antiquity - Leonardo Pisano - Luca Pacioli

After this introduction on the numbers **2** and **3** in East and West we continue with **0** and **1** as the starting points of Fibonacci Sequence I.

Not only single numbers - in their quantities and qualities - , but also proportions (a:b), means (a:x:b), proportionalities (a:b = xa:xb) and analogies (a:b = A:B àna lógon x:y) are the basic fundaments in Greek mathematics, music theory, philosophy, ethics, astronomy, and other fields of investigation. It is not a surprise to find the famous "Fibonacci sequence" when we study the proportionality (b-a):(b-x)=x:a. The result is: x = b-a.

a	b	x
1	3	2
2	5	3
3	8	5

Leonardo from Pisa (Leonardo Pisano, ca. 1170 - ca. 1240/50; as the son of a man named Bonasso he is "Filius Bonassi" -> Fibonacci): In mathematics he is famous for the sequence of the following kind: Each number of the sequence is the sum of the two preceding numbers. Usually we start with 0 and 1 (which is the well known "Fibonacci sequence"):

Fibonacci sequence I:

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144

[144 is a symbol number in the compositions of Johann Sebastian Bach: 144 means JOHANN SEBASTIAN, if we understand the letters as numbers (A = 1, B = 2, E = 5, …) and add them.]

The same sequence written as a sequence of proportions:
a : b : (a + b) : (a + 2b) : (2a + 3b) : (3a + 5b) : ...

If a = b = 1 we find the relationship between Fibonacci Sequence and the value of the Golden Section. [-> Fra Luca Pacioli (1445-1517): *De Divina Proportione,* Venedig 1509]

0,618... : 1 = 1 : 1,618...
1 : 1,618... = 1,618... : 2,618...

1:2 -> 3:5 -> 8:13 -> 21:34 -> ... -> Golden Section 1:1,618…
1:1 -> 2:3 -> 5:8 -> 13:21 -> ... -> Golden Section

These proportions as musical intervals:
Octave -> major sixth -> major sixth* ->
Prime -> perfect fifth -> minor sixth -> minor sixth* ->

Here is not the place to explain more details about Fibonacci Sequence and Golden Section, because this topic is well known and described in many publications.

Where we find the Fibonacci numbers?

-> *Nature:*
1. Pine-cones with **13** spirals, but **8** spirals in the opposite direction (or **21** and **13**); pineapples and sunflowers have similar structures.
2. Gum-tree: **5** branches in **3** circles (= 216º from branch to branch); or **8** branches in **5** circles (= 225º from branch to branch).

-> *Space:*
1. Architecture
2. Painting: -> Jakob Dürer (Golden Section)

-> *Music:*
1. Rhythmic order, lengths of notes.
2. Formal organisation in music: Fibonacci numbers and Golden Section may rule the time organisation of movements or complete works.

-> *Groups of musicians:*
It is not unusual to have a mixed choir with **8** sopranos, **5** altos (= **13** ladies), **3** tenors, **5** basses (= **8** men); or similar with **13** sopranos, **8** altos, **5** tenors, **8** basses.

-> *Language:* Carl Djerassi/Werner Schulze: Kalkül (Calculus). Isaac Newton condemning Gottfried W. Leibniz: „Zweiterfinder haben kein Recht, absolut keines!“ (**8** and **5** syllabs).

-> *Music theory:* Sequences I and II: Conrad Henfling & Gottfried Wilhelm Leibniz

Fibonacci Sequence II: Correspondence Henfling - Leibniz 1706-1708

Literature:

Haase, Rudolf: *Der Briefwechsel zwischen Leibniz und Conrad Henfling. Ein Beitrag zur Musiktheorie des 17. Jahrhunderts,* Frankfurt 1982

Schulze, Werner: *C. Henflingii Epistola de novo suo Systemate Musico*, Berlin 1710, aus dem Lateinischen übersetzt und kommentiert. *Epistola. I* (Vera Musices Fundamenta). *Henflings Brief über sein neues Musik-System.* Musiktheorie 2/2, Laaber 1987, 169-186. *Epistola. II* (Moderamina). *Anmerkungen zu Henflings Epistola.* Musiktheorie 3/2, Laaber 1988, 171-185

Fibonacci sequence in mathematics and music theory

sequence I	**0**	**1**	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
sequence II	-5	4	-1	3	**2**	**5**	7	12	19	31	50	81
difference	5	-3	2	-1	1	**0**	**1**	1	2	3	5	8

Difference between I and II: sequence I, shifted 5 steps to the right.
Significant: triple 2/3/5 in sequence I, triple 3/2/5 in sequence II.

In Baroque time the scholars Conrad Henfling (1648-1716) and Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) started with **2** and **5** (Fibonacci sequence II) and used it in music theory. The problem they had in mind has been the following: In how many equal parts we have to divide the octave (proportion 1:2), when we try to approximate the natural intervals as near as possible (2:3 perfect fifth, 3:4 perfect fourth, 4:5 major third, 5:6 minor third, …). In such a way a well-tempered intonation system is developed, and later on a new tone system arises from his fundament.

Equal parts of the octave		**12**	19	**31**	50	81
Tonus (whole tone)	9:8, 10:9	2	3	5	8	13
Semitonium maius (diatonic semitone)	16:15	1	2	3	5	8
Semitonium minus (chromatic semitone)	25:24	1	1	2	3	5
Diesis	128:125	0	1	1	2	3

Fibonacci I & II bound together in music theory (Henfling-Leibniz 1706)

Explanation: 1 octave has 6 whole tones: *c - d - e - f sharp - g sharp - a sharp - b sharp.* If the whole tone has the size of 2 small steps, 6 whole tones have 12, and there will be no difference between *b sharp* and *c* (diesis = 0). If the whole tone has the size of 3 (or 5, or 8, or 13), 6 whole tones have 18 (or 30, or 48, or 78), and the difference between *b sharp* and *c* has the size of 1 (or 1, or 2, or 3): 18+1 => 19, 30+1 => 31, 48+2 => 50, 78+3 => 81.

It is possible to develop the Fibonacci sequence II to the left (we don't find this operation in Baroque time):

2 **5** 7 **12** 19 **31** 50 81

2: 2 equal parts of the octave, each 1:√2, 600 cent: semi-diapason -> Analogy to quadratura circuli in architecture.

5: 5 equal parts of the octave, each 240 cent (in reality between 225 and 260 cent): the step in Indonesian slendro-scale.

12: 12 equal parts of the octave, each 100 cent: the step in European equidistant tone system: so called "Wohltemperierung" (which is a wrong terminus).

31: 31 equal parts of the octave, each 38,7 cent: the step in the 31-tone-system. We find it in Baroque time and in 20th century: Stichting Huygens-Fokker, Haarlem/Netherlands. Adriaan Fokker (1887-1972), referring to Christiaan Huygens (1629-1695).

Fibonacci I & II : Compositions by Werner Schulze

Fibonacci Haiku

dedicated to Ingrid (at the occasion of her 50th birthday) and to her mother Elfriede (at her 80th birthday)

A few remarks on the hidden order of "Fibonacci Haiku" (10, 10, 20, 30, 50, 80, 130):

10 Groups of 10 tones in II. 10 different tones in V ("10-tone-music").

50 Number of tones in I, and number of "small tones" in III.
MM 50 is the best tempo in V.

80 Number of words of all 5 Haiku (German language only).
Number of tones in IV, and in V.
Haiku V has 50 tones in the exterior segments, 30 tones in the interior segment.

130 MM 130 is the tempo virtuoso in IV.

vom wind durchflutet
neigt sich der regenbogen
dem zitternden wasser entgegen -
ein kuss des himmels

auch ohne
den klang einer orgel zu hören
erfüllten töne den kirchraum -
er selbst ward zur musik

ein lichtstrahl erwärmt
die seele
den anfang behütend -
und bändigt des fortklangs unruhe

im kleinsten quellbach
ist leben verborgen
das in mir staunen erweckt -
wie der duftende saum des wolkenbands

oft schon
sah ich hinauf zu den sternen
und fragte -
wer den schlafenden mond
mit einem schatten bedeckt

por el viento acariciado
se inclina el arcoiris
hacia el agua temblorosa –
un beso del cielo

aúnque no se
escuchaba el canto del órgano
los sonidos invadían la iglesia –
ella misma se había vuelto música

un haz de luz ilumina
el alma
cuidando el principio –
y calma la intranquilidad del eco

en el mas pequeño riachuelo
está oculta la vida
que mi admiración despierta –
como la perfumada orilla de las nubes

a menudo
miraba hacia las estrellas
y preguntaba –
quien a la luna dormida
cubre con una sombra

Three more examples of Fibonacci measurements as organisation of time in compositions by Werner Schulze:

LLULL – El Misteri del Logos op. 16/2: Fibonacci I as time organisation: score page 40

Carl Djerassi/Werner Schulze: *Kalkül* (Calculus), theatre-opera op. 18: score page 86

CONCERTO ROBERTO op. 21, 2nd mouvement: Fibonacci II as length of tones

----

Werner Schulze

Composer, author, professor at the University of Music and Performing Arts Vienna, *International Centre for Harmonics.*

Schulze studied at the University of Music and Performing Arts Vienna, where he is now professor for Harmonics (Harmonic Research). He received his PhD in Philosophy from the University of Vienna. He has performed in Europe, South America, the Middle East, and Asia, both as bassoonist (Austrian Wind Quintet, Austro-Hungarian Wind Ensemble, Logos Quartet), and contrabassoonist (duo ZWIO). Workshops, radio broadcasts, guest lectures, and publications worldwide. He has received 8 awards, won 5 competition prizes, and his compositions have been performed in 500 concerts in 40 countries (Europe, America, Asia). www.werner-schulze.at.

0
1 1
10 10
11 11
100 100
101 101
110 110
111 111
1000 1000
1001 1001
1010 1010
1011 1011
1100 1100
1101 1101
1110 1110
1111 1111
10000 10000
10001 10001
10010 10010
10011 10011
10100 10100
10101 10101
10110 10110
10111 10111
11000 11000
11001 11001
11010 11010
11011 11011
11100 11100
11101 11101
11110 11110
11111 11111
100000 100000
100001 100001
100010 100010
100011 100011
100100 100100
100101 100101
100110 100110
100111 100111
101000 101000
101001 101001
101010 101010
101011 101011
101100 101100
101101 101101
101110 101110
101111 101111
110000 110000
110001 110001
110010 110010
110011 110011
110100 110100
110101 110101
110110 110110
110111 110111

Dyadic-Fibonacci-Tower
(sequence I blue, sequence II green)

ÜBER DIE TONALITÄTSKURVE

Miloš Čanak, Universität Novi Pazar

Serbien

I

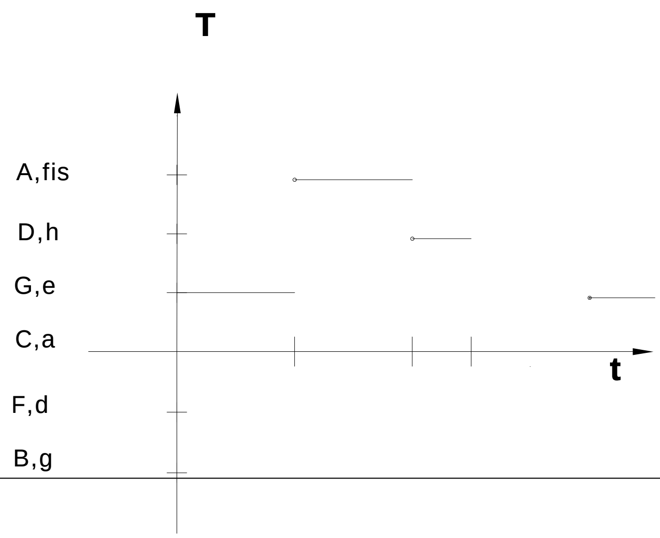
Die Modulation in der Musik ist der Übergang von einer Tonart in eine andere. Sie wird bewirkt durch harmonische Umdeutung der Dreiklänge und durch Einführung von chromatischen, der Ausgangstonart leiterfremden Tönen, die durch eine neue Tonart Leittonbedeutung haben. Wenn eine neue Tonart nicht durch Kadenzierung bestätigt, sondern nur vorübergehend berührt wird, spricht man nicht von Modulation, sondern von harmonischer Ausweichung. Die Modulation ist in harmonischer Hinsicht die eigentliche formbilde Kraft der Musik.

Bei der diatonischen Modulation verliert eine Harmonie der Ausgangstonart ihre Funktionsbedeutung und gewinnt eine neue innerhalb der Zieltonart. Das Wesen der chromatischen Modulation sind chromatische Fortschreitungen in einer oder mehrere Stimmen, wodurch eine Haupttharmonie, meist die Dominante der Zieltonart erreicht wird; Bei der enharmonischen Modulation werden, ein Ton oder mehrere Töne der Ausgangstonart enharmonisch verwechselt, wodurch der Übergang in die Zieltonart erreicht wird, derren Kadenz daraus folgt.

II

Der bekannte serbische Komponist und die Musiktheorietiker Dejan Despić ([1], [2], [3]) hat die dreiteilige Monographie „Tonalitätstheorie“ geschrieben, wo alle Aspekte dieser Theorie mit verschiedenen Beispiele aus der Musikpraxis verarbeitet werden. Ein der Hauptgründe dieser Theorie ist das sgn. Tonalitätskoordinatensystem. In diesem mathematisch-musikalischen Koordinatensystem repräsentieren die Punkte auf der x-Achse die Musikdauer (in Takten oder in rhythmischen Einheithen ausgedrücht). Längs der y-Ache sind die einzelnen Tonalitäte, im Quintenzirkel nach oben geordnet (Bild 1).

Bild 1



Es sei eine Folge der wachsenden rationalen Zahlen

$$\boxed{t_o = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_K < t_{KM}\,(\text{End})}$$

gegeben, die diejenige Stelle (oder Zeitpunkte) in einer musikalischen Komposition darstellen, wo eine Modulation eintrit. Dieser Folge entspricht eine Folge der Tonalitätszahlen $T_0, T_1, T_2, T_3 .... T_K$ die, die Zahlenwerte $(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6)$ nehmen.

Die Tonalitätsfunktion **T = ƒ(t)** oder die Tonalitätskurve einer musikalischen Komposition wird durch folgenden analytischen Ausdruck

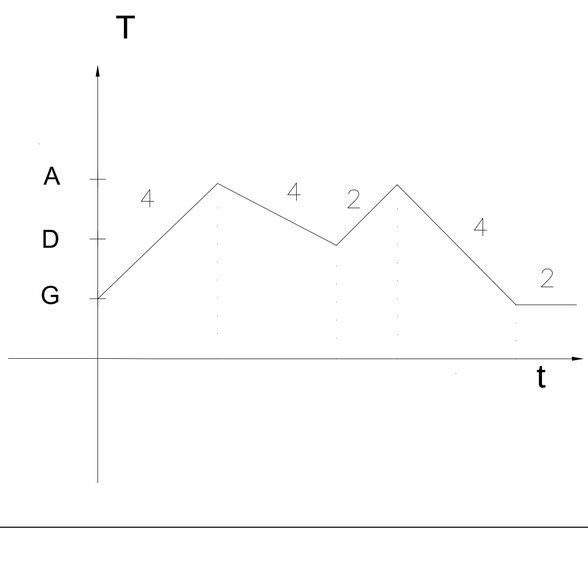
$$T(t) = \begin{cases} T_0, \; 0 \leq t < t_1 \\ T_1, \; t_1 \leq t < t_2 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ T_K, \; t_K \leq t \leq t_{K+1} \end{cases}$$

dargestellt.

Ihre Graphik ist am Bild 1 gegeben und sie ist stufenformig.

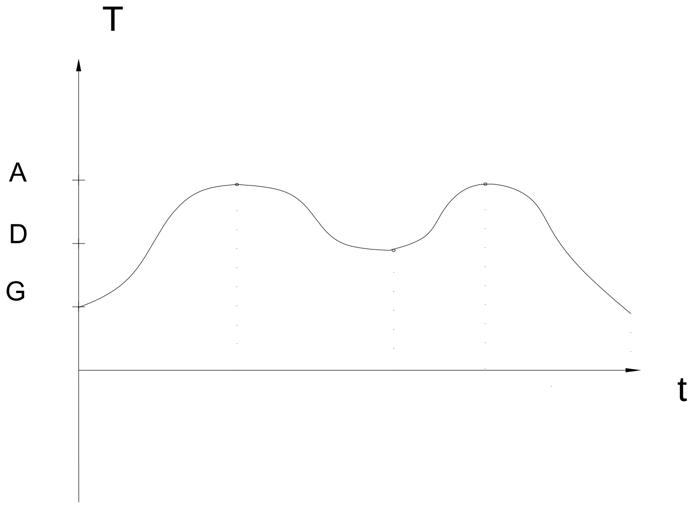
Es ist auch möglich, die charakteristische Punkte mit einer polygonalen Linie verbinden (Bild 2). Dabei numeriert man jede Strecke mit der entsprechenden Zahl der Dauereinheiten. Diese Art ist praktisch im Falle wenn eine musikalische Komposition zu gross ist und wir wollen die Graphik auf nur eine Seite zeichnen.

Bild 2



Es ist auch möglich, eine Interpolationskurve konstruieren, die alle Knotenpunkte enthält.

Bild 3



III

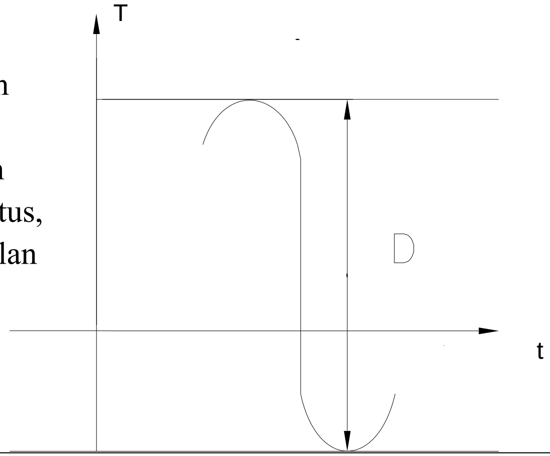
In seiner Dissertation [4] hat der Verfasser drei Gruppen der Tonalitätsparameter untersucht: die linen-, die flächen- und die statistischen Parameter.

Die Null der Tonalitätsfunktion $T = f(t)$ koinzidiert mit dem Anwesenheit und mit der Rolle der Grundtonalität im Rahmen der Ganzheit. Wenn wir mit n die Zahl der metrischen Dauereinheiten im Intervall [a, b] (d. h. Im Rahmen einer musikalischen Komposition) und mit n_1 die Zahl der Dauereinheiten in der Grundtonalität bezeichnen, so definiert man den Bedeutungskoeffizient der Grundtonalität durch die Formel

$$k_B = \frac{n_1}{n}$$

Es gilt die Relation $0 \leq k \leq 1$. Im Falle $k_B = 0$ haben wir Atonalität oder eine solche musikalische Situation, wo man die Grundtonalität nicht identifizieren kann. Der andere Grenzenfall $k_B = 1$ weisst auf eine totale Tonalitätsmonotonie hin, dh. auf die Abwesenheit einer Tonalitätsänderung.

Eine grosse Bedeutung hat das Maximum und das Minimum der Tonalitätskurve. Die Unterschied (Max-Min) zwischen diesen Werte koinzidiert mit dem Modulationsambytus, dh. mit der grössten Distanz im Modulationsplan (Bild 4)



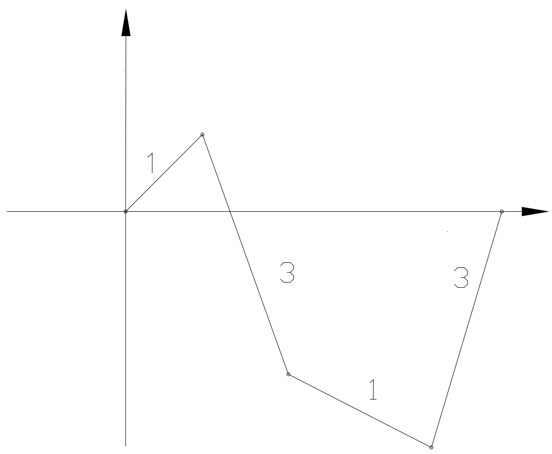
Die Modulationsfrequenz stellt die Häufigkeit der Tonalitätsänderungen dar und wird durch folgende Formel $\mathbf{f_m} = \frac{n_f}{n}$ definiert.

Hier ist n- die Zahl der metrischen Dauereinheiten und n_f die Zahl der Tonalitätsänderungen.

Die Tonalitätsvariation V_t ist die Summe aller Tonalitätssprünge in einer musikalischen Komposition. Am Bild 5 ist

$$\mathbf{V_t = 1 + 3 + 1 + 3 = 8}$$

Bild 5



IV

Wir betrachten weiterhin einige Tonalitätsflächenparameter.
Es sei [a, b] das Grundzeitintervall einer Komposition und es seien

$$a = t_o < t_1 < t_2 < \ldots < t_{K-1} < t_K < t_{k+1} = b$$

die Zeitpunkte, wann und wo die Tonalitätsänderungen eintreten. Das bestimmte Integral dieser Funktion kann man mit Hilfe der Formel

$$\int_a^b f(t)dt = T_0\Delta t_0 + T_1\Delta t_1 + \ldots\ldots + T_k\Delta t_k = \sum_{i=0}^{k} T_i\Delta t_i$$

ausrechnen.

Es sei weiterhin m $\le$ f $\le$ M. Dann existiert eine reelle, positive Zahl K, (m $\le$ K $\le$ M) so dass $\int_a^b f(t)dt = K \cdot (b\text{-}a)$ gilt. Man nennt die Zahl

$$K = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$$

als Mittelwert der Funktion f (t) für **t** $\in$ **[*a*,b]**. Jetzt können wir einige Flächenparameter der Tonalität definieren.

1) Die gesamte Tonalitätsmasse M_t definiert man mittels der Formel

$$M_t = \int_a^b |f(t)|dt$$

Sie ist desto grösser, inwiefern wir mehr Zeit ausser der Grundtonalität verbringen und wenn diesse andere Tonalitäte weit von Grundtonalität sind.

2) Mann kann auch die Tonalitätsdichtigkeit

$$G(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|dt$$

definieren. Wenn die Tonalitätskurve ganz in der oberen Halbebene liegt, so koinzidiert die Tonalitätsdichtigkeit mit ihrem Mittelwert.

3) Das Tonalitätsflächengleichgewicht der Funktion T = f(t) definiert man mit

$$G_T = \int_a^b f(t)dt$$

Hier addiert man die Flächen mit dem positiven und mit dem negativen Vorzeichen und das Ergebnis kann positiv, negativ oder Null sein. Dieses Ergebnis zeigt uns ob das dominante oder subdominante Gebiet beherscht. Einem guten Tonalitätsgleichgewicht entspricht ein kleiner Zahlenwert für G_T.

4) Mann kann ähnlich auch den Koeffizient des Tonalitätsgleichgewichtes

$$b_t = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

definieren, der mit dem Mittelwert der Tonalitätsfunktion koinzidiert.

V

Weiterhin kann man auch die statistischen Tonalitätsparameter einführen. Darum müsen wir zuerst eine statistische Tabelle konstruieren.

T -Tonalitätswerte	f - Frequenz	W – relative Frequenz
- 6	f_1	W_1
- 5	f_2	W_2
- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
5	f_{K-1}	W_{K-1}
6	f_K	W_K
	$\sum_{i=1}^{k} f_1$	$\sum_{i=1}^{k} W_i$

Dann können wir die folgenden Begriffe einführen.

1. Tonalitätsmittelwert

$$\overline{T} = \frac{f_1 T_1 + f_2 T_2 + ... + f_k T_k}{n}$$

2. Tonalitätsdispersion

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_1 \left(Ti - \overline{T}\right)^2$$

und andere.

VI

Warum sind alle diese Tonalitätsparameter wichtig und was ermöglichen sie uns?

Wir können im Zeitwerlauf durch verschiedene musikalische Epochen, die einzelnen Musikwerke analysieren und die entsprechenden Tonalitätsparameter ausrechnen. Dabei ersehen wir folgendes. Die Parameter wie: Modulationsfrequenz, Tonalitätsvariation, Tonalitätsmasse und Dichtigkeit, Tonalitätsdispersion und andere, vergrössern sich und erreichen im Klassizismus die optimalen Werte. In der Romantik und im Impressionismus vergrössern sich diese Parameter weiter und das Tonalitätsphänomen wird immer komplizierter. In der zvanzigsten Jahrhundert kommt die atonale Musik. Sie bezeichnet allgemein eine Musik, deren Harmonik und Melodik, nich auf ein tonales Zentrum bzw. einen Grundton fixiert ist - im Gegensatz zur Dur-Moll Tonalität.

Und was ist mit der Tonalitätskurve? Sie war am Anfang ganz eben und ohne Wälle. Später erschienen die ersten Wellen und in der Zeitverlauf vergrösserte sich ihre Frequenz und ihre Variation. Weiterhin wickelte sich ihre Graphik und in dem zvanzigsten Jahrhundert (in der atonalen Musik) existiert sie nicht mehr, weil man in einer beliebigen Zeitpunkt einen entsprächenden Tonalitätswert nicht bestimmen kann.

Bemerkung: Der Ausdruck Tonalität (tonalité) rührt von Alexandre Choron (1810) her und wurde von Francois Jozeph Fétis (1840) entliehen. Obwohl es Fétis als allgemeine Bezeichnung für die musikalische Ordnung benutzte und eher von Arten der Tonallität sprach, als von einem einzelnen System, wird der Begriff heute meist dazu benutzt, um sich auf die Dur-Moll Tonalität zu beziehen (die auch die diatonische oder funktionale Tonalität genannt wird), eben dem System musikalischen Aufbaus, das in der Klassik in Gebrauch war und dessen sich weltweit die meiste moderne populäre Musik heute bedient. Tonalität ist deshalb eine Eigenschaft von grossen Teilen der abendländisch beeinflussten Musik: tonale Musik bezieht sich innerhalb des vorherrschenden Systems aus 12 Halbtönen auf ein tonales Zentrum. Dies besteht aus einem bestimmten Ton (dem Grundton bzw. Zielton) und den auf diesem aufbauenden sowie den damit verwandten Dreiklängen. Jean Filippe Rameau meinte mit dem engeren Begriff Tonika auch schon einer Akkord („l'accord tonique“): Es ist deswegen nicht synonim, weil auch eine einstimmige Melodie Tonalität hervorrufen kann.

Diese spezielle diatonische oder funktionale Tonalität bringt es mit sich, das die in einem Musikstrück vorkommenden Akkorde nach bestimmten Mustern zusammengesetzt sind und aufeinander folgen. Hierbei werden im Rahmen der Harmonielehre manche Akkorde als aufläsungsbedürftige Dissonanzen, andere als in sich ruhende Konsonanzen gewertet. Eine Abweichung vom tonalen Zentrum verursacht einen Spannungsaufbau, eine Rückkehr eine Entspannung. Ebenfalls lassen sich in tonaler Musik die verwendeten Tonarten bestimmen. Genau genommen handelt es sich mit dieser Definition um die in unserem Kulturkreis fast selbstverständliche Dur-Moll Tonalität.

Etwas allgemeiner lässt sich Tonalität fassen, wenn man von einem Tonsystem, also einer Auswahl von Tönen fester Tonhöhe ausgeht. Dort kann es je nach System ein, zwei oder mehrere Töne mit einer grösseren Ruhewirkung, Schlusswirkung oder Auflösungswirkung geben. Diese Eigenschaft kann sich schon an einstimmigen Melodien zeigen. Entwickelt sich die Musik von diesen Ruhetönen weg oder baut zu ihnen Spannung auf, so wird die Annäherung an einen Ruheton und Auflösung der Spannungen wieder als Ruhewirkung oder gar als Schlusswirkung empfunden und ein tonales, eventuell nur vorübergehendes Zentrum erreicht.

LITERATUR

[1] Despić D.,“ Teorija tonaliteta“, Umetnička Akademija u Beogradu, Beograd 1971.

[2] Despić D.,“ Opažanje tonaliteta“, Univerzitet Umetnosti, Beograd 1981.

[3] Despić D.“ Kontrast tonaliteta“, Univerzitet Umetnosti, Beograd 1989.

[4] Čanak M.,“ Teorija tonaliteta u svetlosti matematičke teorije muzike“ (Tonalitätstheorie im Lichte der mathematischen Musiktheorie), Dissertation, Centar za multidisciplinarne nauke, Beograd 1996.

[5] Neumaier W.,“ Was ist ein Tonsystem? Eine historisch systematische Theorie der abendländischen Tonsysteme.....“ Lang, Frankfurt am Main, Bern, New York 1986

Anschrift Prof. Dr. Miloš Čanak

11000 Beograd, Brzakova 4

miloscanak12@yahoo.com

Calendars as images of the astronomical reality and created by mathematical minds — the special year 2008

Harald Gropp
Mühlingstr. 19, D-69121 Heidelberg, Germany
d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

1 Introduction

Mathematik — Abbild der Wirklichkeit oder Produkt des Geistes ? was chosen as the topic for the Miesenbach Symposium of 2008. In my opinion calendars are an example for both aspects which are adressed here. On the one hand, the construction of calendars has to take into consideration the astronomical reality, i.e. mainly the movement of the sun, the earth, and the moon. A calendar is an image of this reality by means of approximation. This means that it is created by minds of human beings in a mathematical way.

2 The year 2008

This year of 2008 is special in several aspects. First of all, it is a leap year of 366 days. But of course, this happens (nearly) every fourth year. The year 2008 was declared to be the *year of mathematics*. However, this was just the decision of a group of people to push forward the field of mathematics.

There are more specific properties of 2008. The Islamic year of 1429 AH starts in January of 2008, and the year of 1430 AH already starts in December of 2008. This means, a whole Islamic lunar year is totally contained in one solar year. Easter Sunday of the Western churches was celebrated on March 23 already. This is one of the earliest possible dates. In Ethiopia the year 2000 (after the birth of Christ) started in September 2007, and in September 2008 the new millenium will start (from this Ethiopian point of view).

3 The main types of calendars

Apart from just counting days (the Maya Long Count or Scaliger's Julian Date) or socalled rural or star calendars there are three main types of calendars: lunar calendars, solar calendars, and lunisolar calendars. In each of

1

these three cases a special aspect will be discussed here. At least, this is the general outline of my paper. Due to space and other restrictions this paper will discuss the topics of lunar and lunisolar calendars only briefly here. I hope to go into more detail in two forthcoming papers.

4 Lunar calendars

A typical lunar calendar is used in the Islamic world. A year consists of 12 months of 29 or 30 days. The counting of years starts in 622 AD and is called the Hijra. The beginning of the two years 1429 AH and 1430 AH leads to the question of how the beginning of an Islamic month is computed or determined.

As already announced this topic will be dealt with in the future in more detail. In many countries of the Islamic world the beginning of a new month is computed from astronomical data, i.e. a certain amount of hours must have passed since the exact New Moon date. This practice is mainly used in the West, i.e. from Northern Africa till the Arabic peninsula including Turkey. However, in Saudi Arabia a special calendar is used which may lead to different beginnings of months. In the East, from Pakistan till Indonesia and Malaysia, the moon is observed directly. If a Muslim astronomer or a group of Muslim astronomers has seen the new crescent, the first day of the following month is announced. In diaspora countries (from a Muslim perspective) the practice is mainly dependant from the majority of the immigrants.

Altogether, this practice leads to two or even three different Islamic dates which correspond to a Gregorian date. This fact does not strengthen the Islamic lunar calendar in comparison to the Gregorian calendar. In the case of important holidays this may even lead to theological controversies between different Islamic countries and theological schools.

5 The calculation of Easter

Here the question will be discussed how the Easter date of the Western churches is determined, from a theological, from a computational, and from an astronomical point of view. By the way, the Easter date of 2019 will probably be celebrated wrongly from an astronomical point of view. Several Christian holidays dependant on the Easter date are also very early in 2008, a fact which also touched the problem of finding a suitable date for the Miesenbach meeting of 2008.

5.1 Astronomical and ecclesiastical Easter

As already mentioned, the Western Easter festival in 2008 was celebrated on March 23. It should be the first Sunday after the first full moon in spring. The spring equinox of 2008 was on Thu March 20, 6:48:07 GMT. Full moon took place on Fri March 21, 19:39:46 GMT. In this case, as in most cases, this astronomical Easter date (aEd) corresponds with the ecclesiastical easter date (eEd) which is calculated from the Easter table of Gauss or a corresponding formula. This leads to the fact that eEd is between March 22 and April 25, both dates included.

In the year 2019 the equinox will be on Wed March 20, 22:58:01 GMT. A few hours later, full moon will be on Thu March 21, 2:42:26 GMT. Hence aEd will be on Sun March 24. However eEd is calculated as Sun April 21, and this day will be celebrated as Easter Sunday if no change in the future will be made. Easter Sunday will be celebrated 4 weeks too late from an astronomical point of view, as already in 1981 (1 week too early) and in 2038 again (4 weeks too late).

The main reason for the not perfect approximation of the Gauss Easter formula of the astronomical reality of the movement of the sun, the moon, and the earth is the quite irregular movement of the moon on its ellipse around the earth. One lunation is 29.53059 days on average. However, it varies between 29.3 days and 29.8 days.

5.2 Extremal Western Easter dates

Concerning the ecclestiacal Easter dates the theoretically possible date of March 22 does not occur between 1875 and 2124. March 23 only occurred twice, in 1913 and in 2008, i.e. this year. The next time will be only in 2160.

Dependant on the Easter date are also special festival dates starting from the Carnival weekend until the Thursday of Corpus Christi. As in 2008, if Easter Sunday is on March 23, then Ascension Day is on May 1, and Whitsunday is on May 11. This lead to unpleasant conflicts of the two official holidays on the same day in the first case and of a coincidence of Mother's Day and Whitsunday in the second case.

Mother's Day and Whitsunday will coincide again in 2035. If Easter will be celebrated astronomically in the future (compare above), in 2019 the holiday of May 1 will be followed by Ascension Day on May 2. In 2076 (again only for the astronomical celebration) Easter Sunday will be on March 22, and Ascension Day on April 30 will start a long weekend followed by May 1 (Friday), Saturday (May 2), and Sunday (May 3). However, this is nearly 70 years to go. Even if the Easter calculation should have been changed, who knows whether Ascension Day and the first of May will still be holidays.

5.3 Western and Eastern Easter

The Easter festival of the Eastern Ortodox churches is computed from a corresponding table, however in relation to the old Julian calendar. This leads to the fact that in about 3 of 4 cases the Western and the Eastern date differ. An evaluation of the period between 1900 and 2099 yield the following data. In 57 years the Easter dates are the same, in 91 years the Eastern date is 1 week later than the Western date. In 9 years the difference is 4 weeks, and in 43 years even 5 weeks.

6 Solar calendars

6.1 The Ethiopian calendar

At other occasions I discussed already the Julian, the Gregorian [5], and (in Miesenbach in 2004) the Iranian solar calendar [6]. Here the focus will be on a quite unknown calendar (at least in Europe), the Ethiopian solar calendar in which a year consists of 12 months of 30 days and one month of 5 or 6 days. The counting of years starts from the birth of Christ but differs from the European tradition. The comparison of the Ethiopian and the European solar calendar leads us back towards the first millennium AD.

On September 12, 2007 the Ethiopian year 2000 (after Christ) began. In a few months, on September 11, 2008 the year 2001 will start. This will be the real start of the new Ethiopian millennium. Quite a lot of people in Addis Abeba already celebrated this start in 2007. However, there was no year 0, also not in the Ethiopian tradition.

6.2 World chronographies

What follows is a short explanation of the difference of 7 or 8 years between the European and the Ethiopian calculation. A detailed historical description of the Ethiopian calendar must be postponed.

Due to the Bible God created the world in 6 days, on the sixth day he created the humans. Somewhere else in the Bible it is said that for God 1000 years are equal to one day. Somehow theologically it is challenging that Jesus was born during the sixth millennium of the world, and of course right in the middle, i.e. in the year 5500 Anno Mundi. Now, when was the creation of the world ?

There are many different traditions related to different ways how to calculate the time which passed from the creation till the birth of Jesus using all the given data in the Old Testament. The world was created in 3761 BC (Jewish calendar of today), in 3952 BC (Beda Venerabilis), in 4004 BC (Bishop Ussher), in 5199 BC (Eusebius), in 5509 BC (the Byzantine World Creation Era), and in 5492 BC from the point of view of the monks of the fifth century in Alexandria.

Those two monks, Annianos and Panodorus, lived shortly after 400. Unfortunately, their works are lost. However, they started the era which is now still used in Ethiopia.

The most important source for their work is an author of the ninth century, Georgios Synkellos. He wrote a book in Greek, called Chronographia, probably in the years 808 till 810, where he describes the history of the world starting with the creation and ending in 283 AD. His work was continued by Theophanes who describes the years from 284 till 813. These books were never translated into Latin and did not really become known in Western Europe but were quite influential in the Orthodox part of Europe. They contain knowledge collected from the Bible, from Greek and Latin sources, but also from ancient Near Eastern sources. Recently the work of Synkellos was translated into English [2]. For the interested reader a further reference is given [1].

7 Lunisolar calendars

Last but certainly not least should be the discussion on lunisolar calendars. These calendars are related to the movement of the sun and the moon at the same time by constructing a certain pattern of years consisting of either 12 or 13 lunar months. Today the Chinese and the Jewish calendar in Israel are of this type. In history the calendars of ancient Mesopotamia are quite known whereas the Gaulish calendar of Coligny [7][8] is not that known. However, the discussion on the earliest known (as far as possible) such calendars in the first and even in the second and third millennium BC in the Near East has again to be postponed to a forthcoming paper and is just replaced by two further references [3][4].

8 Last remarks

This short paper is just meant to be a guided tour through my talk in Miesenbach. For certain reasons the paper could not be elaborated to a more detailed report on all aspects of the mentioned topic. Nevertheless, I hope that also this short discussion shows the variety of questions and problems in the research of historical calendars, the calendrical practice of today, and even questions of future calendars.

References

[1] W. Adler, Time immemorial, Washington D.C. (1989).

[2] W. Adler, The chronography of George Synkellos, Oxford (2002).

[3] M.E.Cohen, The cultic calendars of the ancient Near East, Bethesda (1993).

[4] D.E.Fleming, Time at Emar, Winoma Lake (2000).

[5] H. Gropp, Christoph Clavius (1538-1612) und die Gregorianische Kalenderreform, in: Verfasser und Herausgeber mathematischer Texte der frühen Neuzeit, Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz, Band 11, R. Gebhardt (ed.), Annaberg-Buchholz (2002), 281-287.

[6] H. Gropp, Jubilees and calendars — Iranian and European calendars in comparison, in; VII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik (2004), C. Binder (ed.), Wien (2004).

[7] H. Gropp, The calendar of Coligny and related calendars, in: Proc. of the Conference "Time and astronomy in past cultures", A. Sołtysiak (ed.), Warszawa- Toruń (2006), 133-138.

[8] H. Gropp, Der Kalender von Coligny — ein Textzeugnis zur Astronomie der Kelten, Acta Praehistorica et Archaeologica 40 (2008), 171-177.

Wolfgang Breidert

Zur Unterhaltungsmathematik im 17. Jahrhundert
Die *Paradoxa* des Johannes Leuneschloss

In dem Maße, wie zu Beginn der Neuzeit mit ihrem starken Aufschwung der Wissenschaften die zu vermittelnde Theorie in den Lehrbüchern zunahm, wurden die Aufgaben, die nicht zur Erläuterung des Lehrstoffes notwendig waren aus den mathematischen Schriften ausgegliedert. Es entstanden zahlreiche Aufgabensammlungen, die das eher unterhaltsame Material aufnahmen. 1612 gab Claude Gaspard Bachet de Méziriac seine Sammlung *Problèmes plaisants et délectables* heraus. Da sich ernsthafte Wissenschaftler auch im 17. Jahrhundert scheuten, Unterhaltsames zu schreiben, gab z.B. Jean Leurechon 1624 seine *Récréations mathématiques* unter dem Pseudonym Van Etten heraus. Auf diesem Buch fußend verfaßte Schwenter seine *Mathematischen Erquickstunden*, die posthum 1636 erschienen sind, und zu denen Georg Philipp Harsdörfer 1651 und 1653 zwei Ergänzungsbände herausbrachte. In der bisherigen Literatur über die Unterhaltungsmathematik im 17. Jahrhundert wurde das Buch von Leuneschloss (Heidelberg 1658) nicht beachtet.

Johannes Leuneschloss (1620-1699) war ein sehr umfangreich gebildeter Gelehrter.[1] Er war Doktor der Philosophie und Medizin in Heidelberg, wo er ab 1651 eine Professur für Physik und Mathematik innehatte und über vierzig Jahre lehrte. 1646 war sein *Thesaurus mathematum* erschienen.

Das Paradoxien-Buch ist von eigenartigem Inhalt und seltsamer Gestalt. Es handelt sich um tausend durchnumerierte Stücke, die meistens nur einen Satz oder eine Aufgabe enthalten. Sie stehen in mehr oder weniger engem Zusammenhang mit der Mathesis als der Wissenschaft von der Quantität. Das, was vermehrt oder vermindert werden kann, galt ja als der Gegenstand der Mathematik, die zwar bezüglich ihres Gegenstandes sehr viel enger gefaßt war als heute, doch ihren Schwesterdisziplinen näher stand. Das Paradoxien-Buch geht daher auch auf fast alle mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Disziplinen ein. Es ist kein übliches Lehrbuch und auch keine bloße Aufgabensammlung, sondern es richtet sich an Studenten oder gebildete Laien, die sich schon etwas in den betreffenden Disziplinen auskennen. Leuneschloß führt seine Leser auf eine ungewöhnliche Weise an bekannte und unbekannte Seiten dieser Wissensgebiete heran. Das gelingt ihm durch Fragen, Rätsel, Aufgaben, provozierende Statements usw.

Es gibt im Buch keine ausdrückliche Gliederung, doch zeigt sich, daß sie, wenn auch lose und nicht immer streng durchgeführt ist. Es beginnt mit Allgemeinem zur Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie (1-26). Darin wird nicht nur die allgmeine Möglichkeit von Erkenntnis und die Stellung der Mathematik gegenüber der Theologie behandelt, sondern Leuneschloss nimmt auch explizit Stellung gegen Aristoteles und die leere, scholastische Disputation als einer Entartung der Wissenschaft. Er führt dann hin zur Mathematik als der Wissenschaft überhaupt. Und zwar ist sie nicht nur bezüglich ihrer Methode, sondern auch bezüglich ihres Gegenstandes ausgezeichnet. Mit diesem rationalistisch-platonistischen Plädoyer stellt sich Leuneschloss ganz in den Rahmen der im 17. Jahrhundert gängigen Auffassung von der an der Mathematik orientierten Wissenschaft, wie sie auch von Descartes vertreten wurde. Dementsprechend widmen sich die *Paradoxa* zunächst der Mathematik im engeren Sinne (27-339), danach werden die naturwissenschaftlichen und technischen Disziplinen als Bereiche der angewandten

[1] Über Leuneschloß: *Semper apertus - Sechshundert Jahre Ruprecht Karls-Universität Heidelberg 1386-1986*, Bd. 1, hrsg. v. Wilhelm Doerr u.a., Berlin usw. 1985, S. 52-56.

Mathematik berücksichtigt. Die Bewegung und Kugelgestalt der Erde sind in der Mitte des 17. Jahrhunderts noch kaum selbstverständlich, so daß sie für zahlreiche Paradoxien Anlaß geben. So kommt es, daß in der Sammlung bei Leuneschloss zwar auch einzelne Abschnitte von der allgemeinen Bewegung von Körpern, von Chemie, Mineralogie, Meteorologie, Biologie, Optik, ja sogar von Musik und Anthropologie handeln, daß aber der Bereich der Kosmologie und Astronomie zehnmal soviele Nummern enthält wie jeder einzelne der anderen Bereiche. Die Sammlung endet mit einem großen Lob der Mathematik und einem kurzen Schlußwort über die Winzigkeit des Menschen, womit Leuneschloß den seinerzeit gängigen Topos von der Vanitas oder Nichtigkeit alles Irdischen aufgreift. Das 17. Jahrhundert lebte ja in der merkwürdigen Spannung zwischen einem unbändigen Wissenschaftsoptimismus einerseits und der Überzeugung von der Nichtigkeit allen menschlichen Strebens andererseits.

Das erste Viertel der *Paradoxa*, nämlich der Teil, der sich mit der Mathematik im engeren Sinne befaßt, zeigt wiederum eine relativ klare implizite Gliederung. Zunächst ist dieser Abschnitt geteilt in die Arithmetik (27-116) und die Geometrie (117-339). Leuneschloss gibt der Behandlung des Zahlbegriffs und der Einbeziehung von Eins, Null und Brüchen in den Bereich der Zahlen, einen breiten Raum. Auch die Beziehung von Ganzem und Teil, Zahlen mit merkwürdigen Eigenschaften, Kombinatorik und Zahlenverhältnisse werden berücksichtigt, doch immer wieder streut Leuneschloss in diese Bereiche der ernsthaften Mathematik Momente der Unterhaltungsmathematik. So heißt es z.B. unter Nr. 92 zur Regula falsi: "Die Schreiber und üblen Schatzmeister wenden bei Angelegenheiten ihrer Herren meistens die Subtraktion und die Regula falsi an, in ihren eigenen Angelegenheiten aber die Addition und die Multiplikation."

Auch einen längeren Abschnitt mit klassischen Aufgaben der U-Mathematik findet man (93-116), denn die U-Mathematik hat sich ja zu allen Zeiten mit Vorliebe solchen Auafgaben zugewandt, die in irgendeiner Weise verblüffen.

Auch das seit Alkuin bekannte "Flaschenproblem" wird als Aufgabe gestellt.[2] Bei Alkuin waren 10 volle, 10 halbvolle und 10 leere Ölflaschen so unter drei Personen zu verteilen, daß jede Person gleichviele Flaschen und gleichviel Öl erhält. Alkuin erwähnt nicht, daß fünf verschiedene Lösungen möglich sind, sondern gibt ohne weiteres <u>eine</u> Lösung an: Ein Teilnehmer erhält 10 halbvolle , die beiden anderen je 5 volle und 5 leere Flaschen. Bei Tartaglia und Bachet de Méziriac findet man das gleiche Problem mit 21 Flaschen. Auch Leuneschloss benutzt 21, allerdings Weinfässer (Nr. 116). Die Aufgabe wird leicht verändert und scheinbar erschwert: Jeder Beteiligte soll ebensoviele volle wie leere Fässer erhalten. Viele "klassische" Aufgaben aus der U-Mathematik kommen auch in der Sammlung bei Leuneschloss vor. Er hat sie vermutlich von Leurechon oder Schwenter übernommen. Man findet u.a. das sogenannte Josephsspiel (Nr. 103 u. 104), auch die bekannten Transportprobleme (Fähre) kommen bei Leuneschloß vor, ebenso zwei Umfüllaufgaben, wie sie in verschiedenen Varianten seit dem Mittelalter bekannt sind.[3]

Ein eigenartiger Aufgabentyp sind die Probleme mit dem blinden Abt, der seine Mönche in Grüppchen, im Carré aufgestellt, antreten läßt, wobei die Mitte des Carrés frei bleibt. Er zählt die Seiten des Carrés durch und glaubt, die Gesamtzahl sei konstant, wenn die zu den Seiten gehörenden Zahlen konstant seien, was natürlich ein Fehler ist, weil die Gruppen an den Ecken des Carrés jeweils zweimal gezählt werden, die andern aber nur einmal.

Auch eines der "Restprobleme", wie man sie schon seit dem 3. Jh. in China und dann auch bei den Indern kannte[4], ist in der Sammlung von Leuneschloss enthalten, und zwar in der klassischen

[2] M. Folkerts, 1978, p.51. - Tropfke, 4.Aufl., Bd. 1, S. 659.
[3] Tropfke, a.a.O., S. 659.
[4] Tropfke, a.a.O., S. 636-637.

Einkleidung der Eierfrau (Nr. 106): Ein Mädchen trägt einen Korb Eier zum Markt, ein Reiter stößt mit ihr zusammen, die Eier gehen kaputt. Sie weiß nicht, wieviele es waren, aber als sie die Eier zu Hause in Paaren geordnet hatte, blieb eines übrig. Als sie die Eier in Tripeln anordnete, blieben zwei; bei Quadrupeln blieben 3; bei Quintupeln blieben 4; bei Sextupeln blieben 5, aber bei Septupeln blieb kein Ei übrig.[5]
Außer dieser mathematisch recht schwierigen Aufgabe gibt es dann auch eine eher durch Verblüffung wirkende (Nr. 331): "Ein harter Körper geht durch zwei oder drei Löcher ungleicher Größe und Form und füllt diese Löcher auch jeweils aus." Man kennt z.B. die Aufgabe, einen Körper zu bestimmen, der als Parallelprojektionen einen Kreis, ein Rechteck und ein Dreieck ergibt.
Guldin hatte bereits in einer Schrift von 1622 über die Anzahl der Permutation von Buchstaben versucht, mit eindrucksvollen Beispielen die Größe solcher Zahlen deutlich zu machen.[6] Z.B. berechnete er die Anzahl der Permutationen von 23 Buchstaben, was auf eine 25stellige Zahl führt. Die Verblüffung über die Größe solcher Zahlen war in der Mitte des 17. Jahrhunderts sicherlich noch erheblich stärker als heute, daher nahm Leuneschloß derartige Dinge auch unter seine Paradoxien auf. Der entsprechende Abschnitt beginnt mit dem paradoxen Satz (Nr. 80), daß man zur Entriegelung verschlossener Riegel keinen Schlüssel, sondern nur die Arithmetik benötige. (Die Öffnung eines Schlosses ist ein kombinatorisches Problem.) Der Autor führt an (Nr. 81), daß man mit vier Würfeln 126 unterschiedliche Würfe erzielen kann. Die nächste Aufgabe besteht darin, die Zahl der möglichen Sitzordnungen von 12 Tischgenossen zu berechnen. Die Lösung (479 001 600) steht z.B. schon bei Schwenter[7] und wird von Leuneschloss gleich mitgeliefert. Die Größe dieser Zahl übertrifft unsere Erwartung, sie ist "paradox". Im nächsten Beispiel (Nr. 83) wird nach der Anzahl der Permutationen für die Aufstellung im Heer des Xerxes gefragt. Es sind 50 Myriaden, also 500 000 Soldaten. Die Zahl ihrer Permutationen "erhebt sich zu einer so erschreckenden Menge, daß zu ihrer Durchzählung die Grenze des menschlichen Lebens wohl überschritten wird und der sterbliche Scharfsinn fast zu wanken scheint". Als ein weiteres Paradoxon wird angeführt, daß die Permutationen der 24 Buchstaben des griechischen Alphabets größer als die Zahl aller Menschen auf der Erde ist. Ob Leuneschloss das Beispiel nun direkt aus Guldins Buch oder aus Schwenters *Erquickstunden* genommen hat, ist nicht so wichtig wie der Umstand, daß er das zu seiner Zeit noch junge mathematische Arbeitsgebiet der Kombinatorik in sein eher populärwissenschaftliches Buch aufgenommen hat.
Ein längerer Abschnitt des Paradoxien-Buches beschäftigt sich mit Eigenartigkeiten von Winkeln. Die meisten dieser Winkelparadoxien ergeben sich im Zusammenhang mit krummlinigen Winkeln. Die Untersuchung von Winkeln aus Bogen und Gerade stehen ja in enger Beziehung zu Problemen der Kurvendiskussion, wie sie im 17. Jahrhundert intensiv betrieben wurde. Ein gewisser Typ von Winkelparadoxie beruht darauf, daß der Leser zunächst nur an Winkel zwischen Geraden denkt. So heißt es Nr. 231: "Eine Linie, die über einer Linie steht, erzeugt zwei Winkel, die weder rechte/gerade noch zwei rechten/geraden gleich sind." Der Autor nutzt hier die Doppeldeutigkeit von "rectus" aus, das den "rechten" Winkel, aber auch den

---

[5] Lösung: n+1 muß ein Vielfaches von 60 (= kleinstes gemeinsames Vielfaches von 2,3,4,5,6) sein und n muß durch 7 teilbar sein. So kann man das kleinste n suchen. Es gibt weitere Lösungen, wenn man zu dieser Lösung ein Vielfaches von 7.60 addiert.

[6] Eberhard Knobloch, *Musurgia universalis - Unbekannte Beiträge zur Kombinatorik im Barockzeitalter*, in: Actio formans, Festschrift für Walter Heistermann, hrsg. v. Gerd Heinrich, Michael-Sören Schuppan u. Friedrich Tomberg, Berlin 1978, S. 122.

[7] 1636, 1.Teil, Aufgabe Nr. 32.

"geraden" Winkel bedeuten kann. Die Lösung besteht offenbar in einem Kreisbogen, der eine Gerade senkrecht trifft. - Die meisten Verblüffungen bei Winkeln zwischen zwei Bogen oder einem Bogen und einer Geraden entstehen daraus, daß man nicht so sehr auf die Richtung der beiden Linien in der Spitze des Winkels achtet als viel mehr auf den Flächenraum zwischen ihnen. - Zu einer einzigen "Linienneigung" (inclinatio) gibt es zwei Arten von Winkeln (Nr. 227) - nämlich geradlinige und krummlinige. So kommt es zum Paradox Nr. 230: "Krummlinige Winkel sind geradlinigen gleich." Gemeint ist offenbar: nicht der Art, sondern der Größe nach.

Auch die Diskussion der Mathematiker um den Kontingenzwinkel, die ja erheblich zur Klärung des Winkelbegriffs beigetragen hat, findet ihren Niederschlag in den *Paradoxa* bei Leuneschloss.

Einige über das Buch verstreute Paradoxien sind bei Leuneschloss dadurch hervorgehoben, daß sie mit einer stereotypen Floskel enden: *scitur ac nescitur* (man weiß es und man weiß es nicht). Es ist eine Formulierung, die sehr an den Begriff der "gelehrten Unwissenheit" erinnert, wie ihn Nikolaus von Kues verwendet hat. Bei näherer Betrachtung dieser Paradoxien zeigt sich eine Gemeinsamkeit in ihnen, denn folgendes sind die Dinge, von denen es heißt, daß man sie weiß und nicht weiß:

1) Die Findung zweier mittlerer Proportionallinien zwischen zwei vorgegebenen Linien (Nr. 159).
2) Das Verhältnis zwischen dem Kreisdurchmesser und dem Kreisumfang (Nr. 184).
3) Die Teilung eines Winkels in drei, fünf, sieben usw. gleiche Teile (Nr. 253).
4) Das Verhältnis eines Kreises oder einer geradlinigen [ebenen Figur] zu der, die durch Verdoppelung des Durchmessers bzw. der Seiten entsteht (Nr. 294).
5) Die Würfelverdoppelung (Nr. 339).
6) Die Analysis des irrationalen Quadratischen, Kubischen, Quadrato-quadratischen und Kubo-quadratischen (Nr. 345).

Offensichtlich ist es das Moment der *Irrationalität*, das zur Anwendung jener merkwürdigen, paradoxen Floskel vom "Wissen und Nichtwissen" geführt hat. Es wird nicht gesagt, worin das Wissen bzw. Nichtwissen jeweils besteht. Leuneschloss berührt mit diesen Paradoxien einen in der U-Mathematik immer wieder beliebten Themenbereich, nämlich die Beziehung des Unendlichen zum Endlichen. Und man braucht nur auf die Bücher von Hofstadter oder anderer neuerer Autoren zu verweisen[8], um deutlich zu machen, daß dieses Thema auch heute noch die U-Mathematiker fasziniert. Im 16. und 17. Jahrhundert klingt ein Satz wie das Paradoxon Nr. 201 geradezu theologisch: "Das Endliche kann das Unendliche aufnehmen." Bei Leuneschloss taucht dieser Satz im Zusammenhang mit der Schneckenlinie auf. Der Autor will damit sicher auch die mathematisch ungebildeten Theologen provozieren, auf die er nicht allzu gut zu sprechen ist. Er wünscht, "daß alle Theologen Mathematiker seien, d.h. nachgiebige und sanfte Menschen" (Nr. 988; vgl. auch 989 u. 14). Zu seiner hohen Meinung von der Mathematik gehört auch, daß er die Mathematiker als die "Priester" im zweiten "Tempel" Gottes, nämlich neben der Kirche in der Mathesis, ansieht (Nr. 6-9).

Leider ist es unmöglich, in kurzer Zeit alle interessanten Punkte dieses Buches durchzugehen. Nicht einmal die rein mathematischen können alle einigermaßen befriedigend gestreift werden, doch sind einige allgemeine Punkte beachtenswert: Der ausgezeichnete Status der mathematischen Werke gegenüber theologischen Offenbarungsschriften oder poetischen Werken liegt nach Leuneschloss darin, daß die Werke der Mathematiker von ihrer Entstehungszeit und ihren Autoren unabhängig sind. Nr. 344: "Wenn die Arithmetik und die Geometrie in ihren Grundlagen durch die Unbilden der Zeit verloren gegangen wären, hätte jede der beiden von

[8] Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: ein endloses geflochtenes Band*. 4. Aufl. Stuttgart 1985. H. Meschkowski, ...

einem geübten analytischen Denker von neuem gefunden werden und wieder zu ihrem früheren Glanz gebracht werden können." Diese ganz und gar unhistorische Auffassung von der Mathematik korrespondiert bei Leuneschloss mit seiner platonistischen Grundhaltung, die er in einer Aristoteles entwürdigenden Passage ausdrückt, aber auch in Sätzen wie diesen: Nr. 11 "Ein mathematischer Beweis ist keiner, der sich auf unsere Sinne stützt, sondern nur einer, der alleine mit dem Geist wahrgenommen wird." Nr. 23 "Die Ideen der mathematischen Entitäten findet man - gleichsam als exakteste Typen der Dinge - im göttlichen und auch im menschlichen Geist."[9] Dementsprechend hat Leuneschloss auch Einwände gegen die Verwendung technischer Hilfsmittel, weil mit ihnen die Exaktheit der reinen Mathematik nicht erreichbar ist. So wendet er sich gegen den Jakobsstab (Nr.208) und gegen den Proportionalzirkel (Nr. 342). Bei allem Lob für die technische Verwendung von Brennspiegeln bei Archimedes (Nr. 129-133) hat Leuneschloss nur abfällige Bemerkungen über die sogenannte Technik der Fortifikation (N. 340, 341), weil sie eben noch nicht im Sinne einer exakten technischen Wissenschaft betrieben werde. Der Autor steht ganz im Banne des rationalistischen Wissenschaftsoptimismus, wonach Mathematik und exakte Naturwissenschaft (Physik) nicht nur für Techniker, sondern auch für Politiker und Theologen erfordelich ist (Nr. 990). Selbst die Ordnung der menschlichen Handlungen auf das Glück hin ist nur von der Ratio zu erwarten, deren Ausbildung auch das beste Mittel zur Friedenssicherung ist (Nr. 997, 998). Zu diesem Wissenschaftsoptimismus gehört im 17. Jahrhundert paradoxerweise auch der Zweifel bezüglich unseres Wissens überhaupt.[10] Nr. 987: "Wieviel es ist, was wir wissen, soviel ist es auch, was wir nicht wissen. Und kein Sterblicher weiß, wieviel er nicht weiß ..."

[9] Vgl. auch Nr. 24: "Die Natur der Körper und die Kunst (ars) streben immer und grundsätzlich nach den mathematischen Entitäten, obwohl sie an ihrem Ziel wegen der Grobheit und Unvollkommenheit der sinnlichen Materie frustriert werden." - Nr. 25: "Daher sind die mathematischren Figuren Entitäten, die - unabhängig von allen Zahlen - durch sich und wahrhaft bestehen." - Nr. 26: "Doch die Figuren in den natürlichen und künstlichen Körpern sind Entitäten, die akzidentell, unvollkommen und falsch sind."

[10] Leuneschloss knüpft an Francisco Sanchez (*Quod nihil scitur*, 1581) an.

Why Hermann Otto Hirschfeld became Hermann O. Hartley?

Annette B. Vogt (Berlin)

Hermann Otto Hirschfeld-Hartley (1912-1980), HOH as friends called him and as he was widely known, was an extraordinary statistician in the 20th century, one who was able to combine pure and applied methods, who was able to solve simple practical problems as well as to create new topics like his voluminous statistical tables. He was an organiser in science too. In 1963 he established his Institute of Statistics at the Texas A&M University which became one of the centers of statistics in the USA. At the Texas A&M University an annual "H. O. Hartley Award" is given, from 1980, and the "H. O. Hartley Memorial Lectures" are held every other year, from 1988 onwards. The Hermann Otto Hirschfeld Lectures at the Humboldt University in Berlin were established in 2003.

In Berlin

Hermann Otto Hirschfeld was born in Berlin on April 13, 1912, in the family of German-Jewish roots as son of Harry Hirschfeld and Elisabeth (?-1963), born Springer, belonging to the famous family of the publishing house Springer. He had two brothers, Philip and Fred, and one sister Dorothy.[1] His father Dr. Harry Hirschfeld (1878-1938) studied law (juridical topics), in 1900 he received his PhD at the Jena University.[2] He had to convert to get a position in the public legal system. This was neccessary because of the "normal" antisemitism in the German Kaiserreich. The baptization was the "Entree billet" to the bourgois society as Heinrich (Harry) Heine (1797-1856) wrote, although in his case it didn't worked. Until 1933 Harry Hirschfeld made a successful carreer, from 1911 until 1920 he was Amtsgerichtsrat in Berlin-Spandau, in July in 1920 he became Landgerichtsrat in Potsdam, and from 1921 until 1933 he directed the Landgericht I as Landgerichtsdirektor in Berlin.[3] H. O. Hirschfeld got the good education, children of bourgois families got in these years. Thanks to his short biographical scetch (the cv) which was published together with the doctoral thesis, and which is kept in the Archive of the Berlin University, we know that one teacher at the Bismarck-Gymnasium in Berlin-Wilmersdorf influenced him: "Hier hatte ich in den höheren Klassen Herrn

[1] Thanks to Jennifer Molet-Hartley, e-mail to AV, October 2007.
[2] See Harry Hirschfeld, Dissertation: "Das Pfandrecht des Vermieters an den eingebrachten Sachen des Mieters nach gemeinem Recht und Bürgerlichem Gesetzbuch", Jena 1900.
[3] See the entry about him in Bergemann, Ladwig-Winters (2004), p. 206.

Professor R. Fuchs zum Lehrer in Mathematik, durch den mein naturwissenschaftliches Interesse in hohem Maße gesteigert wurde."[4] The teacher R. Fuchs was Richard Fuchs (1873-1945), the son of the important mathematician Immanuel Lazarus Fuchs (1832-1902), who was from 1884 until his death in 1902 full professor for mathematics at the Berlin University. Although Richard Fuchs had the PhD in mathematics (1897 at the Berlin University) and the "Habilitation" at the Technical College (TH) in Berlin-Charlottenburg (in 1906), where from 1922 until 1933 he was a. o. professor, he was unable to live only as Privatdozent. Like many other Privatdozenten he had to teach in a high school to earn the living - luckily for the school boy Hermann Otto. Thanks to the work for the Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt (the German association for aerodynamics and aircraft) in Berlin-Adlershof Richard Fuchs survived the Nazi regime and the persecution. In the hard winter in 1945 he died, only few monthes after the liberation of his country.

Hermann Otto Hirschfeld studied first in Göttingen, in the 1920s the "Mekka" for theoretical physicists and mathematicians.[5] His academic teachers at the Göttingen University were Richard Courant (1888-1972), Edmund Landau (1877-1938), James Franck (1882-1964), Robert W. Pohl (1884-1976). Three of them were displaced from their academic positions in 1933, Richard Courant and James Franck escaped to the USA, Edmund Landau died under hard circumstances in Berlin. Richard Courant influenced HOH very much, also to choose the topic of his dissertation.[6] Probably he changed the university because of the beginning Nazi terror. In the little town Göttingen the SA troups were lauder and more visible than in Berlin. The famous Emmy Noether (1882-1935) had to change her appartment already in 1932, because she was a Jew and a left wing who voted for the Social democrats. The capital Berlin was less dominated by the Nazis, although in Berlin SA troupes marched through parts of the town too, Jewish people or human beings who "looked jewish" were beaten. In the case of foreigners it was a little scandal and reported in some newspapers, then an excuse was made. Who wanted to see the danger could recognise it.[7]

In Berlin HOH studied very quickly, already in February in 1934 he passed the examen and got his doctoral degree. His academic teachers at the Berlin University were Ludwig Bieberbach (1886-1982), Georg Feigl (1890-20.4.1945), Adolf Hammerstein (1888-1941), Gerhard

[4] Hermann Otto Hirschfeld, Lebenslauf zur Dissertation (1934) in: Archive HUB, Phil. Fak. Nr. 757, Bl. 31.
[5] See for example Struik (1996), p. 252.
[6] See Hirschfeld, thesis, introduction, p. 65.
[7] See Joseph Roth (2003), see Kurt Tucholsky (1929, Deutschlandbuch).

Hettner (1892-1968), Richard von Mises (1883-1953), Erhard Schmidt (1876-1959), Erwin Schrödinger (1887-1961), Issai Schur (1875-1941). Richard von Mises, Erwin Schrödinger and Issai Schur are the emigrees among these mathematicians and physicists who had very different conditions for their exile.[8] HOH could finish his study, 2 years later it will be forbiden for Jews - Jews by the Nazi definition, independently of baptization and all other relations - to enter the German "Aryan" universities. The reference on his thesis "Direkte Methoden der Variationsrechnung zur Lösung von Randwertproblemen" was written by Adolf Hammerstein (1888-1941) and signed by Erhard Schmidt (1876-1959).[9] Many years later the former advisor Erhard Schmidt will remember, that the nicest result Hirschfeld had covered in one footnote: "Zu seiner Dissertation bemerkte Erhard Schmidt, daß Hirschfeld sein schönstes Ergebnis in einer Fußnote versteckt habe."[10] It was impossible for me to clarify Erhard Schmidt's bonmot; the thesis of Hirschfeld included 37 footnotes. His thesis was published in the series "Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin".[11] In the introduction Hirschfeld wrote: "Es sollen im folgenden neue Existenzsätze für Variationsprobleme mit der Methode der Differenzengleichungen hergeleitet werden."[12] He refered to Leibniz, to Euler who developed the Euler' differential equations, and he made the notice that thanks to R. Courant a rebirth of the direct method ("Wiedergeburt als direkte Methode") happened. After getting his doctor diploma on May 9, 1934, HOH was able to "leave" Berlin, like many scientists with Jewish roots, HOH was forced to flee Germany.

Between 1933 and 1938 in total 22 mathematicians, 3 women and 19 men, were forced by the Nazis to leave their positions at the Technical College in Berlin-Charlottenburg and at the Berlin University (the Friedrich-Wilhelms-Universität).[13] The procedure of displacing certain people from schools, Technical Colleges, Universities and Kaiser Wilhelm Institutes was part of the Nazi policy against all liberal and democratic people, left wing persons, especially communists and social democrats, and last but not least against the Jews. When the first

[8] About R. von Mises see Siegmund-Schultze (1998a, 1998b), Vogt (2007); about Issai Schur see Ledermann (2003), Vogt (1999).
[9] See Archive HU: Phil. Fak. Nr. 757, Bl. 23R-24R, handwritten.
[10] Quot. in: Pinl, Max. Kollegen in einer dunklen Zeit. In: Jahresberichte DMV, 71 (1969) No. 4, p. 180 (179-180).
[11] See Hirschfeld, Hermann Otto. Direkte Methoden der Variationsrechnung zur Lösung von Randwertproblemen. In: Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin, Bd.II, Heft 3, Berlin 1934, S. 65-108.
[12] Ebenda, introduction (p. 65-68), p. 65.
[13] See Pinl (1969-1974), Pinl/Furtmüller (1973), catalogue (1998), Siegmund-Schultze (1998a, 1998b), Epple et al (2006/07, exhibition), Epple/Bergmann (ed.s, in print, 2008).

campaigns and small pogroms in Germany were organised by the Nazis in 1933, on April 1st for example against Jewish shop owners, physicians and advocates, only a few people predicted the awful future.[14] It was unthinkable, what would later be named Shoah.
The Nazis introduced so-called laws that forced all people they assumed to be enemies and/or Jews into redundancy. They invented a racist definition of a "Non-Aryan" which ignored the status of religion, especially the history of baptized Jews. The combination of established laws for discrimination and published antisemitism was meant to "encourage" the Jews in Germany to leave the country, which had been their home for centuries, to "sell" (for next to nothing) their shops or houses, their law offices or scientific libraries to the "Aryans", to forget their roots, relatives and friends, and to commit to a completely uncertain future. Looking back from 1945 onwards, this uncertain future would be in part a fortunate one, but only for the surviving victims.

In Exile

In 1936 the "Academic Assistance Council" (AAC, in 1936 it became the "Society for the Protection of Science and Learning" (SPSL)[15]) published the "List of Displaced German Scholars". In it were in total 1624 scholars who were "dismissed" from their institutions in Germany by the summer of 1936. Among these 60 mathematicians were named. This "List" is one of the basic documents for the research on exile.[16] HOH held not the smallest position at the Berlin University, he was a post-doc we would say, therefore he was not included in this "List". Later he was - quite correct - included in the dictionary of emigrees (1983)[17], which was based on the List (1936) and further research as well as on questionaires and personal informations. Compared with other entries, the lack of any private information (on family roots, his wife and children) in the entry of HOH is unusual. The mathematician Maximilian (Max) Pinl was the first who studied in Germany (West) the fate of Jewish mathematicians and left wings who were thrown out by the Nazis and who were persecuted. From 1969 until 1974 he published his results.[18] He mentioned HOH and was in direct contact with him, but he also got no personal informations.

---

[14] The Jewish writers Joseph Roth and Kurt Tucholsky predicted some elements of this „future“ for the German and European Jews and demanded an alliance against the Nazi regime as early as 1933; see for example Roth (2003).
[15] On the history of the AAC resp. the SPSL see Beveridge (1959) and Hirschfeld (1988). "List of Displaced German Scholars" (1936), see Strauss (1987).
[16] See Strauss/Röder (1980-1983).
[17] See Strauss/Röder (1980-1983), Vol. II, Part I, p. 461 (see Hartley).
[18] See Pinl (1969-1974) and Pinl/Furtmüller (1973); on Hirschfeld see Pinl (1969), p.179-180.

From Berlin to London

In 1934 Hermann Otto Hirschfeld emigrated together with his brother Philip, an advocat and solicitor, to Great Britain.[19] In December 1937 Philip and Hermann Otto Hirschfeld changed their name into Hartley, both were British citizens too. This made their life much easier, other emigrees were "stateless" or still Germans, and in autumn 1939 they were arrested as enemy foreigners.[20] In 1938 their mother Elisabeth with the two younger children reached the British coast too. But unfortunately his father stayed still in Nazi Germany, he died in the horrible year 1938 (when the pogrom called "Reichskristallnacht" on November 9 was organised) in Berlin. After leaving Nazi Germany in 1934, HOH begun post graduate studies at Cambridge University. Obviously, because of the different conditions for mathematicians in Great Britain, Hartley changed his scientific interests from pure mathematics to applied mathematics and statistics. Like HOH, many emigrees had to do so, and the younger emigrees studied again, like he did. In 1940 he obtained a PhD in Mathematical Statistics from Cambridge University.[21] Also in 1940 HOH married to Grace, two children (Michael and Jennifer) were born in London.[22] Only little mathematics was demanded when Hartley became a statistician (1936-1938) at the Harper Adams Agricultural College in Shropshire. He was involved with poultry experiments, and he lectured on basic statistical methods to students of agriculture. Soon he became a consulting statistician. At Harper he met his future wife and lifelong support Grace.[23]

In 1938 Hartley joined the company "Scientific Computing Service", founded by the tablemaker L. J. Comrie who was known by Karl Pearson (1857-1936). Karl Pearson was the prominent British statistician, the founder of the first English university department of statistics (at University College, London), where his son Egon Sharpe Pearson (1895-1980) spent up to his retirement in 1960.[24] The younger Pearson will become a close colleague of HOH, both will edit and publishe the famous table work - "Tables for Statisticians and

---

[19] Thanks to Jennifer Molet-Hartley, e-mail to AV, October 2007.
[20] On the British policy related to emigrees see Medawar/Pyke (2001).
[21] See H. A. David. H. O. Hartley, 1912-1980. In: International Statistical Review, Vol. 50, No. 3 (Dec. 1982), pp. 327-330, with a list of publications (selection).
Herbert Aron David (b. 19.12.1925 Berlin), see the interview, conducted on 9.9.2000, publ. in 2004: Narayanaswamy Balakrishnan and Haikady N. Nagaraja, in: Statist. Sci., Vol. 19, No. 4 (2004), pp. 720-734.
[22] Thanks to Jennifer Molet-Hartley, e-mail to AV, October 2007.
[23] See David (1982), p. 327.
[24] On Karl Pearson (1857-1936) see the obituray. On Egon Sharpe Pearson (1895-1980) see the obituary by N. L. Johnson, in: Journal of the Royal Statistical Society, Series A (1981), pp. 270-271.

Biometricians", Vol. 1 came out in 1954, but Vol. 2 only in 1972. During the years between 1938 and 1946 Hartley had to do with "war-related projects including large-scale surveys and the preparation of bombing tables for U. S. Air force flying missions over Germany and occupied Europe."[25] Working in that company, during the war-years HOH met Egon S. Pearson, it began their very successful cooperation and collaboration. Only after WW II Hartley got an academic position. In 1946 he became Lecturer in Statistics at University College London. In these years, the fields statistics and mathematical statistics were much better developed in the USA.[26] And the opportunities for statisticians in England were very limited then. Thus, in 1953 HOH moved to the USA. Whether it was a second emigration or not, it was a deep break, a move to another culture as well as to another live style. Again, HOH managed this very successful.

From London to Texas

First, in 1953, HOH became visiting professor at the Iowa State College, from 1954 until 1963 he was professor of statistics. In 1963 he became the director of the newly formed Institute of Statistics at Texas A & M University where he also held the position as distinguished professor. 16 years he successfully worked here, until his retirement in 1979. As W. B. Smith pointed out, Hartley contributed "to the school's metamorphosis from a small college into a university ... He built his initial faculty in the Institute for Statistics from four to 16 and his students majoring in statistics from 10 to a maximum of 60. He attracted a considerable amount of research funds and directed more than 30 doctoral students in their research."[27] It followed a short term as visiting professor of mathematics and of community and family medicine at the Duke University in Durham. Furthermore, he also worked as statistician with the National Testing Service, Durham. HOH received several acknowledgements, he is well known for his work on the foundation of sampling theory. In 1979 he became the president of the American Statistical Association. Before he served as president of the Eastern North American Region of the Biometric Society.
Hartley published more than 120 papers. In 1978 Herbert Aron David edited the volume in honour of the 65th birthday of HOH, where a list of publications was included. His major research Hartley made to the area of survey sampling. Together with J. N. K. Rao a new

[25] See H. A. David (1982), p. 327.
[26] See E. J. Gumbel, interview in 1959, publ. in: Vogt (2001), p. 253 (pp. 247-258).
[27] Smith, W. B. In memoriam Hermann Otto Hartley, (1912-1980). In: The American Statistician Vol. 35, No. 3 (Aug. 1981), pp. 142 (142-143).

estimation theory for sample surveys was developed (Hartley&Rao (1968)). HOH also made numerically oriented work. One has to underline that his famous "Biometrika Tables", by E. Pearson and Hartley, volume 1 (1954) was prepared without the help of high-speed computers. Volume 2 (in 1972) "draws heavily on computer-generated tables from many sources. The two volumes with their attractive layout and useful introductory material are models of table making."[28] Thanks to the collaboration with J. Arthur Greenwood, in 1962 their guide to statistical tables was published. Hartley's interest in numerical methods and in analysis led him to made major contributions to the (1) nonlinear least square estimation, see his paper on the modified Gauss-Newton-method (Hartley (1961)), (2) to the problem of estimation for incomplete data (Hartley&Hocking (1971)), and (3) on mixed model in the analysis of variance (Hartley&Rao (1967)).[29] About his personality, W. B. Smith and H. A. David reported with warm memory.

In 1979 Hartley had given the Presidental Address on the annual meeting of the American Statistical Association as its president. It could be read as his legacy. Beginning with the question "What is statistics?", Hartley discussed 6 topics: The science of statistics; The balance between mathematical and applied statistics; The cooperation between statistician and subject matter specialist; (the) problems of data acquisition; The impact of computers on statistics; and finally, The identity of the statistical profession.[30] To understand the personality of Hartley, it is interesting to mention here that in his address he quoted two times Winston Churchill (1874-1965), from May 1940 until July 1945 prime minister of Great Britain and one of the leader of the Anti-Nazi-Alliance during WW II, the second one finished his address: "Let me close with an analog to a well-known wartime exhortation by the British statesman, Winston Churchill: 'We shall fight in the colleges and universities, we shall fight in federal and state agencies, we shall fight in all public and private sectors of our economy. We shall never surrender.'"[31] The war time was still important for Hartley.

[28] David (1982), p. 328.
[29] See David (1982), p. 329.
[30] H. O. Hartley. Statistics as a Science and as a Profession. Presidental Address. In: Journal of the American Statistical Association, Vol. 75, No. 369 (March, 1980), pp. 1-7.
[31] Hartley (1980), p. 7.

Sources/Literature: (selection)

Hermann Otto Hirschfeld, Promotions-Vorgang (1934) in: Archive HUB, Phil. Fak. Nr. 757, Bl. 23ff.

Hirschfeld, Hermann Otto. Direkte Methoden der Variationsrechnung zur Lösung von Randwertproblemen. In: Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin, Bd. II, Heft 3, Berlin 1934, S. 65-108.

Hartley, H. O. Statistics as a Science and as a Profession. Presidental Address. In: Journal of the American Statistical Association, Vol. 75, No. 369 (March, 1980), pp. 1-7.

Sources on German Emigrés/Mathematicians:

List of Displaced German Scholars. London, AAC, 1936. Publ. in: Strauss, Herbert A. (Hg.), Emigration. Deutsche Wissenschaftler nach 1933. Entlassung und Vertreibung. List of Displaced German Scholars 1936. Supplementary List of Displaced German Scholars 1937, Berlin: Technische Universität 1987

Pinl, Max Kollegen in einer dunklen Zeit. In: Jahresberichte DMV, 71 (1969) No. 4, on Hirschfeld: p. 179-180.

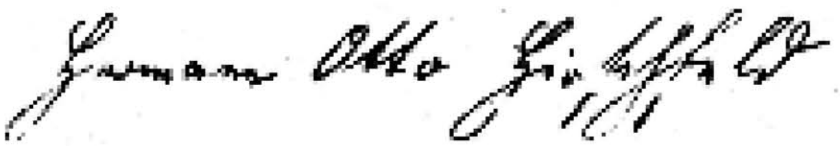
Hartley (Hirschfeld), in: Strauss/Röder (1980-83), Vol. II, Part I, p. 461.
Strauss, Herbert A. und Röder, Werner (Hgg.), Biographisches Handbuch der deutschsprachigen Emigration nach 1933. International biographical dictionary of central European emigrés 1933-1945, 3 Bde., München: Saur 1980-1983.

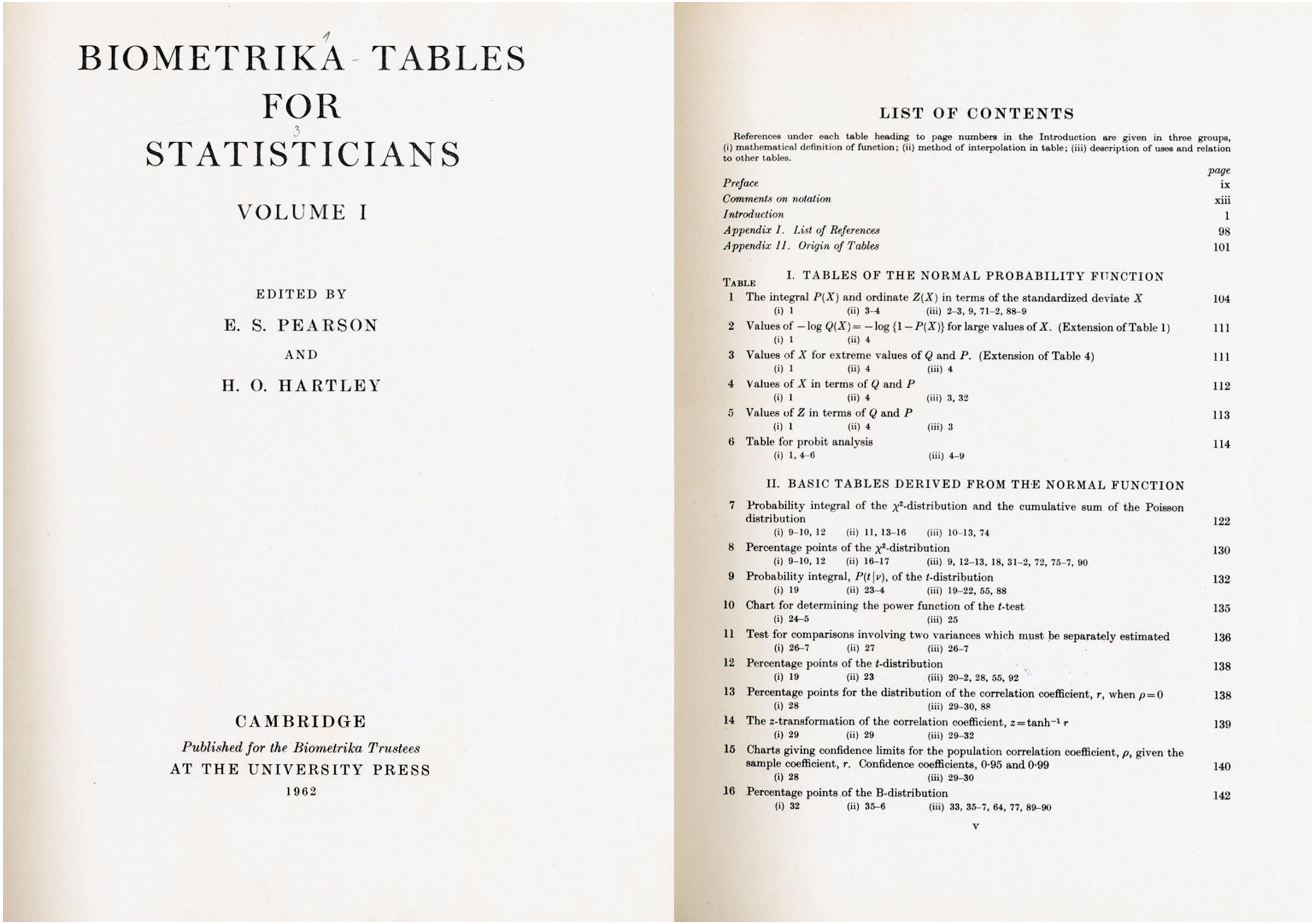
Obituaries, in memoriam HOH:

Smith, W. B. In Memoriam: Hermann Otto Hartley (1912-1980). In: The American Statistician, Vol. 35, No. 3 (Aug. 1981), pp. 142-143.
David. H. A. H. O. Hartley, 1912-1980. In: International Statistical Review, Vol. 50, No. 3 (Dec. 1982), pp. 327-330, with a list of publications (selection).
Smith, Willam B. H. O. Hartley (1912-1980). Revered and Remembered. In: AMSTAT NEWS, September 2005, p. 11 (pp. 10-11).

Dr. Annette B. Vogt
Max Planck Institute for the History of Science
Boltzmannstr. 22
14195 Berlin

vogt@mpiwg-berlin.mpg.de





BIOMETRIKA TABLES FOR STATISTICIANS

VOLUME I

EDITED BY

E. S. PEARSON

AND

H. O. HARTLEY

CAMBRIDGE

Published for the Biometrika Trustees

AT THE UNIVERSITY PRESS

1962

LIST OF CONTENTS

References under each table heading to page numbers in the Introduction are given in three groups, (i) mathematical definition of function; (ii) method of interpolation in table; (iii) description of uses and relation to other tables.

v

BIOMETRIKA TABLES FOR STATISTICIANS

VOLUME II

EDITED BY
E. S. PEARSON
AND
H. O. HARTLEY

CAMBRIDGE
Published for the Biometrika Trustees
AT THE UNIVERSITY PRESS
1972

LIST OF CONTENTS

v

GUIDE TO TABLES IN MATHEMATICAL STATISTICS

J. ARTHUR GREENWOOD
RESEARCH ASSOCIATE IN MATHEMATICS
PRINCETON UNIVERSITY

H. O. HARTLEY
PROFESSOR OF STATISTICS
IOWA STATE UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY (AMES)

1962
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
PRINCETON, NEW JERSEY

TABLE OF CONTENTS

Eine Provokation für die russische Malerei am Anfang des XX. Jahrhunderts: die nichteuklidische Geometrie

Christine Phili

Am Anfang des XXten Jahrhunderts beginnt in Rußland ein Aufbruch in der Literatur, in der Malerei, in der Musik.

Die Auswirkungen der neuen westlichen Strömungen durchqueren das Land. Ein wunderbarer Filter hält die fremden Elemente fest, absorbiert deren belebende dynamische Charakterzüge, und gibt endlich den zeitgenössischen Tendenzen eine russische Realität. Also: der französische Symbolismus und der Marinetti-Futurismus bekommen ihre russische Identität.

Diese künstlerischen Vorreiter-Schöpfungen bereiten die russische intellektuelle Revolution vor, eine Revolution, welche die Grenzen des Raums (Malerei, Bildhauerei), der Zeit (Musik, Poesie), des Raumes und der Zeit (Theater, Kino, Tanz) versetzt, und einen breiten intellektuellen Rahmen hat. Eine aus sich selbst geborene «Reform», ohne intellektuellen Rahmen würde a priori verurteilt werden.

Eine gründliche und fruchtbare Erkenntistheorie hat funktioniert - mit ihrer Universalität - und hat entscheidende Bedeutung bei der Eroberung eines neuen wissenschaftlichen Gebiets: der nichteuklidischen Geometrie.

Die begriffliche Formulierung dieser Erkenntnistheorie beruht wahrscheinlich auf zwei fundamentalen Voraussetzungen:

1) Die vollständige Unabhängigkeit von vergangenen Theorien.
2) Die gleichzeitige Transformation der bekannten Begriffe von Form und Raum durch eine neue Vorstellung.

Diese Thesen führen uns zur Wissenschaft der Geometrie. Die Geometrie ist das «Element», welches die wahrnehmbare und verständliche Welt im Raum verbindet, inhärent mit den Begriffen der Ordnung und des Maßes.

Die gesuchte Erkenntnistheorie mit abstraktem Syllogismus, welche den wahrnehmbaren Rahmen der räumlichen Vorstellung übersteigert hat und aus den Banden der früheren Erkenntnis, das heißt, der euklidischen Geometrie, herausgetreten ist, ist Lobatchevskiis Geometrie, welche sowohl in der Wissenschaft als auch in der Kunst in Rußland eine transzendente Begründung zu geben erlaubt.

Mit Lobatchevskiis nichteuklidischer Geometrie hat man festgestellt, daß Mathematik und Realität unabhängig sind. Die Annahme dieser Wahrheit hat dem Raum einen neuen Stoß gegeben und seine Unabhängigkeit vom euklidischen Raum. Die Abwesenheit von Gegenständen, der Bilder, der realen Welt verleitet zur Űbersteigerung des kleinlichen intellektuellen Prozesses, der Regel und zur Erweiterung der Geometrie und zur Einführung der subjektiven Transzendenz der Objektivität, welche den ganzen schöpferischen Geist der russischen Intelligenzia charakterisiert.

Der nicht-anschauliche Raum, welcher plötzlich mit dem Auffassungsvermögen von Lobatchevskiis Geometrie und dem «Kollaps» der wahrnehmbaren Welt zum Vorschein kommt, hat notwendigerweise die künstliche Schöpfung zugleich in die «Entweichung» behaftet mit unbegrenzter Freiheit geführt.

Seit der euklidischen Zeit betrachtet man die Geometrie als eine «experimentelle Wissenschaft», welche in der Realität den Raum darstellt und die Geistesschöpfung über die Natur reflektiert. Die natürliche Harmonie verträgt sich mit der «euklidischen Logik» und dieser geometrischen Vorstellung, den Raum als einzig und richtig anzunehmen.

Trotz des abstrakten Anstoßes, welchen die analytische Geometrie des Descartes gegeben hat - fast keiner hat sie gemocht -, übersteigt sie die Vorstellung des wahrnehmbaren Raums und die euklidische Grenze. Sowohl die Mathematiker als auch die Philosophen meinen, daß die euklidische Geometrie der ideale, richtige Ausdruck der Eigenschaften der natürlichen Welt und also aller Figuren, die in ihr innewohnen, ist. Der Glaube an die Richtigkeit der euklidischen Geometrie war so tief, daß sich die Arithmetik, die Algebra, die Analysis - Disziplinen ohne strenge Begründung - bemüht haben, sich mit euklidischer Geometrie zu bilden, weil doch diese die beste Garantie für die Wahrheit der anderen Disziplinen war. Hobbes, Locke und Leibniz meinen, daß die euklidische Geometrie Grundlage der Bildung des Weltalls war, sie unterstreichen ihre Einzigkeit und Notwendigkeit, welche Kant in seiner *Kritik der reinen Vernunft* (1781) gezeigt hat.

Aus dem ganzen Bauwerk des großen Alexandriners war nur sein fünftes Postulat, auch Parallelenpostulat genannt, zweifelhaft. Seit Euklid bis[1] zum XIXten Jahrhundert war das hauptsächliche Ziel der Forschungen der Beweis des fünften Postulates als einen Lehrsatz aus den anderen grundlegenden Sätzen der Geometrie. das somit als Postulat völlig[2] zu beseitigen war. Am Anfang des XIXten Jahrhunderts war das Problem des Beweises des fünftes Postulats ebenso unzugänglich wie in euklidischer Zeit. Ein Lehrsatz, welcher für 2000 Jahre unbewiesen blieb, bildet eine Provokation für die Mathematiker.

Ein junger Professor der Universität in Kazan, der Mathematik bei M.C. Bartels (1769-1836) studiert hatte, Nikolai Ivanovitch Lobatchevskii (1793-1856), hat die Lösung dieses sehr alten Problems gegeben. Am 12./24. Februar 1826 hat er sein Werk im Department der Physikomathematischen Schule vorgelegt: kurze Grundlagen der Geometrie (dieser Vortrag ist verloren). Danach hat Lobatchevskii verschiedene Artikel geschrieben, in der Zeitschrift der Kazan Universität, wie z.B. Imaginäre Geometrie oder Neue Grundlagen der Geometrie.

Jedoch für die Mehrzahl der russischen Intellektuellen, welche Mathematik ignorierten, war Lobatchevskiis Geometrie[3] nur ein neuer Name. Der junge Dichter Velimir Khlebnikov (1855-1922), ein bedeutender Futurist vor Majakovskii, war ein hauptsächlicher Anhänger für die neue Geometrie. Seine mathematische Bildung[4] erlaubte ihm. die neuen Theorien zu verstehen und die neuen Begriffe in das Milieu der Maler und Dichter zu übertragen. Für ihn ist Lobatchevskii ein Revolutionär, so schreibt er in seinem Gedicht über Stepan Razin[5]:

> «Ich bin ein Razin mit Lobatchevskii-Fähnlein»[6].

Khlebnikovs Freundeskreis, welcher fast die ganze russische Avantgarde umfaßte, betrachtete die neue

---

[1] Wir müssen unterstreichen die Werke von: Proclus, Omar al Khaiyam, al-Tussi, Wallis, Saccheri, Lambert, Legendre, Taurinius, Schweikart u.s.w.

[2] S. F. Engel, N. I. Lobatschefskij: *Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt mit Anmerkungen und mit einer Biographie der Verfassers.* Leipzig Teubner 1899.

[3] Lobatchevskii gibt seine Begründung der Parallelentheorie auch in seiner *Pangeometrie*: "Wenn eine Gerade und ein Punkt in einer Ebene gegeben sind, nenne ich P a r a l l e l e zur gegebenen Geraden, gezogen durch den gegebenen Punkt, die Grenzgerade zwischen denjenigen unter den Geraden (die in derselben Ebene durch denselben Punkt gezogen sind und auf der einen Seite des von diesem Punkt auf die gegebene Gerade gefällten Lotes verlängert sind), welche sie schneiden, und denen, welche sie nicht schneiden". N.I. Lobatchevskii, op. cit. s. 6 – 7.

[4] Khlebnikov studiert Mathematik in Kazan Universität und Literatur an der St-Petersburg Universität.

[5] Stepan Timofeievitch Razin (1630-1671) war ein Volksheld, Haupt der Grobianen.

[6] S. Vladimir Markov, *The longer poems of Velimir Klebnikov*. University of California. Publications in modern philology LXII. Berkeley. University of California Press 1962.

Geometrie als den Ausdruck der Befreiung von vergangenen Theorien.

Als Mathematiker studiert und lernt Khlebnikov die westlichen Entwicklungen über nichteuklidische Geometrie. So auch Poincarés Ideen über Lobatchevskiis Geometrie und auch die Ideen über Räume mit vielen Dimensionen.

Diese neuen Räume waren eine neue Provokation für die russische Intelligenzia. Die Künstler lernen die Relativitätstheorie, die Raum-Zeit, die nichteuklidische Geometrie näher kennen.In dieser Epoche hat Rußland vielen Problemen zu trotzen: der russisch-japanische Krieg, die mißlungene Revolution in 1905, der Putsch des Potemkin, welche die Revolution von 1917 vorbereiteten. Um diese schwere Situation zu meiden, entfliehen die russischen Künstler aus der Realität quer über neue Interessen und in die Obhut der «Metaphysik». Der russische Philosoph Nikolai Berdaiev schreibt: «es war in Rußland eine Epoche des Erwachsens des unabhängiges philosophisches Gedankens, das Blühen der Poesie und der hohen ästhetischen Empfindlichkeit, der religiösen Unruhe und Erforschung des Interesses nach Mystizismus und Okkult-Wissenschaften».

Zwischen zwei hauptsächlichen Richtungen, Ego-Futurismus und Kubik-Futurismus, wird die Malerei frei von Perspektive. Die Vision einer Welt, wo die neuen Begriffe über den plastischen und den musikalischen Raum nicht zu erscheinen zögern. Die russische Avant-Garde legt eine nicht realistische Welt vor. Es handelt sich um die Oper «Der Sieg über die Sonne»[7], welche Krutchenich geschrieben hat, Dekoration und Kostüme von Malevitch, Prolog von Khlebnikov, und instrumentiert von Matiushin. Das endliche Ziel dieser Oper ist die Eroberung der Sonne. Dann beginnt eine Epoche, in der die Welt von der irrigen Logik, welche die Sonne symbolisiert, entlastet ist.

Malevitch vergleicht die kubistische und die futuristische Schule, er erfindet seinen persönlichen Stil. Er zerstückelt den Raum mit Kegeln und Zylindern, beweist seine Aufnahmefähigkeit für die Schulen von Platon und Cézanne. Malevitch orientiert sich durch die geometrische Forschung in der abstrakten Malerei. Die ersten Versuche kommen zum Vorschein in der Dekoration der Oper «Der Sieg über die Sonne», wo der Hyperkubus erscheint, Zeichen der Zukunft, weil doch die Niederlage der logischen Sonne zum Raum mit mehr als drei Dimensionen führt. Die Dekoration dieser Oper war der

[7] S. auch *Victory over the Sun* a film re-creation of the opera produced by Douglas Cruickshank, directed by Robert Benedetti. Los-Angeles. 1988.

Kern für die Vorstellung der Malerei ohne realen Gegenstand. So erscheint im ersten Akt, erste Szene, und im zweiten Akt, erste Szene, das schwarze Quadrat, erster «Ausdruck» des Suprematismus. In dieser Aufführung müssen wir noch nach anderen Elementen suchen, von der Geburt des Suprematismus in der Kleidung der Schauspieler. Spezielle Lichtbilder - während der Aufführung - spielen eine Rolle, schattenwerfende Lichtstrahlen, so daß es einen Aufriß der geometrischen Figuren zu sehen gibt.

Nach dieser Oper beginnt Malevitch mit allen Möglichkeiten, welche die Geometrie der Kunst bietet, Versuche anzustellen. Die geometrischen Figuren erlangen für die Künstler einen anderen Sinn. Durch die Philosophie vom Raum mit mehreren Dimensionen sieht Malevitch die geometrischen Figuren aus einem anderen Blickwinkel.

Nach der Neuauflage der Vierten Dimension[8] von Ouspenski und der russischen Übersetzung von Hintons Buch[9] in 1915, erforscht Malevitch durch Matioushin den neuen Blick der vierten Dimension. Ouspenski und Hinton erkennen, daß die Farbe für die Erforschung der Bewegung eines multidimensional-festen Körpers eine neue unbekannte Richtung bildet. Die Austellung 0.10 enthüllt den neuen plastischen Raum des Malers, welcher in zwei und vier Dimensionen sich wechselseitig dividiert. Die Titel der Bilder sind: farbliche Mengen in zweiter und in vierter Dimension.

In 1916 definiert Malevitch die Kunst: «die Fähigkeit zu bauen... auf Grund des Gewichtes, der Schnelligkeit und mit der Richtung der Bewegung»[10]. Aber der Begriff der Bewegung wird reif durch Khlebnikovs Unterricht. Khlebnikov führt Malevitch in die nichteuklidische Geometrie ein, wo die Bewegung eine wichtige Rolle in Lobatchevskiis neuer Welt hat: «In der Natur verstehen wir geradezu nur die Bewegung, ohne alle diese Eindrücke, welche unser Empfinden verwirklicht[11].

Formen und Figuren der wahrnehmbaren Welt «bewegen» mit der Malerei von Malevitch und «erwerben» geometrischen «Stoff», berühren den «supremen Punkt». Die Beschreibung der suprematischen Welt wird uns bei dem Maler gegeben: «Dieser Raum erwirbt die Stelle der kosmischen Welt, welche aus keiner Person oder Gegenwart definiert ist.

[8] *Chetvertoe Izmerenie.* Opyt Issledovania Oblast Neizerimgo (1e Aufl. 1914).
[9] Ch. H. Hinton, *The Fourth Dimension.* London 1904. S. auch *Speculations on the Fourth Dimension: Selected writings of Charles H. Hinton* ed. Rudolf V. B. Rucker New York. Dover 1980.
[10] K. Malevitch, *Essayen* ed. Andersen 1 s. 24.
[11] N. I. Lobatchevskii, *Über die neue Grundlagen der Geometrie.* Kazan 1835, s. 26.

Sie ist ohne Dimension, ohne Orientierung, ignoriert rechts und links, oben und unten, nahe und fern»[12].

Aus der Darstellung von Linien und Ebenen, reichend bis zur geometrischen Abstraktion, offenbar aus der geometrischen Wahrheit findet Malevitch einen Einfluß, den Lobatshevskii ausdrückt: «Flächen, Linien, wie die Geometrie sie definiert, existieren nur in unserer Phantasie»[13]. Khlebnikov drückt den Auftrag des russische Geometers in der russischen Intelligenzia so aus: «Lobatshevskii bemüht sich, eine zweite Welt des nicht existierenden Gegenstands zu bauen»[14]. Sie ist die weiße Welt der Abwesenheit des Gegenstands, welche die Null in ihrem Ausdruck enthüllt, als optische Form der Leere von Malevitch dargestellt: «Die weiße, die freie Lücke, das Unendliche»[15]. Sein Suprematismus ist unendlich, aber leer. «Das Quadrat = Wahrnehmung, das weiße Feld = das leere Feld außerhalb der Wahrnehmung»[16].

Der Begriff des Unendlichen, das Leere und die Null, werden die bestimmenden Punkte in Malevitchs Malerei. Der Titel der Ausstellung 0.10 (siehe Photo) kommt von dieser Stelle: «Ich habe selbst in der Form die Null umgeformt und bin nach Null in Eins gegangen»[17]. Später schreibt er an Matioushin: «Schwer und arbeitsam ist das Streben nach der Höhe einer nicht-sachlichen Kunst... Nicht mehr gleichen sie der Realität, nicht idealen Darstellungen, nichts anderes, nur die Wildnis! Aber diese Wildnis stammt völlig aus dem Geist einer nicht objektiven Erfahrung, welche sie durchdringt»[18].

Malevitch interessiert sich sehr für den Begriff des Hyperraums. In 1916 fragt er Matiushin: «Was machen Sie mit der vierten Dimension?»[19] Und ein Jahr später bittet er ihn «senden Sie bitte Artikel über Musik und Dimension»[20]. Für seine Austellung 0.10 schreibt er: «Der Raum ist ein Gefäß ohne Dimension, wo der Intellekt seine

[12] M. Lamacan et J. Padrta, *Malévitch et le Suprématisme.* Galerie Chauvelin, Suprématisme s. 9.
[13] R. Crone, Maleviteh and Khlebnikov: Suprematism Reinterpreted, *Artforum* XVII. Dec. 1978 s. 46 S. auch Platon, *Republik* VI 510 D.
[14] R. Crone, ib. S. 41. S. Also R. Crone, zum Suprematismus – Kazimir Malevič, Velimir Chlebnikov und Nikolai Lobačevskii. *Wallraf-Richart Jahrbuch* XL, 1978 ss. 129-162.
[15] K. Malevitch, Non-Objective Creation and Suprematism 1919. S. K. Malevitch, *Essays* ed. Andersen Bd.1 s. 122.
[16] K. Malevitch, *The non objective World* 1927 translated by Howard Dearstyne. Chicago Paul Theobald and Co, 1959 s. 76. S. auch L. Zhadova, *Malevich: Suprematism and Revolution in Russian Art, 1910 – 1930.* London: Thames and Hudson, 1982.
[17] K. Malevitch, *From cubism to suprematism* 1915 transl. In Ch. Douglas, *Swans of other Worlds: Kasimir Malevitch and the origins of abstractions in Russia.* Ann Arbor: University Microfilm. 1980. s. 110.
[18] K. Malevitch, *The non-objective World* s. 68.
[19] 23 June 1916 s. K. S. Malevitch Pis'ma K. M. V. Matuyshin hersg. Evgenii Kovtun s. 195.
[20] 15 Mai 1917 ibidem s. 212.

Schöpfung legt»[21] «Lobatchevskii spricht niemals über die Eigenschaften des Raums, er erklärt aber, daß der Raum selbst einzeln nicht existiert»[22].

Nach der Oktoberrevolution, um 1920, war der Begriff der Raum-Zeit sehr verbreitet. Die Referenzen über Lobatchevskiis Geometrie begannen in der Untersuchung der Kunst aufzutreten. Matioushin schreibt in 1926 in seinem Essay «Der Versuch der Künstler einer neuer Welt»: «Fast gleichzeitig haben Cézanne, Lobatchevskii und Riemann die euklidischen parallelen Linien verlängert und gekrümmt»[23].

Am Institut der künstlerischen Ausbildung, in Leningrad, - wo Malevitch unterrichtet hat - führt Matioushin in seiner Forschung eine andere Deutung der vierten Dimension ein, wobei er die Kubatur einsetzt. Er entwickelt sein System «Sehe - kenne», wo er zuerst den Winkel des Sehens auf 180° und später auf 360° vergrößert. «Ich glaube, ich habe nicht verlängert, sondern eine neue Richtung erfunden, die völlig unbekannt war. Vor mir war die Linie nach unendlich gefahren. Mein Wille hat eine neue Bewegung der Linie entworfen... Ich verstehe rechts und links, unten und oben, und «bestimmt» voran, wie meine Bildung mich gelehrt hat, aber gleichzeitig «voran» und «zurück» gab es noch nie in der menschlichen Vorstellung, weil bis heute der Körper eine Grenze für die Linien der dritten Dimension war, nach vorne und zurück, wie die Erde die Grenze für die Linien nach unten und oben ist. Ich habe diese Grenze abgeschafft und erfand eine Linienführung, welche von mir ausgehend, durch die Erde durch, und durch meine Antipode gegen einen Stern fährt»[24]. Mit dieser zyklischen Vision des gekrümmten Raums des Matiushin kommt die nichteuklidische Raum-Zeit der Relativätstheorie nahe.

El Lissitzky mit seiner Bewunderung der geometrischen Abstraktion, seinem Studium, seiner Freundschaft mit Malevitch - als die beiden am Institut der Kunst in Vitebsk unterrichten, Gäste von Marc Chagall, damals Kommissar dieses Instituts - sind die entscheidenden Faktoren, um seine Vision zu formulieren. Er malt seine erste «Proun»[25] in 1919, und in seinen anderen Werke mit axonometrischer Perspektive stellt er geometrische

[21] K. Malevitch, *From cubism to suprematism*, s. 107.
[22] A. Vassiliev, *Nikolai Ivanovitch Lobatchevskii.* Moskva. 1992.
[23] M. Matyushin, An artist‘s experience of the new space. 1926 transl. by Charlotte Douglas: The universe: Inside and out, new translations of Matuyshin and Filonof. *The Structurist* No 15-16, 1975-76 s. 74.
[24] Ibid. s. 76.
[25] Proekt utverzhdeniya Novogo (auf russisch) Planen für die Bekräftigung des Neuen.

Körper[26] dar, welche seine gründlichen geometrischen Kenntnisse des Architekt-Malers enthüllen.

Der plastische Raum, welchen El Lissitsky darstellt, ist eine komplexe gegenseitige Abhängigkeit von Figuren mit komplizierten Durchschneidungen von geometrischen Körpern, während die gekrümmten Segmente das nichteuklidische Element einführen: «Lobatchevskii hat schon das Absolute des euklidischen Raums zerlegt» schreibt El Lissitsky in seinem Essay *Kunst und Pangeometrie*[27], sichtbare Resonanz von Lobatchevskiis Werk in 1855.

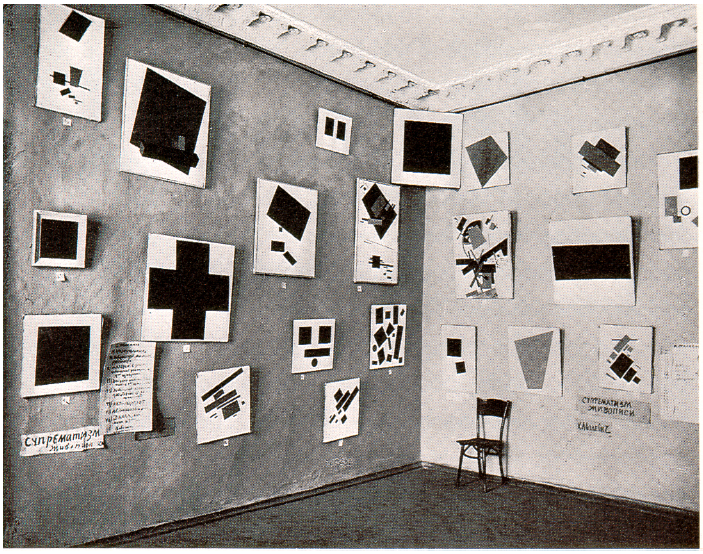
Diesen Text, zu Ehren von Malevitch und Lobatchevskii, hat El Lissitsky geschrieben, als er in einem Sanatorium in der Schweiz war. Beim Lernen der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen Kunst und Geometrie trachtet er, die Geometrie zu vertiefen, Perspektive und Kunst durch eine gesamt-geometrische Forschung.

Die alte Perspektive «hat den Raum zusammengezogen und geschlossen, ihn zu einem vollendeten Raum gemacht, gefangen in der euklidischen Geometrie, als auch in der dritten Dimension»[28]. Sein zeitgenössischer Ausdruck hat neue Anstöße gebracht. «Die zeitgenössische Kunst zerbricht das optische Zentrum, erfindet eine Explosion im gesamten Raum (Futurismus) oder stellt farbliche Flächen mit verschiedenen Tönen und natürlich verschiedenen räumlichen Werten dar»[29]. Der Schriftsteller bringt einen dritten Weg vor: Die Errungenschaft eines phantasievollen Raums mit mechanisch bewegten[30] Körpern, wobei aus dieser Bewegung einige Figuren durch Drehung oder durch Schwingung entstehen. «Mit dieser Einstellung glaubt El Lissitsky, daß sich die Kunst über die Höhe der euklidischen Geometrie hinwegsetzt. Der phantastische Raum, Resonanz auf Lobatchevskiis phantastische Geometrie, der neue Ausdruck des Raums mit Bewegung, leitet sowohl Laszlo Nagy als auch Naum Gabo[31] und Anton Pevsner[32] zum Konstruktivismus[33].

---

[26] Maleviteh darstellt Fläche, El Lissisky arbeitet nur geometrischen Körpern.
[27] Kiepenheuer Verlag Almanach 1925.
[28] Ibidem.
[29] Ibidem.
[30] Entsprechend in Lobatchevskiis Geometrie «in der Natur nur die Bewegung ist, ohne deren sinnliche Eindrücke können wir nicht erkennen.,. jede Erkenntis endet in der Eigenschaften der Bewegung» N. I. Lobatchevskii, *Ges. Werke* 2 Bd. s. 147 S. Auch B. A. Rosenfeld, *A History of non Euclidean Geometry. Evolution of the concept of a Geometric space.* Springer Verlag 1988.
[31] M. Brion, *Art Abstrait* Paris 1956; Moholy – Nagy, Lazlo, *Vision in Motion* Chicago 1947; H. Read L. Martin, *Gabo* London 1957.
[32] R. Olson, A. Chauin: *Naum Gabo – Antoine Pevsner.* New York 1945; C. Gedion – Welcker, *Contemporary Sculpture, an evolution in Volume and Space.* New York 1955.
[33] N. Gabo *Circle, International Survey of constructive Art* ed J. Martin, Ben Nicholson, N. Gabo London 1937.

Die Existenz von Lobatchevskiis Geometrie, welche ihr Erfinder phantastische genannt hat, erlaubt den Künstlern die Grenze der Welt zu verlängern, das Unabhängige an jedem natürlichen Bild zu bedenken und aus der Fessel der euklidischen Geometrie zu befreien. Die Ablehnung des fünftens Postulats, als auch die «unlogischen» Ergebnisse leiten in das Auffassungsvermögen eines nicht realistischen Raums über, intensiv und logisch existent. Die Möglichkeit der Existenz eines Raums völlig verschieden von dem, welchen wir täglich als wirklich empfinden, die Möglichkeit der Existenz eines gekrümmten Raums, wo die Geraden keine wesentliche Rolle spielen, war eine Provokation für die Schöpfung. Ein unbegrenzter, unerforschter und nicht sichtbarer Raum bietet sich dar für figurative Darstellung. Es war natürlich, weil doch die nichteuklidische Geometrie geboren war, damit einen fundamentalen Einfluß beim intellektuellen Aufbruch am Anfang der XXten Jahrhunderts zu betreiben.



Ausstellung 0.10 (Petrograd 1915)

Die Cauchy Funktionalgleichung

eine kleine Gleichung ganz groß

Detlef Gronau, Graz

$$\mathbf{f(x+y)=f(x)+f(y)}$$

0. Einleitung.

Die Cauchysche Funktionalgleichung

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{C}$$

und ihre Varianten

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \quad \textit{(Funktionalgl. der Exponentialfunktion)}$$

$$f(x\cdot y)=f(x)+f(y) \quad \textit{(Funktionalgl. des Logarithmus)}$$

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y) \quad \textit{(Funktionalgl. der Potenzfunktion)}$$

wurden von Cauchy in seiner *Analyse algébrique V, Paris 1821* ausführlichst behandelt.[1]

[1] Augustin Louis Cauchy, *21.8.1789 Paris, † 22.5.1857 Sceaux. *Cours d’analyse de L’École*

Die stetigen reellen Lösungen von (C) sind von der Form

$$f(x) = c \cdot x, \; x \in \mathbb{R}, \quad c = f(1) \; . \tag{$*$}$$

Der Beweis dafür geht folgendermaßen: Jede Funktion der Form $(*)$ ist eine Lösung von (C). Ist umgekehrt f eine stetige Lösung von (C) dann leitet man durch Induktion und Substitutionen ab:

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x), \quad m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \tag{1}$$

d.h. mit $x = 1$:

$$f(r) = r \cdot f(1), \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Ist nun x eine beliebige Zahl, und r_n eine Folge rationaler Zahlen die gegen x konvergiert, dann gilt wegen der Stetigkeit von f:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} r_n \cdot f(1) = x \cdot f(1). \end{aligned}$$

Genau so, allerdings in anderer Notation, hat schon Cauchy argumentiert. Bemerkenswert ist dabei, dass er ausrücklich betont, dass er nur deren *stetige Lösungen* bestimmt.

Cauchy hat dann auch die stetigen Lösungen der Varianten von (C) mit jeweils

$$f(x) = \exp(c \cdot x)$$
$$f(x) = c \cdot \log x \text{ und } f(x) = x^c, \text{ (hier nur für positive } x)$$

mit $c \in \mathbb{R}$ bestimmt.

1. Reguläre Lösung.

Man nennt $f(x) = c \cdot x$ eine *reguläre Lösung* von (C). Stetigkeit ist eine "Regularitätsbedingung", d.h. eine Bedingung, die eine reguläre Lösung erzwingt. Darboux[2] führte 1875 und 1880 eine schwächere

Polytechnique, Vol. 1, Analyse algébrique V, Paris 1821, (Œuvres, Ser. 2, Vol.3, pp 98 - 113 und 220, Paris 1897), in deutscher Übersetzung von C.L.B. Huzler: A.L. Cauchy's Lehrbuch der algebraischen Analysis, Verlag der Gebrüder Bornträger, Königsberg 1828.

[2] Gaston Darboux, *14.8.1842, Nimes, † 23.2.1917, Paris.

Regularitätsbedingung als die Stetigkeitsbedingung ein. Darboux bemerkte nämlich bereits 1875, dass als Regularitätsbedingung auch schon eine der folgenden Bedingungen ausreicht: *Die Lösung f von (C) behält ihr Vorzeichen, oder ist wachsend in irgendeinem Intervall* (das natürlich ein nichtleeres offenes Intervall enthalten muss). In der Arbeit von 1880[3] geht er dann noch weiter. Er schreibt: *Mais on peut aller plus loin et montrer que l'on aura $\varphi(x) = Ax$* (als Lösung der Funktionalgleichung $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$), *A étant une constante, toutes les fois que la fonction $\varphi(x)$ sera assujettie à l'unique condition de prendre dans un intervalle quelconque des valeurs positives et négatives qui, les unes ou les autres, soient inférieures en grandeur absolue à une limite fixe. Ainsi il suffira, par exemple, qi' il y ait un seul intervalle dans lequelle les valeurs positives de la function demeurent inférieures à un nombre fixe, pour que l'on ait $\varphi(x) = Ax$.* (So kompliziert wurde damals die Forderung *"nach einer Seite beschränkt"* ausgedrückt!) Darboux bewies den folgenden

Satz: *Jede in einem noch so kleinen nichtleeren offenen Intervall nach einer Seite beschränkte Lösung von (C) ist von der Form*

$$f(x) = c \cdot x, \quad c \in \mathbb{R} \quad \textit{beliebig fest.}$$

2. Nichtstetige Lösungen.

Um nichtstetige Lösungen von (C) zu erhalten bedurfte es eines besonderen Schrittes. Dieser erfolgte durch Georg Hamel,[4] vielleicht als Reaktion auf Hilberts vielbeachteten programmatischen Pariser Vortrag und die dadurch hervorgerufene Aufmerksamkeit auf nicht differenzierbare bzw. nicht einmal stetigen Lösungen von Funktionalgleichungen.

[3]Gaston Darboux, *Sur la géométrie projective*, Math. Annalen, *17* (1880), 55 – 61.

[4]Georg Hamel, * 12.9.1877, Düren, † 4.10.1954, Berlin. Hamel studierte in Aachen, Berlin, und Göttingen. 1901 schloss er sein Studium in Göttingen unter Hilbert ab. Er war einige Jahre Assistent bei F. Klein und dann an der Technischen Hochschule (Universität) Karlsruhe wo er 1903 habilitiert wurde. Im Jahre 1905 wurde er ordentlicher Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn. 1912 ging er an die Technische Hochschule Aachen. Ab 1919 lehrte er an der Technischen Hochschule Berlin und emeritierte 1949.

David Hilbert (* 23.1.1862, Königsberg, † 14.2.1943 Göttingen), hielt diesen Vortrag[5] über Trends und Richtungen und ungelöste Probleme der Mathematik auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris. In seinem 5. Problem stellte er in Hinblick auf Funktionalgleichungen von Abel[6], aber auch auf die Cauchy Funktionalgleichungen, folgende Frage:

Überhaupt werden wir hier auf das weite und nicht uninteressante Feld der Funktionalgleichungen geführt, die bisher meist nur unter Voraussetzung der Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen untersucht worden sind. Insbesondere die von Abel mit so vielem Scharfsinn behandelten Funktionalgleichungen ... und andere in der Literatur vorkommenden Gleichungen weisen an sich nichts auf, was zur Forderung der Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen zwingt ...

In seiner Arbeit[7] aus dem Jahre 1905 verweist Hamel auf die Arbeiten von Cauchy und Darboux. Dann führt er, aufbauend auf dem Wohlordnungssatz von Zermelo, eine $\mathbb{Q}-$Basis von $\mathbb{R}$ ein, denn die aus (C) folgende Formel (1) sagt ja nichts anderes, als dass jede Lösung von (C) ein Vektorraumhomomorphismus des $\mathbb{Q}-$Vektorraums $\mathbb{R}$ in sich ist. Es gilt:

Satz (Hamel): *Ist $\{\xi_i\}_{i\in I}$ eine $\mathbb{Q}-$Basis von $\mathbb{R}$, und $\{\eta_i\}_{i\in I}$ eine beliebige Familie reeller Zahlen, dann existiert zur Bedingung $f(\xi_i) = \eta_i$, $i \in I$, genau eine Lösung f von (C). Auf diese Weise erhält man alle Lösungen von (C).*

Damit begründet Hamel die Existenz von nichtstetigen Lösungen von (C). Zum Schluss weist Hamel noch auf folgende Tatsache hin: *Jede dieser unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung ist total unstetig; in jeder beliebigen Nähe eines jeden Punktes der (x, f)-Ebene liegen Punkte der "Kurve" $f = f(x)$. Denn man kann durch geeignete Wahl der rationalen Zahlen α, β mit den Größen*

$$\alpha a + \beta b, \quad \alpha f(a) + \beta f(b)$$

[5]Hilbert, D., Mathematische Probleme, Arch. Math. Phys. *1* (1901), 44-63, 213-237.

[6]Abel, N.H., Oevres, vol.1, pp.1,69,389

[7]Hamel, G.: *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$*, Math. Annalen, *60* (1905), 459 - 462.

je einem beliebig gegebenem Werte beliebig nahe kommen, wenn a, b, $f(a)$, $f(b)$ als endliche, bestimmte Werte gegeben sind, nur so, dass eine Proportion $f(a) : a = f(b) : b$ nicht besteht. Mit anderen Worten: Hamel postuliert den Satz, *dass im Falle der Unstetigkeit der Lösung f (es reicht anzunehmen, dass die Lösung f nicht von der Form $f(x) = f(1) \cdot x$ ist) der Graph von f dicht in $\mathbb{R}^2$ ist.*

Hamel ergänzt dann auch noch: *Weiß man daher, dass in einem ganz beliebigen Bereiche der Variablen x eine Lösung $f(x)$ der in Rede stehenden Funktionalgleichung irgend einem Werte B nicht beliebig nahe kommt, so kann man schließen, dass $f(x)$ stetig ist und die Form $A \cdot x$ hat.*

Es wird noch heute oft eine Basis des $\mathbb{Q}-$Vektorraumes $\mathbb{R}$ eine *Hamel-Basis* genannt. Diese Hamel-Basis wurde von G. Hamel eben dazu eingeführt, um die allgemeine Lösung der Cauchy Funktionalgleichung angeben zu können.

3. Weitere Regularitätsbedingungen.

In der Folge wurden dann noch schwächere Regularitätsbedingungen entdeckt, zum Beispiel: *Integrierbarkeit* (G. Peano 1908 u.a.), *Messbarkeit* (M. Fréchet 1913, S. Banach 1920), *durch eine messbare Funktion majorisiert* (W. Sierpiński 1920), Beschränktheit nach einer Seite auf einer Menge vom Maß > 0 (Alexander Ostrowski 1929) etc. Die letzteren Arbeiten basieren auf einer Verallgemeinerung eines Satzes von H. Steinhaus aus dem Jahr 1920, der sagt, falls $S \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge von positivem (Lebesgue) Maß ist, dass dann die Menge $S + S$ ein Intervall positiver Länge enthält.

Regularitätsbedingungen dieser Art, initiiert durch die Untersuchungen an der Cauchygleichung sind ein inzwischen weit untersuchtes Thema im Gebiet der Funktionalgleichungen. Sie spielen z.B. auch in der Theorie der konvexen Funktionen eine Rolle.

4. Pexider Funktionalgleichungen und das "Pexiderisieren".

In seiner Arbeit *Notiz über Funktionaltheoreme* in den Monatsheften für Mathematik und Physik, *14* (1903), 293-301, untersucht Jan

Vilém Pexider[8] eine folgenreiche Verallgemeinerung der Cauchyschen Funktionalgleichungen.

Wir geben sie hier im Originaltext wieder:

$$\begin{aligned} f_1(z) + \varphi_1(u) &= \psi_1(z+u), \\ f_2(z) \times \varphi_2(u) &= \psi_2(z+u), \\ f_3(z) \times \varphi_3(u) &= \psi_3(z\,u), \\ f_4(z) + \varphi_4(u) &= \psi_4(z\,u). \end{aligned}$$

Aus diesen erhält man "bekannte Funktionalgleichungen", wenn man setzt

$$f_j = \varphi_j = \psi_j,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Für alle diese Gleichungen hat schon Pexider deren stetige Lösungen angegeben. Allgemein gilt:

Satz: *Sei* $(N, +)$ *eine Halbgruppe mit neutralem Element* 0 *und* $(G, +)$ *eine Gruppe (beide nicht notwendigerweise kommutativ), dann ist die allgemeine Lösung von*

$$f(x+y) = g(x) + h(y),\ x, y \in N$$

[8]Jan Vilém Pexider was born in December 12, 1874 in Karlin near Prague, now a part of Prague. After his Matura (grade 13) he studied mathematics and physics at the German University in Prague, at the Czech Technical University and then at the Czech University in Prague where he was promoted to a doctor of philosophy (Ph.D.) on July 12, 1898. Afterwards he spend some years abroad: at the Collège de France in Paris, the University of Vienna and at the University of Göttingen. In 1903 he published his famous note "Notiz über Funktionaltheoreme" in the Monatshefte für Mathematik und Physik, *14* (1903), 293-301, which contains the so-called *Pexider equations*. In 1903 he applied for habilitation at the Czech University of Prague but his application was rejected due to some quarrels with *Eduard Weyr*. In February 1905 he habilitated at the University of Bern for mathematics restricted to number theory, and became docent at this university. In 1907 he tried again to habilitate at the Czech University in Prague but without success. In 1908 he habilitated, again in Bern, for financial mathematics. His employment at the University of Bern ended with the year 1908. In September 11, 1913 Pexider was taken to the psychiatric hospital in Karlin/Prague where he died in November 4, 1914.
Lit.: Jindřich Bečvář (ed.), *Jan Vilém Pexider 1874 – 1914.* Dějiny Matematiky, Prometheus Praha, 1977.
(D. Gronau, em Remark 17. *Report of Meeting* 42^{nd} *International Symposium on Functional equations, June 20–27, 2004, Opava, Czech Republic.* Aequationes Math. *69* (2005), p. 190.)

von der Form

$$f(x) = c + a(x) + d, \qquad g(x) = c + a(x), \tag{2}$$
$$h(x) = a(x) + d, \tag{3}$$

wobei $a : N \to G$ *eine allgemeine Lösung von* (C) *ist und* $c, d \in G$ *beliebig sind.*

Dieser Satz umfasst alle vier Pexider Gleichungen. Es zeigt sich als bemerkenswert, dass durch *eine* Gleichung gleich *alle drei* unbestimmten Funktionen bestimmt sind, nämlich als Kombination von Lösungen der Cauchy Funktionalgleichung.

Pexiderisieren: Liegt nun eine Funktionalgleichung vor, in der eine unbestimmte Funktion mehr als einmal auftritt, dann ersetzt man diese bei jedem Auftreten durch eine neue unbestimmte Funktion. Man nennt dann die so erhaltene Funktionalgleichung die Pexider-Version der alten oder deren "pexiderisierte Funktionalgleichung". Das Interessante daran ist, dass dann sehr oft, wie bei den pexiderisierten Cauchyschen Funktionalgleichung durch eine Gleichung alle unbestimmten Funktionen bestimmt sind!

Verallgemeinerte Pexider Funktionalgleichungen, initiiert durch die Cauchy Funktionalgleichung stehen immer noch im Interesse mathematischer Forschung.

5. Hyers - Ulam Stabilität.

Die Cauchygleichung gab Anlass zu weiteren Problemstellungen in der Theorie der Funktionalgleichungen: In einem Vortrag im Mathematischen Club der University of Wisconsin stellte S. Ulam[9] das folgende Problem über die "Stabilität" der Cauchy Funktionalgleichung. Vorausgesetzt, dass eine Funktion f die Funktionalgleichung (C) nur approximativ erfüllt. Gibt es dann eine exakte Lösung von (C) die nahe genug an der approximativen liegt?

Die Antwort dazu gab Donald H. Hyers (1913–1997) mit folgendem Satz:[10]

[9] Stanisław Ulam * 13. April 1909, Lwów, † 13. Mai 1984, Santa Fe

[10] D.H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *27* (1941), 222 - 224

Satz: *Seien E und E' Banachräume und $f : E \to E'$ erfülle*

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| < \delta, \ x, y \in E. \qquad (4)$$

Dann existiert genau eine Lösung $F : E \to E'$ von (C) die die Bedingung $||F(x) - f(x)|| < \delta$ für alle $x \in E$ erfüllt.

Das allgemeine Problem lautet: Gegeben sei eine Funktionalgleichung. Existiert zu jedem $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ derart, dass es zu jeder δ-Näherungslösung dieser Gleichung immer eine (und nur eine) exakte Lösung gibt, die in ε-Umgebung der Näherungslösung liegt?

Auch dieser Problemkreis, initiiert durch die Cauchy Funktionalgleichung wurde weiter verallgemeinert steht immer noch im Interesse mathematischer Forschung.

6. Motivationen.

Cauchy gab in seiner *Analyse algébrique* keine Motivation für die von ihm behandelten Gleichungen. Er hat sie aber sicherlich nicht selbst "erfunden". Sicher ist, dass einzelne der Gleichungen vor Erscheinen von Cauchys *Analyse algébrique* schon verwendet wurden. So benötigt man bei der axiomatischen Begründung des Kräfteparallelogramms durch d'Alembert[11] neben der *d'Alembertschen Funktionalgleichung* (die den Cosinus charakterisiert, und die übrigens Cauchy auch in seiner *Analyse algébrique* löst) die Gleichung (C).

Im Zusammenhang mit der Binomialreihe verwendete Lacroix[12] in *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, 1797, ebenfalls die Gleichung (C).

Meines Wissens ist jedoch eine systematische Untersuchung einer Cauchy Funktionalgleichung, nämlich der logarithmischen Funktionalgleichung erstmalig bei Kepler[13] in seinen *Chilias logarithmorum* (Marburg, 1624) zu finden.

[11] Jean Baptiste le Rond d'Alembert, * 16.11.1717 Paris, † 29.10.1783 Paris. J.d'A. wurde als Findelkind auf den Stufen der Kapelle Saint-Jean-le-Rond nahe bei Notre Dames abgelegt, er war der illegitime Sohn des Chevalier Destouches.

[12] Sylvestre François de Lacroix, * 28. April 1765, † 24. Mai 1843

[13] Johannes Kepler, * 27. Dezember 1571 in Weil der Stadt; † 15. November 1630 in Regensburg

Um die Napierschen Logarithmen zu begründen, führt Kepler ein "Maß" ein, also eine Funktion die gerade die logarithmische Funktionalgleichung erfüllt:

$$M(x \cdot y) = M(x) + M(y).$$

Von M verlangt Kepler noch zusätzlich eine Bedingung die darauf hinausläuft, dass die Ableitung von M an der Stelle $x = 1$ den Wert $z_0 = 1000$ (dann auch einmal $z_0 = 10^{20}$ und bei seinen Logarithmentabellen $z_0 = 10^7$) annimmt. Dann bewiest er, dass man damit $M(x)$ für beliebige (positive) x beliebig genau berechnen kann. Das Ergebnis ist, dass M bis auf den Faktor z_0 gerade den *natürlichen Logarithmus* darstellt. Kepler ist also der Erste, der mit seinem *Existenz und Eindeutigkeitssatz* eine mathematisch exakte Theorie des natürlichen Logarithmus lieferte und dessen Werte auch berechnete (siehe dazu Gronau, D.: *Johannes Keppler (1571 - 1630) Die logarithmischen Schriften.*[14])

7. Ausblick.

Natürlich ist die mathematische Forschung der Cauchy Funktionalgleichungen noch nicht abgeschlossen. Allein ab dem Jahr 1990 bis heute zeigt das Zentralblatt für Mathematik an die hundert Einträge unter dem Kennwort "Cauchy" in der Klasse *39 Funktionalgleichungen* (Mathematical Subject Classification).

Weitere Verallgemeinerungen werden behandelt. Die Gleichungen werden für unbestimmte Funktionen auf den verschiedensten Definitions- und Wertebereichen untersucht. Ein weiteres Gebiet ist das der "conditional functional equations". Als Beispiel dafür sei etwa das Folgende angeführt. Man betrachtet die Gleichung (C) auf *normierten Vektorräumen* oder noch allgemeiner, Gruppen mit einer *Orthogonalstruktur*. Dann verlangt man die Gültigkeit von (C) nur für solche Vektoren, die aufeinander senkrecht stehen.

Das nachfolgende Literaturverzeichnis führt nur einige wenige Wer-

[14] In: Rainer Gebhardt(Hrsg.): Rechenbücher und mathematische Texte der Neuzeit. Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz - Band 14. Annaberg Buchholz, 2002.

ke an, die man heute als die Klassiker in der Theorie der Funktionalgleichungen bezeichnet.

Literatur

[1] Aczél, J.: *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* Academic Press, New York and London, 1966. Corrected Reprint: Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2006.

[2] Aczél, J. and Dhombres, J.: *Functional Equations in Several Variables with Applications to Mathematics, Information Theory and the Natural and Social Sciences.* Cambridge University Press, Cambridge, New York and Melbourne, 1989.

[3] Kuczma, M.: *Functional Equations in a Single Variable.* Monografie Matemtyczne 46, PWN - Polish Scientific Publishers, Warsaw 1968.

[4] Kuczma, M.: *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality.* Prace Nauk. Uniw. Śląsk. 489, Polish Scientific Publishers, Warsaw-Cracow-Katowice, 1985.

[5] Kuczma, M., B. Choczewski and R. Ger: *Iterative functional equations.* Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sidney 1990.

D. Gronau

Institut für Mathematik
Universität Graz
Heinrichstraße 36
A - 8010 Graz, Austria
gronau@uni-graz.at

Wilhelm Matzka (1798–1891), Wien und Prag[1]

Mgr. Michaela Chocholová

Fakultät der Mathematik und Physik, Karls-Universität Prag
Sokolovská 83, 186 75, Prag 8, Tschechische Republik
E-mail: *chochol@karlin.mff.cuni.cz*

Schulbildung[2]

Wilhelm Matzka[3] wurde am 4. November 1798 in Leipertitz[4] geboren. Er hat die Grundschulen in Weisskirchlitz[5] und Janigg[6] bei Teplitz und in Šopka in der Nähe von Mělník besucht. Im Jahre 1811 und 1812 hat er zwei primäre Gymnasialklassen im Kloster in Osseg[7] studiert, danach ab dem Jahre 1813 bis 1817 hat er am Gymnasium in Komotau[8] studiert.

Hochschulstudium in Prag

Mit neunzehn Jahren hat er ein zweijähriges Studium[9] an der philosophischen Fakultät in Prag begonnen und Religion, Geschichte und griechische Sprache belegt. Im ersten Jahrgang hat er dazu noch theoretische Philosophie und Mathematik studiert, im zweiten Jahrgang noch an den Studien zur praktischen Philosophie und mathematischen Physik teilgenommen.[10] Die Examina hat er ordnungsmäßig abgelegt und mit ausgezeichneten Ergebnissen absolviert.

In Wien

Danach hat er viele Jahre dem österreichischen Militär gedient. Am 16. September 1819 ist er in Wien in das 2. k. k. Artillerie-Regiment eingetreten. Am 6. Februar 1821 wurde er als Bombardier in das Bombardierkorps in Wien versetzt, am 18. September 1822 zum Feuerwerker, am 25. Mai 1826 zum Oberfeuerwerker und endlich am 1. Juni 1831 zum Leutnant des Bombardierkorps befördert. Gleichzeitig wurde er zum Professor der Mathematik an der Korpsschule des Bombardierkorps ernannt. Diese Stelle hatte er bis zum 31. August 1837 inne.

---

[1] Die vorliegende Arbeit ist sehr eng mit meiner Dissertation *Das Leben und Werk von Wilhelm Matzka* verbunden. In meiner Dissertation bearbeite ich das gesamte Leben und Werk von W. Matzka und werte seinen Beitrag für die tschechische und weltweite Mathematik aus. Bis jetzt wurde dem Leben und Werk dieses Mathematikers und Hochschulprofessors fast keine Aufmerksamkeit geschenkt, da er Deutsch unterrichtet und geschrieben hat. Die tschechischen Geschichtsforscher haben sich bisher nur an der tschechischen mathematischen Gesellschaft in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts und der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts orientiert. Der deutschen mathematischen Gesellschaft der Böhmischen Länder wurde bisher kaum Beachtung geschenkt. Das hat dazu geführt, dass die in der Mehrheit fähigen deutschsprachigen Mathematiker bei uns in Vergessenheit geraten sind. In meiner Dissertation möchte ich speziell an das Verdienst des Mathematikers Matzka an der Entwicklung der wissenschaftlichen Arbeit in den Böhmischen Landen erinnern.

[2] Zur Zeit sammle, überprüfe, präzisiere und vervollständige ich die Angaben zur Ausweitung dieses Kapitels.

[3] Gleichfalls tschechisch Vilém Matzka geschrieben.

[4] Litobratřice, Gemeinde in Südmähren, ungefähr 50 km südlich von Brno.

[5] Novosedlice, Gemeinde in Nordböhmen, ungefähr 3 km nördlich von Teplice.

[6] Jeníkov, Gemeinde in Nordböhmen, ungefähr 10 km westlich von Teplice.

[7] Osek, Gemeinde in Nordböhmen, ungefähr 20 km westlich von Teplice.

[8] Chomutov, Stadt in Nordböhmen.

[9] Im akademischen Jahre 1817/1818 und 1818/1819.

[10] Religion hat ihn Bernard Bolzano (1781–1848), Geschichte Franz Nicolaus Tietze (1769–1858), griechische Sprache Alois Klar (1763–1833), theoretische und praktische Philosophie František Xaver Němeček (?–1821), Mathematik Josef Ladislav Jandera (1776–1857) und mathematische Physik Franz Ignac Cassian Hallaschka (1780–1847) gelehrt. Sieh *Katalog über die Hörer der Philosophie an der k. k. Prager Universität, vom Schuljahre 1818, 1819*.

Im Jahre 1778 wurde das so genannte Artillerie-Lyzeum in Wien eingerichtet, das acht Jahre nach seinem Bestehen in die k. k. Korpsschule des Bombardierkorps eingegliedert wurde.[11] Die Hauptfunktion der k. k. Korpsschule des Bombardierkorps bestand in der Vorbereitung der angehenden Feuerwerker, d. h. in der Betreuung der Haubitzen, Böller, Kanonen und der Schießstoffgewinnung. Die fähigeren Schüler wurden in Mathematik, Freihandzeichnen, Fortifikation und Mechanik ausgebildet. Die k. k. Korpsschule des Bombardierkorps hat sich von Beginn an ständig verbreitert und hatte im Jahre 1815 schon sieben Klassen. Die einzelne Klassen wurden nach den Hauptfächern genannt. Die erste Klasse Arithmetik, die zweite Klasse Geometrie, die dritte und die vierte Klasse Höhere Mathematik, die fünfte Klasse Mechanik, die sechste Klasse Physik und die siebte Klasse Chemie. Es ist offensichtlich, dass der Mathematik und den Naturwissenschaften das Hauptaugenmerk gewidmet wurde. Andere Fächer, wie zum Beispiel Feuerwerklehre oder Geometrisches Zeichnen, wurden in allen Klassen durchgehend erteilt. Nebenfächer wie zum Beispiel Fortifikation, Militärgeographie, Geschichte, Gefechtslehre, Administration und französische Sprache wurden zusätzlich gelehrt. Die ersten fünf Klassen wurden Elementarkurs genannt, die sechste und siebte Klasse waren dann Oberkurse. In dieser Organisation hat die k. k. Korpsschule des Bombardierkorps in Wien bis zum Jahre 1849 funktioniert, bis sie nach Olmütz wechselte.

W. Matzka hat an der k. k. Korpsschule des Bombardierkorps als Professor der höheren Mathematik in den Jahren 1832 und 1833 die algebraische Analysis und analytische Geometrie, im Jahre 1834 Differential- und Integralrechnung, und ab dem Jahre 1835 bis 1837 höhere Mechanik gelehrt.

In der Zeit seiner Tätigkeit in Wien hat er seine Kenntnisse nicht nur auf dem Gebiet der zu lehrenden Fächer an der k. k. Korpsschule des Bombardierkorps vervollständigt und vertieft. An der Wiener Universität hat er zudem wissenschaftliche und praktische Astronomie[12], höhere Mathematik und Physik[13] sowie Mineralogie[14] belegt, am Wiener Polytechnikum dazu Technologie[15].

In Tarnow

Am 12. August 1837 wurde W. Matzka an der neu eröffneten k. k. Philosophischen Lehranstalt zu Tarnow zum ordentlichen Professor der reinen Elementar-Mathematik ernannt. Den Dienst an der Schule hat er am 5. September angetreten und dort bis zum 12. Mai 1849 gewirkt.[16]

In Olmütz

In der Zwischenzeit hat er im August 1843 an der Universität in Olmütz das Rigorosum bestanden. Er hat die vorgeschriebenen Prüfungen zur allgemeinen Geschichte und Philosophie abgelegt und promovierte zum Doktor der Freien Künste und Philosophie.[17]

---

[11] Die Anhebung des Niveus der k. k. Korpsschule gleich in den ersten Jahren ihrer Existenz ist Georg Freiherr von Vega (1754–1802) zu verdanken. G. Vega wurde nicht nur als tapferer Militär, sondern auch als Mathematiker weit bekannt. Von seinen bedeutenden Werke sind zum Beispiel *Logarithmentafeln*, Leipzig, 1783, *Logarithmisch-trigonometrische Tafeln*, Leipzig, 1797, und *Vorlesungen über die Mathematik*, vier Bände, Wien 1782–1800, zu nennen. Seine *Vorlesungen über die Mathematik* waren „durch ihre verständliche Schreibart für Lehrbücher gut geeignet“ und erlebten bis 1850 neue überarbeitete Auflagen. Der Autor der letzten Auflagen ist gerade Wilhelm Matzka, wie wir noch sehen werden.

[12] Bei Prof. Joseph Johann Littrow (1781–1840).

[13] Bei Prof. Andreas von Ettingshausen (1796–1878).

[14] Bei Prof. Friedrich Mohs (1773–1839).

[15] Bei Prof. Georg Altmütter (1787–1858).

[16] Mir ist bisher nicht gelungen, mehrere Auskünfte über diese k. k. philosophische Lehranstalt zu Tarnow zu gewinnen.

[17] Er hat die Prüfung aus der allgemeinen Geschichte am 8. August 1843 und die Prüfung aus der allgemeinen Philosophie am 16. August 1843 abgelegt und am selben Tag promovierte. Siehe *Fond Univerzita Olomouc,*

Am Polytechnikum in Prag

Am 8. April 1849 wurde W. Matzka zum Professor der Elementar-Mathematik und praktischen Geometrie an dem *Königlichen böhmischen ständisch-technischen Institute zu Prag* ernannt. Diese Stelle hat er am 26. Mai desselben Jahres angetreten. Er hat den Platz von Johann Partl[18] übernommen. Am Polytechnikum hat er jedoch nur ein akademisches Jahr lang unterrichtet, denn er wurde schon im April 1850 zum Professor der Mathematik an der k. k. Universität zu Prag ernannt. Der Landesausschuss stimmte dieser Ernennung zu, bestand jedoch darauf, dass W. Matzka bis zum Ende des Semesters an dem Polytechnikum blieb, um den Studenten die Prüfungen abzunehmen. Erst dann wurde er für die Universität frei. Nach seinem Weggang übernahm Josef John (1798–1867) die Elementar-Mathematik im akademischen Jahr 1850/51, zum Professor der Elementar-Mathematik und praktischen Geometrie wurde ab 1. September 1851 Karel František Edvard Kořistka (1825–1906) ernannt. In der Zeit, in der W. Matzka am Polytechnikum in Prag unterrichtet hat, wurde die Elementar-Mathematik mit dem Unterricht der praktischen Geometrie verbunden.[19] Das Hauptaugenmerk der Professoren richtete sich gerade auf den Unterricht dieser Fächer. Außerdem wurden die Fächer der obligatorischen höheren Mathematik und darstellende Geometrie unterrichtet.

An der Universität in Prag

Am 9. April 1850 wurde W. Matzka als ordentlicher Professor der Mathematik mit Deutsch als Unterrichtssprache an die k. k. Universität zu Prag berufen. Er sollte Josef Ladislav Jandera[20], seinen ehemaligen Lehrer, der schon viele Jahre über seine Ruhestandszeit hinaus unterrichtete, ersetzen. Den Unterricht hat er im Wintersemester des akademischen Jahres 1850/51 begonnen. Im Jahre 1868 wurde er pensioniert. Die Vorträge hat er jedoch bis zum Sommersemester des akademischen Jahres 1870/71 gehalten.[21] Nach W. Matzkas Weggang übernahm František Josef Studnička[22] (1836–1903) seine Stelle. Er hatte bereits die Lehre in der tschechischen Sprache geleitet und nach der Trennung der Hochschulen, in eine tschechische und eine deutsche, die schwere Aufgabe übernommen, die ersten tschechischen Lehrbücher für die Hochschule zu verfassen.

Der Universitätskollege von W. Matzka war Jakub Filip Kulik[23] (1793–1863), mit dem er sich bei den mathematischen Vorträgen abwechselte.

Série děkanů, profesorů a doktorů promovaných na filozofické fakultě, seznam rigorosantů a promocí, 1828–1851.

[18] Johann Josef Partl (1802–1869) übernahm ab dem Jahre 1847 bis 1849 die Elementar-Mathematik, die nach dem Weggang von Christian Andreas Doppler (1803–1853) frei wurde.

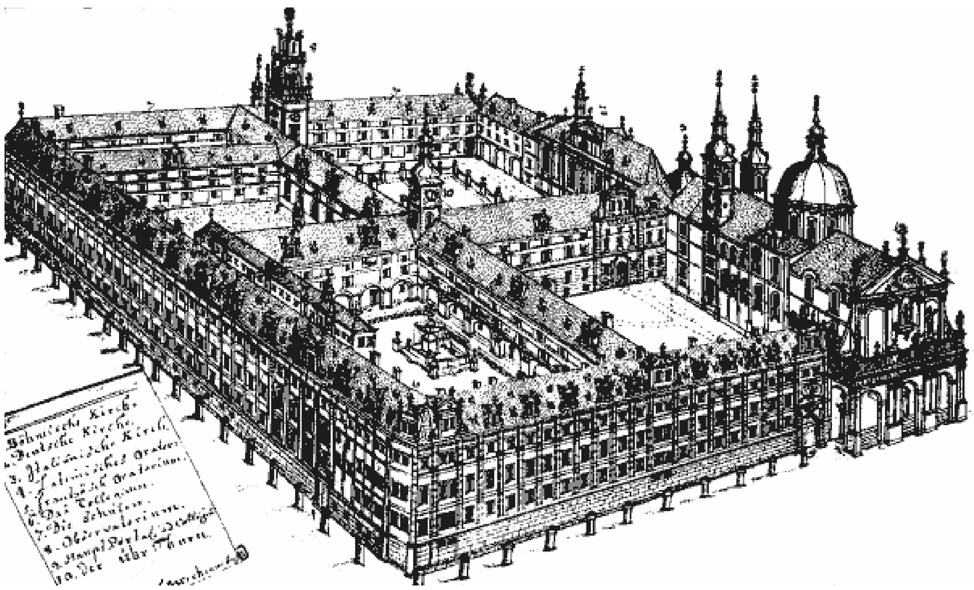
[19] Nach heutigem Verständnis hat es sich vor allem um eine Vervollständigung und Vertiefung des Lehrstoffes der Mittelschulen gehandelt; so wurde z. B. höhere Arithmetik, Algebra, Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie, binomischer Lehrsatz, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Gleichungstheorie, Grundzüge der analytischen Geometrie, usw., vorgetragen.

[20] Er hat an der k. k. Universität zu Prag die Elementar-Mathematik seit dem Jahre 1803 bis 1857 unterrichtet.

[21] Mehr über den Unterricht von W. Matzka an der k. k. Universität zu Prag siehe *Ordnung der Vorlesungen an der k. k. Universität zu Prag 1849/50, …, 1870/71.*

[22] Er war ein Professor der Mathematik am Prager Polytechnikum, am Tschechischen Polytechnikum in Prag, an der Prager Universität und an der Tschechischen Univesität in Prag. Er hat tschechisch vorgetragen. Er hat mit einem Hauptwerk zur Ausbreitung der tschechischen Lehre und zur Bildung der tschechischen mathematischen Literatur beigetragen. Mehr über das Leben, Werk und pädagogische Wirken, siehe die Monografie von Němcová M.: *František Josef Studnička (1836–1903)*, Edice Dějiny matematiky [Edition Geschichte der Mathematik], Band 10, Praha, Prometheus, 1998.

[23] Er hat sich der Zahlentheorie, vor allem der Zusammenstellung von Primzahlentabellen und Divisorentabellen gewidmet. Nach mehreren umfangreichen Arbeiten, erstellte er eine Tabelle der Divisoren und eine Tabelle der Primzahlen bis zur Zahl 100 330 201. Diese Arbeit stieß auf ein weltweites Echo. Trotz der umfangreichen Tabellen und der errechneten Arbeit gelang es J. K. Kulik nicht, in der Theorie der Zahlen zu ein markantes theoretisches Ergebnis oder allgemeine Lösungen zu erzielen. Siehe [No] und Nový L.: *On Kulik's tables of divisors*, in Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, Prague, Special Issue 16, 1981, S. 327–343.



Klementinum[24]

W. Matzka hat an der k. k. Universität zu Prag vor allem Integral- und Differentialrechnung, analytische Geometrie in der Ebene und im Raume, Planimetrie, Stereometrie, algebraische Analysis, sphärische Trigonometrie, mathematische Physik und analytische Mechanik gelehrt.[25] Im Ausnahmefall hat er sich auch mit Wahrscheinlichkeitsrechnung, Grössen- und Zahlenlehre, Goniometrie, den höheren Gleichungen, Theorie der Flächen und ausgewählten Parthien der Physik[26] beschäftigt.

Seine pädagogischen Aktivitäten hat er besonders auf die Vorbereitung der angehenden Oberlehrer der Mathematik und Physik gerichtet, wie es das Gesetz aus den Jahr 1848/49 verlangte. Auf diese Weise hat er das Niveau des Unterrichts der Mathematik auf den Oberschulen in den Böhmischen Ländern bedeutend beeinflusst. Seit Beginn der fünfziger Jahre des 19. Jahrhunderts war er ein Mitglied der wissenschaftlichen Prüfungskommission für Gymnasial-Lehramtskandidaten in den Böhmischen Ländern für Mathematik.

W. Matzka hat sich an der Verwaltung der Prager Universität und der philosophischen Fakultät aktiv beteiligt. Er war Dekan und Prodekan des philosophischen Professoren-Kollegiums, Dekan des philosophischen Doktor-Kollegiums und Mitglied der Kommission der Universitätsbibliothek.[27]

Nach dem neuen Gesetz über die Organisation der Universität, vom 30. September 1849, leitete der akademische Senat die Universität. Diesem akademischen Senat gehörte ein Rektor und ein Prorektor, vier Dekane des philosophischen Professoren-Kollegiums, vier Prodekane

[24] In diesem Gebäudekomplex hat sich bis zum Jahre 1882 der Sitz der philosophischen und theologischen Fakultät der Prager Universität befunden. Nach der Universitätsteilung ist hier der tschechische Teil geblieben.

[25] Er hat von Montag bis Samstag, in der Regel 7 Stunden pro Woche, mindestens 5 und höchstens 8 Stunden, vorgetragen. Seine Vorlesungen hat er vormittags von 11 bis 12 Uhr und nachmittags von 3 bis 4 Uhr, nur ausnahmsweise zu anderen Uhrzeiten, gehalten. Die Vorlesungen wurden regelmäßig im Hörsaal Numer III im Klementinum gehalten.

[26] Seine Vorträge aus der mathematischen Physik beinhalteten: Statik und Dynamik, Optik, Akustik, Magnetismus, Elektricität, Wärme, Vibrationstheorie, Lichtlehre, usw.

[27] Im Jahre 1852/53, 1859/60 und 1860/61 war er Dekan des philosophischen Professoren-Kollegiums, im Jahre 1851/52, 1853/54 und 1861/62 war er Prodekan des philosophischen Professoren-Kollegiums. Im Jahre 1862/63, 1869/70 und 1872/73 war er Dekan des philosophischen Doktoren-Kollegiums. Im Jahre 1865/66, 1868/1869 war er Mitglied der Universitätsbibliothek Kommission. Siehe *Personalstand der k. k. Universität zu Prag 1850/51, …, 1872/73*.

des philosophischen Professoren-Kollegiums und vier Dekane des philosophischen Doktor-Kollegiums an. Die Universität wurde damals von vier Fakultäten, und zwar der theologischen, juristischen, medizinischen und philosophischen Fakultät, gebildet. An der Spitze jeder Fakultät stand das Professoren-Kollegium, welches die Fakultät leitete. Das Professoren-Kollegium bestand aus ordentlichen und außerordentlichen Professoren und seine Mitglieder wählten für ein Jahr einen Dekan, der im nächsten Jahr zum Prodekan wurde. Von weiterer Bedeutung war das Lehrer-Kollegium, welches noch aus Privatdozenten, Assistenten, Lektoren und weiteren Pädagogen gebildet wurde. Neben dem Professoren-Kollegium hat noch das Doktor-Kollegium bestanden, das aus Mitgliedern der Fakultät gebildet wurde, die an der Fakultät das Doktorexamen abgelegt hatten.

Weitere Aktivitäten

Im Jahre 1862 ist in den Böhmischen Ländern ein studentischer *Verein für freie Vorlesungen aus der Mathematik und Physik* entstanden, und wurde allmählich zur heutigen *Jednota českých matematiků a fyziků* [Union der tschechischen Mathematiker und Physiker] umgebildet. Die Gründungsmitglieder dieses Verein waren Studenten an der k. k. Universität zu Prag[28], also die Studenten von W. Matzka. Nach festgelegten Vorschriften konnte ein akademischer Verein nur mit dem Einverständnis und unter Aufsicht der Universitätsverwaltung, eingerichtet werden. Daher spielte W. Matzka bei der Entstehung dieses Vereins eine wesentliche Rolle, da er als damaliger Prodekan des Professoren-Kollegiums der philosophischen Fakultät die Satzung des Vereins bestätigte.[29] Später unterstütze er die Studenten in ihren Aktivitäten zwar nicht, aber er legte ihnen auch keine Hindernisse in den Weg.

Das Interesse von W. Matzka an modernen mathematischen Themen, wie zum Beispiel dem Studium der komplexen Zahlen, Determinanten, usw., beweist, dass er versuchte, den Kontakt zur europäischen Mathematik zu halten. Seine wissenschaftliche Arbeit hat Anerkennung in böhmischen Fachkreisen gefunden. Die angesehenste wissenschaftliche Gesellschaft in den Böhmischen Ländern in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts war die *Königliche böhmische Gesellschaft der Wissenschaften*.[30] W. Matzka wurde am 9. Februar 1845 zum externen Mitglied und am 2. Januar 1850 zum ordentlichen Mitglied ernannt. Seit Anbeginn war er sehr aktiv, er hat über mathematische und physikalische Themen auf den Sitzungen der Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion regelmäßig Vorträge gehalten und seine Abhandlungen in der Periodika der Gesellschaft veröffentlicht. Seit den 60er Jahren bis zum Jahr 1848 hat er für die Gesellschaft auch als Kassierer gearbeitet.

Das Spektrum der Werke, die er publizierte, war sehr breit. Außer den bereits genannten mathematischen und physikalischen Bereichen, hat er zum Beispiel auch Werke über Geodäsie oder Astronomie publiziert. Er ist der Autor deutschsprachiger Lehrbücher, von Fachartikeln und Studien, historischen, methodischen und populären Werken. Da es bisher keine vollständige Aufstellung von W. Matzkas Werken gibt, gehört dies zu eine der Hauptaufgaben meiner Doktorarbeit. Bisher sind mir 67 Werke Matzkas bekannt.

[28] Die Gründungsmitglieder des Vereins waren vier Studenten der Mathematik und Physik an der philosophischen Fakultät der Prager Universität, Gabriel Blažek (1842–1910), Josef Finger (1841–1925), Josef Laun (1837–1915) und Josef Rudolf Vaňaus (1839–1910).

[29] Die Satzung des Vereins bestätigte gleichfalls Prof. Viktor Pierre (1819–1886), als damaliger Dekan des Professoren-Kollegiums der philosophischen Fakultät.

[30] Im Jahre 1773 ist die *Lehrgesellschaft* entstanden. Zuerst handelte es sich um einen engen Kreis von Wissenschaftlern, die sich vorzugsweise mit der naturwissenschaftlichen Forschung in Böhmen beschäftigten. Im Jahre 1784 benannte sie sich in *Tschechische Gesellschaft der Lehre* um, im Jahre 1792 zur *Königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*.

Seine Werke wurden entweder einzeln herausgegeben oder in den Periodika *Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*[31], *Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*[32], *Archiv für Mathematik und Physik*[33], *Journal für die reine und angewandte Mathematik*[34], *Astronomische Nachrichten*[35], *Annalen der Wiener Sternwarte* oder *Annalen der Physik und Chemie*[36] veröffentlicht.

Zu den bedeutenden Werken von W. Matzka gehört zum Beispiel die *Elementarlehre von den Logarithmen auf einen neuen, verständlicheren und umfassenderen Begriff vieler Hilfszahlen gegründet, blos die Kenntniss der gewöhnlichsten Zifferrechnungen vorausetzend, ohne Algebra gemeinfasslich zergliedert*[37], *Grundzüge der systematischen Einführung und Begründung der Lehre der Determinanten, vermittelst geeigneter Auflösung der Gruppen allgemeiner linearer Gleichungen*[38], *Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra, oder einer Grundlehre von der Ablenkung algebraischer Grössenbeziehungen*[39], *Vorlesungen über die Mathematik*[40], und viele andere.

---

[31] Es handelt sich um eine in deutscher Sprache verfasste wissenschaftliche Zeitschrift, mit ihrer Herausgabe hat die *Königliche böhmische Gesellschaft der Wissenschaften* Anfang des 19. Jahrhunderts begonnen, und sie gehört zu den ältesten wissenschaftlichen Zeitschriften der Böhmischen Länder. Hier wurden vor allem Auszüge aus den Vorlesungen, die auf den Sitzungen der Gesellschaft vorgetragen wurden, und kurze Auskünfte über die Tätigkeit der Gesellschaft veröffentlicht.

[32] Es handelt sich um ein deutschsprachiges, wissenschaftliches Periodikum, das die *Königliche böhmische Gesellschaft der Wissenschaften* seit den 40gern Jahren des 19. Jahrhunderts herausgab. Der Beiträge des Periodikums zur Entwicklung der Naturwissenschaften waren umfrangreiche Arbeiten, die den Vorträgen der Gesellschaftssitzungen entnommen wurden.

[33] *Grunert's Archiv*, nach ihrem Begründer, dem deutschen Mathematiker, Johann August Grunert (1797–1872) benannt. Die Zeitschrift erschien erstmals im Jahre 1841 .

[34] *Crelle's Journal*, nach ihrem Begründer, dem deutschen Mathematiker, August Leopold Crelle (1780–1855) benannt. Die Zeitschrift erschien erstmals im Jahre 1826.

[35] *Schmumacher's Astronomische Nachrichten*, nach ihrem Begründer, dem Astronom, Heinrich Christian Schumacher (1780–1850) benannt. Die Zeitschrift erschien erstmals im Jahre 1821.

[36] *Poggendorff's Annalen*, nach ihrem Begründer, dem deutschen Physiker, Johann Christian Poggendorf (1796–1877) benannt. Die Zeitschrift erschien erstmals im Jahre 1824.

[37] Vorzugsweise bestimmt zur Verbreitung dieser im Zifferrechnen so vielseitig nützlichen Lehre im Kreise der praktischen Rechner, in Untergymnasien, Gewerbs- und Bürgerschulen, Verlag der J. G. Calve'schen Buchhandlung. F. Tempsky, Prag, 1850, 128 Seiten.

[38] Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, VI. Folge, **9**(1877–1878), 61 Seiten. Dieses Werk wurde gleichfalls einzeln mit dem gleichen Titel und Umfangg herausgegeben. Dieses Werk ist z. B. in Muir T.: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, III., Macmillan and Co., Limited, London, 1920, erwähnt.

[39] Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, V. Folge, **6** (1848–1850), 180 Seiten + 3 Tafeln. Dieses Werk wurde gleichfalls einzeln mit dem gleichen Titel, 182 Seiten + 3 Tafeln herausgegeben. Besonderer Abdruck aus den Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag (V. Folge, 6. Band), Prag, 1850. Dieses Werk ist z. B. in Riecke F.: *Die Rechnung mit Richtungszahlen oder die geometrische Behandlung imaginärer Grössen*, Verlag der J. B. Metzler´schen Buchhandlung, Stuttgart, 1856, und auch im heutigen Buch Flament D.: *Historie des nombres complexes*, Entre algèbre géometrié, CNRS Editions, Paris, 2003, erwähnt.

[40] Es handelt sich um die Überarbeitung von drei Bänden der *Vorlesungen über die Mathematik* von Georg Freiherrn von Vega. Dem überarbeiteten ersten Bandes entspricht: *Georg Freiherrn von Vega, Vorlesungen über die Mathematik sowol überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps. – Erster Band. Rechenkunst und Algebra*. Sechste Auflage, Durchgesehen, verbessert und vermehrt von Wilhelm Matzka. Fr. Bech's Universitäts-Buchhandlung, Wien, 1838, 612 Seiten. Siebente Auflage, Ueberarbeitet von Wilhelm Matzka. Fr. Bech's Universitäts-Buchhandlung, Wien, 1850, 624 Seiten. Dem zweiten überarbeiteten Band entspricht: *Georg Freiherrn von Vega, Vorlesungen über die Mathematik sowol überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps. – Zweiter Band, die theoretische und practische Geometrie, die geradlinige und sphärische Trigonometrie, die höhere Geometrie, und die Infinitesimal-Rechnung enthaltend*. Siebente Auflage, Durchgesehen, verbessert und vermehrt von Wilhelm Matzka. Verlag von F. Tendler, Buchhändler, Wien, 1835, 712 Seiten + 16 Tafeln. Achte Auflage, Ueberarbeitet von Wilhelm Matzka. Verlag von Tendler & Compagnie, Wien, 1848, 660 Seiten + 15 Tafeln. Dem überarbeiteten dritten Band entspricht: *Georg Freiherrn von Vega, Vorlesungen über die Mathematik*

Am 26. April 1850 wurde er von Seiner Majestät dem Kaiser Franz Joseph I. mit die goldene Medaille für Kunst und Wissenschaft ausgezeichnet.

Lebensende

Wilhelm Matzka starb am 9. Juni 1891 in Prag. Die Todesnachricht wurde im *Jahresbericht der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften 1891* bekanntgegeben:

Zu den Beginn des Jahres konnte zwar unsere Gesellschaft durch die Wahlen vervollständigt werden,...; zugleich hat sie jedoch zahlreiche und schmerzhafte Verluste erlitten. Der unbarmherzige Tod hat nämlich drei Mitglieder des Rates und vier externe Mitglieder aus unserer Mitte gerissen, und zwar das Ratsmitglied Dr. Vilém Matzka, c.k. des Regierungsrates und jub. Professor der Prager Universität, der viele Jahre lang unsere Finanzangelegenheiten mit nichtalltäglicher Gründlichkeit und Genauigkeit versorgte;...

Quellennachweise

[Be1] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Matfyzpress, Praha, 2008.

[Be2] Bečvářová M.: *Z historie Jednoty (1862–1869)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 13, Praha, Prometheus, 1999.

[Je] Jelinek K.: *Das ständisch-polytechnische Institut zu Prag, Programm zur fünfzigjährigen Erinnerungs-Feier an die Eröffnung des Institutes am 10. November 1856.* Prag, 1856.

[JL] Jílek J., Lomič V., Horská P.: *Dějiny Českého vysokého učení technického v Praze*, Praha, 1973.

[KP] Kafka F., Petráň J. (ed): *Dějiny Univerzity Karlovy I. –IV.*, UK, Karolinum, Praha, 1995–1998.

[No] Nový L. a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích*, Academia, Praha, 1961.

[Pa] Pátý L.: *Jubilejní almanach Jednoty čs. matematiků a fyziků*, Jednota čs. matematiků a fyziků, Praha, 1987.

[Pe] Petráň J.: *Nástin dějin filozofické fakulty Univerzity Karlovy v Praze*, Univerzita Karlova, Praha, 1983.

[Po] Posejpal V.: *Dějepis Jednoty českých mathematiků*, JČM, Praha, 1912.

[Vf] Velflík A. V.: *Dějiny technického učení v Praze*, díl I., Unie, Praha, 1906 a 1909.

[Vs] Veselý Fr.: *100 let Jednoty československých matematiků a fyziků*, SPN, Praha, 1962.

[P] Poggendorff J. C.: *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch*, Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1904.

[W] Würzbach C.: *Biographisches Lexikon*, Druck und Verlag der k. k. Hof- und Staatedruckerrei, Wien, 1867.

sowohl überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps. – Dritter Band. Mechanik der festen Körper. Fünfte verbesserte Auflage. Verlag von Tendler & Schaefer, Wien, 1839, 433 Seiten + 11 Tafeln.

Leonhard Euler and the problem of vibrating string

S.S. Demidov

1. In 1749 in the third volume of the « Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin » for the 1748 year J. d'Alembert published a paper [1] which contained the famous solution of the problem of vibrating string – «d'Alembert's formula». This result produced a great impression on his contemporaries[1]. One of the first was L. Euler who answered on it by his article "Sur la vibration des cordes" [5] which was published in the next volume of the same journal. In this paper L. Euler proposed his own method to solve the problem of vibrating string different from J. d'Alembert's method only in details. But the novelty in Euler's paper was the following: he proposed his point of view on the probable nature of the initial function $u_0(x)$ which was included in the solution of the problem given by d'Alembert's formula[2]

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2} \quad . \qquad .$$

Accordingly to Euler we can take as initial form of the string an arbitrary mechanical curve.

This affirmation could be considered as an avant-garde because accordingly to the ideas of that time we study in Calculus exclusively functions which were presented by one analytical expression – that means "continuous" in the terminology of that epoch[3]. This arbitrariness, as Euler remarked later [6], restricted only by the absence of curve's interruptions expressed by the function $u_0(x)$ – we can interpret this as continuity of this function in the modern sense of this term. For such affirmation Euler had only the following arguments: firstly, it was possible to give for initial form of the string the arbitrary curve drawn by a hand; secondly, it is possible to construct the solution proposed by d'Alembert's formula in all plane for every initial function continuous in modern sense of this term. However such a solution is not classical in our sense – that means it can't transform the equation of vibrating string to the identity; such a function could have discontinuities not only of its second derivatives but of its first derivatives (case of a string whose form is constructed from two straight lines and has an angle point). In reality Euler introduced the weak solution of the problem and enlarged extraordinarily the field of analysis – from analytical functions till the functions differentiable by segments. However he made it non-correctly at all: he said that his solution satisfies the equation of vibrating string, but he did not explain – in which sense a function without continuous first derivatives could satisfy it ? This incorrect Euler's construction provoked sharp objections from J. d'Alembert's side.

2. In his papers d'Alembert (see for example [7]) declared mathematical and physical objections against Euler's concepts (about it see [3]) . We have to keep in mind that the foundations of analysis in the XVIII-th century were not rigorous (see [8]). It is why his objections were false in some points. For example the notion of

---

[1] About d'Alembert's paper and about the reaction on it by his contemporaries see [2 – 4].
[2] For simplicity we consider here and further the initial velocity of all points of the string equal to zero.
[3] We distinguish here and further this understanding of the term «continuity» from modern one by the putting it in quotation marks: "continuity".

“continuous” function (that means a function given by “one analytical expression”) from modern point of view is completely false. The future development of mathematical analysis (see [9]) showed that such a notion is contradictory. However the analysis of d’Alembert’s argumentation shows that in reality his objections could be interpreted in the following matter: a function which gives the initial form of a string couldn’t have points in which the second derivative has first kind discontinuity – accordingly to his opinion the second derivative of the initial function must not make jumps. Because in that period nobody had an idea concerning the discontinuities of second kind such functions can be identify with functions twice differentiable or with functions twice continuously differentiable. Thus if we reject as superfluous and in reality false the claim of the “continuity” of the initial function (d’Alembert later rejected it – see below) we can say that d’Alembert spoke about the “classical solution” and his position was absolutely justified [10, p. 358]: “In another cases the problem can’t be resolved, in every case, by my method, and I don’t know also may be it is more difficult than the power of known analysis”. These words were absolutely equitable: the construction proposed by Euler gave in reality the “weak solution” – this notion and the theory of such solutions were realized only in the XX-th century.

3. The most famous mathematicians of the XVIII-th century – D. Bernoulli, J. Lagrange, P.S. Laplace, G. Monge – participated in this discussion. D. Bernoulli introduced in this discussion a new motif: the problem to present functions by trigonometric series. In our paper we shall not touch this aspect of the discussion sending the readers to the special literature (for example to [11]).
We shall concentrate ourselves on another aspect of the discussion – on the notion of solution of the partial differential equations and on the nature of arbitrary functions which enters in this solutions.

J. Lagrange and P.S. Laplace understood very well the nature of d’Alembert’s criticism and the correctness of his objections. In the same time they evaluated the importance of Euler’s ideas which opened to the mathematicians excellent perspectives. It is why their efforts were directed to save Euler’s construction. For that they tried to produce d’Alembert’s formula not as resulting by integrate the equation of the vibrating string. (see [3]).

Thus J. Lagrange in his paper [12], published in 1759, replaced the string by the thread, loaded by $(n-1)$ equal loads which divided the thread on n equal segments, and considered the problem of small vibrations of such a system. The problem was reduced to integrate the system of linear ordinary differential equations. Lagrange integrated such a system and obtained the equations for the vibration of every load. Further Lagrange considered the string as a limit of such a system when $n \to \infty$ and the mass of every load tends to 0 in such a manner as total mass of the loads tends to the mass of the string.

In result of that passage to the limit which Lagrange made without any rigour he received without (as he thought himself) any application of analysis the d’Alembert’s formula: “This construction is obviously the same which Monsieur Euler received for the same hypothesis. It is consequently the theory of this great Geometer constructed on direct and clear principles which were not based on the «law of continuity» on which Monsieur d’Alembert insists” (I quote according to [3, p. 169 – 170]).

Here we regard the manifestation of the same methodology which we can see in his work on the theory of “fonctions analytiques”: to invent the instruments which permit to avoid the doubtful operations of analysis – there he tried to determine the derivatives of a function from its development in Taylor series, here to receive l'Alembert's formula without integration of the equation of vibrating string.

The passage to the limit was made by Lagrange without any rigour. D. Bernoulli and d'Alembert immediately remarked this incorrectness and wrote about it to Lagrange. Than Lagrange in his work [7] proposed another method which was not founded on this passage to the limit. As he wrote in the beginning of this work [13], "I thought that it is necessary to find another more simple method which permits me to avoid all the difficulties which I met during the transformations of the formulas" (I quote according to [3, p. 170]). This new method permitted him to conclude that for the correctness of d'Alembert's formula it is enough to assume the infinite differentiability of the function which gives the initial form of the string. What is very important for us it is the following: on the way of the realisation of the new method (apropos also non rigour as the first one) Lagrange utilized a procedure similar to the procedure of the introduction of weak solution in the XX-th century – to multiply the equation on the "finite function" and to consider the corresponding "integral identity" (see [3]).

Laplace tried also to legitimize Euler's construction [14]. For this he changed the mathematical model of this problem: in an equation of the vibrating string he wrote instead of the second derivative on the variable x the appropriate expression in the finite differences (see [3]). As a result he arrived to the following conclusion – the initial function must be continuously differentiable. At the end of his considerations Laplace wrote: "When in the problem of the vibrating string the initial form of the string is such as two of its adjoining sides were constructed by joining two straight lines then as it seems to me *from geometrical point of view* the preceding solution can be utilized (that is to say in this case Euler's construction is not legitimate – S.D.). But if we consider this problem (and all the problems like this) *from physical point of view*, as it seems to me, the application of this construction is possible also for the case when the string is formed by a system of many straight lines. Actually a priori it is evident that its movement has to be very little different from the movement which happens in the hypothesis that in the points where these straight lines intersect there are little curves which permit to use this construction" (italics is put by myself – S.D.).

That is to say in reality instead of the starting problem Laplace proposed to solve a little different problem – with smooth initial conditions for which it is possible to use d'Alembert's considerations: in the neighborhood of the points where there are the violations of the differential properties he smoothed the initial curve by the little circles. In this way Laplace tried to consider the solution of the problem with "bad" initial function as a limit of the consequence of the solutions of that problems with the smooth initial functions: in reality Laplace marked the way of the introduction of weak solutions of the partial differential equations (see [3]).

In reality in their attempts to save Euler's construction Lagrange and Laplace looked the solution of this situation by the change of the mathematical model of a physical problem (this way was realized completely at the first time only in 1877 – see below) and outlined the ways on which during the XX-th century was introduced the notion of the weak solution of a partial differential equation: by the help of the "integral identity" (Lagrange) and as a limit of a sequence of classical solutions (Laplace).

(I want to emphasize that either Lagrange, or Laplace didn't demand the "continuity" of the initial function !).

4. In his considerations which d'Alembert continued during all his life, he showed a reasonable flexibility – he finished to insist on the "continuity" of a function who gave the initial form of a string and in his last works he concluded – an initial function could be "discontinuous" but it had to be twice continuously differentiable (see [15]).

If the situation with d'Alembert's position is clear – he was reflecting on the nature of the arbitrary functions including in the solutions of the partial differential equations and gradually was elaborating the presentation on the classical solution of such a solution, Euler's position is not comprehensible. So in his work [16] presented in 1772 and published in 1773, that is to say more than in 20 years after the beginning of the discussion, in reply to d'Alembert's criticism, Euler continued to affirm that for example the function

$$y = \varphi(v) = \sqrt[3]{a(a-v)^2}\ ,$$

Where $v = ct + x$ satisfies (sic!) the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,$$

although $y = \sqrt[3]{a(a-v)^2}$ has for $v = a$ a peak. In my papers during 70-ies I wrote about two possibilities – or Euler didn't understand or didn't want to understand the sense of d'Alembert's objections [3, p. 178]. Today I think that Euler wanted to declare a new opinion on the notion of a solution of an equation: on the weak (in modern sense) solution of the equation. It is impossible that the greatest mathematician of this time could not understand so that d'Alembert, Lagrange and Laplace understood. He had not obstinacy or unwillingness to recognize another's opinions, including the opinions of d'Alembert and Lagrange who were very respectful by him.

5. Which reasons did not permitted to L. Euler (and also to such his famous contemporaries as Lagrange and Laplace) to elaborate for the new situation the adequate representation, for example that which was proposed in the XX-th century – a notion of the weak solution. One of the obstacles to this was the weak elaboration of the foundations of analysis – it is enough to remember that it took more than 150 years to elaborate the conception of a weak solution ! But the main obstacle to that was the ideology reigned in mathematics in this time.

The understanding of the object of mathematics by the scientists of the XVIII-th gives us the definition made in 1877 by F. Engels[4]: «Pure mathematics have as object the spatial forms and quantitative relations of the real world, that it to say – very real material" [16, c. 33]. Euclidean space of the geometry is an expression of the properties of the real physical space which encircle us. In this space all events of the natural and social history develop. From here there is the characteristic for the mathematicians of the XVIII-th century absence of distinction between physical and

[4] Certainly for the years 1870-th , when it was proposed by F. Engels, this definition didn't reflect the nature of the changes happened in mathematics of the XIX-th century: there were the new structures the connections of which with "the spatial forms and quantitative relations" of the real world were very difficulty distinguished; to see in these connections the nature of the mathematical knowledge became, as A.N. Kolmogorov wrote in his classical work "Mathematics" [17], very difficulty if certainly we shall not interpret very large the notions itself "spatial forms" and "quantitative relations". But if we refer to Engels' definition on mathematics of the XVIII-th and even of the beginning of the XIX-th centuries, then his definition reflects adequate the understanding of the object of mathematics by the scientists who lived and worked in this period. We can affirm that all mentioned participants of this discussion considered mathematics in a such way.

mathematical models of the phenomena. In the conscience of mathematicians this two models converged together and during the discussion on the vibrating string all its participants utilized physical as well as mathematical arguments. Why not ? Of course they spoke about the same: the abstraction of the real string and the function which presents it in the conscience the geometer of this time was the same ! It is why nobody posed a question about the replacement of the mathematical model of that physical process by another more adequate to the physical reality, as E. Christoffel made later in his lectures published in 1877 (see [3, p. 180]) who replaced a partial differential equation by the corresponding integral one.

Concerning the generalization of the notion of the solution, here it was a situation very different from situation common for us. We can say about different notions of the solution – about classical solution (that's just what d'Alembert understood a solution) and about weak or, in Russian terminology, generalized solution in (that's just what we see in a solution proposed by Euler). For a mathematician of the XVIII-th century such an approach is impossible: the physical problem has only one solution. The physical nature of the problem says about it and a mathematician of the XVIII-th century didn't distinguish it from its mathematical expression. And this solution is given in our case by d'Alembert's formula which conserves its sense in the case when the initial function is "discontinuous".

I think that Euler generalized the notion of the solution analogically to the situation of the generalization of the notion of sum of a series for the case of the divergent series. Euler made it for example in his "Differential Calculus" (1755). He wrote (I quote according to [18, p. 101]): "we can attach to the word "sum" the significance different from ordinary one. Namely we shall say that the *sum* of an infinite series is the finite expression from the development of which this series is appeared". "In this agreement if the series will be convergent the new definition of the word «sum» will coincide with the ordinary one … If we shall take this definition we can conserve all the profits for using divergent series and in the same time to defend us from different accusations".

In the same manner Euler made in the case when the function which gives the initial form of the string have the singularities – the points in which the first derivative has an interruption – and function given by d'Alembert formula can't satisfy the equation of the vibrating string that is to say is not the solution in the ordinary sense of this word. Euler attached to the word "solution" the significance different from ordinary one and considered this function as a solution. In such a manner accordingly to Euler if we received by such or such method a solution of a partial differential equation of a certain physical problem, that is to say a solution which satisfied some initial and boundary conditions, it is naturally to consider it as a solution also in the cases when the functions which gives these conditions (and consequently are includes in this solution) are not so smooth as it is necessary for its substitution in the equation. Utilizing mentioned Euler's words we can say: if we shall utilize such a definition we can conserve all the profits by the usage of such generalization of the notion of the solution.

It is clear that the construction of a good theory of such solutions in Euler's time was impossible although L. Euler saw clearly the profits from its utilization and his powerful intuition showed excellent perspectives of such a generalization. In the same time his methodological ideas (we can know about it from his "Lettres à la princesse allemande") permitted him to make such a generalizations. In the case when his intuition and common sense suggested him a solution of the question, he received it even in the case when the consequences from this solution, it would seem, could give the formal contradictions (in order to avoid the situations "when human mind which wants to escape the formal contradiction goes to the more absurd opinions" [20, p. 42]).

When we try to evaluate the discussion on the vibrating string from point of view of mathematics of the beginning of the XXI-th century we have to stress that in their confrontation each of both sides was right in their way. D'Alembert defended the principles which led him to the end of his life to elaborate a notion of *classical* solution of the problem of the vibrating string. His conception was remarkably passed the turn which led to A. Cauchy's reform of the mathematical analysis on the concept of limit (in this direction d'Alembert's contribution played a very important role). L. Euler could see so far in the future – in mathematical analysis of the XX-th century – and in some manner determine one of the factors of its development in a distant perspective.

And also a factor to which we have to pay attention in connection with the famous discussion. It seems that we, being on the heights of the beginning of the XXI-th century, having all the foundations to say that there was not a subject for the discussion between d'Alembert and Euler – in reality they said about different things: one – about the classical, another – about the weak solutions. But to understand it in its historical context of their time they – the most famous mathematicians of that epoch – could not possible. It was necessary to wait more than one and half century when the development of mathematical analysis in general and this of the theory of partial differential equation particularly to attain this idea so simple from the point of view of modern mathematics.

Bibliography

1. d'Alembert J. Recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration // Histoire de l'Acad. royale des sciences et des belles lettres de Berlin. Année 1747. V. 3. Berlin, 1749. P. 214 – 219.
2. Демидов С.С. Дифференциальные уравнения с частными производными в работах Ж. Даламбера // Историко-математические исследования. Вып.19. М.: Наука. 1974. С. 94 – 124.
3. Демидов С.С. О понятии решения дифференциальных уравнений с частными производными в споре о колебании струны в XVIII веке // Историко-математические исследования. Вып.21. М.: Наука. 1976. С. 158 – 182.
4. Demidov S.S. Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de d'Alembert // Revue d'Histoire des Sciences. 1982. V. 35. N. 1. P. 3 – 42.
5. Euler L. Sur la vibration des cordes // Histoire de l'Acad. royale des sciences et des belles letters de Berlin. Année 1748. V. 4. Berlin, 1750. P. 69 – 85 (= Opera omnia. Ser.II. V. 10. P. 63 – 77) .
6. Euler L. De chordis vibrantibuss disquisitio ulterior // Novi Comm. Acad. Sci. Petropol. (1772). V. 17. 1773. P. 381 -409 (= Opera omnia. Ser.II. V. 11. Sect.1. P. 62 – 80).
7. d"Alembert J. Recherches sur les vibrations des cordes sonores // Opuscules mathématiques. V.1. Paris. 1761.
8. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Под ред. А.П. Юшкевича. Т. 3. М.: Наука. 1972.

9. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций / Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. М.: Наука. 1981. 115 – 255.

10. d'Alembert J. Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration // Histoire de l'Acad. royale des sciences et des belles letters de Berlin. Année 1750. V. 6. Berlin, 1752. P. 355 – 360.

11. Паплаускас А.Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. М.: Наука. 1966.

12. Lagrange J.L. Recherches sur la nature et la propagation du son // Miscellanea Taurinensia. T. 1. 1759. P. 1 – 112 (= Oeuvres. T.1. Paris. 1867. P. 39 – 148).

13. Lagrange J.L. Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son // Miscellanea Taurinensia. T. 2. 1760 – 1761.(= Oeuvres. T.1. Paris. 1867. P.151 – 318).

14. Laplace P.S. Mémoire sur les suites // Histoire de l'Acad. des Sci. de Paris. 1779(82). P. 207 – 309 (= Oeuvres. V. 10. P. 1 – 89).

15. Юшкевич А.П. К истории спора о колеблющейся струне (Даламбер о применении «разрывных» функций // Историко-математические исследования. Вып.20. М.: Наука. 1975. С. 221 – 231.

16. Энгельс Ф. Анти-Дюринг. М. 1970.

17. Колмогоров А.Н. Математика. В кн.: Большая Советская Энциклопедия. Изд. 2-е. Т. 26. с. 464 – 483.

18. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. Перевод и статья М.Я. Выгодского. М.-Л. ГИТТЛ. 1949.

19. Петрова С.С. Леонард Эйлер и расходящиеся ряды. В кн.: Леонард Эйлер и современная наука. Материалы Международной научной конференции. 14 – 17 мая 2007 г. Санкт-Петербург. 2007. С. 179.

20. Эйлер Л. Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях. Санкт-Петербург: Наука. 2002.

Reine und Angewandte Mathematik in Dresden:
Im Spiegel der "Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden" von 1861 bis 1939

Waltraud Voss, TU Dresden

1. Einleitende Bemerkungen: Isis und Mathematik bis in die 1860er Jahre

In der Naturforschenden Gesellschaft zu Dresden, beschlossen im Dezember 1833, ins Leben getreten im Januar 1834 und 1835 mit dem Namen Isis bedacht, herrschten Zoologie, Botanik und Mineralogie. Seit 1835 stand der renommierte Ludwig Reichenbach, Professor an der Dresdner Chirurgisch-Medizinischen Akademie und Direktor der Kgl. Naturhistorischen Sammlungen, an der Spitze der Isis, - als Garant auch für deren wissenschaftliches Niveau. Die Bildung von Fachsektionen hatte erst 1843 begonnen; als vierte Sektion formierte sich 1846 – neben den drei bestehenden für Zoologie, Botanik und Mineralogie – die Sektion für Physik, Chemie und Mathematik. Mathematisches wurde in ihr bis 1860 explizit nicht behandelt. Auch in den monatlich stattfindenden, teilweise öffentlichen Hauptversammlungen der Isis spielte die Mathematik nur implizit eine Rolle, etwa in Vorträgen, die sich mit Astronomie, Wetterbeobachtung und Kalenderrechnung befassten.

1864 wurde die Chirurgisch-Medizinische Akademie in Dresden aufgehoben; im folgenden Jahr zog sich Ludwig Reichenbach aus der Isis zurück, deren Geschicke er 30 Jahre lang erfolgreich geleitet hatte. Nun war es bald die Polytechnische Schule, die in der Isis die wissenschaftlich führende Stelle einnahm, in ihren Räumen traf man sich, und auch die Isis-Bibliothek fand dort ihren Platz. 1865/66 war eine Zeit des Aufbruchs in der Isis, mehr als 60 Mitglieder wurden neu aufgenommen, unter ihnen Oscar Schlömilch, Mathematikordinarius an der Polytechnischen Schule und Leiter der Lehrerabteilung. Schlömilch trug bereits 1866 sowohl in der Sektion für Mathematik, Physik und Chemie als auch in einer Isis-Hauptversammlung vor. Für das Jahr 1867 wurde er an die Spitze der Gesellschaft gewählt. Als Vorsitzender der Isis bereitete er die 42. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte mit vor, die 1868 in Dresden tagte. Neben Carl Gustav Carus, dem Präsidenten der derzeit in Dresden residierenden Leopoldina, fungierte Schlömilch als zweiter Geschäftsführer der Naturforscherversammlung. 1868 leitete er die Isis-Sektion für Mathematik, Physik und Chemie. Dieses Jahr bedeutete einen Wendepunkt in der Sektion.

2. Mathematik in Dresden: Im Spiegel der "Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden" von 1861 bis 1939

Seit 1861 erschienen jährlich die „Sitzungsberichte“, seit 1881 die „Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden“. Die Isis-Aktivitäten der Mathematiker von Polytechnischer Schule (1851-1875), Polytechnikum (1875-1890) und TH Dresden (ab 1890) spiegeln sich darin wider. Hier sollen nur die Sektionsvorträge betrachtet werden. Die Zeitspanne von 1861 bis 1939 wird in sieben Zeitabschnitte unterteilt; die Vorträge werden thematisch zwölf Klassen zugeordnet, der prozentuale Anteil jeder Klasse wird für jeden Zeitabschnitt angegeben (siehe „Tabelle“).

Prozentuale Aufschlüsselung der Sektionsvorträge nach den 12 großen Themenbereichen – für 7 Zeitabschnitte
Sektion für Mathematik, Physik und Chemie: I: 1861-1866; II: 1867-1875
Sektion für reine u. angewandte Mathematik:
III: 1876-1890; IV: 1891-1918; V: 1919-1929
Sektion für Mathematik, Physik u. Chemie: VI: 1930-1934
Sektion für Mathematik u. Physik: VII: 1935-1939

	I	II	**III**	**IV**	**V**	VI	VII
Chemie	23	10	**-**	**-**	**-**	40	-
Astronomie/Meteorologie	29	18	**2**	**2**	**-**	20	8
Messgeräte	9	16	**2**	**1**	**-**	-	-
Technik/Technologie (außer mech. Technik …)	3	16	**7**	**1**	**-**	-	-
Experimentalphysik	24	17	**1**	**2**	**-**	13	17
Theor. Physik	12	8	**11**	**7**	**11**	13	58
Reine Math.	-	2	**32**	**43**	**45**	-	-
Angew. Math.	-	3	**12**	**24**	**33**	7	-
Mech. Technik mit math. Komponente	-	6	**19**	**9**	**4**	-	-
Rechenmaschinen/Rechen-hilfsmittel	-	4	**5**	**3**	**-**	-	-
Math. Modelle u. Anschauungsobjekte	-	-	**7**	**3**	**-**	-	-
Philosophisches/Weltansch. /Pädagogisches mit Bezug zur Mathematik	-	0	**2**	**5**	**7**	7	17

Sektion für Mathematik, Physik und Chemie

I. 1861-1866

Unter den Sektionsvortragenden dieses Zeitraums sind fast 40 % Lehrer, je 13 % Militärs und Vertreter der Polytechnischen Schule, 8 % Apotheker und rund 25 % „andere" – vom Kunstmaler über den Weinhändler bis zum Justizrat. Es überwiegen Vorträge zur Astronomie/Meteorologie, zur Experimentalphysik und zur Chemie. Die Chemie umfasst dabei ein sehr weites Spektrum: Arzneien, Drogen, Nahrungsmittel, hygienische Verhältnisse gehören dazu, aber auch – nicht verwunderlich nach drei Kriegen in den 60er Jahren – Schießpulver und Sprengöl. Die prozentualen Verhältnisse zeigt die erste Spalte der Tabelle. Mathematik kam in den Vorträgen der Sektion für Mathematik, Physik und Chemie explizit noch nicht vor. Mathematikordinarius an der Polytechnischen Schule war Oscar Schlömilch.

II. 1867 – 1875

Seit 1867 war immer mindestens einer der Sektionsvorträge auch explizit mathematikbezogen. 1868 leitete Oscar Schlömilch die Sektion. Sein Stellvertreter war Ernst Hartig, Professor für Mechanische Technologie, als Protokollanten fungierten zwei Assistenten der Polytechnischen Schule. Damit bestand erstmals die gesamte Leitung der Sektion aus Angehörigen der Polytechnischen Schule. Von den im Jahr 1868 gehaltenen 27 Sektionsvorträgen sind drei zur Mathematik zu zählen, dazu kamen acht, die implizit auf mathematischen Erkenntnissen aufbauten. Die Vertreter der Chemie sahen in der personell veränderten Sektion wohl nicht mehr ihr Podium, zumindest wurde zwischen 1869 und 1875 in der Sektion für Mathematik, Physik und Chemie kein einziger Vortrag zur Chemie mehr gehalten. Das Spektrum der Vortragenden hat sich nicht wesentlich geändert: die Lehrer sind nicht mehr ganz so stark vertreten, aber immer noch die stärkste Sparte in einer nach wie vor breit gefächerten Palette von Berufen.

Sektion für reine und angewandte Mathematik

Eine Teilung der großen Sektion für Mathematik, Physik und Chemie war im Dezember 1875 beschlossen worden; seit Anfang 1876 traten die beiden Sektionen für Physik und Chemie und für reine und angewandte Mathematik an ihre Stelle. Vorstand der Mathematischen Sektion war im Jahre 1876 Gustav Zeuner selbst, Direktor des Polytechnikums, anerkannter Theoretiker und Praktiker der Wärmetheorie und – seit seiner Züricher Zeit – ausgewiesener Vertreter auch der Versicherungsmathematik und der Statistik. Sein Stellvertreter an der Spitze der neuen Isis-Sektion war kein Geringerer als Leo Königsberger, der 1875 als

Nachfolger von Oscar Schlömilch nach Dresden gekommen war. Direktor Zeuner setzte auf mathematische Fundierung der technischen Disziplinen, weitere Stärkung der Lehrerabteilung und der allgemeinen wissenschaftlichen Bildung. Vor diesem Hintergrund ist die Gründung der mathematischen Sektion der Isis auch zu werten: In ihr sollten die Mathematiker und die Techniker des Polytechnikums, die Lehrer höherer Schulen und Vertreter der Dresdner Industrie in wechselseitig befruchtenden Kontakt treten! Der späteren „antimathematischen Bewegung" konnte in Dresden auch dadurch der Wind aus den Segeln genommen werden. Zwischen 1876 und 1890, und darüber hinaus bis 1929, waren, von einer Ausnahme abgesehen (Arwed Fuhrmann, 4. Mathematischer Lehrstuhl 1874 bis 1907), alle Dresdner Mathematikprofessoren Mitglied der Isis und wirkten in deren mathematischer Sektion mit. Das waren auf dem Lehrstuhl für Reine Mathematik als Nachfolger von Leo Königsberger Axel Harnack, Martin Krause und Gerhard Kowalewski, auf dem Lehrstuhl für Angewandte Mathematik seit 1879 Aurel Voss, Carl Rohn, Georg Helm und Max Lagally, auf dem Lehrstuhl für Darstellende Geometrie seit 1872 Louis Burmester, Carl Rohn, Martin Disteli und Walther Ludwig, auf dem Lehrstuhl für Versicherungsmathematik (seit 1919) Paul-Eugen Böhmer. Dazu kamen die außerordentlichen Professoren Emil Naetsch, Bernhard Schilling, William Threlfall, Georg Wiarda, Alfred Kneschke, Privatdozenten wie Herbert Seifert und Assistenten und Assistentinnen wie Gertrud Wiegandt.

III. 1876-1890

Unter den Vortragenden sind nur noch knapp 20 % Lehrer, und nahezu zwei Drittel kommen aus dem Polytechnikum! Militärs, Apotheker, Kunstmaler, Vertreter der Justiz, Kaufleute und Händler fehlen ganz, dafür hat die Zahl der in der Praxis stehenden „geprüften Ingenieure" leicht zugenommen. Vom Polytechnikum sind außer den Mathematikern mehrere Professoren der mechanisch-technischen Richtungen vertreten, neben Gustav Zeuner etwa der Professor für Brückenbau und Statik Wilhelm Fränkel, die Vertreter der Technischen Mechanik Martin Grübler und Otto Mohr, der Professor für Kinematik Trajan Rittershaus. Von den anderen Mitwirkenden soll Dr. Basilius von Engelhardt hervorgehoben werden, Besitzer und Betreiber einer vorzüglich eingerichteten Sternwarte. Durch ihn ging die Komponente Astronomie/ Meteorologie in den Sektionsvorträgen nicht ganz verloren.

IV: 1891 – 1918

Seit 1891 wird die Zahl der Teilnehmer an den Sektionsveranstaltungen in den „Sitzungsberichten" festgehalten. Während sie in der Sektion für Physik und Chemie selten unter 30 liegt, und oft über 50 – nämlich dann, wenn Experimente vorgeführt werden, die auch für den Laien interessant sind –, ist sie in der Sektion für reine und angewandte Mathematik recht gering, 13, 14, gelegentlich sind nicht mehr als 8 Teilnehmer da: Der Kreis, der auch die Vortragenden stellt. In die Sektion für Mathematik ging man, um zu arbeiten, um Fachexpertenrat einzuholen und zu geben, kaum aber, um „zu schauen“ oder nur zuzuhören. Der Zustrom stieg zwischen 1905 und 1908 wieder an: In denjenigen Jahren, in denen um die Reformierung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen und um die Einführung der Differential- und Integralrechnung in den Mathematikunterricht der obersten Klassen gestritten wurde. Mehr als 40 % der Vortragenden waren Professoren der Technischen Hochschule, die Lehrer waren mit etwas unter 20 % vertreten. Dazu kamen Vertreter der Praxis vom Eisenbahnbauinspektor bis zum Optiker.

V: 1919 – 1929

Im Jahre 1919 hatte die Isis einen ungewöhnlich hohen Mitgliederzugang und erreichte mit nahezu 400 Mitgliedern die Höchstzahl seit ihrem Bestehen. Auch die drei neuberufenen Mathematikordinarien – Paul Eugen Böhmer, Gerhard Kowalewski und Max Lagally – sind unter den neuen Mitgliedern und arbeiten in der mathematischen Sektion aktiv mit. Doch der Trend, der bereits im vorhergehenden Zeitabschnitt deutlich wurde, hält an. Die aktivsten Vertreter der Lehrerschaft sind noch dabei, stehen aber kurz vor dem Eintritt in den Ruhestand oder sind bereits Rentner. Auch für die langjährigen Vertreter aus der Praxis trifft das zu. Die Mathematiker der Hochschule bleiben zunehmend unter sich. Als nun auf Anregung von Kowalewski 1920 am Dresdner Mathematischen Seminar das Mathematische Kolloquium gegründet wurde, in dem die Doktoranden der Mathematik, deren Dresdner Hochschullehrer, Kollegen aus technischen Abteilungen der TH, aber auch Gäste von anderen Hochschulen vortrugen, wurde die mathematische Sektion der Isis für die Hochschulmathematiker eigentlich überflüssig. Mehrere Gründe kamen zusammen, die dazu führten, dass die Mathematische Sektion Ende 1929 „wegen Mitgliedermangels“ die Aufgabe ihrer Selbständigkeit beschloss und wieder mit der Sektion für Physik und Chemie zusammenging.

Betrachten wir in der Tabelle die Schnittstellen der Spalten III, IV und V mit den Zeilen der Eingänge „Reine Mathematik“, „Angewandte Mathematik“, „Mechanische Technik mit (deutlich) mathematischer Komponente“ und „Technik/Technologie (außer „Mechanische Technik …“)“, so ist offensichtlich: Das Miteinander der Mathematiker und der Vertreter der Technik, wie Gustav Zeuner es sich wünschte, wurde im Zeitabschnitt III: 1876-1890 recht gut verwirklicht. Indiz dafür ist, dass 19 % der Sektionsvorträge aus dem Themengebiet „Mechanische Technik mit (deutlich) mathematischer Komponente“ stammen, dazu weitere 7 % aus dem übrigen Bereich von „Technik/Technologie“. Der Vergleich der Zeitabschnitte III: 1876-1890 und IV: 1890-1918 zeigt bereits klar den Trend, der sich im folgenden Zeitabschnitt noch verstärkt: Die praktischen Anwendungen treten zurück hinter der reinen Mathematik und der angewandten Mathematik ohne unmittelbaren Bezug zur technischen Praxis. Der prozentuale Anteil der Vorträge zum Thema „Mechanische Technik mit (deutlich) mathematischer Komponente“ ging von beachtlichen 19 % im Zeitabschnitt III auf 9 %, und damit weniger als die Hälfte, im Zeitabschnitt IV zurück, der Anteil der Vorträge zur übrigen „Technik/Technologie“ von 7 % auf 1 %. Und von IV zu V erneut ein Absinken des prozentualen Anteils der Vorträge zur „Mechanischen Technik …“ auf weniger als die Hälfte!

VI. 1930-1934: Sektion für Mathematik, Physik und Chemie

In der Regel fanden jährlich nur noch zwei bis drei Sitzungen statt. In der Sektion dominierte sehr schnell wieder die Chemie. Daher wurde in der Isis-Hauptversammlung vom 29. November 1934 beschlossen, die umfassende Sektion für Mathematik, Physik und Chemie erneut aufzuteilen, und zwar in zweckmäßiger Weise: in eine Sektion allein für Chemie und in eine zweite für Mathematik und Physik. Zumindest aus der Vortragstätigkeit haben sich die Mathematiker vollkommen zurückgezogen!

VII. 1935-1939: Sektion für Mathematik und Physik

Es finden jährlich zwei Sitzungen statt. Die Mathematiker treten nicht mehr als Vortragende in Erscheinung. Am aktivsten ist der Physiker Horst Teichmann, der drei von vier Vorträgen bestreitet; er steht auch an der Spitze der Sektion. Als er Ende 1939 zur Reichspostdirektion nach Berlin abkommandiert wird, ist das ein herber Verlust für die Sektion.

Quellen:

- Sitzungsberichte und Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden der Jahre 1861 bis 1939
- „Mathematiker in der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis zu Dresden“. – In: Voss, Waltraud: Aus der Geschichte der Dresdner Mathematik. – Hamburg 2003; S. 83-123: speziell Tabelle 1: Vorsitzende und stellvertretende Vorsitzende der Isis von 1861 bis 1945, Tabelle 3: Vorstand und stellvertretender Vorstand der Sektion für reine und angewandte Mathematik der Isis von 1876 bis 1929 und der die Mathematik enthaltenden Sektion ab 1930

Die Faßmessung (Visierkunst) im späten Mittelalter und in der frühen Neuzeit

Menso Folkerts

Seit fast 2000 Jahren werden Fässer benutzt, um Flüssigkeiten zu transportieren und zu lagern. Im antiken Griechenland wurden Wein, Öl und andere flüssige Stoffe hauptsächlich in großen Tonkrügen aufbewahrt. Aus Holz gefertigte Fässer wurden schon von den Römern für die Lagerung und den Transport von Flüssigkeiten benutzt. Sie setzten sie sich bald durch, weil sie stabiler und leichter zu handhaben waren als Tongefäße. Im Mittelalter wurden Holzfässer nicht nur für Wein, Bier und andere Flüssigkeiten, sondern für praktisch alle Waren benutzt, und bis heute haben die Fässer ihre Bedeutung nicht verloren. Mit der zunehmenden Verwendung von Fässern entstand auch die Notwendigkeit, Verfahren zu entwickeln, um das Volumen eines Fasses zu berechnen. Schon früh entwickelte man Näherungsverfahren, um den Faßinhalt zu bestimmen. In der Antike und im Mittelalter wurden derartige Methoden im Rahmen der praktischen Geometrie zumeist rezeptmäßig gelehrt. Seit dem 14. Jahrhundert entstanden spezielle Verfahren zur Bestimmung des Faßvolumens, und die Faßmessung entwickelte sich zu einer eigenständigen Disziplin, die im allgemeinen von Rechenmeistern gelehrt und von Spezialisten, den sog. “Visierern”, ausgeübt wurde.

Das Aufblühen der Visierkunst im 14. und vor allem im 15. Jahrhundert hängt eng mit dem wirtschaftlichen Wandel im Hochmittelalter zusammen. Der aufstrebende Handel führte zu einer enormen Steigerung des Güterumschlags. Der Fernhandel gewann immer größere Bedeutung. Zum eigenen Schutz schlossen sich die Händler in Gilden oder Genossenschaften zusammen; im Ausland gründeten sie oft Handelskontore. In Oberdeutschland entstanden Handelsgesellschaften, an denen Kaufmannsfamilien finanziell beteiligt waren. Auch der Wein wurde in weit größerem Umfang vertrieben als zuvor. Zum Transport benutzte man fast ausschließlich Holzfässer. So ergab sich die Notwendigkeit, allgemein gültige und praktisch leicht anwendbare Verfahren zur Faßmessung zu ersinnen. Seit dem Ende des 14. Jahrhunderts stellte man in allen großen Handelsstädten nördlich der Alpen Visierer ein, die nicht nur Fässer und andere Körper vermaßen, sondern auch im Auftrag der Stadt die Maße und Gewichte kontrollierten. Am wichtigsten für den süddeutschen Weinhandel wurde Nürnberg, wo sich große Handelswege trafen. Der Weinhandel wurde dort durch Verordnungen geregelt, und es gab gesetzliche Bestimmungen für Visierer. Der wichtigste Handelsweg für den Weinvertrieb war im Mittelalter der Rhein, der das Elsaß und die mittelrheinischen Anbaugebiete mit Flandern verband. Der alles beherrschende Rheinweinmarkt war Köln. Die wichtigsten Handelspartner von Köln im Weinvertrieb waren rheinaufwärts Straßburg und rheinab die flämischen Handelsstädte. In Brügge, Gent, Dordrecht, Deventer und Antwerpen kamen Weinlieferungen über den Rhein mit Transporten aus Frankreich zusammen. Für die Kenntlichmachung des Faßinhalts wurden in Flandern spezielle Zahlzeichen benutzt, die aus vertikalen und horizontalen Strichen und Haken zusammengesetzt waren. Sie waren in der 2.

Hälfte des 13. Jahrhunderts bei englischen Zisterziensern in Gebrauch. Diese sogenannten "Mönchsziffern" begegnen uns in Visiertraktaten aus Brügge seit etwa 1400.

Aus der griechisch-römischen Antike und aus dem westlichen Mittelalter bis zum 14. Jahrhundert sind keine speziellen Texte zur Inhaltsbestimmung von Fässern bekannt. Vereinzelt wird dieses Thema in Abhandlungen zur Stereometrie behandelt. Die Methoden divergieren; generell nähert man das Faß durch Mittelbildung an Zylinder oder Kegelstümpfe an (13. Jh.: *Quadrans vetus*; 14. Jh.: Dominicus de Clavasio, *Practica geometriae*; Johannes de Muris, *De arte mensurandi*; 14. - 16. Jh.: italienische Texte zur praktischen Geometrie).

Im 14. und 15. Jahrhundert ersann man spezielle Verfahren und Hilfsmittel zur Bestimmung des Faßinhalts. Auch hier wurde das Faß durch einen Zylinder angenähert (Zylinderhöhe = Faßlänge, Zylindergrundfläche = gemittelte Schnittfläche des Fasses). Um das Rechnen möglichst entbehrlich zu machen, wurden mechanische Verfahren entwickelt, so daß auch Laien den Faßinhalt bestimmen konnten. Man erfand als Hilfsmittel die "Visierrute" (*virga visoria*). Es gab "Quadrat-" und "Kubikruten". Bei der Quadratrute benutzte man die Proportionalität des Zylinderinhalts zur Höhe und zum Quadrat des Durchmessers. Wenn die Rute korrekt geeicht war, mußte man zur Inhaltsbestimmung nur noch das Quadrat der Tiefenzahl und die Längenzahl miteinander multiplizieren. Zur weiteren Vereinfachung trug man auf der Tiefenskala nicht die Zahlen linear auf, sondern ihre Quadrate; dadurch konnte man sich das Quadrieren der Tiefenzahl ersparen.

Wir wissen nicht, wer sich diese Methoden ausgedacht hat. Jedenfalls müssen es Personen gewesen sein, die hinreichende Kenntnisse in der Stereometrie hatten und dieses Wissen "mechanisierten". Dadurch waren für die *Messung* des Faßvolumens keine Kenntnisse in der theoretischen Mathematik mehr nötig; allerdings benötigte man derartige Fähigkeiten jetzt für die *Herstellung* der Visierstäbe. Im Laufe der Zeit wurden die Visierstäbe modifiziert, ohne daß sich das Grundprinzip änderte. Die "geistige Arbeit" verlagerte sich also von der mathematischen Theorie auf die Herstellung dieser Geräte. Oft gibt es in den Visiertraktaten einen speziellen Teil über die Herstellung und einen anderen über den Gebrauch der Visierrute. Die Grundlagen, um den Faßinhalt mit Hilfe von Visierstäben zu bestimmen, lagen im 15. Jahrhundert fest; geändert wurden in der Folgezeit nur Details vor allem an den Skalen auf den Visierstäben.

Man unterschied schon im 15. Jahrhundert zwischen der Quadrat- und der Kubikrute. Die Quadratrute besteht im wesentlichen aus zwei Einteilungen. Mit der einen wird die Länge des Fasses gemessen; diese Skala ist linear unterteilt. Die andere dient zur Messung der Faßtiefe. Auf der Tiefenskala sind die *Quadrate* der Maßzahlen aufgetragen. Das Volumen ergibt sich dann als Produkt der Tiefen- und der Längenzahl. Zur Bestimmung der (mittleren) Faßtiefe maß man mit der Tiefenskala die Durchmesser der beiden Böden und die Spundtiefe und bestimmte dann mit einem mechanischen Hilfsmittel, dem "Medial", die mittlere Tiefe.

Für die korrekte Einteilung der Skalen auf der Quadratrute benutzte man ein zylindrisches Eichgefäß. Um die Nichtquadratzahlen auf der Tiefenskala zu markieren, verwendete man verschiedene Methoden (arithmetische oder geometrische Interpolationen; geometrische Konstruktionen; Quadratwurzeltabellen). Auch die Multiplikation der Längen- und der Tiefenzahl wurde bisweilen mechanisiert, indem man Tafeln mit doppeltem Eingang für die Längen und die Tiefen benutzte oder die "Wechselrute" anwandte. Bei ihr gab es nicht nur eine Längenskala, sondern mehrere Maßstäbe, von denen jede für eine bestimmte Tiefe sofort den Inhalt lieferte.

Anders als bei der Quadratrute, genügt bei der "Kubikrute" eine einzige Messung, um den Faßinhalt zu bestimmen. Dieser Vorteil wird aber durch den Nachteil erkauft, daß der einzelne Stab nur für eine bestimmte Faßform verwendbar ist. Die Kubikrute nützt die Tatsache aus, daß sich die Volumina ähnlicher Körper wie die dritten Potenzen linearer Größen verhalten, die in ihnen ähnlich liegen. Wenn man also nur den Inhalt von Fässern bestimmen will, die *gleichartig* geformt sind, so kann man eine spezielle Kubikrute benutzen, die auf diese Faßform geeicht ist. Man führt Kubikrute in das Spundloch ein und bestimmt mit ihr die Entfernung von der Zarge der Lagerdaube, also den diagonalen Abstand zum am weitesten entfernten Punkt am unteren Faßrand. Analog zur Quadratrute, werden auf der Skala der Kubikrute die dritten Wurzeln vermerkt. Um die Punkte zwischen den Kubikzahlen zu bestimmen, kann man eine Kubikwurzeltabelle benutzen, die Kubikwurzel selbst ausrechnen oder ein geometrisches Verfahren zur Bestimmung der 3. Wurzel wählen.

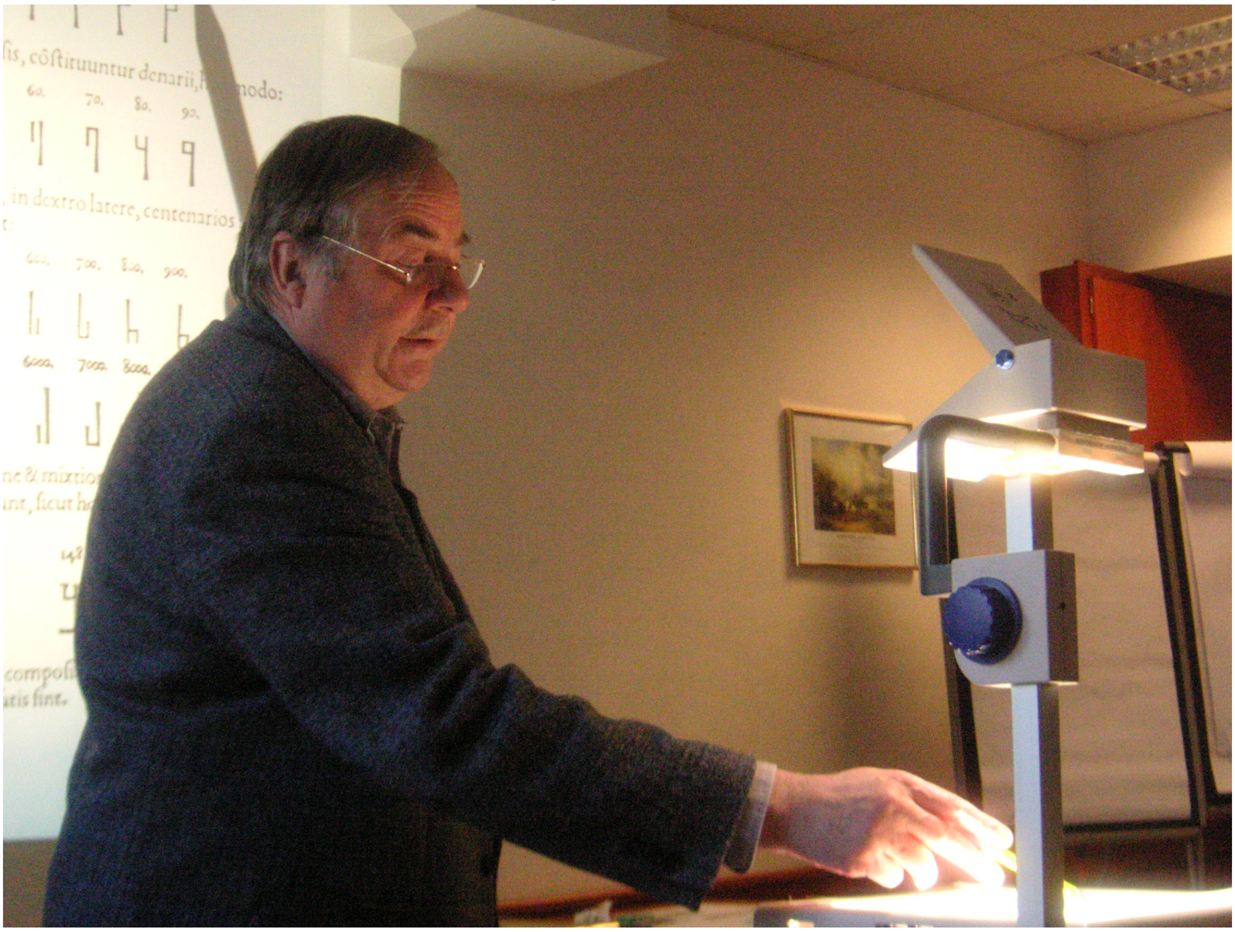
Die Kubikrute wird nicht in allen Visierbüchern erwähnt. Sie ist vermutlich in Österreich entwickelt worden. Sie war schon im 15. Jahrhundert bekannt und im 16. Jahrhundert weit verbreitet. Bekanntlich hat das Meßverfahren der österreichischen Visierer Johannes Kepler veranlaßt, sich mit den verwendeten Methoden zu beschäftigen, und die Erkenntnisse, die er gewann, trugen dazu bei, die Integralrechnung wissenschaftlich zu begründen.

Seit dem Anfang des 15. Jahrhunderts sind zahlreiche handschriftliche oder gedruckte Visiertraktate erhalten. Viele nennen keinen Verfasser. Die wichtigsten Schriften sind in der beigefügten Liste verzeichnet. Die ältesten schriftlichen Nachweise stammen aus dem Ende des 14. Jahrhunderts, aus Brügge und aus Nürnberg. Ausführliche Texte zur Praxis des Visierens sind erst aus dem 15. Jahrhundert erhalten. Der vielleicht älteste Spezialtext über die Faßmessung entstand zwischen 1410 und 1425. Sein Autor, Peter von Jülich, wirkte seit 1407 an der Universität Köln und war 1425 Rektor. Peter von Jülich war mit den an der Universität gelehrten mathematischen Texten ebenso vertraut wie mit der theologischen und philosophischen Literatur. Er bewertete die damals in Köln benutzten Visiermethoden kritisch und empfahl ein eigenes, besseres, Verfahren. Seine Abhandlung ist singulär und für seine Zeit außergewöhnlich. Im Jahre 1425 verfaßte vermutlich Johann Schindel, der in Wien studiert hatte, in Nürnberg eine ausführliche Darstellung der Faßmessung mit der Quadratrute. Sie erlangte im süddeutsch-österreichischen Raum eine relativ weite Verbreitung; der Prior

Georg Müstinger aus Klosterneuburg hat sie wohl bearbeitet, und sie fand Eingang in eine Sammlung von Visiertraktaten, die in Süddeutschland kursierten. Zu dieser Sammlung gehört auch die früheste bekannte Abhandlung über die Kubikrute, die offenbar in Österreich entstand. Diese Schriften waren in Wien, Melk, in anderen Orten Österreichs und auch in St. Emmeram bekannt, wo Fridericus Amann sie benutzte. Auch Johannes Regiomontanus besaß mehrere Visiertraktate; eine Handschrift aus seinem Besitz ist erhalten.

Im 15. und 16. Jahrhundert wurde die Faßmessung auch an Universitäten (Erfurt, Wien, Leipzig, Wittenberg) und an süddeutschen Klöstern (Tegernsee, St. Emmeram, Würzburg) behandelt. Seit der Mitte des 15. Jahrhunderts gibt es auch deutschsprachige Texte. Der älteste Druck erschien 1485 in Bamberg. Seit dem 16. Jahrhundert war die Faßmessung weitgehend eine Domäne der Rechenmeister. Ihre Abhandlungen zur Visierkunst erschienen separat oder im Zusammenhang mit ihren Rechenbüchern. Da die Rechenmeister die Mathematik kannten, die den Visiertraktaten zugrunde lag, konnten sie in ihren Schriften auch Verbesserungen oder Neuerungen anbieten. Obwohl die Bestimmung des Rauminhalts von Fässern immer auch im Rahmen der Stereometrie behandelt wurde, war die Faßmessung offenbar so wichtig, daß separate Publikationen noch bis ins 19. Jahrhundert nachweisbar sind.

Eine ausführliche Darstellung zur Geschichte der Faßmessung mit Hinweis auf weiterführende Literatur findet man in M. Folkerts: “Die Faßmessung (Visierkunst) im späten Mittelalter und in der frühen Neuzeit”. In: Rainer Gebhardt (Hrsg.): Visier- und Rechenbücher der frühen Neuzeit. Annaberg-Buchholz 2008, S. 1-36.



Autoren von Visiertraktaten

Zeit	Autor	Ort	Beruf	Sprache	Handschr. / Druck	Bemerkungen
vor 1400		Damme (Brügge)		niederl.	Handschr.	
vor 1400	Ulman Stromer	Nürnberg	Kaufmann	dt.	Handschr.	
um 1420	Peter von Jülich	Köln, Universität	Magister, Rektor	lat.	Handschr.	wiss. Abhandlung mit krit. Bemerkungen
1425-1450	*Collectiones ad virgas planam et scriptam*	Süddt./Österreich		lat.	Handschr.	Sammlung von Visiertraktaten
1425	Johann Schindel?	Nürnberg	Arzt, Astronom	lat.	Handschr.	
1431	Georg Müstinger	Klosterneuburg	Prior	lat.	Handschr.	
15. Jh.	Nikolaus von Freiberg	Erfurt, Universität		lat.	Handschr.	
	Jo. Langheym	Erfurt, Universität		lat.	Handschr.	
	Gosswin Kempchin	Erfurt, Universität		lat.	Handschr.	
um 1445	Ludolf Borchtorp	Erfurt, Universität		lat.	Handschr.	
ab 1496	Johann Schöner	Erfurt, Universität	Astronom	dt. / lat.	Handschr.	
15. Jh.	Matthias Rem	Wien, Universität		lat.	Handschr.	
nach 1457	Paul Eck	Wien, Universität	Astrologe, Alchemist	lat.	Handschr.	
um 1510	Johann Volmar	Leipzig/Wittenberg, Univ.	Professor	lat.	Handschr.	
um 1600	Johann Praetorius	Leipzig/Wittenberg, Univ.	Professor	lat.	Handschr.	
um 1450	Theodericus Ruffi	Passau	Astronom	lat.	Handschr.	
um 1457	Joh. Keck	Tegernsee		lat.	Handschr.	
1464	Fridericus Amann	St. Emmeram		lat.	Handschr.	
Ende 15. Jh.	Johannes Trithemius	Würzburg		lat.	Handschr.	

Zeit	Autor	Ort	Beruf	Sprache	Handschr. / Druck	Bemerkungen
1470	Johannes Heyse	Frankfurt?	Visierer	lat.	Handschr.	Kommentar zu Heyses Traktat
1485	Bynzcendorffer	Bamberg?		dt.	Druck	erste gedruckte Darstellung
nach 1492	anonym	bei Amiens		lat.	Handschr.	Übersetzung aus dem Frz. oder Niederländ.
um 1500	Marx Gyerhose	Augsburg		dt.	Handschr.	
um 1510	Konrad Heinfogel	Nürnberg	Mathematiker	dt.	Handschr.	Besitzer: Georg Hartmann
um 1510	„Apuleius“	"Venedig"		lat.	Handschr.	gewidmet an Symmachus, Fürst von Candia
1515ff.	Jakob Köbel	Oppenheim	Rechenmeister	dt.	Druck	
1518ff.	Heinrich Schreyber (Grammateus)	Erfurt, Wien	Mathematiker	lat. / dt.	Druck	
1531	Ulrich Kern	Freising	Rechenmeister	dt.	Druck	Schüler von Christoph Rudolff
1531, 1543	Johann Frey			dt.	Druck	
1533ff.	Erhart Helm	Frankfurt	Mathematiker, Astronom	dt.	Druck	angehängt an Ries' 2. Rechenbuch
1537	Gielis Van den Hoecke	Antwerpen		niederl.	Druck	
1544	Burchard Mithob	Erfurt, Marburg	Arzt, Astronom	lat.	Druck	
1550	Adam Ries	Annaberg	Rechenmeister	dt.	Druck	3. Rechenbuch
	Adam Ries	Annaberg	Rechenmeister	dt.	Handschr.	*Buchlein nachm Triangel zu visieren*
1552	Conrad Marchtaller	Ulm	Rechenmeister	dt.	Handschr.	
1557ff.	Andreas Helmreich	Halle	Rechenmeister	dt.	Druck	
1560	Johann Neydlein	Würzburg	Rechenmeister ?	dt.	Handschr.	
1564	Georg Walpricht		Rechenmeister?		Handschr.	

Zeit	Autor	Ort	Beruf	Sprache	Handschr. / Druck	Bemerkungen
1567	Willem Raets	Antwerpen		niederl.	Druck	
1567, 1600	Gervais de la Court	Lyon		frz.	Druck	
1570	Jacob Sennft	Lauingen	Rechenmeister	dt.	Handschr.	
1577	Johannes Preu	Neumarkt	Rechenmeister	lat.	Handschr.	
1578	Simon Kofferl	Nürnberg	Rechenmeister	dt.	Handschr.	
1578	Paul Heltmann	Amberg	Visierer	dt.	Handschr.	
1580	Michiel Coignet	Antwerpen	Rechenmeister	niederl.	Druck	
1589ff.	Simon Jacob	Frankfurt	Rechenmeister	dt.	Druck	Von Kern abhängig. Posthum erschienen
1598	Jakob von Ramingen	Stuttgart	Schreiber und Mathematiker	dt.	Druck	
16. Jh.	Johann Conrad Tachler		Rechenmeister	lat.	Handschr.	
1600	Martin Van den Dijcke	Antwerpen	Rechenmeister	niederl.	Druck	
1603ff.	Johann Hartmann Beyer	Frankfurt	Arzt, Mathematiker	dt. / lat.	Druck	
1615, 1616	Johannes Kepler	Linz	Astronom	lat., dt.	Druck	Beziehungen zu Beyer
1615, 1655	Georg Galgemair	Donauwörth	Pfarrer	dt.	Druck	
1616	Melchior Öchssner	Naumburg	Rechenmeister	dt.	Druck	
1618	Johann Heinrich Muckensturm	Stein bei Schaffhausen	Schulmeister	dt.	Druck	
1633	William Oughtred	Albury	Mathematiker, Astronom	engl.	Druck	
1663	Wolfgang Jakob Prexendörffer	Nürnberg		dt.	Druck	
1666	Georg Wendler	Burglengenfeld	Rechenmeister	dt.	Handschr.	
1669ff.	Michael Dary	London		engl.	Druck	
1675ff.	Georg Friedrich Meyer	Basel	Feldmesser, Topograph, Kupferstecher	dt.	Druck	
1676ff.	John Mayne			engl.	Druck	

Zeit	Autor	Ort	Beruf	Sprache	Handschr. / Druck	Bemerkungen
1677	Philipp Jacob Ulmann	Mannheim	Quartiermeister und Philo-Mathematicus	dt.	Druck	
1684	Georg Enle		Rechenmeister?	dt.	Handschr.	
1684ff.	Thomas Everard	London		engl.	Druck	
1691	Johann Vulpius	Groß-Corbetha	Notar und Schulmeister	dt.	Druck	
1707ff.	John Ward	London	Mathematiker	engl.	Druck	
1724	Peter Naghten			engl.	Handschr.	
1754ff.	William Symons	London	Steuerbeamter	engl.	Druck	
1790	Friedrich Gottlieb von Busse	Dessau, Freiberg	Professor	dt.	Druck	
1794ff.	Johann Leonhard Spaeth	Altdorf	Professor	dt.	Druck	
1810	Johann Friedrich Benzenberg	Düsseldorf	Astronom	dt.	Druck	
1824	Jakob Struve	Altona	Gymnasialdirektor	dt.	Druck	
1832	Christian Friedrich Conrad Pacht	Hamburg	Weinhändler	dt.	Druck	
1833	Leopold Karl Bleibtreu	Karlsruhe	Professor	dt.	Druck	

DIE PROSTHAPHÄRESE UND JOHANNES WERNER (1468 - 1528)

- Vorläufer der Logarithmen

$$\sin a \bullet \sin c = \frac{1}{2}\{\sin((90^\circ - a) + c) - \sin((90^\circ - c) - a)\}$$

(für a+c< 90°)

Tagungs-Zusammenfassung eines umfangreicheren Artikels von

Dr. Klaus Kühn

1 Titel - Danksagungen/Widmungen

Der Autor widmet die Gesamt-Arbeit Herrn Professor Dr. Menso Folkerts für seine stets freundliche Unterstützung der Sammlergemeinde historischer Rechenhilfsmittel und bedankt sich bei ihm besonders für den Hinweis auf die wichtigste Literaturstelle zur Prosthaphärese [Björnbo].

Frau Barbara Häberlin, Herrn Stephan Drechsler und Herrn Stephan Weiss sei für die kritischen Kommentare und Anregungen zur ursprünglichen Fassung der Arbeit gedankt.

Frau Magister Dr. Gerlinde Faustmann hat dankenswerterweise auf die Arbeiten von Jost Bürgi zum Beweis der prosthaphäretischen Formel hingewiesen.

2 Abstract

Johannes Werner (1468-1528), Pfarrer und Astronom, verbrachte die meiste Zeit seines Lebens in Nürnberg und ist derjenige, der um 1513 die prosthaphäretische Formel - der Begriff kommt aus dem Griechischen und steht für Addition und Subtraktion (siehe Formel im Titel) - in einem Manuskript festhielt. Besonders die gründliche Untersuchung von Axel Anthon Björnbo (1874-1911) [Björnbo] legt dazu inzwischen zahlreiche Hinweise vor. Ob Werner deren Eignung als Rechenmethode für die Multiplikation großer Zahlen bewusst war, lässt sich nicht mit Bestimmtheit sagen, liegt aber nahe. Sicher ist, dass es weder der Astronom Tycho Brahe (1546-1601) noch sein Schüler Paul Wittich (1555?-1587) waren, die diese Formel entdeckt hatten. Tycho Brahe war allerdings einer derjenigen, der die Prosthaphärese zu seiner Zeit - zwischen 1580 und 1601 - sehr intensiv zu (astronomischen) Berechnungen einsetzte.

In diesem Aufsatz werden die Hintergründe zur Darstellung und "Wiederentdeckung" der Prosthaphärese, deren Anwendungsbereiche und ein mathematisch-geometrischer Beweis der Formel auf Basis der relevanten Literatur aufgezeichnet.

English

Most of his life Johannes Werner (1468-1528) lived as priest and astronomer in Nuremberg, Germany. He firstly published the prosthapheretic (greek for addition and subtraction) formula ca. 1513 in a manuscript. Mainly the very intensive research by Axel Anthon Björnbo (1874-1911) [Björnbo] is supporting this. It is not exactly known if Werner was aware at that time of the advantageous use of the prosthapheretic formula for calculations with huge numbers. But it can be assumed, though. Meanwhile strong evidence shows, that neither the astronomer Tycho Brahe (1546-1601) nor his student Paul Wittich (1555?-1587) have invented the prosthapheretic formula. Tycho Brahe, though, was among the first, who - from 1580 to 1601 - intensively took advantage of the prosthapheretic formula for his astronomical calculations.

This paper reviews the historical background for the formulation and "reinvention" of the "prosthapheresis". On the basis of the relevant literature it gives some practical examples as well as the mathematical-geometrical proof of the formula.

3 Einleitung

Seit jeher versuchen die Menschen, Methoden zu finden, um sich Rechenvorgänge zu erleichtern. Dabei spielte es keine Rolle, wie schwierig die Rechnungen waren - Ziel war es immer, den erforderlichen Rechenaufwand zu verringern, ohne an Genauigkeit einzubüßen.

Besonders in der Astronomie, aus der sich die Mathematik erst entwickelt hat, waren (und sind) Berechnungen mit großen Zahlen erforderlich, deren Lösungen einen sehr hohen Aufwand erforderten. Dies betraf auch die Grundrechenarten wie das Multiplizieren, das möglichst vereinfacht werden sollte, z.B., indem das Multiplizieren auf eine Addition zurückgeführt werden konnte.

Das bekannteste Beispiel für diesen Weg sind die Logarithmen, die 1614 von John Napier (1550-1617) in einer ersten Logarithmentafel (Mirifici Canonis Logarithmorum Descriptio) in Edinburgh veröffentlicht wurden. Doch was war bis dahin? Wie haben die Astronomen ohne Kenntnis der Logarithmen gerechnet?

Sie haben zuvor etwa hundert Jahre lang mit der Prosthaphärese (engl. prosthaphaeresis), auch Postaphärese oder Prostaphairesis geschrieben, gearbeitet.

Immer wieder tauchen in der Literatur zum Thema Prosthaphärese falsche Zuordnungen zu deren Ursprung auf. Meist wird die Entdeckung dem Astronomen Tycho Brahe oder seinem Schüler Paul Wittich oder auch Christopher Clavius zugeschrieben. Brian Borchers hat in seinem Artikel im JOS [Borchers] eine kurze Übersicht über die Prosthaphärese und deren Geschichte gegeben und dabei auf deren Ursprung bei Johannes Werner hingewiesen. Borchers' Artikel stellt die Ausgangsbasis für diese Arbeit dar, in der die Hintergründe zur prosthaphäretischen Formel und zur Prosthaphärese aus geschichtlicher und mathematischer Sicht verdeutlicht werden.

Der Begriff "Prosthaphärese" - man füge hinzu und nehme weg - wird in der Astronomie auch vor einem anderen Hintergrund verwendet; so spricht man z.B. von der prosthaphäresis im Zusammenhang mit äquinoctiorum; eccentrititatis; latitudinis; nodi pro eclipsius; orbis; tychonis; nodorum - "Der wahre Knoten bewegt sich nicht gleichmäßig fort, er läuft langsamer, wenn die Sonne sich in der Nähe der Knoten befindet, schneller, wenn die Sonne sich von ihnen entfernt." [Bialas]. Dieser rein astronomische Begriff ist nicht Bestandteil dieser Arbeit.

Als Entdecker der Prosthaphärese ist Johannes Werner (1468 - 1528) zu sehen. Die wesentlichen Erkenntnisse zur Prosthaphärese des Johannes Werner stammen aus einer Arbeit von Axel Anthon Björnbo [Björnbo]. Als Schüler des Wissenschaftshistorikers Anton von Braunmühl nahm er dessen Hinweis auf einige Ungereimtheiten auf und ging 1901 nach Rom, um dort das entsprechende antike Material in der vatikanischen Bibliothek zu sichten und zu studieren. Besonderes Interesse fand bei ihm eine Handschrift ohne Datierungen und Figuren mit dem Titel: I. *Joannis Verneri Norimbergensis de triangulis sphaericis* in vier Büchern sowie II. *Joannis Verneri Norimbergensis de meteoroscopiis* in sechs Büchern. Königin Christina hat diese Handschrift des Johannes Werner, die inzwischen in den Besitz des Jakob Christmann (1554 - 1613) gelangt war, wahrscheinlich erst zwischen 1654 und 1689 erhalten. Nach ihrem Tode (1689) lag diese Handschrift (Codex Reginensis latinus 1259, d.h. Nr. 1259 der Regina Sveciae-Sammlung) fast unbeachtet im Vatikan. Bei den weiteren Untersuchungen kristallisierte sich heraus, dass Werner zwar der Verfasser bzw. Autor der beiden handschriftlichen Teile war, er aber nicht deren Schreiber war. Als Schreiber identifizierte Björnbo einen mathematisch nicht versierten professionellen Schönschreiber jener Zeit [Björnbo; Seiten 140, 141, 171].

Der Text des ersten vollständigen Teiles der Handschrift (de triangulis sphaericis) findet sich bei Björnbo [Björnbo; Kapitel 1] auf den Seiten 1 - 133. Daran anschliessend hat Björnbo seine Erkenntnisse zu dieser Handschrift sowohl in den "Herausgeberbemerkungen" [Björnbo; Kapitel 3] wie auch in der "Textgeschichte" [Björnbo; Kapitel 4] in einem sehr ausführlichen und detaillierten Rechercheberict dargestellt.

Auf die umfangreichen Inhalte der Handschrift wird in diesem Artikel nicht näher eingegangen. Es soll aber nicht unerwähnt bleiben, dass als Neuerung auch die Einteilung/Gliederung der Bücher über die Kugeldreiecke zu sehen ist [Björnbo; Kapitel 1 und Seite 163] :

1. **Klarlegung der verschiedenen möglichen Dreiecksformen (Buch I)**

   Diskussion des sphärischen Dreiecks

2. **Auflösungen vom rechtwinkligen Dreieck (Buch II)**

   1. Die sphärisch-trigonometrischen Grundformeln

   2. Die Auflösung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks

3. **Auflösungen des schiefwinkligen Dreiecks (Buch III und VI)**

   1. Die Auflösung des schiefwinkligen Dreiecks durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke (III)

   2. Die Auflösung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks durch den prosthaphäretisch umgebildeten Cosinussatz (IV)

Die oben angeführten drei Kategorien gliederten auch den Inhalt des *Opus Palatinum* des Rheticus von 1596, sofern es sich dort um sphärische Dreiecke handelte.

Im 5. Kapitel hat [Björnbo; ab Seite 177] tabellarisch die Struktur der Inhalte der einzelnen Bücher dargelegt und übersichtlich zusammengefasst.

Somit stellen die Erkenntnisse von Björnbo eine sehr gut fundierte Basis für die weiteren Ausführungen dar, die zum einen die Vermutungen von Anton von Braunmühl [von Braunmühl 1897] zur Urheberschaft der prosthaphäretischen Formel bestätigten, zum anderen durch neuere Erkenntnisse von David A. King [King] und Victor E. Thoren [Thoren] aktualisiert werden.

4 Zusammenfassung

1901 zog Axel Anthon Björnbo in den Vatikan, um sich mit dem handgeschriebenen Gesamtwerk "Joannis Verneri Norimbergensis de triangulis sphaericis" in vier Büchern und "Joannis Verneri Norimbergensis de meteoroscopiis" in sechs Büchern zu beschäftigen. Dabei stellte er fest, dass dieses Gesamtwerk (eine Abschrift) durch einen mathematisch ungebildeten Schönschreiber von einer - wahrscheinlich schlecht leserlichen - Vorlage abgeschrieben worden war.

Sicher ist, dass es sich nicht um die Handschrift von Werner handelt. Allerdings bestätigte der Inhalt dieses Werkes die bereits vorher geäußerte Vermutung (v. Braunmühl, Heilbronner, Montuela, Eneström), dass Johannes Werner der Vater der Prosthaphärese ist. vB141 Fußnote 1

Werner ist als Erfinder der prosthaphäretischen Formel identifiziert ! Er hat schon recht früh (1502) daran gearbeitet. Allerdings sind seine Werke nie veröffentlicht worden, sondern als Handschriften (z.T. ungeordnet, fehlerbehaftet, unvollständig, unleserlich) in die Hände anderer gelangt (z.B. Rheticus).

Wahrscheinlich hat sich Werner bei seinen Arbeiten an den in Nürnberg entstandenen (und vorliegenden) Arbeiten des Regiomontan orientiert, ohne ihn jedoch zu zitieren. Björnbo nimmt an, dass all das, was Regiomontan zusammengetragen hat, auch Werner bereits bekannt war. B172

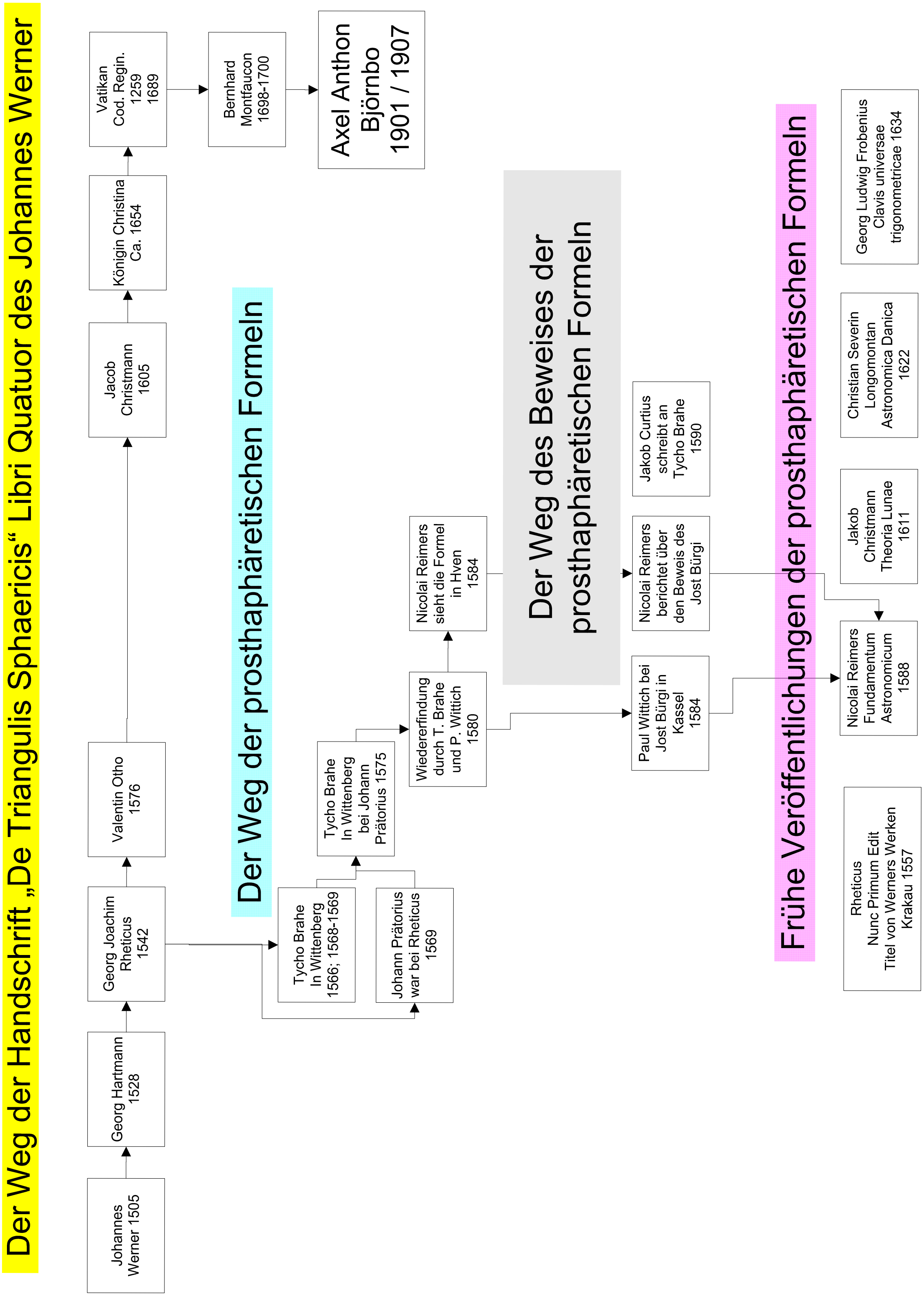
"Schon bei Ibn Jûnos (950 - 1009) - Herausgeber der hakimitischen Tafeln - fanden wir eine Anwendung der zweiten dieser Formeln und zweifeln nicht, dass sie die Araber auf verschiedene Weise anzuwenden wußten, obwohl es uns nicht möglich ist, dazu einen direkten Beweis für diese Ansicht zu erbringen.

Keinesfalls aber hat Werner von ihnen die Kenntnis der Methode überkommen, da sie sich in den damals bekannten arabischen Schriften nirgends findet. Somit müssen wir ihn wohl als selbständigen Erfinder der nachmals im Abendlande so viel gebrauchten Methode ansehen, wenn es uns nachzuweisen gelingt, dass er sich ihrer schon in seinen fünf Büchern über Dreiecke bediente." (vB136; vB63) - Diese Aussage stimmt so nicht, wie D.A. King zeigte.

Literatur beim Verfasser

Dr. Klaus Kühn
D-82239 Alling
kk@IASim.de

5 Der Weg der Handschrift der Triangulis Sphaericis Libri Quatuor



Geometrical Probability in the Czech Lands at the Turn of the 19th and 20th Centuries

MAGDALENA HYKŠOVÁ, PRAGUE

The paper is devoted to the history of geometric probability at the turn of the 19th and 20th centuries, above all to the contributions of Czech mathematicians Emanuel Czuber and Bohuslav Hostinský. Emanuel Czuber published the first monograph on geometric probability at all (in German) and investigated this topic also in other works; Bohuslav Hostinský published the first monograph in the Czech language and several other scientific treatises. Popularizing contributions and textbooks are discussed, too.

1 Outline of the Early History

Recall that geometric probability is a substantial part of stochastics, which investigates and characterizes uncertain (random) events proceeding by interaction of various objects in space. Similarly as the standard probability theory, it originated as a tool of spatial games understanding and for a detailed elaboration of the rules ensuring their fairness. The roots of geometric probability date back to the middle of the 17th century: its first known problem is contained in one of Newton's unpublished manuscripts (Newton, 1967) written between the years 1664 and 1666. Newton considers a game in which a ball falls perpendicularly upon the centre of a horizontal circle divided into two sectors A, B with areas in the proportion $A_A : A_B = 2 : \sqrt{5}$; player I wins an amount of a and b respectively, if the ball falls into the sector A and B respectively. Newton asserts that the "hopes" (an expected payoff) of player I are expressed by the ratio $\frac{2a + b\sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$. Two new and at that time unexpected features appear in Newton's solution: the counting of events is replaced by area measurement and irrational numbers enter the probability calculations.

However, geometric probability acquired a wide attention only after George-Louis Leclerc, Comte de Buffon, presented two such problems at the session of French Académie Royal des Sciences in 1733. In both cases, small objects (bar, coin) have been thrown on a plank or parquet floor and the probabilities of their hitting a joint were calculated (*le jeu de franc-carreau, Buffon needle* (Buffon, 1777)).[1] As it can be expected, the probabilities in question depend on the objects characteristics like bar length, coin and parquet sizes, distance of joints etc. With the exception of rather troublesome possibility of estimating π suggested by Laplace (1814), no practical applications of these results were proposed for more than a century. Nevertheless, various similar mathematical problems have been devised and published as examples and exercises in textbooks (Todhunter, 1857, 1865) and journals (in particular in *Educational Times* founded 1847 as a journal for teachers and students). Among their authors we can find important mathematicians like J. J. Sylvester, M. W. Crofton, T. A. Hirst and A. Cayley. Approxi-

[1] Recall that the classical solution of the Buffon's needle problem concerns the situation in which a rod (or a needle) is tossed in the air and then falls on a parquet floor (or a sheet of paper) divided by parallel lines at constant distances l greater than the length d of the rod, and the probability that the rod hits some line is calculated with the result $2l/\pi d$.

mately at the same time but almost independently, geometric probability was also studied by French mathematicians G. Lamé, J. Bertrand and J.-É. Barbier (Seneta et al., 2001).

On the other hand, practical procedures were proposed to the description of objects scattered in space and planes, which intuitively and implicitly used the approaches of geometric probability without knowing about its existence. A. Delesse proposed to estimate the volume fraction of object components from their planar sections (Delesse, 1847), and A. K. Rosiwal solved the same problem by examining linear sections (Rosiwal, 1898). Both methods were very useful in material science, geology and geography, and Rosiwal's method simplified also the estimation of areas in maps and plans. The last contributions of such a type appeared as late as at the beginning of 1930's (Glagolev, 1933; Thompson, 1932). At the turn of the 19th and 20th centuries, methods for estimation of the mean grain size as the basic characteristic of technical materials were proposed. They were also based on an intuitive and unfortunately incorrect understanding of the features observable in planar sections, and form a base of various standards and technical norms all over the world up to now (ASTM, 1996).

The above mentioned intuitive or even confusing development of practical applications is rather curious, because already Barbier's paper (Barbier, 1860) contained the proposal of an inversion of the games problem making possible simple estimation of object properties by counting their random interactions. Since the probability P of the interaction of objects can be calculated as a function of their geometric properties, the approximate knowledge of P and of some suitably selected characteristic of one object (a *probe* of known size) can be used to estimate some characteristics of the other object. For example in the needle problem, the probability that the thrown bar meets a joint is proportional to the ratio l/d of the bar length l and parallel joints distance d. Hence counting intersections in repeated throws of needles of known length gives an estimate of the joint distance. Similarly Barbier proposed to estimate the length of an arbitrary fibre in space by counting its intersections with a known surface or, vice versa, to estimate the area of arbitrary surface in space by counting its intersections with a known fibre etc.[2] In these applications of geometric probability, the examination of objects consists in artificially realized and then observed random interactions of known (probes) and studied (sample, specimen etc.) objects, and randomness becomes an important tool of examination.

The systematic mathematical development of geometric probability started by Crofton (1868) continued in the 20th century in the works of W. Blaschke (1955), H. Hadwiger (1957) and in particular L. A. Santaló (1976). In 1961, the *International Society for Stereology* was founded, establishing a branch of science dealing with the description of objects scattered in space by methods of geometric probability. Briefly, the main purpose of stereology is to extract quantitative information on spatial objects (e.g., the percentual composition of a rock, the average volume of the crystalline mineral grains, the area of grain boundary surfaces per unit volume of rock, the length of grain edges per unit volume of rock etc.; similarly it is used for information on cells in a tissue, tumours or lesions in organs, or – at a larger scale – vessels, plants, rivers etc.) from probes of a lower dimension (sections or microscope images, linear or point probes). In fact, the relation between geometric probability and stereology is very similar to the relation between the theory of probability (in the common sense) and mathematical statistics. The microscope image or a probe is a sample of the material of interest. The goal of stereology is to draw

[2] More details about this interesting but seemingly unknown fact can be found in (Saxl, Ilucová, Kalousová, 2008).

statistical inferences about parameters of the material from observations acquired from its sample. Obviously also the formation and analysis of all computer generated images is closely related to the approaches typical for geometric probability, namely the continuous objects and images are randomly transformed to a system of point-like glowing centres.

Although we are surrounded by probability events of this sort, the development of the theory of geometric probability proceeded even slower than the development of "classical" probability theory dealing with events that can be described by discrete quantities. As far as the Czech lands are considered (see also Mačák, 2005), the most important scientific contributions were due to Emanuel Czuber and Bohuslav Hostinský.

2 Emanuel Czuber (1851 – 1925)

Emanuel Czuber started to investigate geometric probability already as the secondary school teacher in Prague and returned to it also later as the professor of the German Technical University in Brno (1886–1891) and Technical University in Vienna (1891–1923). In the year 1884 he published a treatise where he extended Crofton's results concerning lines in a plane to lines and planes in space, and showed possible applications of the proved general theorems (Czuber, 1884a).

In the same year he published the first monograph summarizing the state of the art of geometric probability of that time and containing also new results and generalizations, as well as a detailed exposition of basic concepts and many exercises and applications (Czuber, 1884b). In the introduction Czuber briefly recalled the history of this theory from Buffon over Laplace (1814) up to a more intensive development in the second half of the 19th century. Also particular theorems and problems stated in the book are supplemented with remarks about their authors. Besides other names, Czuber cites the above mentioned British and French mathematicians; a special recognition is attributed to M. W. Crofton, who derived the key theorems concerning sets of points and straight lines in a plane and briefly outlined possible generalizations to space (Crofton, 1868). The first and more extensive part of the monograph deals with geometric probability itself. Czuber starts with an explanation of the transition from classical to geometric probability, where the numbers of convenient and all cases are replaced by appropriate measures of corresponding sets, represented by n-tuple integrals. First he derives these measures for sets of points contained in curves, surfaces, spatial regions and in general in regions of $\mathfrak{R}^n$ (length, area, volume and content of an n-dimensional region, respectively), then he studies sets of straight lines in a plane, sets of straight lines in space and sets of planes in space, and investigates their interactions with other geometric objects. In all cases, theoretical results are explained in detail and immediately followed by practical exercises supplemented with historical notes. The second part (61 of total 244 pages) of the monograph contains the original exposition of geometric mean values.

Czuber returned to the theory of geometric probability also in his later publications, especially in the extensive treatise (Czuber, 1899) devoted to the history of probability theory and its applications. A separate chapter on geometric probability is also contained in the textbook on probability theory and its applications to life insurance (Czuber, 1903). Its third edition from the year 1914 devotes almost 40 pages to geometric probability. Theoretical exposition is again combined with historical notes and solved problems; from recent literature, Czuber cites e.g. the book (Bachelier, 1912). The end of the chapter contains an interesting discussion of Bertrand's paradox about a random chord of a circle (Bertrand, 1889), whose main motivation was to turn the attention to the exact foundation of the theory of geometric probability. In the mentioned third edition of (Czuber, 1903) Czuber indeed shows that the measures of sets of various geometric objects, that were originally introduced on an intuitive basis (including Czuber 1884b), satisfy the demand for invariance under translation and rotation, as it was first suggested by É. Cartan and H. Poincaré in 1896 (independently of each other).

3 Bohuslav Hostinský (1884 – 1951)

Bohuslav Hostinský, a privat associate professor for higher mathematics at the Philosophical Faculty of Charles University in Prague (from 1912), later a full professor of theoretical physics at the Faculty of Science of Masaryk University in Brno (from 1920), started to investigate geometric probability towards the end of the World War I. The first contribution concerned Buffon's needle problem: Hostinský (1917, 1920) criticized the traditional solution for being based on an unrealistic assumption that parallels are drawn on an unbounded board and the probability that the needle midpoint hits a region of a given area is proportional to this area and independent of the position of the region. Hostinský argued that no real experiment could satisfy such an assumption, and replaced it by a more realistic one: parallels are drawn on a square table board and the experiment requires the needle to fall on it; now the probability that the needle midpoint hits a square of a given area nearby the edge of the table is lower than the probability that it hits a square of the same area nearby the middle. To solve this problem, Hostinský generalized Poincaré's method of arbitrary functions; he expressed the probability that the needle midpoint falls into a region M inside a square C (the table), as an integral $\iint_M \varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, where $\varphi(x,y)$ is an arbitrary function with continuous partial derivatives in C such that for some constant K it is: $\left|\varphi'_x(x,y)\right| < K$, $\left|\varphi'_y(x,y)\right| < K$. In a limit case where the number of parallels increases to infinity, Hostinský's solution corresponds to the original result of Buffon.

Hostinský discussed the French variant of this paper (Hostinský, 1920) in the correspondence with M. Fréchet, which could have awoken Fréchet's interest in probability theory (Havlová, Mazliak, Šišma, 2005). Five years later Hostinský published the booklet written in the French language (Hostinský, 1925), in which he extended the contributions of Crofton (1868) and Czuber (1884a, b) for surfaces in space. In the next year he published the first (and for a long time the only one) Czech book on geometric probability (Hostinský, 1926). He proceeds from sets of points over sets of lines in plane up to sets of lines and planes in space and studies their interactions with curves and surfaces. Hostinský also discusses the mentioned Bertrand's paradox and the influence of experimental realizations on solutions of various problems (including the generalization of Poincaré's method of arbitrary functions mentioned above). Let us remark that measures of particular sets are explicitly introduced on the basis of the invariance under translation and rotation. Last but not least, worth mentioning is also the treatise (Hostinský, 1929). Toward the end of the discussed period, Hostinský turned his attention to Markov chains, which is perhaps the most important field of his scientific interest that brought him a wide recognition.

4 Mathematics Education

Already in the 1880's, various popularizing papers were published by Augustin Pánek in the journal *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky* (ČPMF; *Journal for Cultivation of Mathematics and Physics*) (Pánek, 1881, 1882, 1884, 1886, 1891a,b). Their aim was purely educational, namely to introduce the young branch of science to students and other interested people; each of these short papers deals with some specific problem or exercise related to geometric probability. At the turn of the 19th and 20th centuries, geometric probability was even included in textbooks for secondary schools (Hromádko, Strnad, 1902; Sommer, Hübner, 1905). It seems that already at that time mathematics teachers were aware of the importance of geometric probability for education. Since then, this science became even far more important. Nowadays it represents a tool that is substantial for the life sciences (anatomy, histology, neuroscience, pathology, plant biology, soil science, veterinary science etc.), geology (mineralogy, petroleum geology), materials science and engineering (metals, composites, concrete, ceramics), industry (food science, production defects, machine component damage) and clinical medicine (dermatology, nephrology, oncology, cardiology); it applies to many different materials, specimen preparations, modalities of microscopy, non-microscopical imagery and spatial data etc., and it is therefore an inseparable part of our life. Not only is it desirable for students to acquire at least an awareness of its basic principles; geometric probability can also serve as an outstanding tool for the motivation for mathematics education, since it shows how important and interesting mathematics is and that it accompanies us everywhere.

Paradoxically, geometric probability has completely disappeared from the school education, and it is highly desirable to bring it back. And understanding of the history can help to achieve this aim.

References

ASTM E 112 (1996): *Standard Methods for Determining Average Grain Size*. ASTM.

Bachelier, L. (1912): *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris.

Barbier, J.-É. (1860): *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*. Journal des mathématiques pures et appliquées, 2ième ser., 5, 273–286.

Bertrand, J. (1889): *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris.

Blaschke, W. (1955): *Vorlesungen über Integralgeometrie*. Deutsch. Verlag. Wiss., Berlin.

Buffon, G.-L. Leclerc, Comte de (1777): *Essai d'arithmétique morale. Supplément a l'Histoire Naturelle.* Supp. IV. De l'Imprimerie Royale, Paris 1777, 95–105.

Crofton, M. W. (1868): *On the Theory of Local Probability*. Philosophical Trans. A 158, 181–199.

Czuber, E. (1884a): *Zur Theorie der Geometrischen Wahrscheinlichkeiten*. Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien 90, 719–742.

Czuber, E. (1884b): *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*. Teubner, Leipzig [French translation: H. Schuermans, Paris 1902].

Czuber, E. (1899): *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen*. In: Jahresbericht der DMV, 1–271.

Czuber, E. (1903): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung*. Teubner, Leipzig [2nd edition: 1908 (vol. 1) and 1910 (vol. 2), 3rd edition: 1914].

Delesse, A. (1847): *Procédé mécanique pour determiner la composition des roches*. C. R. Acad. Sci. 25, p. 544.

Glagolev, A. A. (1933): *On the geometrical methods of quantitative mineralogical analysis of rocks*. Trans. Inst. Econ. Min., Moskva 59, 1–47.

Hadwiger, H. (1957): *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Springer Verlag, Berlin.

Havlová, V; Mazliak, L; Šišma, P. (2005): *Le début des relations mathématiques franco-tchécoslovaques vu à travers la correspondance Hostinský-Fréchet*. Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique 1, 1–18.

Hostinský, B. (1917): *Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle* [*New Solution of Buffon's Needle Problem*]. Rozpravy ČAVU 26, 8 pp.

Hostinský, B. (1920): *Sur une nouvelle solution du probléme de l'aiguille.* Bulletin des Sciences Mathématiques 44, 126 – 136.

Hostinský, B. (1925): *Sur les probabilités géométriques*. Masaryk University, Brno.

Hostinský, B. (1926): *Geometrické pravděpodobnosti* [*Geometrical Probabilities*]. JČMF, Prague.

Hostinský B. (1929): *Probabilités relatives à la position d'une sphére à centre fixe*. J. Math. Pures Appl. (Liouville), 35–43.

Hromádko, F.; Strnad, A. (1902): *Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol* [*Collection of Exercises on Algebra for Higher Classes of Secondary Schools*]. JČMF, Prague.

Laplace, P.-S. de (1814): *Essai Philosophique sur les Probabilités*. Paris.

Mačák, K. (2005): *Vývoj teorie pravděpodobnosti v českých zemích do roku 1938* [*Development of the Probability Theory in the Czech Lands till 1938*]. AV ČR, Prague.

Newton, I. (1967): *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, 1664–1666, vol. I (D. T. Whiteside, ed.). Cambridge, 59–61.

Pánek, A. (1881): *Experimentální určení čísla* π [*Experimental Determination of the Number* π]. ČPMF 10, 272–275.

Pánek, A. (1882): *Počet pravděpodobnosti v geometrii* [*Probability Calculus in Geometry*]. ČPMF 11, 121–122.

Pánek, A. (1884): *Příspěvek k počtu pravděpodobnosti* [*Contribution to Probability Calculus*]. ČPMF 13, 268–271.

Pánek, A. (1886): *Úloha z počtu pravděpodobnosti* [*A Problem from Probability Calculus*]. ČPMF 15, 271–273.

Pánek, A. (1891a): *Řešení Laurentovy úlohy z počtu pravděpodobnosti* [*Solution of Laurent's Problem from Probability Calculus*]. ČPMF 20, 94–97.

Pánek, A. (1891b): *Problém z geometrické pravděpodobnosti* [*A Problem from Geometrical Probability*]. ČPMF 20, 148–150.

Rosiwal, A. K. (1898): *Ueber geometrische Gesteinsanalysen. Ein einfacher Weg zur ziffremassigen Feststellung des Quantitätsverhältinesses der Mineralbestandtheile gemengter Gesteine*. Verhandlungen der k. k. Geolog. Reichs. Wien, 5(6), 143–174.

Saxl, I.; Ilucová, L; Kalousová, A. (2008): *Stereology of ultrafine-grained materials*. Inżynieria materiałowa 28, 4 pp (in press).

Santaló, L. A. (1976): *Integral Geometry and Geometric Probability.* Adison-Wesley, Massachusetts.

Seneta, E.; Parshall, K. H.; Jongmans, F. (2001): *Nineteenth-Century Developments in Geometric Probability: J. J. Sylvester, M. W. Crofton, J.-É. Barbier, and J. Bertrand*. Archive for the History of Exact Sciences 55, 501–524.

Sommer, J.; Hübner, V. (1905): *Maturitní otázky z matematiky* [*Questions for Leaving Examination in Mathematics*]. JČMF, Prague.

Thompson, W. R. (1932): *The geometric properties of microscopic configurations*. *I. General aspects of projectometry*. Biometrika 24, 21–26.

Todhunter, I. (1857): *A treatise on the integral calculus and its applications with numerous examples*, Macmillan and Co., London.

Todhunter, I. (1865): *A History of the Mathematical Theory of Probability. From the Time of Pascal to that of Laplace*. Macmillan, Cambridge and London.

Address

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
Faculty of Transportation Sciences
Czech Technical University in Prague
Na Florenci 25, 110 00 Prague 1
Czech Republic
e-mail: *hyksova@fd.cvut.cz*

On the reasonable but limited effectiveness of mathematics in the natural sciences

Ivor Grattan-Guinness

Wigner's thesis

In 1960 the physicist Eugene Wigner published a very influential article on 'The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences'. His main thesis is 'that the enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and that there is no rational explanation for it'; for example, 'The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand or deserve' [1960, 2,14]. The article has been cited especially by scientists and mathematicians on many occasions, with approval or at least without demur; some related articles have appeared. Philosophers have also considered the article, and some have largely accepted the force of the argument. But most of the established philosophies of mathematics favoured by philosophers have been developed to grasp mathematical theories *already developed* rather than to address theory-building: [Polya 1954a, 1954b] is much more promising, with his masterly survey of 'plausible reasoning' and the dynamic relationships between theorems and proofs, although he focusses largely upon pure mathematics. In my approach, which in general terms follows Polya, the unreasonableness will largely disappear, but doubts are raised over effectiveness. Several of my points have been made in earlier discussions of Wigner's article, but to my knowledge nobody has taken as central the two theses presented in the next section. For more details see [Grattan-Guinness 2008].

Two counters

Firstly, in a part of his article called 'What is mathematics?' Wigner asserts that while elementary concepts in mathematics (especially geometry) were motivated by 'the actual world, the same does not seem to be true of the more advanced concepts, in particular the concepts which play such an important role in physics' [1960, 2]. In reply I build upon a large truth coming strongly from the history of mathematics; not only elementary theories and branches of the subject were (and are) motivated by some problems found in the actual world, including on occasion sciences outside the physical ones, but so *equally* were (and are) the more advanced theories. Much mathematics, at all levels, was brought into being by worldly demands, so that its frequent effectiveness there is not so surprising.

Secondly, in a part of his article called 'What is physics?' Wigner emphasises the role of observing regularities in the world for formulating 'laws of nature' (using Galileo Galilei's law of fall as an example) which nevertheless are subject to 'probability laws' due to our incomplete knowledge [1960, 3-6]. This point about regularities is valuable, and should form part of a wide-ranging analysis of theories *as such*, especially their initial formation and later elaboration. These processes are *central* features of the development of mathematics pure or applied, and indeed of any science, and so they form the basis of my own approach.

The status of theories depends upon whether one subscribes to a philosophy of science that treats theories as mere devices for calculation or prediction (instrumentalism, conventionalism, some kinds of positivism) or to a philosophy that pays attention to the (apparent) explanatory power of theories (inductivism, fallibilism, some kinds of Platonism).

Developing theories in the presence of other theories

> In science as in everyday life, when faced by a new situation, we start out with some guess. Our first guess may fall wide of the mark, but we try it and, according to the degree of success, we modify it more or less. Eventually, after several trials and several modifications, pushed by observations and led by analogy, we may arrive at a more satisfactory guess.

Georg Polya [1954b, 158]

When forming a problem and attempting to solve it, a scientist does not work in isolation: he is operating in various contexts, philosophical, cultural and technical, in some cases consciously recognised while in others intuitively or implicitly adopted. *Thinkers develop theories in the presence of other theories already available as well as by observations of the actual world, and can be influenced positively or maybe negatively by these theories. It is the world of human theories that is anthropocentric, not the actual world.*

In the discussion below 'notion' is an umbrella term covering not only objects such as function and matrix but also concepts such as convexity, systems of symbols, and proof methods, that occur in mathematical theories; these latter are often called 'topics' when they include individual theorems or algorithms as well as larger-scale bodies of results. The distinction between topic and notion resembles that made by phenomenologists between a part and a moment of a whole; for example, between the third chapter of a certain book and the price of that book [Smith 1982].

Assume that the creator of a new theory S2 was aware of another theory S1 already available and drew upon it in some way; this does not forbid the possibility that he independently recreated S1 on his way to S2. Four categories of relationship may obtain between S2 and S1.

Reduction. S1 not only actively plays a role in the formation and development of S2, but the theorist also hopes to *reduce* S2 to the sphere of activity of S1. Analogies now become special cases of S1 in S2; and S1 may be seen as an extension of S2, maybe even a generalisation of it.

Emulation. S1 actively plays a role in the formation and development of S2, with resulting structural similarities, but reduction is not asserted or maybe even sought. Analogies are just similarities; for example, S2 uses (close versions of) some of the mathematical notions already deployed in S1.

Corroboration. S1 plays little or no role in the formation and development of S2; but the theorist draws upon similarities to S1, maybe including structural ones, to develop S2 further and thereby enhance the measure of analogy between S2 and S1.

Importation. S1 is imported into S2 basically intact, to serve as a mathematical tool. Thereby S1 and S2 have certain notions in common, creating analogies; and if some of them are of sufficient generality to surpass the spheres of activity of both S1 and S2, then they are *instantiated* in S1 and S2.

Theory S2 may well have several S1s of various kinds in its ancestry. What relationship does it hold to its principal parents? The word 'revolution' is often used to refer to substantial changes of theory, but in my view excessively and without adequate allowance for the different kinds of relationship that may obtain. I propose *convolution*, where in its development from S1s both old and new (sub-)theories S1 wind around each other, showing both old and new connections and thereby mixing elements of replacement and innovation. A very widespread use of convolution occurs when a mathematician takes some existing piece of mathematics (of any kind) and modernises parts of it in some ways before embarking on his new work or while doing so; I call this use of old mathematics 'heritage', to distinguish it from its historical analysis [Grattan-Guinness 2004].

Some basic topics and notions in theories

We consider now some of the main topics and notions that are invoked in the application of mathematics to the natural sciences. They can obtain also within mathematics, between different branches of the discipline and/or parts of the same one; I shall not pursue this feature here, but I note that it increases the content of the mathematical theories involved, and thereby the potential measure of their effectiveness in applications. A significant part of so-called 'pure' mathematics is applic*able*, carried out without any stated applications but with a clear potential there: the various kinds of solution of differential equations are a prominent example.

Table 1, at the end of this paper, indicates several significant topics, notions and strategies that help in theory-building to produce some sort of convoluted theory out of previous theories.

None of the lists in the three columns is meant to be complete (especially not the first one), though every item is noteworthy. Apart from a few groupings in the columns, the order is not significant; and only one connection by row obtains. In several cases the opposite notion is also to be noted (for example, disequilibrium from equilibrium). Those in the third column can be manifest within mathematics also.

Ubiquity and the role of analogies

Analogies (and disanalogies) between theories play a very significant role in the reasonable effectiveness of mathematics in theory-building; in particular, in the second way (emulation) of deriving S2 from S1 listed above. The most extensive account is given in [Kaushal 2003, chs. 3-6]; see especially his synoptic table illustrating 'the contents of a structural analogy' on p. 93. Two such theories have some mathematical notion M in common, which therefore is an invariant relative to S1 and S2; for example (which is given a context later), both heat diffusion and acoustics use Fourier series.

A major source of the importance of analogies is that all of these topics and notions are *ubiquitous,* in mathematics and/or in the actual world; hence *lots* of analogies may be tried, and the successful ones help to explain the 'uncanny usefulness of mathematical concepts' [Wigner 1960, 2]. We can also assuage the puzzlement of Steven Weinberg that mathematicians have often produced theories before the physicists [Mathematics 1986, 725-728, mentioning Wigner]: the mathematicians thought up these theories in specific contexts using various ubiquitous topics and notions, which physicists *then* found also to be effective elsewhere.

In addition to analogies between S1 and S2, each theory (I take S1) will have analogies with the pertinent mathematical notion M. A dual role obtains for M: both to be correctly developed as mathematics, and to make sense at some level of detail in S1. The level to which the similarity holds between M and S1 measures their common *analogy content*; for example, it increases if S1 not only uses integrals M but also interprets them as areas or as sums. Analogy content can be modest; for example, when an abstract algebra (lattices, say) M is imported into S1, the analogy content between M and S1 may well be limited to the lattice structure.

Examples of theory-building

Let us now take a few further examples, not necessarily oriented around analogies.

Among the notions. Simplicity has obvious attractions to reductionists, and it grounds conventionalist philosophies; but when two notions are not close together in kind, the relation 'simpler than' between them requires complicated (sic) analysis. Sometimes it is also used to back up the empiricists, who cut their philosophical throats with Ockham's razor.

Linearity has been of especial importance, even though most of the phenomena observed in the actual world are non-linear. It covers all manifestations of the linear form aA +bB + …, finitely or infinitely. An example of a general kind is forming a problem as a linear differential, or difference, or difference-differential, equation, for many forms of solution are available or may become so; by around 1900 linearisation had become something of a fixation. Linear algebra also brought with it, and to some extent motivated, a further wide range of applications, partly overlapping with that of the calculus.

Perturbation theory. An important example was initiated by Isaac Newton's innovative insight in celestial mechanics that the planets were 'perturbed' from their basic orbits around the Sun by their mutual attractions. The mathematics to express this situation was not difficult to state but horrible to manipulate, until in the 1740s Leonhard Euler had the superb insight that the distance (and other) astronomical variables could be converted into infinite trigonometric series of appropriate angles, which increased a uniformity of approach. A major use of this method occurred in *proving* that our planetary system was stable; that is, no planet would ever fly out of the system, or way off the ecliptic plane. Euler (and Newton before him) had been content to rely on God as the guarantee of stability; but in the 1770s J.L. Lagrange secularised the problem by truncating the expansions to their first terms, thereby expressing the motions in a system of linear ordinary differential equations with constant coefficients, which took finite trigonometric series solutions. By a marvellous analysis he made great progress towards establishing stability. Later work by others (including, surprisingly, A.L. Cauchy and Karl Weierstrass) played major roles in establishing the spectral theory of matrices (the theory of their latent roots and vectors) — a fine example of the reasonable effectiveness of the natural sciences in mathematics.

This example also exhibits both kinds of generality mentioned above. Firstly, Lagrange's analysis formed part of his development of analytical mechanics, in which he claimed, controversially, that dynamics could be reduced to statics. Secondly, it hinged on a brilliant transformation of the independent variables that (to use matrix theory, heritage style) reduced the matrix of the terms in the differential equations to an anti-symmetric one; the task was then to show that all the latent roots and vectors were real.

Contributions from Fourier. Euler's trigonometric series are not be confused with Fourier series, which came back into mathematics in the 1800s. The context was heat diffusion, where Joseph Fourier innovated the first large-scale mathematicisation of a branch of physics outside mechanics, in a fine display of convolution [Grattan-Guinness and Ravetz 1972]. Importing the differential and integral calculus in its Leibniz-Euler form, he went for linearisation in forming his differential equation to represent the phenomenon. But in adopting the series as the preferred form of solution for finite bodies he revolutionised the understanding of a mathematical theory that had been known before him but were disparaged for reasons (especially concerning their manner of representing a function) that he showed to be mistaken. However, he did not apply analogy to carry the periodicity of the trigonometric terms over to a waval theory of heat and promote a superposition of basic states, although such a theory was being advocated at that time; for him heat was exchanged with cold, each notion being taken as primitive, and he rejected explaining their nature in other terms such as waves or a substance (caloric). The term 'positivism' can fairly be applied here, as in the late 1820s his work was to be a great influence upon the philosopher Auguste Comte. For diffusion in infinite bodies Fourier innovated around 1810 the integral named after him, where the waval reading does not obtain anyway. The physical interpretation of each term of the Fourier series was due especially to G.S. Ohm in the 1840s, in the context of acoustics; it marks an increase in analogy content.

Quantum mechanics. The early stages included the emulation by Niels Bohr and others of celestial mechanics with his 1913 planetary-like model of the hydrogen atom as a nucleus surrounded by a charged electron orbiting in a circle (or, for the desimplifying Arnold Sommerfeld, in an ellipse). Given this approach, the governing differential equation, Ernst Schrödinger's, was linear as usual, and for it a wide repertoire of solutions was available. But the physics, especially the notions of atomic states and quanta of light and other phenomena to which Planck's constant had become associated, dictated that analogy should *not* guide the choice of solutions; to be reasonable the mathematics had to follow routes different from Fourier series (although Werner Heisenberg's first theory of the atom drew upon them), special functions and the like. Instead Hilbert spaces, infinite matrices and integral equations played prominent roles; and as all three mathematical topics were still rather new at the time (the 1910s onwards) to some extent we see again the effectiveness of a natural science upon their development (and conversely, their applicability). Two main forms of quantum mechanics developed in the 1920s, matrix mechanics and wave mechanics; in the latter development Schrödinger closely emulated the analytic mechanics and optics of W.R. Hamilton. Schrödinger and others showed in 1926 that the two versions were mathematically equivalent; however, their physical differences remained rather mysterious. Paul Dirac came up with a third candidate in his quantum algebra; then he embraced all three in his 'transformation theory'.

Another importation into quantum mechanics was group theory, which had developed over the previous 70 years or so, initially in other specific mathematical contexts and then as a general and abstract theory; several basic kinds of group proved to be effective, especially rotation, unitary, continuous and permutation. This example is especially striking to note because a significant pioneer was one Eugene P. Wigner; his book on the matter [Wigner 1931] is surely a fine counter-example to his thesis of 1960 [French 2000].

Statistical mechanics. The relevance of anthropocentrism, mentioned above, is nicely exemplified in the survey [Ruelle 1988] of equilibrium statistical mechanics. Early on he is willing to 'define mathematics as a logical construct based on the axioms of set theory' (oh Gödel, where art thou at this hour?), and praises Wigner's 'beautiful' article without 'concern[ing] ourselves with this mystery'. Then, to outline his theory of indeed 'human mathematics' he not only invokes equilibrium but also imports parts of point set topology, the integral calculus, operator algebra and mathematical statistics; he even stresses that 'the intrusion of physics therefore changes the historical development of mathematics' [p. 265], and indicates uses of his subject elsewhere. That is, he does much to dissipate the mystery that he claims to be ignoring!

Increasing effectiveness: desimplification and the science of small effects

The discussion above should suggest grounds for finding reasonable the impressive utility of mathematics in the natural sciences. The question of its effectiveness, however, requires further consideration. It depends in part upon the demands made of the scientific theory involved, or the expectations held for it; *how* general, for example, or how numerically accurate?

It is a commonplace, but a significant one, to notice that the actual world is a very complicated place; Wigner himself does so in [1960, 4]. Thus the scientist, whether mathematical or not, is forced to simplify the phenomena under study in order to render them tractable. The long-running preference for linearity noted earlier is a prominent example of such simplifications; in reaction, a notable feature of recent mathematical physics has been a great increase in non-linear methods and models [West 1985].

Among branches of mathematics, mechanics is notorious for the adoption of light strings and inextensible pulleys, the assumption that extended bodies have constant density, the routine ignoring of air resistance, friction, and/or the rotation of the Earth about its axis, and so on. The assumption is fallibly made that in the contexts under study the corresponding effects are small enough to be ignored; but part of the reasonableness of theory-building is to check whether or not such assumptions are justified. I called such checks 'desimplification': putting back into the theory effects and factors that had been deliberately left out.

For example, Lagrange consciously simplified the stability problem in that in truncating the expansions to their first terms he formed a linear approximation to the motions of the planets by taking only the first-order terms in their masses. Thereby he assumed that the terms in higher orders were small enough to be ignored; but should this assumption be checked for reasonableness? In the late 1800s, under the stimulus of a recent analysis by P.S. Laplace, the young S.D. Poisson and the old Lagrange studied the second-order terms and found a mathematical expression that was of interest in its own right. Thus their study of a particular problem led unexpectedly to a much more general one. For once in the history of mathematics the names attached to the resulting theory, in analytical mechanics, are correct: 'the 'Lagrange-Poisson brackets'. A version of it was to appear in Dirac's algebra noted in connection with quantum mechanics.

The longest-running catalogue of desimplifications of which I am aware concerns the so-called 'simple' pendulum. The adjective seems reasonable, for the instrument consists only of a bob swinging on a wire from a fixed point. However, especially from the late 18th century onwards, pendula were observed very exactly for making precise calculations in connection with the needs of geodesy, cartography and topography. This was small-effects science par excellence, literally preoccupied with decimal places. Many scientists studied a wide range of properties [Wolf 1889-1891]. Is the downswing *exactly* equal to the upswing? What about the effects of Lunar attraction, the spheroidicity of the Earth, air resistance, the possible extension of the wire under the weight of the bob, and the effect of the bob rotating about its own axis? These and various other questions made the simple pendulum a rather complicated instrument! However, all the desimplifications were carried out fallibly but reasonably, for they attempted to establish guides on the orders of smallness of the effects upon the motion of the pendulum.

Some comments on ineffectiveness, including its own possible ineffectiveness

The account above paints a picture of the development of applied mathematics in sequences of fallible but steadily successful actions. However, it is itself simplified, and needs supplementing with some consideration of types of failure over and above incompetence.

There are situations where a genuine problem is addressed, but the theories proposed as solutions are of no practical use whatever; I call this type 'notional applications'. A striking example is [Poisson 1823] on the cooling of an annulus in the desimplified situation when the temperature of the environment was *not* constant and so was itself represented in the diffusion equation by a Fourier series. The consequences for the resulting analysis can be imagined; but what was the motivation? He mentioned the predicament of a sailor using a sextant at sea in a (variably) sunny environment, when the rays from the Sun strike the instrument itself and so cause it to distort out of shape. This is a genuine problem; but how do the parades of sines and cosines resolve it, especially in any calculable manner?

Mathematics in economics. One subject where the use of mathematics has been questioned in a fundamental way is economics. In particular, accepting Wigner's thesis, [Velupillai 2005] entitled his attack 'The unreasonable *in*effectiveness of mathematics in economics'. The criticisms are wide-ranging: 'the mathematical assumptions are economically unwarranted' and often dependent upon weak analogies with other subjects. For example, several main figures in the early stages of neo-classical economics in the second half of the 19th century emulated mechanics with enthusiasm, especially the notion of equilibrium, and deployed major assumptions such as d'Alembert's principle; but the resulting theories were not very effective [Grattan-Guinness 2007]. What, for example, corresponds in economics to the continuous and uniform force of gravity? There is still a very wide spectrum of views on, for example, the effectiveness in economics of the notion of equilibrium [Mosini 2007].

Velupillai specifically finds mathematics in economics 'ineffective because the mathematical formalisations imply non-constructive and uncomputable structures'; as medicine he recommends constructive mathematics, especially in the import of number theory and recursion theory into economics when its data have been expressed as integral multiples of some basic unit. Some branches do exhibit effective testing; for example, financial data subjected to time series analysis, and not just to find correlations for their own ineffective sake.

Beyond the physical sciences. The failure of the mechanisation of economics shows that the gap between the physical and the social sciences is very wide. How about the gap between the physical and the life sciences? [Lesk 2000] takes up the matter in connection with molecular biology, copying Wigner's title; so we expect to learn of some more unreasonable effectiveness. However, he is very cautious, stressing disanalogies between the physical and the life sciences, especially over matters concerning complexity. One is tempted to think that desimplification will not be radical enough, and that the non-physical sciences — life, mental, social — may need *fresh kinds of mathematics*. Relative to the Table, perhaps we should retain the notions (or most of them) and build different topics around them.

8. Concluding remarks

It may be that Wigner was drawn to his thesis by his experience with quantum mechanics; he gives some examples from there [1960, 9-12]. Perhaps its first practitioners struck lucky in analogising from the experiential celestial heavens to the highly non-experiential atom, and enjoying some remarkable later successes; but for those who follow [Popper 1959] in seeing science as guesswork, then sometimes it is bull's-eye time, and quantum mechanics was one of them — for a time, anyway. For a *general* explanation of mathematics Wigner appeals to its beauty and to the manipulability of expressions [Wigner 1960, 3, 7]: as with complex numbers above, such properties may be exhibited on occasion, but surely they cannot *ground* mathematics or explain its genesis, growth or importance.

Wigner's thesis about unreasonableness is philosophically ineffective, partly because he neglected numerous clear indications from history of sources of both reasonableness and effectiveness of the natural sciences in mathematics. Yet not only were various histories of applied mathematics available by 1960; some eminent mathematicians had published relevant texts; for example, [Polya 1954a, 1954b]. Wigner also under-rated the central place of theories being formed in the presence of other theories, and being desimplified when necessary and where possible. In addition, the ubiquity of the topics and notions elucidated in Table 1, and others not listed there, should be emphasized.

The alternative picture that emerges is that, with a wide and ever-widening repertoire of mathematical theories and an impressive tableau of ubiquitous topics and notions, theory-building can be seen as reasonable to a large extent; however, the effectiveness of the output may need some enhancement through (further) desimplifications, if they can be realized. Instead of 'effective but unreasonable', read 'largely reasonable, but how effective?'. This slogan can also guide appraisals of (un?)reasonable (in?)effectiveness in contexts overlapping with the one studied here: for example, notations and notational systems (where mathematics meets semiotics), graphical and visual techniques, pure mathematics, numerical methods, logics, and probability theory and mathematical statistics. There are consequences to explore concerning the use of the histories of mathematics and of the natural sciences in theory-building, and the content of mathematics and science education.

Bibliography

French, S. 2000. 'The reasonable effectiveness of mathematics: partial structures and the application of group theory to physics', *Synthese*, *125*, 103-120.

Grattan-Guinness, I. 2004. 'The mathematics of the past. Distinguishing its history from our heritage', *Historia mathematica*, *31*, 161-185.

Grattan-Guinness, I. 2007. 'Equilibrium in mechanics and then in economics, 1860-1920: a good source for analogies?', in [Mosini 2007], 17-44.

Grattan-Guinness, I. 2008. 'Solving Wigner's mystery: the reasonable (though perhaps limited) effectiveness of mathematics in the natural sciences', *Mathematical intelligencer,* to appear.

Grattan-Guinness, I. and Ravetz, J.R. 1972. *Joseph Fourier 1768-1830*, Cambridge, Mass.: MIT Press.

Kaushal, R.S. 2003. *Structural analogies in understanding nature*, New Delhi: Anamaya.

Lesk, A. 2000. 'The unreasonable effectiveness of mathematics in molecular biology', *The mathematical intelligencer*, *22*, no. 2, 28-36.

Mathematics 1986. 'Mathematics: the unifying thread in science', *Notices of the American Mathematical Society*, *33*, 716-733.

Mosini, V. 2007. (Ed.), *Equilibrium in economics: scope and limits*, London: Routledge.

Poisson, S.D. 1823. 'Sur la distribution de la chaleur dans un anneau homogène et d'une épaisseur constante …', *Connaissance des temps,* (1826), 248-257.

Polya, G. 1954a, 1954b. *Mathematics and plausible reasoning*, 2 vols., 1st ed., Princeton: Princeton University Press. [2nd ed. 1968.]

Popper, K.R. 1959. *The logic of scientific discovery*, London: Hutchinson.

Ruelle, D. 1988. 'Is our mathematics natural? The case of equilibrium statistical mechanics', *Bulletin of the American Mathematical Society*, *19*, 259-267.

Smith, B. 1982. (Ed.) *Parts and moments. Studies in logic and formal ontology*, Munich: Philosophia.

Velupillai, K.V. 2005. 'The unreasonable *in*effectiveness of mathematics in economics', *Cambridge journal of economics*, *29*, 849-872.

West, B.J. 1985. *An essay on the importance of being nonlinear*, Berlin: Springer.
Wigner, E.P. 1931. *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, Braunschweig: Vieweg. [Rev. English trans.: *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*, New York: Academic Press, 1959.]
Wigner, E.P. 1960. 'The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences', *Communications on pure and applied mathematics, 13*, 1-14. [Repr. in [1967], 222-237; and in *Philosophical reflections and syntheses* (ed. G. Emch), Berlin: Springer, 1995, 534-548.]
Wolf, C.J.E. 1889-1891. *Mémoires sur le pendule …*, 2 pts., Paris: Gauthier-Villars.

Table 1. Some topics, notions and strategies used in mathematics and the natural sciences.

Topics from mathematics	**Notions from mathematics**	**Notions from the sciences and/or the actual world**
Matrices	Linearity	Space
Determinants	Generalisation	Time
Arithmetic of real numbers	Convexity	Force
Common algebra	Equality, inequality	Energy
Complex numbers, analysis	Ordering	Mass, weight
The calculus	Partitioning	Causality
Functions, functors	Approximation	Continuity
Series	Invariance	Optimisation
Differential equations	Duality	Regularity
Theory of limits	Boundary	Notion of limits
Set theory and the infinite	Recursion	Conservation
Potentials	Operators	Equilibrium, stability
Mathematical statistics	Combinations	Discreteness
Stochastic processes	Bilinear, quadratic forms	Symmetry
Probability	Dispersion, location	Analogy
Topology	Regression, correlation	Periodicity
Mechanics	Nesting	Simplicity, complexity
Theory of equations	Mathematical induction	Generality
Group theory	Proof by contradiction	Randomness
Fields (and other algebras)	Superposition	Identification
(Non-)Euclidean geometries	Structure	Abstraction
Vector algebra, analysis	Axiomatisation	Taxonomy

Bilder: *Alle Bilder von Peter Schmitt*

(nach der Titelseite)
Mittagspause im Gastgarten
Gruppenbild
Im Seminarraum

---

p. 28: Jasna Fempl-Madjarević

p. 63: Milos Čanak spielt Geige

p. 69: Harald Gropp und Fritz Katscher

p. 129: Menso Folkerts

p. 154: *(oben)* Werner Schulze und sein Fagott;
(unten) Demonstration einer Tonleiter auf polynesischen Instrumenten

p. 155: *(oben)* Michaela Chocholová;
(unten) der älteste und der jüngste Teilnehmer: Fritz Katscher und Michaela Chocholová

p. 156: *(oben)* Sergui Demidov und Christine Phili;
(unten) Menso Folkerts, Enid und Ivor Grattan-Guinness

p. 157: *(oben)* Gerlinde Faustmann; *(unten)* Klaus Kühn

p. 158: *(oben)* Ausflug nach Baden: Wie schmeckt Schwefelwasser?
(von links) Ivor Grattan-Guinness, Jasna Fempl-Madjarević, Monika Löffladt, Magdalena Hykšová, Ülo Lumiste, Menso Folkerts, (Stefan Deschauer)

Teilnehmer

* Martina Bečvářová 13
Katedra aplikované matematiky, Fakulta dopravní, ČVUT v Praze,
Na Florenci 25, CZ 11000 Praha 1, Tschechien
nemcova@fd.cvut.cz

Christa Binder
Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien,
Wiedner Hauptstr. 8-10/101, A 1040 Wien, Österreich
christa.binder@tuwien.ac.at

* Wolfgang Breidert 70
Baumgartenstr. 9, D 76316 Malsch, Deutschland
Wolfgang.Breidert@philosophie.uni-karlsruhe.de

* Miloš Čanak 56
Brzakova 4, YU 11000 Belgrad, Serbien
miloscanak12@yahoo.com

* Michaela Chocholová 106
Fakultät der Mathematik und Physik, Karls Universität Prag,
Sokolovská 83, CZ 18675, Prag 8, Tschechien
chochol@karlin.mff.cuni.cz

* Sergui Demidov 113
Institute for the History of Science and Technology,
Sskii per 1/5, RU 103012 Moscow, Russia
ssd@ssd.pvt.msu.su

* Stefan Deschauer 1
Fachrichtung Mathematik, Professur für Didaktik der Mathematik,
TU Dresden, D 01062, Deutschland
Stefan.Deschauer@tu-dresden.de

Alireza Djafari-Naini
Center for lifelong Learning,
Hindenburgpl. 20, D 31134 Hildesheim, Deutschland
djafari@rz.uni-hildesheim.de

Gerlinde Faustmann
Kaisersteing. 6, A 2700 Wiener Neustadt, Österreich
gerlinde.faustmann@aon.at

* Jasna Fempl-Madjarević 25
5th Belgrade Gymnasium, KMM Arhimedes and Math. Institute,
Vidikovacki venac 27, YU 11000 Belgrad, Serbien
jasnaf@eunet.yu (borlja@eunet.yu)

* Menso Folkerts 126
Geschichte der Naturwissenschaften, Universität München,
Museumsinsel 1, D 80538 München, Deutschland
M.Folkerts@lrz.uni-muenchen.de

* Hans-Joachim Girlich 34
Mathematisches Institut der Universität Leipzig,
Joannisg. 26, D 04103 Leipzig, Deutschland
girlich@math.uni-Leipzig.de

* Ivor Grattan-Guinness 146
43, St. Leonards Road, Hertford, Herts, SG14 39W, GB
eggigg@ghcom.net

* Detlef Gronau 96
Institut für Mathematik, Universität Graz,
Heinrichstr. 36, A 8010 Graz, Österreich
gronau@uni-graz.at

* Harald Gropp 64
Mühlingstr. 19, D 69121 Heidelberg, Deutschland
d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

* Magdalena Hykšová 140
Faculty of Transportation Sciences, Czech Technical Univ. in Prague,
Na Florenci 25, CZ 11000 Prag 1, Tschechien
hyksova@fd.cvut.cz

* Friedrich Katscher 6
Mariahilferstr. 133, A 1150 Wien, Österreich
dr.katscher.vienna@chello.at

Manfred Kronfellner
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien,
Wiedner Haupstr. 8-10, A 1040 Wien, Österreich
manfred.kronfellner@tuwien.ac.at

* Klaus Kühn 134
Schlagfeldstr. 9, D 82239 Alling-Biburg, Deutschland
kk@iasim.de

Gerhard Lindbichler
Senfg. 1/7/3, A 1100 Wien, Österreich
gerhard.lindbichler@chello.at

* Ülo Lumiste 21
Institute of Pure Mathematics, University of Tartu,
J Liivi 2, 50409 Tartu, Estonia
lumiste@ut.ee

Günter Löffladt
Cauchy-Forum-Nürnberg, D 90419 Nürnberg, Deutschland
cfn@cauchy-forum-nuernberg.de

Rita Meyer-Spasche
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik,
D 85748 Garching, und Römerstr. 10, 80801 München, Deutschland
meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de

* Katalin Munkacsy 39
Centre of mathematics education, Elte, Rumbach S.u.3, H 1075 Budapest, Ungarn
katalin.munkacsy@gmail.com

* Alexander Odefey 43
Silker Busch 2, D 21521 Wohltorf, Deutschland
odefey@gmx.de

* Christine Phili 87
Fac. of Applied Math.and Physics, Dept. of Mathematics,
National Technical University, Zografou Campus,
GR 15780 Athen, Griechenland
xfili@math.ntua.gr

Franz Pichler
Schallenbergerweg 7, A 4048 Puchenau, Österreich
franz.pichler@jku.at

Michael von Renteln
Institut für Analysis, Universität Karlsruhe,
Englerstr. 2, D 76131 Karlsruhe, Deutschland
Michael.vonrenteln@math.uni-karlsruhe.de

Herwig Säckl
Traberweg 1, D 93049 Regensburg, Deutschland
herwsaeckl@aol.com

Peter Schmitt
Fakultät für Mathematik, Universität Wien,
Nordbergstr. 15, A 1090 Wien, Österreich
Peter.Schmitt@univie.ac.at

* Werner Schulze 50
Internationales Harmonik Zentrum, Universität für Musik, Wien,
Anton-von-Webern-Platz 1, A 1030 Wien, Österreich
schulze@mdw.ac.at

* Annette Vogt 75
MPI für Wissenschaftsgeschichte,
Boltzmannstr. 22, D 14195 Berlin, Deutschland
vogt@mpiwg-berlin.mpg.de

* Waltraud Voss 120
TU Dresden, Universitätsarchiv,
D 01062 Dresden, Deutschland
Waltraud.Voss@tu-dresden.de