Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte

VI. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

Mathematik – k?eine Insel

Einwirkung und Auswirkung

in Neuhofen an der Ybbs
bei Amstetten, in Niederösterreich, zwischen Linz und Wien
von Sonntag, 28. April bis Samstag, 4. Mai 2002

In der berühmten Ostarrichi-Urkunde vom 1. Nov. 996 schenkt Kaiser Otto III. dem Bischof von Freising Besitzungen um den Ort Neuhofen (Niuvanhova), der in der Gegend liegt, die in der Volkssprache Ostarrichi (Österreich) genannt wird. Es ist dies die erste urkundliche Erwähnung der Namen Österreich und Neuhofen. In der Ostarrichi-Gedenkstätte ist die Urkunde im Faksimile ausgestellt, zusammen mit Texten in lateinischer und deutscher Sprache, sowie mit Bildmaterial und Karten über die geschichtliche Entwicklung Österreichs.

Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte

VI. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

Mathematik – k?eine Insel

Einwirkung und Auswirkung

in Neuhofen an der Ybbs

von Sonntag, 28. April bis Samstag, 4. Mai 2002

Herausgeber:
Dr. Christa Binder
Institut für Analysis und Technische Mathematik
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8–10/1141
A 1040 Wien, ÖSTERREICH

Tel: +43 1 58801 11415
Fax: +43 1 58801 11499
e-mail: christa.binder@tuwien.ac.at

Danksagung:
Den folgenden Institutionen gilt mein besonderer Dank.
Ohne ihre Hilfe wäre die Durchführung der Tagung nicht möglich gewesen:

Amt der Niederösterreichischen Landesregierung
Österreichische Mathematische Gesellschaft
Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte
Institut für Analysis und Technische Mathematik der TU Wien
Anonyme Spender

PROGRAMM

FREITAG, 3. Mai, vormittag:

FREITAG, 3. Mai, nachmittag:

GRUPPENBILD:

von links nach rechts, hockend: Marko Razpet, Helena Durnová, Magdalena Hykšová, Nada Razpet, Martina Bečvářová.

1. Reihe stehend: Michael von Renteln, Klaus Barner, Annette Vogt, Waltraud Voss, Katalin Munkácsy, Jasna Fempl-Madjarevič, Herbert Pieper, Walter Kuba, Miloš Čanak.

dahinter: Maria Gruber, Gábor Dezső, Detlef Gronau, Lázsló Filep, Karl-Heinz Schlote, Phil Davis, Gisela von Renteln, Frau Breidert, Menso Folkerts, Herwig Säckl, Harald Gropp, Wolfgang Breidert, Pavel Šišma.

**„Die Erwerbung eines Mannes von europäischem Rufe,
eines Gelehrten, welcher Professor für Professoren werden
und Wien zum Mittelpunkte der mathematischen Welt erheben kann"
Graf von Thun an Kaiser Franz Josef**

Des Mathematikers Jacob Jacobi Berufung an die Wiener Universität und des preußischen Kammerherrn Alexander von Humboldt Einsatz für dessen Verbleib an der Berliner Akademie der Wissenschaften

Herbert Pieper, Berlin

Vom November 1849 bis März 1850 gab es - jedoch vergebliche - Bemühungen des österreichischen Ministeriums für Kultus und öffentlichen Unterricht, den Mathematiker C. G. Jacob Jacobi an die Wiener Universität zu berufen.[1] Jacobi war einer der geistreichsten und produktivsten Mathematiker im zweiten Viertel des 19. Jahrhunderts. Er lebte und wirkte seit 1844 in Berlin als besoldetes Mitglied der preußischen Akademie der Wissenschaften. Von der Berufung Jacobis nach Wien erhoffte man sich für die dortige Universität auf dem Gebiet der Mathematik einen Aufschwung, wie sie ihn bisher nicht kannte. Und dieser hätte gewiß dazu beigetragen, das Ansehen Österreichs in Bezug auf die Pflege der Wissenschaft zu erhöhen.

Die Bedingungen waren günstig. Es war die Zeit des Wirkens des Grafen von Thun-Hohenstein als Unterrichtsminister.[2] Er schuf das moderne Schulwesen in Österreich, ordnete die 1847 gestiftete Kaiserliche Akademie der Wissenschaften neu, machte sich um die Durchführung der Universitätsreformen verdient, sollte bedeutende Gelehrte aus dem Ausland an die Wiener Universität wie auch an die Akademie der Wissenschaften berufen. Sein erklärtes Ziel war es insbesondere, an der Wiener Universität eine „bleibende Pflanz- und Bildungsschule für Mathematiker herbeizuführen". Thun war überzeugt, „daß für die Förderung des Studienwesens nicht minder als in politischer Beziehung die Berufung einiger Gelehrten ersten

[1] Bis heute bildet die Darstellung von Leo Koenigsberger in seiner Jacobi-Biographie von 1904 die einzige Dokumentation der Berufungsangelegenheit. Es zeigt sich jedoch, dass der Biograph die Quellen nur lückenhaft benutzte bzw. auswertete. Nach 1904 sind überdies zahlreiche Dokumente publiziert worden, so die Korrespondenz Jacobis mit seinem Bruder, ferner mehrere Briefwechsel Alexander von Humboldts sowie weitere Archivalien von Belang. Unter Benutzung dieser Editionen sowie bislang nicht berücksichtigter relevanter Archivalien aus verschiedenen Archiven (dem Geheimen Staatsarchiv Preußischer Kulturbesitz Berlin-Dahlem, dem Allgemeinen Verwaltungsarchiv im Österreichischen Staatsarchiv und dem Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften) ist es möglich, ein genaueres Bild der Berufungsgeschichte zu zeichnen.

[2] Der österreichische Staatsmann Leo Graf von Thun und Hohenstein war seit Ende Juli 1849 (bis 1860) mit dem Posten des Ministers des Kultus und öffentlichen Unterrichts betraut.

Ranges von größerer Wichtigkeit ist, als was sonst für die Belebung der Universitäten geschehen kann." Thun schrieb später: „Der als Mathematiker neben Gauss in Göttingen gefeierte Gelehrte Europa's D^{or} C. G. J. Jacobi in Berlin hat in Folge von Ereignissen, welche seine Stellung daselbst minder günstig gemacht haben, auf indirektem Wege zu meiner Kenntnis gelangen lassen, dass es in seinem Wunsch läge, auf die Wiener-Hochschule berufen zu werden." Es waren Friedrich Julius Richelot, Mathematik-Ordinarius an der Königsberger Universität (ein Jacobi-Schüler), Ernst Wilhelm Brücke, Inhaber der Lehrkanzel der höheren Anatomie und Physiologie an der Wiener Universität, Karl Ludwig von Littrow, Direktor der Wiener Sternwarte, und Marian Koller, Direktionsrat im Österreichischen Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts, die daran beteiligt waren, im November 1849 diesen indirekten Kontakt zwischen Jacobi und Thun herzustellen.

Der Hintergrund der Kontaktaufnahme waren finanzielle Repressalien der preußischen Regierung, denen Jacobi ausgesetzt war, und dessen Bereitschaft, ins Ausland zu gehen.

Die Repressalien waren eine Reaktion auf Jacobis politische Betätigung nach den Märzereignissen von 1848. In der Tat war Jacobi nach den Barrikadenkämpfen am 18./19. März 1848 öffentlich politisch aufgetreten. Am 21. April hielt er eine Rede im „Konstitutionellen Klub" des liberalen Bürgertums. Jacobi wurde nach längerer Debatte einer der Kandidaten, welche der Klub der Bürgerschaft Berlins für die Wahlen zur preußischen Versammlung bzw. zur Nationalversammlung empfahl. Zu der Zeit als der Reichskriegsminister aufforderte, den Reichsverweser zu huldigen, stellte Jacobi den Antrag an seinen Bezirk, den Berliner Magistrat zu einer Erklärung dagegen aufzufordern. Jacobi wirkte noch in verschiedenen anderen Vereinen (z.B. im „Verein für Volksrechte"). Anfang 1849 sprach er sich in mehreren Reden gegen die Schmach des Belagerungszustands der Stadt Berlin durch die Truppen der Hohenzollern unter General Wrangel aus.

War Jacobi als Wissenschaftler mehr „mathematischer Mönch" als „mathematischer Weltmann", war er als preußischer Bürger eher regierungstreu gesinnt, meist jedoch politisch indifferent, so änderte sich sein Wirken für kurze Zeit während der Revolutionsereignisse. Schnell sollte er die Konsequenzen zu spüren bekommen.

Als er im Frühjahr 1848 versuchte, ein Ordinariat an der philosophischen Fakultät der Berliner Universität zu erlangen, wurde sein Antrag vor allem aus politischen Gründen abgelehnt. Am 26. Juli 1849 erhielt Jacobi ein Schreiben des preußischen Unterrichtsministers von Ladenberg[3], in dem dieser ihm gemäß der Königlichen Ordre vom 18. Juli 1849 mitteilte, dass ihm der vom König gewährte Gehalts-Zuschuss[4] vom 1. Oktober 1849 an entzogen werde. Ladenberg schrieb, dass sich „S[eine] M[ajestät] [...] um so eher [zum Entzug des Gehaltszuschusses] bewogen gefunden [hätten], als es [Jacobi] selbst, bei [s]einer politischen Richtung gegen Allerhöchstdieselben, nicht wünschenswerth sein könne, von Allerhöchstderselben eine Wohlthat anzunehmen." Die Familie Jacobis (seine Frau und drei Töchter und fünf Söhne) siedelte Ende September/Anfang Oktober 1849 - vermittelt durch den Astronomen Peter Andreas Hansen - ins billigere Gotha über. Jacobi selbst ging in einem Berliner Gasthof in Pension.

Bei der Berufung Jacobis an eine k.k. Universität, zunächst war von Prag und später nur noch von Wien die Rede, handelte es sich für den österreichischen Unterrichtsminister nicht „um die gewöhnliche Besetzung einer erledigten Lehrkanzel, sondern um die Erwerbung eines Mannes von europäischem Rufe, eines Gelehrten, welcher Professor für Professoren werden und Wien zum Mittelpunkte der mathematischen Welt erheben kann."

Der österreichische Unterrichtsminister von Thun machte Jacobi durch Vermittlung von Littrow das offizielle Anerbieten einer Professur an der Wiener Universität mit einem Gehalt von 4000 Gulden[5] und 150 Gulden Wohnungsentschädigung. Jacobi, der aufgefordert war, Bedingungen zu stellen, äußerte neben anderen Wünschen den nach einem jährlichen Gehalt von 4500 Gulden[6] (entsprechend 3000 Reichstalern). In der ersten Januarhälfte gab es hinsichtlich der Bedingungen und Wünsche Jacobis noch einen Briefwechsel. Am 19. Januar 1850 bot der österreichische Unterrichtsminister, vom Kaiser dazu ermächtigt, Jacobi die Lehrkanzel der Mathematik unter den vereinbarten Bedingungen an. Am 5. Februar unterrichtete Graf von Thun den Mathematiker von der durch Kaiser Franz Joseph vorgenommenen Ernennung. Der Stand der Wiener Berufungsangelegenheit Mitte Februar 1850 war folgender: Das preußische Unterrichtsministerium kannte Jacobis Ansicht, dass die Zusicherung einer Besoldung von 3000 Talern sein Verbleiben in Berlin veranlassen könnte. Das österreichische

---

[3] Das preußische Unterrichtsministerium, auch Kultusministerium genannt, genauer Ministerium der Geistlichen-, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, wurde 1817 gegründet. Von Mai bis Oktober 1840 und von 1848 bis 1850 war Adelbert von Ladenberg Unterrichtsminister.

[4] Jacobi hatte in Königsberg als Ordinarius zuletzt 1667 Taler jährlich als Gehalt bezogen. Für die Dauer seines Aufenthalts in Berlin wurden ihm zu seinem Königsberger Gehalt 1000 Thaler jährlich zugeschossen.

[5] Das entspricht dem Gehalt der Ministerialräte. Der in Ansehung des Gehalts bestgestellte Professor an der Wiener Universität bezog 3000 Gulden. Eine Ausnahme bildete der gerade berufene Mediziner Johann von Oppolzer, der 4000 Gulden erhalten sollte.

[6] Jacobi, 12. Dezember 1849: „Will nämlich der Herr Graf bloß eine ledige mathematische Professur gut besetzen, so giebt er viel zu viel Geld; geht er aber vielleicht von der Vorstellung aus, es könne durch meine Berufung Wien einer der Mittelpuncte der mathematischen Welt werden, so kann es unmöglich auf die 500 Gulden ankommen, die für Oesterreich gleichgültig, für mich von unermeßlicher Wichtigkeit sind."

Unterrichtsministerium erwartete nach der kaiserlichen Bestätigung der Ernennung zum ordentlichen k.k. Professor der Wiener Universität mit einem jährlichen Gehalt von 4000 Gulden Jacobis Übersiedlung nach Wien. Jacobi scheint einerseits die gewünschte Zusicherungserklärung des preußischen Unterrichtsministeriums, andererseits aber auch das kaiserliche Anstellungsdekret erwartet zu haben.

Am 20. Februar sandte das preußische Ministerium für auswärtige Angelegenheiten das durch die Vermittlung des Kaiserlich Österreichischen Gesandten erhaltene Anstellungs-Dekret an das preußische Unterrichtsministerium. Jacobi sollte es jedoch nie erhalten. Am 27. Februar beantragte von Ladenberg in einem mehrseitigen Schreiben an den König die Gewährung eines Jahresgehalts von 3000 Thalern rückwirkend vom 1. Oktober 1849 ab für Jacobi. Der preußische König stimmte zu. Jacobi blieb in Berlin.

Ob der erhoffte Aufschwung der Mathematik an der Wiener Universität wirklich gekommen wäre, scheint deswegen zweifelhaft, weil Jacobi, wie er selbst am 9. März 1850 an den österreichischen Unterrichtsminister schrieb, den österreichischen Staatsdienst „nur als vorübergehenden" betrachtete, da ihm an Gehalt bedeutend weniger gewährt werden sollte, als er zu erlangen hoffte.

Der Weggang Jacobis hätte hingegen dem Ansehen Preußens geschadet. Als Alexander von Humboldt im Jahre 1827 in seine Heimatstadt Berlin zurückkehrte, war es sein erklärtes Ziel, für die Förderung der Naturwissenschaften und der Mathematik in Preußen, insbesondere in Berlin (nach dem Vorbild von Paris), zu wirken. Bei seinen Bemühungen den Zustand der Mathematik in Preußen zu verbessern, konnte er sich stets auf Jacobi stützen. Als dieser 1844 von Königsberg nach Berlin übersiedelte, verlagerte sich der Schwerpunkt mathematischer Forschung in den deutschen Ländern in diese Stadt[7]. Jacobis Weggang hätte eine Einbuße des geistigen, insbesondere mathematischen Lebens Berlins nach sich gezogen. Der Fortgang Jacobis aus politischen Gründen, bewirkt durch finanzielle Repressalien, hätte einen negativen Widerhall in Europa gefunden. Es war Alexander von Humboldt, der dieses - unterstützt durch den Direktor der Unterrichtsabteilung im Unterrichtsministerium, Johannes Schulze[8] - den zuständigen preußischen Beamten und dem König zu vermitteln vermochte. Der 80jährige Humboldt wirkte in Berlin als Kammerherr des preußischen Königs und Mitglied der

[7] Die Zeit von 1844 bis 1892 wurde für die Mathematik in Berlin eine Blütezeit, verknüpft mit der Akademie der Wissenschaften und der Universität und mit den Namen Gustav Dirichlet, Jakob Steiner, Jacob Jacobi, Gotthold Eisenstein, Eduard Kummer, Karl Weierstraß, Leopold Kronecker.

[8] Am 20. Januar 1850 schrieb Humboldt in einem Brief an Johannes Schulze: „Wir verdanken Ihnen abermals viel in der Erhaltung eines grossen Namens, in der Abwendung unheimlicher Urteile im Ausland, der Scha-

Akademie der Wissenschaften. Er genoss durch seine Beziehungen zum Hofe und seine vielseitigen Verbindungen in Wissenschaft und Kunst eine außerordentliche gesellschaftliche Stellung. Von den finanziellen Repressalien und der Übersiedlung der Familie Jacobi nach Gotha hatte Humboldt von dem Mathematiker brieflich erfahren. Von einem Ruf Jacobis nach Wien hörte er Anfang Dezember 1849 vom König. Nun wurde Humboldt aktiv. Er schrieb zahlreiche Briefe, „freundlich, schmeichelnd, alle Motive darlegend, um [wie er formulierte] den unheimlichsten aller Verluste zu vermeiden", nämlich Briefe an den preußischen Unterrichtsminister, an den König, an den preußischen Ministerpräsidenten, an den preußischen Innenminister, an den Finanzminister, sowie an den Direktor der Unterrichtsabteilung im Kultusministerium, Johannes Schulze. Kurz, er setzte „alles in Bewegung [...], um das Unglück abzuwenden": „Die Gefahr ist um so drohender, als das öffentliche Urtheil nicht allein den Kultusminister belasten wird, sondern auch andere Personen, von denen man so tut, als ob man glaube, daß sie sie abwenden können[9]."

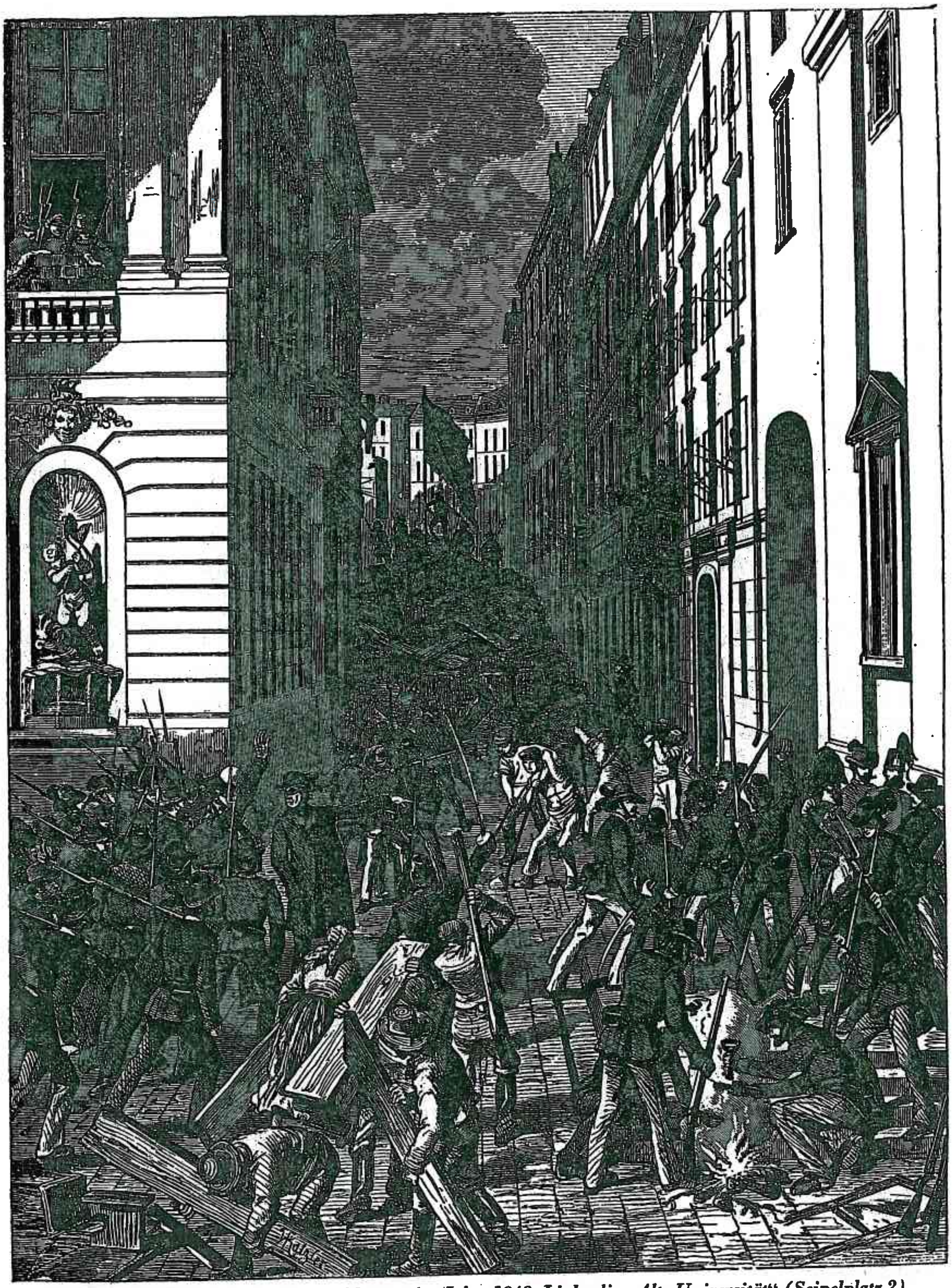
Und so deutete der Unterrichtsminister zurecht Humboldts Einsatz für den Verbleib Jacobis als einen Eifer sowohl für die Wissenschaft als auch für die Ehre und den Ruhm Preußens. Die Bereitschaft zur Geldbewilligung wurde dadurch - wie Humboldt richtig einschätzte - gefördert. Nach der geforderten politischen Loyalitätserklärung Jacobis war der preußische König bereit, Jacobi den entzogenen Gehaltszuschuß wieder zu gewähren. Das wußte Jacobi schon am 16. Januar. Aber von der Genehmigung eines entsprechenden Antrags durch den Finanzminister erfuhr Jacobi erst durch den Brief Ladenbergs vom 11. Februar 1850. Infolge des langsamen Vorgehens der preußischen Bürokratie, hatte Jacobi zu diesem Zeitpunkt den Ruf nach Wien bereits angenommen. Nun war die letzte Möglichkeit des Unterrichtsministeriums, Jacobi in Berlin zu halten, ihm das Geld anzubieten, das er einst bei seiner Übersiedlung nach Berlin erwartet hatte, nämlich 3000 Reichstaler Gehalt jährlich. Jacobis persönlicher Wunsch, in Berlin und in seinen wissenschaftlichen Verbindungen zu bleiben, konnte auf diese Weise verwirklicht werden. Die pekuniären Vorteile hielten ihn in der preußischen Hauptstadt, wo er sich mit seiner großen Familie im Kreis von Freunden und Kollegen nun wieder ohne drückende Sorgen der Wissenschaft widmen konnte. An den Unterrichtsminister von Thun schrieb er am 9. März entschuldigend: „Nehmen Eure Excellenz

---

denfreude unserer antigermanischen Feinde". Johannes Schulze war seit 1818 vortragender Rat im Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medizinalangelegenheiten. Er wurde 1849 Direktor der Unterrichtsabteilung.

[9] Zu diesem Personenkreis zählten die Akademiker. Doch als Dirichlet Ende Januar 1850 vor dem Plenum der Akademie der Wissenschaften den Antrag stellte, sich beim Unterrichtsministerium für Jacobi einzusetzen, hatte dieser den Ruf bereits angenommen, so dass es für die Akademie keine Veranlassung mehr zu einer Verwendung gab.

in Güte die Versicherung hin, daß ich Zeit meines Lebens in Eurer Excellenz einen meiner größten Wohlthäter verehren und es nie vergessen werde, daß Sie mir in einer trüben Zeit in dem oesterreichischen Kaiserstaat eine ehrenvolle Zufluchtstätte angeboten haben.“



Die erste Barrikade in der Sonnenfelsgasse im Jahre 1848. Links die „Alte Universität“ (Seipelplatz 2), rechts das „domus antiqua“ (Pedellhaus mit Karzer). Vgl. dazu S. 160. Xylographie von H. Katzler.

Viennese mathematicians and the German Technical University in Brno

Pavel Šišma, Brno

The aim of this short lecture is to look more closely at the personal relationships between Viennese universities and the German Technical University in Brno in the area of teaching mathematics. We will especially recall the names of those mathematicians who worked as assistants and *Privatdozenten* at the Viennese university or technical university and later continued their career of university teachers as associate professors (*ausserordentliche Professoren*) or full professors (*ordentliche Professoren*) at the German Technical University in Brno. We will also mention those who began their careers in Brno and continued (and in some cases also completed) their careers at the universities in Vienna.

There were many renowned mathematicians teaching at German Technical University in Brno, especially up to 1918. These, in most cases young, mathematicians became professors of important universities in Austria and Germany. Some well-known Czech, German, and Austrian mathematicians also tried to become professors at the German Technical University in Brno. For example, MATYÁŠ LERCH, HANS HAHN, RICHARD VON MISES, WILHELM BLASCHKE, and EMIL ARTIN.

The German Technical University in Brno was the first technical school in Moravia. In 1849 the school started as a Technical College (*Technische Lehranstalt*) and it was transformed into Technical University (*Technische Hochschule*) in the 1873. (Let us mention that the following technical universities existed in the Austro-Hungarian Empire at that time: technical universities of Vienna and Graz, Czech and German technical universities in Prague, and Technical Academy in Lemberg.) The school in Brno existed also after 1918 and was only abolished after the end of WWII in 1945.

The efforts to establish a training institution in Brno lasted for a long time and the preparation of its organizational status went on for several years. Among others, the director of the Vienna Polytechnic JOHANN PRECHTL (1778–1854) also participated in these activities.

In March 1849, FLORIAN SCHINDLER (1809–1885), director of the Lemberg Technical Academy, was entrusted with the preparation of the educational program. SCHINDLER was assistant of mathematics at Vienna Polytechnic from 1837 to 1841. In 1841 was appointed professor of practical geometry and higher mathematics at the Joanneum in Graz. In 1844 he went to Lemberg and was appointed director of the Technical Academy. From 1849 to 1867 he was director of the Brno Technical College. His personality is the first one in the row of mathematicians working at the Technical University in Brno after having begun their careers at Vienna Technical University.

ŠIŠMA

Mathematics

The Chair of Mathematics and Chair of Descriptive Geometry and Mechanics were two of the twelve chairs that were established at Technical College in 1849. Both professors taught in the preliminary course as well as at the "technical faculty". In October 1849, competitions for professorships were advertised with the knowledge of Czech being a necessity. The competitions took place at the technical universities of Prague, Graz, Lemberg, and Vienna. Among those applying for the position of the first professor of mathematics, future professors of mathematics at Vienna Technical University, JOSEF KOLBE (1825–1897) and SIMON SPITZER (1826–1887) can be found.

The first professor of mathematics, VALENTIN TEIRICH (1810–1886), former professor of a grammar school in Vienna, was appointed in March 1850. In 1854 he went to Vienna, where he was appointed director of a *Realschule* in Gumpendorf. TEIRICH was born and studied in Prague, but he later went to Vienna and together with FRANZ SCHAUB, he became the first *Privatdozent* of mathematics at Vienna University.

In the school year 1854–55 mathematics was substituted by KARL PRENTNER (1823–1904), an assistant of mathematics to JOSEF SALOMON (1793–1856) at Vienna Polytechnic. In 1855 he was appointed professor of mathematics, and worked in Brno until 1885 when he retired.

Both first professors of mathematics in Brno took part in the competitions for the position of professor at Vienna Technical University; TEIRICH in 1852 and PRENTNER in 1856.

In 1873, the second Chair of Mathematics was established at Technical University in Brno and FRANZ UNFERDINGER (1833–1890) was appointed professor. UNFERDINGER remained in Brno for the rest of his life. UNFERDINGER studied at Vienna Polytechnic from 1846 to 1850 and after that he taught at a number of secondary schools. In 1867 he habilitated at Vienna Polytechnic and in 1871 he was appointed associate professor.

In 1886, EMANUEL CZUBER (1851–1925), came to Brno Technical University. He studied at the German Technical University in Prague from 1869 to 1874. There he was an assistant and an *Privatdozent* (1876) to Karel Kořistka, Professor of practical geometry. From 1875 CZUBER taught at German *Oberrealschule*, also in Prague. He worked in Brno for only five years and in 1891 went to Vienna Technical University. He worked at this school until his retirement in 1921.

For only a few months, OSCAR PEITHNER VON LICHTENFELS (1852–1923) taught mathematics in Brno. PEITHNER studied at Vienna Technical University and Vienna University. He habilitated at both schools for mathematics. In May 1891 he left Brno for Graz Technical University.

FRANZ HOČEVAR (1853–1919) worked in Brno for four years, coming to Brno from Innsbruck in 1891, and in 1895 he decided to leave Brno and go to Graz Technical University. HOČEVAR studied at Vienna University and in the years 1874–79 he was an assistant at the Technical University.

The following two professors of mathematics OTTO BIERMANN (1858–1909) and EMIL WAELSCH (1863–1927) came to Brno from Prague and worked in Brno until their deaths. The former in 1891 and the latter in 1895 were preferred to GUSTAV KOHN, WILHELM WIRTINGER, ALFRED TAUBER, and KONRAD ZINDLER.

In 1902 ERNST FISCHER (1875–1954) came to Brno and became an assistant to WAELSCH. FISCHER studied at the Universities of Vienna, Berlin, Zurich, and Göttingen. In Brno he habilitated in 1904 and was appointed associate professor after BIERMANN's death. Later he taught at the Universities of Erlangen and Cologne.

¿From 1910 WAELSCH held the position of professor of geometry and HEINRICH TIETZE (1880–1964) was appointed professor of mathematics. TIETZE was a student at the Technical University of Vienna. He studied also at the universities of Vienna, Munich, and Göttingen. In 1908 he habilitated at Vienna University. TIETZE worked in Brno until 1919, and then he went to Erlangen where he was appointed professor at the university. From 1925 he taught at Munich University.

In 1912 LOTHAR SCHRUTKA (1881–1945) was appointed associate professor of mathematics in Brno. SCHRUTKA studied at Vienna University and habilitated there in 1907 (in 1908 he habilitated at the Technical University). He worked in Brno until 1925 when he was appointed professor at Vienna Technical University. He taught there until his tragical death.

From 1919 until 1923 the second professorship of mathematics was vacant. In 1923 KARL MAYR (1884–1940) came to Brno. He studied at Vienna University and from 1912 to 1914 he worked as an assistant at the Brno German Technical University. In 1921 he habilitated at Vienna Technical University. In 1924 KARL MAYR went to Graz Technical University where he remained for the rest of his life.

The last three professors of mathematics RUDOLF WEYRICH (1894–1971), LOTHAR KOSCHMIEDER (1890–1974), and WERNER VON KOPPENFELS (1904–1945) came to Brno from German universities. KOSCHMIEDER left Brno in 1940 for the Technical University in Graz.

Besides professors of mathematics, a lot of Viennese mathematicians worked at the German Technical University in Brno as assistants, lecturers or professors of other subjects.

From 1853 to 1859 ANTON WINKLER (1821–1892) was professor of practical geometry (geodesy) at Brno Technical College. In 1859 he went to Graz Technical University where he was appointed professor of mathematics. In 1866 he was appointed professor of mathematics at Vienna Technical University. In 1867 he participated a great deal on the reorganization of the Brno Technical College.

From 1896 to 1900 KARL CARDA (1870–1943) was assistant of mathematics in Brno. In 1900 CARDA went to Vienna and in 1901 he habilitated at Vienna Technical University. In 1905 CARDA was appointed associate professor there. From 1907 he was full professor at the German Technical University in Prague.

In 1906 RICHARD VON MISES (1883–1953) came to Brno as an assistant of mechanics to GEORG HAMEL (1877–1954) and he habilitated for mechanics at the Brno German

Technical University in 1908. MISES studied at Vienna Technical University and at Vienna University. During his stay in Brno, he received his doctorate at the Technical University of Vienna. In 1909 he went to Strassburg University where he taught applied mathematics until 1918. From 1919 to 1920 he was a professor at Technical University in Dresden and from 1920 to 1933 at Berlin University. In 1933 he emigrated to Turkey where he was professor of Istanbul University. In 1939 he went to USA, and from 1939 to 1953 he worked at Harvard University.

An important person is JOHANN RADON (1887–1956) who was an assistant to TIETZE in the years 1911–1912. RADON then returned to Vienna to Technical University. In 1919 RADON became associate professor at Hamburg University and in 1922 he was appointed full professor in Greifswald. In 1925 he taught in Erlangen, then from 1928 until 1945 he worked at the University of Breslau. He was appointed to Vienna University in 1947 and he remained there for the rest of his life.

We can also mention ERNST FANTA (1878–1939) who taught actuary mathematics at Brno Technical University from 1906 until 1919. At the same time he was regularly travelling to Vienna where he worked as a mathematician at the *Wiener städtischen Versicherungs-anstalt*. After WWI until 1938, FANTA lectured in actuary mathematics at the Technical University in Vienna.

Descriptive geometry

The competitive examinations for ocuppation of the Chair of Descriptive Geometry took placed in autumn 1849, but no convenient competitor was appointed. From January 1850 to January 1851, descriptive geometry was taught by EMANUEL RINGHOFFER (1823–1903), professor of architecture, and ANTON MAYSSL (1826–1899), professor of the *Oberrealschule* in Brno.

Early in 1851, GEORG BESKIBA (1819–1882) was appointed the first professor of descriptive geometry at Brno Technical College. BESKIBA was born in Vienna where he studied at Technical Institute and Academy of Fine Arts. From 1843 he taught civil engineering and technical drawing at Lemberg Technical Academy (in 1846 he was appointed professor). BESKIBA taught descriptive geometry in Brno from 1851 to 1867. That year BESKIBA was appointed the first professor of civil engineering and worked in Brno until 1877 when he retired.

In 1867 GUSTAV ADOLF PESCHKA (1830–1903) was appointed professor of descriptive geometry. He came to Brno from Lemberg where he was professor of mechanics, theory of machines, and technical drawing at Technical Academy. In 1863 he was appointed professor of these subjects in Brno. He taught descriptive geometry in Brno from 1867 to 1891 when he went to Vienna Technical University. He worked there until 1901.

After the departure of professor PESCHKA to Vienna, descriptive geometry was taught by OTTO RUPP (1854–1908) in the years 1892–1908. In 1910, there was a difficult situation at the German Technical University in Brno. Not only the position of professor of descriptive geometry, but also the position of professor of mathematics was vacant after the death of professor BIERMANN. Soon it became evident that it would be much easier to find a suitable candidate for the professor of mathematics, and so in 1910, the position was taken by WAELSCH.

From 1927 to 1929, descriptive geometry was taught by professor of mathematics WEYRICH. In 1929 JOSEF KRAMES (1897–1986) was appointed professor of descriptive geometry. KRAMES studied at Vienna University and Vienna Technical University, then he worked as an assistant and *Privatdozent* of descriptive geometry at Vienna Technical University. Before his arrival to Brno he substituted in the Technical University. In 1932 he decided to leave Brno and go to Graz Technical University. Later he taught at Vienna Technical University.

The last professor of descriptive geometry in Brno was RUDOLF KREUTZINGER (1886–1959). He was born in Brno and studied at Brno Technical University and then at University and Technical University in Vienna. In 1931 he habilitated for descriptive geometry in Brno. In 1935 he was appointed professor of descriptive geometry and remained in this position until 1945.

Finally we can mention EMIL KOUTNÝ (1840–1880) who worked as an assistant of descriptive geometry and habilitated in Brno in 1867. In 1870 KOUTNÝ was appointed professor of descriptive geometry at Graz Technical University.

Conclusion

As we can see, several future teachers of mathematics and descriptive geometry at Vienna Technical University taught at the Brno school: ANTON WINCKLER, EMANUEL CZUBER, GUSTAV PESCHKA, KARL CARDA, JOHANN RADON, LOTHAR SCHRUTKA, JOSEF KRAMES. VALENTIN TEIRICH became a headmaster at a *Oberrealschule* in Vienna. EMIL KOUTNÝ, OSKAR PEITHNER VON LICHTENFELS, FRANZ HOČEVAR, KARL MAYR, LUDWIG HOLZER, and LOTHAR KOSCHMIEDER went to the Technical University in Graz. RICHARD VON MISES, ERNST FISCHER, and HEINRICH TIETZE, later teachers at prestigious schools in Germany, began their teaching careers at the Brno Technical University.

Among the applicants for positions at the Technical University of Brno, names of future professors of Vienna University can be found:[1] HANS HAHN (1910, 1911), ANTON HUBER (1927), GUSTAV KOHN (1886, 1891), ALFRED TAUBER[2] (1895), WILHELM WIRTINGER (1891). Other applicants later worked at Vienna Technical University: LUDWIG ECKHARDT (1927), JOSEF KOLBE (1849), HERMANN ROTHE (1910, 1911, 1921), SIMON SPITZER (1849), KARL STRUBECKER[3] (1933), LEOPOLD VIETORIS (1925).

[1] The dates in brackets state the year when they took part in the competitions in Brno.

[2] He also held lectures at the Technical University.

[3] Lectured also at the University.

Since the 1920s, the contacts with Viennese schools seem to be less frequent and with the exception of JOSEF KRAMES, new professors of mathematics at Brno German Technical University came from Germany.

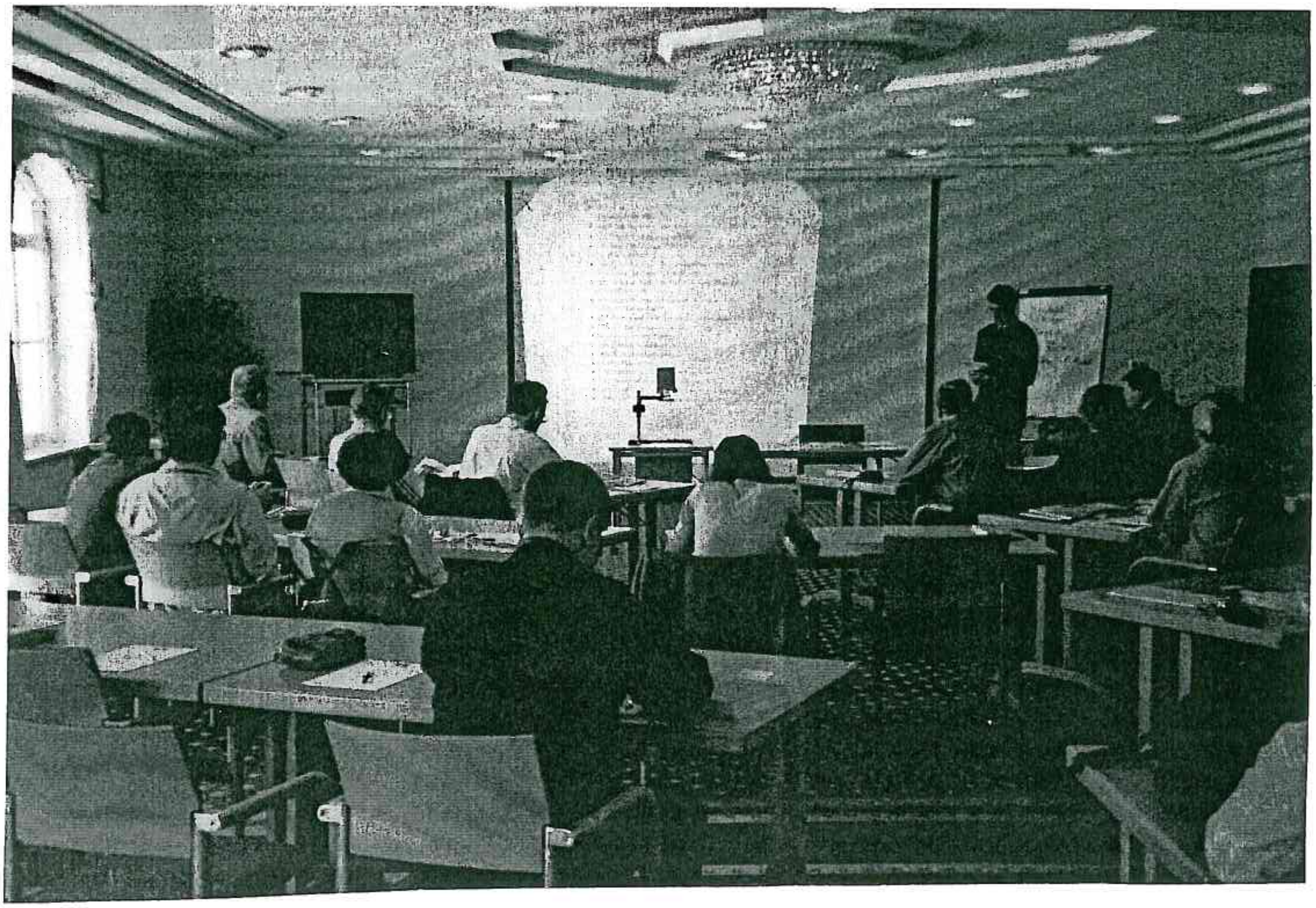
References

1. Moravský zemský archiv (Moravian Provincial Archive) B 34 Německá technika v Brně (German Technical University in Brno).

2. Pavel Šišma, Matematici na německé technice v Brně, (Mathematicians at the German Technical University in Brno), *Dějiny věd a techniky* **34** (2001), 105–128.

3. Alfred Haussner, Geschichte der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn 1849–1924, In *Festschrift der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn zur Feier ihres fünfundsiebzigjährigen Bestandes im Mai 1924*, Brünn: Deutsche technische Hochschule, 1924, 5–92.

4. Karl Hellmer, Geschichte der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn, In *Festschrift der k. k. Technischen Hochschule in Brünn zur Feier ihres fünfzigjährigen Bestehens und der Vollendung des Erweiterungsbaues im October 1899*, Brünn: Die k. k. Technische Hochschule, 1899, 1–102.



FILEP

From Fejér's disciples to Erdős's epsilons – change over from analysis to combinatorics in Hungarian mathematics

by
László Filep, Professor of Mathematics
Institute of Mathematics and Informatics
College of Nyíregyháza, Hungary
e-mail: filepl@zeus.nyf.hu

The first world-wide known names in Hungarian mathematics were those of the two Bolyais: Farkas Bolyai (1775-1856), the father, and János Bolyai (1802-1860), the son who was the co-inventor of non-euclidean geometry.

Since Hungary had only one university with a weak mathematical department Farkas Bolyai gained his mathematical knowledge in Jena and Göttingen partly from his professors, and partly from his schoolmate and life-long friend C.F. Gauss. Later Farkas Bolyai transmitted his knowledge to János Bolyai who received university education in Vienna's military engineering academy from J.W. von Eckwehr (1791-1851). János sent the first draft of his new "absolute geometry" to Prof. Eckwehr in 1825 or 1826. Unfortunately this manuscript has been lost.

The work of the two Bolyais had no effect on contemporary Hungarian mathematics: they were not understood, recognized, and were forgotten. The next stage in the development of Hungarian mathematics started in 1867 with the Compromise (Ausgleichung) between Hungary and the Habsburg dynasty. The new dualist Austrian-Hungarian Monarchy offered a chance to Hungary for independent development. The Hungarian government took big steps in education. In 1868 the parliament accepted an Education Law and shortly established two new universities: Technical University, Budapest in 1871, and "Franz Jozef" University, Kolozsvár (now Cluj, Romania) in 1872.

These two universities became the centre of mathematical research by the end of the 19th. century. Two Gyulas played the main role of this development: Gyula Kőnig (1849-1913) in

Budapest and Gyula Farkas (1847-1930) in Kolozsvár. Similarly to the Bolyais Kőnig and Farkas became scholar at foreign universities, but later made home universities capable for scholar training.

Gyula Kőnig studied at universities of Vienna, Heidelberg and Berlin. He received his doctorate in Heidelberg in 1870 together with the physicist baron Loránd Eötvös (1848-1959). In 1891 Kőnig and Eötvös established the Mathematical and Physical Society. The Society started a periodical for teachers and a yearly mathematical competition for fresh graduate high-school (gymnasium) students. The first competition was held in 1894, and was arranged until 1919 both in Budapest and Kolozsvár. In the same year, a young high school teacher, Dániel Arany launched a Mathematical Journal for Secondary Schools. Besides the Journal (KöMal in Hungarian usage) and the competition (later called Eötvös competition), another main factor contributed to the "overproduction" of Hungarian mathematicians and scientists in 20th century: an effective high-school teacher training: special "Hungarian-type" practicing schools besides the universities and the boarding Eötvös College for eminent student teachers. From these institutions excellent teachers went to high schools armed with problem solving thinking and ability to discover and care talented students.

The first outstanding "products" of the above initiatives were Lipót Fejér (1880-1959) and Frigyes Riesz (1880-1956) who determined the main direction of the mathematical research in Hungary that was analysis more exactly the theory of Fourier series.

Both Fejér and Riesz were successful problem solvers of Kömal. Fejér was the second in the 1897 Eötvös Competition (that year Riesz studied in Zürich so could not participate at the contest). After graduating at Budapest University they went for short study trips abroad. At the invitation of Gyula Farkas they started their university career in Kolozsvár.

Before the broke-out of the first World War, the Hungarian parliament established two more universities in Debrecen and Pozsony (now Bratislava, Slovakia) in 1912, which offered some new job opportunities for graduated disciples of Fejér and Riesz. But in 1918 the war was lost, the Monarchy collapsed. Finally in 1920 the Trianon peace treaty made a new Hungary with 1/3 territory and population. The universities of Kolozsvár and Pozsony found themselves outside the new borders, and the staff were expelled by the new rulers. Fortunately

Fejér went to Budapest University in 1911, but Riesz remained in Kolozsvár and had to move to Szeged together with the whole staff in 1919.

Before the war only two noted mathematicians (analysts) went abroad to work: Lajos Schlesinger (1864-1933) to Germany, and Marcel Riesz (1886-1969) to Sweden. After the war the unemployment and later the fascism forced many eminent mathematicians (and other scholars) to emigrate:

- Gyula Pál (1881-1946), analysis and topology, Denmark
- Pál Dienes (1882-1952), analysis, England
- Ottó Szász (1884-1952), analysis, Germany-USA
- Aurél Wintner (1903-1958), analysis, Germany-USA
- Mihály Fekete (1886-1957), analysis, Jerusalem
- György Pólya (1887-1985), analysis, Switzerland-USA
- Gábor Szegő (1895-1985), analysis, Germany-USA
- Tibor Radó (1895-1965), analysis, Germany-USA
- János Neumann (1903-1957), mathematics, Germany-USA
- Paul Erdős (1913-1996) discrete mathematics, Germany-USA

A. Wintner, M. Fekete, G. Pólya, G. Szegő, J. Neumann and P. Erdős were students of Lipót Fejér at Budapest University, while T. Radó studied mathematics at Szeged University from Frigyes Riesz. Besides T. Radó's emigration another loss came upon the Szeged analysis school: the death of Alfréd Haar (1885-1933).

Fortunately, together with the decline of analysis research a new school started to formulate around Dénes Kőnig (1884-1944), professor of Budapest Technical University, son of Gyula Kőnig in graph theory. Thank to the two Páls: Pál Erdős and Pál Turán (1910-1976), professor of Budapest University, combinatorics (including graph theory) became the most typical Hungarian research area in the second half of the 20th century.

Pál Erdős was a globetrotter without any permanent job and residency. In spite of this he belonged to the Hungarian mathematical life. Reasoning for his Wolf-prize (1983) the following was written:

FILEP

Paul Erdős (1913-   ), Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary, for his numerous contributions to number theory, combinatorics, probability, set theory and mathematical analysis, and for personally stimulating mathematicians the world over.

Erdős's stimulating work was the most intensive in Hungary. During his frequent visits he always looked for young talents (epsilons in Erdős's language) around the country. Thanks to him, Paul Turán and other professors, as well as the KöMal, and competitions most of the discovered talents became later noted mathematicians – and member of the Hungarian Academy of Sciences, such as László Babai, Béla Bollobás, András Hajnal, László Lovász, Endre Szemerédi. Another child prodigy, Lajos Pósa, after inventing important theorems in graph theory at 16, later dedicated his life to talent care, namely to preparation of the Hungarian team to International Mathematical Olympiads.

Béla Bollobás wrote fundamental works on graph theory, especially on external graph theory initiated by Pál Turán. He and other Erdős's epsilons work in better historical circumstances than Fejér's disciples. Living in a democratic society they can work even settled down abroad without losing Hungarian citizenship. Thus they remain Hungarian mathematicians wherever they live, not only "Hungarian-born" as before. This is the case of the Wolf-prize winner (1999) László Lovász on whom the Wolf-committee wrote:

László Lovász (1948-   ), Yale University, New Haven, Connecticut, U.S.A., and Eötvös University, Budapest, Hungary, for his outstanding contributions to combinatorics, theoretical computer science and combinatorial optimisation.

Besides the Wolf-prize Lovász was awarded the Pólya-prize in 1979, which is distributed in the U.S.A. every five years and commemorates György Pólya, the Hungarian-born American mathematician. In 1974 the same prize went to Ender Szemerédi for solving a 1000 dollar worth Erdős problem.

References

1. Filep, L.: Queen of Sciences. The development of mathematics. Typotex, Budapest, 1997. (in Hungarian)

2. Filep, L.: Mathematics. In: Hungarian successes, ed. by L. Somlyódi. ARP, Highland Lakes, NJ, U.S.A. (to appear)

3. Hersch, R. – Steiner, V. J.: A visit to Hungarian mathematics. The Mathematical Intelligencer, 15 (1993), 13-26

4. Kalmár, L.: Mathematics teaching experiments in Hungary. In: Problems in the philosophy of mathematics, ed. by I. Lakatos. North Holland, Amsterdam, 1967. pp. 233-237.

5. Mikolás, M.: Some historical aspects of the development of mathematical analysis in Hungary. Historia Mathematica. 2 (1975), 304-308.

6. Oláh, V. (ed.): Centennial issue of "Kömal". Budapest, August, 1994.

7. Radó, T.: On mathematical life in Hungary. American Mathematical Monthly, 37 (1932), 85-90.

8. Szendrei, J. (ed): Mathematics in Hungary. János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1996

9. Szénássy, B.: History of mathematics in Hungary until the Twentieth Century, Akademiai Kiadó, Budapest 1992

Voss

Waltraud Voss

Oskar Schlömilchs Wirken in Dresden

Oskar Schlömilchs Lehr- und Übungsbücher, die Praxisorientierung mit angemessener Strenge verbanden, prägten Generationen von Studierenden. Schlömilch hat fast sein ganzes Arbeitsleben in Dresden verbracht. Er wirkte zunächst als Professor an der Polytechnischen Schule und arbeitete danach im Ministerialdienst an der Reform des sächsischen Realschulwesens mit.

1. Schlömilch vor dem Eintritt in die Technische Bildungsanstalt

Oskar Xaver Schlömilch wurde am 13. April 1823 im Weimar der ausgehenden Goethezeit geboren. Sein Vater war Kammermusiker am Hof des Großherzogs von Sachsen-Weimar-Eisenach. Sechzehnjährig bezog er die Universität Jena. Das einzige mathematische Ordinariat hatte dort Jakob Friedrich Fries inne, mehr Philosoph als Mathematiker. Von ihm lernte Schlömilch Logik, Psychologie, mathematische Naturphilosophie; auch eine Vorlesung über Physik hörte er bei ihm und eine über endliche Analysis. Fries selber riet ihm nach drei Semestern, das mathematische Studium in Berlin fortzusetzen. In Berlin wurden Steiner und Dirichlet prägend für Schlömilchs wissenschaftliche Entwicklung. Nach einem abschließenden Semester in Wien promovierte er 19-jährig in Jena bei Fries mit einer Arbeit über die Anziehung der Sphäroide. Zwei Jahre später, 1844, folgte – ebenfalls in Jena – die Habilitation, und 1846 wurde er dort zum außerordentlichen Professor berufen. Da sich für Schlömilch in Jena in absehbarer Zeit keine Lebensstellung bot, nahm er eine Stelle als Lehrer am neubegründeten Eisenacher Realgymnasium an, unter Beibehaltung der venia legendi für Jena.

2. Zur Entwicklung der Dresdner Technischen Bildungsanstalt

Im Jahre 1849 wurde Oskar Schlömilch für Dresden gewonnen. Hier war der Dresdner Maiaufstand gerade von sächsischen und preußischen Truppen beendet worden. In dieser politisch bewegten Zeit entstand an der Technischen Bildungsanstalt zusätzliche Unruhe durch die Vakanz zweier wichtiger Lehrämter. Ihr Direktor, der weithin bekannte Physikprofessor August Seebeck, war verstorben. Und Traugott Samuel Franke, der Mathematikprofessor, hatte einen Ruf an die höhere Gewerbeschule Hannover angenommen.
Schlömilch fand wissenschaftlich keine „tabula rasa“ in Dresden vor. Dresdens wissenschaftliches Zentrum war allerdings nicht die Technische Bildungsanstalt, sondern die Chirurgisch-medizinische Akademie, an der so bekannte Forscher wie Carl Gustav Carus (1789-1869), Heinrich Gottlieb Ludwig Reichenbach (1795-1879), Heinrich David August Ficinus (1782-1857) wirkten oder gewirkt hatten.
Die Technische Bildungsanstalt Dresden hatte sich in zwanzig Jahren stetig aufwärts entwickelt und stand vor einem qualitativen Sprung. Sie war 1828

gegründet worden – in einer für Sachsen sehr schwierigen Zeit. 1815, bei der Neuordnung des nachnapoleonischen Europas, hatte Sachsen fast zwei Drittel seines Territoriums und die Hälfte der Bevölkerung an Preußen verloren. Alle Wirtschafts- und Verwaltungsstrukturen mussten neu geordnet werden, - und das unter dem zusätzlichen Druck der Raum greifenden industriellen Revolution. Wirtschaft und Gewerbe mussten dringend auf einen modernen Stand gehoben werden. Diesem Zweck sollte auch die Technische Bildungsanstalt Dresden dienen. Sie erfüllte zunächst mehrere Funktionen mit ihren Ein-, Zwei- und Vier-Jahreskursen. Zum einen ersetzte sie die noch fehlenden Realschulen, zum anderen qualifizierte sie Fachkräfte für das sächsische Bau- und Metallgewerbe, zum dritten drang sie bis zu wissenschaftlicher Bildung vor – für die wenigen, die vier Jahre die Anstalt besuchten; nur zehn durchliefen den ersten Vierjahreskurs. Diese sollten befähigt werden, Neues zu entwickeln. Der Mathematikunterricht schloss auch die Differential- und Integralrechnung und deren Anwendungen ein. Mehr wurde Ende der 20er/Anfang der 30er Jahre auch an vielen Universitäten von der höheren Mathematik nicht geboten.
Zu Schlömilchs Vorgängern gehörte auch Johann Andreas Schubert (1808-1870). Wir kennen Schubert heute vor allem als bedeutenden Techniker und Technikwissenschaftler. Er konstruierte und baute die erste deutsche Dampflokomotive und ist der Schöpfer der einzigartigen Göltzschtalbrücke. Bis 1838 war Schubert jedoch auch der Hauptlehrer für Mathematik.
Kurz bevor Schlömilch nach Dresden kam, hatten die Professoren Schubert und Franke dem Ministerium des Innern – bis 1876 die vorgesetzte Behörde – das wohlbegründete Konzept einer „Polytechnischen Schule als Grundlage aller technischen Fachschulen Sachsens“ vorgelegt, ein kritisches und vorausschauendes Dokument, in dem die nächsten Zukunftsaufgaben für das technische Bildungswesen Sachsens, aber auch für die Gestaltung des Realschulwesens formuliert worden waren.

3. Oskar Schlömilch als Mathematikprofessor in Dresden: 1849-1873

Der Beginn

Am 1. September 1849 hatte Schlömilch seine neue Stelle angetreten. Es war das erste Mal, dass in Deutschland ein Professor von einer Universität an eine technische Bildungseinrichtung wechselte.
Bereits mit Beginn des Lehrkurses 1849/50 begannen Veränderungen in der von Schubert und Franke gezeigten Richtung, – hin zu mehr Wissenschaftlichkeit: Die verschiedenen Lehrziele der Anstalt wurden ausgebaut und neue Lehrgegenstände wurden aufgenommen.
Schlömilch begann seine Dresdner Vorlesungen mit „Analytischer Geometrie im Raume“ für die Untere Abteilung und „Höherer Mechanik“ und „Differential- und Integralrechnung“ für die Obere Abteilung.

Im Jahre 1850 wurde der erst 27-jährige Schlömilch zum Mitglied der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig gewählt. Später folgten Mitgliedschaften in weiteren angesehenen in- und ausländischen Akademien.
1851 erhielt Schlömilch einen Ruf an die Universität Dorpat zu glänzenden Konditionen, und Professor Drobisch aus Leipzig riet ihm sehr, diesen Ruf anzunehmen. Schlömilch hatte für sich jedoch die Dresdner Herausforderung angenommen, er lehnte ab – wie auch bei später an ihn gegangenen ehrenvollen Rufen nach Zürich und Prag.
1851 wurde die Technische Bildungsanstalt zur Polytechnischen Schule erhoben. Neuer Direktor ist Julius Ambrosius Hülsse (1812-1876), gleichzeitig Professor für mechanische Technologie und Volkswirtschaftslehre.

Der wissenschaftliche Schriftsteller
Als Schlömilch nach Dresden kam, hatte er bereits sieben Bücher veröffentlicht, darunter waren die beiden Teile des „Handbuchs der Differential- und Integralrechnung". In der Dresdner Zeit folgten, geprägt durch die eigene Lehrpraxis, unter anderen das „Compendium der höheren Analysis" und das „Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis", jeweils in zwei Bänden. Diese Bücher gehörten im 19. Jahrhundert und weit darüber hinaus zu den wichtigsten Lehrbüchern und Aufgabensammlungen zur Differential- und Integralrechnung. In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts waren in Deutschland französische Mathematiklehrbücher vorherrschend. Dass hier ein Wandel eintrat, ist ganz wesentlich Schlömilchs Verdienst.
Schlömilch war als wissenschaftlicher Autor außerordentlich produktiv. Neben 14 Büchern – meist vielfach aufgelegt und auch in fremde Sprachen übersetzt - publizierte er über 300 Schriften. Fast die Hälfte davon erschien in der „Schlömilchschen Zeitschrift", wie die 1855 von ihm und dem Teubner-Verlag begründete „Zeitschrift für Mathematik und Physik" oft genannt wurde.
Schlömilchs mathematisches Schaffen wurde bestimmt durch die Ideenkreise Cauchys, Dirichlets und Steiners. Er beschäftigte sich mit bestimmten Integralen und Integralrelationen, mit Reihenentwicklungen und Restgliedern, mit höheren Differentialquotienten, mit den Bernoullischen Zahlen. Er forschte zur näherungsweisen Quadratur und zur Theorie der Differenzen und Summen. In die analytische Mechanik gehört das von ihm bearbeitete Problem, Masse und Anziehung eines Körpers bei ungleichförmiger Dichte zu ermitteln, ebenso einige Untersuchungen über das Parallelogramm der Kräfte, über Kettenbrückenlinien und über die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kurve. Dazu kommt die Übersetzung von Duhamels Mechanik. Den Wandel in der Mathematik, geknüpft an Namen wie Riemann, Weierstraß und Cantor, hat Schlömilch nicht mehr mitvollzogen. Er hatte künftige Techniker und Ingenieure mit dem nötigen mathematischen Wissen zu versehen. Und bis in die 90er Jahre des 19. Jahrhunderts hinein beschränkte sich das analytische Rüstzeug der Geodäsie, der technischen Mechanik, der Elektrotechnik und der

Thermodynamik im wesentlichen auf das, was bereits in den Schlömilchschen Lehrbüchern der Analysis in mustergültiger Weise dargestellt war.

Der Pädagoge
Oskar Schlömilch war, wie seine Schüler bezeugten, ein glänzender und mitreißender Lehrer. Über seine pädagogischen und didaktischen Grundanschauungen äußerte er sich einleitend in seinen frühen Büchern. Er vertrat die Auffassung: „Die strengsten Methoden sind, richtig dargestellt, immer die natürlichsten und kürzesten.“ Nach seiner Überzeugung hatte sich der Unterricht an den technischen Schulen von „unfruchtbaren philosophischen Redensarten, wie von einer möglichst eiligen praktischen Abrichtung“ gleichweit entfernt zu halten, ohne die fortwährende Verbindung mit der Praxis zu opfern. Schlömilch wollte zwischen Euler und Cauchy vermitteln, indem er den heuristischen Gedankengang mit mathematischer Strenge vereinte. Die frühzeitige Schulung des räumlichen Anschauungsvermögens hielt er für besonders wichtig, und er forderte deshalb, den Schwerpunkt auf die Stereometrie zu legen, unter Verwendung der Mittel der darstellenden Geometrie. Die übliche Bevorzugung der Planimetrie bezeichnete er als einen pädagogischen Missgriff.

Der Vorsteher der Lehrerabteilung
In den ersten 25 Jahren stellten die „Lehrer“ nach den „Eisenbahnern“ die zweitstärkste Berufssparte unter den Dresdner Absolventen. Die von Anfang an praktizierte Ausbildung von Lehrern wurde im Organisationsprogramm von 1855 erstmals explizit als Aufgabe formuliert und 1862 mit der Bildung der „Lehrerabteilung“ institutionalisiert, vor den entsprechenden Institutionalisierungen an den Polytechnika in Zürich (1866) und München (1868). Schlömilch war der Initiator der Lehrerabteilung gewesen; er wurde ihr Vorstand und blieb es bis 1874. Mit Gründung der Dresdner „Lehrerabteilung“ wurde ein Schritt hin zur Statusangleichung der Polytechnischen Schule Dresden an die Landesuniversität Leipzig getan. Für die Mathematiker und Naturwissenschaftler war mit der Lehrerbildung nun offiziell eine eigene Aufgabe erschlossen worden - neben der Vermittlung der Grundlagen für die Fachstudien der technischen Abteilungen. Analog hatten sich früher die philosophischen Fakultäten der Universitäten gegenüber den „höheren Fakultäten“, der juristischen, der medizinischen und der theologischen, profiliert.
Bei dem Studium in der Lehrerabteilung wurde großes Gewicht auf die Anschauung und die Anwendungen gelegt, ohne dass die reine Mathematik zurücktrat. Die Studierenden hörten Vorlesungen über analytische Geometrie und höhere Analysis - eingeschlossen Differentialgleichungen -, Reihenlehre, doppelt-periodische Funktionen, Projektionslehre, Mechanik, Geodäsie. Im Stundenplan der Lehrer nahmen aber auch Maschinenbauvorlesungen und Physik, Chemie und andere Naturwissenschaften – jeweils in Theorie und Praxis

- einen breiten Raum ein. Hinzu kamen Vorlesungen von allgemeinbildendem Charakter, so Literaturgeschichte im ersten und zweiten Jahr und Volkswirtschaftslehre und Philosophische Propädeutik im dritten und letzten Jahr. Die Dresdner Lehrerstudenten hatten zweifellos ein anspruchsvolles Studium zu absolvieren, das in seinen theoretischen Anforderungen kaum hinter einem Universitätsstudium zurückstand, in seiner angewandt-mathematischen Ausrichtung dieses aber bei weitem übertraf. Damit fand sich in den 60er Jahren in Dresden bereits das, was im Deutschland der 90er Jahre des 19. Jahrhunderts dann als für die Lehrerbildung unumgänglich aufs Tapet kam – die Aufnahme der angewandten Mathematik in das Ausbildungsprogramm für künftige höhere Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften.
Zu den Absolventen der Dresdner Lehrerabteilung gehörten (1864) Louis Burmester, später Professor in Dresden und München und noch heute durch seine Kinematik bei Getriebetechnikern in der ganzen Welt bekannt, und (1871) Georg Helm, später Professor der angewandten Mathematik und mathematischen Physik in Dresden.

Interdisziplinäres Wirken Schlömilchs
Schlömilchs enge Zusammenarbeit mit dem Sächsischen Ingenieurverein begann bereits 1850. Mehrfach stand er an der Spitze des Vereins. 1893 wurde ihm die Ehrenmitgliedschaft verliehen, - in einer Zeit, in der an vielen deutschen technischen Hochschulen und in weiten Ingenieurkreisen die „antimathematische Bewegung" an Stärke gewann.
Schlömilch gehörte zu den Dresdner Mathematikern, die weit über ihre eigene Wissenschaft hinaussahen, nicht nur in den naturwissenschaftlich-technischen Bereich, sondern auch in die Kulturwissenschaften hinein. Seit 1853 beteiligte er sich an den öffentlichen Vortragsreihen des Professorenkollegiums auch mit Vorträgen zur Philosophie und ihrer Geschichte, ebenso trat er in den Hauptversammlungen der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis zu Dresden mit philosophischen Vorträgen auf. Und seit 1868 bot er an der Polytechnischen Schule eine Philosophievorlesung an.

4. Schlömilchs Beitrag zum Ausbau des sächsischen Realschulwesens
1874 wurde Oskar Schlömilch als Referent für das Realschulwesen in das Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts berufen.
Höhepunkt und Abschluss seines Wirkens war das 1884 erlassene Realschul-Gesetz, das nun auch in Sachsen die seit langem nicht mehr zeitgemäße Bevorrechtung der humanistischen Gymnasien endgültig aufhob. Der Lehrplan für den Mathematikunterricht trug seine Handschrift.
1885 trat Schlömilch aus gesundheitlichen Gründen in den Ruhestand. Er starb am 7.2.1901.

<u>Quellen</u>

1. Archivalien

Sächsisches Hauptstaatsarchiv, Ministerium für Volksbildung
Nr. 15470, 15393, 15251, 15252, 15320

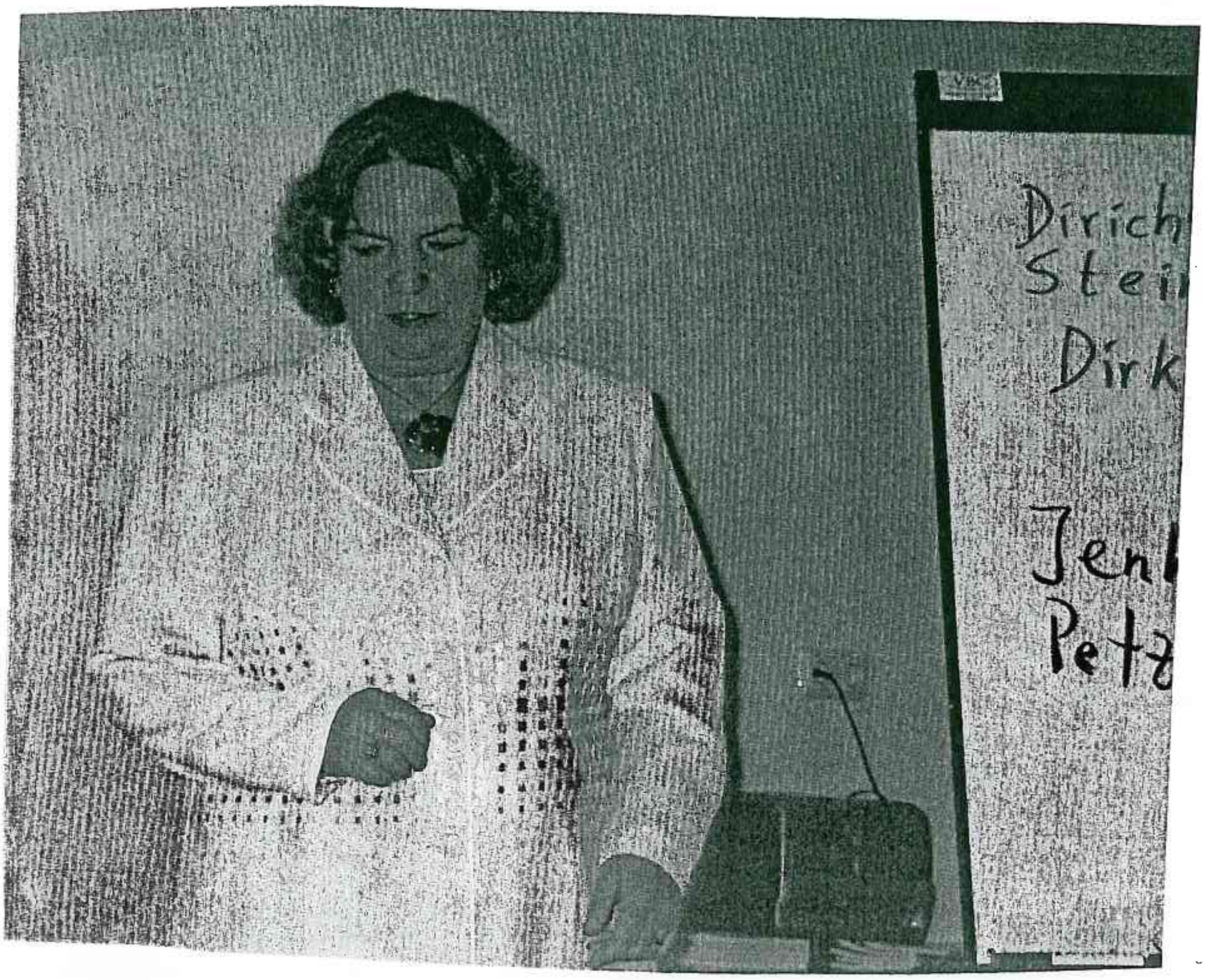
Archiv der TU Dresden
Professorenkarten und Beilagen von Gotthelf August Fischer, Johann Andreas Schubert, Traugott Samuel Franke

2. Literatur (Auswahl)

Fuhrmann, Arwed: Oskar Schlömilch +. – In: Centralblatt der Bauverwaltung, XXI. Jahrgang, 1901, vom 16. Februar 1901
Helm, Georg: Oskar Schlömilch. – In: Zeitschrift für Mathematik und Physik, 46. Band, 1901, 1. und 2. Heft, S. 1 - 7
Hensel, S./ Ihmig, K.-N./ Otte, M.: Mathematik und Technik im 19. Jahrhundert in Deutschland, Göttingen 1989
Koch, Helga: Oskar Xaver Schlömilch: Mathematiker, Wissenschafts- und Bildungsorganisator. – Dissertation von 1986, verteidigt an der Pädagogischen Hochschule „Karl Friedrich Wilhelm Wander“ Dresden
Krause, Martin: Oscar Schlömilch. – In: Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-phys. Classe, 1901, S. 509 - 520
Krause, Martin: Über die Ausbildung von Lehrern der mathematisch-naturwissenschaftlichen Richtung an der technischen Hochschule zu Dresden. – In: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Jahrgang XIII bis XV, 1907 – 1909, S. 46 – 56
Lorey, Wilhelm: Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts, Leipzig und Berlin, 1916 (B. G. Teubner)
Müller, Georg: 100 Jahre Sachsens Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts, Dresden 1931
Riedrich, Thomas: O. Schlömilch – G. Helm – E.I. Trefftz – F.A. Willers: 100 Jahre anwendungsorientierte Mathematik an der TH Dresden. Vortrag auf der Tagung der Fachsektion Geschichte der Mathematik der DMV, Bautzen 1999
Witting, Alexander: Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen, Leipzig und Berlin 1910
Voss, Waltraud: Die Dresdner Mathematiker seit 1828 – eine Studie (unveröffentlicht) – Arbeitsstelle Geschichte der TU Dresden, 1998

24 Oskar Schlömilch

Die Dresdner Polytechnische Schule am Antonsplatz (1846-75)



ČANAK

ÜBER DIE GLEICHUNGEN VOM FALTUNGSTYPUS

Miloš Čanak, Beograd

I

Die Gleichungen vom Faltungstypus erscheinen in verschiedenen und zahlreichen Problemen der klassischen mathematischen Physik, Technik, Ökonomie u.a. Das Auflösen der integral- und anderen Gleichungen vom Faltungstypus gründet sich auf den Integraltransformationen. Dabei besteht ein tiefer Zusammenhang mit den verallgemeinerten und Greenschen Funktionen, wie auch mit der Randwertaufgabe von Riemann für die analytischen Funktionen auf der reellen Achse.

Die Integraltransformationen wurden am Anfang des XIX Jahrhundertes in den Arbeiten von Fourier und Laplace und speziell in der Theorie der Wärmeleitung systematisch genützt. Am Ende des gleichen Jahrhundertes hat O. Heaviside auf Grund der elektrotechnischen Problemen eine Operationsrechnung ausgebildet. Die Gründe dieser "symbolischen Rechnung" haben noch früher die russischen Mathematiker Vaščenko-Zaharčenko und Letnikov ausgebildet, aber ihre Arbeiten haben kein grösseres Publizität erhalten. In der Operationsrechnung von Heaviside wurden die Operationen der Differentiation und Integration mittels der formalen Regeln mit den algebraischen Operationen getauscht. Mit Hilfe dieser Rechnung hat Heaviside die gewöhnlichen Differentialgleichungen mit den konstanten Koeffizienten, wie auch einige einfache partielle Differentialgleichungen gelöst. Es existierte kein exakter mathematischer Beweis aber trotzdem erhielt er immer korrekte Resultate.

Am Anfang des XX Jahrhundertes wurde festgestellt, dass im Grunde der Operationsrechnung die Integraltransformationen und speziell der Faltungssatz liegen.

Es sei $f(t)$ eine gegebene Funktion, die auf der ganzen x-Achse integrierbar ist. Dann definiert man die Fouriersche Transformation dieser Funktion durch die Formel

$$V\,f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt = F(x) \quad , -\infty < x < \infty \quad . \tag{1}$$

Der inverse Operator V^{-1} besitzt die folgende Form

$$(V^{-1}F)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cdot e^{-ixt}dx = f(t) \quad . \tag{2}$$

Für die gegebenen Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ definiert man die Faltung mit Hilfe der Formel

$$h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\cdot g(s)\,ds \quad . \tag{3}$$

Man kann zeigen, dass die Faltung von zwei Funktionen durch Anwendung der Fourierschen Transformation ins Produkt der Abbildungen einzelner Funktionen übergeht, d.h.

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\cdot g(s)\cdot ds\right) = F(x)G(x) \quad . \tag{4}$$

II

Randwertaufgabe von Riemann stellt die Grundmethode für das Auflösen der Gleichungen vom Faltungstypus dar. Sie erscheint in vielen anderen Gebieten der Mathematik, wie auch in zahlreichen Anwendungen. Eine vollständigste Theorie dieser Aufgabe befindet sich in der Monographie [1] von F.Gahov. Das Problem wurde zum ersten mal von F.Gahov/1937/, (siehe [2]) gelöst. Eine historische Überblick hat M.Čanak [3] gegeben. Hier betrachten wir nur den Fall, wenn die Kontur L reelle Achse ist.

Randwertaufgabe R: Es seien die reellen, stetigen Funktionen $D(x)$ und $H(x)$ gegeben. Man soll zwei Funktionen $F^{\pm}(z)$, die analytisch in der oberen und unteren Halbebene sind und die auf der x-Achse der Randbedingung

$$F^{+}(x) = D(x)\cdot F^{-}(x) + H(x) \tag{5}$$

genügen, bestimmen. Es gilt der folgende

Satz: Wenn der Index $\varkappa$ der Randwertaufgabe grösser als Null ist ($\varkappa > 0$) so sind die homogene und nichthomogene Randwertaufgabe von Riemann unbedingt lösbar und ihre Lösung

$$F(z) = X(z)\cdot \Psi(z) \tag{6}$$

enthält $\varkappa$ beliebigen Konstanten. Im Falle $\varkappa < 0$ besitzt die homogene Aufgabe nur triviale Lösung. Die nichthomogene Aufgabe besitzt die eindeutige Lösung wenn die Lösbarkeitsbedingungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(t)}{X^{+}(t)}\cdot\frac{dt}{(t+i)^{k}} = 0 \quad , \quad k = 1,2\,\ldots\,|\varkappa| \tag{7}$$

gelten. Dabei gelten auch die folgenden Formeln:

ČANAK

$$\varkappa = \mathrm{Ind}\, D(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg D(x)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\ \ln D(x)$$

$$X^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)} \quad , \quad X^{-}(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\varkappa} e^{\Gamma^{-}(z)}$$

$$\Gamma^{+}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \gamma(t) e^{izt}\, dt \quad , \quad \Gamma^{-}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} \gamma(t) e^{izt}\, dt$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\varkappa} D(t)\right] e^{-ixt}\cdot dt$$

$$\Psi^{+}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \Psi(t)\cdot e^{izt}\, dt \quad , \quad \Psi^{-}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} \Psi(t) e^{izt}\cdot dt$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(t)}{X^{+}(t)}\, e^{-ixt} dt \quad .$$

III

Die einfachste Integralgleichung vom Faltungstypus besitzt die Form

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\, f(s)\, ds = g(t) \quad , \quad -\infty < t < \infty \tag{8}$$

wobei $k(t)$ und $g(t)$ gegebene, integrierbare Funktionen sind. Durch Anwendung der Fourierschen Transformation geht die Gleichung (8) in die algebraische Gleichung

$$F(x) + K(x)F(x) = G(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{9}$$

über. Wenn die Normalbedingung

$$1 + K(x) \neq 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{10}$$

gilt, so besitzt die eindeutige Lösung von (9) die Form

$$F(x) = \left[1 + K(x)\right]^{-1}\cdot G(x) \quad . \tag{11}$$

Durch Anwendung der inversen Fourierschen Transformation bestimmt man die eindeutige Lösung der Gleichung (8) in der Form

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + K(x)\right]^{-1} G(x)\, e^{-ixt} dx \quad , \quad -\infty < t < \infty \quad . \tag{12}$$

In einigen Problemen der mathematischen Physik erscheint die Integralgleichung mit zwei Kernen

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} k_1(t-s) f(s)\, ds + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} k_2(t-s)\cdot f(s)\, ds = g(t) \quad . \tag{13}$$

$$-\infty < t < \infty$$

Wenn man die gesuchte Funktion als Unterschied von zwei einseitigen Funktionen

$$f(t) = f_{+}(t) - f_{-}(t) \tag{14}$$

mit

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases} \quad , \quad f_-(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t > 0 \\ -f(t) & , \quad t < 0 \end{cases}$$

schreibt, so geht die Gleichung (13) in

$$f_+(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s) f_+(s)\,ds - f_-(t) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s) f_-(s)\,ds = g(t) \quad , \quad -\infty < t < \infty \tag{15}$$

über. Durch Anwendung der Fourierschen Transformation erhält man

$$F^+(x) + K_1(x) F^+(x) - F^-(x) - K_2(x) F^-(x) = G(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \,. \tag{16}$$

Aber die Relation (16) stellt die Randwertaufgabe von Riemann in der Form

$$F^+(x) = D(x) F^-(x) + H(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{17}$$

mit

$$D(x) = \frac{1 + K_2(x)}{1 + K_1(x)} \quad , \quad H(x) = \frac{G(x)}{1 + K_1(x)}$$

dar. Die Lösung der Gleichung (13) bestimmt man auf Grund der Formel

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[F^+(x) - F^-(x) \right] e^{-ixt}\,dx \quad , \quad -\infty < t < \infty \tag{18}$$

wobei $F^+(x)$ und $F^-(x)$ die Lösungen der Randwertaufgabe von Riemann sind.

Ähnlich gilt auch für die einseitige Integralgleichung von Wiener-Hopf

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} k(t-s) f(s)\,ds = g(t) \quad , \quad 0 < t < \infty \,. \tag{19}$$

Diese Gleichung stellt einen speziellen Fall der Gleichung (13) dar. Wenn wir die Werte

$$k_1(t) = k(t) \; , \; k_2(t) = 0 \quad , \quad g(t) = g_+(t) = \begin{cases} g(t) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases} \tag{20}$$

in die Gleichung (13) einsetzen, so stellt die Lösung von (13) gleichzeitig auch die Lösung der einseitigen Gleichung (19) dar. Umgekehrt, wenn wir die Gleichung (19) auch auf der negativen Halbachse, durch Einführung der einseitigen Funktionen $f_-(t)$ und $f_+(t)$ ($f_+(t) = f(t)$ für $t > 0$) definieren, so erhalten wir die Gleichung

$$f_+(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s) f_+(s)\,ds = f_-(t) + g_+(t) \tag{21}$$

die einen speziellen Fall der Gleichung (13) darstellt.

Durch Anwendung der Fourierschen Transformation auf (21), erhält man die Randwertaufgabe von Riemann

$$F^{+}(x)=\frac{1}{1+K(x)}\,F^{-}(x)+\frac{1}{1+K(x)}\,G^{+}(x)\quad,\quad -\infty < x < \infty\quad. \tag{22}$$

Die Lösung der Anfangsgleichung von Wiener-Hopf hat die Form

$$f(t)=f_{+}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F^{+}(x)\,e^{-ixt}\,dx\quad,\quad t>0\quad. \tag{23}$$

IV

Die Methode der Integraltransformationen haben zum ersten Mal G.Dötsch (1923,1925) und V.Fok (1924), (siehe [4], [5], [6]) für das Auflösen der Integralgleichung

$$f(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t}k(t-s)f(s)ds=g(t)\ ,\quad t>0 \tag{24}$$

genützt. Sie haben die Faltungsformel ausgeführt und die Gleichung (24) gelöst.

Einen wichtigen Fortschritt in der Theorie der Integralgleichungen vom Faltungstypus stellt die Arbeit von Wiener-Hopf "Uber eine Klasse singulärer Integralgleichungen"(1931) dar. Die einseitige Gleichung von Wiener-Hopf wurde durch eine Methode, die ähnlich mit der Methode der Randwertaufgabe von Riemann ist, gelöst. I.Rapoport (1948-1949), (siehe [8], [9]) nützte zum ersten mal die erwähnte Methode zum Auflösen der Faltungsgleichungen. Diese Methode wurde später in verschiedenen Problemen der mathematischen Physik genützt.

Der folgende Schritt (1953) war die Arbeit "O nekotorih osobih integraljnih uravnenijah" von J.Čerskii (siehe [10]). Er hat zum ersten Mal die Gleichungen mit zwei Kernen eingeführt und auf die Lösungsmethode hingewiesen.

Die Operationsrechnung wurde noch am Anfang zum Auflösen der Differentialgleichungen genützt. Einige Verfasser behaupten, dass das Auflösen der Differentialgleichungen einen Anlass, ein Motiv und eine Ursache für die Erscheinung dieser Rechnung darstellt. Es ist bekannt dass die folgende Eigenschaft

$$Vf^{(k)}(t)=(-ix)^{k}F(x)\quad,\quad k=1,2\ \ldots\ n \tag{25}$$

gilt.Daraus folgt,dass bei Anwendung der Fourierschen Transformation,die gewöhnliche Differentialgleichung in eine algebraische und die partielle Differentialgleichung mit zwei Veränderlichen in eine gewöhnliche Differentialgleichung übergeht.Diese Methode wurde speziell bei Auflösen der gemischten Randwertaufgaben für die Gleichungen der mathematischen Physik genützt.

A.Danilevskii (1936) , (siehe [11]) hat zum ersten Mal eine solche gemischte Aufgabe über den Verlauf in einer zylindrischen Elektrode gelöst.L.Vainštain (1947), (siehe [12]) nützte die Faktorisationsmethode von Wiener-Hopf in einigen Problemen der Difraktionstheorie.J.Čerskii [13] hat die Theorie und Anwendungen der Randwertaufgabe von Riemann in verschiedenen gemischten Problemen verarbeitet.W.Koiter (1955),(siehe [14]) reduzierte zum ersten Mal ein Problem der mathematischen Physik auf die Randwertaufgabe von Karleman.

- - - - - - - - -

L I T E R A T U R

[1] Gahov F.,"Kraevie zadači",Moskva,"Nauka",1977.

[2] Gahov F.,"O kraevoi zadače Rimana",Matem.sb. 2(44),1937,673--683.

[3] Čanak M.,"Einige Richtungen in der historischen Entwicklung der klassischen Theorie der Randwertaufgaben",Neuhofen,I Symposium zur Geschichte der Mathematik,1986,s.82-86.

[4] Dötsch G.,"Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus",Math.Annalen,89(1923), 192-207.

[5] Dötsch G.,"Bemerkung zu der Arbeit von V.Fock",Math.Zeit., 22(1925),785-791.

[6] Fok A.,"Uber eine Klasse von Integralgleichungen",Math.Zeit., 21(1924),161-173.

[7] Wiener N.,Hopf E.,"Uber eine Klasse singulärer Integralgleichungen",Sitz.Acad.Wiss.Berlin,1931,696-706.

[8] Rapoport I.M.,"Ob odnom klasse singuljarnih integraljnih uravnenii",DAN SSSR,59,8 (1948),1403-1406.

[9] Rapoport I.M.,"O nekotorih parnih integraljnih uravnenijah" Sb.tr.in-ta matem. AN USSR 12(1949),102-118.

[10] Čerskii J.I.,"O nekotorih osobih integraljnih uravnenijah" Uč.zap.Kazansk. un-ta,113,10,(1953).

[11] Danilevskii A.,"Pro razpodih strumu v cilindrovomu ellektrodi",Zap.Naukovo-doslid in-tu mat.meh.HGU,13,ser.4,vip.1(1936).

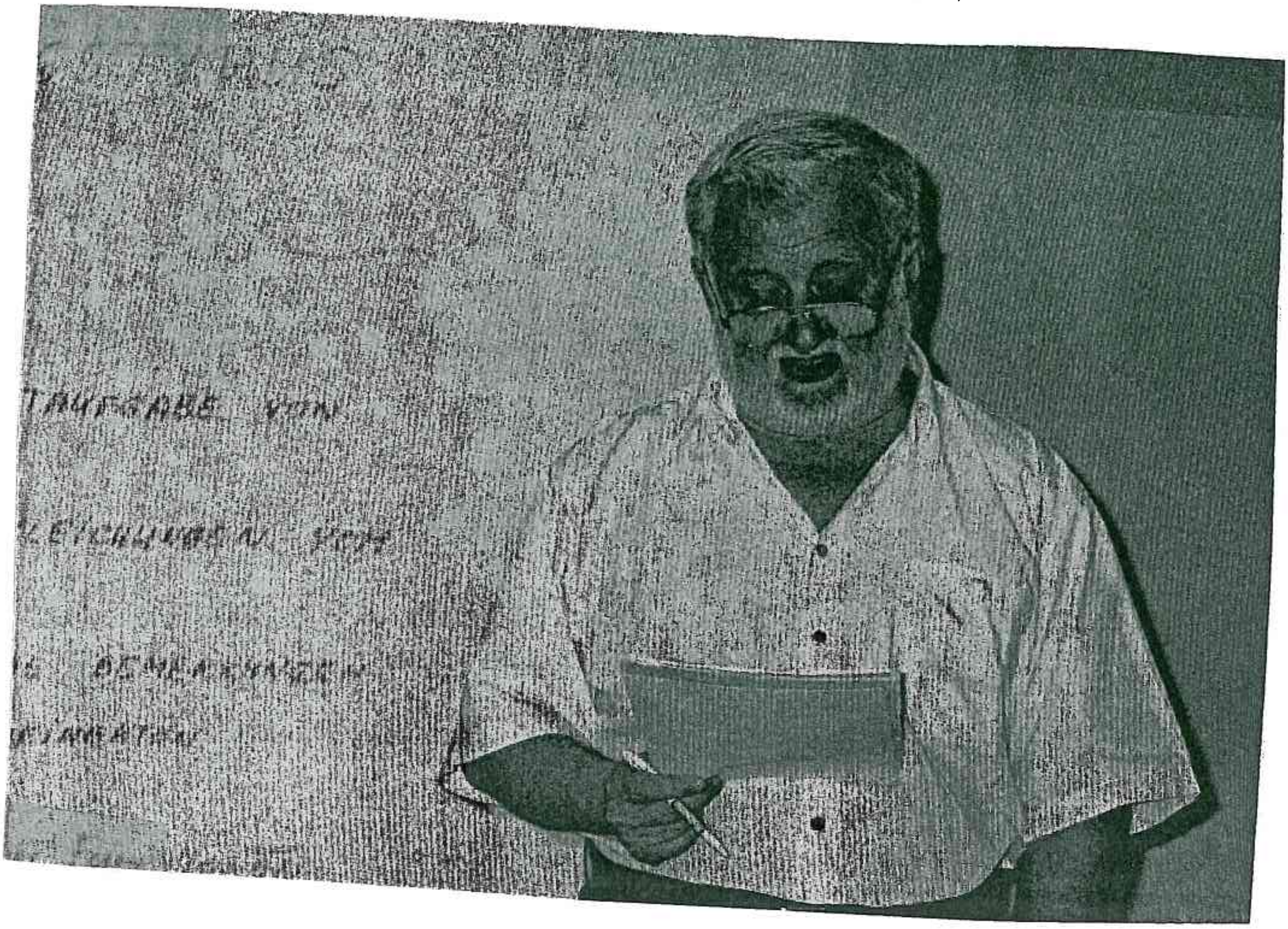
[12] Vainštein L.,"Teorija difrakcii i metod faktorizacii", Moskva,"Sov.radio",1966.

[13] Čerskii J.,"O svedenii smešannih graničnih zadač k kraevoi zadače Rimana",DAN SSSR,116,6(1957),927-929.

[14] Koiter W.,"On the diffusion of load from a stiffener into a sheet",Quart.J.Mech.and Appl.Math.8,2(1955).

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

Anschrift:Prof.Dr.Miloš Čanak
11000 Beograd
Brzakova 4
Jugoslawien



Katalin Munkácsy (Budapest)

History in Pictures

There are three elementary geometries: Euclidean, spherical and hyperbolic geometry.I have been looking for historical data that prove that the parallelism in geometry is natural, and precedents can be found not only in ancient Greek history, but also in the Hungarian history of science.

The acknowledgment of Euclidean geometry as the only true geometry was only a short deviation in the history of European science. Following the romantic ideas of the 19th century, we are inclined to believe that the Greeks claimed that the angles of the triangle sum up to 180 degree. That is a false belief. Euclid and the other great Greek mathematicians claimed rather that if we suppose that the axioms are true, then different statements follow. For example, we can say that if we postulate that the axiom of parallelism holds, then it follows that the angles of the triangle sum to180 degrees.

According to the studies of Imre Tóth, we can suppose – and this assumption is based upon more than mere analogies – that the acceptance of the Fifth Postulate was a positive choice. We know that even Archimedes consciously decided in favour of the Archimedean axiom, although we have unquestionable evidence that his computation of the area of the section of the parabola is based upon infinitesimals. The acceptance of the existence of infinitesimals means the negation of the Archimedean axiom. Thus, Archimedes used two different, mutually incompatible, mathematical architectures, indicating a clear difference between them.

Imre Tóth has used philology as a tool to show that there exist data in Greek geometry which refer to several types of geometry: those that we call Euclidean, and also the hyperbolic type.

The records about hyperbolic geometry were found only in the 20th century. On the other hand, knowledge of the spherical geometry has existed for millennia, not as an alternative geometry, but rather as the science describing the geographical environment on a cosmic scale. The Greeks were aware of several data indicating the Earth's spherical shape, but had no clear evidence to prove that fact. Eratosthenes, who had calculated the Earth's radius based upon a clever, simple and easily reproducible measurement, was convinced that the Earth is spherical, but this view was not generally accepted. It could be said that the Greeks did not know that the Earth is spherical, but they did know that, if it were so, they could determine the value of the radius.

Knowledge of the Earth's spherical shape has been preserved, in the most picturesque way, in the map constructed in the 3d century by Ptolemy, which plots the Mediterranean while showing the Earth's Grid.

A tract summarising spherical trigonometry was also written, so spherical geometry was developed in the West-European culture long ago.

In the beginning, an odd kind of duality existed.

Archaeological and ethnographical records show that, in the early stage of cultures, people thought of the Earth as a flat disc. Their views referring to the universe can be symbolised by the tree of life. Let us recall our own personal memories. In childhood, we all thought of the world as a flat thing, and when first we learned that the Earth was spherical, we knew that it was impossible: people living on the opposite side would have fallen off.

This duality – the result of personal perception on one hand, and knowledge coming from antiquity on the other hand – was characteristic of the European, and consequently of the Hungarian, way of thinking in the Middle Ages.

There are also records of views accepting the spherical nature of the Earth from very early times. In about 1000CE, St. Stephen founded schools where scholars were educated for the Church. The curriculum included *computus* – that is, the method calculating the date of Easter – as an important discipline. The Council of Nicea determined a method for calculating the date of Easter based upon planetary motion. Hungary's first, 15th century, map and its further revisions preserving the Earth Grid of longitude and latitude were made using Ptolemy's map.

The calculations of the *computus* could be made mechanically.

It is likely that the meaning of the signs at the map's margin was not clear either to the constructors or to the users.

King Matthew had obtained a globe from Regiomontanus. (May be only few people understood the meaning of this object.)

This is clear evidence that there were signs in Hungary, also, roughly contemporary with the efforts of Columbus, that some people were aware of the Earth's sphericity.

Interestingly enough, this knowledge spread almost without attracting any attention, and certainly did not cause as many problems as did the dilemma of geo- and heliocentricity.

Spherical geometry has continued to be developed in Hungary since that time. Maps have been plotted, based no longer upon Ptolemy but rather upon measurements. István Hatvani was the first to carry out measurements on latitudes, which then became standard in the practice of cartography.

The collection of problems of high school mathematics published by Beke and Reif at the end of the 19th century also contained problems on astronomy and geography.

In the 20th century, Roland Eötvös made measurements with his torsional pendulum, to determine the exact geoidal shape of the Earth.

János Bolyai created a new world from the void.

Reimann was the first who studied the consequences of the fact that several geometries coexist – although he did not mention his sources. It was Baltzar who first cited Bolyai's name. His theory started to be taught in Graz, in the 1870-71 academic year.

Gauss – not by chance – was afraid to let mankind learn about the hyperbolic geometry. The coexistence of different geometries led to the revision of the axiomatic structure of mathematics. The results of Gödel and Church seemed to shatter the basic principles of mathematics, but by now, the problems have been solved within the framework of mathematics. The representatives of other sciences were mostly at a loss if they ever faced this question, as Sokal's joke proves. It would be valuable to study comprehensively the similarities and differences between contemporary mathematics and the post-modern sciences. One way to do this would be to follow the historical approach, and to learn the real nature of axiomatic development through studying geometry.

This teaching and learning process might even start at the level of general education. For this, not only the scientific basis but also child-friendly teaching tools are at hand.

MUNKÁCSY

Non-Euclidean Geometry in the Old Maps

Katalin Munkácsy
Eötvös University, Budapest
munkac ludens.elte.hu

1) Ancient Maps and Comtemporary Pictures

Map1
Idea of Hyperbolic Geometry
Map of the World by Hecataeus, 517 B. C.
Showing the primitive ideas held at the time of Pythagoras (Smith)

Compare it to works of Escher, for example:
Cyrcle-limit III, 1959 Washigton
M. C. Escher
Doris Schattschneider – Wallace G. Walker Benedikt Taschen, 1992

Map2
Idea of Euclidean Geometry
Map of the World According to Eratosthenes
This shows the knowledge of the geography of the wordl in the 3rd century B.C. (Smith)

Compare it to new maps of cities or (not too big) countries

Map3
Idea of Spherical Geometry
Ptolemy's Map of the world
This shows the greath growth in the knowledge of geography from the time of Eratothenes 150 A. C. (Smith)

Compare it to globes used in schools

2) Computus

After the Conquest the most important task was to establish and organise Hungarian Kingdom. In about 1000, St. Stephen founded schools where scholars were educated for the Church. The curriculum included computus – that is, the method calculating the date of Easter – as an important discipline. Computus saves the ancient Greek knowledge on the shape of the Earth. Sperical Geometry (Szénássy)

3) Tree of life

Pictures, eletfa4, eletfa5

The religious beliefs of the ancient Hungarian was the shamanism.In Shamanistic beliefs the world is divided several layers: the middle layer is our own world the upper one is the realm of gods and spirits, whilst the lowermost layer is the abode of malevolent spirits. These layers are connected by a wondrous tree, the Tree of Life or the World Tree. (Fodor)

Tree of life saves the knowledge of ancient Hungarian and other people on the shape of the Earth It is close to Hyperbolic Geometry

MUNKÁCSY

4) **Bibliotheca Corviniana**

In the library was saved the copies of Greek mapes in printed version.

Ptolemaeus, Claudius:
Magnae compositionis libri (seu Almagest)
a Georgio Trapezuntio traducti
The text of the Corvinian manuscript was copied from the Latin version of Trapezuntius who translated Ptolemy from the original Greek into Latin. (Csapodi)

Here worked Regiomontanus, who gave a globe to King Matthias
Regiomontanus, Johannes: Canones LXIII in tabulam primi mobilis cum tabula, cum dedicatione ad regem Matthiam.
Regiomontanus, one of the most eminent astronomers of his age, professor at the University of Vienna and Pozsony, was the astronomer of King Matthias. He dedicated this book to King Matthias and he presented a globe too. This globe has been disappeared, but the letter of Matthias in which he acknowledged the present, survived. (Csapodi)

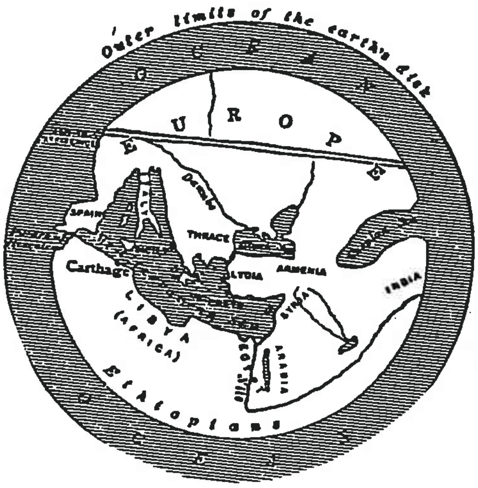
5) **First maps in Western Europe**

Maps were made after the Ptolemy's maps in whole Western Europe in 16 th century.
Ptolemy: Geographike, Printed in Rome, 1478

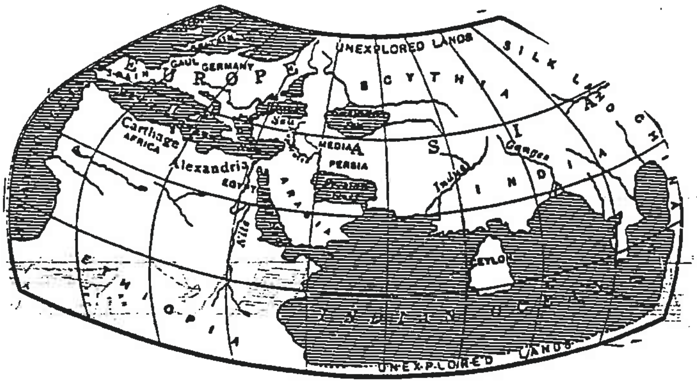
It is interesting, that there are lines of lattitude and longitude without them real sense

References

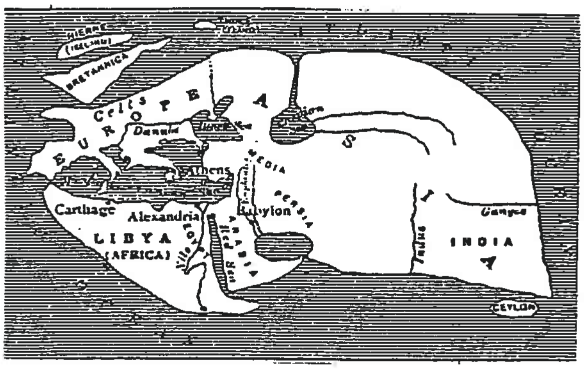
1) D. E. Smith: History of Mathematics, New York 1958
2) P.J. Davis - R. Hersh: The Mathematical Experience, Boston 1981
3) Barna Szénássy: History of Mathematics in Hungary until 20th century
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1992
4) Fodor István
Hungary in Conquest, 1996 Magyar Nemzeti Múzeum
5) Csapodi: Bibliotheca Corviniana
The Library of King Matthias Corvinus of Hungary
Budapest, 1967



MAP 1

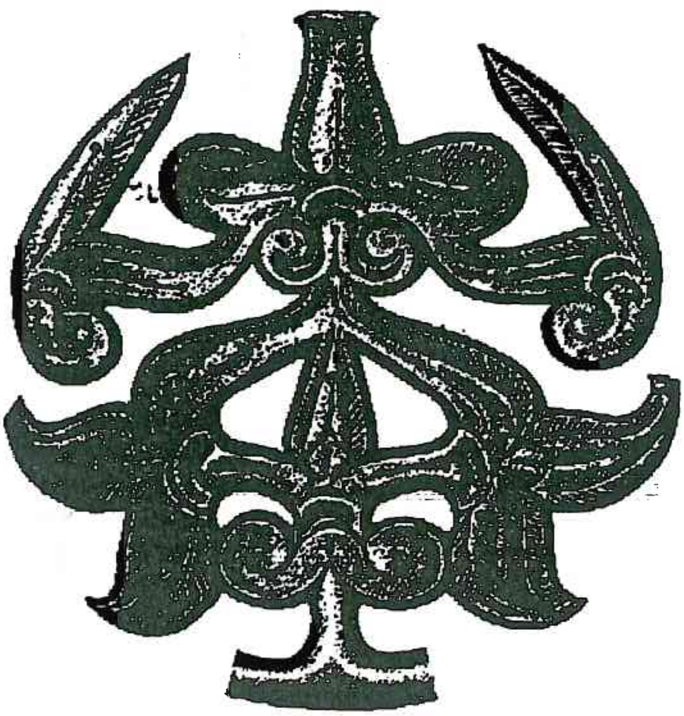


MAP 3



MAP 2

TREE OF LIFE



DEZSŐ

Non-Euclidian geometry and didactic
(celebrating János Bolyai's 200 years)

Gábor Dezső
Babeş-Bolyai University, Cluj, Romania
Department of Psychology and Science of Education
gdezso@math.ubbcluj.ro

1. Preliminaries

Euclid of Alexandria (325 BC-265 BC)
([9] /Euclid.html) was one of the most prominent mathematicians of the antiquity, best known for his treatise on mathematics *The Elements.* He was may be the leading **mathematics teacher** of all time, and *The Elements* was one of the first schoolbooks. in which

- Euclid arranged in order many of Eudoxus's theorems;
- he perfected many of **Thaetetus**'s, and also brought to irrefutable demonstration the things which had been only loosely proved by his predecessors;
- he made the end of the whole "Elements" the construction of the so-called Platonic figures.

The famous fifth, or parallel postulate states that *one and only one line can be drawn through a point parallel to a given line*. Euclid's decision to make this a postulate led to *Euclidean geometry*.

It was not until the 19th century that this postulate was dropped and *non-Euclidian geometries* were studied

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
([9] /Gauss.html) left Brunswick to study at Göttingen University. Gauss's teacher there was Kaestner, whom Gauss often ridiculed. His only known friend amongst the students was **Farkas Bolyai.**

They met in 1799 and corresponded with each other for many years. From the early 1800's Gauss had an interest in the question of the possible *existence of a non-Euclidian geometry.* He discussed this topic at length with Farkas Bolyai and in his correspondence with Gerling and Schumacher. In a book review in 1816 he discussed proofs which *deduced the axiom of parallels from the other Euclidean axioms*, suggesting that he believed in the existence of non-Euclidean geometry, although he was rather vague. Gauss confided in Schumacher, telling him that he believed his reputation would suffer if he admitted in public that he believed in the existence of such a geometry.

In 1831 Farkas Bolyai sent to Gauss his son János Bolyai 's work on the subject. Gauss replied *to praise it would mean to praise myself*.

Again, a decade later, when he was informed of **Lobachevsky**'s work on the subject, he praised its *genuinely geometric* character, while in a letter to Schumacher in 1846, states that he *had the same convictions for* 54 *years* indicating that he had known of the existence of a non-Euclidean geometry since he was 15 years of age (this seems unlikely). From 1850 onwards Gauss's work was again of nearly all of a practical nature although he did approve Riemann's doctoral thesis and heard his probationary lecture.

Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856)
([9] /Lobachevsky.html)

One of the excellent professors **Nikolai I. Lobachevskii**'s on the university from Kazan was **Martin Bartels** (1769 - 1833). Bartels was a school teacher and friend of Gauss and the two corresponded.

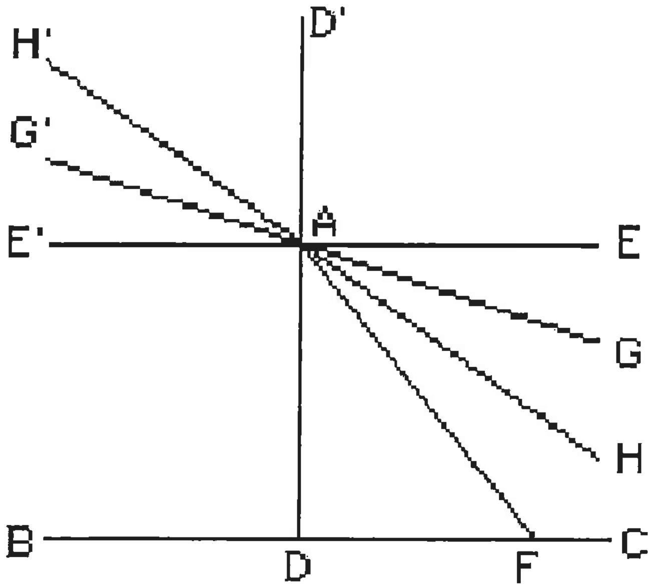
Since Euclid's axiomatic formulation of geometry, mathematicians had been trying *to prove his fifth postulate* as a theorem deduced from the other four axioms. Lobachevskii instead to prove this postulate as a theorem, he studied geometry in which the fifth postulate does not necessarily hold. Lobachevskii categorized Euclidean as a special case of this more general geometry.

His major work, *Geometriya* completed in 1823, was not published in its original form until 1909. On 11 February 1826, in the session of the Department of Physico-Mathematical Sciences at Kazan University, Lobachevskii requested that his work about a new geometry was heard and his paper *A concise outline of the foundations of geometry* was sent to referees. The text of this paper has not survived but the ideas were incorporated, perhaps in a modified form, in Lobachevskii's first publication on hyperbolic geometry. He published this work on non-Euclidian geometry, the first account of the subject to appear in print, in 1929. It was published in the *Kazan Messenger* but rejected by Ostrogradski, when it was submitted for publication in the St. Petersburg Academy of Sciences.

There are some claims made about Lobachevskii and the discovery of non-Euclidean geometry which have been recently refuted. For example

- Lobachevskii was in correspondence with Gauss (Gauss appreciated Lobachevskii's works very highly but had no personal correspondence with him);
- Gauss studied Russian to read Lobachevskii's Russian papers (actually, Gauss had studied Russian before he had even heard of Lobachevskii),
- Gauss was a "good propagandist" of Lobachevskii's works in Germany (Gauss never commented publicly on Lobachevskii's work) are shown to be false.

In 1866, ten years after Lobachevskii's death, Hoüel published a French translation of Lobachevskii's *Geometrische Untersuchungen* together with some of Gauss's correspondence on non-Euclidean geometry.



AD is the perpendicular from *A* to *BC*. *AE* is perpendicular to *AD*. Within the angle *EAD*, some lines (such as *AF*) will meet *BC*. Assume that *AE* is not only line which does not meet *BC*, so let *AG* be another such line. *AF* is a cutting line and *AG* is a non-cutting line. There must be a boundary between cutting and non-cutting lines and we may take *AH* the *snapping line*, as this boundary.

Eugenio Beltrami (1835-1900), in 1868, gave a concrete realization of Lobachevskii's geometry. He wrote in 1868 a paper: *Essay on an interpretation of non-Euclidean geometry.* He used the surface generated by the revolution of a tractrix about its asymptote, the so-called *pseudosphere*. In the development of this ideas an important roll had also **Felix Christian Klein (1849-1925), Jules Henri Poincaré (1854-1912), Arthur Cayley (1821-1895)** and **Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).**

Farkas Wolfgang Bolyai (1775 –1856)
([9] /Bolyai_Farkas.html)

He was born in Bolya (near Nagyszeben, Sibiu, Hermannstadt) and he studied at Jena, then at Göttingen where he was taught by Kastner. He became a life long friend of Gauss, a fellow student at Göttingen.

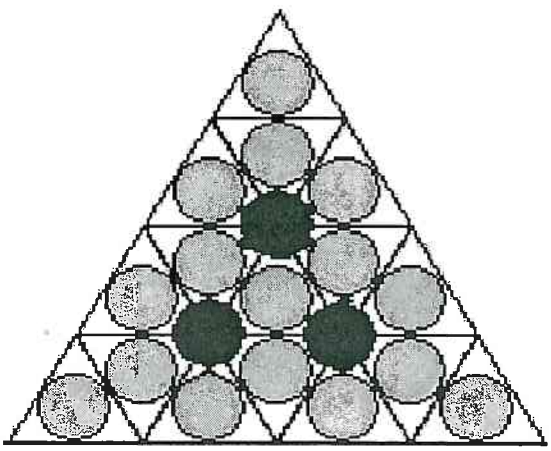
He taught mathematics, physics and chemistry at Marosvásárhely all his life. Farkas Bolyai was interested in the foundations of geometry and the parallel axiom. He corresponded with Gauss on the topic most of his life. His main work, the *Tentamen*, was an attempt at a rigorous and systematic foundation of geometry, arithmetic, algebra and analysis.

His attempts to stop his son studying the parallel axiom fortunately failed! Farkas Bolyai wrote to his son:

> *Detest it as lewd intercourse, it can deprive you of all your leisure, your health, your rest, and the whole happiness of your life.*

When Farkas Bolyai despaired of the parallel postulate, he wrote poetry, music and drama. He has a lot of quite good pieces, but he has other mathematical works too. For instance he proved that in an equilateral triangle can be put 19 congruent circles, which are tangent each to other or to the sites of the triangle.

Here we present a nice and simple example for on of Farkas Bolyai's solved problem: we want to cover an equilateral triangle with a lot of equal circles. The question is, for how many circles is it possible?. F. Bolyai find a solution for 19 circles:



2. János Bolyai

Born: 15 Dec 1802 in Kolozsvár, (now Cluj, Klausenburg, Romania)
Died: 27 Jan 1860 in Marosvásárhely, (now Tirgu-Mures, Neumarkt am Mieresch, Romania)
May be one of this is the portrait of J. Bolyai

This is the original Hungarian stamp from which the image on the left was taken, but there exists also a portrait of János Bolyai.

The most important moments of János Bolyai's life.

15. December 1802. He was born in Kolozsvár, from a gentry family. His father, Bolyai Farkas was mathematician. He spend his young years in Marosvásárhely. In the same city was born exactly now 100 years ago an other mathematician, that means that we have double celebration in 2002.

Abraham Wald (1902-1950) ([9] /Wald_Abraham.html)
He died in Travancore, India in a plain crash together with her wife. He has important results in the mathematical statistics. He points out that the two major problems of statistical theory at that time, testing hypotheses and estimation. He was also prominent in the problems in economics and econometrics.

Now go back to János Bolyai.

1818. August. In Vienna he begin the study on the Military Academy (Stift-Strasse).
After 4 years he study like cadet to be an officer of the engineer corps.
1823. He was made create master-sergeant. His first division was at the Temesvár Fortification Direction
1826. The next important places where in Arad, Nagyvárad (now Romania) and Szeged (now Hungary). In the next year he was promoted to be lieutenant.
1831. In his new place in Lemberg / Lvov (now in Ukraine) he became seek in cholera and that destroyed his nervsystem.

1832. He was promoted to captain and he had to go to Olmütz / Olomouc (today Czech Republic). It appears his main work the APPENDIX, as a supplement of his fathers book Tentamen.
1833. On his request he was retired and he come back to his father in Marosvásárhely.
1834-1852. He lived together with Kibédi Orbán Rozália, in Domáld, that is a little village in neigh borrow Marosvásárhely. They hade together two children.
1834. In-between always he makes his mathematical research, and he write the main work of his life the TAN, (that means the STUDY).
1837. It is a very interesting document the RESPONSIO, in which he wrote on the imaginary quantities.
1855. In this year arises a new variant of the STUDY OF THE SPACE (SCIENTIA SPATII), with the German title RAUMLEHRE.
1857. He was ill in the whole the year.
27. January 1860. He died in Marosvásárhely, there was buried in his military uniform.

The documents are collected in a library in middle of Marosvásárhely, in the Teleki Téka. The manuscripts of Farkas Bolyai contents about 5000 pages, but János Bolyai's more than 15000 pages. It is quit difficult to work with them, because they have a very dense text and they change often the languages German, Latin and Hungarian.
Here are some from the most important Bolyai researcher:

Franz Schmidt

Paul Stäckel

George Halsted

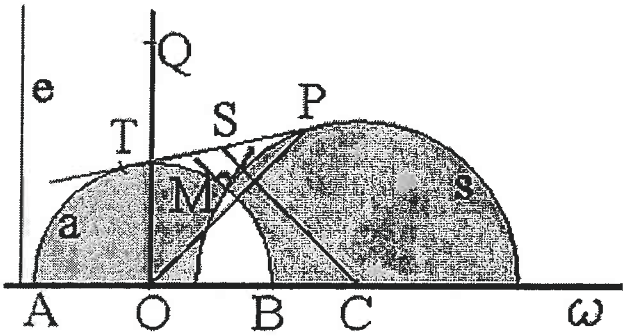
We remember that there are some living scientists in Transylvania, like Kiss Elemér, Weszely Tibor, Bitay László with remarkable results in the Bolyai studies.

3. Bolyai and the Didactics

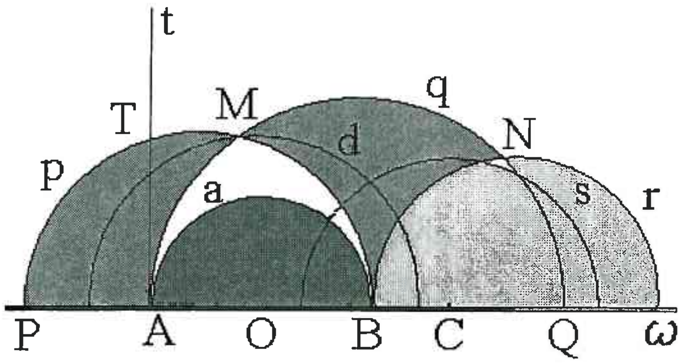
It's obviously to put the question: How can we *popularize* Bolyai's mathematical results?
I thing on four important aspects:

- using the non-Euclidian models in the elementary Euclidian geometry
- using the absolute trigonometry in Euclidian trigonometry;
- using the hyperbolic Stewart theorem to fix the Euclidian Stewart theorem and they applications.
- using some arithmetical results doing to János Bolyai
- finally we can use in examples for limit-computing the hyperbolic functions.

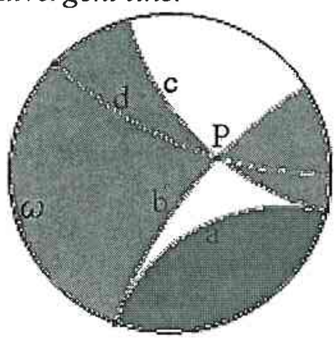
Now some details:
1. One of well known models of non-Euclidian geometry is the Poincaré's half plain model, where it is given a fixed limit line ω; the *lines* are the half circles and the perpendicular lines.



So a and e are two *lines*, P and T are external points to the line a, and we can follow the construction of a *perpendicular line* from the point P: PT is the tangent, S is the middle of the segment PT and from this point we draw a perpendicular on the PO, that intersect the basic line in C. This construction is based on the fact that SC is the radical axe of the circle a and the degenerate circle formed only from the point P (with r=0). We have also QO the perpendicular from Q on the *line a*. Here the *parallel lines* are those which are tangent to the *line* (half circle or perpendicular line) in a point situated on the limit line ω. So through the point M we have p and q the *parallels* to the *line a*, through the point N the *parallels* are q and r, finally through the point T the two *parallels* are t and p. The domains painted in green are the regions of the *divergent lines*, as for example the *line d*.



This model can be extended for the three-dimensional geometry: we have instead of the fixed limit line ω a fixed limit plain Ω, the *lines* remain the half circles in perpendicular plains on Ω, with a diameter in the plan, and *plains* are half spheres with diameter plain in Ω or perpendicular plains on Ω. We can easy construct a whole 3D-geometry with this elements.
The other models of the non-Euclidian geometry are something complicated, for instance instead of the limit line ω we can choose a circle, and the *lines* are orthogonal ac in the inside. For this my college Lajos Szilassy has an interesting program. Here again the *lines b* and *c* are *parallel* with the *line a* and *d* is a *divergent line.*



This studies on the models of the non-Euclidian geometry can be useful in fixing some ideas of the Euclidian geometry.

2. Bolyai used the following notations: $\bigcirc a$ for the circumference of the circle, and $\odot a$ for the area of the circle with the radius a. So we can give a general form for the well known sinus-theorem: $\frac{\bigcirc a}{\sin A}=\frac{\bigcirc b}{\sin B}=\frac{\bigcirc c}{\sin C}$.
that means: in any triangle the circumferences with the radius equal with the length of the sides are proportionally with the sinus of the opposite angles.

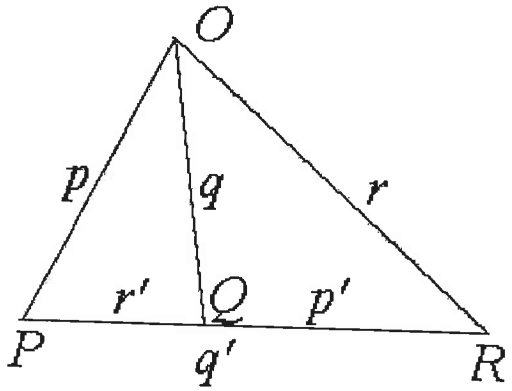
We have in the hyperbolic trigonometry the following formula for the circumference of the circle with radius a: $2\pi k \sinh\frac{a}{k}$, where k is the constant of the hyperbolic surface, and so the sinus-theorem is: $\frac{\sinh\frac{a}{k}}{\sin A}=\frac{\sinh\frac{b}{k}}{\sin B}=\frac{\sinh\frac{c}{k}}{\sin C}$

and in spherical geometry on a sphere with the radius r

the circumference of the circle with radius a is $2\pi r \sin\frac{a}{r}$, finally we have

$$\frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b}{r}}{\sin B}=\frac{\sin\frac{c}{r}}{\sin C}.$$

In a similar way we can obtain the cosinus theorem in each case.
So it is useful to deduce the Stewart-theorem of the hyperbolical trigonometry: if we have the following triangle in the hyperbolic plane:



If we suppose again that k is the hyperbolic constant we have the *Stewart-theorem*:

$$\cosh\frac{p}{k}\sinh\frac{p'}{k}+\cosh\frac{r}{k}\sinh\frac{r'}{k}=\cosh\frac{q}{k}\sinh\frac{q'}{k}.$$

If we try to compute the limit of this expression, we can obtain the usual Stewart-theorem from the Euclidian geometry: $p^2p'+r^2r'-q^2q'=p'q'r'$.

3. We can study with our pupils also some results due to János Bolyai from the number theory.

- For instance Bolyai János studied the so-called pseudo-prime numbers, they are the composed numbers m, which factors don't divide a and but $m|a^{m-1}-1$.

Example: it is well known that 341 is such a pseudo-prime number. Therefore we have 2^{10}-1 is divisible by 341, because we can write $2^{340}-1=(2^{10})^{34}-1$ and that can be decomposed, so we have soon the result.

- Bolyai has an other arithmetical problem. The origin of this problem is in music theory. We have to determine a fraction $\frac{a}{b}$, which is less then $\frac{81}{80}$, his numerator is with 1 greater then his denominator and between the prime factors of both this numbers we have only 2,3 and 5. To solve this problem we have to look for fraction like $\frac{5^x}{2^y}, \frac{2^x}{3^y \cdot 5^z}$ and so on. That leads to a lot of exponential equations, like $5^x-2^y=1$ and for this last we have to show, that $x=1$ and $y=2$ is the only solution. The problem is very useful for pupils in the 10th or 11th form to fixing the solutions of exponential equations in integers.

4. Finally, we remember that in some countries in high-school curricula contents some parts of the mathematical analysis. The limit when $k\to\infty$ of the formula used in hyperbolic geometry lead us to similar results from the Euclidian geometry.

We used the circumference of the circle in hyperbolic geometry $2\pi k \operatorname{sh}\frac{a}{k}$, and if we compute the limit we have:

$$\lim_{k\to\infty} 2\pi k \operatorname{sh}\frac{a}{k} = \lim_{k\to\infty} 2\pi \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\frac{1}{k}} = 2\pi a .$$

References:

[1] **Bolyai János**: *Appendix, a Tér tudománya*, (Appendix, Scientia Spatii) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977.

[2] **Euklidesz**: *Elemek*, (The Elements) Gondolat Kiadó, Budapest, 1983.

[3] **Kiss Elemér**: *Notes on János Bolyai's manuscripts*, Historia Mathematica, 1999, (26), pp. 68-76.

[4] **Kiss Elemér**: *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából* (Mathematical treasures from János Bolyai's manuscripts), Akadémiai és Typotex Kiadó, Budapest, 1999.

[5] **Paul Stäckel**: *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai*, (Die geometrische Untersuchungen Wolfgang Bolyai und János Bolyai), Magyar Tudományos Akadémia, 1914.

[6] **Weszely Tibor**: A Bolyai-Lobacsevszkij geometria modelljei (The models of the Bolyai-Lobachevsky geometry), Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1975.

[7] **Weszely Tibor**: Bolyai János matematikai munkássága (Bolyai János mathematical work), Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1981.

[8] **Weszely Tibor**: *Bolyai János. Az első 200 év*, (Bolyai János. The first 200 years), Vince Kiadó, Budapest, 2002.

[9] *** : *http://www-groups.dcs..st-and.ac.uk,/~history/Mathematicians*

[10] *** : *Lucrările simpozionului Bolyai János*, organizat cu prilejul împlinirii a 175 de ani de la naştere, (The works of the Bolyai János symposium, organized in 1977, celebrating 175 years), Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj, 1979.

Die ungarisch-rumänische Gruppe
Katalin Munkácsy, Gabor Dezsö, László Filep

Nada und Marko Razpet   Annette Vogt   Menso Folkerts   Phil Davis

LINDBICHLER

Pi – und Phi – Pyramiden

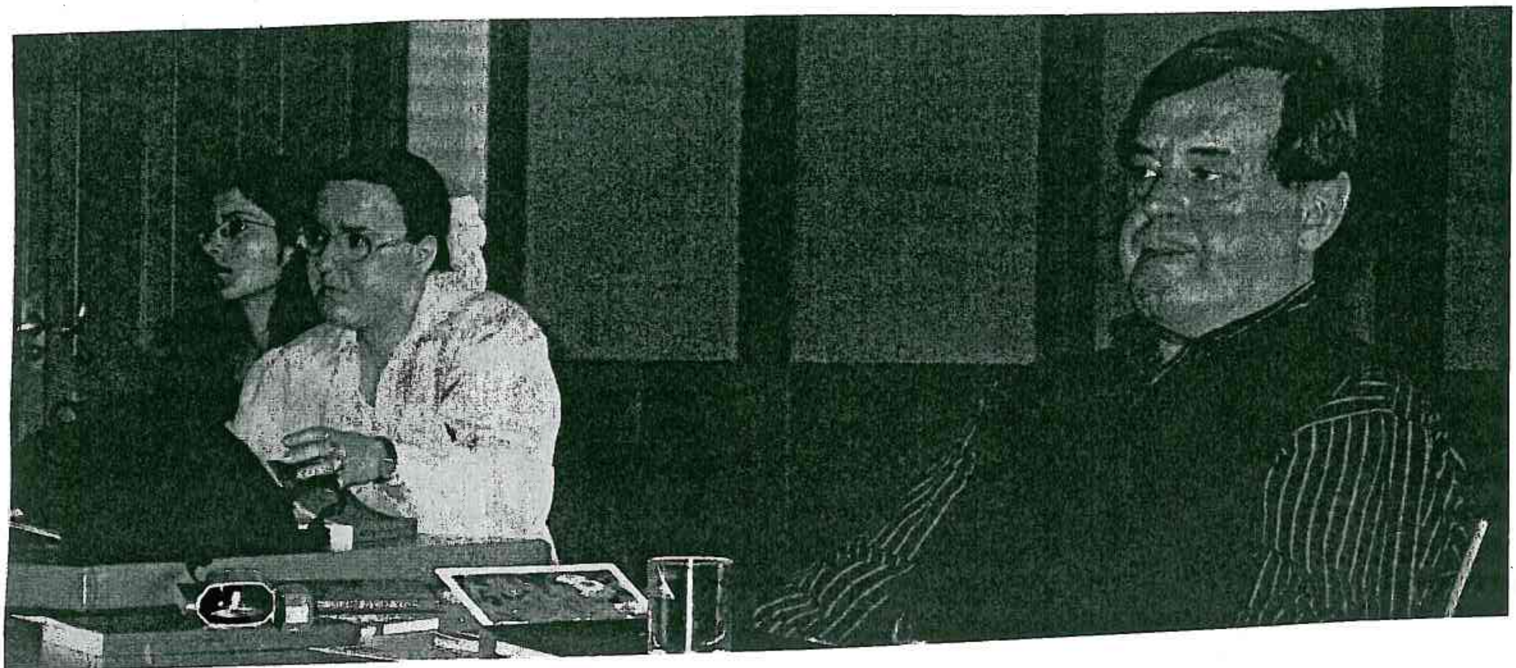
Ausgangspunkt ist ein in einem Schulbuch historisch falsch interpretiertes Beispiel von ***Archimedes***, über das ***Cicero*** 75 v. Chr. einen Kommentar verfasste.

Herodot (ca. 484 v. Chr. – 425 v. Chr.) hat als Tourist Reisen nach Ägypten unternommen und berichtet, dass angeblich beim Bau der Pyramiden in ***Giseh*** (*Cheops-. Chephren* – und *Mykerinospyramide*) das Quadrat über der Körperhöhe h gleichen Flächeninhalt wie ein Seitendreieck hat und weiters, dass das Verhältnis vom halben Umfang der Pyramide zu seiner Höhe der Kreiszahl (heute π) entspricht. *G. Lindbichler* hat 1995 in ***DdM*** (Heft 3, Seite 239 ff.) die Frage gestellt, ob beide Bedingungen mathematisch exakt überhaupt möglich sind und ob man dazu den genauen Zahlenwert von π kennen muss ?

Bei den entsprechenden Berechnungen und zugehörigen überraschenden Ergebnissen spielen die Kreiszahl π und die Goldene-Schnittzahl φ eine wesentliche Rolle. Spekulationen und entsprechende Fantasie führen zu einer sehr wahrscheinlichen Bauweise der „schönen" Pyramiden der Ägypter. Bezieht man die ominösen Böschungswinkel der z. B. *Cheopspyramide* und einer *Knickpyramide* ins Kalkül, kommt man zu einer Fülle von Überraschungen. Diese wurden sogar in ein mögliches Filmprojekt der Filmakademie in Wien einbezogen.

Dr. Gerhard Lindbichler
Senfgasse 1 / 7 / 3
A - 1100 Wien
Mail: gerhard.lindbichler@chello.at
Homepage: www.bg-bab.ac.at/~mathe/HausDerMathematik

Wien, April 2002



Die zwei Pragerinnen: Magdalena Hykšová und Martina Bečvářová

Gerhard Lindbichler

N. RAZPET

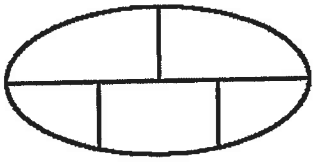
Games and mathematicians

Nada Razpet, Faculty of Education, Ljubljana

Abstract: When the first computer was built many people enjoyed playing Tetris. Solitaire and FreeCall are popular today. Games, puzzles and logical questions have strong connections with mathematicians and (or) the style of life in the days when they had been popular. Many new games (computer's games too) have their roots in old games and were invented by mathematicians.

Josip Plemelj and ellipse

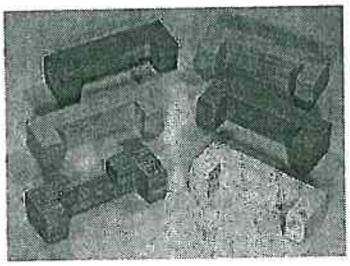
At the beginning of the new century (like at the beginning of the new millennium) people like to play different social games but they also like to have some new problems to spend their time. Before Christmas (1899/1900) the ladies from Österreichisches Gradmessungsbureau asked professor Josip Plemelj, Slovenian mathematician (1873 – 1967), for a new problem or a puzzle game because they had many free time during the Christmas holidays and they thought that the mathematician could have some beautiful questions or problems. Professor Josip Plemelj said: "Draw this picture with only three features."



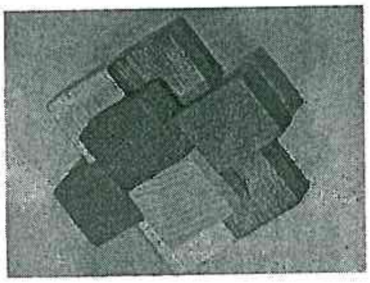
Soon Plemelj went to Berlin, so he had forgotten about this question. Once his friend from Vienna visited him and told, that ladies from the bureau wanted to know the answer for that problem, because they spent a lot of time but they hadn't been successful. "Of course," said Plemelj, "it is impossible to draw it with three features, you need at least four features."

Burr puzzles

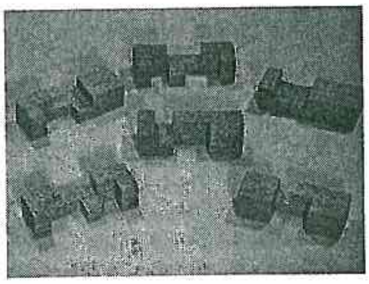
A six-piece burrs consists of three sets of two rods intersecting each other at right angles. The rods have dimension $2 \times 2 \times 6$. The length used in this definition is 6, but there are many six-piece burrs where the rods can be made longer.



6 (5 equal) wooden sticks.



A solid symmetrical three-dimensional cross.



A 6 piece Burr Puzzle (there are all individual)

48

N. RAZPET

A regular burr is said to be solid if the core of the burr is completely occupied by rods, and there are no interior holes. People like to measure time that a person needs to put together the pieces in solid body.

There were not so much information about the origin of these puzzles. They were made in Asia and Europe in the 18th century. Six-piece burrs were shown about 1803 in the Bestelmeier Toy catalog. This type of puzzles was first patented in 1897 by Edward Nelson. They are also known as chuck puzzles. They consist of 5 equal wooden sticks with notch cut out and a stick with two notches cut out.

In 1928 Edwin Wyatt published *Puzzles in Wood* and presented all puzzles which were known in that days. He named them Chinese puzzles, probably because they were mass-produced in the Orient since the early 1900s. But there is no evidence that these puzzles have an origin in China. Wyatt introduced the term burr puzzle because the puzzle looked like a seed burr.

The six-piece burrs is a large family of designs, since the producer has a wide choice of how to notch each pieces. Several version have been patented in the manufacture. The earliest US patent is from Brown, dated 1917.

In 1978, **Bill Cutler** published a paper describing the solid six-piece burrs completely. He has shown that there are exactly 25 of the possible 59 notchable pieces which can be used to build solid six-piece burrs. They can be chosen in set of six and assembled solid in 314 different ways. A piece is notchable if notches can be cut out directly with a saw.

If the rods have dimension $2 \times 2 \times 6$ there are twelve cubic units in each piece that are candidates for cut out (removal). Cutler wrote, that there are 369 general pieces (some of them are unnotchable) which can be used to make solid assembly with no internal voids and that they can be put together in 119 979 ways.

From 1980 to 1990 Bill Cutler and others undertook a complete analysis of all six-piece burrs. Cutler made a computer programme, but he estimated that it would take 62.5 years to run the analysis on the PC AT computer. We know now, that there are roughly 36.65 billion ways to assemble burr puzzle pieces (71.3 billion if mirror images are counted also).

There are many definitions and lemmas in the theory of six-piece burrs.
Let as see some terms and lemmas.

Term: Level
The level of a burr is the number of moves needed to remove a piece. For example a level 2.3 burr means there are two moves needed to remove the first piece (or pieces) and three more for the second piece (or pieces).

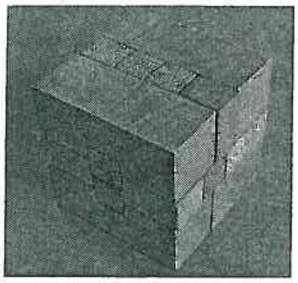
Lemma: Solid burr are all of level 1.

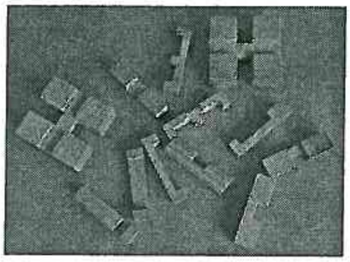
Proof: If there are no interior holes, than it must be possible to slide one or more key pieces in the first move.

N. RAZPET

More than six-piece puzzle

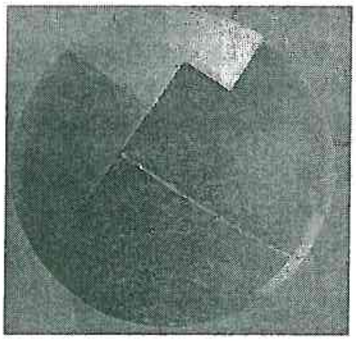
There are a lot of more then six-piece puzzles similar to the solid burrs. One of them I have (it is invented in the 19th century).

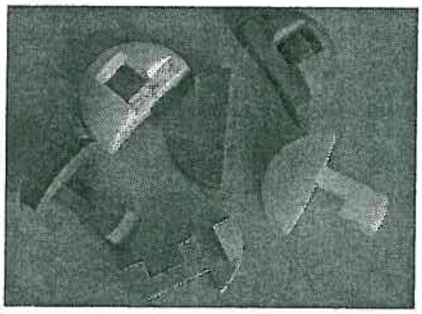




New version

In the time of plastic toys, I found one of the toy similar to the solid burr.





These type of toys are important now too, because they can help in packing problems.

Pyramid Puzzles

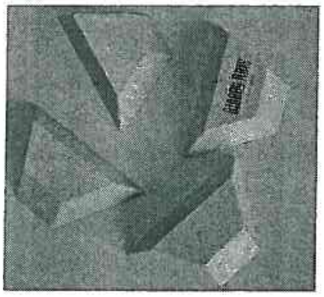
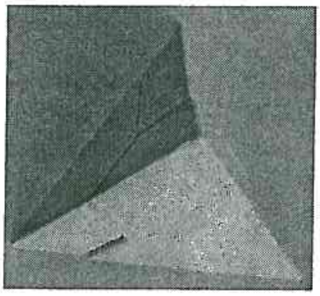
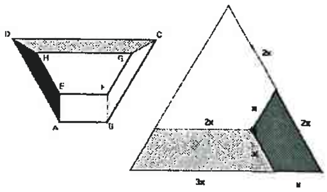
If we are talking about mysteries of ancient world we must talk about a pyramid. So it is not surprising that somebody would invent puzzles based upon pyramid shape.

Two and four piece Pyramid Puzzles

The creator is unknown. When the two pieces are put together they form a three sided equilateral pyramid (in mathematical terms it is a tetrahedron). Each of the two pieces could be cut into two parts, so they are four piece pyramid puzzles.

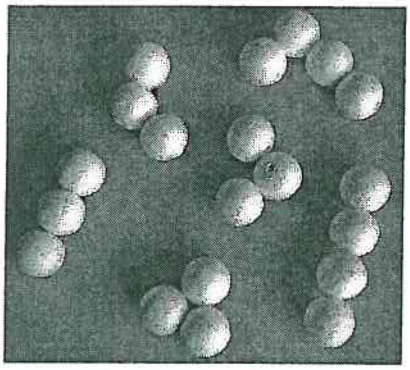
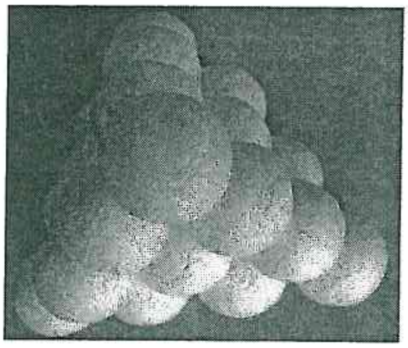
The new version of the pyramid puzzles is a puzzle patented in 1940 by E.T. Johnson. It was sold widely in the USA from 1956.

N. RAZPET

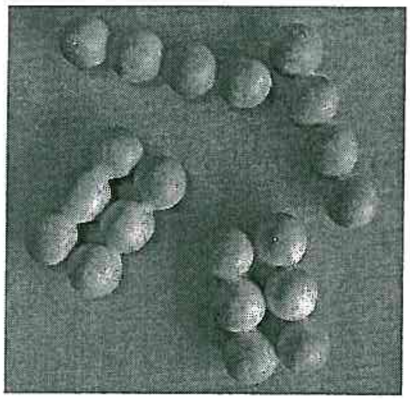
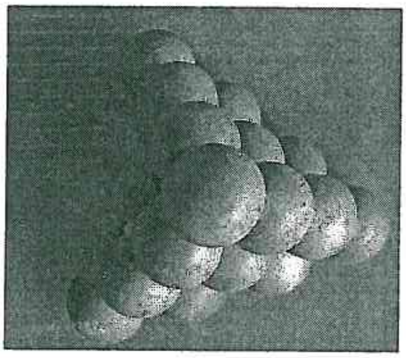
Danish Ball Pyramid Puzzles

The *Pyramystery* is constructed from 20 balls. 4 sets of 3 balls (different configurations) and 2 sets of 4 balls (different configurations) are glued together. The problem is to find out if it is possible to construct a pyramid from these 6 puzzle pieces.
Pyramystery was designed in Denmark by Piet Hein. Here is my version of 6 puzzle pieces.

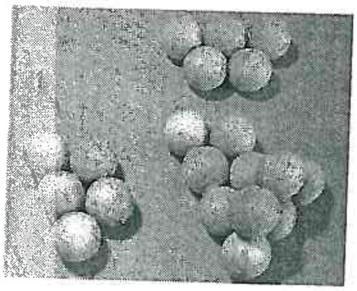



Finnish Pyramid Puzzle

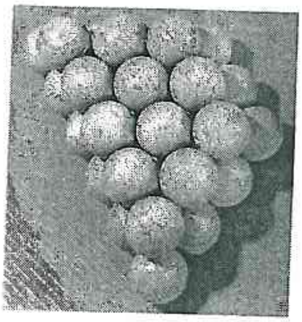
It is made by Aarikka in Finland. The balls are glued together to form 2 groups of 4 balls and two groups of 6 balls.

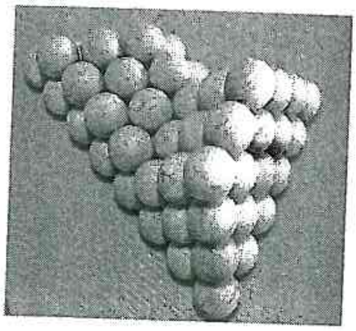
Here is (I hope) a new version of ball pyramid puzzle with four equal pieces (4×5 balls and 4×30 balls).



4 × 5 balls.



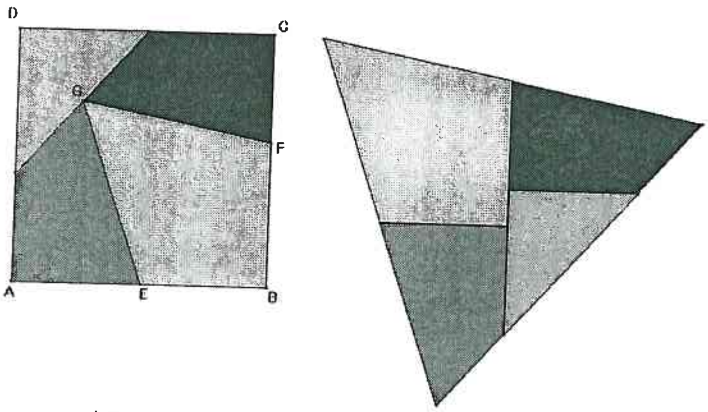
A piece with 30 balls.



The two pieces are put together.

Two Dimensional Geometrical Dissections

Henry Dudeney was a pioneer of geometrical dissections. His four-piece dissection of square is a classic case (published in 1902). The square should be cut into four pieces which can be put into the equilateral triangle.
These type of puzzles are not so popular, because there are not so many solutions and it is easy to memorized them.



$$AB = 1$$
$$EF = FG = GE = 1/(\sqrt[4]{3}).$$

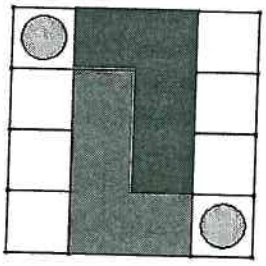
How the mathematician could invent a new game

In 1960s the mathematician Edward de Bono invented the L-game. He was talking with the famous professor of mathematics in Cambridge, Littlewood, about game, which should be complex like the chess. Bono accepted professor Littlewood‘s challenge. The intention was to produce the simplest possible game that could be played with a high degree of skill. He wanted to fulfill the following conditions:

- A minimum number of playing pieces, preferably one piece per player.
- The smallest possible board.

- A game with very few rules, one that would be very simple to learn and play.
- A game could be played with a high degree of skill.
- A game that would not be deterministic. A deterministic game is the one where the starting player could win if he knew the strategy. Two perfect players would play in deterministic game for ever.

The result was the L-game. Each players has only one piece. The board is 4×4 square. Some skill is required because there are many moves. There are over 18 000 positions for the piece on this small board at any moment there may be as many as 195 different moves of which only one is successful.



How to play the L-game

The object of the game is to block the opponent's L piece so that it cannot be moved.
On the figure is the starting position. The first player (and each player on each move thereafter) must move the L piece first. The player can slide, turn or pick up and flip the L and put it into any open position. When the L piece has been moved, a player may move either one (but only one) of the neutral square piece to any open square on the board. A player wins the game when his opponent cannot move his L.
We could use this game within the context of strategic thinking which is very important not only in mathematics.

References

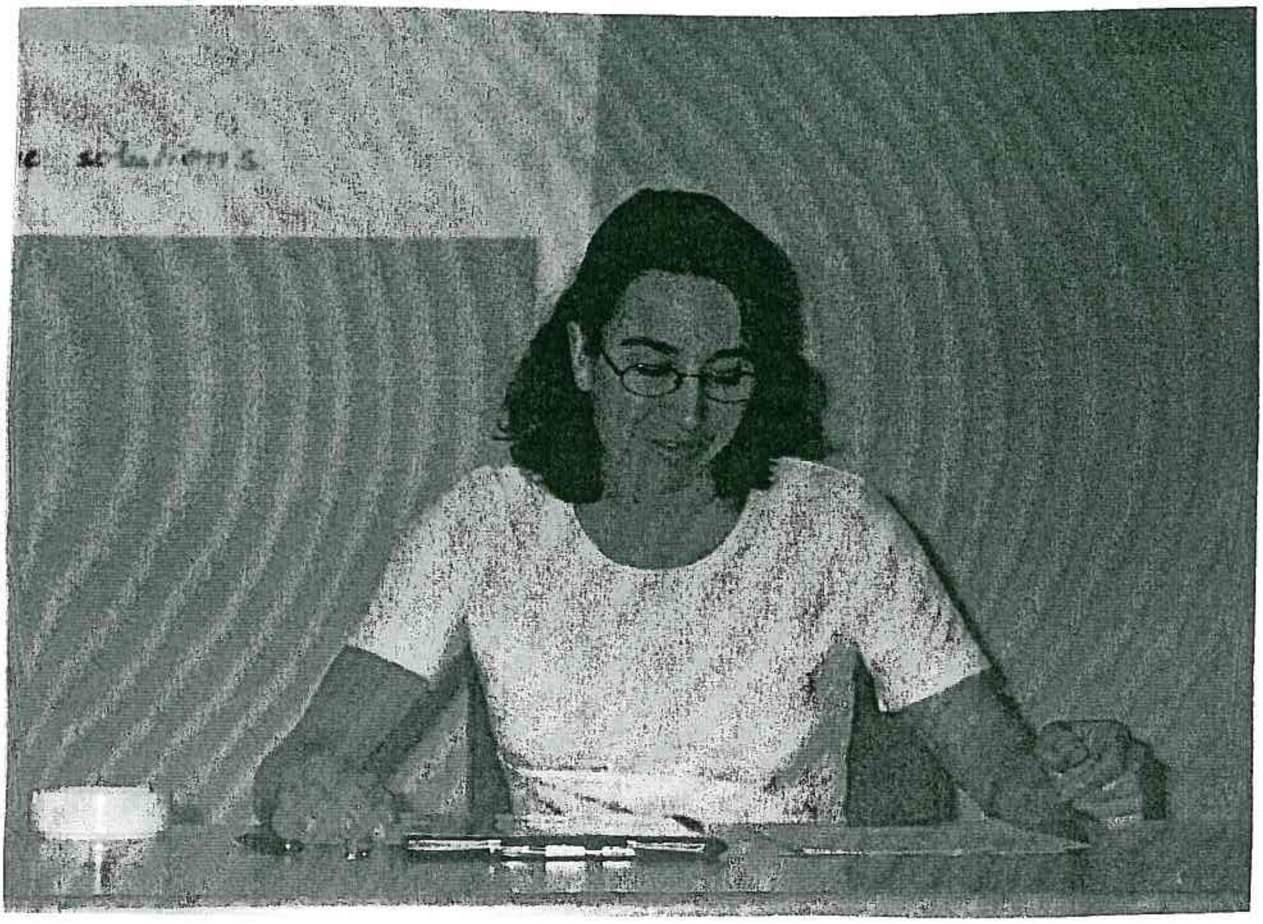
[1] www.edwardbono.com

[2] www.gamesandpuzzles.co.uk

[3] Jack Botermans, Pieter van Delft and Eugen Oker, Creative puzzles of the World, 1980 PPI/Het Spectrum BV. Utrecht the Netherlands

[4] Nada Razpet, Rezanje četverca, Presek 5, 2000/2001, Presek 4 2001/2002

Nada Razpet



Helena Durnová

Discrete Optimization: A Chronological Survey

Helena Durnová
Department of Mathematics of the Faculty of
Electrical Engineering and Communication
Technická 8, CZ-616 00 BRNO
e-mail: durnova@feec.vutbr.cz

28th April – 4th May 2002
Neuhofen, Austria

The idea of finding some kind of optimal solution goes back to ancient mathematics. In a more conscious form, these ideas are encountered in the works of mathematicians since the 17th century. Discrete optimization gained importance in the 20th century when mathematical methods began to be used in connection with problems in economy. A further aspect of these problems — computability — appears as the methods are adapted in algorithmical form in order to be performed by computers. This gives rise to a new mathematical discipline — theory of complexity. We leave the story just at the point when the questions about complexity of algorithms are being posed, in the mid-1960s.[1]

1 Between the Wars: 1920s and 1930s

The first problems solved in the area of discrete optimization are the so-called *minimum spanning tree* and *travelling-salesman* problems. The former appeared already in 1925 in connection with the electrification of South-Western Moravia and was posed to a Brno mathematician Otakar Borůvka by an employee of the West Moravian Power Plant Company Jindřich Saxel:

> There are n towns which need to be connected in an electricity network. The distances between every two towns are given. The

[1] A more detailed account of the history of these problems can be found in [Dur01].

> task is to find the network which would connect all the towns using the least wire possible (and thus minimizing the cost of building the network).

BORŮVKA approached the problem with mathematical rigour and gave an algorithmic solution formulated in the language of matrices and their rows and columns. It is interesting to note that this very efficient algorithm, published in [Bor26a] was re-discovered only in the 1960s.

Twelve years later, in 1937, American mathematician MERRIL M. FLOOD was looking at the following practical problem:

> Design the cheapest route for a school bus, which has to collect children from a certain area, making given stops, so that all children get picked up in the morning (and get home in the afternoon) and the costs are minimum.

This problem, although it looks very similar to the previous one, is in fact much harder. It is nowadays commonly referred to as the "travelling salesman problem". The connection between this problem and so-called Hamiltonian graphs was suggested by another mathematician, ALAN W. TUCKER.

2 War Time: 1940s

During the World War II and immediately after it, the ties between mathematics and economy became closer, although, on the other hand, economists at that time seemed to be afraid of using mathematical methods.

The first one to establish a more concrete kind of method for economy was the Russian mathematician L. V. KANTOROVICH. At the turn of the 1940s, he published his first articles on the translocation of the masses. His results were re-discovered in the 1950 by the mathematicians in the U.S.A. and the method is now commonly called *linear programming.* In 1941, F. L. HITCHCOCK published an article devoted to the same problem, which is nowadays called *Hitchcock transportation problem.* He basically uses the *simplex method.*

In the 1950s, L. R. FORD and D. R. FULKERSON developed a method based on graph theory. Their work was done in the **RAND Corporation**, a research institute founded in 1946 from the Air Force department. The results were finally published in the monograph [FF62]

3 Formal Language of Algorithms: 1950s

In the 1950s, computers were already being used for some computations, but programming languages were not commonly used then, especially not in mathematical papers. The notion of an "algorithm" was only an implicit one, describing a procedure that can be performed by a machine.

The use of more formal language in algorithms appears at the end of 1950s. Two examples that stand wide apart as far as the use of language is used, but still very close as far as the method is concerned, can be seen in the methods described by MOORE in [Moo59] and by DIJKSTRA in [Dij59]. An extremely comprehensible — to a lay readership — description of an algorithm is given by MINTY in [Min57]

> The shortest route problem [...] can be solved very simply in the case where the distance matrix is symmetrical, as follows: Build a string model of the travel network, where knots represent cities and string lengths represent distances (or costs). Seize the knot 'Los Angeles' in your left hand and the knot 'Boston' in your right hand and pull them apart. If the model becomes entangled, have an assistant untie and re-tie knots until the entanglement is resolved. Eventually one or more paths will stretch tight — they then are the alternative shortest routes.

In the articles on the minimum spanning tree, one can even find different names for the methods used: while J. B. KRUSKAL uses the term "construction" in [Kru56], LOBERMAN and WEINBERGER in [LW57] prefer "procedure", and finally E. W. DIJKSTRA in [Dij59] calls his method "algorithm". The reason for giving the methods different names is probably different background of the authors — while KRUSKAL comes from the mathematics department, DIJKSTRA is a computer scientist.

4 Computers and Computability: 1960s

The interest of computer scientists in discrete optimization problems explains the fast transition in the description of algorithms from colloquial language to very formal programming lanuages and pseudocodes. The impact of computer science on solving these problems can also be seen in the interest in the time consumed by computation of the results: *complexity* of an algorithm begins to be used as a useful measure for the comparison of algorithms in the 1960s.

An especially attractive part of the discrete optimization problems are the so-called NP-hard and NP-complete problems. For these problems, heuristics — methods not as exact as algorithms, but finishing in reasonable time and giving reasonable results — are developed. Not only the complexity of heuristics, but also the ratio of computation time and the level of precision of the result are important.

The travelling–salesman problem gained popularity in the 1960s, when a soap company organized a contest. The task was to find the shortest way connecting 33 cities, the prize ten thousand U.S. dollars. Some people came with a correct solution, whereas others claimed that the problem has no solution. This was a mis-interpretation of the fact that there is no polynomial algorithm for solving the travelling salesman problem; which, obviously, does not mean that there is no solution.

5 Conclusion

The problems discussed in this paper are all connected to optimization. All of them eventually have some algorithmical solution — a way of solving that can be performed by a machine, e.g. a computer. It is interesting to see that no matter whether the "language" used for describing the method is a programming language or not, the methods presented by Borůvka, Jarnik, Hitchcock, Kruskal, Moore, or Ford and Fulkerson examine all the possibilities. Over the forty years, the methods developed both in terms of effectivness and precision of the expression. At the end of the period, a new emerging science is used to distinguish between the individual methods and to evaluate them — complexity theory.

References

[Bor26a] Otakar Borůvka. O jistém problému minimálním [On a certain minimal problem]. *Práce Moravské přírodovědecké společnosti*, III(3):37–58, 1926.

[Kan39] L. V. Kantorovich Mathematical methods in the organization and planning of production, 1939. In Russian.

[Hit41] Frank L. Hitchcock. The distribution of a product from several sources to to numerous localities. *Journal of Mathematics and Physics*, 20:224–230, 1941.

[Kru56] Joseph B. Kruskal, Jr. On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7:48–50, 1956.

[Min57] George J. Minty. A comment on the shortest route problem. *Operations Research*, 5:724, 1957.

[Moo59] Edward F. Moore The shortest path through a maze. In *Proceedings of an International Conference on the theory of Switching 1957, Part II.*, pages 285–292. Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1959.

[LW57] H. Loberman and A. Weinberger. Formal procedures for connecting terminals with a minimum total wire length. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 4:428–437, 1957.

[Dij59] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1:269–271, 1959.

[LMSK63] J. D. C. Little, K. G. Murty, D. W. Sweeney, and C. Karel. An algorithm for the travelling salesman problem. *Operations Research*, 11:972–989, 1963.

[FF62] Lester R. Jr. Ford and Delbert R. Fulkerson. *Flows in Networks.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1st edition, 1962.

[Dur98] Helena Durnová. Minimum Spanning Tree: A Neglected Paper, 1998. 9. Novembertagung zur Geschichte der Mathematik, Nijmegen.

[Dur99] Helena Durnová. Otakar Borůvka and the Minimum Spanning Tree, 1999. Presented at the 5. Tagung der Fachsektion für Geschichte der Mathematik der DMV, 2–6 June 1999.

[Dur00] A History of the Travelling Salesman Problem, 2000. Procceedings of the 9. General Meeting of the EWM, Hindawi Publishing House.

[Dur01] Helena Durnová. A History of Discrete Optimization, 2001. Ph.D. dissertation. Masaryk University, Brno, the Czech Republic, March 2001.

SCHLOTE

Carl Neumann und der Inselcharakter der Mathematik

Karl-Heinz Schlote (Leipzig)

Sucht man eine Antwort auf die im Tagungsthema gestellte Frage: Ist die Mathematik eine Insel, ein in sich geschlossenes Erkenntnissystem? so findet sich in den Schriften des Leipziger Mathematikers Carl Neumann die folgende Passage:

> „ ...die Mathematik ist *eine Welt für sich*; auch sie entwickelt sich *nach ihren eigenen Gesetzen*. Aber ... sie bedarf gewisser äußerer Anregungen. Sie würde, ohne solche Anregungen, recht bald verflachen und verkümmern.
>
> Vielleicht wagt man zu erwidern: das seien *vergangene* Zeiten; *früher* sei das so gewesen, als die Mathematik gewissermaßen noch in den Kinderschuhen steckte. *Jetzt* aber sei sie erwachsen und selbständig. Jetzt bedürfe sie nicht mehr irgendwelcher Einwirkungen von außen her, und gehe *ihren eignen Weg*.
>
> ... in einer solchen Ansicht würde eine gewisse Überhebung liegen, die für den weiteren Fortschritt der mathematischen Wissenschaft nur verderblich sein könnte."[Neumann 1908, S. 379]

Anschließend wies Neumann anhand einiger Beispiele auf den starken Einfluß hin, den die von den Naturwissenschaften ausgehenden Anregungen auf die Mathematik hatten, und bezog sich dabei insbesondere auf die Leistungen von J. B. Fourier, I. Newton, C. G. J. Jacobi, B. Riemann, J. P. G. Dirichlet, C. F. Gauß und G. Green. Dies alles zusammen ergibt doch eine sehr klare Behandlung des Tagungsthemas und es erscheint lohnenswert zu prüfen, ob und wie sich diese Ansichten in Neumanns eigenen Schaffen niedergeschlagen haben.
Da Neumann als Mitbegründer der „Mathematischen Annalen" zwar zu den bekannten, aber wohl nicht zu den ganz großen deutschen Mathematikern gehört, seien zunächst ein paar biographische Daten angefügt. Carl Neumann wurde am 7. Mai 1832 in Königsberg als Sohn des Professors für Physik und Mineralogie Franz Neumann geboren. Nach dem Schulbesuch und dem Studium in seiner Geburtsstadt legte C. Neumann an der dortigen Universität 1855 das Oberlehrerexamen ab und promovierte 1856 bei F. Richelot. Die Königsberger Universität war zu diesem Zeitpunkt bereits für das von C. G. J. Jacobi (1804-1851) und F. Neumann 1834 gegründete, später von letzterem und F. Richelot fortgeführte mathematisch-physikalische Seminar berühmt. Auch C. Neumann besuchte dieses Seminar und wurde von den neuen Ideen zur Behandlung physikalischer Fragestellungen beeinflußt. Speziell die Verwendung potentialtheoretischer Methoden sollte in den Forschungen C. Neumanns eine zentrale Rolle spielen. Das Seminar, das eine neuartige Verbindung zwischen Mathematik und Physik begründete, wurde zur Ausbildungsstätte bedeutender Vertreter der mathematischen und der theoretischen Physik. C. Neumann habilitierte sich 1858 an der Universität Halle mit einer Arbeit zur mathematischen Physik und wurde dort 1863 zum außerordentlichen Professor berufen. Über Basel (1863-65) und Tübingen (1865-68), wo er jeweils als ordentlicher Professor wirkte, kam C. Neumann im Oktober 1868 als Ordinarius an die Universität Leipzig, der er bis zur Emeritierung 1911 treu blieb. In Leipzig gelang ihm auch sein bedeutendstes Resultat, die Lösung der ersten und zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie mit Hilfe des von ihm als Methode des arithmetischen Mittels bezeichneten Verfahrens. Auch nach der Emeritierung war Neumann noch wissenschaftlich tätig, er starb am 27. März 1925 in Leipzig.

Ganz der eingangs zitierten Meinung entsprechend dokumentieren Neumanns Forschungen ein ständiges Wechselspiel zwischen mathematischen und physikalischen Themen. Unter physikalischen Themen ist dabei nicht die Durchführung oder Auswertung von Experimenten zu verstehen. Diese Aufgabe wies Neumann eindeutig den Physikern zu. Ihm ging es um die mathematische Behandlung von Teilgebieten der Physik, um diese auf eine feste theoretische Basis zu stellen. Mehrfach hat er sich mit dem Verhältnis von Mathematik und Physik auseinandergesetzt und durch entsprechende Publikationen ein recht klares Bild von seiner Auffassung von mathematischer Physik gezeichnet. Aus heutiger Sicht kann man die mathematische Physik durch die mathematische Behandlung physikalischer Probleme und den deduktiven Aufbau der Theorie auf der Basis der bestehenden physikalischen Erklärungsmuster und Grundprinzipien charakterisieren, wobei kein direkter Eingriff in die experimentelle Praxis oder die physikalische Erklärungen der Phänomene erfolgt. Die streng logisch aufgebauten mathematischen Theorien, beispielsweise die euklidische Geometrie, lieferten Musterbeispiele, die es auch in anderen Wissensgebieten zu erreichen galt. Im Vorwort zur Publikation seiner Leipziger Antrittsrede fasste Neumann dies in die Worte:

> „Wenn das eigentliche Ziel der mathematischen Naturwissenschaft, wie allgemein anerkannt werden dürfte, darin besteht, möglichst wenige (übrigens nicht weiter erklärbare) Principien zu entdecken, aus denen die allgemeinen Gesetze der empirisch gegebenen Thatsachen mit mathematischer Nothwendigkeit emporsteigen, also Principien zu entdecken, welche den empirischen Thatsachen *aequivalent* sind, - so muss es als eine Aufgabe von unabweisbarer Wichtigkeit erscheinen, diejenigen Principien, welche in irgend einem Gebiet der Naturwissenschaft bereits mit einiger Sicherheit zu Tage getreten sind, in sorgfältiger Weise zu durchdenken, und den Inhalt dieser Principien womöglich in solcher Form darzulegen, dass jener Anforderung der Aequivalenz mit den betreffenden empirischen Thatsachen wirklich entsprochen werde." [Neumann 1870, S. 3]

Bereits fünf Jahre früher, in seiner Tübinger Antrittsrede zum Thema „Der gegenwärtige Standpunct der mathematischen Physik" hatte Neumann an der Theorie des Lichtes, der Newtonschen Theorie der Planetenbewegung bzw. dem schrägen Wurf erläutert, welche Bedeutung für ihn das Auffinden von einfachen Prinzipien zur Erklärung einer physikalischen Erscheinung hatte. Durch die Zurückführung einer Erscheinung auf einige nicht erklärbare Prinzipien wurde zugleich die Behandlung von unendlich vielen Erscheinungen geliefert. Indem etwa beim Wurf der Bewegungsablauf durch das Vorhandensein der Trägheit und der Erdanziehung erklärt wurde, so waren damit alle derartigen Wurfbewegungen erklärt, unabhängig von der Wurfgeschwindigkeit oder der Abwurfrichtung. Der Wert dieser Vorgehensweise bestand also nach Neumann darin, dass die Anzahl der unerklärbaren Dinge sehr stark reduziert wurde. Das Auffinden dieser wenigen unerklärbaren Prinzipien war die Aufgabe des Physikers.

> „... er hat die Aufgabe, alle Erscheinungen, die in der Natur vor sich gehen, auf möglichst wenige Grundvorstellungen, d. i. auf möglichst wenige *unbegreiflich* bleibende Dinge zurückzuführen.
>
> Je *grösser* die Anzahl von Erscheinungen ist, welche von einer physikalischen Theorie umfasst werden, und je *kleiner* gleichzeitig die Anzahl der unerklärbaren Dinge ist, auf welche jene Erscheinungen zurückgeführt werden, um so vollkommener wird die Theorie zu nennen sein."[Neumann 1865, S. 17]

konstatierte Neumann in seiner Tübinger Rede. Fast wortwörtlich die gleiche Passage findet sich auch in seiner Leipziger Antrittsrede. Dem Mathematiker fiel dann die Aufgabe zu, diese „willkürlich zu wählenden Principien" zu durchdenken und die daraus ableitbaren Konsequenzen zu ziehen und so darzustellen, dass sie wieder experimentell überprüft werden konnten. Diese Überprüfung konnte zur Bestätigung der gewählten Prinzipien führen oder deren Änderung notwendig machen, bis hin zur Wahl eines völlig neuen Systems von Prinzipien. Mit diesem Wechselspiel zwischen experimenteller Praxis und theoretischer Durchdringung charakterisierte Neumann das Voranschreiten der Naturwissenschaften. In keiner naturwissenschaftlichen Disziplin sah er diesen steten Wechsel in den theoretischen Vorstellungen deutlicher hervortreten als in der Physik jener Zeit. Damit hatte Neumann hinsichtlich der Aufgabenstellung eine klare Trennung zwischen Mathematik und Physik vorgenommen.

SCHLOTE

In seinen Forschungen hat er sich intensiv um die Umsetzung dieser Auffassung bemüht und leistete dabei einen wichtigen Beitrag zur Entwicklung der mathematischen Physik. Um diesen Beitrag korrekt einschätzen zu können, muss daran erinnert werden, dass bis zu Beginn des 19. Jahrhunderts die Mathematik in ihren auf die Praxis orientierten Bereichen vieles umfasste, das wenige Jahrzehnte später zu eigenständigen Disziplinen oder Teildisziplinen emporwuchs. Es sei nur an die theoretische Seite der Astronomie, der Geodäsie oder der Mechanik erinnert. Speziell die Mechanik war fest in die Mathematik integriert oder wie E. Garber es ausdrückte, Lagrange behandelte die Mechanik noch als eine Übungsaufgabe der Analysis. Es war ein Verdienst von Franz Neumann und der Königsberger Schule der mathematischen Physik, dass die Mechanik fest im Vorlesungskanon der Physik verankert wurde.
Doch während abgesehen von der Mechanik auch für das „Gebiet der Licht- und Wärme-Erscheinung" der Aufbau der Theorie aus wenigen unerklärten Prinzipien einen hohen Reifegrad erreicht hatte, benannte Neumann die Elektrizitätslehre als Gebiet, auf dem es noch große Defizite gab. In der Optik und der Wärmelehre lieferte die Annahme einer feinen, den Weltraum erfüllenden Äther-Materie, die neben der (gewöhnlichen) ponderablen Materie existiert, und die beide den nicht näher erklärbaren Gesetzen der Anziehung und Trägheit unterworfen sind, die Basis für ein Verständnis der meisten bekannten Erscheinungen. Neumann war überzeugt, dass dieses System von Grundannahmen in seinen Hauptumrissen Bestand haben würde und man, ohne die nötigen Anstrengungen zu verkennen, allmählich alle bekannten Effekte auf dieser Basis werde erklären können.
Die im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts gemachten grundlegenden Entdeckungen der Elektrophysik (galvanische Elemente, Elektromagnetismus, elektromagnetische Induktion) ließen sich dagegen nicht befriedigend mit den vorhandenen, in den Ansätzen bis ins 18. Jahrhundert zurückgehenden Vorstellungen erklären. Hier war das Auffinden der geeigneten Prinzipien eine noch nicht erfüllte Aufgabe. Die Mehrzahl der Physiker ging zur Erklärung dieser Erscheinungen von der Annahme zweier Materien aus, „welche *direct* nicht wahrnehmbar, weder fühlbar, noch wägbar sind, welche sich allein durch ihre *Wirkungen* kund geben" und gewöhnlich als elektrische Flüssigkeiten oder Fluida bezeichnet wurden. [Neumann 1865, S. 19] Die beiden Fluida sollten so fein sein, dass sie in das Innere der Körper eindringen konnten und ihre Eigenschaften waren einander direkt entgegengesetzt. Mit diesen Vorstellungen schloss sich Neumann der in jener Zeit in Kontinentaleuropa vorherrschenden Äthertheorie an. In den meisten Fällen bezog er sich auf die von W. Weber entwickelten Ansichten, die letzterer im Zusammenhang mit der Ableitung des nach ihm benannten Gesetzes über die von zwei elektrischen Teilchen aufeinander ausgeübte Kraftwirkung publiziert hatte. Ein großer Teil der Neumannschen Arbeiten, die mit physikalischen Fragen verknüpft sind, lässt sich grob dadurch charakterisieren, dass Neumann darin die Konsequenzen aus den Erklärungsprinzipien ableitete und in einigen Fällen neue Überprüfungsmöglichkeiten anregte, Änderungen der Prinzipien diskutierte oder auf theoretische Widersprüche aufmerksam machte. Teilweise teilte er die vorliegenden Prinzipien in mehrere Voraussetzungen auf, um eine genauere Lokalisierung der kritischen Annahme zu ermöglichen. Auf die von M. Faraday und J. C. Maxwell entwickelten Feldvorstellungen ging er erst viel später, in den 90er Jahren des 19. Jahrhunderts ein.
Einige Neumannsche Arbeiten sollen kurz als Beispiele skizziert werden. Die aus der Habilitation hervorgegangene Arbeit über die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes (Faraday-Effekt) unterstützte faktisch seine Überzeugung, dass die Grundannahmen in der Theorie des Lichtes einen hohen Reifegrad erreicht hatten. Indem er die Kraftwirkung eines elektrischen Teilchens auf ein Ätherteilchen analog zu dem Weberschen Gesetz ansetzte und den Äther als ein Teilchensystem interpretierte, das sich wie eine inkompressible Flüssigkeit verhielt, konnte er 1863 den „Versuch einer mathematischen Theorie" präsentieren, die die Grundvorstellungen beibehielt und die bisher nicht erfasste Erscheinung mit einschloss. Dieses Beispiel verdeutlicht aber auch, dass die Neumannsche Vorgehensweise we-

62

der leicht zu realisieren war, noch eine optimale Strategie darstellte. Es zeigte sich später, dass einige der von Neumann zusätzlich gemachten Annahmen zu Widersprüchen führten, und die Lösung letztlich in einer Abkehr von der Äthertheorie bestand. Etwa zum gleichen Zeitpunkt gingen L. V. Lorenz und J. C. Maxwell unabhängig voneinander mit neuen Theorien erste Schritte zur Interpretation des Lichtes als elektromagnetische Welle.
In der 1873 erschienenen Monographie „Die elektrischen Kräfte. Darlegung und Erweiterung der von A. Ampère, F. Neumann, W. Weber, G. Kirchhoff entwickelten Theorien. Erster Theil“ konzentrierte er sich darauf die Theorie der elektrischen Erscheinungen ausgehend von den Erkenntnissen der beiden Erstgenannten aufzubauen. Dazu unterteilte er die einzelnen Voraussetzungen in vier Gruppen. Die erste Gruppe bestand aus den vom ihm als gesichert eingestuften Annahmen, dem Energiesatz und dem Jouleschen Gesetz der „elektrodynamischen Wärmeentwicklung“. Die in den anderen Gruppen enthaltenen Voraussetzungen hatten einen zunehmend hypothetischen Charakter, so dass die vierte Gruppe zwei häufig in Zweifel gezogene Aussagen über die zwischen zwei Stromelementen wirkende Kraft enthielt. Sprachlich brachte Neumann dies durch die Verwendung der Begriffe Axiom, Grundsatz und Hypothese zum Ausdruck. Er nahm dann einen systematischen Aufbau der Theorie vor, verdeutlichte die logische Abhängigkeit der in den Voraussetzungen formulierten einzelnen Gesetze und leitete sein elektromotorisches Elementargesetz ab. In einer 1874 publizierten Arbeit variierte er die Voraussetzungen etwas, so dass er auf eine größere Zustimmung hoffen konnte, und leitete einige Aussagen ab, die bisher auf Grund der strittigen Voraussetzungen angezweifelt wurden. Dieses Vergehen war notwendig, da H. v. Helmholtz massive Einwände gegen die von C. Neumann und W. Weber entwickelte Theorie vorgebracht hatte. Der Haupteinwand richtete sich gegen die von W. Weber entwickelte und von C. Neumann übernommene Vorstellung, dass bei der Ermittlung der zwischen zwei Stromelementen wirkenden Kräfte bzw. allgemein der bei elektrischen und magnetischen Erscheinungen auftretenden Elementarkräfte außer der relativen Lage auch die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen berücksichtigt werden müssen. In dieser von Neumann teilweise sehr polemisch geführten Auseinandersetzung gab es zunächst keine Entscheidung, da verschiedene abgeleitete Resultate experimentell nicht überprüft werden konnten. Damit war entsprechend den Neumannschen Vorstellungen ein vorläufiger Abschluss erreicht und es war Aufgabe der Physiker, durch neue Experimente und den daraus abgeleiteten Folgerungen neue Impulse für die Behandlung elektrodynamischer Erscheinungen hervorzubringen. Neumann hat sich dann, nachdem er noch einige Gesichtspunkte bezüglich der inneren Konstitution der Körper bei Leitungsvorgängen einer genauen Analyse unterzogen hatte, verstärkt mathematischen Themen zugewandt und insbesondere eine ausführliche Ausarbeitung seiner Methode des arithmetischen Mittels vorgenommen.
Erst in den 90er Jahren beschäftigte sich Neumann wieder mit Problemen der Elektrodynamik. Seine Motivation war doppelter Natur. Zum einem wollte er prüfen, ob die Fortschritte in der Mathematik, speziell die verbesserten Methoden der Potentialtheorie, zu neuen Ergebnissen in der Behandlung der physikalischen Probleme führten. Zum anderen war man in der Physik zu neuen Einsichten gekommen, die er einer kritischen Analyse unterziehen und deren Konsequenzen für den Aufbau einer Theorie er erkunden wollte. Dieses Vorgehen entsprach ganz der früher gewählten Methode, wieder kam das Wechselspiel zwischen Mathematik und Physik zum Tragen. Doch Neumann wich nicht wesentlich von den früheren Grundvorstellungen ab. Da er die Maxwellsche Theorie in der von H. Hertz 1890 vorgenommenen systematischen Bearbeitung und Ausdehnung auf bewegte Körper mathematisch für weit weniger durchgebildet hielt als die von Helmholtz und ihm hervorgebrachten Ansätze, bevorzugte Neumann in dem 1898 veröffentlichten zweiten Teil seines Buches zur Elektrodynamik „Die elektrischen Kräfte. Darlegung und genauere Betrachtung der von hervorragenden Physikern entwickelten mathematischen Theorien“ weiterhin die alten Vorstellungen mit einigen von von Helmholtz vorgetragenen Verbesserungen. Die Entscheidung, welche Theorie den physi-

kalischen Verhältnissen besser gerecht wird, ließ er aber offen. Kritisch muss die einseitige Konzentration auf Arbeiten von Hertz und von Helmholtz vermerkt werden, die Neumann auch in der dreiteiligen Abhandlung zur Maxwell-Hertzschen Theorie beibehielt. Andere wichtige Publikationen von Boltzmann, Planck, Föppl u. a. erwähnte er nicht.
Die beiden Beispiele aus dem Neumannschen Schaffen verdeutlichen sowohl die engen Beziehungen, die Neumann zwischen Mathematik und Physik sah, als auch die klaren Unterschiede in der Aufgabenstellung, die er den beiden Disziplinen bei der Erforschung der Natur zuwies. Die Unterschiede folgten für ihn aus der Sachlage und bedeuteten keine Überlegenheit der einen Disziplin über die andere. Sehr klar artikulierte Neumann seine Vorstellungen zur Erkenntnisgewinnung in den beiden Disziplinen:

> „ Gewiss hat man mit vollem Recht gesagt, dass in der Physik ein wesentlicher Fortschritt immer nur durch *Induction* bewerkstelligt werden könne; während andererseits die Fortschritte der mathematischen Wissenschaft nothwendig von solcher Art sind, dass sie, wenn auch bisweilen durch *Induction* bewerkstelligt, doch immer durch *Deduction* hätten bewerkstelligt werden können.
> Es scheint somit, dass der Mathematiker im Gebiete der Physik wenig zu suchen habe, dass er etwa nur die Exempel auszurechnen habe, welche der Physiker ihm vorlegt.
> So urtheilen zu wollen, würde sehr übereilt sein. - Vielmehr hat der Mathematiker im Gebiete der Physik eine wichtige und nicht zu unterschätzende Aufgabe. Sie besteht darin, die einstweilen *vorhandenen* physikalischen Vorstellungen näher zu erforschen, ihre Consequenzen nach allen Seiten mit möglichster Strenge zu verfolgen; mit einem Wort, sie besteht darin, diese Vorstellungen *deductiv* zu entwickeln. Solche *deductive* Entwickelungen werden, namentlich wenn sie in festen und möglichst geradlinigen Zügen ausgeführt sind, dazu dienen, die Uebersichtlichkeit des betreffenden Gebietes zu vergrössern; sie werden beitragen, um gewissermassen unserm geistigen Blick allmählig diejenige Weite und Schärfe, namentlich aber diejenige Ruhe und Sicherheit zu geben, welche zu einer glücklichen *Induction* d. i. zum Emportauchen *neuer und besserer* Vorstellungen erforderlich sind." [Neumann 1878, S. 196f.]

In diesem Zusammenhang, aber auch an anderer Stelle hob Neumann noch einen wesentlichen Unterschied zwischen Mathematik und Physik hervor. Dies betraf die Frage, mit welcher Sicherheit physikalische Aussagen, insbesondere die als Ausgangspunkt für eine Theorie gewählten Prinzipien, die realen Gegebenheiten richtig widerspiegelten. Mit anderen Worten: Welcher Wahrheitsgehalt kam den physikalischen Sätzen zu? Für einen mathematischen Satz kann man stets entscheiden, „ob derselbe richtig oder unrichtig" ist. Ein als richtig nachgewiesener Satz wird auch für immer richtig bleiben, vermerkte Neumann weiter. Auf physikalische Sätze traf dies seiner Meinung nach nicht zu, ja es wäre völlig sinnlos eine solche Frage überhaupt zu stellen.

> „In der That wird bei einem physikalischen Satz niemals von seiner *Richtigkeit*, sondern immer nur von seinem mehr oder weniger guten *Einklang mit den beobachteten Thatsachen* die Rede sein können." [Neumann 1878, S. 196]

In der Mathematik hat man daher definitive Sätze, während die Sätze der Physik wohl alle einen provisorischen Charakter haben. In seiner Leipziger Antrittsrede hatte er dies auch bezüglich der einer physikalischen Theorie zu Grunde gelegten Prinzipien hervorgehoben, die immer den Charakter des Willkürlichen und Unbegreiflichen behalten werden. Wenn trotzdem gelegentlich von wahren Prinzipien die Rede ist, so wird damit nur behauptet,

> „ dass jene Principien bis zum heutigen Tag sich am Besten bewährt haben; nicht aber, dass sie für alle Ewigkeit feststehen; und noch viel weniger, dass sie (gleich einem Satz der Logik oder Mathematik) durch sich selber die Bürgschaft unangreifbarer Festigkeit, die Bürgschaft unumstösslicher Wahrheit darbieten." [Neumann 1870, S. 13]

Wiederholt hat Neumann den besonderen Charakter der Mathematik betont. Sie war mit ihrer logisch klaren Struktur, mit der Sicherheit ihrer Beweise das ideale Modell für den Aufbau

einer jeden Disziplin, das man anstreben sollte. Dieses Ziel bleibt aber unerreichbar, denn wollte man für eine physikalische Theorie von ähnlich unumstößlichen Sätzen ausgehen wie die Mathematik, so müsste man zu den Sätzen der Logik Zuflucht nehmen, und „aus derartigen rein formalen Sätzen eine physikalische Theorie" abzuleiten, ist ein Ding der Unmöglichkeit. [Neumann 1870, S. 12] Neumann hat aber, wenn man sein gesamtes Schaffen betrachtet, die Annäherung an dieses Modell überbewertet. Dies hinderte ihn an der unvoreingenommenen Anerkennung neuer Erklärungsmuster in der Elektrodynamik und kam in seiner Überzeugung zum Ausdruck, dass weitere Fortschritte in der Elektrodynamik nur durch eine exakte Durcharbeitung der vorhandenen Resultate und Anschauungen von Standpunkt der Mathematik aus erreicht werden könnten. Dies soll jedoch in keiner Weise die positiven Impulse schmälern, die er durch die strenge deduktive Bearbeitung der physikalischen Theorien für deren Entwicklung gab. Auch experimentell gewonnene neue Einsichten war er durchaus bereit zu akzeptieren, doch sollten sie auf ein gewisses theoretisches Niveau gehoben sein.
Insgesamt darf man sagen, dass Neumann die Mathematik deutlich von den Naturwissenschaften abhob, den Inselcharakter der Mathematik aber in folgenden Sinn positiv interpretiert hätte: Jede naturwissenschaftliche Disziplin hat eine ihre eigenen Aufgabenstellung, konzentriert sich auf die Erforschung ganz bestimmter Erscheinungen in der Natur und dies führt zu jeweils eigenständigen Erkenntnissystemen. Die Eigenständigkeit der Erkenntnissysteme drückt sich formal durch die Unterscheidung in die verschiedenen Naturwissenschaften aus. Auf diese Weise kommt jeder der Disziplinen ein Inselcharakter zu. Zugleich gibt es aber viele Verknüpfungen zwischen den einzelnen Disziplinen, die für deren Entwicklung unentbehrlich sind. Dies alles gilt auch für die Mathematik, obwohl sich der Gegenstandsbereich von den Naturwissenschaften unterscheidet und bei den wechselseitigen Einflüssen teilweise unterschiedliche Abstraktionsebenen verknüpft werden. Carl Neumann hat sich in seinem Schaffen mit ganzer Kraft den Beziehungen zwischen Mathematik und Physik gewidmet und zwischen den Inseln eine feste Brücke geschaffen. Diese Brücke war und ist die mathematische Physik.

Literatur:

/Neumann 1865/: Neumann, Carl: *Der gegenwärtige Standpunct der mathematischen Physik*. Akademische Antrittsrede. Verlag Laupp & Siebeck, Tübingen 1865

/Neumann 1870/: Neumann, Carl: *Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie*. Akademische Antrittsrede. Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1870 (auch in: *Leipziger mathematische Antrittsvorlesungen. Auswahl aus den Jahren 1869-1922*. Herausgegeben von Herbert Beckert und Walter Purkert. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1987, S. 7 - 37

/Neumann 1878/: Neumann, Carl: Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. *Abhandlungen Königl. Sächs. Acad. Wiss.*, 18(1878) (11. Band der Math.-Physische Cl.), S. 77 – 200

/Neumann 1908/: Neumann, Carl: „Nekrolog auf Wilhelm Scheibner". *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch–Physische Klasse*, 60(1908), S. 375 – 390

ČANAK

ÜBER DIE GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN MUSIKTHEORIE
III TEIL: ÜBER DIE GESCHICHTE DER TONLEITERN IM LICHTE DER MATHEMATISCHEN MUSIKTHEORIE

Miloš Čanak,Beograd

I

Das Tonsystem stellt die geordnete Auswahl einer bestimmten Anzahl von Tönen aus dem unendlichen Vorrat der von Natur gegebenen Töne und die Festlegung ihres gegenseitigen Verhältnisses dar.Es gibt verschiedene,zeitlich und völkisch bedingte Tonsysteme:das fünfstufige (pentatonische),das die Oktave in fünf Intervalle teilt, das siebenstufige (diatonische),das chromatisch-enharmonische der Griechen mit 24 Stufen,das 17 stufige der Araber,unser abendländisches 12 stufiges,gleichschwebendes,temperiertes Tonsystem,das Viertel-,Drittel- und Sechsteltonsystem usw.

Die Tonleiter ist eine stufenweise melodische Folge der eine Tonart bildenden Töne innerhalb der Oktave.So besteht z.B. die diatonische Tonleiter in Dur (Durtonart) und Moll (Molltonart)aus fünf Ganz- und zwei Halbtönen.Andererseits besteht die chromatische Tonleiter,die nicht auf eine Tonart beschränkt ist,sondern alle Stufen des gesamten Tonsystems umfasst aus lauter Halbtönen.

Eine Überblick der geschichtlichen Entwicklung von den Tonleitern führt uns durch verschiedene Zeitepochen und Zivilisationen. Aber,die mathematische Musiktheorie richtet eine besondere Aufmerksamkeit auf die Anwesenheit der mathematischen Begriffe und Theorien,so wie auch auf die zeitlichen Übereinstimmungen zwischen den mathematischen und musikalischen Inhalten.Es ist bekannt dass jedem Ton eine Frequenzenzahl entspricht und dass die Oktave eine Doppelfrequenz im Bezug auf den Grundton besitzt.Darum interpretiert die Mathematik eine Konstruktion der Tonleiter,ganz vereinfacht,als eine Interpolation des Zahlenintervalls $[1,2]$ durch eine endliche Zahlenfolge.Bei dieser Konstruktion wendet man verschiedene mathematische Verfahren an.

II

Unseren Überblick beginnen wir mit Pythagoras.Er war mit seinen Experimenten auf dem Monochord,einem einsaitigen Instrument bekannt,bei dem über einen quaderförmigen Resonanzkörper eine Saite gespannt ist. Die Pythagoreer experimentierten mit dem Monochord und variierten die Länge der unter konstanter Spannung stehenden Saite durch Einschieben eines Steges. Beim Halbieren der Saite ergab sich die Oktave. Der Verkürzung des schwingenden Anteils auf zwei Drittel der ursprünglichen Länge entsprach die Quinte, während die drei Viertel der Länge eine Quarte erzeugte.

Ganz allgemein entspricht dem Nacheinanderausführen zweier Tonschritte das Multiplizieren der entsprechenden Verhältniszahlen. Zur Illustration diene das folgende Beispiel:

Quinte + Quarte = Oktave $\Longleftrightarrow (3/2)\cdot(4/3) = 2/1$.

Am Monochord ist die Länge des schwingenden Saitenabschnittes bei konstanter Saitenspannung umgekehrt proportional zur Frequenz. Auf Grund dieser physikalischen Sachverhalte kann damit festgehalten werden: Zwei Tonintervalle sind genau dann gleich, wenn ihre Frequenzen im gleichen Verhältnis zueinander stehen.

Ohne uns bereits jetzt auf absolute Frequenzen festzulegen, können wir für die zunächst nur wichtigen Verhältniszahlen die Bezeichnungen der C-Dur-Tonleiter übernehmen, also c-d-e-f-g-a-h-c'. Den grossen Tonschritt (grosse Sekunde c-d, d-e, f-g, g-a, a-h) erhält man als Unterschied von Quinte und Quarte, d.h.

Quinte - Quartte = ganzer Ton $\Leftrightarrow (3/2):(4/3) = 9/8$.

Für den kleinen Tonschritt (e-f, h-c) erhält man

$(4/3):((9/8)\cdot(9/8)) = 256/243$.

Daraus kann man leicht eine Übersicht zum pythagoreischen Tonsystem zusammenstellen:

Tonbezeichnung	c	d	e	f	g	a	h	c'
Schwingungszahl bezogen auf c	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
bezogen auf tieferen Nachbarton		9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243

Die gleiche Tonleiter kann man sich auch über den sogenannten "Quintenzirkel" herleiten. Wenn wir von c ausgehend die Quintensprünge ausführen, so erhalten wir die Tonfolge c-g-d-a-e-h. Bei jedem Sprung multipliziert man die vorige Zahl mit 3/2. Man sieht, dass auf diese Weise gleichfalls die Verhältniszahlen der pythagoreischen Tonleiter erzeugbar sind (die dabei wegen Oktavenübergang mit 2^k multipliziert sind). So erhält man:

$$c = 1\ ,\ g = 1\cdot(3/2)^1 = 3/2\ ,\ d = (3/2)^2 = 9/4 = 2^1(9/8),\ a = (3/2)^3 = 2^1(27/16),\ e = (3/2)^4 = 2^2(81/64),\ h = (3/2)^5 = 2^2(243/128),\ f = 2\cdot(3/2)^{-1}.$$

Teilt man die fünf grossen Intervalle der pythagoreischen Tonleiter in je zwei Teilintervalle,so können beim Durchlaufen der Oktave von c nach c' insgesamt 12 Tonschritte ausgeführt werden. Aber man kann den Quintenzirkel mit 12 Quintensprünge nicht exakt schliessen.Für 7 Oktavenschritte und 12 Quintenschritte erhält man:

$$2^7 = 128 \ , \ (3/2)^{12} = 531441/4096 \Rightarrow (3/2)^{12}/2^7 =$$

$$= 531441/524288 = 1{,}0136 \ldots \qquad .$$

Hätte sich der Quintenzirkel nach 12 Sprüngen,d.h. 7 Umläufen exakt geschlossen,wären wir auf die Zahl Eins gekommen.Das diese Abweichung charakterisierende Zahlenverhältnis 531441:524288 nennt man in der Musiktheorie das "pythagoreische Komma".Durch diesen Quotienten wird das Intervall zwischen der zwölften Quinte und der siebenten Oktave bezüglich eines gemeinsamen Grundtones zahlenmässig erfasst.Das hier erläuterte Stimmungsprinzip,nach welchem alle Töne aus einer Quintenreihe abgeleitet werden,heisst pythagoreisches Stimmungsprinzip.

Bei solistischen Darbietungen an Streichinstrumenten neigen die Künstler zur Verwendung dieser pythagoreischen Tonstufen.Andererseits ersieht man die Wichtigkeit der quinten und quarten Beziehungen bei den altgriechischen Tonleitern.

Das griechische Tonsystem geht vom Quartenintervall aus.Durch die verschiedenartige Ausfüllung des Zwischenraums mit je 2 Tönen entstehen Viertongruppen (Tetrachorde),die nach ihrem Intervallverhältnissen die Tonarten (Harmoniai) und die Tongeschlechter (Gene) ergeben.Es gibt drei Tongeschlechter:das diatonische,das chromatische und das enharmonische.

Das diatonische Tetrachord besteht aus einem Halbton und zwei Ganztonschritten,nach der Stellung des Halbtons werden die Tonarten unterschieden.Drei Haupttonarten (nach griechischer Weise von oben nach unten gelesen!) sind (x = Halbtonschritte)

Dorisch	Phrygisch	Lydisch
a		
g	g	
$x\left\{\begin{array}{l} f \\ e \end{array}\right.$	$x\left\{\begin{array}{l} f \\ e \end{array}\right.$	$x\left\{\begin{array}{l} f \\ e \end{array}\right.$
	d	d
		c

Indem man an diese Tetrachorde oben ein zweites gleichgebautes anfügte,erhielt man die vollständigen Tonleitern.

Das jüngere chromatische Tongeschlecht teilt das Tetrachord in eine unteilbare übermässige Sekunde und zwei Halbtöne ein (a-ges-f-e). Das von Aristoxenos als das jüngste enharmonische Tongeschlecht zerlegt das Tetrachord in eine unteilbare grosse Terz und zwei (ungefahre) Vierteltöne (a-f-fes-e) .

III

Die Entstehung der diatonischen Tonleiter ist mit dem Namen Didymos (geb.63 v.u.Z.) verbunden. Wenn man am Monochord den beweglichen Steg so einsetzt, dass $4/5$ der ursprünglichen Saite oszilliert, so ergibt sich die grosse Terz; der Kehrwert $5/4$ entspricht dem Verhältnis der Frequenzen. Mit diesem Tonschritt lässt sich eine weitere Tonleiter aufbauen, die für die Musiktheorie von fundamentaler Bedeutung ist: die diatonische Tonleiter. Auf Grund der bekannten Frequenzenzahlen $v(c)=1$, $v(f)=4/3$, $v(e)=5/4$, $v(f)=4/3$, $v(g)=3/2, v(c')=2$ erhält man durch einfache Rechnung die folgenden Werte:

kleine Sekunde: $v(f):v(e)=(4/3):(5/4)=16/15$.

Septime: $v(c'):v(h)=2:v(h)=16:15 \Rightarrow 16\cdot v(h)=30 \Rightarrow v(h)=15/8$.

Sexte: $v(a)=v(f)\cdot(5/4)=(4/3)(5/4)=5/3$.

grosse Sekunde: $v(d):v(c)=v(g):v(f) \Rightarrow v(d)=9/8$.

Auf Grund dieser Rechnung erhält man die folgende Tabelle:

Tonbezeichnung	c	d	e	f	g	a	h	c'
Schwingungszahl bezogen auf c	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
bezogen auf tieferen Nachbarton		9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15 .

Für den Grundakkord c-e-g (Tonika) lassen sich die Verhältniszahlen kürzen, und es gilt 4:5:6. In diesem Verhältnis stehen auch der Dominantakkord g-h-d' und der Subdominantakkord f-a-c' . Für die pythagoreische Stimmung gilt 64:81:96.

Da die diatonische Tonleiter optimal die Forderung nach harmonischem Zusammenklang der Töne befriedigt, bezeichnet man sie auch als die "reine" Tonskala. Die Fülle der Tonintervalle mit kleinen Verhältniszahlen und gutem Zusammenhang verleiht der diatonischen Stimmung ihre Überlegenheit gegenüber der pythagoreischen Stimmung bei der Interpretation polyphoner Musik.

ČANAK

IV

In der mathematischen Grundlage der Aufbau einer Tonleiter liegt der Begriff des Mittelwertes. Auf Archytas von Tarent (1. Hälfte 4.Jh.v.Chr.), wahrscheinlich dem bedeutendsten pythagoreischen Musiktheoretiker, geht folgende Zweiteilung von Intervallen zurück

1:2

2:3 3:4

4:5 5:6 6:7 8:9 us.w.

Archytas schreibt: "Es gibt drei Mittel in der Musik: einmal das arithmetische, zweitens das geometrische und drittes das umgekehrte, das sogenannte harmonische". Inder Tat spielen das arithmetische und harmonische Mittel bei der Teilung eines Intervalls eine entscheidende Rolle.

Für zwei Zahlen a und b ergeben sich die drei Mittel:

$A(a,b)=(a+b)/2$ oder $a-A = A-b$

$G(a,b)=\sqrt{a\cdot b}$ oder $a:G = G:b$

$H(a,b)=2ab/(a+b)$ oder $(1/a)-(1/H)=(1/H)-(1/b)$.

Für $a=1$ und $b=2$ kann man leicht mit Hilfe der arithmetischen und harmonischen Mitte die erwähnte diatonische Tonleiter ausbilden:

$A(1,2)=(1+2)/2 = 3/2 \Rightarrow$ Quinte , $H(1,2)=2\cdot 1\cdot 2/(1+2)=4/3 \Rightarrow$ Quarte

$A(1,3/2)=(1+3/2)/2 = 5/4 \Rightarrow$ Terz , $A(4/3,2)=(4/3+2)/2=5/3 \Rightarrow$ Sexte

$A(1,5/4)=(1+5/4)/2 = 9/8 \Rightarrow$ grosse Sekunde, $H(3/2,15/8)=5/3 \Rightarrow$
$15/8 \Rightarrow$ Septime .

Auf Grund dieser Teilung der Oktave kann man eine logische und motivierte musikalische Definition der Mittelwerte einführen. Dabei nützt man den einfachen Ausdruck

$$x = (p_1x_1 + p_2x_2)/(p_1 + p_2)$$

für den Schwerpunkt x zwischen zwei Punkte x_1 und x_2 mit den Gewichten p_1 und p_2. Im Falle $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ geht dieser Ausdruck in

$$x = (p_1 + 2p_2)/(p_1 + p_2)$$

über. Daraus erhält man

1. $p_2 = 0 \Rightarrow x = x_1 = 1 \Rightarrow$ Prim
2. $p_1 = 7$, $p_2 = 1 \Rightarrow x = 9/8 \Rightarrow$ Sekundenmitte
3. $p_1 = 3$, $p_2 = 1 \Rightarrow x = 5/4 \Rightarrow$ Terzenmitte
4. $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ $x = 4/3 \Rightarrow$ Quartenmitte

5. $p_1 = 1$, $p_2 = 1 \Rightarrow x = 3/2 \Rightarrow$ Quintenmitte
6. $p_1 = 1$, $p_2 = 2 \Rightarrow x = 5/3 \Rightarrow$ Sextenmitte
7. $p_1 = 1$, $p_2 = 7 \Rightarrow x = 15/8 \Rightarrow$ Septimenmitte
8. $p_1 = 0$ $x = x_2 = 2 \Rightarrow$ Oktave .

Auf Grund dieser Tatsache lassen sich für zwei beliebige Zahlen a und b $(a<b)$ die musikalischen Mittelwerte definieren:

Sekundenmitte: $Sc(a,b)=(7a+b)/8$
Terzenmitte: $T(a,b)=(3a+b)/4$
Quartenmitte: $Qr(a,b)=(2a+b)/3$
Quintenmitte: $Qn(a,b)=(a+b)/2$
Sextenmitte: $Sx(a,b)=(a+2b)/3$
Septimenmitte: $Sp(a,b)=(a+7b)/8$.

Es gilt dabei die Bedingung
$$a \leq Sc(a,b) \leq T(a,b) \leq Qr(a,b) \leq Qn(a,b) \leq Sx(a,b) \leq Sp(a,b) \leq b$$
die eine Analogie mit der Bedingung
$$a \leq H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b) \leq b$$
darstellt.

Dabei ist die Folge $\{g_1\}$ der Gewichte im Bezug auf die Prim eine abnehmende Folge während die Folge $\{g_2\}$ der Gewichte im Bezug auf die Oktave eine wachsende Folge darstellt.Wenn man von Prim nach Oktave eine Tonleiter übergeht,so vermindert sich allmählich der Einfluss und die Gravitationskraft der Prim,und gleichzeitig vergrössert sich der Einfluss und die Gravitationskraft der Oktave.Eine ähnliche Situation gilt auch im Gravitationsfeld zwischen zwei Himmelskörper.Bei den Tonleitern nehmen Prim und Oktave die Rolle dieser Himmelskörper über.

V

Das reine Tonsystem bilden die Töne der sgn.Obertonfolge,die neben dem Grundton in dem Klang jeder Tonquelle vorhanden sind.Die Obertöne entstehen dadurch,dass fast alle Tonquellen Schwingungen ausführen,statt einfacher Töne also zusammengesetzte Klänge ergeben.So kann z.B. eine Saite als Ganzes mit der Schwingungszahl n schwingen,aber auch mit den Schwingungszahlen $2n,3n,4n$ usw.Alle diese Schwingungsweisen können zugleich auftreten und man kann neben dem Grundton auch die Teiltöne hören.Dem ungeübten Ohre wird das Heraushören der Obertöne eines Klanges durch die Resonatoren erleichtert.

Sind die Schwingungszahlen der Teiltöne kleine ganze Vielfache des Grundtones (wie z.B. bei Saiten oder Pfeifen) so werden sie als harmonische Teiltöne bezeichnet.Die Verschiedenheit in der Anzahl und Stärke der jeweiligen harmonischen Teiltöne ist der Grund für die Verschiedenheit in der Klangfarbe der verschiedenen musikalischen Instrumente.Man kann das folgende Experiment ausführen.

An einem Monochord wird die nachstehende Reihenfolge zum Erklingen gebracht:zunächst die ganze Saitenlänge,dann deren Hälfte, ein Drittel,ein Viertel usw.Die erklingenden Töne werden notiert,woraus bei Annahme des Grundtones C folgende durchnummerierte Tonfolge entsteht:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
C	c	g	c′	e′	g′	b′	c″	d″	e″	...

Beim Überblicken dieser Tonfolge erkennt man,dass es sich um jene Ordnung von Zahlen und Tönen handelt,die auch der Ober- bzw. Naturtonfolge zugrunde liegt,die naturgesetzlich entstehen muss.

Dieses Experiment wurde bereits in der Antike vermutlich von Pythagoras vorgenommen.Die Obertonfolge als Naturphänomen wurde jedoch erst 1636 durch Mersenne entdeckt und 1702 durch Sauveur mathematisch formuliert,d.h. dass dieses Experiment unabhängig von der Natur durch den menschlichen Verstand und der Mathematik durchgeführt werden konnte (siehe [2]) .

Die reziproken Werte dieser Zahlen bilden eine harmonische Zahlenfolge

$$1, 1/2, 1/3, 1/4 \ldots 1/n \ldots \quad .$$

Jede Zahl dieser Folge stellt den schwingenden Teil der Saite dar,der diesem Ton entspricht.Andererseits stellt jede Zahl dieser Folge die harmonische Mitte der zwei benachbarten oder zwei symmetrischen Zahlen,d.h.

$$b_k = \frac{2b_{k-1} \cdot b_{k+1}}{b_{k-1} + b_{k+1}} = \frac{2b_{k-m} \cdot b_{k+m}}{b_{k-m} + b_{k+m}}$$ dar.

VI

In den alten Zivilisationen Ostasiens findet man ganz andere Tonsysteme.

<u>Chinesische Musik</u> blühte soweit wir aus theoretischen Schriften wissen,bereits um 3000 v.Chr. .Das älteste Tonsystem war fünfstufig (ohne Halbtöne) und umfasste die Töne f-g-a-c-d die,wie im pythagoreischen System aus dem Quintenzirkel (von f aus) hergeleitet wurden.Durch Weiterführung der Quintenreihe wurden schon im Anfang des 16 Jahrhundertes die "Hilfstöne" e und h,und damit die siebenstufige Leiter,späterhin die übrigen Halbtöne gewonnen.Doch blieben die aus diesem zwölfstufigen (chromatischen) Tonmaterial gebildeten

ČANAK

Gebrauchsskalen ("Tonarten") bis in die jüngste Zeit im wesentlichen auf verschiedenartige fünfstufige Ausschnitte beschränkt.

Indische Musik: Die Tonordnung der Indischen Musik soll man nicht im Dur-Moll-Sinne auffassen. Das Harmonieempfinden und die Mehrstimmigkeit der abendländischen Musik sind den Indern fremd. Dagegen sind als tonartbestimmende Grössen die Begriffe der Tonika (Radscha-König), als des melodischen Schwerpunkttones, und der Dominante ("Minister") dem nächstwichtigen Melodieton ausgebildet. Friedrich Glorian (siehe [3]) schreibt: "Seit mehr als zweitausend Jahren befasst sich die Musiktheorie Indiens und des Abendlandes mit dem Intonationssystem ihrer Musik, und beiden Kulturen ist das Konsonanzprinzip zur Bildung von Tonleitern gemeinsam. Als wichtiges Konsonanzprinzip wird dabei die Oktave (2/1 oder 22 shrutis), die reine Quinte (3/2 oder 13 shrutis), und deren Umkehrung, die reine Quarte (4/3 oder 9 shrutis) angesehen. Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Kulturen liegt darin, dass im Abendland (wie auch in der chinesischen und arabischen Musiktheorie) arithmetische Proportionen der Skalenbildung zugrunde liegen, während Indien eine topologische Sichtweise beforzugt, d.h. die Intervalle werden durch ihre Lage und Anordnung im Oktavraum bestimmt.

VII

Leonhard Euler (1702-1783) hat merfach versucht, mit zahlentheoretischen Methoden Gesetze der Musiktheorie aufzuspüren oder durchsichtiger zu gestalten. In seinem Tonsystem ordnet er jedem Ton innerhalb der Oktave eine Zahl, auf folgende Art und weise, zu:

c	cis	d	dis	e	f	fis	g
$2^7\cdot 3$	$2^4 5^2$	$2^4 3^3$	$2\cdot 3^2 5^2$	$2^5 3\cdot 5$	$2^9\cdot 1$	$2^2\cdot 3^3 5$	$2^6\cdot 3^2$

gis	a	b	h	c
$2^3\cdot 3\cdot 5^2$	$2^7\cdot 5$	$3^3\cdot 5^2$	$2^4\cdot 3^2\cdot 5$	$2^8\cdot 3$

.

Alle Zahlen sind vom Typ $2^k\cdot 3^m\cdot 5^n$ mit $m \in \{0,1,2,3\}$ und $n \in \{0,1,2\}$.

In einem Brief an Johann Bernoulli (siehe [4] , [5]) schreibt Euler über sein Tonsystem: "Es soll nämlich gezeigt werden, wie ein System aller verschiedener, verwandter Töne, die eine bestimmte Harmonie hervorbringen, unter einen gewissen allgemeinen Term gebracht werden kann, dessen einzelne Teiler die Töne des Systems selbst erzeugen. So ist der allgemeine Term $2^k\cdot 3^3\cdot 5^2$ der "Exponent" dieses Tonsystems, denn alle seine Teiler innerhalb des Verhältnisses 1:2

ergeben die Töne dieser Art und erfüllen das Intervall einer einzigen Oktave".

In diesem Tonsystem sind folgende Tatsachen von Interesse:

1. Es besteht ein wesentlicher Unterschied in der Konzeption bei Euler im Vergleich zu den Pythagoreern. Die Pythagoreer ordneten Tonverhältnissen jeweils Zahlenverhältnisse zu; bei Euler wird mit jedem einzelnen Ton eine Zahl verknüpft. Doch ist das Eulersche Zahlensystem in einer Übereinstimmung mit dem diatonischen Tonsystem, den der Quotient von zwei beliebigen Zahlen der Form $2^k \cdot 3^m \cdot 5^n$ mit dem Zahlenwert für das entsprechende musikalische Intervall koinzidiert.

2. Wenn man die "Charakteristik" $3^m \cdot 5^n$, $(m=0,1,2,3, n=0,1,2)$ betrachtet, so lassen sich die Exponenten von zwölf Eulerschen Zahlen als cartesisches Produkt der Mengen $\{0,1,2,3\} \times \{0,1,2\}$ interpretieren, d.h.

$$
\begin{array}{lll}
f \rightarrow 3^0 \cdot 5^0 \quad , & a \rightarrow 3^0 \cdot 5^1 \quad , & cis \rightarrow 3^0 \cdot 5^2 \\
c \rightarrow 3^1 \cdot 5^0 \quad , & e \rightarrow 3^1 \cdot 5^1 \quad , & gis \rightarrow 3^1 \cdot 5^2 \\
g \rightarrow 3^2 \cdot 5^0 \quad , & h \rightarrow 3^2 \cdot 5^1 \quad , & dis \rightarrow 3^2 \cdot 5^2 \\
d \rightarrow 3^3 \cdot 5^0 \quad , & fis \rightarrow 3^3 \cdot 5^1 \quad , & b \sim ais \rightarrow 3^3 \cdot 5^2 \quad .
\end{array}
$$

3. Die vier entsprechenden Dreiklänge f-a-cis, c-e-gis, g-h-dis und d-fis-ais besitzen die gleiche harmonische Struktur, d.h. sie stellen die übermässigen Dreiklänge dar.

VIII

Nach Didymos ruhten für fünfzehn Jahrhunderte die theoretischen Beiträge zur Verbesserung des Tonsystems und zur Anpassung der Tonskala an neuere Forderungen bezüglich des Zusammenspiels von mehreren verschiedenartigen Instrumenten (E.Schröder: "Mathematik im Reich der Töne", siehe [1]). Es erschien das folgende Problem: "Alle durch das Instrument mit fester Tonlage verfügbaren Töne müssendie Funktion des Grundtones einer Tonleiter übernehmen können". Bei der gleichschwebend temperierten Tonleiter mussen die folgenden Bedingungen gelten.

1. Zwei Tonintervalle sind genau dann gleich, wenn die Quotienten ihrer Frequenzen miteinander übereinstimmen.

2. Die Frequenz, die auf zwölf Tonschritte gleich verteilt wird, soll sich verdoppeln.

Beide Forderungen sind erfüllt, wenn der Quotient der Schwingungszahlen zweier benachbarter, sonst beliebig wählbarer Töne

$q = \sqrt[12]{2}$ ist, denn es muss $q^{12} = 2$ gelten. So ergibt sich folgende Lösung für die Verhältnisse der Tonfrequenzen:

c	des	d	es	e	f	fis	g	as	a	b	h	c'
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[3]{2^2}$	$\sqrt[4]{2^3}$	$\sqrt[6]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	2 .

An einem gleichschwebend temperierten Instrument sind alle Tonarten technisch spielbar, ohne dass dabei ungewollte Dissonanzen in den Akkorden und Verfälschungen in der Melodie auftreten.

Eine erste Anregung für die gleichschwebend temperierte Stimmung gab 1482 der Italiener Bartolomé Ramos (um 1440-1491) zu Bologna in seinem Buch "De musica tractatus". Eine mathematische Ausarbeitung dieses Stimmungsprinzips enthält das Buch "Harmonie universelle" des französischen Mathematikers M. Mersenne (1588-1648). Auf einer Seite dieses Buches gibt es die Abbildung eines Chlavichordes bei dem die Oktave in 19 Tonschritte aufgeteilt worden ist. Erstmalig fand diese Stimmung an der von Arp Schnitger für die St.-Jakobi-Kirche in Hamburg 1688 bis 1692 erbauten Orgel Anwendung. Der Bahnbrecher für dieses Stimmungsprinzip war der Halberstädter Organist Andreas Werckmeister (1645-1706) durch sein 1691 erschienenes Buch mit dem umfänglichen Titel "Musikalische Temperatur, oder deutlicher und warer mathematischer Unterricht ... ". Johann Sebastian Bach trat gleichfalls als Komponist mit allem Nachdruck für das neue Tonsystem ein.

Von mathematischer, akustischer und technischer Seite war mit dem temperierten Stimmungsprinzip auch der Weg für die grossen Klavierkomponisten und Virtuosen des 18., 19. und 20. Jahrhunderts vorbereitet. Dieses System, nach dem heute in allen Konzertsälen der Welt musiziert wird, ist das Ergebnis jahrhundertelangen Suchens und Forschens (siehe [1]).

IX

Um die mathematische Wesentlichkeit des gleichtemperierten Tonsystems besser zu verstehen, erwähnen wir 2 wichtige zeitliche und inhaltlische Koinzidenzen.

1. Lassen wir die Folge der Halbtöne der gleichmässigen Temperatur an uns vorübertönen, so haben wir die Intervallzahlen

$$1, \sqrt[12]{2^1}, \sqrt[12]{2^2}, \ldots \sqrt[12]{2^{12}} = 2 \ldots .$$

In dieser Folge steht vor uns ein Logarithmensystem mit der Basis $\sqrt[12]{2}$, die Logarithmen sind die Exponenten 0,1,2,3,4 ...... 12.

Das Schreiten von Ton zu Ton entspricht den Logarithmen.Das fortschreitende Musizieren,das Aneinandererreihen der Töne hat sein arithmetisches Gegenbild in den Logarithmen.In diesem Sinne findet sich das Wort Logarithmus erstaunlicherweise schon bei Aristoteles: "Der Wohlklang ist ein Logarithmus (logos arithmon) im Hohen oder Tiefen".Die Aufstellung einer Logarithmentafel,das sukzessive Erreichen der Logarithmen ist gleichbedeutend mit der gleichmässigen Temperierung eines musikalischen Instrumentes.In der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts wurden die Logarithmen erfunden und die ersten Tafeln hergestellt,und in der zweiten Hälfte desselben Jahrhundertes führte Andreas Werkmeister die moderne Stimmung ein.

2. Der bekannte Mathematiker Jakob Bernoulli (1654-1705) lebte in dergleichen Zeitepoche wie Andreas Werkmeister (1645-1706).Bernoulli untersuchte verschiedene Kurven,die in den Polarkoordinaten darstellbar sind.Seine Lieblingskurve war die logarithmische Spirale mit der Gleichung $r = e^{at}$ $(a \neq 0)$(siehe [6]).

Es gelten verschiedene Eigenschaften dieser Kurve,die auch für die Musik wichtig sind:

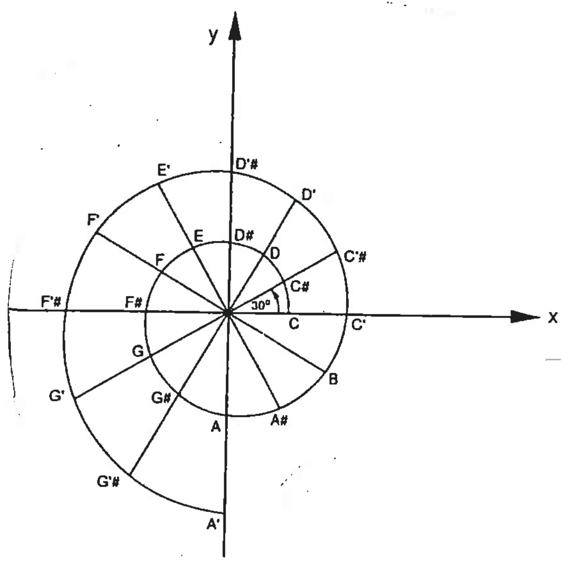
I/ Lässt man den Winkel t um gleiche Beträge wachsen,dann vervielfacht sich der Abstand r vom Pol in gleichen Verhältnissen, das heisst,in einer geometrischen Folge.

II/ Jede Gerade die durch den Pol geht,schneidet die Spirale unter gleichgrossen Winkeln.

III/ Durch Anwendung verschiedener geometrischer Transformationen bleibt die Spirale invariant-unverändert.Man betrachte zum Beispiel die Inversion $r \to 1/r$,wobei die Gleichung $r = e^{at}$ in die Gleichung $r = 1/e^{at} = e^{-at}$ übergeht,deren Bildkurve spiegelbildlich zur ursprünglichen Spirale liegt.

Wegen dieser und noch anderer Eigenschaften gab ihr Jakob Bernoulli den Namen "spira mirabilis" (wunderbare Spirale) und äusserte den Wunsch,dass die logarithmische Spirale mit der Inschrift "Eadem mutata resurgo" (Verwandelt kehr ich als dieselbe wieder) auf sein Grabmal gemeisselt werden solle.

Diese Spirale ist gleichzeitig das beste mathematische Modell für die gleichtemperierte Tonleiter.Man soll den Vollwinkel auf zwölf gleichen Teilen zerlegen und die zwölf Töne der gleichschwebend temperierten Tonleiter entlang der logarithmischen Spirale anordnen (siehe das Bild).Um ein Stück von einer Tonleiter in eine andere zu transponieren,muss man die Spirale so drehen,dass der erste Ton ihrer Tonleiter auf die x-Achse fällt. Die übrigen Töne kommen automatisch auf ihren Platz. Dadurch stellt die Spirale eine Art musikalischer Rechenschieber dar.



Bemerkung: Mit der gleichtemperierten Tonleiter verrundet und schliesst sich das Prinzip der Mittelwerte. In der diatonischen Tonleiter spielt die arithmetische Mitte eine wichtige Rolle während man in der harmonischen Tonfolge die Anwesenheit der harmonischen Mitte bemerkt.

In der gleichtemperierten Tonleiter dominiert die geometrische Mitte. Jede Schwingungszahl stellt die geometrische Mitte von zwei benachbarten oder zwei symmetrischen Schwingungszahlen dar, d.h.

$$c_k = \sqrt{c_{k-1} c_{k+1}} = \sqrt{c_{k-n} c_{k+n}} \quad .$$

Mit Hilfe der geometrischen Mitte lässt sich leicht die ganze gleichtemperierte Tonleiter ausbilden.

X

Am Ende unserer Betrachtungen sieht man wie sich durch die historische Entwicklung der Tonleiter ein goldener mathematischer Ariadnefaden durchschleicht. Mathematische Begriffe der Mittelwerte, Zahlenfolge (arithmetische, geometrische, harmonische), Interpolationen, Rechenoperationen (Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren) u.a. sind notwendig für das Verständnis der Tonleitern.

Eine wichtige Rolle spielt die Polarität rational-irrational. Wie sich die Menge der reellen Zahlen auf die rationale und irrationale teilen lässt, so steht es auch mit der musikalischen Realität. Der Musikvertreter für die rationalen Zahlen ist das reine Tonsystem mit der Obertonfolge und der Musikvertreter für die irrationalen Zahlen ist das gleichtemperierte Tonsystem. Die rationalen und irrationalen Zahlen sind gleichberechtigt im Reich der reellen Zahlen. Für einen Mathematiker gilt die gleiche Regel auch in der Musik. Das reine und gleichtemperierte Tonsystem sind gleichberechtigt und sie müssen koexistieren im Reich der lebendigen Musik. Das sieht man, wenn ein Geiger und ein Pianist zusammen musizieren. Der Geiger neigt zum reinen Tonsystem, speziell bei Ausführung der Flageolettöne, während der Pianist die gleichtemperierte Stimmung respektieren muss.

So haben wir am Beispiel der Tonleiter gezeigt,wie tiefe strukturelle und qualitative Zusammenhänge zwischen Musik und Mathematik existieren .

- - - - - - - - - - - - -

LITERATUR

[1] Schröder E.,"Mathematik im Reich der Töne",Teubner Verlagsgesellschaft,Leipzig,1982.

[2] Holek G.,"Intervallproportionen und das Stimmungsproblem im Zusammenhang mit der Entwicklung der Musik",Festgabe für Rudolf Haase,Institut für harmonikale Grundlegenforschung,Wien,1990,s. 148-183.

[3] Glorian F.,"Indische Ragas-Inhalt und Struktur",Harmonik-Beiträge 1994,Verlag Peter Neubäcker,München,1994,s.41-97.

[4] Radbruch K.,"Mathematik in den Geisteswissenschaften", Göttingen:Vandenhöck u.Ruprecht,1989,s.96-99.

[5] Fellmann E.,"Leonhard Euler-Ein Essay über Leben und Werk", Gedenkband des Kantons Basel-Stadt,Basel 1983.

[6] Maor E.,"Die Zahl e - Geschichte und Geschichten",Birkhäuser Verlag,Basel 1996.

- - - - - - - - - - - - - -

Anschrift:Prof.Dr.Miloš Čanak
11000 Beograd
Brzakova 4
Jugoslawien

Georg von Vega und der Kalender

Marko Razpet

Pädagogische Fakultät in Ljubljana

Slowenien

Georg Freiherr von Vega (1754–1802) ist nach seinen Logarithmentafeln und anderen mathematischen und ballistischen Werken sehr gut bekannt. Vielleicht wird seine Arbeit in der *Zeitkunde* oder *Chronologie* nicht genug betont. Wie man im Buch *Anleitung zur Zeitkunde* aus seinen Komentaren und Anmerkungen sieht, beherrschte er die Probleme des Kalenders und Zeit ebenso gut wie Logarithmen und Mörser. Sonst schrieb Vega kein selbstständiges Werk über Kalender, das tat mit der *Anleitung zur Zeitkunde* sein Freund und Kollege A. Cramer von Kronenbach, der für uns vielleicht ganz unbekannt ist. Vega benannte ihn einen *Freund der Wissenschaften.* Vega, der ein Jahr früher zum Freiherrn ernannt wurde, war Herausgeber eines für jene Zeit interessanten Buches, dem er eine ganze Reihe von bedeutungsvollen Anmerkungen und Ergänzungen zugab und die Veröffentlichung derer war auch eine Bedingung, dass Herr Kronenbach als ein unbekannter Verfasser sein Schreiben, im Schutze einer weltbekannten Person von Vega, publizieren konnte. Die Kosten des Druckes bezahlte Vega und er benutzte diese Gelegenheit besonders für seine Meinung über die neue französische Zeitrechnung.

Hier ist der volle Text der Titelseite der *Anleitung zur Zeitkunde* aus gotischer Schrift zu Normalschrift übersetzt:

Anleitung

zur

Zeitkunde

1

M. RAZPET

mit

Vergleichung der bey verschiedenen Nationen

gewöhnlichen Zeitrechnungen, nebst einem immerwäh-

renden Gregorianischen, und einem neufranzösischen

Kalender.

Aufgesetzt

von einem Freunde der Wissenschaften.

Herausgegeben,

und mit einigen Anmerkungen und Zusätzen begleitet

von

Georg Freyherrn von Vega,

Ritter des milit. Mar. Theres. Ordens, Major des kais. königl.

Bombardier = Corps, der königl. Großbrit. Societät der Wissensch.

zu Göttingen Correspondenten, der Churf. Mainz. Academie nützlicher

Wissensch., der physical. mathematischen Gesellschaft zu Erfurt, der

königl. Böhmischen Gesellsch. der Wissensch. zu Prag, und der

2

M. RAZPET

königl. Preussisch. Acad. der Wissensch. zu Berlin Mitgliede.

Verkaufspreis 1. Rthl.

Wien und Leipzig,

Beym Herausgeber, und in Commission der Weidmannischen

Buchhandlung. 1801

Es ist selbstverständlich, dass die *Anleitung zur Zeitkunde* den Julianischen und Gregorianischen Kalender enthält, samt ihren interessanten historischen Entwicklung, die in der Begründung der Stadt Rom beginnt. Der alte römische Kalender samt den Kalenden, Nonen und Iden, Namen der Monate und Wochentagen ist sehr gut erklärt. Die Kalenderreform von Julius Caesar und ihre Schwierigkeiten sind gut beschrieben, wie auch alle Nachwirkungen der Einführung der Schaltjahre. Die einfache Regel, die Caesar im Jahre 46 vor. Chr. eingeführt hatte, galt unveränderlich bis zur Gregorianischen Kalenderreform im Jahre 1582 und gilt noch immer in der orthodoxen Kirche in einigen Ländern. Vega hatte zugesetzt, dass die Woche nicht immer sieben Tage hatte. Bei den alten Griechen dauerte eine Woche zehn Tage, bei den alten Römern aber acht Tage. Die Woche von sieben Tagen, die wir heutzutage kennen, kommt von den alten Juden. Bei allen Wochen ist der letzte Tag ein Ruhetag. Vega hatte auch einen eigenen Vorschlag für die Kalenderreform, mit Wochen von sechs Tagen. Im Gemeinjahr hätte eine Woche nur fünf Tage. Damit könnte man leichter Monate und Halbjahre formieren. Seiner Meinung nach wäre es besser den Jahresanfang für die nördliche Hälfte der Erdkugel an die Frühlingsnachtgleiche

M. RAZPET

anzuknüpfen, weil sich da die Natur erneuert.

Besonders wertvoll in der *Anleitung zur Zeitkunde* sind die Tafeln der Gregorianischen Epakten und Osterdaten bis zum Jahre 2000. Alle Tafeln wurden durch die mittelalterichen Methoden gerechnet, das heißt mit Hilfe der chronologischen Kennzeichen (Sonnenzirkel, Sonntagsbuchstaben, Römerzinszahlen, goldene Zahlen), Mondzeiger, merkwürdige Zeitperioden, Ären und Epochen. Wenn wir diese Tafeln in unser Jahrhundert richtig fortsetzen und mit den Resultaten der modernen Rechenmethoden vergleichen, sehen wir eine erstaunliche Übereinstimmung. Vega hat am Ende des Buches auch die neue Gaußsche Methode zur Berechnung des Ostertages im Julianischen und Gregorianischen Kalender vorgestellt.

Es wurde auch gezeigt, wie man mit Längen des tropischen Jahres und des synodischen Monates genau wichtige Daten berechnen kann: Nachtgleichen, Mondphasen, Osterdaten und davon abhängige andere Festtage. Wenn es nötig ist, werden dabei auch Vegas Logarithmentafeln gut gebraucht. Aus mathematischer Hinsicht ist die *Anleitung zur Zeitkunde* wegen der sogenannten *Buchstabenarithmetik* auch willkommen. In dem Buch geht es um eine Reihe von Diophantischen Gleichungen der Form $ax+by+cz=d$, die mit chronologischen Kennzeichen eng verbunden sind.

Es sind auch andere Kalender, die in Vegas Zeit in Europa und im Nahen Osten gebraucht wurden, ganz genau beschrieben. Es war nämlich sehr wichtig, dass nicht nur die Kalender der Verbündeten, sondern auch die Kalender der Feinde gut bekannt waren. Dem damaligen neuen französischen Kalender wurde eine besondere Betonung gewidmet. Die Ursache lagen darin, dass Vega dem neuen Meßsystem sehr wohlgeneigt war, obwohl die Idee des neuen Kalenders aus Paris auf der feindlichen Seite kam. Vegas Meinung nach waren die neuen französischen Wochen von zehn Tagen zu lang. Seine Kritik ging auch über die Dauer des Tages von zehn neuen, zu langen Stunden. Jede Stunde hätte 100 neue Minuten enthalten, jede Minute 100 neue Sekunden. Bis damals algemein gebrauchte Einheiten Stunde, Minute und Sekunde dürften nicht in einem neuen Kalender mit denselben Worten benannt werden. Die neuen französischen Stunden und ihre Bruchteile wären auch im geschäftlichen Leben zu groß und unbequem. Jeder Tag hat auch zwei natürliche Teile, nämlich Tag und Nacht, deswegen wäre es besser jede Hälfte in zehn Hauptteile und jeden solchen Hauptteil in zehn Nebenteile und jeden Nebenteil in zehn kleineren Teile zu teilen. Diese Teile sollten auch neue Namen bekommen.

Vega meinte auch, dass die neue französische Teilung des Jahres in zwölf Monate und eines jeden Monats in drei Dekaden nicht nur dem natürlichen System, sondern auch nicht dem dekadischen System entspricht. Er war mit der neuen französischen Benennung der Monate nicht einverstanden, denn sie waren nicht mit den Jahreszeiten in verschiedenen Ländern auf der ganzen Erdkugel übereinstimmt, zum Beispiel das Wort Floreal (Mai) ist für die südliche Hälfte der Erdkugel der Natur nicht überall angemessen.

Die neue französische Zeitrechnung hätte auch keine einfache Regel für die Schaltjahre. Es wäre auch schwierig die Anzahl der Tage in einer Zeitperiode zu finden, meinte Vega.

Der Leser erkennt die Kalender der Juden und Mahomedaner, den Kalender der alten Griechen, Babylonier und Assyrer und den Kalender der neuen Griechen um 1800. Es ist auch gezeigt, wie man Daten aus einem Kalender in einen anderen berechnet.

Vega erklärte auch, wie die Juden in der ältesten Zeiten bis zur Zerstörung des jüdischen Staates ihren Tag rechneten: vom Untergange bis zum Untergange der Sonne. Den Beweis fand er in den Geschichten des alten Testaments. Die wirkliche Nacht hatte drei Teile, Nachtwachen, der wirkliche Tag enthielt zwölf Stunden. Diese Verteilung übernahmen die Juden von den Babyloniern. Damit kann man auch einige Geschichten des neuen Testaments erklären. Es scheint, Vega war auch ein guter Kenner der Bibel.

Der Anfang des Tages bei den alten Römern war um Mitternacht. Die wirkliche Nacht wurde in vier Teile, die Nachtwachen, und der wirkliche Tag in vier Tagwachen geteilt. Vegas Zusatz in der *Einleitung zur Zeitkunde* ist auch eine Tafel für die römische Benennung der Monatstage nach Kalenden (Kalendae, -arum), Nonen (Nonae, -arum) und Iden (Idus, -uum). Es gibt viele lateinische Texte mit dieser sonderbaren Art Monatstage zu bennenen, zum Beispiel (Auf die Frage *Wann? - Quando?*):

Am 28. April: *Ante diem quartum Kalendas Maias*

Am 29. April: *Ante diem tertium Kalendas Maias*

Am 30. April: *Pridie Kalendas Maias*

Am 1. Mai: *Kalendis Maiis*

Am 2. Mai: *Ante diem sextum Nonas Maias*

Am 3. Mai: *Ante diem quintum Nonas Maias*

Am 4. Mai: *Ante diem quartum Nonas Maias*

anno MM.DCC.LV A. U. C. (bis millesimo septingentesimo quinquagesimo quinto ab urbe condita).

Am Ende hat Vega noch andere Jahresrechnungen, die in Persien und Indien im Gebrauch waren, genauer vorgestellt. Er gab auch Tafeln zur Vergleichung der merkwürdigen chronologischen orientalischen Ären.

Es ist auch interessant, dass die Leute auch um das Jahr 1800 im Schreit waren, wie in unserer Zeit vor ein paar Jahren, wann genau das neue Jahrhundert beginnt, am 1. Jänner 1800 oder am 1. Jänner 1801. Weil alle klassischen Kalendersysteme kein Jahr Null kennen, beginnt man immer mit Eins zählen und deswegen beginnt ein neues Jahrhundert immer am 1. Jänner XY01 und ein neues Jahrtausend am 1. Jänner X001. Das war Vega ganz selbstverständlich.

Das Buch *Anleitung zur Zeitkunde* ist in einer guten und einfachen Sprache geschrieben und sogar einem Fremden macht die gotische Schrift gar keine Probleme. Es sind im Buche durchaus zahlreiche Aufgaben und ihre Auflösungen gegeben.

Literatur

[1] G. Vega (Herausgeber), *Anleitung zur Zeitkunde*, Weidman, Wien, Leipzig 1801.

[2] M. Westrheim, *Calendars of the World*, Oxford: Oneworld 1993.

VOGT

Mathematik zum Überleben auf der Insel

Annette Vogt

Kurzfassung

Ausgangspunkt bildete die Idee, das Thema "Mathematik = eine Insel oder Mathematik auf einer Insel" um die Assoziation "Mathematik - zur Lebensrettung auf einer Insel" zu erweitern. Auf Grund der Kenntnisse der Geschichte der Mathematik-Entwicklung in Rußland bzw. der Sowjetunion konnte die folgende Geschichte rekonstruiert werden. Im Vortrag wurde detailliert ausgeführt, wann, wie und durch wen dies geschah.

1. Otto Jul'evic* S*midt - Mathematiker, Geophysiker und Polarforscher

Otto Jul'evic* S*midt (im folgenden Schmidt (1891-1956)) war Mathematiker (genauer Algebraiker), Polarforscher, zeitweilig Vizepräsident der sowjetischen Akademie der Wissenschaften (AdW), und er war Sowjetfunktionär und Mitglied der KPR bzw. KPdSU (Bol's*evik).
O. Ju. Schmidt, am 30.September 1891 in Mogilev geboren, studierte ab 1909 an der Universität in Kiev, einer der besten Universitäten im zaristischen Rußland. Hier waren etwa ab 1890 eine Reihe herausragender Mathematiker tätig, es gab eine funktionentheoretische Schule um Vasilij Petrovic* Ermakov (1845-1922) und eine algebraische Schule um Dmitrij Aleksandrovic* Grave (1863-1939). Grave begründete die erste russisch-sowjetische algebraische Schule, zu der u.a. N. G. C*ebotarev, B. N. Delone und Otto Ju. Schmidt gehörten. Schmidt wurde nach seinem Magisterexamen 1916 Privatdozent und publizierte die Monographie "Zur abstrakten Gruppentheorie" (die 2. erweiterte Auflage erschien 1933).

Nach der Februar-Revolution 1917 zog Schmidt in die Hauptstadt Petrograd und beteiligte sich im Ministerium für Volksbildung an der geplanten Reformpolitik. Er begrüßte auch die Oktober-Revolution und stellte sich den Bol's*eviki sofort zur Verfügung. In den folgenden Jahrzehnten übte er viele staatliche Funktionen aus, blieb der Algebra aber stets verbunden.[1] 1924 kehrte er zu seinen algebraischen

[1] Vgl. Daten zu Leben und Werk von O. Ju. S*midt, in: Izbrannye trudy, matematika, Moskva, AN SSSR, 1959, S.5-16.
Vgl. außerdem: Chronik (russ.) Nauka i technika SSSR. 1917-1987. Moskva, Nauka, 1987. Sovetskaja nauka. Itogi i perspektivy. 1922-1982. Moskva 1982.

Forschungen zurück und nutzte die bestehenden Wissenschaftsbeziehungen zwischen Deutschland und Sowjet-Rußland (Vertrag von Rapallo 1922[2]), um 1927 für drei Monate nach Deutschland zu fahren, nach Berlin und Göttingen. Er traf in Berlin mit Issai Schur und in Göttingen mit David Hilbert und Emmy Noether zusammen. Hier gelangen ihm Entdeckungen auf dem Gebiet der Gruppentheorie, die er deutsch 1929 in einem Artikel in der "Mathematischen Zeitschrift" und russisch in der Neuauflage seiner Monographie 1933 publizierte.[3]

Der Aufenthalt in Deutschland war für Schmidt aus zwei Gründen von Bedeutung, er war schöpferisch in der Mathematik tätig und gewann Abstand von den politischen Querelen in der KPR, die bis 1929 dazu führten, daß der Generalsekretär Stalin zum Diktator wurde, zuerst seiner Partei und dann des Landes.[4] Schmidt wurde 1929 zum Professor für Algebra an der Moskauer Lomonosov-Universität ernannt, unter dem Widerstand einiger Mathematiker, die das Parteimitglied nicht wollten.[5] 1930 begründete er in Moskau nach dem Vorbild seines Lehrers Grave ein Algebra-Seminar, aus dem international anerkannte Algebraiker hervorgingen, z. B. A. G. Kuros*, A. I. Mal'cev, S. N. C*ernikov und V. M. Glus*kov.
Ebenfalls ab 1929 begann Schmidts Beteiligung an der Erforschung des Hohen Nordens. Durch diese Tätigkeit wurde er vielen Nichtmathematikern bekannt. Von 1932 bis 1938 war er "Chef der Hauptverwaltung Nördlicher Seeweg beim Rat der Volkskommissare" - so die offizielle Bezeichnung - und an vielen Unternehmungen beteiligt. Er leitete in dieser Zeit 6 Expeditionen, die der Erkundung des Nördlichen Seeweges als Schiffahrts-Linie dienten.

Als Mitglied der Akademie der Wissenschaften (AdW) der UdSSR (1933 KM und 1935 OM) wurde er im Februar 1939 zum 1.Vizepräsidenten der AdW ernannt. Im April 1942 wurde er abgelöst und durch den Physiker A. F. Ioffe ersetzt. Die Gründe dafür sind nicht restlos geklärt, es existieren mindestens 2 Varianten.[6] Die

---

Oc*erki razvitija matematiki v SSSR. (1917-1977) Kiev, 1983. Zur Geschichte der AdW der UdSSR vgl. Komkov et al (1977; dt. 1981).
[2] Zur Geschichte der deutsch-sowjetischen Beziehungen vgl. Rosenfeld (1984); bzgl. der Mathematik-Beziehungen vgl. Vogt (1991).
[3] Zur Geschichte der Gruppentheorie und S*midt vgl. Wußing (1969), S.189-191.
[4] Zur Geschichte der Sowjetunion während der Stalin-Zeit vgl. Roj Medvedev (1988) (O Staline i stalinism).
[5] Vgl. P. S. Aleksandrov (1981), S.64.
Aleksandrov, P.S. Vospominanija ob O. Ju. S*midta, in: Priroda 10 (1981) S.61-66
[6] Es gibt Erinnerungen (Variante 1), die im Winter 1987/1988 in der Moskauer Mathematischen Gesellschaft ausgetauscht wurden; die Autorin nahm an diesen Veranstaltungen teil.
Vgl. Aleksandrov (1981), S.66 (Variante 2).

1948/49 durchgesetzten Ablösungen von Schmidt als Lehrstuhlleiter an der Universität sowie als Direktor des von ihm 1937 gegründeten Instituts für theoretische Geophysik der AdW hatten politische und antisemitische Gründe.

2. Die C*eljuskin-Expedition in die Arktis 1933/34

O. Ju. Schmidt begab sich erstmals im Juli 1929 als Leiter einer Expedition mit dem Eisbrecher "G. Sedov" in den Hohen Norden.[7] Im Juni 1930 wurde er Direktor des Arktischen Instituts in Leningrad, von Juli bis September 1930 fuhr er mit der "Sedov" erneut zum Franz-Josef-Land. Im März 1932 wurde er zum Leiter der Expedition mit dem Eisbrecher "A. Sibirjakov" ernannt, die vom Juli bis Oktober erstmals eine Fahrt von Archangelsk bis Vladivostok im Nordmeer erfolgreich bewältigte. Anschließend hielt er vor der Japanischen AdW Vorträge über die Fahrt der "Sibirjakov" und war nun ein international bekannter Polarforscher geworden.

1933/34 (10.8.1933 bis 11.4.1934) leitete er die Expedition auf dem Dampfer "C*eljuskin" (Chelyuskin). Das Schiff trug den Namen des russischen Polarforschers C*eljuskin, der u.a. 1742 mit einer Expedition in die Bering-See aufbrach und nach dem ein Eiland benannt ist. Die "C*eljuskin" sollte von der Barents-See (Murmansk) die "Nordost-Passage" fahren, durch das Eiswasser im Arktischen Ozean zur Bering-Straße, zum Okhotsk- und Japan-See bis Vladivostok. In der Chukchi Sea traf das Schiff auf die ersten Eisschollen, und vom 17. November 1933 an saß der Dampfer im Eis fest. Aus der Not machte die Crew die Tugend und wollte die Drift des Eises auszunutzen. Von November 1933 bis zum Februar 1934 lebten und arbeiteten die Expeditionsteilnehmer - im Dunkeln - auf dem Schiff. O. Ju. Schmidt soll sich in dieser Zeit mit Mathematik beschäftigt haben[8], die Polarforscher, Geophysiker, Geologen und Biologen nutzten die Drift für ihre Beobachtungen.
Am 13. Februar 1934 geschah das Unglück, die "C*eljuskin" begann nach einer Kollision mit dem Eis in der Chukchi Sea zu sinken. Die Expeditions-Teilnehmer mußten sich auf eine Eisscholle retten. Der Funker Ernst T. Krenkel sandte die ersten Hilferufe in den Äther[9]. Nun begann die heldenhafte Geschichte um die

---

Zur Geschichte der AdW während des Großen Vaterländischen Krieges vgl. Levs*in (1983).
[7] Für die exakten Angaben vgl. Daten zu Leben und Werk von O. Ju. S*midt, in: Izbrannye trudy, matematika, Moskva, AN SSSR, 1959, S.5-16.
[8] Vgl. Daten, a.a. O., (1959) S.11.
[9] Vgl. internet, UPOL - Ernst Krenkel, 12.4.2002 (20.00 Uhr).

Rettung der über 100 Expeditionsteilnehmer. Es gelang ihnen, einiges an Material, Essen, Decken usw. zu retten und ein Lager (das "Schmidt-Lager") auf der Eis-Insel zu errichten. Die Rettung von so vielen Menschen von einer Eisscholle im Polarmeer mit Flugzeugen war noch nie versucht worden. Es mußte alles genau vorbereitet und organisiert werden. Auf der Eis-Insel, im "Schmidt-Lager", mußten die Teilnehmer beruhigt, beschäftigt, versorgt, umsorgt und von den Ängsten abgelenkt werden. Schmidt hielt nun angeblich Vorlesungen zum dialektischen Materialismus[10], aber vor allem hielt er vor den Teilnehmern Mathematik-Vorlesungen. So half die Mathematik beim Überleben auf einer Insel aus Eis in einem Meer aus Eis. Schmidt tat etwas sehr Einfaches und Kompliziertes zugleich. Er organiserte ein intellektuelles Leben in diesem Eisinsel-Lager. Die Erfahrungen vieler Internierter in Lagern Frankreichs und Großbritanniens (die mörderischen KZ in Deutschland können und sollen damit nicht verglichen werden, auch nicht das GULAG-System) bezeugen, daß die Organisation intellektueller Veranstaltungen im wahrsten Sinn des Wortes lebensrettende Bedeutung hatte.[11] Man wurde von Hunger, Kälte und Angst abgelenkt, man trainierte den Geist, man bemühte sich zu lernen. Am erfolgreichsten waren Sprach-Kurse, auch im "Schmidt-Lager" wurden welche abgehalten[12]. Es ist evident, daß die Mathematik-Vorlesungen von Schmidt für die auf der Eisscholle ausharrenden Physiker, Geophysiker, Geologen, Geographen, Meteorologen, Ingenieure eine wichtige Lebenshilfe boten.

Die Rettung der über 100 Expeditionsteilnehmer (manche Quellen sprachen von 104, andere von 111 Teilnehmern) dauerte bis zum 13. April 1934, es waren 7 Piloten beteiligt.[13] O. Ju. Schmidt war während der Drift und der Organisation der Rettung schwer erkrankt und 2 Tage vor Abschluß aller Aktionen, am 11. April 1934, von der Eisscholle ausgeflogen worden. Die sowjetische Regierung erlaubte den Flug nach Alaska, und die amerikanische Regierung genehmigte seine Landung, Pflege und Wiederherstellung seiner Gesundheit.

Die C*eljuskin-Expedition war zu einem Medien-Ereignis geworden, viele Zeitungen und Rundfunkstationen aus aller Welt hatten vom Schiffs-Untergang und der

[10] Vgl. Daten, a.a.O., 1959, S.11 und Bericht Chelyuskin (1935), p.176.
The voyage of the Chelyuskin. By the members of the expedition. Transl. by Alec Brown. London: Chatto&Windus, 1935.

[11] Vgl. z. B. die Erinnerungen von Lion Feuchtwanger über Kurse in den Internierungslagern in Frankreich, 1939/40 (Feuchtwanger (1982)); vgl. Max Perutz über die Kurse im britischen Internierungslager in Canada (in: Pyke (2001), pp.247-256).

[12] Vgl. Bericht Chelyuskin (1935), p.176.

[13] Vgl. Bericht Chelyuskin (1935), Part II: The airmen's stories, pp.241-325; picture, p.243.

VOGT

erfolgreichen Rettung aller Teilnehmer durch die Piloten berichtet. Schmidt als Leiter der Expedition war dadurch besonders bekannt geworden. Von April bis Mai 1934 hielt er sich in den USA zur Heilung auf, hier empfing ihn der amerikanische Präsident Franklin D. Roosevelt, und in New York wurde ihm zu Ehren eine Konfetti-Parade veranstaltet. Ein Bericht über die Expedition in englischer Übersetzung erschien zeitgleich in London und in New York.[14] Über die Expedition und die erfolgreiche Rettung wurden hunderte Artikel geschrieben, Rundfunkreportagen gesendet, ein Dokumentarfilm gedreht. Die Piloten und einzelne Expeditions-Teilnehmer, vor allem Schmidt, wurden mit Ehrungen überschüttet. Natürlich nützte Stalin die Rettung für seine propagandistischen Zwecke. Im Sprachgebrauch der Stalin-Zeit hatten die Teilnehmer für die Sowjetunion, für die Kommunistische Partei, für Stalin diese Heldentaten vollbracht. 70 Jahre später führte das dazu, daß viele in der Ex-Sowjetunion nun überhaupt nicht mehr an die C*eljuskin, ihre Teilnehmer und den Leiter S*midt erinnert werden wollen.
Als O. Ju. Schmidt im Juni 1934 nach Moskau zurückkehrte, traf er auch mit Polit-Emigranten aus Nazi-Deutschland zusammen. Eine von ihnen, für die das sowjetische Exil mit Verhaftung, Lager, Auslieferung an die Nazis und anschließender KZ-Haft endete, verfaßte in den 50er Jahren ihre Erinnerungen, in denen sie auch von den Begegnungen mit dem Leiter der C*eljuskin-Expedition berichtete. Als Zeitzeugin, die Schmidt seit etwa 1932 persönlich kannte, wurde sie im Vortrag ausführlich zitiert. Margarete Buber-Neumann (1901-1989), verheiratet mit dem KPD- und Komintern-Funktionär Heinz Neumann (1902-1937), 1936 verhaftet und Opfer der Stalin-Verbrechen, beschrieb in ihren Erinnerungen ausführlich einen Besuch bei Schmidt um 1935.[15]

O. Ju. Schmidt hatte Glück, in den Jahren des großen Terrors, von 1936 bis 1939, wurde er <u>nicht</u> verhaftet. In dieser Zeit gab es neben der Rationalität der Verfahren auch Irrationalitäten sowie die Launen Stalins, der manchmal Schriftsteller, Politiker, Wissenschaftler oder Künstler von den vorbereiteten und ihm vorgelegten Verhaftungslisten strich, in der Regel ohne einen Grund dafür anzugeben. So erging

[14] Vgl. The voyage of the Chelyuskin. By the members of the expedition. Transl. by Alec Brown. London: Chatto&Windus, 1935 (XIII, 325 pp., Photo's).
The voyage of the Chelyuskin. By the members of the expedition. Transl. by Alec Brown. New York: McMillan, 1935 (325 pp., Photo illustr.).
Die New Yorker Erstausgabe hatte April 2002 einen Antiquariatspreis von 95 Dollar. - Vgl. internet, amerikanisches Antiquariat, 12.4.2002.
[15] Vgl. Buber-Neumann (1957), S.313-315 und S.431-439.
Buber-Neumann, Margarete. Von Potsdam nach Moskau. Stationen eines Irrweges. Stuttgart, Deutsche Verlagsanstalt, 1957.

es den Schriftstellern Michail Bulgakov und Ilja Ehrenburg[16], nicht verhaftet wurden der 1939 abgelöste Außenminister Maxim Litvinov und die Botschafterin in Schweden Alexandra Kollontai[17], im berühmten ZAGI (Zentrales Aerodynamisches Institut) wurden 1937 viele Spezialisten verhaftet und später ermordet, aber die Mathematiker Michail Alekseevic* Lavrent'ev (1900-1980) und Mstistlav Vsevolodovic* Kel'dys* (1911-1978) kamen davon. Ob es sich im Fall der Nicht-Verhaftung von Schmidt um absichtliche Handlungen Stalins handelte, ob er zum beabsichtigten Zeitpunkt nicht anwesend war und danach vergessen wurde oder ob es ganz andere Gründe gab, muß bisher offen bleiben.[18] Allein als Mitglied des Präsidiums des Staatsplans und des Präsidiums der Komakademie, als mehrfacher Dienstreisender nach Deutschland vor 1933 und Leiter der deutsch-sowjetischen Pamir-Expedition (1928) mußte er ab 1934 permanent mit der Gefahr seiner Verhaftung rechnen.
Von Juli bis September 1936 war O. Ju. Schmidt erneut der Leiter einer Expedition, die mit dem Eisbrecher "Litka" in den hohen Norden fuhr. In Moskau ließ Stalin im August den ersten sogenannten "Schauprozeß" inszenieren.[19] 1937 leitete Schmidt von März bis Juni eine Expedition, die die erste driftende wissenschaftliche Eisstation "Nordpol 1" einrichtete und betrieb. Im Februar 1938 wurde der "Schauprozeß" gegen Nikolaj Bucharin und andere inszeniert. Wieder war Schmidt im Hohen Norden und leitete von Februar an die Expedition auf dem Eisbrecher "Ermak", die zur driftenden Station "Nordpol 1" unterwegs war. Im Dezember 1938 wurde er als Chef der Hauptverwaltung Nördlicher Seeweg abgelöst.

In "Ungnade gefallen"

1945, im Jahr des Sieges, bekleidete Schmidt folgende Posten bzw. Funktionen:
Er war Akademie-Mitglied und leitete das Akademie-Institut für theoretische Geophysik sowie eine Kommission für physikalische Forschungen, er war Mitglied des Herausgebergremiums der BSE (Sovet-Enzyklopädie), einer der Redakteure der Zeitschrift "Matematic*eskij sbornik" und der "Izvestija AN SSSR", Professor

[16] Vgl. hierzu die Memoiren Ilja Ehrenburgs, Berlin 1978, Band 3; vgl. die Memoiren Anatolij Rybakovs (1997 bzw. dt. 2000).
[17] Vgl. Ehrenburg (Memoiren, 1978) Bd.3, S.502 zu Stalin's Willkür bei Verhaftungen und Ermordungen.
[18] Die Akten des NKVD sind seit 1996 wieder verschlossen und nur auf Antrag von Familienmitgliedern im Archiv des FSB einsehbar.
[19] Prozeß gegen Sinovev, Kamenev und weitere hohe ehemalige Funktionäre. Vgl. Roj Medvedev (1988).

VOGT

für Algebra und Lehrstuhlleiter an der Lomonosov-Universität Moskau sowie Deputierter des Obersten Sovets der UdSSR (Parlamentsabgeordneter).[20]
Auf Photos aus dem Jahr 1945 sieht der inzwischen 54jährige Mathematiker und Polarforscher wesentlich älter aus, und er litt an einer Lungentuberkulose.

Im Dezember 1948 erfüllte angeblich das Präsidium der AdW der UdSSR die Bitte des 57jährigen O. Ju. Schmidt, ihn von seinen Pflichten als Institutsdirektor und Kommissions-Leiter aus gesundheitlichen Gründen zu entbinden.[21] Ab 1949 war er auch nicht mehr Lehrstuhlleiter für Algebra an der Universität und auch nicht mehr in der Redaktion der Zeitschrift "Matematic*eskij sbornik"[22]. Wirkliche Gründe wurden weder in der "Chronik" seines Lebens, erschienen 1959 in der Werkausgabe, noch 1957 in der von ihm Jahrzehnte mitherausgegebenen Enzyklopädie noch in späteren Artikeln angegeben.[23]
Kennern der sowjetischen Geschichte bzw. des sowjetischen Lebens ist klar, daß das Jahr 1948 die Hintergründe erklärt - das Jahr beginnender massiver antisemitischer Politik, offiziell verschleiert als "Kampf gegen den Kosmopolitismus".[24] Da hierüber bis heute kaum Veröffentlichungen erschienen, abgesehen von Erinnerungen betroffener Schriftsteller und Publizisten, muß Vieles offen bleiben und unaufgeklärt. Die Tätigkeiten von Schmidt in hohen Partei- und Staatsfunktionen führten jedoch offenbar dazu, daß er in die 1997 erschienene dreibändige Enzyklopädie russisch-sowjetischer Juden nicht aufgenommen wurde.[25]

3. O. Ju. S*midt in der Erinnerung

Wie wird an O. Ju. Schmidt erinnert?
In westeuropäischen Ländern wird ganz selbstverständlich seiner Leistungen gedacht, besonders der C*eljuskin-Expedition.[26] Die Russische Akademie der Wissenschaften als Nachfolger der AdW der UdSSR nennt ihn als eines ihrer

---

20 Vgl. Daten, a.a.O., 1959, S.14 - in dieser Reihenfolge.
21 Vgl. Daten, a.a.O., 1959, S.15.
22 Vgl. P. S. Aleksandrov (1981, Erinnerungen), S.65.
23 Vgl. BSE, 2oe izd., tom 48, Moskva 1957, S.124-125.
Vgl. auch Aleksandrov (1981), der kein Wort über Gründe verlor.
24 Vgl. hierzu die Erinnerungen von Ehrenburg (1978) und Rybakov (1997) sowie Lustiger (1998, Rotbuch).
25 Vgl. Enciklopedija russkich evrej. Moskva, 1997. (3 Bände)
In der "Chronik" (1959) war vermerkt: Vater deutscher Herkunft, Händler, Mutter Lettin ("latvis*a" (S.5)).
26 Vgl. internet, "the year 1933"; 12.4.2002.

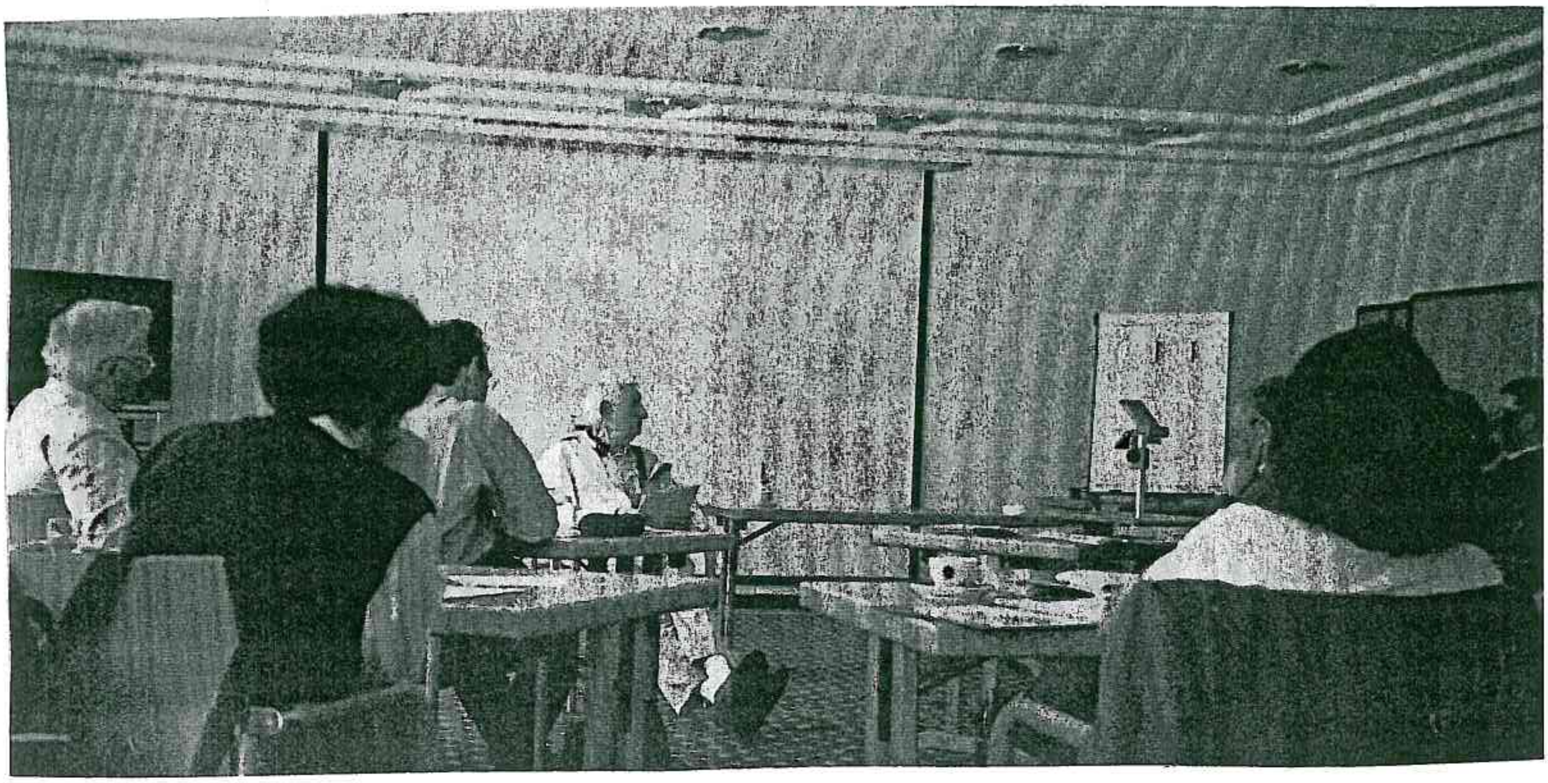
VOGT

Mitglieder, den Mathematiker hervorhebend.[27] Belorußland, zu dem heute Mogilev gehört, erinnert in websites an die "famous persons who were born in Belorussia", und nennt hier Schmidt und übrigens auch Issai Schur und Chaim Weizmann als die "großen Söhne Belorußlands".[28] Ein restauriertes Hotel in Vladivostok, das "Hotel Versailles", wirbt damit, daß in seinen Räumen sowohl der Kosakenführer Ataman Semyonov 1921 logierte, im Bürgerkrieg an der Seite der Weißen gegen die Roten kämpfend, als auch 1934 gerettete Teilnehmer der C*eljuskin-Expedition, die auf dem Weg nach Moskau waren.[29] Ein Ex-Sowjetbürger, der eine homepage "History of Northern Sea Route" ins Internet stellte, wollte besonders gescheit oder geschickt agieren, wenn er nichts über die Zeit der UdSSR schrieb. In seiner Tabelle heißt es schlicht: "1917-1990 Soviet Union".[30] Diesen "Mut zur Lücke" bewies auch die Russische AdW, als sie im Jahr 2000 anläßlich der 300-Jahr-Feier der Berliner AdW im Foyer der Berlin-Brandenburgischen Akademie eine Ausstellung präsentierte. Die Ausstellung (vom 5.7. bis 31.12.2000) sollte an die Erfolge der deutsch-russischen Wissenschaftsbeziehungen erinnern. Begonnen wurde mit dem Jahr 1724/25, der Gründung der Akademie in Sankt Peterburg, es folgten die bekannten und berühmten Personen, die diese Beziehungen prägten, von Euler bis Steklov. Auch Akademie-Mitglied Otto Ju. Schmidt kam vor - 1929 als Leiter der deutsch-russischen Pamir-Expedition. Dann gab es eine Lücke: die Jahre 1932 bis 1991 fehlten. Man ersparte sich und den neuen deutschen Partnern die NS-Zeit, und man "vergaß" die Wissenschaftsbeziehungen zwischen UdSSR und DDR von 1946/49 bis 1990/91. Photos vom Beginn neuer Beziehungen zwischen der 1992 wieder benannten Russischen AdW und der 1992 eröffneten Berlin-Brandenburgischen Akademie beendeten die Ausstellung. Man erkennt daran, daß die Tradierung vergangener Leistungen im heutigen Rußland problematisch ist, nicht nur, aber auch bezüglich O. Ju. Schmidt. Die Antisemiten verschweigen ihn, für die anderen war er Bol's*evik und Staatsfunktionär (der nicht einmal verhaftet wurde) - er paßt in keine Schablone. Nicht vergessen ist er bei professionellen Philatelisten, 3 Briefmarken aus der UdSSR erinnern an ihn - 1935 anläßlich der Rettung der C*eljuskin, 1966 zum 75. Geburtstag und 1980 aus der Reihe "Forschungsschiffe" mit der "Otto Ju. Schmidt".[31]

---

[27] Vgl. internet, RAN, oder die CD-Rom der RAN.
[28] Vgl. internet, "famous persons who were born in Belorussia", 12.4.2002.
[29] Vgl. internet, "10, Svetlanskaya Street. Hotel Versailles" (copy: 1999 Maria Lebedko), 12.4.2002.
[30] Vgl. internet, homepage "History of Northern Sea Route", piem.org/vagabond.en/history.html - 19k; 12.4.2002.
[31] Vgl. internet, Motivsammlung Mathematik, oliver-faulhaber.de/briefmarken/mathematik/marken; 26.4.2002.

Annette Vogt



DAVIS

Naïve Thoughts on the Paradox of Gödel *)

Philip J. Davis
Division of Applied Mathematics
Brown University
Providence, RI 02912

EPIGRAPH
You can't get there from here.

The classic Sam Loyd "Fifteen Puzzle" consists of fifteen movable and numbered square counters placed in a random order in a four by four square frame. One is allowed to slide a counter into an empty space, and the goal is to arrive at the natural ordering of the counters from a given initial arrangement by a sequence of such slides.

Theory shows that starting from half of the possible original positions of the counters, the puzzle is solvable while from the other half it is insolvable. But a simple interchange of any two counters will alter the puzzle from solvable to insolvable or vice versa. Embedding the board in three dimensions makes the puzzle always solvable.

***

THE IMPETUS
The impetus for this paper came from a novel by Apostolos Doxiadis, *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture*. In the novel, Petros, a mathematician, has set his heart on solving the Goldbach Conjecture. Failing and deeply disappointed, Petros takes psychological refuge in the possibility offered by Gödel's Theorem, that the problem be insoluble. After reviewing this novel for the *SIAM NEWS*, I began thinking about my own reactions over the years to the Gödel Theorem and to one particular aspect of it.

ON THE WORD "NAÏVE" IN THE TITLE
The amount of material related to Gödel's Theorem is enormous: it is far beyond anyone's ability to know it all or understand it. And the Web has multiplied the chatter and blurred it into an incoherent mass of thoughts.

I will approach my topic as I have experienced it in my professional career as an applied mathematician and as a writer. This is the meaning of the word "naïve" in my title.

WHAT IS THE PARADOX?
Simply stated, the Paradox of Gödel is this: although Gödel's Incompleteness Theorem has been touted in some quarters as the most significant mathematical achievement of the 20th century, it seems to be of little significance to the bulk of research mathematicians. Why is this the case?

What is Gödel's Incompleteness Theorem? In nontechnical language one might say: if a mathematical statement has been asserted that seems to make sense, it may not be possible to prove whether the statement is true or false.

Example: A claim has been made that there are an infinite number of 0's in the decimal expansion of π. At the moment, it is not known if this is true or false or if it is undecidable.

I like to put the incompleteness theorem this way: given a mathematical "there" and a "here," you may not be able to get there from here.

Slightly more technically: arithmetic is not completely formalizable. For every consistent formalization of arithmetic, there exist arithmetic truths that are not provable in that system.

"There will always be arithmetic truths that escape our ability to fence them in use the tools of rational analysis" (John Casti).

In what follows, I will use the abbreviation GIT to designate the Gödel Incompleteness Theorem, or more generally, any of its closely related theorems or equivalent formulations.

*) nachgedruckt mit freundlicher Genehmigung von Hum. Math. Netw. J.

THE ROMANCE, THE HYPE, AND THE ICONOGRAPHY SURROUNDING GÖDEL'S THEOREM

"An astounding and melancholy revelation" (Ernest Nagel and James R. Newman, *Gödel's Proof*, 1958).

"The most decisive result in mathematical logic" (Boyer, *A History of Mathematics*, 2nd ed.).

"Amazing, shattering" (Morris Kline, *Mathematics: The Loss of Certainty*).

"Mind boggling. One of the pinnacles of human intellectual achievement. Basis for a whole host of related developments in philosophy, computer science, linguistics, psychology. Mankind will never know the final secret of the universe by rational thought (Casti, *Reality Rules, II*).

"Only Einstein's theory of General Relativity represents an accomlishment of comparable intellectual grandeur" (Berlinsky, *Black Mischief*).

"GIT a part of a 'golden braid' of math , art and music that penetrates the very nature of human consciousness. Gödel-numbering has opened up vast new worlds" (Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher and Bach)*.

One can find statements in semiotics, theology and eschatology that are based on or allude to the GIT as well as references to Gödel in novels:

> The philosophers at the great universities were, without exception, failed mathematicians. When they were not examining much of the vocabulary of civilized discourse to conclude that it, after all, lacked meaning, they muttered Gödel, Russell, Hilbert, liking to imply that they themselves had chosen philosophy over mathematics to give themselves a wider, though related intellectual field (Renata Adler, *Speedboat*).

One can find references to Gödel in literary criticism where, according to Simon Blackburn's review of Umberto Eco's *Kant and the Platypus*, "prominent literary intellectuals often like to make familiar reference to the technical terminology of mathematical logic."

One such person is reported as opining that "Gödel showed that every theory is inconsistent unless it is supported from the outside. Derrida showed that there is no outside" *(New Republic Magazine*, Feb 7, 2000).

There are web chats galore on the single topic of "False Applications of the GIT," although what is a "false" application of mathematics and what is a "true" application defy formalization, let alone common agreement.

SOME "APPLICATIONS" OF THE GIT

I use the word "application" here to mean simply that an argument of some sort has been put forward based in some way on the GIT. The GIT serves as a point *d'appui* for both specialists and the laity.

GIT suggests there is no final theory of physics (Stephen Hawking).

GIT suggests that physics—identified with mathematical physics—might be inconsistent.

GIT suggeststhat not everything that is technically desirable is technically possible (Jerome Wiesner).

GIT suggests that "whether we admit it or not all (political, social, military) actions end in the logic of triage (i.e., judgements of priorities of action)" (Hans Magnus Enzensberger, *Civil Wars*, 1994).

GIT suggests humans are not computers. Creativity and intuitive powers are not the product of computer programs (Roger Penrose).

(This last position has been seriously questioned by Murray Gell-Mann.)

"I would be skeptical about the use of the GIT (as in Penrose, 1991) for arguing the limitations of any kind of intelligence" (Steve Smale).

GIT suggests that mathematics will become more and more experimental (Chaitin).

GIT suggests that the foundations of mathematics both philosophically and technically must come to grips with stochasticity (i.e., the probabilistic element) (Gregory Chaitin, David Mumford).

GIT suggests that there may be a "high level way of viewing the mind/brain, involving concepts that do not appear on lower level" (Donald Hofstadter).

GIT suggests that mystical experiences may be the only road to absolute knowledge (Paul Davies).

GIT suggests that since "the consistency of mathematical systems becomes an incalculable question. Thus, even the exercise of mathematics involves an act of faith" (John Polkinghorne, Physicist and Anglican Priest, *One World*).

From these last two quotes, it is an easy step to say the GIT suggests that God exists.

GIT suggests that "a religion based on a plurality of religions may leave us forever struggling with an Axiom of Religious Choice" (Sarah Voss, mathematician and minister, *What Number is God?*).

In a totally different direction, GIT may give aid and comfort to the creators of computer viruses:

"For most plausible definition of 'virus', it is likely that the GIT blocks the possibility of writing a program that accepts all non-viruses and rejects all viruses" (Ernest Davis).

Thus, while each type of virus may be overcome on an individual basis, no panacea can be found. If the use of the word "virus" in both medical and computer contexts is more than mere verbal play, the GIT may suggest that a universal medical cure may be an impossibility.

Finally, there are features or "applications" of GIT that feed into psychology. The nicest, most amusing exposition of this occurs in Apostolos Doxiadis' novel referred to above..

THE PAST AND PRESENT INDIFFERENCE OF THE MATHEMATICIANS TO THE GIT

If the GIT has caused turbulence in philosophy, if it has caused earthquakes in logic, if discussions of the GIT clog the printed page and the websites, how can it be said that GIT is of little significance? And yet, despite the storms that have raged and opinions altered, research mathematicians—with the possible exception of a few number theoreticians—have little regard and less use for the GIT.

One colleague put it this way:

"I've been to many mathematical lectures and scientific meetings all over the world. Not once did the name of Gödel come up."

Another colleague told me:

"I've never lost any sleep over the GIT. But I'm sure that Hilbert did."

Therein lies the paradox.

More generally, of course, research mathematicians have had little use for mathematical logic or for the philosophy or history of mathematics. None of these is required knowledge for a Ph.D. in mathematics (nor hardly even for computer science). The idea, for example, that mathematics proceeds rigorously and rigidly from assumptions to conclusions by a set of allowed logical steps, simply does not correspond to the way that mathematics is either discovered, developed, accepted, justified, applied or presented.

If someone points out that, in principle, all accepted mathematical proofs can be written out in the manner of Russell and Whitehead's proof that 1 + 1 = 2, I would say the phrase "in principle" is one of the weaseliest expressions in the vocabulary of intellectuals. In principle, a contemporary Robinson Crusoe thrown naked onto an island well supplied with all raw materials could produce an automobile that worked.

Mathematicians work using traditional materials and guidelines and have their own criteria for acceptance. A real conceptual or metaphysical breakthrough occurs perhaps every fifty years. Afterwards, the logicians and philosophers move in and tell the world what, exactly, the mathematicians have been doing.

Mark Steiner comments on the sociological phenomenon of mathematicians who ignore logic completely in their description of the history and philosophy of 20th century mathematics and yet cite the GIT as one of the most important recent results. His recently appeared *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem* does not mention the GIT.

While the GIT is a piece of mathematics created along traditional lines, but applied to mathematics self-referentially, it must be regarded as an "inside job." On the other hand, since it seems to limit what mathematicians will ever be able to accomplish, limiting the independence of mathematical action, it is also an "outside job."

Numerous people have walked away from certain parts of mathematics, either for conceptual or for utilitarian reasons, e.g., measure theory. They do not accept it. It has no gut meaning for them nor relevance to their scientific work. The GIT paradox is part of this phenomenon.

THE GIT AND THE FAMOUS UNSOLVED (OR ONLY LATELY SOLVED) PROBLEMS

In Doxiadis' novel, his hero uses GIT as an excuse for calling quits to his intense labors on the Goldbach Conjecture.

The mathematical world is full of unsolved problems and conjectures. Most conjectures fail to gain notoriety, primarily because they are not associated with a "great name." Mathematicians lose interest in them, so hence they are not worked over for long periods of time. Many of these, in number theory especially, have been listed in such books as Daniel Shanks' *Solved and Unsolved Problems in Number Theory* and Richard Guy's *Unsolved Problems in Number Theory.*

> **"*One might very well call such a piece of mathematics a fundamental symbol or myth...***

Neither of these books breathes the name of Gödel. It is probably the case that most of the conjectures listed in these books are decidable one way or another. The difficulty or the depth of a conjecture can only be guessed, but some measure of it may be gleaned from the rewards ($25, $100, etc. 100,000 pre-WWI German marks for Fermat) that are sometimes offered for a solution by some of the proposers.

THE GIT: ONE OF THE FUNDAMENTAL MYTHS OR ARCHETYPES OF MATHEMATICS?

The fact that the GIT has contemporary applications, implications or suggestions relative to a wide variety of fields ranging from cognition, physics, and philosophy, to literature, theology, and politics, gives it a special and remarkable status among mathematical statements. The educated laity seem to be attracted to it as iron to a magnet or as the devout to an icon. The name Gödel can create a best seller or fill a large lecture room. It can also do the reverse. This is part of the paradox and adds to the unique status of the GIT. It would be impossible to make such wide claims for, e.g., Gershgorin's theorem in matrix theory, or indeed for any of the theorems employed routinely in daily research. One would have to go back to the mental world of the Pythagoreans or neo-Platonists (ancient or contemporary) to find statements, contexts and attitudes of equal popularity.

One might very well call such a piece of mathematics a fundamental symbol or myth in the sense of the psychologist Jung. Jungian archetypes carry many interpretations; it is also the case that many explanations have been advanced for the Paradox of Gödel.

A BASKET OF EXPLANATIONS OR DENIALS

My object now is to record a wide variety of reasons that have been given to explain the Paradox of Gödel and then to set forth my own naive reasons.

The GIT is equivalent to Turing's theorem about the unsolvability of the Halting Problem. I don't think that has any practical consequences for real life computation which deals with finite memory and finite computation times. It just shows the vast gap between what is of metaphysical interest and practical interest. Similar discrepancies abound in economics and in fluid dynamics (Reuben Hersh).

Tying the matter a bit more closely to the philosophy of mathematics, Hersh goes on to say:

> It seems to me that most or all issues of mathematical philosophy are important in some sense independent of concrete specific examples or applications.
>
> For instance, is there really an infinite set, or is it just something we imagine? From a philosophical viewpoint, this is a very basic, fundamental question. But for mathematical work, it doesn't make any difference, and many mathematicians couldn't care less about it.

Gödel's Incompleteness Theorem is a mathematical result with philosophical import. It has limited mathematical import. Which shows that mathematical and philosophical import are not the same thing (Hersh).

For mathematicians, however, his [Gödel's] theorem was of marginal interest, since Gödel worked with a far more formal definition of proof than that to which they aspired (or still do); so the separation of logic and mathematics continued largely unchanged (Ivor Grattan-Guinness, *The Rainbow of Mathematics*).

I don't find it [the paradox] paradoxical. You can compare the GIT to Liouville's proof of the existence of transcendental numbers. It is an example of a phenomenon, but it is of no help for interesting number like e or π...One aspect of the matter, not a direct consequence of the GIT, but coming out of that development, is the work on unsolvable decision problems that has had a serious impact in certain fields, e.g., finitely presented groups (Martin Davis).

"The infinite is not the issue. It is the case that the GIT has implications for finite memory and finite computation time" (Ernest Davis).

As far as applied mathematics goes, there is considerable evidence that all scientifically applicable mathematics depends on weak systems of set theory, even conservative over arithmetic. No new axioms are necessary (Sol Feferman).

Question: does Feferman's observation about weak systems constitute a descriptive hypothesis that limits the structure of physical theories just as the Church-Turing Hypothesis (the Turing machine models all possible computations) limits the nature of computation?

Most mathematicians don't know or care about logic and they see the GIT as a kind of curiosity. It says nothing about the undecidability of the problems they happen to be working on. It provides no decision procedure for deciding beforehand whether a given statement in mathematics is or isn't decidable.

If they took the possibility of undecidability seriously, if they agreed, for example, that with probability one, a proposition given at random is undecidable, they would be discouraged away from the field. Mathematicians use their insights, judgements, experience, to enable them to focus on statements which turn out to be decidable(John Casti).

A parallel from physics The response of mathematicians to GIT has been rather like the response of physicists to general relativity in the period roughly from 1916-1960. Physicists understood that Einstein's results were in some way quite fundamental, but because general relativity seemed so definitely a singular achievement, physicists tended to ignore its implications while ceremoniously paying lip service to its grandeur...

Mathematicians are instinctively inclined to assume that if the GIT and nearby results are as important as logicians seem to think they are, then it should be possible to use those results to discover something beyond the results themselves. Nothing has yet emerged.

It is possible for a result to have immense importance for a discipline without leading to anything interesting within the discipline (David Berlinski).

It is not the case that GIT has contributed little to math or computer science. A fair number of interesting problems have been proven unsolvable using a reduction to the GIT. The best known is Hilbert's Tenth Problem. There are numerous other results in number theory, logic, computation theory, discrete math and algebra, e.g., the Paris-Harrigton result which states that the Ramsey theorem is not provable within number theory.

But just wait a bit! Things might change! Mathematicians have tended to ignore the GIT because it seemed to have no connection to other parts of mathematics. However, in the past twenty years, this has changed somewhat. Harvey Friedman's work has shown that incompleteness theorems do have a very real meaning for number theory. But the fact remains that the connection is weak in that it seems to point to nothing more than oddities in the structure of arithmetic. This may or may not change.

ANTI-GÖDELIAN DOUBTS

The GIT seems to have come as a surprise to neither to John von Neumann nor to Norbert Wiener (S.J. Heims: "John von Neumann and Norbert Wiener").

"The mathematical fraternities' actual experiences with its subject give little support to the assumption of the existence of an a priori concept of mathematical rigor" (John von Neumann, *The Mathematician*).

Further down the spectrum there are anti-Gödelian doubts:

"...it is commonplace that Wittgenstein rejected Gödel's proof [i.e., the GIT] because he did not, or even could not, understand it" (Juliet Floyd).

> The GIT is based on a chimera. The formalization of mathematics assumes its representation in a set of recognizable signs that are beyond questioning. The metamathematics however is stymied by the ambiguity (incoherence) in how those signs are actually viewed. The metamathematical argument of the GIT collapses into confusion. Since the whole enterprise of formalization is not feasible, GIT is redundant. No wonder mathematicians are not bothered by it in their work (Miriam Yevick).

THE WAY I SAW THE PARADOX

I first heard of the GIT around 1941, when I was a college undergraduate. The GIT was then ten years old. It caused no alarm in me. The bottom line seemed quite reasonable. There were mathematical problems I could not solve. I had heard that there were problems that no one had yet been able to solve. I knew that there were problems, which, as stated, provably had no solution.

An example: working in the plane, connect three houses by curves, to the "electric, gas, and water works" so that the curves do not intersect. (But in real life we connect them in 3-d).

Another example: the squaring of the circle by ruler and compass. Or, perhaps more significantly, the "demonstration that Euclid's Parallel Postulate" cannot be derived from the other postulates. Thus, there appear to be many problems that were impossible to solve in the way they have been formulated.

This being the case, and arguing by analogy, GIT seemed to me to be reasonable. As in the Fifteen Puzzle cited in the Epigraph, you might not be able to get "there" from "here." Of course, these examples are specific problems within mathematics and the GIT is a theorem about theorems. Up a metalevel, or is it?. But the proof of the independence of the parallel axiom is a proof that there can be no proofs of dependence. So the disparity of levels did not bother me. However regarded, these analogies were strong enough for me. (But not strong enough, apparently, for Frege, Russell, Hilbert, *et al.* Is this yet another paradox?)

The idea of mapping formulas onto integers (Gödel Numbering) seemed ingenious, but a bit dubious. The Gödel numbers are so large! What kind of existence can be attributed to them ? Do they really function in the way that 1, 2, 3 do? Are these numbers being used in different ways that really do not mesh with one another or with the numbers of everyday arithmetic? (I was, and still, am a "weak finitist.")

And then came the *coup de grace*. Nothing but a complicated form of the Liar Paradox. Hence a self-referential swindle, a trick of language.

So while I was quite willing to accept the bottom line of the GIT, I did not care much for the proof. I did not need the whole Gödelian apparatus to convince myself that I couldn't lift myself up by my own bootstraps either physically, mentally, or mathematically.

To add to my undergraduate skepticism, why was the world famous logician W.V.O. Quine, with whom I was even then studying mathematical logic, in the Department of Philosophy at Harvard and not in the Department of Mathematics? Obviously, the Harvard Mathematics Department considered mathematical logic to be irrelevant to their interests. In point of fact, this was my first perception of the Paradox of Gödel.

MY CURRENT VIEWS

To discuss GIT and the Paradox, as Reuben Hersh pointed out above, one might very well go into the logic, the philosophy and metaphysics of mathemat-

DAVIS

ics, metamathematics and cognition. What is a legitimate mathematical object, existentially? What are legitimate constructions or operations? What is truth? What is proof? How can we recognize what makes sense and what doesn't? What does it mean to "know"? What sense does it make to say that "it will never be known whether the statement X is true or false"? What does it mean to explain anything?

I shall bypass all these. I will not look for an explanation in terms of logical structures or the relative strengths and weaknesses of axiom systems. I will go for what might be called a historical view of the matter.

Toward this end, one should realize that at various times actual mathematical practice has been other than what it is claimed to be in an ideal and hence limited sense. Over the years, I came to believe that the "standard" view of mathematics as consisting of hypothetical-deductive structures is a totally inadequate description of how I (personally) have understood and internalized mathematics; how I applied mathematics to itself or to the outside world, or how I created new mathematics.

Historically, there are many times and places in mathematics where mathematics has said "impossible," "no way." Some of these impossibilities are hinted at in the persistence of old mathematical terminology, e.g., negative, irrational, imaginary numbers. Another impossibility: no general formula involving a finite number of simple operators and root extractions can be found for the solution of the quintic equation. Yet, the history of mathematics displays all these and many, many more impossibilities and contradictions (e.g., Heaviside's operational calculus; Dirac's delta function) being bypassed, legitimized, co-opted, often by the method of context extension.

I began to wonder about the notion of proof, a process absolutely fundamental within a certain view of

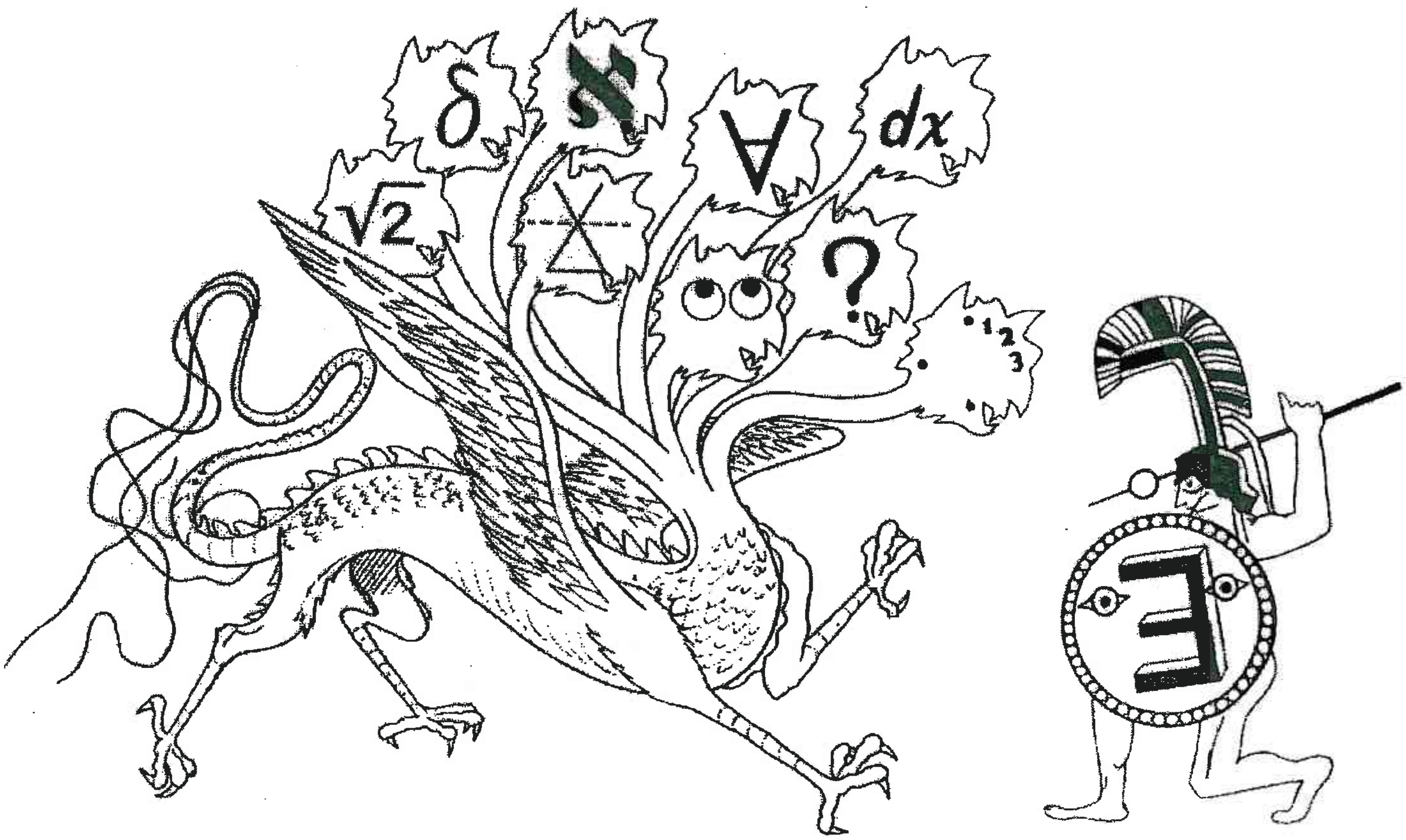


Figure 1
The Hydra of Mathematical Impossibility is slain by the Hercules of context extension. (From Davis and Park, 1987.)

100

mathematics, but proof was not identical understanding. Moreover, proof was subsequent to deciding that initially there was something there to prove. And the axioms were statements designed post hoc long after a substantial corpus of mathematics was in place. (In the case of arithmetic with Frege in 1884! Was there no valid arithmetic till then?).I began to feel that what was important was "mathematical evidence,"of which proof is only one component.

I began to wonder about the concept known as consistency. To be inconsistent, mathematically speaking, is to commit the primal sin. If one allows one contradiction, one can demonstrate anything at all. But can one really say with absolute objectivity, finality, and without relativistic allusions, what consistency consists of when there is a historical record of a constant patching up of mathematical inconsistencies in a way that makes them disappear? (Imre Lakatos)

An up-to-date example: consider the arithmetic system that is embodied in the popular and useful scientific computer package known as MATLAB. MATLAB yields the following two contradictory statements:

(The symbol == means "is the equality true or false?")

	Input	Output
(1)	1 e-50 == 0,	false
(2)	2 + 1 e-50 == 2,	true.

Yet, MATLAB arithmetic is a (finite, but large) mathematical structure. Operations can be carried out. Certain inputs lead to certain outputs. These might be called MATLAB truths or theorems. The computation itself is the proof or the validation of these truths. They are deemed useful by the scientific community. The structure has its own integrity in that it consists of just what it consists of and it does just what it does. Yet, when judged by certain other ideal structures MATLAB embodies contradictions. While the God of Consistency does not thunder nor shake the earth in the presence of these logical irrationalities, one might well ask whether these contradictions can lead to error or disaster when MATLAB is employed in physical applications. They can, but "knowledgeable" programming makes the likelihood small. In any case, "ideal" mathematical computations (if indeed they can be carried out) might also lead to disaster.

Incidentally, I believe that Wittgenstein deplored "the superstitious fear of mathematicians for contradictions" (quoted in Karl Menger's *Reminiscences of the Vienna Circle*).

Rejecting mathematical platonism, formalism, logicism, and constructivism, I adopted a position that has been called variously "social constructivism," "quasi-empiricism," or "humanism."

THE PARADOX OF GÖDEL: MY EXPLANATION

Is this an explanation? Not really; just some thoughts conjured up by thinking about the paradox.

Mathematics is a living organism. The modes of its discoveries, developments, justifications, and interpretations cannot be formalized in a few paragraphs–if at all. They are time dependent and hence cannot be set down once and for all.

The development of mathematics either as a manufactured or a discovered corpus, goes forward to a great extent without set global goals. As it goes forward, year by year, what it turns up can be quite fortuitous, serendipitous, perhaps even interesting; in such a case, the arrival at a theorem is automatically accompanied by evidence of its validity or relevance, sometimes even by its proof.

Mathematics moves forward from statements already in place that suggest other statements. One of the goals then becomes to arrive at a proof of the suggestions. But the researcher is borne forward by a trust in a kind of "principle of continuity" (which admittedly can be dead wrong, see the "Fifteen Puzzle") implying that statements "close" to proved statements are themselves provable or disprovable.

In the older Eastern tradition, explicit proof is often missing. In the Western tradition, the notions of what is proof and what is provability evolved slowly and simultaneously with the discovery or creation of much material that was in fact provable. Alongside this, there grew the dominating or establishment view of mathematics as a logically deductive enterprise. The steady supply of proofs and the demand for more, interacting upon one another, grew together. The characterizing notion of mathematics as proved theorems grew with equal steps with the success in proving those theorems even as the notion of what constituted a valid proof altered and changed with time. The concept of what constitutes a proof has no finality; it develops alongside the material on which it operates.

Contemporary histories of mathematics present what is often called "Whiggian history." That is, they promote the current established view of mathematics as deductive structures, and they interpret the mathematical past as leading inevitably to the established present.

If it should have turned out that a good many of the statements deemed interesting by mathematicians or scientists were unprovable, or undeterminable whether they were unprovable, then the view of the mathematical enterprise as it developed in the 19th and 20th centuries, an enterprise that set increasing store by deductive proof, would have become untenable.

> ***The concept of what constitutes a proof has no finality; it develops alongside the material on which it operates.***

In such a case, mathematics would not have disappeared. It would be an art with a special vocabulary and modus operandi, a form of rhetorical discussion, a set of procedures, suggestions or rules as to how the world might be organized, and the GIT would be both true and irrelevant.

AS REGARDS THE FUTURE.
In my opinion the most significant mathematical development of the 20th century has been the computer in all its ramifications, mathematical, scientific and social. Having done scientific computation in the pre-electronic days as well as with contemporary very-high-level "tool kits," I still tend to think of the computer as a "mathematical instrument." But this view and a related view that the computer is a "logical engine," an "algorithm cruncher," though historically accurate, may now be as obsolete as the horse and buggy. What is replacing it?

Programmed computation, i.e., algorithms, and deductive proof have common features. But the future dominance of the algorithm–and the GIT is algorithmic in structure–has been questioned. Since it is fundamental to all digital communication in the same way the elementary particles of physics are fundamental to a Hawaiian wedding luau, there are some signs that the algorithm may have to share the center stage of technological and instructional emphasis or even to retire to the wings.

Here are a few straws in the wind:

Computer scientist Peter Wegner thinks that in the future the emphasis will shift from algorithmic models of computation to interactive models. We have now reached the point where a single computer has become a basic "elementary particle" of information interaction, to be combined with myriads of other individual computers and acted on non-algorithmically by the whole exterior environment, human and non-human.

"Interactive systems are grounded in an external reality both more demanding and richer than the rule based world of noninteractive algorithms" (Wegner).

"The conventional metaphor [for computation] will be replaced by the notion of a community of interacting entities" (Lynn A. Stein).

By way of a parallel within mathematics:

> Mathematics has been regarded traditionally as 'theorems.' It is now becoming the study of structures. Until the 20th century, there have been only two structures: geometry and arithmetic. Now there are many (David Mumford).

(MATLAB, mentioned earlier, is just one of the more fairly recent ones.)

While by no means neglecting the algorithm, we must surely add to the idea of structures the notion of stochasticity as a prime element of the future composition of mathematics.

"The intellectual world as a whole will come to view logic as a beautiful elegant idealization but to view statistics as the standard way in which we reason and think" (David Mumford).

Working with the material of a structure and employing its rules, the mathematical culture goes forward from "here" by successive steps and arrives at a "there." Often probabalistically and non-algorithmically and even multivalently. The delivery of the "there" from the "here" may be regarded as proof in an extended sense. Whether the "there" is in any way interesting or appealing or suggestive or useful or whether it corresponds to a "there" desired in advance is altogether another issue.

> By now the ideas elaborated by Gödel, Church, Turing, and Post have passed entirely into the body of mathematics where themes and dreams and definitions are all immured, but the essential idea of an algorithm blazes forth from any digital computer, the unfolding of genius having passed inexorably from Gödel's Incompleteness Theorem to Space Invaders VTT rattling on an arcade Atari (David Berlinski: *The Advent of the Algorithm: The Idea that Rules the World*).

The GIT is moving off center stage, a place it never really occupied. Like the ideas of Freud which now appear more in literature than in therapy, it will survive as an archetypal statement from which all kinds of inferences–mainly non-mathematical–will continue to be drawn.

AUTHORS CONSULTED ORALLY OR E-WISE

The author wishes to thank these individuals who graciously answered the questions I put to them:

David Berlinski, John Casti, Ernest Davis, Martin Davis, Apostolos Doxiades, Sol Feferman, Juliet Floyd, Harvey Friedman, Ivor Grattan-Guinness, Reuben Hersh, Douglas Hofstadter, David Mumford, Franco Preparata, Pet Wegner, Miriam Yevick.

REFERENCES

V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur, eds., *Mathematics: Frontiers and Perspectives.* American Mathematical Society, 1999.

Philip J. Davis and David Park, eds., *No Way: The Nature of the Impossible.* W. H. Freeman, 1987.

Juliet Floyd, "On saying what you really want to say: Wittgenstein, Gödel, and the Trisection of the Angle," pp. 373-425 of Jaako Hitikka, ed., *Essays on the Development of the Foundations of Mathematics.* Kluwer, 1995.

Karl Menger, *Reminiscences of The Vienna Circle and the Mathematical Colloquium.* Kluwer.

Roger Penrose, *The Emperor's New Mind.* Penguin, 1991.

Lynn Andrea Stein, *Why your computer is not an abacus*, unpublished.

Mark Steiner, *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem.* Harvard Univ. Press, 1998.

Peter Wegner, "Why interaction is more powerful than algorithms." Comm. *ACM*, May 1997, vol. 40, pp. 81-89.

"The development of mathematics towards greater precision has led, as is well known, to the formalization of large tracts of it, so that one can prove any theorem using nothing but a few mechanical rules."

--Kurt Gödel

GRONAU

Warum ist die Gammafunktion so wie sie ist?

Detlef Gronau, Graz

Abstract

This is a historical note which is concerned with the question why is the gamma function so as it is. The question is, why is $\Gamma(n)$ for naturals n equal to $(n-1)!$ and not equal to $n!$ (the factorial, i.e. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$) ? Was A.M. Legendre responsible for this transformation, or was it L. Euler? And, who was the first who gave a representation of the socalled Euler's gamma functiom?

Mathematics Subject Classification(1991): 01A55, 39-03, 39B12

Key words and phrases: history of mathematics, gamma function

0. Vorbemerkung.

Jede(r) Studierende der Mathematik hat sich, seit sie (er) mit der Gammafunktion bekannt gemacht worden ist, sicher mindestens einmal gefragt:

„*Warum hat* $\Gamma(n)$ *den Wert* $(n-1)!$ *und nicht* $n!$ *?*“

Als Standardantwort erfährt man, dass LEONHARD EULER[1] die Gammafunktion als Interpolierende der Fakultäten, die für natürliche Zahlen n durch $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ definiert sind, entdeckt habe, Legendre[2] aber die Bezeichnung Γ und die Verschiebung um 1 im Argument eingeführt habe. Aber eigentlich ist es doch nicht so.

Tatsächlich war es DANIEL BERNOULLI[3] der die erste Darstellung einer interpolierenden Funktion der Fakultäten als unendliches Produkt gab, die dann später „Gammafunktion“ heißen sollte. Euler fand wohl unabhängig von D. Bernoulli, mit dem er in St. Petersburg engen Kontakt hatte, eine analoge Produktdarstellung dieser Funktion, ging aber dann wesentlich weiter darüber hinaus: Euler gab weitere Darstellungen durch Integrale an und untersuchte und fand verschiedenste Eigenschaften dieser Funktion, die sie dann in der Folge für viele Bereiche der Mathematik und ihren Anwendungen so interessant machen sollte. Somit trägt diese Funktion sicherlich zu Recht den Namen „Eulersche Gammafunktion“ . Im folgenden soll eine geschichtliche Darstellung der Anfänge der Gammafunktion gegeben werden, mit einer Erklärung, wie es insbesondere zu dieser Argumentverschiebung kam.

[1] LEONHARD EULER, 15.4.1707, Basel – 18.9.1783, St. Petersburg

[2] ADRIEN MARIE LEGENDRE, Paris, 18.9.1752 – 9.1.1833, Paris

[3] DANIEL BERNOULLI, 8.2.1700, GRONINGEN – 17.3.1782, BASEL

Zuerst soll aber noch an die gängigsten Darstellungen der Gammafunktion erinnert werden. Wir finden in den Lehrbüchern heute meist folgende Darstellungen für die Gammafunktion $\Gamma(x)$, definiert für $x \in (0, \infty)$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{1}$$

sowie

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt && (2)\\ \Gamma(x) &= \int_0^1 (-\log y)^{x-1} dy && (3)\\ \Gamma(x) &= \int_{-\infty}^\infty e^{xz} e^{-e^z} dz. && (4) \end{aligned}$$

Die Integraldarstellungen (2), (3) und (4) sind zueinander äquivalent. (3) und (4) folgen aus (2) durch die Variablentransformationen $y = e^{-t}$ bzw. $z = \log t$. Man beachte, dass es sich bei allen drei Darstellungen um uneigentliche Integrale handelt. Dass (1) und (2) übereinstimmen, scheint Euler selbst nicht nachgewiesen zu haben, ja er hat dies scheinbar gar nicht für notwendig erachtet.

1. Das Interpolationsproblem.

Die Fragestellung der Interpolation von Funktionen oder mathematischen Operationen, die nur für natürliche Zahlen definiert waren, war im 17. Jahrundert und auch später noch ein Problem sozuagen *'a la mode'* (siehe etwa Scriba, [13]). Als Beispiel kann man die n-te Potenz einer rellen Zahl auch für nicht natürliche Zahlen n angeben. Oder nehmen wir die Reihe

$$S(n) := \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Hier macht es keine Mühe, $S(n)$ auch für nicht ganze n hinzuschreiben. Schwieriger wird es schon bei solchen Reihen, wo man nicht eine „allgemeine Formel" für die Summe angeben kann. So etwa, wenn man anstelle der Addition die Multiplikation nimmt. Diese und ähnliche Fragen hat CHRISTIAN GOLDBACH[4] zeit seines Lebens behandelt. So hat er mehrfach Summen der Form

$$\sum_{i=1}^n f(i) \quad \text{bei gegebenem} \quad f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

und speziell auch die Summe $1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + \cdots$ untersucht. Das Problem war, ein „allgemeines Glied" zu finden.

Goldbach war ausgebildeter Jurist. Daneben beschäftigte er sich sehr viel mit Mathematik. Obwohl er im Laufe seines Lebens einige mathematische Arbeiten (über Probleme aus der Zahlentheorie, unendliche Reihen, Integration von Funktion und Differentialgleichungen u.a.) veröffentlicht hatte, muss er wohl als mathematischer Dilettant (im guten

[4]CHRISTIAN GOLDBACH, 18.3.1690, Königsberg – 1.12.1764, St. Petersburg

GRONAU

Sinne) und Autodidakt bezeichnet werden. Er studierte zwar bei bedeutenden Mathematikern (z.B. bei den Brüdern Bernoulli), eine systematische mathematische Ausbildung hat er allerdings nie genossen. Ein charakteristischer Wesenszug an ihm war, dass er vielseitig interessiert und wohl auch begabt war, viel im ganzen europäischen Raum reiste und dort leicht zu den bedeutendsten Wissenschaftlern seiner Zeit (u.a. mit LEIBNIZ[5]) Kontakt fand. Diese Kontakte setzte er auch im nachhinein durch eine umfangreiche briefliche Korrespondenz fort.

Erst im Alter von 35 Jahren im Jahre 1725 nahm Goldbach seine erste geregelte Berufstätigkeit auf, und zwar als Sekretär der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Es ist nicht bekannt, inwieweit Goldbach zu dieser Zeit schon Kontakte mit Euler pflegte. Zu Beginn 1728 musste Goldbach, der inzwischen zum Erzieher des Zarensohnes geworden ist, nach Moskau ziehen, da die Zaren ihren Hof von St. Petersburg weg nach Moskau verlegt hatten. So entspann sich ein Briefwechsel zwischen Euler und Goldbach, der dann dann bis zum Tode Goldbachs währte ([6] und [7]).

Der Anfang dieser für die Mathematik sehr fruchtreichen Kontakte zwischen Goldbach und Euler begann mit dem Problem der Interpolation der Fakultätenfunktion. Es ging Goldbach darum, die Funktion der Fakultäten[6], nennen wir sie wie nachher Euler in [4] Δ, also $\Delta(n) = n!$, auch für nicht natürliche Zahlen zu definieren. Mit dieser Frage wandte sich Goldbach an mehrere Mathematiker, u.a. bereits 1722 an NIKOLAUS BERNOULLI[7] und dann später, um 1729 an dessen Bruder Daniel. Goldbach erhielt auch Antworten auf diese Anfragen, wobei die folgenden 3 Briefe für die Gammafunktion von besonderer Bedeutung sind:

2. Drei Briefe über die Gammafunktion.

Der erste Brief: Der erste bekannte Brief, der eine Interpolation der Fakultätenreihe enthält, stammt von *Daniel Bernoulli*, gerichtet an Goldbach vom 6. Oktober 1729. Für eine unendlich große Zahl A und beliebiges x schlägt Bernoulli das (unendliche) Produkt

$$\left(A+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\cdots\frac{A}{A-1+x}\right) \tag{5}$$

als Zwischenglied zum Argument x vor, also

$$x! = \lim_{n\to\infty}\left(n+1+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\prod_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i+x}. \tag{6}$$

Für $x = \frac{3}{2}$ und $A = 8$ berechnet Bernoulli näherungsweise $\frac{3}{2}! = 1.3004$ (hier scheint sich Bernoulli verrechnet zu haben, ich erhalte den Wert 1.32907) und für $x = 3$ und $A = 16$ ergibt die Formel (6) anstelle von $3! = 6$ den Wert $6\frac{1}{204}$. Mit diesem bemerkenswerten Resultat, über dessen Entstehung wir nichts wissen, wurde die Diskussion des Problems der Interpolation von Reihen im Briefwechsel zwischen Goldbach und D. Bernoulli beendet ([6], S. 143).

---

[5] GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, 1.7.1646, Leipzig – 14.11.1716, Hannover

[6] Das Zeichen ! wurde allerdings erst 1808 von Christian Kramp (1760 – 1826, Professor für Mathematik in Staßburg) eingeführt. Euler verwendete später, 1771, Eneström Nr. 421 das Symbol $[n]$.

[7] NIKOLAUS II BERNOULLI, 6.2.1695, Basel – 26.7.1726, St. Petersburg

GRONAU

Der zweite Brief: Euler, der sich zu der Zeit (durch Vermittlung der Brüder Bernoulli) bereits in Petersburg aufhielt und wohl über die Diskussion zwischen Goldbach und D. Bernoulli informiert war, hatte ebenfalls eine Lösung für das Interpolationsproblem der Fakultätenreihe, die er eigenen Worten nach Bernoulli mitteilte. Auf Anregung Bernoullis schrieb er nur eine Woche nach dessen Brief, am 13. Oktober 1729 einen Brief an Goldbach. Darin teilt er ihm seinen Vorschlag für den *„terminum generalem"* zum Argument m mit:

$$\frac{1\cdot 2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}\cdot 3^m}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}\cdot 4^m}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}\cdot 5^m}{4+m}\ \textit{etc.} \tag{7}$$

also in der n-ten Approximation:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)^m}{(1+m)(2+m)(3+m)\cdots(n+m)},$$

Somit erhalten wir damit $\Gamma(m+1)$ fast[8] in der Darstellung (1).

Wenn auch die Darstellungen von Bernoulli (5) und Euler (7) formal verschieden sind, so ergeben beide Formeln (6) und (7) im Grenzübergang den selben Wert. Numerische Vergleiche zeigen sogar, dass die Formel von Bernoulli eine bessere Approximation als die von Euler bietet. Das unendliche Produkt (1) wird (eigentlich fälschlicherweise) die *Gaußssche*[9] *Produktdarstellung* der Gammafunktion genannt.

Euler geht aber weit darüber hinaus. Zunächst teilt er Goldbach mit, dass er für das Argument $\frac{1}{2}$ den Wert $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ bekommt. In seinen Worten lautet dies:

Terminem autem exponentis $\frac{1}{2}$ *aequalis inventus est huic* $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{-1}\cdot l-1\right)}$ *seu, quod huic aequale est, lateri quadrati aequalis circulo, cujus diameter* $=1$.

Das heißt $\frac{1}{2}! = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{-1}\cdot\ln(-1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Hier nimmt Euler schon seine Erweiterung des Logarithmus auf negative Zahlen, die er schon mit JOHANN BERNOULLI[10] (dem Vater von Nikolaus und Daniel) diskutiert und dann später präzisiert hat, vorweg. Es ist der natürliche Logarithmus hier als mehrwertige Funktion aufzufassen; speziell haben wir hier mit $i=\sqrt{-1}$

$$\ln(-1) = i\pi + k\cdot 2\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Im selben Brief verwendet Euler noch für π die Umschreibung *rationem peripheria ad diametrum*, und in späteren Arbeiten, z. B. 1736, verwendet er auch das Symbol π, das höchstwahrscheinlich erstmals 1706 bei WILLIAM JONES[11] zu finden ist.

Euler gibt dann auch numerische Werte an: $\frac{1}{2}! = 0.8862269$ und $\frac{3}{2}! = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}!\right) = 1.3293403$, die mit dem exakten Wert auf allen angegebenen Dezimalstellen übereinstimmen. Weiters erwähnt er dann, dass man auch leicht die Werte der Glieder zu den Argumenten $\frac{5}{2}$ *etc.* $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$ *etc* und $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ *etc.* bestimmen kann.

Der dritte Brief: Der zweite Brief, den Euler an Goldbach schrieb, datiert vom 8. Jänner 1730. In diesem Brief führt Euler eine erste Integraldarstellung für die Interpolation der Fakultäten ein. Nach einer Erläuterung des (bestimmten) Integrales (in den Grenzen von

---

[8] der Ausdruck (7) hat denselben Grenzwert wie $\Gamma(m+1)$ in der Darstellung (1).

[9] CARL FRIEDRICH GAUSS, 30.4.1777, BRAUNSCHWEIG – 23.2.1855, GÖTTINGEN

[10] JOHANN BERNOULLI, 6.8.1667, Basel – 1.1.1748, Basel

[11] WILLIAM JONES, 1675, Wales – 3 Juli 1749, London

GRONAU

0 bis 1), insbesondere wenn unter dem Integral eine Funktion, die noch von einer weiteren Variablen abhängt, gibt er das allgemeine Glied zunächst einer anderen Reihe und dann das der Fakultätenreihe in seiner Notation mit

$$\int dx(-lx)^n$$

an, also in unserer Schreibweise

$$n! = \int_0^1 (-\ln x)^n dx. \tag{8}$$

Er schreibt dabei: *Denotat autem lx logarithmum hyperbolicum ipsius x.* Dann gibt er, in Beantwortung einer Frage in Goldbachs Antwortbrief vom 1. Dez. 1729, eine kurze Erklärung des hyperbolischen (= natürlichen) Logarithmus mittels einer arithmetischen und einer geometrischen Progression, wobei er betont, dass der hier auftretende Logarithmus aus der Quadratur der Hyperbel herkommt.

Ausführlicher hat Euler die in diesem Brief behandelten Fragen in seiner Arbeit [3] *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*, Eneström Nr. 19 dargestellt:

3. Die Eulerschen Integrale.

In dieser Arbeit behandelt er zunächst das oben erwähnte Produkt (7) und erhält speziell für den Wert $\frac{1}{2}$

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 10}{9\cdot 9}\cdot\ etc.}$$

Hier hätte er eigentlich schon aufhören können, nachdem er diesen Wert mit der Produktdarstellung von π durch Wallis[12] verglichen hat. Wallis untersuchte im Zusammenhang mit dem Problem der Quadratur des Kreises das Integral

$$f(p,n) = \frac{1}{\int_0^1 (1 - x^{1/p})^n\, dx}.$$

Sind n und p natürliche Zahlen, dann ist $f(p,n) = \binom{n+p}{p}$ und für $n = p = \frac{1}{2}$ gilt

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\pi} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots.$$

Die Übereinstimmung von $\Delta(1/2)$ mit den Werten eines Integrals zeigte Euler den Weg, wie man die in seinen Augen nicht so zufriedenstellende Produktdarstellung (7) von Δ mit Hilfe von Integralen verbessern könnte.

Zunächst untersucht Euler das später von Legendre so genannte *1. Eulersche Integral* in der Form

$$\int x^e dx(1-x)^n, \tag{9}$$

[12] John Wallis, 23.11.1616, Ashford – 28.10.1703, Oxford, Professor in Oxford einer der Gründer der Royal Society.

108

GRONAU

wobei die Integration von 0 bis 1 zu nehmen ist (Euler schreibt die Integrale ohne Integrationsgrenzen, gibt diese aber im Kontext an), also

$$E(e,n) = \int_0^1 x^e (1-x)^n dx. \tag{10}$$

Heute ist das modifizierte 1. Eulersche Integral unter dem Namen *Betafunktion*

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx \tag{11}$$

mit der Identität

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{12}$$

bekannt.

Euler erhielt dafür für natürliche Zahlen n

$$(e+n+1)\int x^e dx(1-x)^n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(e+1)(e+2)\cdots(e+n)}.$$

Nun kommt der Trick: für e (dies hat noch nichts mit der Eulerschen Zahl e zu tun) setzt Euler nun den Bruch $e = \frac{f}{g}$ ein. Dann wird das Integral für natürliche n zu

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\cdots(f+ng)} g^n$$

und nach einigen Umformungen zu

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int x^{\frac{f}{g}} dx(1-x)^n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}. \tag{13}$$

Man erhält aus der rechten Seite von (13) durch Einsetzen von $f = 1$ und $g = 0$ gerade $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$. Wir müssen also diese auch in der linken Seite von (13) einsetzen. Der allgemeine Term unserer (Fakultäten-) Reihe lautet also

$$\int \frac{x^{\frac{f}{0}} dx(1-x)^n}{0^{n+1}}.$$

„Was nun der Wert dieses Ausdruckes ist, werde ich im folgenden untersuchen" , schreibt Euler. Nach einer wohlbekannten Regel *(„regulam igitur cognitam")* berechnet er, indem er den Grenzübergang $g \to 0$ ausführt, dieses Integral mit $\int dx(-lx)^n$. Das heißt, im zweiten Anlauf erhält Euler für die Interpolierende der Faktoriellen

$$\Delta(n) = \int_0^1 (-\ln x)^n \, dx. \tag{14}$$

Euler hat also aus dem sogenannten *1. Eulerschen Integral* durch Grenzübergang das *2. Eulersche Integral* als Darstellung der Interpolierenden der Fakultätenreihe abgeleitet.

Die dabei verwendete „wohlbekannte Regel" ist nichts anderes als die Regel von DE L'HOSPITAL.[13] Diese Regel stammt eigentlich von Johann Bernoulli, der den Adeligen de l'Hospital gegen Bezahlung in die neue Infinitesimalrechnung eingeführt hat. Es ist daher schon nicht verwunderlich, dass diese Regel auch Euler wohlvertraut war.

[13] GUILLAUME-FRANÇOIS-ANTOINE DE L'HOSPITAL, 1661, Paris – 2.2.1704, Paris.

4. Legendre und die Gammafunktion.

Adrien Marie Legendre befasste sich in mehreren Arbeiten und Lehrbüchern mit den Integralen von Euler. Erstmals behandelte er das erste Integral in der Arbeit [10] von 1792 und dann sowohl das erste und zweite Integral mit der Definition von Γ in [11] von 1809. Diese Darstellung wird dann ausführlicher in *Traité des fonctions elliptiques et des integrales Eulériennes,* [12] von 1826 wiedergegeben. Auf Seite 365 von [12] schreibt Legendre:

„Wiewohl der Name Eulers fast an alle wichtigen Theorien der Integralrechnung angefügt werden sollte, glaube ich, dass es mir erlaubt sein wird, den Namen Eulersche Integrale *insbesondere zwei Arten von Transzendenten zu geben, deren Eigenschaften der Gegenstand von mehreren schönen Abhandlungen von Euler sind und die die vollständigste Theorie, die man bis heute über bestimmte Integrale kennt, darstellen.*

Die erste [Transzendente] *ist das Integral* $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ *genommen unter den Grenzen* $x=0$, $x=1$. *Wir bezeichnen es wie Euler durch die Abkürzung* $\left(\frac{p}{q}\right)$.

Die zweite ist das Integral $\int dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^{a-1}$, *genommen unter den selben Grenzen* $x=0$, $x=1$, *das wir mit* Γa *bezeichnen, wobei Euler voraussetzt, dass a gleich einem beliebigen rationalen Bruch* $\frac{p}{q}$ *sei.*

Wir betrachten diese beiden Arten von Integralen zunächst unter dem gleichen Gesichtspunkt wie Euler; dann unter einem erweiterten Gesichtspunkt um die Theorie zu vervollständigen.“

Es erhebt sich nun die Frage, wieso die Gammafunktion von Legendre so definiert wurde, dass $\Gamma(n)=(n-1)!$ für natürliche Zahlen n gilt, nachdem Euler ja sein 2. Integral mit (14), also $\Delta(a)=\int_0^1(-\ln x)^a\,dx$ angegeben hat. Dies wurde aus Eulers 1. Integral (9) bzw. (10) hergeleitet, sodass für $n\in\mathbb{N}$ gilt: $\Delta(n)=n!$. Nun war es aber Euler selbst, der diese Verschiebung vorgenommen hat. Legendre bezieht sich in seinen Arbeiten auf Eulers *Institutionem calculi integralis*, Vol. I, caput IX [5], Seite 240. Hier sind die Parameter schon zurückgesetzt, sodass das von Legendre oben zitierte so genannte erste Eulersche Integral für $n=1$ gerade die Betafunktion (11), und zwar $B(p,q)$ ergibt. Daraus leitet Legendre (im Geiste von Euler aber mit etwas anderen Methoden) nun das 2. Integral in der Form $\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}dx$ ab, das er mit $\Gamma(a)$ bezeichnet. Außerdem ist nun aus

$$\Gamma(a)=\int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}dx$$

leicht durch partielle Integration die Rekursionsformel (Funktionalgleichung)

$$\Gamma(a+1)=a\cdot\Gamma(a)$$

zu erhalten ([11],S. 476-481, [12], S. 405-409).

Es ist also Euler selbst sozusagen dafür verantwortlich, dass $\Gamma(n)=(n-1)!$ ist. Wieso er das Integral in [5] so eingeführt hat, wird noch weitere ausgedehnte Studien der *Opera omnia* Eulers erfordern. Eines könnte man als Grund angeben: die sehr schöne Beziehung

(12) zwischen der Betafunktion und der Gammafunktion wäre in der Notation (10) mit E und Δ von der Form

$$E(m,n) = \frac{\Delta(m) \cdot \Delta(n)}{\Delta(m+n+1)},$$

also sicherlich nicht so schön wie (12). Es ist aber sicher fraglich, inwieweit dies von Euler oder Legendre bereits vorausgesehen worden ist.

Literatur

[1] Artin, E.: *Einführung in die Theorie der Gammafunktion.* Hamburger Math. Einzelschr., Heft 1, B.G. Teubner, Leipzig/Berlin 1931.

[2] Davis, Ph. J.: *Leonhard Euler's Integral: A historical Profile of the Gamma function.* Amer. Math. Monthly, Vol. 66 (1959), 849-869.

[3] Euler, Leonhard: *De progressionibus Transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt.* Eneström Nr. 19, 1730/1. Opera omnia, seria I, 14, 1-24.

[4] Euler, Leonhard: *De termino generali serium hypergeometricarum.* Eneström Nr. 652, 1776. Opera omnia, seria I, 16a, 139-162.

[5] Euler, Leonhard: *Institutionum calculi integralis.* Volumen primum. Petropoli, 1768. Opera omnia, seria I,

[6] Juškevič, A.P. und L. Kh. Kopelevič: *Christian Goldbach, 1690–1764.* Birkhäuser Verlag, Basel etc., 1994.

[7] Juškevič, A.P. und E. Winter (Hrsg.): *LEONHARD EULER UND CHRISTIAN GOLDBACH. Briefwechsel 1729-1764.* Abh. der Deutschen Akad. der Wiss. zu Berlin. Akademie-Verlag, Berlin 1965.

[8] Laugwitz, D, and B. Rodewald: *Auf Eulers Spuren zur Gammafunktion.* Math. Semesterberichte, Hamburg, **33** (1986) 201-212

[9] Laugwitz, D and B. Rodewald: *A Simple Characterization of the Gamma Function.* Amer. Math. Monthley **94** (1987). 534-536.

[10] Le Gendre, A.-M.: *Mémoires sur les transcendantes elliptiques.* Paris, L'an deuxième de la République (1792).

[11] Legendre, M.: *Recherches sur diverses sortes d'intégrales définies.* Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques d l'institut de France. Année 1809, 416-509.

[12] Legendre, A.M.: *Traité des fonctions elliptiques et des integrales Eulériennes,* Tome second. Paris, 1826.

[13] Scriba Christoph J.: *Von Pascals Dreieck zu Eulers Gamma-Funktion. Zur Entwicklung der Methodik der Interpolation.* In: Mathematical Perspectives. Essays on Mathematics and Its Historical Development. Ed. Joseph W. Dauben. Academic Press, New York, 1981.

Detlef Gronau, Institut für Mathematik, Universität Graz,
Heinrichstrasse 36, A-8010 Graz, Austria
e-mail: gronau@uni-graz.at

BARNER

NEGATIVE GRÖSSEN BEI DIOPHANT?

KLAUS BARNER

Es gilt seit HERMANN HANKEL (1874) und MORITZ CANTOR (1880) als allgemein anerkannte Lehrmeinung, daß DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA an keiner Stelle seiner Arithmetika „negative Zahlen“ benutzte und offenbar auch keine zutreffende Idee (conception) davon besaß. Dem steht zwar, wie es zunächst scheint, die berühmte Stelle der Definition IX entgegen:

> Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν. („Fehlendes mit Fehlendem multipliziert ergibt Vorhandenes, Fehlendes hingegen mit Vorhandenem ergibt Fehlendes.“)

Der Begriff λεῖψις wird jedoch seit CANTOR entgegen dem historisch-philologischen Wortsinn (omission, failure, lack) mit „abzügliche Zahl“, „abzuziehende Zahl“ etc. übersetzt, das heißt, man ist davon überzeugt, daß DIOPHANT mit λεῖψις den Subtrahenden in einer Differenz positiver rationaler Zahlen gemeint habe, bei welcher *der Minuend immer größer ist als der Subtrahend*, so daß die Differenz stets eine positive rationale Zahl repräsentiert. Oft wird die obige Stelle auch schlicht als „(Vor-)Zeichenregel“ interpretiert:

> Minus mal Minus ist Plus, Minus mal Plus ist Minus.

Die beschriebene Position wird von zahlreichen Übersetzern und Mathematikhistorikern wie selbstverständlich ohne jede Begründung übernommen, darunter THOMAS HEATH (1885), GUSTAV WERTHEIM (1890), PAUL TANNERY (1893), JOHANNES TROPFKE (1902), ROUSE BALL (1908), FLORIAN CAJORI (1919), OSKAR JOACHIM BECKER und JOSEPH EHRENFRIED HOFMANN (1951), ERIC TEMPLE BELL (1962), HELMUTH GERICKE (1970), EDMUND HLAWKA (1982), VICTOR J. KATZ (1993), DAVID M. BURTON (1995) und NORBERT SCHAPPACHER (1998).

Einzige Ausnahme ist ISABELLA BAŠMAKOVA, die in ihrem 1974 (russisch 1972) erschienenen Büchlein „Diophant und diophantische Gleichungen“ behauptet, DIOPHANT habe in der oben zitierten Definition IX tatsächlich negative Zahlen gemeint. Überhaupt operiere er bei Zwischenlösungen gern mit negativen Zahlen, obwohl die endgültige Lösung immer rational und positiv sein müsse.

Für diese Auffassung ist Frau BAŠMAKOVA von NORBERT SCHAPPACHER in ungewöhnlich scharfer Form angegriffen worden. Was sie behaupte, sei „Unsinn“. Er wirft ihr „Gedankenlosigkeit“ vor, wenn sie behaupte („entgegen dem für jeden Leser

112

BARNER

offensichtlichen Befund, daß DIOPHANT nur in positiven rationalen Zahlen rechnet"), daß DIOPHANT auch negative Zahlen benutze. Ich werde zeigen, daß Herr SCHAPPACHER irrt und Frau BAŠMAKOVA — im wesentlichen — Recht hat.

ISABELLA BAŠMAKOVA *argumentiert* in der streitigen Frage der negativen Zahlen bei DIOPHANT *ausschließlich historisch-philologisch*, wenn sie zutreffend und überzeugend nachweist, daß λεῖψις etwas Fehlendes, etwas Nichtvorhandenes, bezeichnet, auf keinen Fall aber etwas Abzuziehendes (wofür DIOPHANT übrigens mehrfach und ausschließlich das Wort ἀφαιρούμενος benutzt.) Ich werde diese Argumentation ausweiten und vertiefen, indem ich die Herkunft der Wörter λεῖψις und ὕπαρξις aus der Fachsprache der neuplatonischen Philosophie nachweise, deren Vertreter in Alexandria DIOPHANTs Zeitgenossen waren. Ὕπαρξις ist ein zentraler Begriff der neuplatonischen Ontologie, und der von DIOPHANT eingeführte Begriff λεῖψις eine analoge Bildung.

Ich plädiere nachdrücklichst dafür, die Definition IX, die offenkundig nicht verderbt ist, als ein Sprachdenkmal von hohem Rang zu respektieren und dies nicht eilfertig der eigenen, möglicherweise unzulänglichen Einsicht in die Aufgaben der Arithmetika zu opfern, umzuinterpretieren und nicht wortgetreu zu übersetzen, nur weil man meint, *daß nicht sein kann, was nicht sein darf* (CHRISTIAN MORGENSTERN).

Stattdessen machen wir uns auf die Suche nach Termen in den Lösungen von DIOPHANTs Aufgaben, die dort negative Werte annehmen. Leider bleibt uns Frau BAŠMAKOVA den Nachweis, daß DIOPHANT tatsächlich mit negativen Zahlen operiert, schuldig. Das einzige Beispiel, welches sie anführt, ist in der Tat unhaltbar und wird von SCHAPPACHER zu Recht kritisiert.

Vorab muß man sich jedoch einige Gedanken über die Terminologie, die Bezeichnungen und die ontologischen Überzeugungen DIOPHANTs machen, um nicht falsche Erwartungen zu hegen und in selbst gestellte Fallen zu treten. Die Zahlen spielen in der neuplatonischen Ontologie (und offenbar auch bei DIOPHANT) eine herausgehobene Rolle. Sie gehören zum Reich der Ideen, dem κόσμος νοητός, dem im höchsten Maße Existenz, Realität zugesprochen wird. Das von DIOPHANT verwendete Wort ἀριθμός, welches wir mit „Zahl" übersetzen, steht ausschließlich für eine positive rationale Zahl. Seine Verwendung für irrationale oder negative „Zahlen" (im modernen Wortsinne) wäre ihm nie in den Sinn gekommen (er spricht zum Beispiel nur von irrationalen Zahlenverhältnissen). Daher verwenden wir, einem Vorschlag HEINZ LÜNEBURGs folgend, für Terme, die im Laufe von DIOPHANTs Rechnungen negative Werte annehmen, das Wort „Größe" und sprechen fortan aus Respekt vor DIOPHANTs ἀριθμοί nur von „negativen Größen". Wir behaupten daher nicht, daß DIOPHANT mit negativen Zahlen rechne, sondern daß er mit negativen Größen operiere.

Für ἀριθμός verwendet er das Schlußsigma ς, den einzigen Buchstaben, der im griechischen Zahlenalphabet nicht vorkommt. Das ς wird (entsprechend unserem x) als

BARNER

Unbestimmte für eine noch zu bestimmende positive rationale Zahl verwendet. Peinlichst achtet DIOPHANT durch entsprechende Aufgabenformulierungen und Lösungsansätze darauf, daß sich für ς nie etwas anderes als eine positive rationale Zahl ergeben kann, und zwar nicht nur im Schlußresultat, sondern auch bei Zwischenergebnissen.

Von größter Wichtigkeit ist auch, daß DIOPHANT sein Minuszeichen ⋔ (wahrscheinlich mit HERONS ⋔ identisch) ausschließlich als *binären* Operator bei der Subtraktion positiver rationaler Zahlen verwendet. Ein Zeichen für die Addition besitzt er nicht; diese wird durch Juxtaposition zum Ausdruck gebracht. Damit ist die Rede von „Vorzeichen" bei DIOPHANT ein Anachronismus, und die Interpretation von Definition IX als „Vorzeichenregel" (wie bei SCHAPPACHER) ein „Unsinn". Es darf uns somit auch nicht verwundern, daß DIOPHANT nirgends so etwas wie zum Beispiel ⋔ $\overset{o}{M}\bar{\varepsilon}$ schreibt; das wäre bei monadischer Verwendung des Operators ⋔ gleich -5. Daraus bereits zu schließen, daß bei ihm keine negativen Größen auftreten, wäre aber voreilig. Er könnte zum Beispiel $\overset{o}{M}\bar{\varepsilon}$ ⋔ $\overset{o}{M}\bar{\iota}$ (das ist $5-10$) schreiben, die natürlichste Art, wie negative Größen erscheinen, und genau dies (die Bildung der Differenz zweier positiver rationaler Zahlen, bei welcher der Subtrahend die größere Zahl ist) ist der Weg, auf dem bei ihm negative Größen auftreten.

Er bezeichnet zum Beispiel die Basis (Seite=πλευρά) einer Quadratzahl (τετράγωνος) mit $\varsigma\bar{\alpha}$ ⋔ $\overset{o}{M}\bar{\delta}$ (das ist $x-4$) und berechnet für ς den Wert $\frac{1}{2}$, was eine positive rationale Zahl ist. Die errechnete Basis (πλευρά) $\frac{1}{2}-4$ ist nun ohne Zweifel λεῖψις. Das macht ihm aber nichts aus, denn er interessiert sich für die Quadratzahl (τετράγωνος), die er mittels der „zweiten binomischen Formel" zu

$$\frac{1}{4}+16-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{49}{4}$$

berechnet. Und bei solcher Gelegenheit, so vermute ich, wird ihm aufgegangen sein, daß λεῖψις multipliziert mit λεῖψις als Wert ὕπαρξις ergibt. Für diese Art des Auftretens von λεῖψις, also von negativen Größen bei Zwischenrechnungen, können wir zahlreiche Fundstellen angeben. Dabei handelt es sich meist[1] bei Polynomen um eine der beiden folgenden Situationen:

1. Gegeben ist ein Polynom der Gestalt a^2x^2+bx+c, wobei $a>0$, sowie b und c positive oder negative rationale Zahlen im modernen Sinne seien, und dies soll zu einem Quadrat gemacht werde. Dann wählt DIOPHANT ein Quadrat mit der Seite $ax-m$, $m>0$, und erhält so die Gleichung

$$a^2x^2+m^2-2amx=a^2x^2+bx+c,$$

[1]Es gibt auch zwei oder drei Stellen, wo eine zu der im folgenden beschriebenen analoge Methode für Polynome vierten Grades mit einer Quadratzahl a^2 als führendem Koeffizienten verwendet wird, indem dieses als Quadrat eines quadratischen Polynoms mit führendem Koeffizienten a dargestellt wird.

114

BARNER

woraus

$$x = \frac{m^2 - c}{2am + b}$$

folgt. Der Parameter $m > 0$ wird so groß gewählt, daß der *Bruch positiv* ist. Damit bekommt DIOPHANT ein positives x, während in der Mehrzahl der Fälle die *Seite* $a\,x - m$ *negativ* ist. Von diesem Typ habe ich 17 Beispiele gefunden.

2. Gegeben ist ein Polynom der Gestalt $a\,x^2 + b\,x + c^2$ mit rationalen Koeffizienten a, b sowie $c > 0$, und dies soll zu einem Quadrat werden. Für dessen Seite macht DIOPHANT den Ansatz $c - m\,x$ mit $m > 0$. Dann erhält er die Gleichung

$$m^2x^2 + c^2 - 2\,c\,m\,x = a\,x^2 + b\,x + c^2,$$

woraus

$$x = \frac{2\,c\,m + b}{m^2 - a}$$

folgt. Durch hinreichend große Wahl des Parameters m wird sichergestellt, daß x positiv wird. In mehreren Fällen ist die Seite $c - m\,x$ dann negativ. Von diesem Typ habe ich 6 Beispiele gefunden.

Da DIOPHANT anfangs seine Rechnungen stets mit einem der Polynome $a^2x^2 + b\,x + c$ oder $a^2x^2 + m^2 - 2\,a\,m\,x$ (beziehungsweise $a\,x^2 + b\,x + c^2$ oder $m^2x^2 + c^2 - 2\,c\,m\,x$) fortsetzt, so daß explizit keine negativen Größen auftreten, braucht der unkritische oder unaufmerksame Leser nicht unbedingt etwas davon zu bemerken, daß DIOPHANT eine Seite in Ansatz gebracht hat, die sich als λεῖψις herausgestellt hat[2]. Aber DIOPHANT hat es gewußt, und auch seine gelehrten Kommentatoren von HANKEL bis SCHAPPACHER hätten es eigentlich bemerken müssen.

REFERENCES

1. **Ball, W. W. Rouse**, A Short Account of the History of Mathematics. Reprint of the 4th edition and the author's last revision of 1908. Dover Publications, New York, NJ, 1960
2. **Bašmakova, Isabella G.**, *Diophante et Fermat.* Revue d'histoire des sciences et de leurs applications **19** (1968), 283-306. Ursprünglich in russischer Sprache erschienen in Istoriko-mathematicheskie issledovania **17** (1966)
3. **Bašmakova, Isabella G.**, Diophant und diophantische Gleichungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin / Birkhäuser, Basel, 1974. Amerikanische Neuauflage: Diophantus and Diophantine Equations. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1997. [Die russische Originalausgabe erschien 1972 bei Nauke in Moskau.]
4. **Bashmakova, Isabella G.**, *Arithmetic of algebraic curves from Diophantus to Poincaré.* Historia Mathematica **8** (1981), 393–416
5. **Becker, Oskar Joachim & Joseph Ehrenfried Hofmann**, Geschichte der Mathematik. Athenäum, Bonn 1951

[2]Dies ändert sich drastisch im vierten und vor allem im fünften der griechischen Bücher der Arithmetika, wo DIOPHANT die inzwischen eingeübten Methoden nicht mehr im Detail ausführt und dies dem Leser weitgehend selbst überläßt.

BARNER

6. **Bell, Eric Temple**, The Last Problem. Victor Gollancz, London 1962[1]; aktualisierte und revidierte Fassung: Mathematical Association of America, Washington 1990[2] John Wiley, New York 1989[2]
7. **Burton, David M.**, Burton's History of Mathematics: An Introduction. Wm. C Brown, Dubuque, IA, 1995[3]
8. **Cajori, Florian**, A History of Mathematics. Macmillan, New York 1919[2]
9. **Cantor, Moritz**, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band 1. Erste Auflage, Teubner, Leipzig 1880
10. **Diophantus Alexandrinus**, Opera omnia cum graecis commentariis. Herausgegeben und ins Lateinische übersetzt von PAUL TANNERY. 2 Bände, Nachdruck der Ausgabe von 1893/95. Teubner, Stuttgart 1974
11. **Gericke, Helmuth**, Geschichte des Zahlbegriffs. Bibliographisches Institut, Mannheim 1970
12. **Gericke, Helmuth**, Mathematik in Antike und Orient. Springer, Heidelberg 1984
13. **Gericke, Helmuth**, Mathematik im Abendland von den römischen Feldmessern bis zu Descartes. Springer, Heidelberg 1990
14. **Gericke, Helmuth**, *Zur Geschichte der negativen Zahlen.* In: Joseph Dauben, Menso Folkerts, Eberhard Knobloch & Hans Wußing (Hrsg.), History of Mathematics. States of the Art. Academic Press, San Diego, Ca., 1996, p.279–306
15. **Hankel, Hermann**, Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. Leipzig 1874
16. **Heath, Thomas Little**, Diophantos of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra. Cambridge University Press, erste Auflage, Cambridge 1885
17. **Heath, Thomas Little**, A History of Greek Mathematics. 2 Volumes. Clarendon Press, Oxford 1921[1]; Dover Publ., New York 1981[2]
18. **Hlawka, Edmund**, *Zum Zahlbegriff.* Philosophia Naturalis **19** (1982), 413–470
19. **Katz, Victor J.**, A History of Mathematics. An Introduction. HarperCollins, New York 1993
20. **Rashed, Roshdi (ed.)**, Diophantus, Les Arithmétiques. Livres IV–VII, zweisprachige Ausgabe (Griechisch–Französisch). (Oeuvres de Diophante, vol. III et IV), Les Belles Lettres, Paris 1984
21. **Rist, John M.**, *Mysticism and Transcendence in Later Neoplatonism.* Hermes **92** (1964), 213–225
22. **Schappacher, Norbert**, *Der Beweis von Fermats Großem Satz — eine Literaturübersicht.* Mathematische Semesterberichte **45** (1998), S.113–123
23. **Schappacher, Norbert**, *Wer war Diophant?* Mathematische Semesterberichte **45** (1998), S.141–156
24. **Smith, Andrew**, *Hypostasis and Hyparxis in Porphyry.* Hyparxis e Hypostasis nel Neoplatonismo. A cura die F. Romano e D.P. Raormina. Olschki, Firenze, 1994, pp.33–42
25. **Tropfke, Johannes**, Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Erster Band. Von Veit, Leipzig 1902
26. **Wertheim, Gustav**, Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonalzahlen des Diophantos von Alexandria. Teubner, Leipzig 1890

Fachbereich Mathematik–Informatik
Universität Kassel
D–34109 Kassel
klaus@mathematik.uni-kassel.de

ERKLÄRUNG: In den folgenden Tabellen bedeutet z.B. **VI, xii**; 414, 19-22: sechstes Buch, Aufgabe 12, Seite 414, Zeilen 19–22 von [10], Band I.

BARNER

Fundstelle/Quadrat	πλευρά	τετράγωνος·	ταῦτα ἴσα	γίνεται
II, xii; 100, 11-17	$\varsigma\overline{\alpha} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota ϛ} \pitchfork \varsigma\overline{\eta}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\beta}$	ς ἴς. $\frac{\eta}{\delta}$
$\left(\frac{1}{2}-4\right)^2$	$x-4$	$x^2+16-8x$	x^2+12	$x=\frac{4}{8}$
II, xx; 114, 19-20	$\varsigma\overline{\beta} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}$	$\Delta^{Y}\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta} \pitchfork \varsigma\overline{\eta}$	$\Delta^{Y}\overline{\delta}\varsigma\overline{\varepsilon}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}$	ς ἴς. $\frac{\iota\gamma}{\gamma}$
$\left(2\cdot\frac{3}{13}-2\right)^2$	$2x-2$	$4x^2+4-8x$	$4x^2+5x+1$	$x=\frac{3}{13}$
II, xxii; 118, 1-2	$\varsigma\overline{\alpha} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta} \pitchfork \varsigma\overline{\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}$	ς ἴς. $\frac{\eta}{\beta}$
$\left(\frac{1}{4}-2\right)^2$	$x-2$	x^2+4-4x	x^2+4x+2	$x=\frac{2}{8}$
II, xxviii; 126, 12-13	$\varsigma\overline{\gamma} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota ϛ} \pitchfork \varsigma\overline{\kappa\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}$	ς ἴς. $\frac{\kappa\delta}{\zeta}$
$\left(3\cdot\frac{7}{24}-4\right)^2$	$3x-4$	$9x^2+16-24x$	$9x^2+9$	$x=\frac{7}{24}$
II, xxix; 128, 8-9	$\varsigma\overline{\alpha} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota ϛ} \pitchfork \varsigma\overline{\eta}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}$	ς ἴς. $\frac{\eta}{\iota\zeta}$
$\left(\frac{17}{8}-4\right)^2$	$x-4$	$x^2+16-8x$	x^2-1	$x=\frac{17}{8}$
II, xxxii; 132, 18-19	$\varsigma\overline{\delta} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\iota ϛ}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota ϛ} \pitchfork \varsigma\overline{\lambda\beta}$	$\Delta^{Y}\overline{\iota ϛ}\varsigma\overline{\kappa\varepsilon}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}$	ς ἴς. $\frac{\nu\zeta}{\zeta}$
$\left(4\cdot\frac{7}{57}-4\right)^2$	$4x-4$	$16x^2+16-32x$	$16x^2+25x+9$	$x=\frac{7}{57}$
III, vii; 150, 13-16	$\varsigma\overline{\alpha} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\eta}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\xi\delta} \pitchfork \varsigma\overline{\iota ϛ}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}$	ς ἴς. $\frac{\iota}{\lambda\alpha}$
$\left(\frac{31}{10}-8\right)^2$	$x-8$	$x^2+64-16x$	x^2+4x+2	$x=\frac{31}{10}$
III, xiv; 170, 5-7	$\varsigma\overline{\delta} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\varepsilon}$	$\Delta^{Y}\overline{\iota ϛ}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\kappa\varepsilon} \pitchfork \varsigma\overline{\mu}$	$\Delta^{Y}\overline{\iota ϛ}\varsigma\overline{\lambda\gamma}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota ϛ}$	ς ἴς. $\frac{o\gamma}{\vartheta}$
$\left(4\cdot\frac{9}{73}-5\right)^2$	$4x-5$	$16x^2+25-40x$	$16x^2+33x+16$	$x=\frac{9}{73}$
III, xvi; 178, 8-9	$\varsigma\overline{\beta} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}$	$\Delta^{Y}\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta} \pitchfork \varsigma\overline{\eta}$	$\Delta^{Y}\overline{\delta} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}$	ς ἴς. $\frac{\eta}{\varepsilon}$
$\left(2\cdot\frac{5}{8}-2\right)^2$	$2x-2$	$4x^2+4-8x$	$4x^2-1$	$x=\frac{5}{8}$
IV, xx; 234, 9-10	$\varsigma\overline{\gamma} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota ϛ} \pitchfork \varsigma\overline{\kappa\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\varsigma\overline{\kappa\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\gamma}$	$\overset{o}{\mathrm{M}}$ ἐν. $\iota ϛ^{ου}$
$\left(3\cdot\frac{1}{16}-4\right)^2$	$3x-4$	$9x^2+16-24x$	$9x^2+24x+13$	$x=\frac{1}{16}$
V, ii; 314,hhpt7-9	$\varsigma\overline{\alpha} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\alpha}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\varrho\kappa\alpha} \pitchfork \varsigma\overline{\kappa\beta}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\iota\eta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\varrho\alpha}$	ς ἴς. $\overset{o}{\mathrm{M}}\angle'$
$\left(\frac{1}{2}-11\right)^2$	$x-11$	$x^2+121-22x$	$x^2+18x+101$	$x=\frac{1}{2}$
V, iii; 316, 17-19	$\varsigma\overline{\beta} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{ϛ}$	$\Delta^{Y}\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\lambda ϛ} \pitchfork \varsigma\overline{\kappa\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\delta}\varsigma\overline{\kappa\eta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\lambda\delta}$	$\overset{o}{\mathrm{M}}$ ἐν. $\kappa ϛ^{ου}$
$\left(2\cdot\frac{1}{26}-6\right)^2$	$2x-6$	$4x^2+36-24x$	$4x^2+28x+34$	$x=\frac{1}{26}$
V, iv; 318, 14-16	$\varsigma\overline{\beta} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{ϛ}$	$\Delta^{Y}\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\lambda ϛ} \pitchfork \varsigma\overline{\kappa\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\delta}\varsigma\overline{\delta}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\vartheta}$	ς ἴς. $\frac{\kappa\eta}{\iota\zeta}$
$\left(2\cdot\frac{17}{28}-6\right)^2$	$2x-6$	$4x^2+36-24x$	$4x^2+4x+19$	$x=\frac{17}{28}$
V, v; 320, 16-18	$\varsigma\overline{\alpha} \pitchfork \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\gamma}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta} \pitchfork \varsigma\overline{ϛ}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\gamma}\,\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\gamma}$	ς ἴς. $\overset{o}{\mathrm{M}}\varpi$
$\left(\frac{2}{3}-3\right)^2$	$x-3$	x^2+9-6x	x^3+3x+3	$x=\frac{2}{3}$

TABELLE 1. Beispiele von Quadratzahlen mit negativer Basis $ax-m$

BARNER

Fundstelle/Quadrat	πλευρά	τετράγωνος	ταῦτα ἴσα	γίνεται
V, vi; 324, 4-6	$\varsigma\overline{\alpha}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}\pitchfork\varsigma\overline{\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\alpha}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}$	$\varsigma\ \text{ἴς.}\ \frac{\varepsilon}{\gamma}$
$\left(\frac{3}{5}-2\right)^2$	$x-2$	x^2+4+4x	x^2+x+1	$x=\frac{3}{5}$
V, xv; 354, 10-11	$\varsigma\overline{\gamma}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\text{ϟ}}\pitchfork\varsigma\overline{\kappa\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\delta}\pitchfork\varsigma\overline{\vartheta}$	$\varsigma\ \text{ἴς.}\ \frac{\iota\varepsilon}{\beta}$
$\left(3\cdot\frac{2}{15}-4\right)^2$	$3x-4$	$9x^2+16-24x$	$9x^2+14-9x$	$x=\frac{2}{15}$
V, xvii; 360, 8-9	$\varsigma\overline{\gamma}\pitchfork\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\zeta}$	$\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\mu\vartheta}\pitchfork\varsigma\overline{\mu\beta}$	$\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\lambda\alpha}\pitchfork\varsigma\overline{\kappa\zeta}$	$\varsigma\ \text{ἴς.}\ \frac{\varepsilon}{\text{ϟ}}$
$\left(3\cdot\frac{6}{5}-7\right)^2$	$3x-7$	$9x^2+49-42x$	$9x^2+31-27x$	$x=\frac{6}{5}$

TABELLE 1. Fortsetzung

Fundstelle/Quadrat	πλευρά	τετράγωνος	ταῦτα ἴσα	γίνεται
IV, ix; 206, 12-13	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\beta}\pitchfork\varsigma\overline{\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\iota\text{ϟ}}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}\pitchfork\varsigma\overline{\iota\text{ϟ}}$	$\Delta^{Y}\overline{\gamma}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}\pitchfork\varsigma\overline{\text{ϟ}}$	$\varsigma\ \text{ἴς.}\ \frac{\iota\gamma}{\iota}$
$\left(2-4\cdot\frac{10}{13}\right)^2$	$2-x$	$16x^2+4-16x$	$3x^2+4-6x$	$x=\frac{10}{13}$
IV, xi; 210, 13-15	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}\pitchfork\varsigma\overline{\beta}$	$\Delta^{Y}\overline{\delta}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}\pitchfork\varsigma\overline{\delta}$	$\Delta^{Y}\overline{\gamma}\varsigma\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\alpha}$	$\varsigma\ \text{ἴς.}\ \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\zeta}$
$(1-2\cdot 7)^2$	$1-2x$	$4x^2+1-4x$	$3x^3+3x+1$	$x=7$
IV, xiii; 214, 15-17	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\gamma}\pitchfork\varsigma\overline{\gamma}$	$\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}\pitchfork\varsigma\overline{\iota\eta}$	$\Delta^{Y}\overline{\zeta}\varsigma\overline{\iota\eta}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}$	$\varsigma\ \text{ἴς.}\ \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\iota\eta}$
$(3-3\cdot 18)^2$	$3-3x$	$9x^2+9-18x$	$7x^2+18x+9$	$x=18$
IV, xxxix; 304, 11-12	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\gamma}\pitchfork\varsigma\overline{\varepsilon}$	$\Delta^{Y}\overline{\kappa\varepsilon}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}\pitchfork\varsigma\overline{\lambda}$	$\Delta^{Y}\overline{\gamma}\varsigma\overline{\iota\beta}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}$	$\varsigma\ \text{ἴς.}\ \frac{\iota\alpha}{\kappa\alpha}$
$\left(3-5\cdot\frac{21}{11}\right)^2$	$3-5x$	$25x^2+9-30x$	$3x^2+12x+9$	$x=\frac{21}{11}$
V, x; 342, 6-8	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\gamma}\pitchfork\varsigma\overline{\gamma}\angle'$	$\Delta^{Y}\overline{\iota\beta}\delta^{\times}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}\pitchfork\varsigma\overline{\kappa\alpha}$	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}\pitchfork\Delta^{Y}\overline{\alpha}$	$\varsigma\ \text{ἴς.}\ \frac{\nu\gamma}{\pi\delta}$
$\left(3-\frac{7}{2}\cdot\frac{84}{53}\right)^2$	$3-3\frac{1}{2}x$	$12\frac{1}{4}x^2+9-21x$	$9-x^2$	$x=\frac{84}{53}$
VI, xii; 414, 19-22	$\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\gamma}\pitchfork\varsigma\overline{\gamma}$	$\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}\pitchfork\varsigma\overline{\iota\eta}$	$\Delta^{Y}\overline{\gamma}\varsigma\overline{\text{ϟ}}\overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\vartheta}$	$\varsigma\ \text{ἴς.}\ \overset{o}{\mathrm{M}}\overline{\delta}$
$(3-3\cdot 4)^2$	$3-3x$	$9x^2+9-18x$	$3x^2+6x+9$	$x=4$

TABELLE 2. Beispiele von Quadratzahlen mit negativer Basis $c-mx$

118

BEČVÁŘOVÁ

Evaluation of Scientific and Pedagogical Work by Means of Biographical Monographs

MARTINA BEČVÁŘOVÁ, PRAGUE[1]

In the sixties, seventies and eighties of the 20th century only a few professionals from the Institute of History of the Academy of Sciences of the Czech Republic, along with a few university professors, devoted their attention to the history of mathematics. No new generation of historians of mathematics was raised.

The situation changed only at the beginning of the nineties, when a new discipline of postgraduate doctoral studies, *General Problems in Mathematics and Information Science*, was accredited at the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University in Prague and at the Faculty of Natural Sciences of Masaryk University in Brno, as part of which it is possible to study the history of mathematics, the teaching of mathematics and computer science, and the history of the teaching of these subjects.

My contribution is focused in one direction of research, which was initiated at the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University in Prague and which is still the subject of considerable attention. This is the production of monographs comprehensively charting out the life and work of some prominent Czech personalities, mathematicians, who have had a substantial influence on the development of mathematical research in the Czech lands, having earned a place also in world mathematics thanks to some of their results, and having strongly influenced the trends of mathematics teaching at our secondary schools and institutions of higher learning (the production of textbooks, curricula, training of instructors, reform efforts, etc.). The main motivation for specifying this direction of research for students and doctoral candidates at the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University at the beginning of the nineties was the approaching 650th anniversary of the founding of Charles University; it was celebrated in 1998.

A broader objective of the research, dissertation and diploma work devoted to important personalities of Czech mathematics is the charting of the development of scientific work in mathematics, the development of mathematics teaching and generally of the life of the Czech mathematics community of the second half of the nineteenth and the first half of the twentieth century; we are attempting to attain this objective by studying the scientific, pedagogical and organizational work of selected prominent personalities and by getting know their life circumstances, efforts and other activities.

A group of students and doctoral candidates devoted to selected personalities soon formed as part of the post-graduate course of study; the result of their efforts are the following works: Zdeňka Crkalová: *Life and work of Karel Petr (1868-1950)*, (defended master thesis 1992), Helena Boušková: *Life and work of Jan Sobotka (1862-1931)*, (defended master thesis 1995), Martina Bečvářová-Němcová: *Life and work of František Josef Studnička (1836-1903)* (defended dissertation 1997, History of Mathematics series, vol. 10, 1998), Ladislava Francová-Provazníková: *Life and work of Bohumil Bydžovský (1880-1969)* (defended dissertation 2001), Magdalena Hykšová: *Life and work of Karel Rychlík (1885-1968)* (just before completion), Zdeňka Kubištová: *Life and work of Vladimír Kořínek (1899-1981)* (dissertation in process), Pavla Drábková: *Life and work of Miloš Kössler (1884-1961)* (dissertation in process) and Karel Hrubčík: *Life and work of Václav Hlavatý (1894-1969)*

[1] This work was supported by the grant LN00A041 of the Ministery of Education of the Czech Republic.

(studies interrupted at present). The series of such works should include the monograph of Martina Bečvářová: *From the history of the Union of Czech Mathematicians and Physicists (1862-1869)* (History of Mathematics series, vol. 13, 1999), devoted among other things to the lives and works of the four founders of the Union.

Working on monographs dedicated to Sobotka and Bydžovský are at the present time the doctoral candidates Tomáš Zuščák and Jana Olejníčková.[2]

The methodology of work on these monographs has been elaborated at the end of the eighties and the beginning of the nineties at the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University by Jindřich Bečvář, under whose direction the following monographs were composed: *Eduard Weyr (1852-1903)* (History of Mathematics series, vol. 2, 1995) and *Jan Vilém Pexider (1874-1914)* (History of Mathematics series, vol. 5, 1997). This was the first time that the personalities of Czech mathematics were charted out with respect to their professional, teaching as well as human qualities. These monographs have shown that it is possible to write a professional and in many ways a relatively readable work on a scientist specialized in the exact science of mathematics. It is not customary in this country to write books of this type; despite the endless stream of books of uneven quality on actors, vocalists, painters or politicians.[3]

The monographs devoted to prominent personalities, published or in preparation, have the following general structure:

1. Biographical part: family from which the personality originated; life circumstances of the personality under study and those of its family.
2. Professional part: a detailed description of the scientific results and professional activities by individual professions, their evaluation and inclusion in the development of our domestic and European (or world) science.
3. Other activities: organizational, popularizing, activity in scientific associations, societies, political work, etc.
4. Factographical appendices: list of publications supplemented by references to reviews, list of reviews, list of teaching activity, list of doctoral work supervised or reviewed, list of surviving correspondence, received and sent, etc.
5. Appendix featuring illustrations.

The biographical parts are elaborated on the basis of a study of the author's estate, archival research, etc., by means of completely standard procedures. Sometimes it is necessary to examine in the appropriate archive the records of secondary schools or institutions of higher learning, to identify and search through memoirs of colleagues, contemporaries, friends and opponents, family members, etc.

The assessment of professional activities is the major part of the monograph; its composition is difficult particularly with respect to the mathematical treatment. It is necessary to well grasp the mathematical results of the personality being researched, to meticulously acquaint oneself with the development of the mathematical disciplines to which these researches belong, and thus to grasp their significance within the context of the state of mathematics at the time. The situation is frequently complicated by the fact that mathematics is by now different; some branches of mathematics are no longer cultivated, or are reformulated into more modern language or into a more general form.

---

[2] At the Faculty of Natural Sciences of Masaryk University in Brno Petra Šarmanová (Otakar Borůvka), Karel Lepka (Matyáš Lerch) and Jitka Hrdličková (Ladislav Seifert) have devoted themselves to the contributions of certain mathematicians; their work, however, is conceived somewhat differently.

[3] It must be noted with regret that the response of some parts of the mathematical community has not been and is not too encouraging, as if the publication of monographs devoted to mathematicians violated some taboo. This is one of the reasons why fewer works were completed than was originally anticipated.

The passages devoted to other activities describe those activities that cannot be understood in a natural manner as professional work in mathematics and which cannot be understood in a natural way as professional work, and which cannot be noted only in the biographical part.

The objective of the factographical part is to provide a brief and as complete as possible overview of all of the activities of the personality under study. This part is elaborated in particular on the basis of study in archives and libraries.

The pictorial appendix includes some interesting materials from the estates and archives (photographs, specimens of manuscripts, report cards, diplomas, title pages of publications, etc.); these fill in the issues under study and serve as reminders of the days past. In preparing this appendix available modern technologies are used (modern copying of photographs, scanning, computer editing of pictures, etc.), which make possible a superior pictorial reproduction.

It is necessary to emphasize that the framework structure of the monograph is modified based on the character of the activities and the significance of the specified personality being described.

Let us examine the factographical appendices in greater detail. It is not customary in mathematical circles to compose such a detailed collection of factographical information; usually a list of publication suffices (often more or less complete, often incomplete, sometimes it is absent at all); no overview of teaching activity, list of doctoral dissertations supervised or reviewed, correspondence, etc., is ever compiled. Such collections of factographical information is valued low by mathematicians, sometimes even looked down upon, since their composition does not require mathematical erudition.

Most of the publications devoted to prominent personalities tend to be often composed in relative haste, sometimes as a matter of duty at the occasion of an anniversary article or obituary. Sometimes, unfortunately, they are merely older anniversary articles or obituaries, rewritten and modernized; old errors and deficiencies are thus transferred to the newer articles, some facts remain deformed, some matters remain obscure. Only seldom is a deeper analysis performed, be it only of some partial professional issues; broader factographical information tends not to be compiled at all.

The composition of a detailed factography is very demanding with respect to time. It may, however, be used to advantage for the overall evaluation of the personality under review, since it collects in a single location an overview of all activities (professional, pedagogical and others). It is then easy to find out with respect to a given period of time, what, where and who many hours the personality under review was teaching, whether or not teaching was the main or just marginal activity, what themes she or he was professionally elaborating, whether and eventually in what way the focus of the professional work was related to instruction, whether the results or the scientific activity were presented as part of instruction (e.g., in seminars), etc. Conclusions may then be drawn as to whether or not modern issues were studied, whether several different themes were elaborated or a single one, whether the issues studied was gradually expanded and the results generalized or whether by contrast the approach adopted was one from the general to the narrowly specialized. Furthermore, it is easy to ascertain which doctoral work was assigned, whether the personality being studied made use of the results attained by the doctoral candidates, or if on the contrary the doctoral candidates were developing and further elaborating the ideas of their teacher. It can also be judged in what further activities the personality was engaged, whether it limited herself or himself merely to teaching or professional activity, or whether she or he participated in broader social, political, nationalistic or cultural activities, whether the professional activities reflected family or social problems. A detailed factography can thus be utilized also for a deeper study of separate problems seemingly unrelated to the personality in question.

Let us take as an example the mathematician František Josef Studnička (1836-1903) and the years 1893-1894. We shall easily find out from the factography that in this period he devoted himself exclusively to quaternions, which until that time were marginal to his professional interests (until 1893 he had written only three works on them). In 1893 the world was celebrating the 50th anniversary of the discovery of quaternions and Studnička was among those who reacted to the atmosphere of the celebration. On October 16th 1893, exactly fifty years after Hamilton's famous discovery, he initiated a one-hour long semester lecture at Prague university *O kvaternionech* whose objective was to provide basic information on these interesting hypercomplex numbers and their applications. On December 15th of the same year he gave a formal lecture to the Royal Bohemian Society of Science on the occasion of the 50th anniversary of the discovery of quaternions, which was later published under the title of *Beitrag zur Quaternionenlehre*. There Studnička described a brief history of the discovery of quaternions, explained the basic ways of their notation and discussed operations with quaternions. He elaborated the same issues in 1894 in Czech language article *O sdruženosti číselných veličin vůbec a o řešení kvadratických rovnic pomocí kvaternionů zvlášť* illustrating it with specific examples. In the same year he published an article entitled *O kvaternionech*, which took up from the previous work and presented to the Royal Bohemian Society of Science three contributions that were soon afterwards published. On February 9th 1894 he lectured on *Neuer Beitrag zur Quaternionenlehre*. On March 30th 1894 he gave a lecture entitled *Neue Lehrsätze, Summen von Quadratzahlen betreffend* and finally on July 6th 1894 a lecture on *Über Funktionen einer quaternionalen Variablen*. The first lecture is an attempt at elaborating a theory of the simplest algebraic and transcendental functions, whose argument is a quaternion. The second one is an unsuccessful attempt at applying the theory of quaternions to numerical theoretical issues, specifically to the problem of formulas for products of the sums of squares. The third lecture is a not too successful attempt to transfer the foundations of the theory of the complex variable functions to functions, whose variables are quaternions. All of these works became the basis of a small book entitled *O kvaternionech*, which was published at the end of 1894 and which marked the culmination of Studnička's entire publication activity dealing with quaternions. By a detailed study it is possible to demonstrate how the individual works follow from one another, how they interrelate and how they supplement one another.[4] Let us note that shortly before the 1893-1894 period under consideration, in the course of the winter semesters of 1891/92 and 1892/93, Studnička devoted himself to quaternions in a mathematical proseminar. Evidently he was already then preparing for his future activity connected with the anniversary of the discovery of quaternions.[5]

Studnička was one of the few Czech mathematicians of his time to contend with quaternions; it seems that he partly succumbed to their cult in Anglo-American circles. In the course of the nineties he became the secretary *International Association for Promoting the Study of Quaternions and Allied Systems of Mathematics* for Austria-Hungary.[6]

On the example of Studnička and of quaternions it is thus possible to see how useful it is to have a well elaborated and broad factography for the sake of a comprehensive overview.

As it has already been noted, the composition of a factography is very demanding in terms of time, since it is necessary to elaborate extensive, variegated and relatively rich materials.

[4] Let us further recall that in 1901 Josef Štěpánek successfully defended his doctoral dissertation entitled *O upotřebení kvaternionů v analytické geometrii prostoru*. It is probable that the choice of theme for the dissertation was influenced by Studnička, who evaluated the work together with V. Strouhal.

[5] For a more detailed study of Studnička and the many aspects of his activities (and thus also on quaternions), see M. Němcová: *František Josef Studnička (1836-1903)*, History of Mathematics series, vol. 10, 1998, 348 pages.

[6] The society was formed in 1895.

If, for instance, we are composing a list of the pedagogical activity and a list of doctoral works reviewed, it is necessary to carefully go through lists of lectures at the given university or technical college, the annual reports of secondary schools, in some cases even catalogs of students, books listing doctoral examinations, archival funds of the individual schools (evaluations of doctoral dissertations, eventually archived works); we may also find the required information in obituaries, personal memoirs or in the memoirs or recollections of pupils, etc.
Where we are putting together a list of publications, if we are lucky, we can start with a list of publications published earlier in an obituary; we then verify, supplement and further specify the information contained in it. If we do not have an earlier list of work available to us, we rely in our initial investigation on data contained in biographical and bibliographical dictionaries (for example J. C. Poggendorff: *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, C. von Wurzbach: *Biographisches Lexikon des Kaiserthums Oesterreich*), reference magazines (*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bulletin des sciences mathématiques (et astronomiques), Revue semestrielle des publications mathématiques, Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete, Mathematical Reviews, Referativnyj žurnal matěmatika* etc.), lately also in their electronic versions, incorporating a search facility. We draw further information from library catalogs and databases, annual reports of secondary schools, associations and societies. This work sometimes turns into something akin to detective work, particularly when we decide to look for articles published in the daily press or in popular magazines. Then it is necessary to fortify ourselves with a great deal of patience, first identifying the main or regional periodicals in which such articles might be published, and then leaf through hundreds and thousands of pages with hopes of a positive result. The articles that we thus find can, however, clarify the political, social or cultural activities and views of the personality in question.

In a similar fashion we put together a list of reviews.

I would like to note that in composing a list of publications and in verifying such a list, it is reasonable to put together copies of the work of the personality in question, eventually of reviews of such work. Furthermore, it is useful to gather various bibliographic references, primary and secondary literature relating to the theme being processed, to sort everything thematically on an ongoing basis and thus prepare material for the subsequent evaluation of individual's professional activities.

The situation with correspondence is even more complicated. Most often we begin to search in the personal estate, which may be privately owned or in an archive or in several archives. Further correspondence tends to be scattered at the most various locations. By gradual investigation we arrive not only at a list of the preserved correspondence, but we gain a rich stock of material for the biographical part of our monograph. Very often we find, however, that the volume of the preserved correspondence is tiny.

The collection of materials for the factographical appendices is not just a self-serving prolongation of the monograph, representing only hundreds of hours of painstaking searching and investigation. It is an activity that logically precedes a serious evaluation of the life and work of the selected personality. If we neglect to put together a superior factography, we shall not be able to put together a complete picture of the personality in question.

At every moment, however, it is necessary to consider whether or not the factographical research is still effective, whether the effort expended is commensurate with the result attained, i.e., to consider what we may find and what it may be good for. This depends on the type of personality being evaluated, on the point of view of the evaluator. It is necessary to carefully consider when it is appropriate to stop the investigation, since we can never be sure that we have found everything we could find.

Today the composition of factographical appendices is easier than few years ago, when work on the monograph was beginning, since it is possible to make use of modern information technologies. Some reference periodicals (for example *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, *Mathematical Reviews*) provide the most varied opportunities for search (works, reviews, works with similar themes, keywords, etc.). Some Czech libraries are already offering electronic databases of the most diverse kinds (by author, by theme, etc.) which make searching of works, for example, with similar themes, considerably easier. Archives and museums are starting to offer similar services. We must not forget the broad range of possibilities offered by the Internet, which few years ago were quite inconceivable (online access to the world's greatest libraries, online ordering of copies and study literature, the search of the most varied databases, archival funds, etc.).

And what does such a monograph actually contribute to our knowledge? It gives us, in the positive sense of the word, a comprehensive view of the personality being evaluated, which it is possible at any time to supplement with deeper searches on quite special issues. We must recall, however, that such a monograph is dependent on the period in which such an evaluation is performed and on the person doing the evaluation. Factography, however, remains unaffected (it can, eventually, be supplemented); all that is based directly on it, however, has a permanent, objective validity.

And how to make value judgments? Let us once more take as our example F. J. Studnička. If we choose as our main criterion professionalism, i.e., the significance of Studnička's professional work (from the point of view of contemporary mathematicians) we will not come up with a very favorable evaluation. Is it correct, however, to leave aside all of Studnička's other activities? If we take as our basis an evaluation of his pedagogical and popularizing activities, we shall obtain a completely different picture; is it correct, however, to look away from the professional activities? If we accept the main and primary criterion to be Studnička's contribution to the development of Czech education, the Czech national science, instruction and the production of textbooks in the Czech language, we will arrive at a completely different evaluation. Will it, however, be the right evaluation? And which one will be the correct one? It is evident that we shall obtain a complete picture by an all-round evaluation, one that includes all of the above-mentioned criteria. Even so we shall be contending with problems involved in the application of today's criteria of importance and success for past events.

We must not forget that points of view and evaluations change already in the lifetime of the person being evaluated. If we again use Studnička as an example, it can be shown that at the beginning of his career he was morally obliged to produce one of the first Czech-language college textbooks of mathematics; his work was evaluated positively and he earned respect and recognition. Three decades later, he was however passed by, rejected and at the end of his life only tolerated and sometimes even ridiculed, since he wrote mainly Czech-language textbooks, popularizing and educational articles, faithfully taught and lectured; what the new period, however, mainly asked for was scientific work and international renown. In the monograph it is necessary to describe and analyze the causes for the change in the evaluation and recognition in connection with the change in the social atmosphere; eventually, to specify and correct the earlier evaluation and to show it in perspective by noting various points of view, etc. As may be evident, such a monograph brings both a relatively good view of the life circumstances and work of an individual, while posing a number of further questions and eternal doubts.

It is necessary to recall that monographs devoted to Czech mathematicians are mostly the work of students and graduates of teaching studies of mathematics and physics, mathematics and computer science, or mathematics and descriptive geometry. Students compose their seminar or diploma work, doctoral candidates produce more or less complete monographs. For the most part they have to contend with a number of problems, caused by the considerably interdisciplinary nature of this work, as well as by the mathematics itself. Firstly they are lacking in the preparatory study of history, auxiliary historical sciences and knowledge of Latin, which makes it almost impossible to go before the year 1850 (that would not be a problem for historians, who would, for their part, find it hard to deal with the mathematics). Secondly they are lacking a deeper knowledge of mathematics; doctoral candidates supplement their knowledge as part of their postgraduate studies (this problem would not occur in the case of students of professional mathematics, but unfortunately, these are, but for honorable exceptions, lacking in interest in the history of their own profession).

On the other hand students and doctoral candidates, who work on monographs devoted to personalities, have the advantage to a large extent of "guaranteed results" when they work to the full extent of their capacities, conscientiously and honestly. Such results cannot be guaranteed in advance in the case of themes assigned for diploma and dissertation work in professional mathematics, when some of the themes assigned may already be exhausted, very difficult, even impassable, unfruitful, etc.; thus it may happen that the assigned theme is badly estimated and that the student is left with empty hands even following an extended effort.

A great encouragement for a young incipient researcher is the possibility of the publication of results. In the case of more extensive work in the history of mathematics, this is a problem. Thanks to Jindřich Bečvář for the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University and to Eduard Fuchs of the Faculty of Natural Sciences of Masaryk University, a publication series entitled *The History of Mathematics* was established in 1995; this series makes it possible to publish both shorter and longer work, as well as entire monographs. A further important incentive is the possibility of reporting on one's work and presenting one's results at special events, such as the regular *Summer School in the History of Mathematics* (this year it was held for the twenty-second consecutive time), and at the *National Seminar in the History of Mathematics*, which takes place in Prague, Brno and Plzeň, or at special methodological seminars focused on specific problems, which appear in the course of work on monographs. For example, in 1996 a cycle on the work of the historian of mathematics was held as part of the doctoral seminar at the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University, in which students and doctoral candidates were familiarized with the methodology of work in archives and libraries, with the issues of the effectiveness of the collection, sorting and analysis of a large quantity of diverse materials, were informed of the most important archives and their collections, reference periodicals and new databases, which make possible the effective composition of some parts of the factographical appendices and biographical sections of the monographs. Furthermore a presentation was offered of the methodology of graphical representation of the publication of the personality being researched its predecessors and pupils, which makes possible a brief, clear and easily discernible sorting of publications, allows to monitor the mutual linkages among individual works, the process of thought, the expansion or narrowing of the issues being researched, the state of elaboration of the problem, blind alleys of research, etc. My colleague, Magdalena Hykšová, will acquaint you with this method, which greatly helps in the processing and evaluation of professional results and of the significance of the personality studied.[7]

I have attempted to show you how these monographs devoted to the lives and work of Czech mathematicians are composed, what these publications are composed of and with what problems their authors must contend in their research at the crossroads of the exact and social sciences. I have attempted to indicate the importance of the frequently neglected factographies and the method of their composition.

---

[7] See the paper by M. Hykšová: A Methodological Approach to Global Evaluation of the Scientific Work of a Personality.

BEČVÁŘOVÁ

In conclusion, please allow me to thank you for your attention, and I would like to present to you four volumes of the publication History of Mathematics, four monographs which are an attempt to chart out a small piece of Czech scientific mathematical life:

1. Jindřich Bečvář: *Eduard Weyr (1852-1903)*, History of Mathematics series, vol. 2, Prometheus, Praha, 1995.
2. Jindřich Bečvář: *Jan Vilém Pexider (1874-1914)*, History of Mathematics series, vol. 5, Prometheus, Praha, 1997.
3. Martina Bečvářová-Němcová: *František Josef Studnička (1836-1903)*, History of Mathematics series, vol. 10, Prometheus, Praha, 1998.
4. Martina Bečvářová: *Z historie Jednoty (1862-1869) (From the history of the Czech Union Mathematicians and Physicists (1862-1869)*), History of Mathematics series, vol. 13, Prometheus, Praha, 1999.

Christa Binder, Klaus Barner, Waltraud Voss, Detlef Gronau

2. Reihe: Michael von Renteln, Wolfgang Breidert

HYKŠOVÁ

A Methodological Approach to Global Evaluation of the Scientific Work of a Personality

Magdalena Hykšová, Prague[1]

The paper discusses the general method leading to a comprehensive view on the scientific work of an investigated personality. It means above all to carry out the categorization of scientific publications, find their mutual relations as well as the relations to other scientific activities of the personality, and place the works in a wider historical context. To clarify the approach the special case of an important Czech mathematician Karel Rychlík, to whose life and work my PhD thesis is devoted, is used. I do not claim that the discussed method is new and original. On the contrary, it is well known and frequently used. It was also one of the first hints given by my supervisor Jindřich Bečvář at the beginning of my PhD study at the Faculty of Mathematics and Physics of Charles University in Prague, the branch *General Problems of Mathematics and Informatics* (see the paper by M. Bečvářová in these proceedings, where the methodological seminar for PhD students is mentioned). Nevertheless I hope this contribution will be useful, for it recalls and summarizes the general method together with the illustration how the method can be put into practice.

1 Karel Rychlík (1885 – 1968)

Let us mention several facts on the life of Karel Rychlík first.[2]

16th April, 1885	born in Benešov (near Prague)
1904	passed the leaving examination at the grammar school, Prague appointed Member of the Union of Czech Mathematicians and Physicists
1904-7	student at the Philosophical Faculty of Charles University, Prague
1907-8	student at Sorbonna, Paris
1908	passed the "teacher examination"
1909	appointed assistant lecturer at the Philosophical Faculty
1909	achieved the "Doctor of Philosophy" degree
1912	appointed private associate professor at the Philosophical Faculty
1913	appointed assistant lecturer at Czech Technical University, Prague
1913	appointed private associate professor at Czech Technical University
1918	married
1920	declared adjunct professor at Czech Technical University
1922	appointed member of the Royal Bohem. Soc. of Sciences (KČSN)
1923	declared full professor at Czech Technical University
1924	appointed member of the Bohemian Academy of Sciences and Arts
1924	became member of the Bolzano Committee under KČSN

[1] This work was supported by the grant LN00A041 of the Ministry of Education of the Czech Republic.

[2] More details including the list of publications can be found on Rychlík's Internet pages:
http://euler.fd.cvut.cz/publikace/HTM/Index.html
and in author's papers *Life and Work of Karel Rychlík*, in: *Mathematics throughout the Ages*, Prometh., Prague, 2001, 67–91, and *Remark on Bolzano's Inheritance Research in Bohemia*, ibid, 258–286.

HYKŠOVÁ

1934-5 dean of the Faculty of Mechanical and Electrical Engineering

1948 retired

28th May, 1968 died in Prague

Nowadays we can't than regret that Rychlík remained only private associate professor at Charles University and spent most of his time and energy at the Technical University where he had to adapt his lectures to the purposes of future engineers. The main subject of his research was algebra and number theory. It was possible, even necessary, to read such topics at Charles University; in fact, Rychlík was the first who introduced methods and concepts of "modern" abstract algebra in our country – by his published treatises as well as university lectures. Besides, as a professor there he would have had a stronger influence on the young generation of Czech mathematicians.

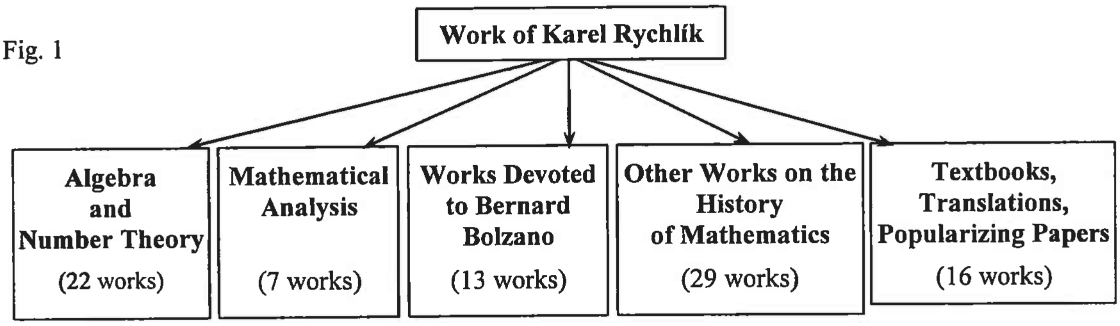
2 The Evaluation of Scientific Activities

2.1 The Collection and a Raw Categorization

Now imagine that we are just at the beginning of the process which leads to the evaluation of scientific activities (publications, lectures, etc.) of a mathematician.

First it is necessary to make up a list of publications and lectures. As for the publications, we can search in reference magazines, leaf through the magazines in which we can expect some other papers etc. Provided an obituary exists, we can use it, but it is usually necessary to complete and correct it. In the first stage we also try to collect as much as possible – the copies of papers, books, abstracts of lectures etc. Before we thoroughly study the publications, we can only look at their tittles and abstracts or just skim them. This enables us to divide the works into several groups, more or less independent. In our example we obtain Figure 1.

Fig. 1



2.2 A Survey of Various Scientific Activities and Their Mutual Relations

Once we have created a list of publications and lectures, we can compile a table illustrating the distribution of subjects of interest of the personality, their development and changes in the course of time, as well as connections of publications to other scientific activities. Still a superficial knowledge of works is sufficient for this purpose. Figure 2 demonstrates such a survey in the case of Karel Rychlík.

Following symbols are used in the chart:

U1908 regular lecture at Charles University in 1908

M1908 one-shot lecture in the Union of Czech Math. and Phys.

T1908 regular lecture at the Czech Technical University

C1908 lecture at a congress

Using the knowledge of the most of Rychlík's activities, we observe:

1. At the beginning of his career Rychlík wrote several works on algebra without a deeper relation to his later publications. We only note that [R3] was a dissertation, [R4] and [R7] were inceptive works.

2. At the same time several popularizing papers appeared. The first two of them, [R5] and [R6] on special cases of Fermat Last Theorem, were published in 1910. It was the year when Rychlík became an editor of the magazine *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* with the responsibility for tasks for secondary school students, published in the supplement of this journal. He held this duty till 1921, when the last paper [R18] of the considered group was also published.

3. The most important mathematical papers by Karel Rychlík concern algebra and number theory and they originated mainly by the middle of the twenties. Precisely, by the year 1924 when the Bolzano Committee under the Royal Bohemian Society of Sciences was established – compare 8. Rychlík was its member since the very beginning – and it should be emphasized that he was a very active member. For example, by the beginning of the 1930's he had prepared for publication two parts of Bolzano's manuscript *Grössenlehre*, namely *Functionenlehre* [R34] and *Zahlentheorie* [R31]. Soon (Fig. 3) we will see that the most of the remaining papers involved in the group 3 have their origin – or at least inspiration – in those published earlier.

Rychlík's lectures at Charles University in 1912 – 1930 were closely related just to this domain, similarly with the lectures in the Union. This is an example of relations of various components of a scientific work.

4. Seven papers belong to mathematical analysis. Among them there are two couples ([R17], [R21] and [R40], [R41]) consisting of Czech and German variant of almost the same text. Otherwise, the works on analysis are mutually independent.

5. An interesting example of mutual relations of publication activities and lecturing is related to probability theory. Since the school year 1914/15 Rychlík lectured on this subject at the Technical University and he realized it was necessary to write a textbook which would take account of a modern stage of this science. The textbook published in 1938 was written for students of the technical university, but in a very topical way. Rychlík builds the probability theory using the axiomatic method that is similar to the one of Kolmogorov (developed in early 1930's). The list of Rychlík's lectures at Charles University shows that in the school year 1931/32 he read a semester lecture *Probability theory (the theory of Mises)*, in school years 1933/34 and 1936/37 he read a lecture *Probability theory from the axiomatic point of view*. This indicates that he had already been interested in the new approach to probability theory since the beginning; first he adopted an outside theory, then he gradually modified and improved it. Hence we can observe the way from the classical lecture at the technical university over the study of modern trends and their modifications and improvements up to the publication of a well–elaborated textbook.

6. World War II, postwar years and the beginning of a communist epoch were hard for Karel Rychlík. He did not return to the Technical nor to Charles University, the Bolzano Committee was abolished together with the Royal Bohemian Society of Sciences in 1951. By the middle of the fifties only a short paper [R44] on the history of mathematics, the second edition [R45] of a former textbook [R36] on elementary number theory and four translations from Russian – see 7 – had been published.

HYKŠOVÁ

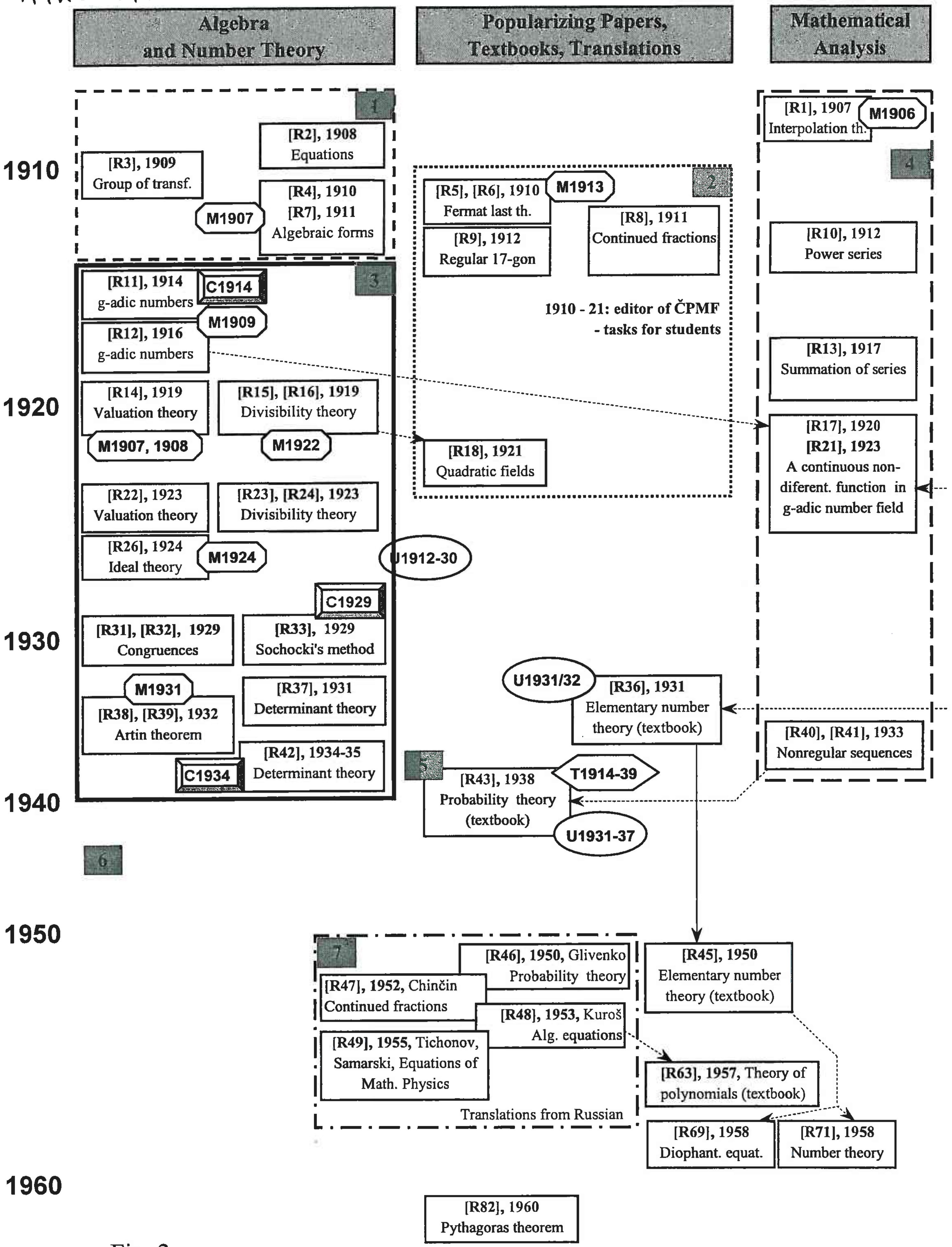
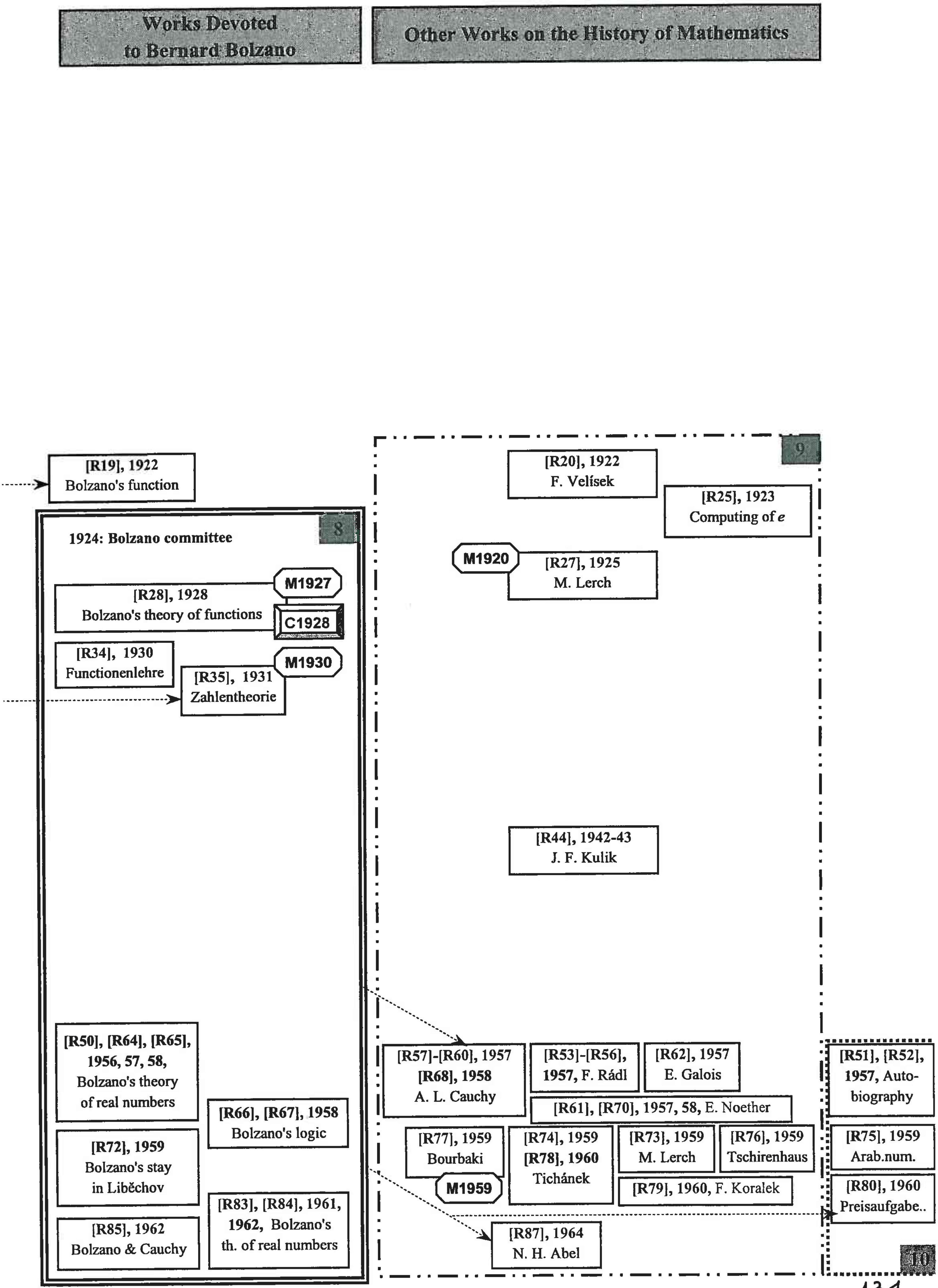


Fig. 2

HYKŠOVÁ


Works Devoted to Bernard Bolzano
Other Works on the History of Mathematics
[R19], 1922 Bolzano's function
9
[R20], 1922 F. Velísek
[R25], 1923 Computing of e
8
1924: Bolzano committee
M1920
[R27], 1925 M. Lerch
M1927
[R28], 1928 Bolzano's theory of functions
C1928
[R34], 1930 Functionenlehre
M1930
[R35], 1931 Zahlentheorie
[R44], 1942-43 J. F. Kulik
[R50], [R64], [R65], 1956, 57, 58, Bolzano's theory of real numbers
[R57]-[R60], 1957 [R68], 1958 A. L. Cauchy
[R53]-[R56], 1957, F. Rádl
[R62], 1957 E. Galois
[R51], [R52], 1957, Auto-biography
[R61], [R70], 1957, 58, E. Noether
[R66], [R67], 1958 Bolzano's logic
[R72], 1959 Bolzano's stay in Liběchov
[R77], 1959 Bourbaki
M1959
[R74], 1959 [R78], 1960 Tichánek
[R73], 1959 M. Lerch
[R76], 1959 Tschirenhaus
[R75], 1959 Arab.num.
[R79], 1960, F. Koralek
[R80], 1960 Preisaufgabe..
[R83], [R84], 1961, 1962, Bolzano's th. of real numbers
[R85], 1962 Bolzano & Cauchy
[R87], 1964 N. H. Abel
10

8. The situation became less unpleasant in 1955, when the "new" Czechoslovak Academy of Sciences officially entrusted Rychlík with organizing Bolzano's manuscript inheritance (during the following years he was sometimes given a reward for a particular work). In the same year the Czech Literary Fund, which supported old scientists and their widows, started to pay him a regular remuneration. Moreover, in 1958 the Bolzano Committee was restored under the academy (nevertheless only for three years). A glimpse at the Figure 2 is sufficient to notice that after many unfortunate years a fertile period suddenly came.

9. Besides the manuscripts of Bernard Bolzano, Rychlík was deeply interested in the history of mathematics in general. The most of his historical papers were devoted to a certain personality; remaining four papers are included in the group denoted by 10.

To a certain extent, the distribution of publications in the course of time is typical in some way: first scientific papers on pure mathematics (in a period, when the brain is young and fresh), later mainly works on the history of mathematics (when the mathematician is getting old but concurrently his horizons are getting broad). Of course, the reasons for this development are more complicated; some of them have been outlined above, the remainder is a subject of a more detailed study.

2.3 Relations within Particular Groups of Publications

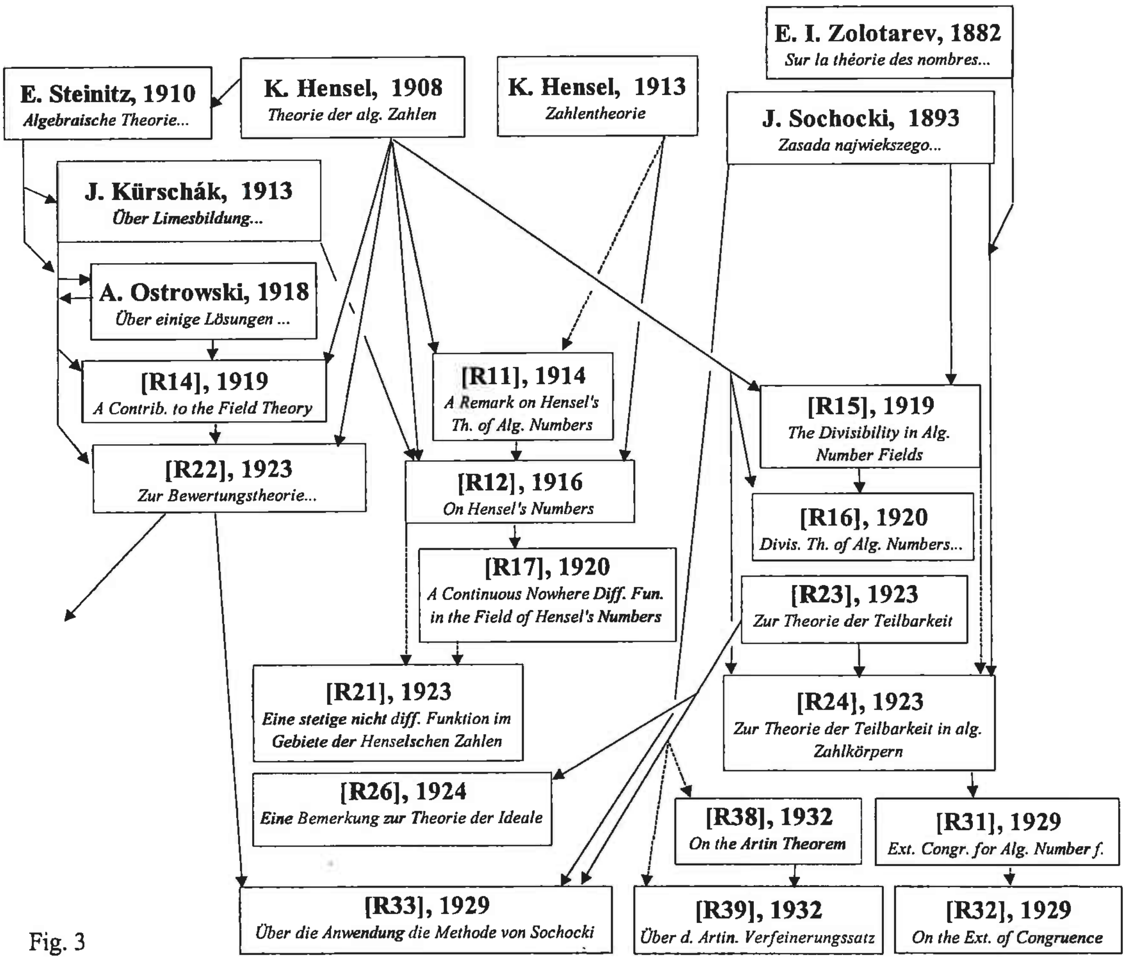


Fig. 3

In each group of publications the inner relations can be found. First it is sufficient to look through the texts and notice the references to other works. Similarly it is not difficult to discover the relations to works of predecessors. More precisely, this is not difficult provided the publications are dated in 20th century; formerly the references were not so complete or customary. For example, the relations within the first group are depicted in Figure 3. Continuous line denotes the explicit quotation of a correspondent work, dashed lines stand for implicit influences and they were added to a graph after a more detailed study of papers (see the following section).

2.4 Detailed Study of Publications, Placing in the Historical Development

Now it is time for a detailed study of works. But for their comprehensive appraisal it is not sufficient to study and describe them (or possibly some works of some predecessors). It is necessary to place them in a broader context, determine their position in the development of the theory in question. And it is not an easy task at all.

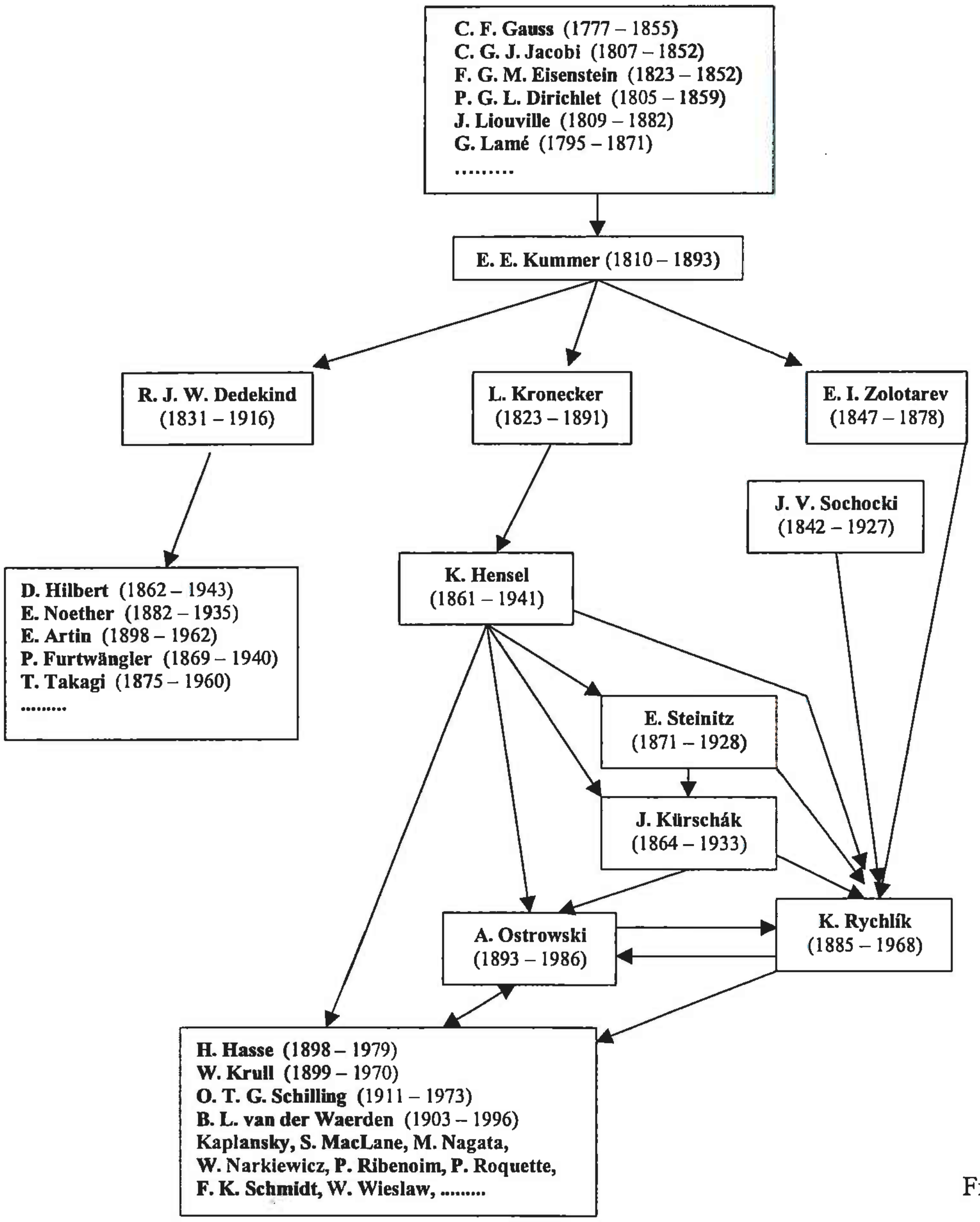


Fig. 4

We can start with a secondary literature that serves as a guide for our further work with primary sources – it tells us at which papers or books we should aim our effort and what it is possible to find there. Still the secondary sources can't stand in the primary ones. Each author has his own opinion of the right way in the theory, of what is important or unimportant, he gives his own interpretation of original concepts. Each author writes in a certain stage of the transformation into modern terms – more or less, according to his view of the work of a historian of sciences. Although we will sometimes use modern terms for the sake of clarity, too, we should know how the concepts look like in the original work (not to reproduce "third hand" information). And it is useful to note the original formulations in the text – the future reader will be able to create a more concrete view of the development. This study can yield in an introductory chapter bringing up the theme and it enables us to determine the position of "our" scientist. In our example we can draw Figure 4 that illustrates the influences in the development of the algebraic number theory. The aim of the scheme is to show Rychlík's place there; hence there are not presented all of the existing influences – the predetermination of the Figure would be covered up.

2.5 Global Evaluation

After the described preparation we are able to discuss particular publications in particular groups, including fine details on one hand and a "view from above" on the other hand, and we can give the evaluation of scientific work of the personality.

The detailed analysis can be briefly summarized for the sake of lucidity. Below an excerpt of such summary is given.

In the Czech mathematical community, Rychlík 's name is mostly related to his textbooks on elementary number theory ([R36], [R45]) and on the theory of polynomials with real coefficients [R63], which are certainly very interesting and useful, but which are not "real" scientific contributions. Worth mentioning is the less known textbook [R43] on probability theory ... [see above]. In this context, let us also mention the popularization papers [R5] and [R6] on the special cases (n=3, 4, 5) of Fermat's last theorem, which are cited in the book *Fermat's Last Theorem for Amateurs* by P. Ribenboim.[3]

Not only among mathematicians and not only in Bohemia, Rychlík is widely known as the historian of mathematics, above all in the connection with Bernard Bolzano ... But also a range of other papers on the history of mathematics more or less relates to Bolzano, namely the works devoted to N. H. Abel ([R87]), A.-L. Cauchy ([R57], [R58], [R59], [R60], [R68], [R85]) and the prize of the Royal Bohemian Society of Sciences for the problem of the solution of any algebraic equation of a degree higher than four in radicals ([R80], [R81]). Some of the remaining papers are only short reports ([R44], [R53], [R54], [R61]) or loose processing of literature ([R75], [R77]), the others contain a good deal of an original work based on primary sources, namely the papers devoted to É. Galois ([R62]), F. Korálek ([R79]), M. Lerch ([R27], [R73]), E. Noether ([R70]), F. Rádl ([R55], [R56]), B. Tichánek ([R25], [R74], [R78]), E. W. Tschirnhaus ([R76]) and F. Velísek ([R20]). Moreover, Rychlík adds his own views and valuable observations, which shows his wide insight and deep interest in the history of mathematics and in mathematics itself. On October 21, 1968 the Czechoslovak Academy of Sciences awarded Rychlík in memoriam a prize for the series of 13 papers on the history of mathematics published after 1957, namely [R57], [R58], [R59], [R62], [R64], [R66], [R67], [R68], [R70], [R76], [R77], [R81] and [R87].

Rychlík's algebraic works are known only to a relatively narrow circle of mathematicians. But it is just this first group, in which the most important mathematical papers of Karel Rychlík are included ...

[3] Springer Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1999.

In Figure 3 the survey of quotations in Rychlík's principal algebraic papers can be seen (except the two papers on determinant theory which stay a little aside). It is evident that Rychlík was influenced above all by K. Hensel. Notice that the works were published between 1914 and 1932, that is in the period of the birth and formation of "modern" abstract algebra. Regrettably only a few of Rychlík's papers were published in a generally reputable magazine – *Crelle's Journal*; the most of them were published in de facto local Bohemian journals. It was certainly meritorious for enlightenment in the Czech mathematical audience, but although some of the works were written in German, they were not noticed by the mathematical community abroad, even though they were referred in *Jahrbuch* or *Zentralblatt*. On the other hand, Rychlík's papers published in Crelle's Journal became known and they have been cited in the literature. Nevertheless, it was not only Rychlík who published mostly for the Czech audience. In fact, this situation was common at that time in the young autonomous republic.

In his papers Rychlík mostly came out of a certain work (see again Fig. 3) and gave some improvements. Mainly he based definitions of the main concepts or proofs of the main theorems on another base, in the spirit of abstract algebra, and in this way he generalized or simplified them. Typical features of the papers are brevity, conciseness, topicality as well as the "modern" way of writing (from the point of view of that time).

3 Conclusion

The contribution tried to show the usefulness of charts for a complex evaluation of scientific activities of a personality. On one hand, they are useful for our own needs. We take advantage of them during a further processing of information; they show us, what we should aim our efforts to, and they help us to follow a coherent thread. They often enable as to trace some relations that would otherwise remain unnoticed. Later, during writing down a study, charts help us to choose a lucid and logical organization of the text and to maintain a stable drift.

On the other hand, charts are very useful and important for a reader of our treatise and they should be included there. They mediate the knowledge of what was the personality interested in and when, how various relations look like etc. – as it has been outlined above.

BREIDERT

Wolfgang Breidert

Berkeley's Sources in Mathematics

(Vortrag gehalten in Neuhofen am 14.6.2002)

This paper has two main points: 1) Dechales as an actual source, 2) Doria as a mere potential source for Berkeley's mathematical work.

Berkeley developed his works with regard to Locke's sensualism on the one hand, but with regard to the increasing mathematization of physics - espacially by Newton - on the other hand. Perhaps the tendency of rationalism and mathematization was much stronger on the continent than in British philosophy. It is surprising, that the German translation of Berkeley's "Alciphron" published in 1737 was published together with an additional introduction about the question "Wether one could introduce profitably the mathematical way of learning into theology?".[1] It is obvious from the "Analyst", how strong the relationship between theology, philosophy, and mathematics affected Berkeley, and how ambivalent was his interest in mathematics. He had to respect the fact that his contemporaries highly regarded mathematics but at the same time he was aware that inappropriate applications could lead to atheism, and was therefore anxious to restrict the influence of the "exact" sciences in metaphysical matters. Short before Berkeley entered the Trinity College Dublin the doctrines of Locke and Newton were introduced into the studies at the college by George Ashe, the provost of the college, during the last decade of the sixteenth century. Ashe was a member of the Philosophical Society of Dublin for Promoting Natural Knowledge, and he published some mathematical papers, for instance an article on some of Euclid'S propositions in the "Philosophical Transactions" for 1684. Ashe was an advocate for classical accuracy in mathematics, and he derived the assumed security of mathematical propositions from his opinion that mathematical objects, i.e. the quantities, were sensible things, with which we are acquainted in everyday life. We have no evidence that Berkeley read any mathematical work written by Ashe, but it is important to know that a teacher of mathematics with a sensualistic attitude had some influence at the Trinity College.

It is a fact that Berkeley's first publication was a mathematical one, namely "Arithmetica absque algebra aut Euclide demonstrata / Miscellanea mathematica", even if many Berkeleyan scholars made short work with it. Research on Berkeley's philosophy of mathematics is concerned primarily with the "Analyst" and the Analyst controversy. Dominique Berlioz delivered some special investigations on Berkeley's lecture "Of Infinites". Silvia Parigi enlightened the mathematical bockground of the "Philosophical Commentaries" and the "Principles of Human Knowledge". Further we have the works on Berkeley's philosophy of mathematics and his relationship to other mathematicians by Michel Blay, Douglas Jesseph and David Sherry.[2] Ben Vermeulen[3] traced the connexions of Berkeley and Nieuwentijt with regard to infinitesimals, and Bent Birkeland (Oslo) wrote a thesis on Roger Paman, who was a hitherto neglected participant in the Analyst controversy. In spite of these intensive research activities it is still possible to discover something new.

Berkeley's early mathematical book is not yet appreciated adequately. For even if it is not a work of substantial new mathematics, there are some original aspects and historically interesting attidudes. But even an expert in Berkeley's philosophy of mathematics such as Douglas Jesseph arouses suspicion that he did not read carefully the "Miscellanea mathematica", because he writes that the "algebraic game" invented by Berkeley was "designed to help students solve equations".[4] In "De ludo algebraico" we do not find any support for solving equations, the whole game serves for the invention of equations only. The rules of the game concerne the production of equations, strictly speaking systems of equations, and the task is to solve these equations, but almost nothing is said about the problem of solving. "De ludo algebraico" is a more pedagogical or moral work than a mathematical one. It exhibits more of its author's enthusiasm for algebra than was pleasant for him at later times, nevertheless the recommendation of the algebraical game is restricted to aims of learning or at least to recreation, but it does not include mere amusement. Playing did not have its own value, it was nothing more than an instrument for instruction or recreation. Today we are accustomed to look on the game of chess as it would be a logical or mathematical game, but Berkeley invented his algebraic game against the passion for chess. The reason is that chess was not considered as a logical or mathematical game.

In the introduction to "De ludo algebraico" Berkeley recommends enthusiastically the study of algebra, and he eulogizes Descartes and Malebranche for having given such recommendations.

---

[1] "Ob man die Mathematische Lehr=Art mit Vortheil in die Theologie einführen könne".

[2] Dominique Berlioz: G. Berkeley: "Of Infinites". In: Revue philosophique 1982, 45-57. Dominique Berlioz: Berkeley et la polémique du calcul infinitésimal. In: Entre Form et Histoire, ed. Olivier Bloch, Bernard Balan, Paulette Carrive, Paris 1988, pp. 71-85. Silvia Parigi: Philosophers and the Microscope: From Descartes to Berkeley. Michel Blay: Deux moments de la critique du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley. In: Revue d'Histoire des Sciences 39 (1986), 223-253. Douglas Jesseph: Berkeley's Philosophy of Geometry. In: Archiv für Geschichte der Philosophie 72 (1990), 301-332. David Sherry: The Wake of Berkeley's Analyst: Rigor Mathematicae? In: Studies in History and Philosophy of Science 18 (1987), 455-480.

[3] Ben Vermeulen: Berkeley and Nieuwentijt on Infinitesimals. In: Berkeley Newsletter No. 8 (1985), pp. 1-5.

[4] Douglas Jesseph, l.c., p. 307.

At a later time Berkeley regreted this juvenile opinion, because he became aware of the dangers to religion emanating from the universal mathematization of all branches of knowledge. Therefore he developed his unusual mathematics founded on primarily finite concepts.

With respect to Berkeley's attack on the infinitesimal calculus in the "Analyst" it is noteworthy that he mentioned Cavalieri only once in his works, although Leibniz and other mathematicians considered Cavalieri as one of the important forerunners of the calculus. Berkeley wrote in the "Philosophical Commentaries" (No. 346)[5]: "all might be demonstrated by a new method of indivisibles, easier perhaps & juster than that of Cavallerius." Therefore it is a fact, that Berkeley did know something about Cavalieri, though he assumed a detached attitude to this Italian mathematician. In books on Berkeley's philosophy of mathematics we find the plain statement, that Berkeley did know many of the mathematical books written in the seventeenth and eighteenth century, and especially that he was acquainted with Cavalieri's method of indivisibles.[6] But up to now the question remains, with which books about Cavalieri or books by Cavalieri himself Berkeley may have actually been acquainted. It was common, that the publishers of the "Philosophical Commentaries" - and I have to include myself - made a reference to Cavalieri's most famous book, namely to the "Geometria", which appeared in a first edition 1635 and in a second one 1653. I have some reasonable doubts that Berkeley did not use these or any other of Cavalieri's works.[7] Writing about indivisibles in his "Philosophical Commentaries" Berkeley mentioned Newton and Barrow, but the corresponding section in Newton's "Principia mathematica" does not contain any reference to Cavalieri.[8] Indeed Berkeley quotes explicitly Barrow's "Mathematicae lectiones" in the "Philosophical Commentaries" (No. 462).[9] Though we can be sure that Berkeley used Barrow's book, Cavalieri's method is not explained there in such a way that the reader could get an adequate idea thereof. What should he think of Barrow's almost empty sentence that Cavalieri's method is founded on the congruence of geometrical figures? We have to search out another source for Berkeley's knowledge of the Cavalierian method.

---

[5] George Berkeley: Works, ed. A.A. Luce and T. E. Jessop, 1948 ff., I, p. 42.

[6] e.g. Douglas M. Jesseph: Berkeley's Philosophy of Mathematics. Ph.D. Princeton University 1987 (Univ. Microfilm International, Ann Arbor, No. 8705020), p. 115.

[7] One of the minor arguments comes from the fact, that there is no reference to Cavalieri in the catalogue of the Berkeleyan library (René Maheu: Le catalogue de la bibliothèque des Berkeley. In: Revue des sciences humaines, Lille 1929, pp. 180-199).

[8] "Philosophical Commentaries" No. 374 concerns Newton's "Principia mathematica", lib. I, sect. 1 (Opera, ed. S. Horsley, London 1779, Reprint Stuttgart-Bad Cannstatt 1964, II, p. 39 f.

[9] Isaac Barrow: Mathematicae lectiones (1665), London 1684, p. 51.

My statement is, that this origin is a mathematical text of Claude François Milliet Dechales. Before Berkeley made his notes in his "Philosophical Commentaries", he mentioned Dechales's book on the method of indivisibles in the "Micellanea mathematica", where a proposition about a cylinder and a cone both circumscribed to a sphere is demonstrated.[10] Without any doubt Berkeley was really acquainted with Dechales's book, for he quotes correctly the number of the needed proposition. Indeed there is some little difficulty to find out the text quoted by Berkeley, therefore Berkeley's editor Luce omitted to give any footnote concerning Dechales.[11] A separate publication of Dechales's work on indivisibles does not exist. It is a part of the voluminous book entiteled "Cursus seu mundus mathematicus", but the section on indivisibles is contained in the first edition only. It appeared at Lyon 1674. Neither Moritz Cantor not William Schaaf, the author of the article "Dechales" in the Dictionary of Scientific Biography, mentioned this variance. Cantor used the first edition, and Schaaf the scond edition, but neither of the two were aware of the difference between these editions, although it characterizes a noteworthy change in the history of mathematics. In the first edition the section on indivisibles and a section of algebra are added at the end of the last volume. Obviously the author intended to take in consideration the "modern" tendencies in mathematics. This may be concluded by the fact, that in the second edition, provided by Amati Varcin in 1690, the algebra has its place more ahead, where it should be under a systematical point of view, but the method of indivisibles disappeared totally. For in the meantime the method of indivisibles was considered to be obsolete, because Newton's theory of fluxions and the Leibnizian differential calculus initiated an alteration of the mathematical analysis.

Enrico Giusti, who published a reprint of Cavalieri's "Exercitationes geometricae"[12], wrote correctly: the history of the indivisibles is not yet composed. Such a history should not plainly dismiss Dechales as an "obscure" author, as even Giusti does, for Dechales is not repeating only Cavalierian ideas, but he offers a rather original interpretation thereof. Dechales' fictionalistic reading may have the greatest importance with regard to its effect on Berkeley. When Cavalieri published his new method of indivisibles for the first time, the concepts of the indivisible, of the point, of the atom etc. were quite controversial ideas. Sometimes the philological realtionships of such words cover the differences of their contents. Whereas Cavalieri's indivisibles are nothing else than the geometrical figures limiting the continous

[10] This proposition was alreaddy demonstrated by André Tacquet, but Berkeley maintains to have invented it independently.
[11] George Berkeley: Works, l.c., IV p. 213.
[12] Bologna 1647, Reprint Bologna, Introdution by Enrico Giusti.

BREIDERT

figure of a higher dimension and the indivisible of a line, i.e. a point, does not have any extension, and whereas other mathematicians[13] tried to demonstrate that a point does not have any extension at all, Dechales took quite another view. He held, that any arbitrary extension could be considered "as a point". But during the same reasoning we should pay attention to handle it as an indivisible and to admit no extension less than the assumed minimal one. If it were needed one could use another extension, which is less than the first minimal extension, for the aim of another demonstration. By this idea Dechales leaves the known Aristotelian way of thinking, according to which a point could never be divided, whereas all the other extensions were divisible in infinitum. Dechales accepted the infinite divisibility also, but he founded it upon the possibility to take even a 'point', i.e. a thing hitherto (!) considered as indivisible, in the next step of reasoning as a divisible thing. This fictionalistic attitude is not like to Hilbert's formalistic view, for Dechales starts from an empirical and intuitive base, which he changes, if it is needed by the geometrical reasoning, whereas Hilbert uses arbitrary objects as points applying formal systems to them. Berkeley may have been impressed by Dechales's doctrine and its relationship to empirical intuition, for it is similar to Berkeley's doctrine of the infinite divisibility by successive representation of indivisibles by divisible extensions, which we find in the "Philosophical Commentaries".

The Cavalierian method of indivisibles is interpreted by Dechales in the commonly used careless way. He desregards Cavalieri's caution with regard to the composition of the continuum. Dechales identifies the geometrical figure with "all of its elements (or members)". He writes explicitely, that the hemisphere "consists" of hemispherical shells around one centre, and that a cone could be "resolved" in circular surfaces.[14] Cavalieri did not use such expressions. He observed accurately the difference between the geometrical figure and the totality of its indivisibles resulting as surfaces of cut, if a cutting plane is moved parallel to itself through the figure.

Cavalieri characterizes distinctly the indivisibles considered by him: 1) They are equidistant to each other. 2) They are produced by an equidistant flux of the cutting plane. 3) The surfaces of the cut are plane themselves. 4) The indivisibles are to be taken according to one "regula" only, i.e. between two planes, which are tangents of the figure. 5) The surfaces of cut (i.e. the indivisibles) should be in pairs ("ad invicem") congruent (in the case of planes) or similar (in the case of bodies).

[13] e.g. Jacques du Chevreul (Capreolus): De demonstratione magnitudinis in puncto quaestio singularis, s.l., s.a. (1636).

[14] Dechales: Cursus ... 1674, t. III, p. 766, 771, 779.

Many critics imputed to Cavalieri, that he would compose the continuum by an application of indivisibles. For instance[15]: "Most of the 'Mathematicians' relied on the concept of mathematical point, and, accordingly, assumed that lines 'are divisible *ad infinitum*' (cf. Phil. Com. 393-4), i.e. do not consist of indivisible units. Cavalieri, on the other hand, endorsed a partly finitist view." And in the same book at an other place[16]: "...according to Cavalieri, any given line may be, and indeed, is [!], composed of an infinite number of indivisible material [!] parts, whereas Berkeley maintains that no finite line may include an infinite number of 'sensible atoms'."

Some historians of mathematics remarked, that in fact Cavalieri used the expression "omnes lineae" (i.e. "all lines"), but that he did not consider them as a single sum of all lines.[17]

How limited the accordance between Berkeley's views and Cavalieri's original attitude is, may be seen by the fact, that Berkeley does not consider the geometrical figures as continuous, and that he means by "continuity" nothing but the divisibility with the help of the sucessive representability substituting the minor extension by the larger one for further divisibility. Strictly speaking it is not a "further" division, for the extension devided in such a way is not quite identical with the original one, because the first extension is substituted by the second, but not "enlarged" properly speaking. Berkeley's view is essentially finitistic and therefore totally different from the Cavalierian conception. -

Searching for information on Berkeley's connections to mathematics one may discover a strange entry in the catalogue of his library[18]: "Mattia Metodo Geometrico. Anvers 1715." One may look into the dictionaries and the catalogues of the big libraries, but there is no author named "Mattia", who could be concerned, neither spelled with one "t" nor with double "t" nor among another spelling. In the publications on Berkeley and mathematics there is not included any faint advice concerning this entry. Since it seemed to me improbable, that a book of mathematical content would be incorporated into the Berkeleyan library by the bishop's son or by his grandson during a later time, I was very interested to find out this book. After all I succeeded. The surprising solution of the problem is: "Mattia" is the second part of the first name only. Indeed that entry concerns Paolo Mattia Doria.

---

[15] Gabriel Moked: Particles and Ideas: Bishop Berkeley's Corpuscularian Philosophy. Oxford 1988, p. 210, n. 11.

[16] l.c., p. 137.

[17] Kirsti M. Pedersen (= Andersen): Techniques of the Calculus, 1630-1660. In: From the Calculus to Set Theory 1630-1910, ed. I. Grattan-Guinness, London 1980, pp. 32-36. - Kirsti Andersen: Cavalieri's Method of Indivisibles, Aarhus Universitet 1983, p. 19, 27, 115.

[18] René Maheu, l.c., no. 198.

BREIDERT

He was a member of a very famous Italian family. Born at Genoa in 1661, he resided as a universal learned man at Naples, where he died in 1746. Doria was a friend of Giovanni Battista Vico and of other scholars. When Shaftesbury visited Naples in 1711, Doria met him also.[19] Above all he was a pedagogue, a poet, and a philosopher. He published a book on morals together with a treatise on education of princes in 1710.[20] It is written in a platonistic and anti-materialistic attitude. In other works Doria attacked Descartes's mechanistic natural philosophy and Locke's sensualism.[21]

Doria seems to have been a very learned man, but he was also a very proud and obstinate person. He considered himself to be a great mathematician. Therefore during many years he tried repeatedly to solve the most famous mathematical problems: 1) the quadrature of the circle, 2) the doubling of the cube, and 3) the trisection of the angle. Nowadays we know that these problems are insoluble, but in the first half of the eighteenth century it was not absolutely unreasonable to attempt a search for their solutions. Doria did not publish his treatise on the quadrature of the circle. Perhaps he was aware that it was too hot a problem, but his "Duplicazione del cubo" appeared at Naples in 1714, and his "Soluzione del problema della trisezione dell' angolo" at Venice in 1735. These mathematical works of Doria excited some attention among the scientific community of his time. This attention was intensified, when Doria sked the Royal Society of London for a critical examination of his doubling the cube, but he could not get any judgment, because such a decision would be out of the formal competence of the Royal Society.

In 1715 Doria published the book which we find in the Berkeleyan library: "Nuovo metodo geometrico per trovare fra due linee rette date infinite medie continue proporzionali". It was printed at Antwerp 1715. In fact this was the second and changed edition, because the first appeared "Augustae apud Danielem Hopper" in 1714, as is indicated in the review inserted in the "Acta Eruditorum" (May 1717, pp. 226-231). In this review Doria's presumption and national pride is reproved, and his praise of Cavalieri's method of indivisibles is critizised from a more modern Leibnizian point of view. Indeed Doria's "nuovo metodo" comes to a simple method of approximation only, and the first edition caused some critical comments by some less famous Italian mathematicians (e.g. Augustinus Arrianus, Nicolaus Galizia, Bartholomaeus

[19] Benjamin Rand [Ed.]: The Life, Unpublished Letters, and Philosophical Regimen of Anthony, Earl of Shaftesbury. London 1900, Reprint 1992, p. 497 (Letter, June 28th 1712, To Thomas Micklethwayte).
[20] Della vita civile / Dell' educatione del principe. Naples 1710.
[21] Discorsi critici filosofici, 1724. Filosofia di Paolo Mattia Doria, con la quale si chiarisce quella di Platone, Naples 1728. Difesa della metafisica degli antichi filosofi contro il Segnor G. Locke ed alcuni altri moderni autori, Venice 1732/33.

Intieri). The objection delivered by Nicolaus Galizia is part of Doria's "Opere matematiche" (1722), to which is added a refutation by Doria himself.

Since it seems that Doria was a fighting spirit defending especially the philosophy of Plato and the mathematics of Euclid against the British sensualism and the modern mathematical calculus, he should have had an ambiguous attitude to Berkeley. Benedetto Croce writes in his chapter on Shaftesbury in Italy[22]: "Doria entrò in un gran battagliare contro Locke, Berkeley e Newton, non meno che contro Descartes, Spinoza e Bayle." But what about mathematics? In spite of the fact that Doria entitled his mentioned paper by "new geometrical method", nevertheless he complains about the frequent use of analytical instead of synthetical methods in contemporary mathematics. Doria's conception of mathematics has some similarities to Berkeley's. Even if both scholars differed in many points, they had in common the rejection of some very new tendencies in mathematics. It is true that Doria defended the method of indivisibles delivered by Cavalieri - who was an Italian as he points out - against the modern Leibnizian calculus, whereas Berkeley thought about replacing Cavalieri's method by a finite method of indivisibles, which would be a totally different conception indeed.

We do not know, how Doria's book was incorporated into the Berkeleyan library, whether it was a present by Doria himself or puchased by Berkeley, and to all appearances he did not make any intensive use of it.

[22] Benedetto Croce: Uomini e cose della vecchia italia, Ser. I, Bari 1927 (= Scritti di storia letteraria e politica XX), p. 281.

TOBIES

Wechsel der Berufskarriere: Zur Tätigkeit von Mathematiker/innen in der Luftfahrtforschung

Renate Tobies, Kaiserslautern

Der Aufsatz basiert auf der Analyse von Berufsverläufen von Mathematikerinnen und Mathematikern, die im Zeitraum von WS 1907/08 bis WS 1944/45 an deutschen Hochschuleinrichtungen promovierten. Die Untersuchung ist Bestandteil eines von der Volkswagenstiftung geförderten Projekts.[1] Nachdem die Namen der Promovierenden und deren Dissertationen erfasst und zugeordnet sind (vgl. Tobies/Görgen 2001), ist es möglich, deren weiteren Berufsweg zu erforschen. Im Untersuchungszeitraum promovierten mehr als 1300 Personen mit einer mathematischen Dissertation, darunter 8,5% Frauen. Unser Material wurde hinsichtlich des Tagungsthemas nach Personen durchgesehen, die auch nach ihrer mathematischen Dissertation weiter forschend tätig waren und die ihr Forschungsgebiet wechselten. Dabei war auffallend, dass besonders in den 1930er Jahren mehrere in Mathematik promovierte Personen eine Tätigkeit in der Luftfahrtforschung aufnahmen. Im folgenden möchte ich auf drei Aspekte eingehen:

- Woraus resultierte das bevorzugte Hinwenden zur Luftfahrtforschung?
- In welchen Gebieten waren die in die Luftfahrtforschung wechselnden Personen zuvor tätig?
- In welchem Maße waren Frauen daran beteiligt?

1 Ursachen für das Hinwenden von Mathematiker/innen zur Luftfahrtforschung

Aerodynamik, als umfassendes Gebiet der Strömungslehre, entwickelte sich seit Beginn des 20. Jahrhunderts. Dabei ging es zunächst um die Möglichkeit des Fliegens überhaupt und nicht um die militärische Brisanz, die das Thema später gewann (vgl. hierzu Runge 1949, S.135ff.). Nach Felix Kleins (1849-1925) Urteil hatte Hermann Helmholtz (1821-1894) die Möglichkeit des mechanischen Fluges gering geschätzt und damit die frühe Entwicklung der "Fliegerkunst" in Deutschland gebremst (vgl. Klein 1926, S.230). Nachdem sich Klein selbst in Vorlesungen und Seminaren mit internationalen Ergebnissen der theoretischen und technischen Hydrodynamik befasst hatte, suchte er gemeinsam mit Ludwig Prandtl (1875-1953), Carl Runge (1856-1927) und Emil Wiechert (1861-1928) Forschungen in dieser Richtung zu fördern. Aufzeichnungen im Nachlass Kleins lassen erkennen, dass er bereits 1901 den Ingenieur Ludwig Prandtl für einen Ruf nach Göttingen im Auge hatte[2], der 1904 seine berühmte Arbeit über die Grenzschichttheorie vorlegte und im gleichen Jahr ein Extraordinariat für angewandte Mechanik in Göttingen erhielt. Vor allem unter Prandtl entwickelte sich das Gebiet maßgeblich (vgl. u.a. Meier 2000; Tollmien 1987). Der institutionelle Ausbau erfolgte in Göttingen sowie national und international von Göttingen aus besonders intensiv. Die Bibliographie der Veröffentlichungen über Hydro- und Aerodynamik der Modellversuchs-

[1] Das interdisziplinäre VW-Projekt "Frauen in der Mathematik. Determinanten von Berufsverläufen in der Mathematik unter geschlechtsvergleichender Perspektive" wird in Kaiserslautern (mathematikhistorische Perspektive) und in Erlangen (sozialpsychologische Perspektive) durchgeführt.

[2] Klein schrieb am 1. August 1901 an Ministerialdirektor Naumann im preußischen Kultusministerium: "Allem in Allem, - ich würde Dr. Prandtl nehmen. Er hat Talent, gute Vorbildung und glänzende Anfangsleistungen und das ist bei dem augenblicklichen Mangel an sonstigen geeigneten Ingenieuren und im Hinblicke darauf, dass sich das Fach der technischen Mechanik in einem Uebergangsstadium befindet, ausserordentlich viel." (UBG Cod. Ms Klein I D, Bl. 16).

anstalt (1907-1919), der Aerodynamischen Versuchsanstalt (1919-1959), des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung (1925-1945) zeigt, welche Institutionen in Göttingen entstanden und vermittelt auch einen Überblick über die dort behandelten Forschungsthemen (vgl. Bibliographie 1960). Dabei sei hervorgehoben, dass sich die Forschungsmethoden in der Aerodynamik durch ein enges Verknüpfen von theoretischen Berechnungen, Modellversuchen und Untersuchungen während des Fluges auszeichnen. Für die theoretischen Berechnungen waren gut ausgebildete Mathematiker erforderlich. Prandtl betonte die enge Bindung zur Mathematik in Göttingen – hielt u.a. gemeinsame Seminare mit Felix Klein ab – und stand in engem Kontakt mit dem Mathematiker Richard von Mises (1883-1953), der 1921 die "Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" (ZAMM) gründete, die ein Jahr später zum Organ der von Prandtl, von Mises und Hans Reißner (1874-1967)[3] initiierten Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) wurde. Von Mises hob im Eröffnungsbeitrag der ZAMM u.a. als einen Schwerpunkt die Theorie der Luftströmung in der Umgebung eines bewegten Tragflügels hervor (v. Mises 1921, S.12), ließ Erich Trefftz (1888-1937) über die Prandtlschen Ergebnisse zu diesem Thema ein Referat schreiben (Trefftz 1921) und publizierte als ersten „Hauptaufsatz" eine Arbeit von Prandtl (1921). Die quantitative Zunahme der Arbeiten zur Strömungsforschung dokumentiert bereits eine ältere Analyse des Inhalts der ZAMM (vgl. Tobies 1982). Entsprechende Arbeiten wurden auch über den Fachausschuss Mathematik der 1920 gegründeten Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaften (spätere DFG) gefördert (vgl. Tobies 1981).

Die Forcierung der Luftfahrtforschung ab 1933 mit Blick auf die Luftwaffe und ihre Ausrüstung für einen Krieg wurde inzwischen mehrfach beschrieben (vgl. Tollmien 1987; Trischler 1992; Kohl 2002, S.143f.). Die entsprechenden Forschungseinrichtungen wurden ausgebaut, neue sog. „Reichsforschungsanstalten für Luftfahrt" entstanden; daneben vergrößerte sich die Luftfahrtindustrie in ungeheurem Ausmaß, ihre Produktion 1933 verzehnfachte sich im Vergleich zu 1932 und von 1933 bis 1939 wuchs sie noch einmal um einen Faktor von 20.

Damit einher ging eine Erweiterung des Personalbestandes. Göring behauptete 1938 in einer Rede vor der 1937 gegründeten Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung, dass er das Personal der gesamten Luftfahrtforschung gegenüber dem Zeitpunkt der „Machtergreifung" um mehr als verzehnfacht habe. Für die in Göttingen seit 1917 bestehende „Aerodynamische Versuchsanstalt in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft" (AVA) ist dieses Wachstum des Personalbestandes konkret nachgewiesen (Tollmien 1987, S.468f.). Daneben wurde die seit 1912 bestehende „Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt" in Berlin–Adlershof erweitert sowie weitere Reichsforschungsanstalten für Luftfahrtforschung gefördert: die Deutschen Forschungsanstalten für Luftfahrt in Braunschweig und in Stuttgart, das Deutsche Forschungsinstitut für Segelflug in Darmstadt und die Forschungsanstalt „Graf Zeppelin" in Friedrichshafen.

Diese Einrichtungen gehörten zu denjenigen, die 1939 zur sog. Bedarfsstelle 1. Ordnung erklärt wurden, womit erreicht werden konnte, dass zahlreiche hier beschäftigte Wissenschaftler eine sog. UK-Stellung erhielten. In der Luftfahrtforschung und -industrie, die ebenfalls einen erhöhten Personalbedarf hatte, konnten auch Wissenschaftler eine Position erhalten, die durch die NS-Politik aus staatlichen Positionen herausgedrängt wurden.[4] Für die Universitäten wurden weitaus geringere Mittel bereitgestellt. Assistentenstellen an Universitäten waren knapp und wurden z.T. reduziert. Ernst Hölder (1901-1990) gab beispielsweise an, dass ihm die Assistentenstelle an der Universität Leipzig, die er seit seiner Promotion und Staatsexamen 1926 inne hatte (Habilitation und PD 1929), im Jahre 1939 von der national-

---

[3] v. Mises und Reißner emigrierten schließlich in die USA, um vor der nazistischen Rassepolitik Zuflucht zu suchen. Vgl. hierzu auch (Siegmund-Schultze 1998).

[4] Vgl. hierzu die Lebenswege der sog. Halbjuden (nach NS-Definition) Richard Fuchs (1873-1945) und Kurt Hohenemser (1906-2001), siehe (Rammer 2002).

sozialistischen Sächsischen Landesregierung gekündigt worden war und er somit von 1939 bis 1945 als Mitarbeiter an die Deutsche Luftfahrt-Forschungsanstalt in Braunschweig ging (vgl. Toepell 1991, S.166).

Durch die Luftfahrtforschung ergaben sich neue Berufswege bzw. zeitlich begrenzte Nischen auch für Mathematiker/innen.

2 Promovierte Mathematiker/innen in der Luftfahrtforschung

Von den promovierten deutschen Mathematiker/innen es Untersuchungszeitraumes, die Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung waren (ca. 430), übten ca. 10% mindestens eine Zeit lang eine Tätigkeit in der Luftfahrtforschung aus. Nach den eigenen biografischen Angaben (vgl. Toepell 1991) waren 15 Personen in der Luftfahrtforschungsanstalt Braunschweig angestellt, elf an der Deutschen Versuchsanstalt Berlin-Adlershof, zehn in der Aerodynamischen Versuchsanstalt und/bzw. im Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen. Einzelne Personen gaben eine Tätigkeit in der Forschungsanstalt Graf Zeppelin (Meyer-König), im Flugtechnischen Institut Stuttgart (Zoller), in der Deutschen Versuchsanstalt für Segelflug (F. Schmidt), in der Heeresversuchsanstalt Peenemünde (Eichler) an. Weitere Personen waren in der Flugzeugindustrie tätig. Wilhelm Cauer (1900-1945), der bei Georg Hamel (1877-1954) 1926 an der TH Berlin promoviert und bei Richard Courant in Göttingen sich 1931 habilitiert hatte, arbeitete 1935/36 bei den Fieseler Flugzeugwerken in Kassel, bevor er seine wissenschaftliche Karriere an der TH Berlin fortsetzen konnte. Johannes Dörr (geb. 1912), der 1942 bei Alwin Walther (1898-1967) und Lothar Collatz (1910-1990) an der TH Darmstadt promoviert hatte, arbeitete von 1939 bis 1945 bei den Junkers Flugzeugwerken in Dessau, wurde später Professor für angewandte Mathematik in Saarbrücken. Auch bei der Messerschmidt A.G. Augsburg waren mehrere Mathematiker angestellt. Friedrich Ringleb (1900-?), der 1926 bei Robert Haussner (1863-1948) in Jena mit der Dissertation „Über die konforme Abbildung von Polygonen" promoviert hatte, leitete dort von 1939 bis 1943 die Theoretische Aerodynamische Abteilung, bevor er 1943/45 in Wien in der Luftfahrtforschung tätig war und ab 1946 entsprechende Forschungen in den USA fortsetzte. Bei Messerschmidt wirkte auch Max Pinl (1897-1978) von 1940 bis 1943, bevor er 1943/45 an die Luftfahrtforschungsanstalt in Braunschweig wechselte.

Nur wenige der in der Luftfahrtforschung dieser Jahre tätigen Mathematiker hatten sich bereits in ihrer Dissertation einem anwendungsbezogenen Thema gewidmet, obgleich insgesamt der Anteil entsprechender Arbeiten gewachsen war. Im Zeitraum von WS 1907/08 bis WS 1944/45 promovierten 11,3% der Frauen und 19,9% der Männer (19,9%) mit einer anwendungsorientierten Arbeit, mit wachsender Tendenz in den späteren Jahren (vgl. Tobies/Görgen 2001). Der Anteil entsprechender Dissertationen betrug von 1907 bis 1914 14,9% und in den Jahren von 1935 bis 1945 25,7%.

In unserer Datenbank sind nur wenige Personen enthalten, die ein aerodynamisches Thema bearbeiteten: Hans Ebner (TH Berlin 1929), Hans Simon (TH Berlin 1938), Fritz Höhndorf (Universität Berlin 1926), Hilde Heinicke geb. Karselt (Univerität Berlin), Wilhelm Kinner (Universität Göttingen 1937), Rudolf Glaser (TH Breslau 1940). Diese Personen waren nicht Mitglied der DMV und eine weitere Tätigkeit in der Luftfahrtforschung konnte bisher nicht nachgewiesen werden. Hilde Heinicke, die ihre Dissertation zum Thema „Ebene Flugbahnen starrer Körper" unter Richard von Mises geschrieben hatte, war zum Zeitpunkt der Promotion bereits verheiratet. Sie arbeitete eine Zeit lang als Lehrerin, und setzte ihre Forschungen in diesem Gebiet nicht fort.

Die Mathematiker/innen, die schließlich nach der Promotion den Weg in die Luftfahrtforschung gingen bzw. zeitweise dort tätig waren, hatten mehrheitlich zuvor auf anderen

Gebieten geforscht und ihr Forschungsfeld gewechselt, um eine gesicherte berufliche Position zu erhalten.

Nur eine kleine Gruppe hatte sich in der Dissertation mit einem anwendungsbezogenen Thema, vorwiegend theoretische Anwendungen (in der Physik, Astronomie) befasst. Dazu gehörten die erwähnten W. Cauer, J. Dörr und E. Hölder sowie Arnold Fricke (1913-1986), Karl Maruhn (1904-1976), Hans Herbert Schubert (geb. 1908) und Irmgard Flügge-Lotz (1903-1974)[5].

Die weiteren – uns bisher bekannten – Personen wechselten von der Algebra (8), Analysis (8), Geometrie (8), Topologie (3) und Zahlentheorie (1) zur Aerodynamik.

Nach dem verlorenen Zweiten Weltkrieg wurden die maßgeblich der Rüstungsforschung dienenden Einrichtungen zunächst geschlossen. Damit trat für die meisten hier beschäftigten Personen, vor allem auch für die Mathematiker, ein erneuter Wandel (es war meist weniger als ein gravierender Bruch) im Berufsweg ein. Von den promovierten DMV-Mitgliedern, die in der Luftfahrtforschung tätig waren, wurden später ca. 80% Professoren, 32 in Deutschland, einer ab 1943 und einer ab 1946 in den USA. Dabei widmeten sich einige weiterhin anwendungsorientierten Forschungen, andere griffen auf ihr früheres Forschungsfeld zurück. Hierzu fehlt noch eine genauere Analyse.

Diejenigen, die sofort weiter in der Luftfahrtforschung tätig sein wollten, konnten dies meist nur im Ausland unmittelbar fortsetzen. Nach 1945 waren elf Personen zeitweilig im Ausland in der Luftfahrtforschung tätig, sechs in den USA, zwei in Großbritannien, zwei in Frankreich, einer in der Sowjetunion. Zum Beispiel gehörte Martin Eichler (geb. 1912), der mit einer algebraischen Arbeit bei Heinrich Brandt (1886-1954) in Halle promoviert hatte und von 1940 bis 1945 Mitarbeiter der Heeresversuchsanstalt in Peenemünde war, von 1947 bis 1949 zum Royal Aircraft Establishment Farnborough (England), bevor er in Deutschland und 1958 in Basel eine Professur erhielt.

Zu den im Ausland weiter mit aerodynamischen Forschungen befassten Personen gehören auch die beiden promovierten Mathematikerinnen, die in diesem Gebiet maßgebliche Forschungsergebnisse erzielten. Während über die bereits erwähnte Irmgard Flügge-Lotz, die seit 1928 Mitglied der DMV war und auch im Poggendorff nachgewiesen ist, bereits mehrfach geforscht wurde (vgl. auch Vogt 1999, S.86f.; Vogt 2000), ist bisher über den Weg der zweiten Wissenschaftlerin in diesem Gebiet nichts bekannt. Deshalb soll sie im nachfolgenden Abschnitt näher vorgestellt werden.

3 Ingeborg Ginzel – Expertin für Tragflügel-Design

Ingeborg Ginzel (1904-1966) hatte an der TH Dresden auf dem Gebiet der Analysis promoviert und war danach lebenslang in der Luftfahrtforschung tätig. Obwohl sie viele Publikationen vorlegte, ist sie bisher in keinem Nachschlagewerk, auch nicht im Poggendorff, zu finden. Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung war sie nicht. Bereits im Rahmen der Untersuchungen der bis 1933 promovierten Mathematikerinnen (Tobies 1997) war ihr Berufsverlauf erkannt worden. Nachforschungen hatten einiges Material von Verwandten gebracht, das eine Tätigkeit am Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen erhellte, die inzwischen auch von Epple/Remmert (2000) nachgewiesen wurde.

Ingeborg Ginzel wurde am 28. Oktober 1904 als Tochter des Juristen, späteren Landgerichtsdirektors, Dr. Alexander Ginzel und seiner Frau Gertrud Ginzel, geb. Ritzscher (1874-1960) in Dresden geboren. Sie war das älteste Kind und hatte zwei jüngere Brüder: Gerhart

[5] Sie absolvierte 1927 an der TH Hannover die Diplom-Hauptprüfung in Mathematik, war dort von 1927 bis 1929 Assistentin am Lehrstuhl für praktische Mathematik und darstellende Geometrie und promovierte mit dem Thema „Die Erwärmung des Stempels beim Stauchvorgang“ 1929 bei den Mathematikern Georg Prange (1885-1941) und Horst von Sanden (1883-1965).

Ginzel (geb. am 26.10.1906) wurde Diplomingenieur für Maschinenbau, Reinhart Ginzel (geb. am 27.3.1911) Kirchenmusiker und Komponist.[6] In der Schule hatte Ingeborg Ginzel – bis auf den Sportunterricht – regelmäßig sehr gute Noten. Nach Erwerb des Abiturs an der realgymnasialen Studienanstalt Ostern 1924 setzte sie das Mathematikstudium nur gegen den Willen ihres Vaters durch, wie ihre Verwandten berichteten. Sie studierte ab SS 1924 an der TH Dresden, d.h. am Heimatort – der Vater holte sie regelmäßig von den Vorlesungen ab. Ein Semester lang, im SS 1926, besuchte sie die Universität Tübingen. Das Studium an der TH Dresden beendete sie am 13. Juni 1929 mit dem Lehramtsstaatsexamen in den Fächern reine und angewandte Mathematik sowie Physik. Seit 1927 arbeitete sie unter Paul Eugen Böhmer (1877-1958) an einer Dissertation, die sie im Juni 1930 einreichte und die mit einem Begleitwort ihres Doktorvaters in der international bedeutenden Zeitschrift „Acta Mathematica" erschien (vgl. Ginzel 1931). Bereits 1932 publizierte sie eine weitere Arbeit (Ginzel 1932), in den „Berichten der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig". Die Arbeit war von ihrem Doktorvater angeregt worden, wurde aber von Gerhard Kowalewski (1876-1950) eingereicht, der Mitglied dieser Akademie war. Es war bei den promovierten Mathematikerinnen dieser Zeit selten, dass unmittelbar nach der Dissertation eine weitere wissenschaftliche Arbeit vorgelegt wurde. Ingeborg Ginzel hatte nach ihrem Lehramts-Staatsexamen auch den Weg in der Schule weiter verfolgt. Zum Zeitpunkt des Einreichens der Dissertation war sie Studienreferendarin und 1934 wurde sie im sächsischen Lehrerkalender als „nichtplanmäßige Lehrerin, Assessorin im unterrichtlichen Zusammenhang an der Staatlichen Höheren Mädchenbildungsanstalt Dresden (Marschnerstr.8-10) geführt (Morgenstern 1934, S.31). Es war jedoch schwer, zu diesem Zeitpunkt eine feste Anstellung im Schuldienst zu erhalten. Unsere Analyse von 3040 Lebenswegen preußischer Mathematik-Lehrer/innen ergab, dass in den Jahren 1932 bis 1936 keine Frau mit Hauptfach Mathematik eingestellt wurde und auch die Zahl der neu angestellten Männer von 1932 bis 1934 gering war (Tobies 2002). Deshalb suchten viele der promovierten Mathematiker/innen nach Alternativen zu diesem zuvor dominanten Karriereweg und fanden diese u.a. in der Luftfahrtforschung.

Ingeborg Ginzel hatte mit ihrer Dissertation ein Thema bearbeitet, das zur Theorie der konformen Abbildungen gehörte. Die Arbeit erlangte durch ihre Publikation in der international bedeutenden Zeitschrift „Acta Mathematica" große Aufmerksamkeit. Die umfangreiche Arbeit erschien mit einem Geleitwort ihres Doktorvaters Böhmer.

Wie Epple/Remmert (2000) inzwischen ausführlich darlegten, hatte das Gebiet der konformen Abbildungen in der Aerodynamik ein wichtiges Anwendungsfeld. Daraus erklärt sich, dass sie ca. 1935 – nach einer kurzen Tätigkeit im sächsischen höheren Schuldienst – als Mitarbeiterin an das seit 1925 bestehende Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen gelangte: "Dr. Ginzel remained in Göttingen throughout World War II, working on wing and propeller theory and writing papers on her work." (Dobbin 1958) Sie publizierte in Göttingen zehn wissenschaftliche Arbeite in den Jahren von 1938 bis 1949 (vgl. Bibliografie), darunter eine Gemeinschaftsarbeit mit Irmgard Flügge-Lotz (Ginzel/Flügge-Lotz 1939 und 1940) sowie eine gemeinsame Arbeit mit Hubert Ludwieg (1944).

Nach 1945 gehörte Ingeborg Ginzel zu dem Teil der Mitarbeiter der Aerodynamischen Versuchsanstalt und des Instituts für Strömungsforschung in Göttingen, die die Ergebnisse der deutschen Luftfahrtforschung von 1939 bis 1945 zusammenstellten. Damit entstanden die von Albert Betz redigierten „Monographien über Fortschritte der deutschen Luftfahrtforschung seit 1939", die auf 7000 Manuskriptseiten Beiträge von 72 Mitarbeitern enthielten (vgl. Tollmien 1987, S.480). Ginzel schrieb den Band „Theorie des räumlichen Tragflügels" (Ginzel 1946) Das Flugzeug später oft für Reisen nutzend, erklärte sie rückblickend: "It reminds me

[6] Vgl. hier und im folgenden: Mitteilung an die Autorin von Frau Miriam Friedegard Schaub, geb. Ginzel (Rotenburg), vom 18.7.1996, für die herzlich gedankt sei.

of my first assignment in theoretical aerodynamics in Germany which was the study of the airflow around the aircraft wing the flap open." (Dobbin 1958)

Das Institut für Strömungsforschung, nun Max-Planck-Institut, war zwar am 1. August 1946 wieder eröffnet wurden, die Aerodynamische Versuchanstalt – vornehmlich als Rüstungsbetrieb eingestuft – blieb bis 1953 noch geschlossen. Ein großer Teil der ehemaligen Mitarbeiter/innen ging – z.T. vorübergehend – ins Ausland. Ingeborg Ginzel nahm im Jahre 1949 ein Job-Angebot des Admiralty Research Laboratory in Teddington, nahe London, an und wechselte vier Jahre später zur Martin Company nach Baltimore, USA, wo sie als senior engineer in das "Flight vehicles research department" eintrat, sich als einzige Frau unter Männern behauptete und eine der wenigen Spezialisten für "wing design" wurde. Sie war sich ihrer Sonderrolle bewusst und äußerte: "A woman can find fulfillment in the use of her brains and in her work, just as a man can." (Dobbin 1958) In ihren späteren Jahren kehrte sie nach London zurück, wandte sich den Quäkern zu und starb dort als unverheiratete Frau am 14. November 1966.

Bibliografie

UBG. Handschriftenabteilung der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms Felix Klein.

Bibliographie der Veröffentlichungen über Hydro- und Aerodynamik der Modellversuchsanstalt (1907-1919), der Aerodynamischen Versuchsanstalt (1919-1959), des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung (1925-1945), des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung (1946-1959) (Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, 25). Göttingen 1960.

Bibliographie der Veröffentlichungen über Hydro- und Aerodynamik der Aerodynamischen Versuchsanstalt und des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung 1960-1970, mit einem Nachtrag zu Bibliographie der Veröffentlichungen 1907-1959 (Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, 50). Göttingen 1971.

Dobbin, Muriel: Woman Wing Designer, in: *The Sun* (Baltimore), July 13, 1958, p. 5.

Epple, Moritz; Remmert, Volker: "Eine ungeahnte Synthese zwischen reiner und angewandter Mathematik". Kriegsrelevante mathematische Forschung in Deutschland während des II. Weltkrieges, in: D. Kaufmann (Hg.), *Geschichte der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft im Nationalsozialismus. Bestandsaufnahme und Perspektiven der Forschung, Bd. 1*. Göttingen 2000, S. 258-295.

Ginzel, Ingeborg: Die konforme Abbildung durch die Gammafunktion, in: *Acta Mathematica*, 56 (1931) S. 273-353.

Ginzel, Ingeborg: Die Gruppe der Inversoren, in: *Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-physische Klasse*, 84 (1932) S. 51-62.

Ginzel, Ingeborg: Krümmungseigenschaften von Profilen, in: *Luftfahrtforschung* 14 (1938) S. 573-576.

Ginzel, Ingeborg: Die Auftriebsverteilung eines tiefen verwundenen Rechteckflügels, in: *Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung* 1940, I, S. 238-244.

Ginzel, Ingeborg: Zur Berechnung von Gegenlaufschrauben. *Deutsche Luftfahrtforschung*, FB 1752 (1943).

Ginzel, Ingeborg: Tragflügeltheorie der Luftschraube im zusammendrückbaren Medium, Unterschallgeschwindigkeit. *Deutsche Luftfahrtforschung*, FB 1915 (1944).

Ginzel, Ingeborg: Zur Berechnung der schräg angeblasenen Schraube, in: *Festschrift zum 60. Geburtstag für Albert Betz*, Göttingen 1945, S. 52-59.

Ginzel, Ingeborg: *Theorie des räumlichen Tragflügels* (Monographien über Fortschritte der deutschen Luftfahrtforschung seit 1939, Bd. F1), Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen 1946.

Ginzel, Ingeborg: Ein Pohlhausen-Verfahren zur Berechnung laminarer kompressibler Grenzschichten. Ein Vortragsauszug, in: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 29 (1949) S. 6-8.

Ginzel, Ingeborg: Ein Pohlhausen-Verfahren zur Berechnung laminarer kompressibler Grenzschichten an einer geheizten Wand, in: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 29 (1949) S. 321-337.

Ginzel, Ingeborg; Flügge-Lotz, Irmgard: Die ebene Strömung um ein geknicktes Profil mit Spalt, in: *Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung* 1939, I, S. 55-66; in: *Ingenieur-Archiv* 11 (1940) S. 268-292.

Ginzel, Ingeborg; Ludwieg, Hubert: Zur Theorie der Breitblattschraube. *Deutsche Luftfahrtforschung*, UM 3097 (1944).

Jentsch, Werner: Auszüge aus einer unveröffentlichen Korrespondenz von Emmy Noether und Hermann Weyl mit Heinrich Brandt, in: *Historia Mathematica* 13 (1986) S. 5-12.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, T. I, Berlin 1926.

Kohl, Ulrike: Die Präsidenten der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft im Nationalsozialismus. Max Planck, Carl Bosch und Albert Vögler zwischen Wissenschaft und Macht (Pallas Athene, 5). Franz Steiner Verlag: Stuttgart 2002

Lotz, Irmgard: *Die Erwärmung des Stempels beim Stauchvorgang*. Dissertation TH Hannover 1929.

Meier, Gerd E. A. (Hg.): *Ludwig Prandtl, ein Führer in der Strömungslehre*. Vieweg Verlag: Braunschweig, Wiesbaden 2000.

Mises, Richard von: Über die Aufgaben und Ziele der angewandten Mathematik, in: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 1 (1921) S. 1-15.

Morgenstern, Richard (Hg.): *Verzeichnis der Lehrer an den höheren Schulen Sachsens*. Stand 1.10.1934. Dresden 1934.

Poggendorff, J.C.: Biographisch-literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften, Bd. VIIb. Akademie-Verlag: Berlin 1970.

Prandtl, Ludwig: Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden, in: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 1 (1921) S. 15-20.

Rammer, Gerhard: Der Aerodynamiker Kurt Hohenemser (Interview), in: NTM-Internationale Zeitschrift für Geschichte und Ethik der Naturwissenschaften, Technik und Medizin, N.S. 10 (2002) S. 78-101.

Runge, Iris: *Carl Runge und sein wissenschaftliches Werk*. Göttingen 1949.

Siegmund-Schultze, Reinhard: Mathematiker auf der Flucht vor Hitler (Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Bd. 10). Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden 1998.

Tobies, Renate: Zur Unterstützung mathematischer Forschungen durch die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft im Zeitraum der Weimarer Republik, in: *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR*, (1981), H. 1, S. 81-99.

Tobies, Renate: Die "Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik" im Gefüge imperialistischer Wissenschaftsorganisation, in: *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin* 19 (1982) 1, S. 16-26.

Tobies, Renate: "Angewandte Mathematik ist schmutzige Mathematik!" Die Rolle von Frauen in diesem Gebiet in den ersten Jahrzehnten unseres Jahrhunderts, in: *Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte*, 18 (1998) S. 15-35.

Tobies, Renate; Görgen, Ulrich: Mathematische Dissertationen an deutschen Hochschuleinrichtungen, WS 1907/08 bis WS 1944/45, in: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 103 (2001) 115-148.

Tobies, Renate: Berufsfelder von Mathematikabsolvierenden zu Beginn des 20. Jahrhunderts in Deutschland, Vergleich von Frauen und Männern, erscheint in: Ariadne, Archiv der deutschen Frauenbewegung, 2002.

Toepell, Michael (Hg.): Mitgliederverzeichnis der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1890-1990, München 1991.

Tollmien, Cordula: Das Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung verbunden mit der Aerodynamischen Versuchsanstalt, in: Becker, H.; H.-J. Dahms; Wegeler, C. (Hg.): Die Universität Göttingen unter dem Nationalsozialismus. K G Saur: München et al. 1987, S. 464-488.

Trefftz, Erich: Prandtlsche Tragflächen- und Propeller-Theorie, in: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 1 (1921) S. 206-218.

Trischler, Helmuth: Luft- und Raumfahrtforschung in Deutschland 1900-1970. Politische Geschichte einer Wissenschaft (Studien zur Geschichte der deutschen Großforschungseinrichtungen, 4). Campus-Verlag: Frankfurt a.M. 1992.

Vogt, Annette: *Wissenschaftlerinnen in Kaiser-Wilhelm-Instituten A-Z* (Veröffentlichungen aus dem Archiv der Max-Planck-Gesellschaft, Bd. 12), Berlin 1999.

Vogt, Annette: Women in Army Research: Ambivalent Careers in Nazi Germany, in: Canel, A; R. Oldenziel; K. Zachmann (eds.), Crossing Boundaries, Building Bridges. Comparing the History of Women Engineers 1870s-1990s (Studies in the history of science, technology and medicine, no. 12), Amsterdam: harwood academic publishers 2000, pp. 189-209.

Anschrift der Autorin

Dr. habil. Renate Tobies
Fraunhoferinstitut für Techno- und Wirtschaftsmathematik
PF 3049
D-67653 Kaiserslautern
e-mail: tobies@mathematik.uni-kl.de

MIHAILO PETROVIC ALAS (*1868 - + 1943)

SOMETHING MORE ABOUT MICHAEL PETROVICH ALAS

By: Jasna Fempl-Madjarevic

"The violin and my fish add to my affection to mathematics"

In late 19th and early 20th century, Mihailo Petrovic exerted a crucial influence on the history of the Serbian people in the Balkans (South-East Europe) in the areas of science and culture, in particular in the field of mathematics, at that time almost non-existent at the Belgrade University founded only in 1838, as successor of the earlier "Superior" School. Mihailo Petrovic exerted the deepest influence on mathematicians of the time and on the development of mathematical sciences with the Serbs. His work marked a turnaround in the development of mathematical disciplines. His educational background (at the Ecole Normal Superieure, where he was awarded PH.D. degree as the first foreigner ever earning this academic title) and his doctoral dissertation (Sur les zéros et les infines des intégrales des équations différentielles algébriques) gave him an enormous authority which helped him to radically reform the education plan and programme and make it come close to those prevailing in Germany and specially in France.

FEMPL

Mihajlo Petrovic was born in Belgrade on 24 April 1868 as the first out of five children of the Orthodox priest and his housewife. He spent his childhood and school days in Belgrade in company with his brothers and a sister, as well as with a number of friends who will later become the leading personalities in their respective professions. Raised in the priest's family, Petrovich was a quiet and shy person. In June 1885 he graduated from the only Grammar School in Belgrade founded one century earlier by the Jesuits. His behavior in school was exemplary, and he belonged to those pupils who showed particular success in the subjects they were interested in. As early as in the 4th grade of the Grammar School (1882), he set up a chemical laboratory at his home, made some unusual experiments and even read "Vurtz" chemistry in original, as well as some textbooks of the students of the Belgrade Superior School, a predecessor of Belgrade University. It was precisely the affection for chemistry and a true passion for experiments that led the young Petrovic to enroll in the Natural Sciences – Mathematics Department of the Superior School (in later years, chemistry had a very important role in Petrovich's scientific works. For example, when he was teaching and writing "The Theory of Errors" he did not forget the chemical analyses. In the works dealing with the Theory of Series, he was announcing the corresponding application of the results in chemistry – specifically interesting is one Petrovich's result by which it is possible to mathematically envisage an element in the Mendeleev system; Petrovich was the first man in Serbia dealing with the scientific bases of chemical kinetics. His greatest merit is that he linked chemistry with mathematical sciences and other laws of nature through certain analogical core by establishing the phenomenological correspondence. Petrovich belongs to the generation that in the several decades that followed was the main protagonist of science in this country. It should be borne in mind that Serbia of his time was rather isolated from the mathematical events of the 19th century Europe.

Charmed by science as early as in his Grammar School days, Petrovich was not detached from nature and precisely for this reason Petrovich distinguished himself during his first year of studies by his autonomously prepared works. At the close of his first year of studies he wrote a paper about a modification of Grefeo's method for resolving higher numerical equations. As a 4th year student he wrote a seminar paper on the need of exposing and critically discussing different will theories. In January 1889 he was awarded the 2nd prize for the paper in the field of applied mathematics (the calculating machines), and on 1 January 1890 Petrovic was awarded the then highest prize, "St. Sava" for the paper on mathematics dealing with the poles and polar curves.

After graduating from the Superior School (in 1889) and after serving the first part of his military service, Petrovich continued his education (specialization). Contrary to other mathematicians of the then Serbia who used to go to Budapest and Berlin, Petrovich chose Paris for his specialization. From October 1889 until June 1890 he was preparing his entrance examination for enrolling in the Ecole Normale Superieure. As a foreigner he could get enrolled in this School "only if he showed extraordinary knowledge in the entrance examination and acquired the necessary documents and permit. In June 1890, Petrovich showed brilliant results in the entrance examination consisting of mathematics, physics, Latin and French literature, as well as of a general topic (The Role of Science in Moral Life). Mihajlo Petrovic was the first foreign to enter the Ecole Normale Superieure, and enrolled in the Science Department. In this School he spent four years and during that time he was listening to the lectures of the famous scientists of the Paris Mathematical School (Poincare, Goursat, Durboux, Tannery, Picard, Painleve, Konigs, Lippman, etc.). As he was very ambitious in studying and very systematic, he received the highest grades in his exams and was for this reason even invited every year to the parties organized by the President of the French Republic.

In Paris, Petrovich acquired four scientific grades in natural sciences and mathematics and in early July 1894 he left Paris, returned to Belgrade with the already acquired scientific reputation. On 22 October 1894, Mihajlo Petrovich was appointed as professor of mathematics of the Superior School where for only four years (1894-1898) he taught pursuant to the then prevailing Law on the Superior School. It was clear that the teaching of mathematics needed reform, which he did and led to the climax the later well-known Belgrade Mathematical School. Actually, his greatest merit is that mathematics was raised to the university level. He introduced certain austerity in examinations and the then prevailing European flows into mathematics.

His lectures were such that it was visible that he was deeply co-living with the "mysteries in mathematics", for example, he was profoundly impressed by $e^{2\pi\ i} = 1$, namely, "Can you imagine, transcendental irrational number e graded by the product of 2 π i, also transcendental as well as irrational number gives 1". This was precisely the basis for Dr. Petrovic's approach to mathematics and other natural sciences in a specific, phenomenological way. Namely, in 1896, at the age of 27, Dr. Petrovic presented his first thoughts about a new science that will later by its deduction and rules link the natural sciences into one unique discipline. As a mathematician of outstanding capacities, he was constantly searching for something that naturals sciences had in common, and thus became a mathematician of a "concrete spirit" (G. Sagnac) and a scientist of "natural universality" (E. Cartan).

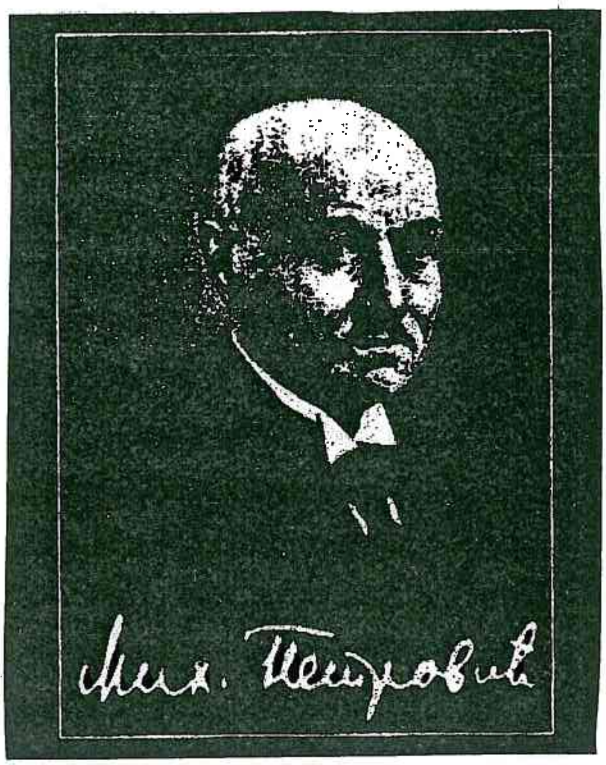
Throughout his university and scientific career, "mathematical phenomenology" was present in almost all his works in different branches, either in a hidden or overt way. It may be discussed whether Dr. Petrovic was primarily a mathematician in all areas of his activity, such as music, chemistry, poetry, even as fisherman ("alas", meaning the fisherman was his nickname), phenomenology included, or whether it was the spirit of phenomenology that permeated his activities in general, and mathematics in particular.

The works of Mihajlo Petrovic are so much appreciated in Serbia so that graduate pupils of primary and secondary schools who are outstanding mathematicians are awarded the so-called "Alas Diploma".

FEMPL

Jasna Fempl-Madjarevic
The Fifth Belgrade High School,
11000 Belgrade, Ilije Garasanina 24
Yugoslavia
e-mail: borlja@Eunet.yu

Literature:
Complete Works of Mihajlo Petrovich (from 1-15), Belgrade 1999
Prof.Dr. Dragan Trifunovic, "The Bard of Serbian Mathematics", Belgrade 1991.



BINDER

Warum gibt es nur 13 Archimedische Körper?

Christa Binder

Die 5 Platonischen Körper – konvexe Körper die nur aus einer Art von regulären Polygonen bestehen – waren im antiken Griechenland wohlbekannt, von Plato wurden sie den Elementen zugeordnet, und von Euklid im XIII., XIV. und XV. Buch der *Elemente* genau beschrieben. Euklid *beweist* auch, daß es nur 5 solche Körper geben kann, er berechnet einige Volumina, gibt Anzahlen von Kanten und Ecken an und konstruiert ein- und umgeschriebene Polyeder.

Archimedes hat in einer nicht erhaltenen Schrift – wir kennen nur die Beschreibung durch Pappos – 13 Körper gefunden, die jeweils nur aus regulären Polygonen bestehen. Er beschreibt diese Körper durch die Anzahl der auftretenden Drei-, Vier-, ...-ecke (siehe Tabelle, Spalten 1 und 2).

Im 15. und 16. Jahrhundert treten einige der hier beschriebenen Körper wieder auf, und zwar in der Kunst. Die neuentdeckte Perspektive sieht im 15. und 16. Jahrhundert in ihnen schöne Beispiele (Paolo Ucello, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Wenzel Jamnitzer), ohne sie jedoch systematisch zu studieren.

Erst Johannes Kepler beschreibt in *Harmonices Mundi* (1619) alle bereits von Archimedes gefundenen Körper und beweist, daß es unter bestimmten Symmetriebedingungen nur diese 13 Körper – und eventuell noch Prismen und Antiprismen gibt, die ausschließlich von regulären Polygonen begrenzt werden. Außerdem beschreibt Kepler auch die 4 regulären Sternkörper, die man, da sie nur aus einer Art von regulären Polygonen bestehen, auch zu den Platonischen Körpern zählen kann – allerdings mit Durchdringungen. Das Werk von Kepler blieb den Geometern lange Zeit unbekannt, sodaß viele seiner Ergebnisse später wiederentdeckt wurden.

Die Bedingung, daß ein Körper nur von regulärten Polygonen gegrenzt wird, reicht natürlich nicht aus, um die Archimedischen Körper zu charakterisieren. Sowohl Archimedes als auch Kepler haben Symmetrieeigenschaften implizit vorausgesetzt; alle Ecken sollen gleichbedeutend sein. Doch auch das reicht nicht aus. Heute definiert man Archimedische Körper als konvexe Körper, deren Ecken, Mittelpunkte der Kanten, Berührungspunkte der Mittelpunkte der Flächen jeweils auf einer Kugel liegen, und diese Kugeln sind konzentrisch. Damit sind sie aus der großen Menge Polyeder hervorgehoben, die ausschließlich von regulären Polygonen begrenzt werden.

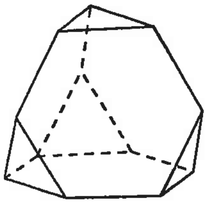
Literatur:

Peter R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Pres, 1997.

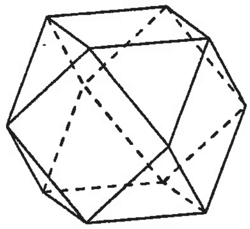
BINDER

E	K	F	3	4	5	6	8	10	
12	18	8	4			4			**abgestumpftes Tetraeder** *truncated tedrahedron*
12	24	14	8	6					**Kuboktaeder** *cuboctahedron*
24	36	14		6		8			**abgestumpftes Oktaeder** *truncated octahedron*
24	36	14	8				6		**abgestumpfter Würfel** *truncated cube*
24	48	26	8	18					**Rhombenkuboktaeder** *rhomb-cub-octahedron*
48	72	26		12		8	6		**abgestumpftes Kuboktaeder** *great rhomb-cub-octahedron*
30	60	32	20		12				**Ikosidodekaeder** *icosi-dodecahedron*
60	90	32			12	20			**abgestumpftes Ikosaeder** *truncated icosahedron*
60	90	32	20					12	**abgestumpftes Dodekaeder** *truncated dodecahedron*
24	60	38	32	6					**abgeschrägter Würfel** *snub cube*
60	120	62	20	30	12				**Rhombenikosidodekaeder** *rhomb-icosi-dodecahedron*
120	180	62		30		20		12	**abgestumpfter Ikosidodekaeder** *great rhomb-icosi-dodecahedron*
60	150	92	80	12					**abgeschrägtes Dodekaeder** *snub dodecahedron*

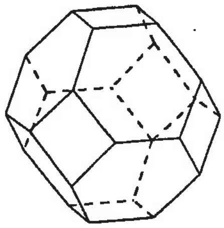
158



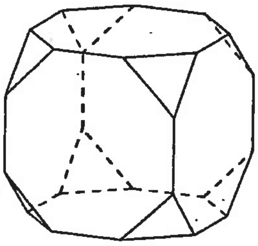
truncated tetrahedron



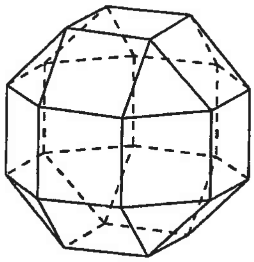
cub-octahedron



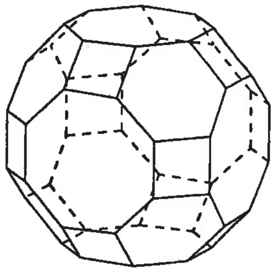
truncated octahedron



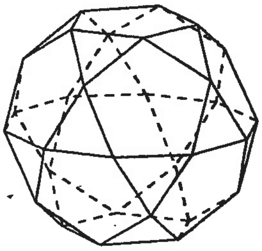
truncated cube



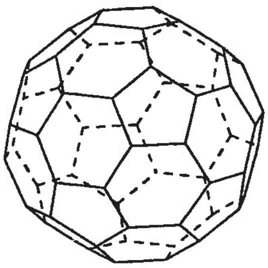
rhomb-cub-octahedron



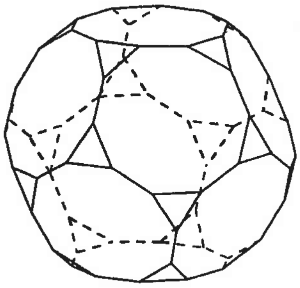
great rhomb-cub-octahedron



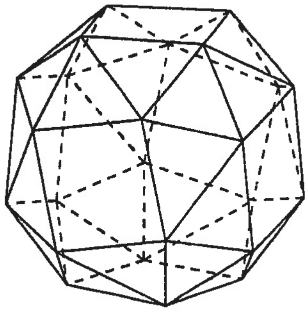
icosi-dodecahedron



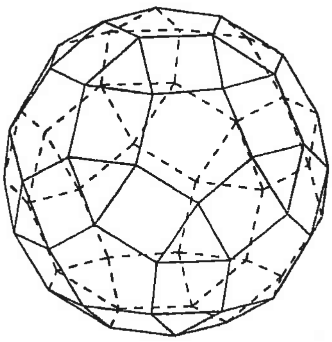
truncated icosahedron



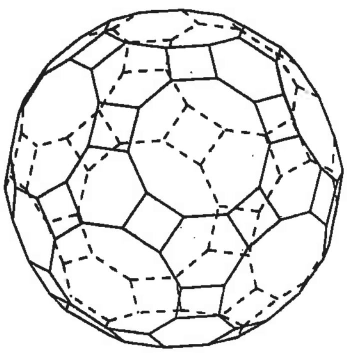
truncated dodecahedron



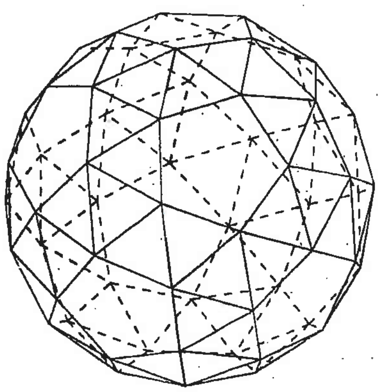
snub cube



rhomb-icosi-dodecahedron

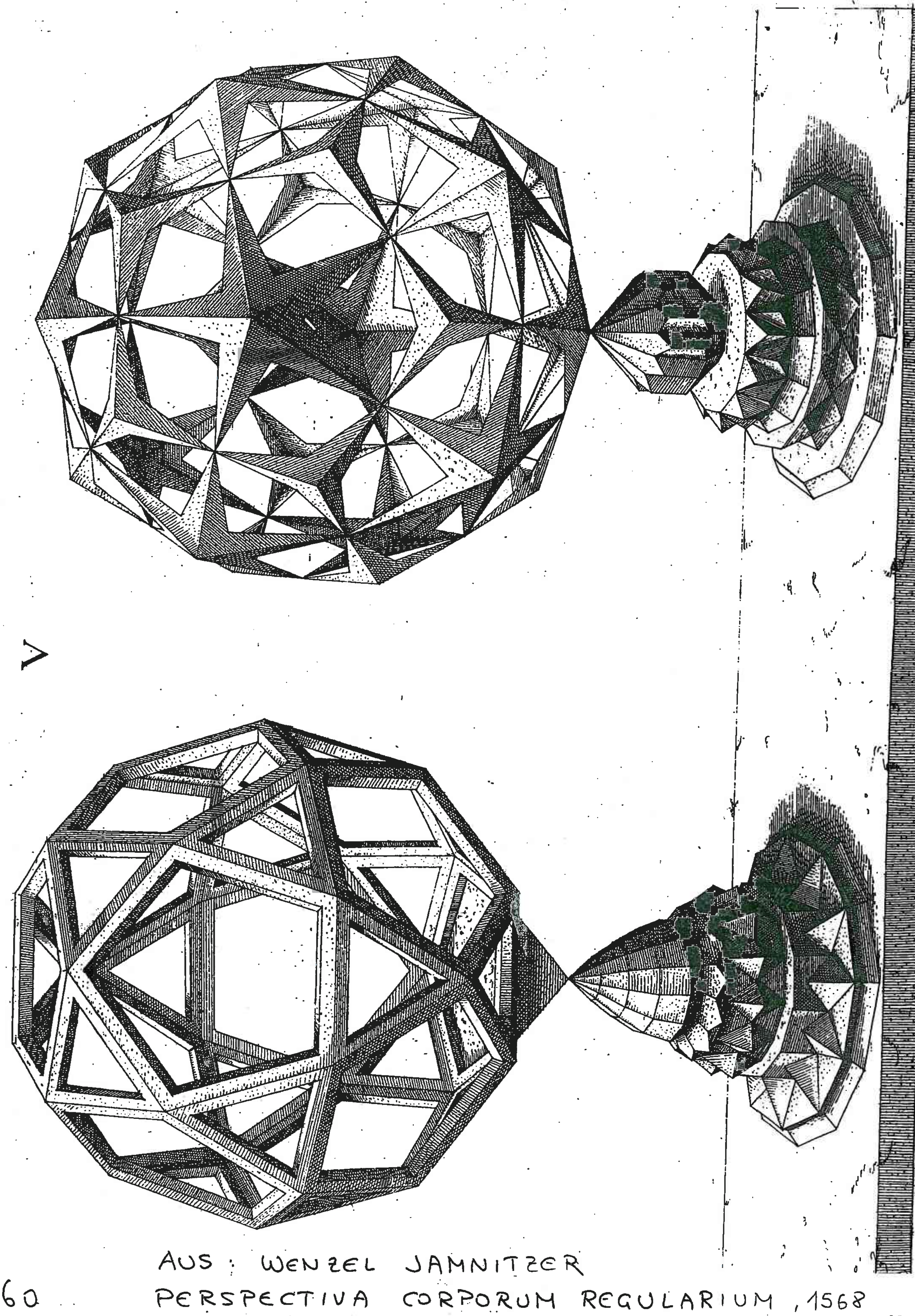


great rhomb-icosi-dodecahedron



snub dodecahedron

BINDER



AUS: WENZEL JAMNITZER
PERSPECTIVA CORPORUM REGULARIUM, 1568

GROPP

Friedrich Wilhelm Levi (1888-1966) — "16 Jahre in die Tropen verbannt" — Emigration to Creation in Isolation

Harald Gropp
Mühlingstr. 19, D-69121 Heidelberg, Germany
d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

1 Introduction

Already four years ago, in 1998, two events took place where the history of configurations was discussed by the author. Most of the material, however, is still unpublished and will be presented in this paper for the first time.

The author has been occupied with Levi, his life, and his work for many years. A first paper which discusses Levi's role in the development of design theory in British India was published in 1991 [5].

In May 1998 a one-day conference on the history of combinatorics was organized in Milton Keynes (England) by Robin Wilson, maybe the first such conference at all. The author gave a talk on the history of configurations focussing on the role of Levi.

In August 1998 the International Congress of Mathematicians took place in Berlin where the author presented a poster on configurations and their history discussing (among others) Levi and Steinitz. The same topic was presented in Göttingen in the satellite conference on the history of mathematics in August 1998.

The author gratefully acknowledges the help of Susanne Levi, a daughter of Friedrich Wilhelm Levi, who gave personal information on her father while and after the author could meet her in England in 1997.

GROPP

2 Levi's biography

2.1 The family of Levi

In order to understand the situation of Friedrich Wilhelm Levi as a Jewish German in the twentieth century better let me briefly introduce the history of his family here. It turned out that, in particular, his grandfather Simon and his father Georg played an important role in Germany. There is a report on the life of Simon Levi [1] in a collection of biographies of Jewish Germans in the Pfalz region.

2.1.1 Simon, the grandfather

Simon Levi, a grandfather of Friedrich Wilhelm, was born in Kirchheimbolanden on April 21, 1817. In 1848 he married Franziska Roos. She was born in Ingenheim, a village close to Landau with a high percentage of Jewish inhabitants, on February 15, 1826.

Simon Levi was a wealthy wine merchant. Moreover, he took an active role in the commercial, political, and religious life of his town, region, and country. He was a president of the chamber of commerce, promoted the development of railways in the region, and as a president of the Jewish community in Landau (1860-1884) he promoted the building of a new synagogue in 1884.

Even more important was his political role as a member of the parliament of Landau (1868-1899) and as a member of the Bavarian parliament (1869-1875) where he voted for the Bavarian participation in the war against France in 1870 and for the Bavarian integration in the German Empire in 1871.

Simon Levi died in Landau on December 20, 1900; his wife Franziska had already died in Landau on January 3, 1880.

2.1.2 Georg, the father

Simon and Franziska Levi had two children. Hugo Alfred David (1851-1853) died at the age of one year. Georg Levi, the father of Friedrich Wilhelm, was born on January 22, 1856 in Landau.

Georg became a judge in Alsatian towns (Mülhausen, Straßburg, and Colmar), and in 1911 he became an *Oberlandesgerichtspräsident.* He married

Emma Laura Blum (born in Strasbourg in 1859), the mother of Friedrich Wilhelm. They had four children.

In the report of E. Back-Schück [1] it is mentioned that she could not find out further details of the life of Georg and his family in Germany after World War I due to lack of information of archives in Strasbourg and Colmar.

Georg Levi died in Darmstadt in 1942, Emma Laura Levi died in KZ Theresienstadt in 1943. The work and life of one of the children, Friedrich Wilhelm, our mathematician, follows.

2.2 Friedrich Wilhelm Levi

Friedrich Wilhelm (Daniel) Levi was born in Mülhausen/ Elsaß on February 6, 1888.

Levi attended schools in Straßburg (1896-1904) and in Colmar (today Lycée Bartholdi) (1904-1906). He studied in Würzburg (during military service) (1906-1907) and in Straßburg (1907-1911). His dissertation in 1911 in Straßburg (advisor H. Weber) was on *Körper und Integritätsbereiche 3. Grades*

After first positions in Göttingen (1912-1913) and Leipzig (1913-1914) he had to take part in World War I. Levi could already submit his *Habilitationsschrift* in July 1914. the title was *Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen.*

In 1917 Levi married Barbara Caroline Fitting. In the following years three children were born: Paul, Charlotte, and Susanne.

In 1919 he obtained the *venia legendi* and became an assistant (1920) and an extraordinary professor (1923) both in Leipzig. On November 1, 1933 his assistant position was cancelled and on April 10, 1935 his *Lehrberechtigung* was withdrawn. For further details of the political situation see section 4.

Levi could escape to India and on January 13, 1936 he became the Hardinge Professor of Higher Mathematics in Calcutta. He served as a president of the Calcutta Mathematical Society (1940-1942) and of the Indian Mathematical Society (1943-1946). On April 17, 1947 he became a British citizen. In 1948 he joined the Tata Institute of Fundamental Research in Bombay.

Levi returned to Germany, first in the summer of 1951 as a guest professor in Freiburg, in the summer of 1952 as a guest professor at the Freie Universität Berlin. In October 1952 he obtained a permanent position as a professor at the FU Berlin. After his retirement in 1956 he was again a guest professor in Freiburg. Levi died in Freiburg on January 1, 1966.

3 Levi's combinatorics

Here only Levi's combinatorial results are discussed. His main fields of interest in mathematics were algebra and geometry.

3.1 Configurations

Levi's book *Geometrische Konfigurationen* (1929) [10] was the first explicit book on configurations, followed by Hilbert and Cohn-Vossen [8] which contains a chapter of 70 pages discussing configurations. The topic had been introduced by Reye [13] in Straßburg in 1876. For further details on the history of configurations see [4] and [6]. The present state of knowledge on configurations can be found in a handbook paper [7].

3.2 Designs

For the general development of mathematics the most important contribution of Levi was the "birth" of design theory in British India in the 1930s. The "parents" were R.A.Fisher (British statistics) and F.W.Levi (German algebra and geometry). The young Indian R.C.Bose was the first important contributor in this new mathematical theories, the combinatorial design theory, and the statistical theory of design of experiments. For further details see [5].

In Calcutta, during World War II and far away from good libraries Levi wrote his book *Finite geometrical systems* (1942) [11] summarizing his teaching topics in Calcutta and discussing the role of "his pure mathematics" which is now applied for statistical purposes.

3.3 The "Levi graph" of a configuration

In a talk (addressed to the American Mathematical Society in 1948) H.S.M. Coxeter [3] proposed to call the bipartite graph related to each configuration the Levi graph of this configuration. Let us use this opportunity here to recall and reintroduce this definition since it has not been used quite often in the past.

Coxeter's words are as follows.

> "..... In this **Levi graph**, we represent the points and lines of the configuration by dots of two colors, say "red nodes" and "blue nodes", with the rule that **two nodes differently colored are joined whenever the corresponding elements of the configuration are incident**. (Two nodes of the same color are never joined.)"

Coxeter refers to the original words of Levi.

> "The two graphs are "even" regular graphs; i.e. the "points" can be distributed into two batches — say the **red** points and the **blue** points — in such a way that every segment only connects points out of different batches ....."

4 Levi and politics

Further details can be found in a book on mathematics in Berlin [2] concerning Levi's period in Berlin and a short report on Levi [9] mainly discussing Levi's time in Leipzig. In the general discussion on German emigrant mathematicians [12] there are a few pages on Levi, too.

4.1 Levi's personal reminiscences

In the following some key sentences from *curricula vitae (Lebensläufe)* of Levi are cited in the original German in order to introduce his political situation.

> **Levi (Lebenslauf):**
>
> "Ich bin als deutscher Staatsangehöriger von deutschen Eltern geboren, habe meine staatsbürgerlichen Pflichten pünktlich erfüllt, auch die militärischen (Frontkämpfer 1914-1918). ..... Der Umsturz von 1933 machte meine Lage äußerst schwierig. Meine damals 9-13 Jahre alten Kinder in Deutschland zu freien Menschen zu erziehen war offensichtlich unmöglich. .....
>
> Die Hetze gegen mich nahm ihren von den Zeitereignissen vorgeschriebenen linientreuen Verlauf. Zuletzt wagten die Studenten nicht mehr

meine Vorlesungen zu besuchen. Am Ende des Wintersemesters 1934/35 hatte ich nur einen einzigen Zuhörer, den japanischen Professor Tikara Toya. Kurz vor Beginn des Sommersemesters 1935 wurde ich vom Reichsstatthalter Martin Mutschmann rechtswidrig meiner Stellung enthoben. .....

Tatsächlich sind später sowohl meine Mutter als meine älteste Schwester (Witwe eines aktiven Oberstleutnants) im K.Z. umgekommen. ..... Eine Berufung nach Indien, an die Universität Calcutta, war meine Rettung. Ich verließ Leipzig am 1. Januar 1936 und trat den Dienst in Calcutta am 13.1.1936 an. ..... Durch das Entgegenkommen der Britisch-indischen Regierung erwarb ich im April 1947 die Britische Staatsangehörigkeit."

"Kurz vor Vollendung meines 65. Lebensjahres wurde ich vom Senat von Berlin zum ordentlichen Professor der Mathematik an der Freien Universität auf Lebenszeit ernannt und mir die Möglichkeit zu einem neuen Anfang in meinem Berufe geboten — nachdem durch nationalsozialistische Verfolgung ich 16 Jahre in die Tropen verbannt war, meine Familie zersprengt und mein Vermögen geraubt worden war."

"Daß ich — als natürlicher Gegner des Nationalsozialismus — weder der NSDAP, noch ihren Gliederungen angehört habe, ist zwar selbstverständlich, doch habe ich auf Veranlassung des badischen Ministeriums eine diesbezügliche eidesstattliche Versicherung vor dem deutschen Generalkonsul in Bombay am 31.7.51 abgegeben."

4.2 Levi's students in India

The role which Levi played in British India and in India after the Indian independance may be indicated by some sentences contained in a *Farewell Address* composed by his students in Calcutta in 1948.

Farewell Address:

"Revered Sir, We, the students of Pure Mathematics Class have assembled here with a heavy heart to bid farewell to you. We would have raised a cry for your remaining with us, but for the fact that your invaluable services are more urgently needed elsewhere. ..... To those who would follow us, Dr. Levi will be only a mighty name and will never know, what they have missed. .....We can only say this much that your respected memory will always serve as an ideal for us — we will carry your image with us throughout our lives. .....

In conclusion, we may be permitted to put forward a prayer that a corner of your magnanimous heart be reserved for your students of this University. May God grant you a long life and great distinction in the service you are going to join.

WITH HUMBLE REGARDS, WE REMAIN, YOURS MOST OBEDIENTLY, The Students of Pure Mathematics, UNIVERSITY OF CALCUTTA."

4.3 Levi in Leipzig

As already mentioned Levi's assistant position was cancelled on November 1, 1933 (letter of July 29, 1933). In the *Leipziger Tageszeitung* of August 4, 1933 Levi as a German war participant is compared with other mathematicians in Leipzig (van der Waerden as foreigner and Lichtenstein as foreign Jew). The cancellation was postponed, first until February 1, 1934. Finally he got a payed *Lehrauftrag* again. However, in April 1935 Levi's *Lehrberechtigung* was withdrawn. Levi protested without success. Finally, he found a position in Calcutta, British India.

4.4 Levi in India

Levi's role in India can be judged quite controversially. From Levi's personal point of view it seems that he did not feel so well in India. The climatic and social differences to Germany were just too big. As soon as possible after World War II Levi tried to get back to Europe, even to Germany. The reaction of his students in Calcutta and other Indian sources up to the present day show the high estimation for Levi in India.

In a similar way Levi's mathematical role in India must be considered. In 1935 he left the German and European mathematical environment and was quite isolated in his Indian exile, much more than other emigrants in other places of the British Empire or other countries as France or the United States. On the other hand, he was very much needed in India to help to build up new fields of mathematics, new curricula, and new ways of teaching. Under lucky circumstances this lead to the "birth" of a new theory not only for India, but for the whole mathematical world. For further details see [5].

GROPP

4.5 Levi back in Germany

In the summer of 1950 Levi gave several mathematical talks in Europe. In the summer of 1951 he was a guest professor in Freiburg and in 1952 at the Freie Universität Berlin. From 1952/53 till 1955/56 Levi was a professor of mathematics at the FU Berlin. This was accepted after a long struggle only on November 25, 1952. Levi was already 64 years old.

After his retirement and one more year in Berlin Levi became an honorary professor in Freiburg in July 1959. In 1961 Levi retired again, the fifth and last time in his life. As mentioned already Levi died on the first day of 1966 in Freiburg, by the way only a few kilometers east of his birth town, now Mulhouse in Alsace.

5 Conclusion

In a short conclusion Levi's life and work is considered in the context of the topic of the sixth Neuhofen Symposion. In the case of Friedrich Wilhelm Levi it is quite clear how much nonmathematical aspects can influence the life of a mathematician.

His Jewish religion was the most influential aspect although for Levi himself this was not that important at all. He and his family from his grandfather on mainly behaved as Germans, his grandfather as a German politician, his father as a German judge, the young Levi himself as a war participant and typical German mathematician. The whole family was surprised when from 1933 on they were mainly regarded as Jews and no longer as Germans.

The first decision of grandfather Levi for a Bavarian participation in Germany also lead to the family's emigration to Elsaß.

Levi's emigration to British India in 1936 lead to "a creation in isolation" concerning the development of design theory. On the other hand, this meant that for this new field of mathematics Germany got into isolation in the years before and during the war.

Altogether, it looks as if Friedrich Wilhelm Levi's emigration impact to mathematics was rather successful while his personal fate during the exile years looks more pessimistic if one considers his own description: *Ein neuer Anfang in meinem Berufe nach 16 Jahren in die Tropen verbannt.*

References

[1] E. Back-Schück, Simon Levi (1817-1900), in: A.H. Kuby, ed., Jüdische Lebensgeschichten aus der Pfalz, Speyer (1995), 135-148.

[2] H. Begehr (ed.), Mathematik in Berlin, Geschichte und Dokumentation, erster Halbband, Aachen (1998).

[3] H.S.M. Coxeter, Self-dual configurations and regular graphs, Bull. Amer. Math. Soc. 56 (1950), 413-455.

[4] H. Gropp, On the history of configurations, in: A.Díez, J.Echeverría, A.Ibarra, eds., Internat. Symposium on Structures in mathematical theories, Univ. del Pais Vasco, Bilbao (1990), 263-268.

[5] H. Gropp, The birth of a mathematical theory in British India, Coll. Math. Soc. János Bolyai 60 (1991), 315-327.

[6] H. Gropp, On the history of configurations II — Austria and the rest of the world, IV. Österreichisches Symp. zur Geschichte der Mathematik, Neuhofen/Ybbs (1995) 21-25.

[7] H. Gropp, Configurations, in: C.J. Colbourn, J.H. Dinitz, eds., The CRC Handbook of Combinatorial Designs, Boca Raton (1996), 253-255.

[8] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Berlin (1932, 2. Aufl. 1996).

[9] O.H. Kegel, V.R. Remmert, Friedrich Wilhelm Daniel Levi (1888-1966), to appear in: Sächsische Lebensbilder.

[10] F.W. Levi, Geometrische Konfigurationen, Leipzig (1929).

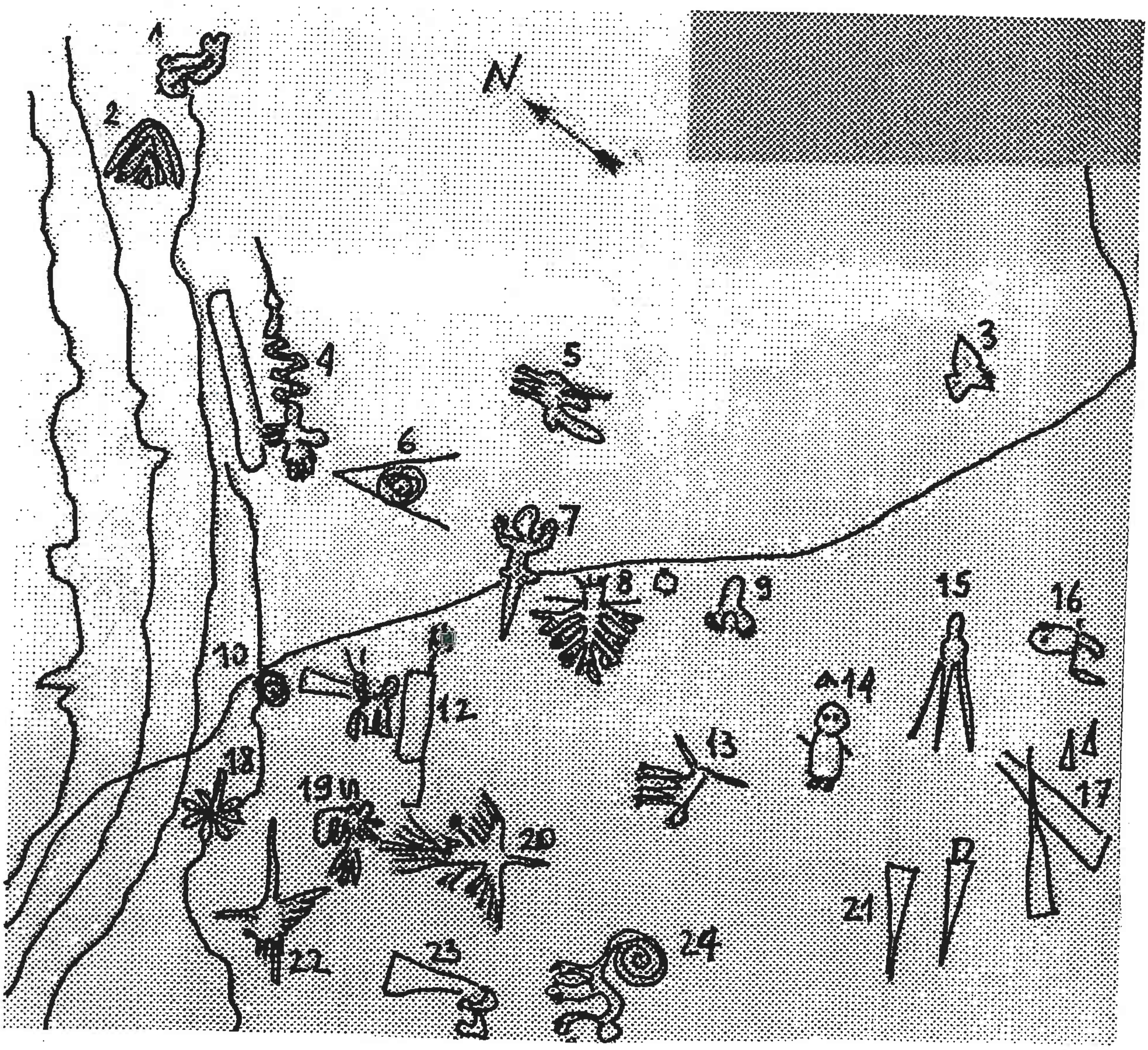
[11] F.W. Levi, Finite Geometrical Systems, Calcutta (1942).

[12] M. Pinl, Kollegen in einer dunklen Zeit, III. Teil, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 73 (1971/72), 153-208.

[13] Th. Reye, Geometrie der Lage I, Hannover (1867, 2. Aufl. 1876).

WUSSING

Die Nasca - Linien



1. Killer Whale
2. Wing
3. Baby Condor
4. Bird
5. Animal
6. Spiral
7. Lizard
8. Tree
9. Hands
10. Spiral
11. Spider
12. Flower
13. Dog
14. Astronaut
15. Triangle
16. Whale
17. Trapazoids
18. Star
19. Pelican
20. Bird
21. Trapazoid
22. Hummingbird
23. Trapezoid
24. Monkey
25. Llama
26. Trapezoids

GRIFFITHS

Ptolemy's Almagest is based on Ancient Explorations and Observations as well as on Mathematical Calculations.

by Peter L. Griffiths, griff_11@hotmail.com,.

Hogben pages 38-41 describes the way the ancient Egyptians c4000BC arrived at the Earth's obliquity or tilt by comparing the vertical angle cast by the Sun at noon (when for an observer between the Tropic of Cancer and the Arctic Circle the horizontal shadow pointed due North) with the celestial latitude angle of the Pole star at night. The discrepancy was the daily portion of the obliquity of 23.5 degrees spread over the 90 day period between equinox (nil obliquity) and solstice (full 23.5 degrees obliquity). This is geometrically illustrated on pages 80-82 of Ptolemy's Almagest.

Mathematically the noon horizontal length of the shadow will be the tangent of the vertical angle of latitude plus or minus the obliquity, the arctangent of this length will be the vertical angle of latitude plus or minus the obliquity. Arctangent tables could have been used, but there is no evidence of their existence in the Almagest. The inclination table on page 72 is effectively a sine table, so that sinu /sin(90-u) would produce tanu, the arctan of which is u. The diagram on page 81 of the Almagest can be used to convert the length of the shadow GN into the vertical angles at the centre of the circle which are effectively arctangents of the shadow GN. This is however the converse of the heading of the section, which seems to suggest that it is the ratios which need to be found not the angles of latitude and obliquity. Thales of Miletus (c624-548BC) according to Heath vol 1, 137 was the first Greek astronomer and predicted the solar eclipse of 28 May 585BC. Thales advised his fellow Greeks to sail at night by the Little Bear as the Phoenicians did in preference to their own practice of sailing by the Great Bear. Hipparchus (ff161BC to 125BC) wrote a Commentary on the Phenomena of Aratos and Eudoxus parts of which survive (see Cunliffe 63) and a criticism of the theories of Eratosthenes no longer extant but referred to by subsequent authors. In the Commentary, (Cunliffe pages 63 and 160) Hipparchus mentions with approval Pytheas's recorded observations of the star positions around the point of true North. 'No single star lies at the pole, but an empty space near which lie three stars. The spot marking the pole aided by these encloses a figure nearly resembling a quadrilateral , exactly in fact as Pytheas the Massaliot says'.

While in the other book Against Eratosthenes, Hipparchus accepted Pytheas's recorded measurements of sun heights at the summer solstice which Hipparchus converted into angles of latitude. PLG comment, according to Hogben page 41, it is the vertical noon readings at the equinoxes which should provide the most accurate angles of latitude, not at the solstices, the vertical noon reading at the Winter solstice includes the full 23.5 degrees of the earth's obliquity, whereas at the summer solstice the vertical noon reading excludes the 23.5 degrees Earth's obliquity. Pytheas would be expected to know this by comparing these noon readings with the elevation of the pole stars at night. The spherical form of the Earth according to Heath vol 1, 138 was first proposed by Pythagoras of Samos (c580-500BC), but clearly the Egyptians and Old Babylonians were aware of the circuitous nature of many of their celestial observations. Heath vol 1, 174 quotes Theon of Smyrna as indicating that the Earth's obliquity was first proposed by Oenopides

GRIFFITHS

of Chios (ff450BC), but without any measurement, but here again this obliquity was likely to have been recognised by the Egyptians in measuring the shadows cast by the sun at different days throughout the year. According to Bulmer-Thomas 179, Oenopides was referring to the obliquity of the zodiac.

The achievements of the Old Babylonians were not exceeded by the Greeks until Hipparchus (ff 161BC to 125BC) who was one of the first Greeks to recognise the importance of relating value to the number of digits contained in a number.

According to Barry Cunliffe's book Pytheas the Greek page 57, the date for the voyage of Pytheas of Massalia up to the Arctic Circle would be about 325BC, this is about a century earlier than Archimedes who died in 212BC. There is some doubt as to whether Pytheas would circumnavigate Spain or initially follow the tin trade route by sailing up the river Aude and down the river Garonne via Toulouse and Bordeaux meeting the Atlantic at the Gironde. On his return about 320BC Pytheas wrote his book On the Ocean, the Greek text no longer exists but has been quoted by at least 18 other writers, (Cunliffe page 62) including Hipparchus, Strabo and Pliny the Elder. Cunliffe page 64, Hipparchus calculated the latitudes of a number of locations, so that he could begin to create an accurate map to enable places to be related by a North-South measure. By comparing the angle of a shadow cast at noon at a known parallel of latitude at the equinox with the angle cast at the same parallel of latitude at the summer solstice, Hipparchus calculated the obliquity of the sun's apparent path. This could have been similar to Ptolemy's Almagest pages 80-82 and Hogben page 41 as follows. If a Summer solstice vertical angle reading is deducted from a Winter solstice vertical angle reading, then the difference will be about 47 2/3 degrees being twice the earth's obliquity. This applies regardless of the angle of latitude.

At the solstices the angle of latitude plus or minus the obliquity is measured by vertical not horizontal shadow degrees. Comparing at both solstices the horizontal degrees of sunsets or sun-rises involves measuring the obliquity not the angle of latitude. The angle of latitude plus or minus the obliquity is measured by vertical shadow degrees.

Hipparchus also calculated the circumference of the Earth. This he presumably did by expressing latitude angle elevations of the pole stars in terms of miles over the surface of the Earth. After computing so many miles to the degree of elevation, he would be able to arrive at the number of miles corresponding to 360 degrees, this would in theory be the circumference of the Earth over the great circle passing through the poles.

But since it was possible to estimate the sun's maximum height at the summer solstice on other days, measurements could be taken at these other days and corrected so long as the number of days between the date of the reading and the date of the solstice was known.

According to Hogben 39, at the Equinox, the sun rises in the East and sets in the West, but the plane of the sun's daily path is slanted to the horizon apparently at an angle equal to the angle of latitude, (plus or minus a portion of the earth's obliquity which amounts to zero at the equinox). At the equinox the obliquity is nil, so that at the equinox the arctan(horizontal/vertical) measures the angle of latitude only.

At other non-equinox days of the year a portion of the obliquity has to be introduced or excluded for the angle arctan(horizontal/vertical) to equal the angle of latitude. At the Winter solstice for example the full angle arctan(horizontal/vertical) includes the full 23.5 degrees obliquity. At the Summer solstice on the other hand the full 23.5 degrees obliquity has been deducted from the angle arctan (horizontal/vertical). The proportion to be applied to the 23.5 degrees obliquity for the other days of the year can effectively (per Ptolemy 72) be the sine of the shorter number of days (maximum 90) from the equinox. It will be noted in this context (and indeed on many other occasions in Ptolemy's Almagest) that days and degrees can be regarded as the same. The apportionment of the angle of obliquity over the 90 days between equinox and solstice is one of the important contributions of Ptolemy's Almagest, this seems to be ignored by most commentators. The obliquity is in fact the tilt of the earth, but astronomers would also have come across it in other manifestations. It can now be recognised indeed that the actual 23.5 degrees latitude at the Tropic of Cancer at the Summer solstice (Cancer) is exactly offset by the obliquity of 23.5 degrees. For latitudes less than 23.5 degrees at the Summer solstice the obliquity will actually exceed the angle of latitude. Pytheas working two hundred years prior to Hipparchus without the knowledge to convert his observations to latitudes did make a number of gnomon measurements to check the North/South distance from the latitude of Massalia. As Ptolemy realised on page 80 of the Almagest the distance travelled North could also be ascertained more easily by measuring the elevation of the pole or Little Bear position throughout the journey without any need to adjust for obliquity. Pytheas in his journey North most certainly knew this, but it does not seem to have been clearly understood or recorded. Hipparchus used Pytheas's measurements in his own work and duly gave credit to Pytheas,

According to Cunliffe page 93, in the first century AD, Pliny the Elder stated the following

Across from this location, Britannia Island well known from Greek and our own Latin records extends to the North West separated from Germany, Gaul and Spain and the greatest portion of Europe by a large distance. Albion was its own name when all were called the Britannias......According to Pytheas and Isodorus, the circuit is 4875 Roman miles (Pliny Natural History 4. 102), (PLG estimate is 1800 modern miles). Pliny goes on to list by name and number the various islands making up the Britannias. 40 Orcades (Orkneys), 7 Haemodes (Shetlands , the name Herma Ness still persists), Mona (Anglesey), Monopia (Isle of Man), Riginia or Sarnia (Guernsey), Vectis (Isle of Wight), Silumnus (Scillies).

Cunliffe page 126, continues to quote Pliny the Elder describing the situation North of the Arctic circle during the solstice days when the sun comes nearer to the top of the world. Because of the combined course of light the earth beneath has continuous days for six months as well as continuous nights in winter when it is remote in the opposite direction. (Pliny Nat Hist 2. 186). Pliny repeats the same point later, concerning Thule where as I have said there are no nights during the solstice when the sun is passing through the sign of Cancer and also no days during the Winter solstice. Some believe this is true for six continuous months. (Pliny Nat Hist 4.

104). Pliny the elder died during the eruption of Vesuvius in August AD79, well before the publication of the Almagest cAD150. where the same point is made on page 89. The impact of Pliny's Natural History on the works of Ptolemy does not seem to have been properly investigated, apart from the footnotes in Toomer pages 89 and 294. Near the Summer solstice, the sign of Cancer can be seen but not in the same place at a particular time each night. Geminus a contemporary of Ptolemy confirms that under the poles there are six months of daylight and six months of darkness.
In the Almagest pages 83-89 there are details of the dark/daylight ratios at the Summer solstice for the various angles of Latitude from the Equator up to the Arctic circle. This relationship is as follows where L is the angle of latitude.
At the Summer solstice, (Darkness : 12) = cosL.
In Almagest page 89, Ptolemy probably quoting Hipparchus mentions the gnomon whose horizontal shadow at the Summer solstice instead of pointing North points towards every part of the horizon at Latitude 66.8.40 degrees. This information is so accurate that it is doubtful if anyone could supply it unless it were based on information from someone who had actually travelled to the Arctic circle, whose latitude at roughly
(90-23.5) degrees confirms the 23.5 degrees obliquity.
If the vertical angle shadow cast by a gnomon is being used to calculate the angle of latitude then for solstice readings the 23.5 degrees earth's obliquity needs to be known see Hogben 41. This obliquity does not need to be known for pole star readings at night. The sind proportion can also be applied to a particular angle of latitude L to determine the dark/light ratio for that angle of latitude for a particular non-equinox day. For some reason in the Almagest Ptolemy does not seem to recognise the importance of the sind proportion in these two applications except that on page 72 Ptolemy shows what he is pleased to call a Table of Inclination which shows how the 23.5 obliquity is to be apportioned over the 90 days separating the solstice from the equinox. This misleadingly titled table in fact shows sind X 23.5 which can be used in the above applications. Ptolemy however gives the impression in the so called Rising Times tables on pages 100 to 103 that the original table has a use in measuring the rising times of the particular constellations making up the various signs of the Zodiac over all the angles of latitude up to the Arctic circle. This use seems to be much less important than on the one hand ascertaining the dark/light ratios for the various angles of latitude throughout the year and on the other hand correcting the vertical angles of the shadows cast by gnomons at the various angles of latitude for non-equinox days during the year. These appear to be interests of Hipparchus rather than Ptolemy.
Canada along with Greenland, Iceland (just), Norway, Sweden, Finland, Russia and Alaska welcomes the Arctic Circle within its borders. Arctos is the Greek for a bear, it means the Great Bear which is a constellation which goes round the North Pole anticlockwise. It so happens and is confirmed by Ptolemy page 333 that the distance from the tip of the Great Bear's tail to the pole star equals the Earth's obliquity namely 23.5 degrees. This means that when the pole star is at 66.5 degrees elevation, then the tip of the Great Bear's tail will be at 90 degrees elevation or at the

Zenith. This is referred to on page 333 of Ptolemy's Almagest where the observer is assumed to be at the 36 degrees latitude. The further North the traveller goes beyond the Arctic circle the more of the Great Bear will appear South of the Zenith, until the traveller reaches the North Pole when the whole of the Great Bear will be naturally South of the North pole situated at the Zenith. In anticipation of a challenge from the audience, no I have not personally verified this myself. The first person to use the word Arctic seems to be Strabo see Cunliffe page 128. According to Cunliffe pages 164-165, Strabo was born on the Turkish coast along the Black Sea in 64-63 BC and died in AD24. His native language appeared to be Greek but from the age of about 33 he lived in Rome. On pages 61 to 63 of Ptolemy's Almagest there is a description of two apparatuses designed to measure the shadow of the ecliptic. Neither of these is a noticeable improvement on the Ancient Egyptian gnomon method described above. Ptolemy goes on to say, From observations of this kind and especially from noon observations near the solstices, the distance from the zenith through the meridian was a consistent number of degrees. We found that the arc linking the Northernmost noon with the Southernmost noon being the solstitial points is always greater than 47 2/3 degrees and less than 47 3/4 degrees. From this we derive very much the same ratio as Eratosthenes which Hipparchus also used, namely that the arc between the solstices is approximately 11 parts where the meridian is 83. (PLG comment 11x360/83= 47.71). At each solstice at noon as indicated by the horizontal shadow of the gnomon being at its shortest and (for observers North of the Tropic of Cancer and South of the Arctic Circle) pointing due North along the meridian, Ptolemy would measure along the meridian the vertical degree of the noon angle on the Sun's noon position This vertical degree would be compared with similar readings previously taken at the other solstice and the difference measuring the arc along the meridian would be fairly consistently 47 2/3 degrees. It is not until the end of page 63 that Ptolemy wakes up to the fact that the angle of latitude is obtained by measuring the angle of the pole star area at night, without needing to know the obliquity.

In Ptolemy's Almagest, Menelaus's theorem on pages 64-68 is largely irrelevant. The diagrams on pages 69-80 show the great circle of the equator, the great circle of the meridian passing through the pole, and the great circle of the ecliptic. On pages 80-82 Ptolemy shows by means of a geometric diagram the converse of the gnomon shadow method of finding the angle of latitude at the winter and summer solstices.

Cunliffe on pages 64-65 seems to think that Pytheas's recorded observations were always in relation to the summer solstice, this would be acceptable if Pytheas were consistently comparing his Northern travelling distance with Massilia his starting point, latitude 43 degrees 1 minute, these observations at the summer solstice would however all be recorded after being reduced by the full 23.5 degrees of the earth's obliquity. Effectively this meant that the readings were in relation to the tropic of Cancer not the Equator. Pytheas could have avoided this 23.5 degree discrepancy if he had taken vertical readings at the equinoxes rather than at the summer solstice, weather permitting. This 23.5 degree discrepancy was presumably corrected by Hipparchus. As indicated by Ptolemy in

GRIFFITHS

Almagest pages 46-47, the tropics of Cancer and Capricorn are small circles parallel to the Equator, but it is possible to link these two tropical small circles by a great circle passing through the centre of the sphere at an angle of 23.5 degrees. Ptolemy calls this great circle the ecliptic in that from the post Copernican point of view it is on the same plane as the earth's apparent circuit round the sun. (from Ptolemy's pre Copernican point of view it is the sun and the signs of the zodiac which appear to be going round the earth), it is these circuits which appear to be an extension of the earth's ecliptic great circle linking the tropics of Cancer and Capricorn. The table of chords in the Almagest (pages 56-60) was almost certainly obtained from Hipparchus (ff 161BC to 125BC) making use of Archimedes's half angle formula cotu + cosec u = cot(u/2), as well as the better known formulae on pages 48 to 56. Just after this chord table in the Almagest from pages 61-63 there is a description of the way Ptolemy computes the obliquity using the shadow cast by a bronze ring turning on a lathe, (modern readers may prefer Hogben page 41).

Nevertheless the ecliptic appears to be based on a navigational misconception in that it is not at the summer solstice but at the equinoxes (weather permitting) when the gnomon and vertical shadow observations should be made to determine the angle of latitude of the observer, so that the Earth's obliquity can be completely ignored. This preoccupation or obsession with the ecliptic seems to have been the main reason for navigators ignoring observations at the equinoxes in preference to the more difficult observations at the summer solstice. It seems that the navigators were being misled by the astronomers such as Ptolemy as to the advantages or disadvantages of summer solstice observations as compared with equinoctual observations.

The signs of the zodiac are the constellations on the same plane as the Earth's orbit round the Sun, that is the ecliptic but unlike the Sun are outside the Earth's orbit. Weather permitting on the Earth we therefore see the Sun during the day but during the night we see the signs of the zodiac. As a result of the Earth's anticlockwise rotation the Sun appears to move from East to West during the day, so the signs of the zodiac likewise appear to move from East to West during the night. According to page 90 of the Almagest Ptolemy clearly intends to treat the signs of the zodiac as parts of the ecliptic in his further investigations.

References

Boyer, C.B. 1968
A History of Mathematics
John Wiley & Sons.

Cunliffe, Barry. 2001
Pytheas the Greek,
Penguin Press.

Heath, T.L. 1921
Greek Mathematics, vols 1 & 2,
OUP.

GRIFFITHS

Hipparchus 1978
Entry in Dictionary of Scientific Biography by G.J. Toomer volume XV pages207-224,
Charles Scribner's Sons, New York.

Hogben, Lancelot. 1937
Mathematics for the Million.
George Allen & Unwin.

Manitius, Karl, (editor) 1894
Hipparchi in Arati et Eudoxi Phaenomena Commentarium, libri tres.
Leipzig.

Oenopides of Chios (ff 450BC)
Entry in Dictionary of Scientific Biography vol 10 page 179 by Ivor Bulmer-Thomas
1974 Charles Scribner's New York.

Pliny the Elder 1950
Naturalis Historia edited by J. Beaujeu,
Paris.

Ptolemy 1984
Almagest, translated by G.J. Toomer.
Duckworth.

Times Comprehensive Atlas of the World 1999
Times Books. page 52.

ver Eecke, P. 1960
Les Oeuvres Completes d'Archimede, vol 1, pages 127-134.
Albert Blanchard.
January 2002.

Teilnehmer

* Klaus Barner — 112
FB Mathematik-Informatik, Univ. Kassel, D 34109 Kassel
(Am Posthorn 24, D 60486 Frankfurt am Main), Deutschland
Klaus@mathematik.uni-kassel.de, klausb@altavista.de

* Martina Bečvářová — 119
Department of Applied Mathematics,
Faculty of Transportation Sciences, Czech Technical University,
Na Florenci 25, 11000 Praha, Czech Republic
nemcova@fd.cvvt.cz

* Christa Binder — 157
Institut für Analysis und Technische Mathematik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10/1141, A 1040 Wien, Österreich
christa.binder@tuwien.ac.at

* Wolfgang Breidert — 136
Institut für Philosophie, Universität Karlsruhe,
PF 6980, D 76128 Karlsruhe, Deutschland
Wolfgang.Breidert@geist-soz.uni-karlsruhe.de

* Miloš Čanak — 26,66
Brzakova 4, YU 11000 Belgrad, Jugoslawien

Ludwig Danzer
Institut für Mathematik, Universität Dortmund,
D 44221 Dortmund, Deutschland
Danzer@Math.Uni-Dortmund.de

* Phil J. Davis — 94
Division of Applied Mathematics, Brown University,
Providence, R.I., 02912 USA
Philip_Davis@brown.edu

* Gábor Dezső — 38
Babes-Bolyai University, Cluj, Rumänien
gdezso@math.ubbcluj.ro

* Helena Durnová — 55
Department of Mathematics,
Faculty of Electrical Engineering and Communication,
Technická 8, CZ 61600 Brno, Tschechien
durnova@feec.vutbr.cz

* Jasna Fempl-Madjarević — 151
Ul. Partizanska br. 27/II, Vidirovac,
YU 11000 Belgrad, Jugoslawien
borlja@eunet.yu

* László Filep — 13
Institute of Mathematics and Informatics,
College of Nyíregyháza, Ungarn
filepl@zeus.nyf.hu

Menso Folkerts
Geschichte der Naturwissenschaften, Universität München,
Museumsinsel 1, D 80538 München, Deutschland
M.Folkerts@lrz.uni-muenchen.de

György Führer-Nagy
University Sopron, Ungarn
fuh@emb.nyme.hu

Peter Griffiths *(schriftlicher Beitrag)* 171
67 Gloucester Place, London WIU 87L, Großbritannien
griff_11@hotmail.com

* Detlef Gronau 104
Institut für Mathematik, Universität Graz,
Heinrichstr. 36, A 8010 Graz, Österreich
gronau@uni-graz.ac.at

* Harald Gropp 161
Mühlingstr. 19, D 69121 Heidelberg, Deutschland
d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

Maria Gruber
Löbersdorferstr. 7, A 3382 Loosdorf, Österreich
gruber.maria@netway.at

Hans Hofer
Serviteng. 24/22, A 1090 Wien, Österreich
hanshofer@gmx.at

* Magdalena Hykšová 124
Department of Applied Mathematics, Faculty of Transportation Sciences, Czech Technical University, Na Florenci 25, CZ 11000 Prag, Tschechien
hyksova@fd.cvut.cz

Gerhard Kowol
Institut für Mathematik, Universität Wien,
Strudlhofg. 9, A 1090 Wien, Österreich
gerhard.kowol@univie.ac.at

Walter Kuba
Favoritenstr. 14, A 1040 Wien, Österreich
waku@chello.at

* Gerhard Lindbichler 47
Senfg. 1/7/3, A 1100 Wien, Österreich
gerhard.lindbichler@chello.at

* Katalin Munkácsy 33
Eötvös University, Budapest, Ungarn
kati.munkarsky@freemail.hu

* Herbert Pieper 1
Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften,
Alexander-von-Humboldt Forschungsstelle,
Jägerstr. 22/23, D 10117 Berlin, Deutschland

pieper@bbaw.de

* MARKO RAZPET 79
Pedagoška fakulteta,
Kardeljeva ploščad 16, SL-1000 Laibach, Slowenien
markor@pef.uni-lj.si

* NADA RAZPET 48
Levstikova c. 6, SL-1230 Domžale, Slowenien
Nada.Razpet@guest.arnes.si

MICHAEL VON RENTELN
Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe,
Englerstr. 2, D 76131 Karlsruhe, Deutschland
Michael.vonrenteln@math.uni-karlsruhe.de

HERWIG SÄCKL
Traberweg 1, D 93049 Regensburg, Deutschland

* KARL-HEINZ SCHLOTE 60
Elie-Wiesel-Str. 55, D 04600 Altenburg, Deutschland
schlote@saw-leipzig.de

PETER SCHMITT
Institut für Mathematik, Universität Wien,
Strudlhofg. 4, A 1090 Wien, Österreich
Peter.Schmitt@univie.ac.at

* PAVEL ŠIŠMA 7
Kat. matematiky, Masarykova Univerzita,
Janáčkovo nám 2a, CZ 66295 Brünn, Tschechien
sisma@math.muni.cz

* RENATE TOBIES 144
Fraunhoferinstitut für Techno- und Wirtschaftsmathematik,
PF 3049, D 67653 Kaiserslautern, Deutschland
Tobies@mathematik.uni-kl.de

* ANNETTE VOGT 85
Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte,
Wilhelmstr. 44, D 10117 Berlin, Deutschland
vogt@mpiwg-berlin.mpg.de

* WALTRAUD VOSS 18
Arbeitsstelle Geschichte der TU Dresden, TU Dresden,
D-01062 Dresden, Deutschland
Waltraud.Voss@web.de

GERLINDE WUSSING
Braunschweiger Str. 39, D 04157 Leipzig, Deutschland

* HANS WUSSING 170
Braunschweiger Str. 39, D 04157 Leipzig, Deutschland