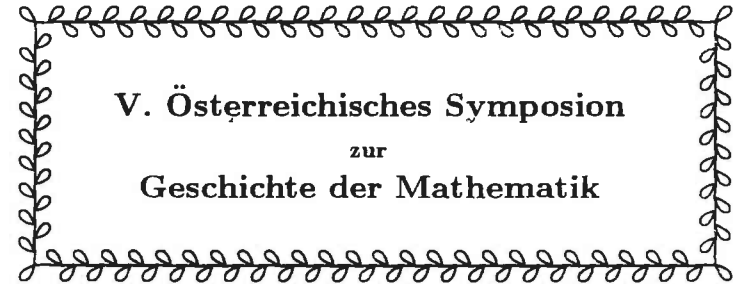


ÖSTERREICHISCHE GESELLSCHAFT FÜR WISSENSCHAFTSGESCHICHTE



MATHEMATIK – ENTDECKT ODER ERFUNDEN?

in NEUHOFEN AN DER YBBS

VON 21. MÄRZ 27. MÄRZ 1999



KURZFASSUNGEN DER VORTRÄGE

HERAUSGEGEBEN VON CHRISTA BINDER

ÖSTERREICHISCHE GESELLSCHAFT FÜR WISSENSCHAFTSGESCHICHTE

V. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik

MATHEMATIK – ENTDECKT ODER ERFUNDEN?

in NEUHOFEN AN DER YBBS

bei Amstetten, in Niederösterreich, zwischen Linz und Wien

von SONNTAG, 21. MÄRZ bis SAMSTAG, 27. MÄRZ 1999

Herausgeber: *Dr. Christa Binder*
Institut für Techn. Mathematik
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8-10/1141
A-1040 Wien, Österreich

Tel.: +43 1 58801 11415
FAX: +43 1 58801 11499
e-mail: christa.binder@tuwien.ac.at

Das Symposium wird vom Bundesministerium für Wissenschaft und Verkehr unterstützt.

In der berühmten Ostarrichi-Urkunde vom 1. Nov. 996 schenkt Kaiser Otto III. dem Bischof von Freising Besitzungen um den Ort Neuhofen (Niuvanhova), der in der Gegend liegt, die in der Volkssprache Ostarrichi (Österreich) genannt wird. Es ist dies die erste urkundliche Erwähnung der Namen Österreich und Neuhofen. In der Ostarrichi-Gedenkstätte ist die Urkunde im Faksimile ausgestellt, zusammen mit Texten in lateinischer und deutscher Sprache, sowie mit Bildmaterial und Karten über die geschichtliche Entwicklung Österreichs.



PROGRAMM

Montag, 22. März:

DETLEF GRONAU (<i>Graz</i>)	1
Funktionalgleichungen – entdeckt, erfunden, gefunden. Die Sintzowsche Funktionalgleichung.	
RÜDIGER THIELE (<i>Halle</i>)	7
Die Erfindung der Funktion. Der Anteil der frühen Variationsrechnung aus historischer und philosophischer Sicht.	
HARALD BOEHME (<i>Bremen</i>)	17
Eureka. Fand Thales die Anfänge der Geometrie?	
MARKO RAZPET (<i>Laibach</i>)	24
Die Kurven des Persäus.	
HARALD GROPP (<i>Heidelberg</i>)	33
Was Virgil of Salzburg the zeroth Austrian mathematician or what is a geometer?	
DETLEF SPALT (<i>Darmstadt</i>)	41
Mathematik entdeckt oder erfunden? Die Historiographie als Prüfstein.	

Dienstag, 23. März:

WOLFGANG BREIDERT (<i>Karlsruhe</i>)	46
Maximinus und Minimajus – Roger Pamans Begründung der Fluxions- theorie.	
GERLINDE FAUSTMANN (<i>Wiener Neustadt</i>)	56
Georg von Vegas (1754 – 1802) Erfindungen und Entdeckungen.	
ROBERT INEICHEN (<i>Luzern</i>)	62
JUAN CARAMUEL Y LOBKOWITZ und seine Beiträge zur Glücks- spielrechnung – vorgefunden, erfunden, entdeckt?	
NADA RAZPET (<i>Laibach</i>)	67
Formulae, Sketches, Tools.	
STEFAN DESCHAUER (<i>Dresden</i>)	75
Möglichkeiten einer historischen Akzentuierung des Mathematik- unterrichts.	
ALIREZA DJAFARIN NAINI (<i>Salzgitter</i>)	81
Warum Geschichte der Mathematik?	

Mittwoch, 24. März:

JASNA FEMPL-MADJAREVIC (<i>Belgrad</i>)	88
A mathematical aspect of the 16th century cartography in the work of Gerhardus Mercator.	

MILOŠ ČANAK (<i>Belgrad</i>)	95
Über die Geschichte der mathematischen Musiktheorie - Teil II: Über die mathematische Tritonustheorie.	
PHIL J. DAVIS (<i>Providence, RI, USA</i>)	
Remembering Otto Neugebauer.	

Donnerstag, 25. März:

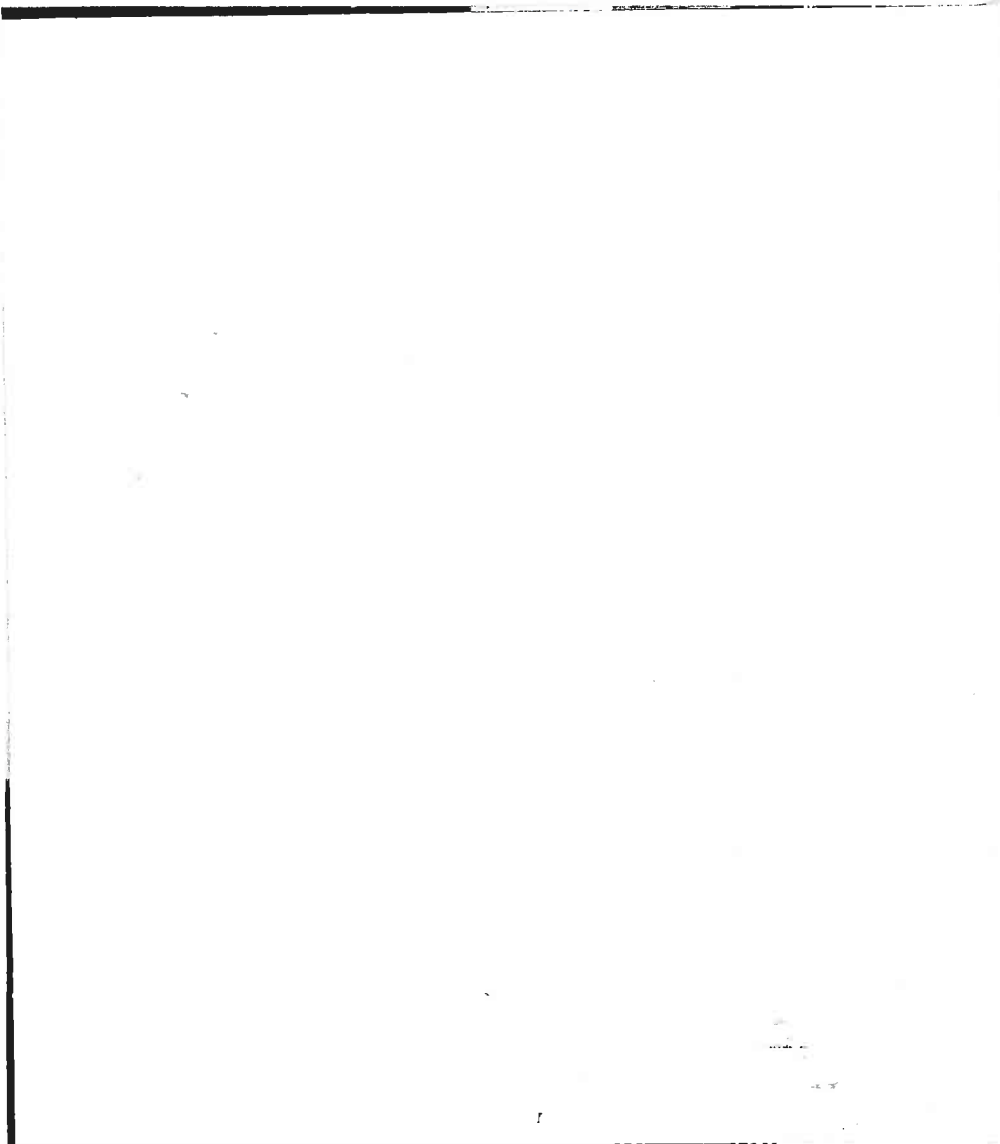
PHIL J. DAVIS (<i>Providence, RI, USA</i>)	102
Mathematics and Theology – changing views.	
RITA MEYER-SPASCHE (<i>Garching</i>)	106
Inventions as tool for discovery: mathematical modeling of Taylor vortex flows.	
WALTRAUD VOSS (<i>Dresden</i>)	174
Drei Aspekte des mathematischen Schaffens, illustriert durch Probleme aus der Graphentheorie.	
PETER L. GRIFFITHS (<i>London</i>)	111
Euclid, Kepler, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, and the Fibonacci numbers.	
MILOŠ ČANAK (<i>Belgrad</i>)	116
Über die Geschichte der mathematischen Schachtheorie.	
PETER SCHREIBER (<i>Stralsund</i>)	124
Dürers Geometrie – Genie und Irrtum.	

Freitag, 26. März:

HANS SAGAN (<i>Raleigh, NC, USA</i>)	128
Die Peano Kurven von Schoenberg und Iséki: entdeckt oder erfunden?	
PETER ULLRICH (<i>Münster</i>)	133
Die Henselschen p -adischen Zahlen – Beispiel einer Erfindung in der Mathematik?	
IVOR GRATTAN-GUINNESS (<i>Bengeo, GB</i>)	139
Historical notes on the relations between mathematics and the Christia- nities.	

Schriftliche Beiträge:

DETLEF LAUGWITZ (<i>Mühlthal</i>)	147
Modelle des Linearkontinuums in der Geschichte der Mathematik.	
BIRGIT SPALT (<i>Darmstadt</i>)	152
Erfundene Entdeckungen oder entdeckte Erfindungen? Fallbeispiel Topologie.	
ANNETTE VOGT (<i>Berlin</i>)	155
Berliner Mathematiker zur Frage "Mathematik – entdeckt oder erfunden?" am Beispiel ihrer Gutachten zu Promotionen von Frauen 1922 bis 1945.	
HANNELORE BERNHARDT (<i>Berlin</i>)	186
Goethe über Erfinden und Entdecken.	



In Kremsmünster vor der Sternwarte (von links nach rechts):
 Marko Razped, Michael von Renteln, Robert Ineichen, Harald Boehme, Ivor Grattan-Guinness, Maria Gruber, Harald Gropp, Jaroslav Folta, Peter Ullrich, Karl-Heinz Schlote, Reinhold Remmert, Hannelore Bernhardt, Nada Razpet, Wolfgang Breidert, Detlef Gronau, Rüdiger Thiele, Gerlinde Faustmann, Hans Sagan, Christa Binder, Ludwig Danzer, Miloš Čanak, Fr. von Renteln, Jasna Fempl Madjarevic, Inge Sagan, Stefan Deschauer, Rita Meyer-Spasche, Peter Schreiber, Alireza Djafari Naini, Peter Griffiths.





13
89
24

In Kremsmünster vor der Sternwarte (von links nach rechts):

Marko Razped, Michael von Renteln, Robert Ineichen, Harald Boehme, Ivor Grattan-Guinness, Maria Gruber, Harald Gropp, Jaroslav Folta, Peter Ullrich, Karl-Heinz Schlote, Reinhold Reinmert, Hannelore Bernhardt, Nada Razpet, Wolfgang Breidert, Detlef Gronau, Rüdiger Thiele, Gerlinde Faustmann, Hans Sagan, Christa Binder, Ludwig Danzer, Miloš Canak, Fr. von Renteln, Jasna Fempl Madjarevic, Inge Sagan, Stefan Deschauer, Rita Meyer-Spasche, Peter Schreiber, Alireza Djafari Naini, Peter Griffiths.

2612
1989
B.L.

Boehme



Stehend (von links nach rechts): Peter Griffiths, Wilhelm Frank, Peter Schreiber, Wolfgang Breidert, Peter Ullrich, Detlef Gronau, Alireza Djafari Naini, Hans Sagan, Ivor Grattan-Guinness, Karl-Heinz Schlote, Gerhard Kowol, Jaroslav Folta, Marko Razpet, Michael von Renteln, Robert Ineichen.

Sitzend: Phil Davis, Harald Gropp, Nada Razped, Christa Binder, Waltraud Voss.

Funktionalgleichungen - entdeckt, erfunden, gefunden.

Die Sintzowsche Funktionalgleichung.

Detlef Gronau, Graz

Zusammenfassung

This is a historical note on Sincov's functional equation

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(x, z).$$

Sincov gave in 1903 an elegant proof of its general solution, which has the form

$$\varphi(x, y) = \psi(x) - \psi(y)$$

where ψ is an arbitrary function in one variable. Others, like Moritz Cantor and Gottlob Frege treated this equation before Sincov.

AMS Subject Classification: 01A55, 39-03, 39B12

Key words and phrases: history of mathematics, functional equations in several variables

0 Einleitung

Die Sintzowsche Funktionalgleichung wird in den Standardlehrbüchern über Funktionalgleichungen (siehe etwa [2], [3]) nach D. SINTZOW (Д. М. СИНЦОВЪ, englische Transkription: DMITRII MATVEEVICH SINCOV oder SINTSOV) benannt, weil dieser als scheinbar erster einen schönen und einfachen Beweis über die reellen Lösungen dieser Gleichung entdeckte und 1903 veröffentlichte (siehe [13], [14]).

Dagegen wurden sie (denn, wie wir sehen werden, sind es eigentlich zwei) von MORITZ CANTOR erfunden und im Jahre 1896 in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, die er gemeinsam mit O. Schlömilch herausgab, veröffentlicht (siehe [4]). Cantor führte sie als (etwas unglückliche) Beispiele von Funktionalgleichungen in drei Unbestimmten an, die mittels Differentiation nach der Methode von NIELS HENRIK ABEL, (* 5.8.1802 - † 6.4.1829) gelöst werden können.

Sintzow schreibt dazu in [14]:

„Herr M. Cantor hat in der Zeitschrift für Math. und Phys. 41, 161–163 die Beispiele zweier Funktionalgleichungen mit drei Veränderlichen angegeben:

$$(1) \varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(x, z), \quad (2) \varphi(x, y) \cdot \varphi(y, z) = \varphi(x, z).$$

Seine Lösungen sind sehr einfach; doch differenziert der Verf. dabei die unbekannt Funktion und setzt also ihre Differenzierbarkeit voraus. Ich will daher eine andere Lösung angeben, welche eine derartige Voraussetzung vermeidet.“

Vor einiger Zeit fand ich heraus, daß die Gleichung (1) schon in der Habilitationsschrift [6] von Gottlob Frege (1848–1925): „*Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen*“, Jena 1874 zu finden ist. Frege entdeckte diese Funktionalgleichung im Zuge der Untersuchungen von Iterationsproblemen als Hilfsmittel, um Lösungen der Translationsgleichung zu bestimmen.

Anhand der Geschichte dieser Funktionalgleichung möchte ich das Wechselspiel „entdeckt oder erfunden“ darstellen.

1 Moritz Cantor

Wenden wir uns nun der Arbeit [4] von M. Cantor, die unter der Rubrik „Kleinere Mittheilungen“ erschien, zu. Cantor schreibt:

„Im V. Kapitel seiner Analyse algébrique von 1821 hat C a u c h y bekanntlich eine Anzahl von Functionalgleichungen, in welchen x und y vorkommen, ohne Anwendung von Differentialrechnung aufgelöst. A b e l hat dann 1827 in Crelle's Journal II, 386–394 in dem Aufsätze „Ueber die Functionen, welche der Gleichung $\varphi(x) + \varphi(y) = \psi[x.f(y) + y.f(x)]$ genughun“ gezeigt, wie solche Aufgaben mit Hilfe von, wenn nöthig wiederholten partiellen Differentiationen nach x und nach y zu behandeln sind. Schon im I. Bande hatte Abel seine „Untersuchungen der Functionen zweier unabhängigen veränderlichen Grössen x und y wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, dass $f[z, f(x, y)]$ eine symmetrische Function von x, y, z ist“ veröffentlicht. Seit der Zeit sind die Cauchy'schen Beispiele bald ohne, bald mit Differentialrechnung behandelt mehrfach in Lehrbüchern und Uebungsbücher übergegangen. Beispiele ähnlicher Aufgaben mit mehr als zwei voneinander unabhängigen Variablen sind uns dagegen in der Literatur nicht begegnet. Vielleicht sind deshalb folgende beide sehr einfache Fälle der Veröffentlichungen werth:“

(Ende des Zitates aus [4].)

Dann führt Cantor die Gleichungen (1) und (2) an und bestimmt auf zugegebenermaßen sehr komplizierte Weise unter Anwendung der Differentiationsmethode deren allgemeine Lösungen mit

$$\varphi(x, y) = \psi(x) - \psi(y) \quad \text{bzw.} \quad \varphi(x, y) = \frac{\psi(x)}{\psi(y)},$$

wobei die Funktion ψ unnötigerweise als differenzierbar und im zweiten Fall in jedem Punkt von 0 verschieden vorausgesetzt werden muß.

MORITZ BENEDIKT CANTOR (1829–1920) war ein bekannter Mathematiker. Er war gemeinsam mit O. Schlömilch Herausgeber der *Zeitschrift für Mathematik und Physik* und sein vierbändiges Werk „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ [5], veröffentlicht zwischen 1899 und 1908 bilden noch immer ein Standardwerk (wenn auch mit Vorsicht zu genießen) der Geschichte der Mathematik.

Trotzdem ist die Note [4] als eher minderwertig zu bezeichnen. Er übersieht dabei die Frage nach nichtdifferenzierbaren Lösungen und verfolgt auf stupide Weise die Methode der Differentiation nach Abel. Die gesammelten Werke von N.H. Abel, erstmals 1839 erschienen, waren durch eine Neuauflage im Jahr 1881 von L. Sylow und S. Lie [1] jedermann zugänglich. Im Falle der multiplikativ geschriebenen Gleichung (2) rechnet Cantor mit Brüchen der Form $\frac{\varphi(x,z)}{\varphi(y,z)}$ ohne den Fall zu untersuchen, ob der Nenner dabei auch 0 sein könnte. Dies war allerdings zu dieser Zeit durchaus üblich. Bezüglich der Anwendungsmöglichkeiten dieser Funktionalgleichungen gibt Cantor keinen Hinweis, sodaß man annehmen muß, daß er sie als theoretisches Beispiel aufgestellt, also erfunden hat.

Man sollte allerdings berücksichtigen, daß die Frage nach nichtdifferenzierbaren Lösungen von Funktionalgleichungen noch nicht so im Vordergrund stand. Erst DAVID HILBERT (* 23. 1.1862 Königsberg, † 14. 2. 1943 Göttingen), wies in seinem berühmten Vortrag auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1900 in Paris darauf hin. In seinem 5. Problem stellte er folgende Frage (*Mathematische Probleme*, Arch. Math. Phys. [3] (1901), 44–63, 213–237):

„Überhaupt werden wir hier auf das weite und nicht uninteressante Feld der Funktionalgleichungen geführt, die bisher meist nur unter Voraussetzung der Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen untersucht worden sind. Insbesondere die von Abel mit so vielem Scharfsinn behandelten Funktionalgleichungen ... und andere in der Literatur vorkommenden Gleichungen weisen an sich nichts auf, was zur Forderung der Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen zwingt ...“

2 Dimitrij M. Sintzow

Der Beweis von Sintzow in [14] ist wesentlich eleganter und einfacher. Im Anschluß an das in der Einleitung angeführte Zitat schreibt Sintzow:

„Die Gleichung (1) schreiben wir in der Form:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, z) - \varphi(y, z).$$

Die linke Seite ist von z unabhängig; z muß also auch in der rechten Seite herausfallen. Wir können daher ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, z irgendeinen bestimmten Wert beilegen, z.B. $z = a$, was gewiß voraussetzt, $\varphi(x, a)$ sei nicht durchgehend unendlich. Indem wir noch $\varphi(x, a) = \theta(x)$, gleich einer willkürlichen Funktion von x , setzen, gelangen wir zur Lösung des Herrn M. C a n t o r:

$$\varphi(x, y) = \theta(x) - \theta(y).$$

...“

Dies ist die kurze und schlüssige Beweisführung von Sintzow.

Die multiplikative Funktionalgleichung (2) behandelt Sintzow auf analoge Weise, wobei er aber noch als Alternative die Rückführung von (2) auf (1) durch Logarithmieren vorschlägt. Auch Sintzow vergisst den Fall, daß die Lösung in einem Punkt möglicherweise den Wert 0 annimmt. Man kann jedoch leicht einsehen, daß eine Lösung von (2) entweder konstant null oder überall von 0 verschieden sein muß. Solche Nachlässigkeiten sind für die damalige Zeit nicht verwunderlich. Auch Cauchy machte den gleichen Fehler in seinem *Cours d'analyse de L'École Polytechnique*, Vol. 1, Analyse algébrique V, Paris 1821, als er die konstante Nulllösung der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ vergaß.

DIMITRIJ M. SINTZOW⁷ (8.11.1867 – 28.1.1946) war ein geachteter Mathematiker, wirkte in Jekaterinburg (heute Swerdlowsk) und ab 1903 in Charkow in der Ukraine. Er befasste sich in erster Linie mit Differentialgleichungen und Differentialgeometrie aber auch mit Geschichte der Mathematik. Sintzow war auch ein engagierter Lehrer. Für weitere Lebensdaten sei auf [12] verwiesen.

3 Gottlob Frege

Auch GOTTLÖB FREGE (geb. am 8. Nov. 1848 in Wismar, gest. am 26 Juli 1925 in Bad Kleinen) hat sich in seiner leider bisher kaum beachteten Habilitationsschrift, die in Jena beim Verlag Friedrich Frommann, 1874 als ein 27 seitiges Büchlein mit dem Titel *„Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen“* erschienen ist (siehe Frege [6], Reprint in [7], S. 50 – 84, engl. Übersetzung in [8], 56 – 92) mit Funktionalgleichungen beschäftigt.

Bei der Erweiterung des Größenbegriffes geht es Frege im wesentlichen darum, den Begriff der iterierten Funktionen f^n , die für natürliche n durch $f^1 = f$ und $f^{n+1} = f \circ f^n$ definiert sind, auch auf beliebige, auch nichtganzzahlige n zu erweitern. Dabei ergeben sich interessante Fragestellungen. Frege schreibt:

Frege [7], S. 53:

Die Beantwortung dieser Fragen ist geknüpft an die Kenntnis der allgemeinen Form einer Funktion, welche das n -fache einer gegebenen ist. Man muß, bestimmter ausgedrückt, eine Funktion von n und x haben, welche für $n = 1$ in die gegebene Funktion von x übergeht, und von der allgemein die Funktionalgleichung gilt

$$(1) \quad f(n_0, f(n_1, x)) = f(n_0 + n_1, x).$$

Ende des Zitats Frege [7], S. 53.

Diese Funktionalgleichung (1) ist die Kerngleichung in der Iterationstheorie, die sog. *Translationsgleichung*. Im Zuge der Untersuchungen der Lösungen dieser Gleichung stößt Frege auch auf die Funktionalgleichung:

Frege [7], S. 54:

$$(2) \quad \psi(X, x_0) + \psi(x_0, x_1) = \psi(X, x_1).$$

Ende des Zitats Frege [7], S. 54.

Hier erkennen wir nun wieder die Sintzowsche Funktionalgleichung. Und Frege liefert, nach der gleichen Methode wie Sintzow, die allgemeine Lösung dieser Gleichung:

Frege [7], S. 55:

Wenn wir nämlich $x_1 = X$ setzen, so geht (2) über in

$$\psi(x_1, x_0) + \psi(x_0, x_1) = 0.$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von (2), so erhalten wir

$$\psi(X, x_0) - \psi(x_1, x_0) = \psi(X, x_1).$$

Sehen wir hierin x_0 als konstant an, so können wir die Größengleichung $n = \psi(X, x)$ auch schreiben

$$n = \vartheta(X) - \vartheta(x),$$

wo $\vartheta(x) = \psi(x, x_0)$ ist.

Ende des Zitats Frege [7], S. 55.

Frege gibt damit die allgemeine Lösung von (2) mit $\psi(X, x) = \vartheta(X) - \vartheta(x)$ an.

Frege hat also schon mehr als 20 Jahre vor Cantor diese Funktionalgleichung entdeckt und gleich eine Darstellung deren allgemeiner Lösung ohne Differentialkalkül geliefert. Für eine genauere Analyse der Fregeschen *„Rechnungsmethoden“* siehe [9] und [10].

4 Weiteres über die Sintzow Funktionalgleichung

Die Sintzowsche Funktionalgleichung, so einfach wie deren Lösungsstruktur auch aussieht, spielt doch in einigen Gebieten der Mathematik eine Rolle. Anwendungen und weitere Literaturzitate über sie sind in [2], S. 223 (und auch in [3]) gegeben. Insbesondere wird diese Gleichung interessant und deren Lösungsstruktur wesentlich komplizierter, wenn man als Wertebereich der gesuchten Funktion nicht die reellen Zahlen sondern eine abstrakte Gruppe oder einen Ring annimmt.

Es soll hier nur ein Beispiel angeführt werden: Die *Fundamentallösung* $Y(x_0, x)$ eines linearen Differentialgleichungssystems

$$y'(x) = y(x) \cdot A(x), \quad (1)$$

bei der die Koeffizienten der $n \times n$ -Matrix stetige (reelle oder komplexe) Funktionen sind, erfüllt die multiplikative Sintzowsche Funktionalgleichung. Das heißt: Die

Fundamentallösung $Y(x_0, x)$, definiert als die eindeutig bestimmte Matrixlösung von (1), welche an der Stelle $x = x_0$ als Anfangswert die Einheitsmatrix annimmt, erfüllt die Gleichung

$$Y(x_0, x_1) \cdot Y(x_1, x) = Y(x_0, x)$$

(siehe z.B. Lappo-Danilevsky [11], Vol. I, p. 232). Ähnliches gilt auch für die Fundamentallösung von linearen Differenzgleichungen n -ter Ordnung.

Literatur

- [1] ABEL, N.H.: *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel, Nouvelle édition publiée par L. Sylow et S. Lie*. Grøndahl & Sønn, Christiana, 1881.
- [2] ACZÉL, J.: *Lectures on Functional Equations and Their Applications*. Academic Press, New York and London, 1966.
- [3] ACZÉL, J. AND DHOMBRES, J.: *Functional Equations in Several Variables with Applications to Mathematics, Information Theory and the Natural and Social Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, New York and Melbourne, 1989.
- [4] CANTOR, M.: *Funktionalgleichungen mit drei von einander unabhängigen Veränderlichen*. Zeitschr. f. Math. u. Physik, 41 (1896), 161-163.
- [5] CANTOR, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Band 1-4. Verlag Teubner, Leipzig 1899-1908.
- [6] FREGE, G.: *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen*. Verlag Friedrich Frommann, Jena, 1874.
- [7] FREGE, G.: *Kleine Schriften*. Herausgeg. von I. Angelelli. Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1967.
- [8] FREGE, G.: *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*. Ed. by Brian McGuinness. Basil Blackwell, Oxford, 1984.
- [9] GRONAU, D.: *Gottlob Frege, a Pioneer in Iteration Theory*. In: Reich, L., Smital, J. and Targonski, Gy. (Eds.), *ITERATION THEORY (ECIT 94), Proceedings of the European Conference on Iteration Theory, ECIT94*. Grazer Math. Ber. 334 (1997), 105-119.
- [10] GRONAU, D.: *Gottlob Freges Beiträge zu Iterationstheorie und Funktionalgleichungen*. Erscheint in einem Gedenkband für G. Frege, Mentis Verlag, Paderborn, 1999.
- [11] LAPPO-DANILEVSKI *Systèmes des équations différentielles linéaires*. Reprint by Chelsea Publishing Company, 1953
- [12] NAUMOV, I.A.: *Dmitrii Matveevich Sintsov on the 100th anniversary of his birth*. Ukrainian Math. J. 20 (1968), 208-212.
- [13] SINTZOW, D.M.: *Bemerkungen über Funktionalrechnung*. (Russ.), Bull. Soc. phys.-math. Kazan (2), 13 (1903), 48-72. Fortschr.: 34 (1903), 421.
- [14] SINTZOW, D.M.: *Über eine Funktionalgleichung*, Arch. Math. Phys. (3) 6 (1904), 216-217. Fortschr.: 34 (1903), 421.

DETLEF GRONAU
Institut für Mathematik
Universität Graz
Heinrichstrasse 36
A-8010 Graz, Austria

Die Erfindung der Funktion

Der Anteil der frühen Variationsrechnung aus historischer und philosophischer Sicht

RÜDIGER THIELE
Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften
der Universität Leipzig
Augustusplatz 10-11
D-04109 Leipzig

Einführung

Die Analysis fußt auf dem Zahl- und Funktionsbegriff. DAVID HILBERTS in einer Vorlesung im Wintersemester 1893/94 getroffene Feststellung

Nächst dem Zahlbegriff ist der Funktionsbegriff der wichtigste in der Mathematik¹

wird in unseren Tagen durch die rund 500 Einträge eines modernen japanischen Wörterbuches der Mathematik zum Stichwort „Funktion“ eindrücklich belegt.² Ein Jahrzehnt nach D. HILBERT (1862 - 1943) hatte allerdings G. FREGE (1848 - 1925) bemerkt

Welche Bedeutung das Wort „Function“ in der Analysis habe, ist noch nicht über jeden Zweifel erhaben, obwohl es seit langer Zeit in häufigem Gebrauch steht.³

Und H. WEYL (1885 - 1955) hat dann 1928 in seiner *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften* auf die Frage

Was ist eine Funktion?

die überraschende Antwort gegeben: „Niemand kann erklären, was eine Funktion ist.“⁴ Diese philosophische Sicht von WEYL, die auf die Offenheit der „schöpferischen, neue ideale Gegenstände erzeugenden Definition“⁴ verweist, berührt auch die wissenschaftshistorische Auffassung, die sich auf die geschichtlichen Veränderungen des Begriffs zu beziehen hat. Diese philosophische Perspektive kann für unsere historischen Untersuchungen eine Richtschnur sein, um das verbindende Glied im funktionalen

¹ *Einleitung in die Functionentheorie*. Hilberts Konzept zur Vorlesung im WS 1893/94, UB Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 540, S. 7.

² In englischer Sprache als *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* bei MIT-Press, Cambridge, herausgegeben, 1993, p 1993 - 1997; erste japanische Auflage 1954.

³ *Was ist eine Function?* In: *Festschrift für L. Boltzmann*. 1906. S. 656 - 666, Zitat S. 656.

⁴ München: Oldenburg 1928, zitiert nach der 3. Auflage von 1966, S. 22.

Denken vom griechischen Größenbegriffs bis zu BOURBAKIS Relationsauffassung zu erkennen.

Der Funktionsbegriff betrifft Veränderungen, genauer: er stellt mit mathematischen Mitteln *Veränderungen* dar. Aus physikalischer Sicht behandelt er Veränderungen in der Zeit, in der Mechanik sind das Bewegungen. Mit dem begrifflichen Erfassen von Veränderungen (von Bewegungen) sind jedoch Widersprüche verbunden, die sich zwar nicht beseitigen lassen, die man aber je nach Bedarf auf verschiedene Weise *operational* bewältigen kann (H. PIETSCHMANN, 1996).⁵ Antagonistische Widersprüche beim Begriff der Veränderung hatte in dem uns interessierenden Zeitraum der Aufklärung auch I. KANT (1724 - 1804) in der *Kritik der reinen Vernunft* (1787) bestätigt:

Veränderung ist Verbindung kontradiktorisch einander entgegengesetzter Bestimmungen im Dasein eines und desselben Dinges.⁶

Aus dieser historisch-philosophischen Sicht skizzieren wir in dem folgenden kurzen historischen Durchlauf grob ein gedrängtes Bild der Funktionsauffassung, wobei wir den Bildausschnitt „frühe Variationsrechnung“ später ausführlicher betrachten werden.

Kurzer historischer Durchlauf

In der griechischen Mathematik setzten geometrische Untersuchungen einen veränderlichen Größenbegriff voraus, und die möglichen Veränderungen ergaben sich durch zulässige geometrische Konstruktionen. Diese *geometrische Konstruierbarkeit* (in der Regel mit Zirkel und Lineal) beschreibt eine frühe Phase in der operationalen Bewältigung des Funktionsbegriffs. Obwohl andere Veränderungen - wie gewisse stetige Bewegungen - durchaus gedanklich klar und deutlich erfaßt werden konnten, sprengten sie den geometrisch zulässigen Rahmen und wurden daher als „mechanische“ (also *ungeometrische*) Veränderungen in der griechischen Mathematik abgelehnt. Am Ende der Antike wurden zwar solche mechanischen Veränderungen zugelassen, um die Erzeugung einer Linie durch die stetige Bewegung eines Punktes oder um die Erzeugung einer Fläche durch die Bewegung einer Linie zu erklären. Da ohne algebraische Schreibweisen eine solche Beschreibung qualitativ bleiben mußte, kam es zu keiner neuen Stufe in der operationalen Bewältigung.

Das Herausbilden und die Ausbreitung einer algebraischen Schreibweise (etwa seit F. VIETA (1540 - 1603)) führte zu neuen Möglichkeiten, die sich in der analytischen Geometrie von P. FERMAT (1601 - 1665) oder R. DESCARTES (1596 - 1650) widerspiegeln. Zum einen werden hier *zwei* veränderliche geometrische Größen aufeinander bezogen, zum anderen faßte DESCARTES in der *Géométrie* (1637) für die gegenseitige Abhängigkeit der geometrischen Größen solche Veränderungen ins Auge, die durch algebraische Gleichungen dargestellt werden können. Damit erweiterte er den klassischen Konstruktionsbegriff der Geometrie (Zirkel und Lineal), der mit algebraischen Gleichungen von höchstens zweitem Grade verbunden ist, ohne sich genauere

⁵ H. Pietschmann, *Phänomenologie der Naturwissenschaften*. Berlin: Springer 1996, Kapitel 3 u. 6.

⁶ *Kr. d. r. V.*, B 291 (1787). - Poetischer bei H. Hesse: „Allem Anfang wohnt ein Zauber inne.“

Gedanken über die erforderlichen neuen geometrischen Konstruktionsmittel zu machen. Die von DESCARTES algebraisch vorangetriebene Verallgemeinerung des Abhängigkeitsbegriffs beschreibt ein neues Konzept in der operationalen Bewältigung funktionaler Zusammenhänge.

Das neue Konzept einer „geometrischen Funktionsauffassung“ hatte zwei bemerkenswerte Ergebnisse: Es brachte zahlreiche neue mathematische Objekte (Kurven) hervor, die ihrerseits einer vereinheitlichenden Erfassung in einer Theorie bedurften und schließlich auf eine solche führten. Eine andere Folge war der Verlust eines allgemein verbindlichen Standards für Konstruierbarkeit sowie die damit einhergehende Aufwertung der mechanischen Abhängigkeiten im 17. Jahrhundert. JAKOB BERNOULLI (1654 - 1705) ließ z.B. 1696 bei seiner Behandlung eines 1638 gestellt Problems von DE BEAUNE (1601 - 1652) algebraische, transzendente und sogar mit freier Hand gezeichnete Kurven zu.⁷ Schließlich wurden in der Mathematik auch die geometrisch nicht mehr konstruierbaren Kurven als *transzendente* Kurven im Sinne von G.W. LEIBNIZ (1646 - 1716) akzeptiert. Dieser hatte wegweisend 1684 in der die neuen Infinitesimaltechniken begründenden Arbeit *Nova methodus pro maximis et minimis* geschrieben:

... ist offenbar unsere Methode auch noch auf die transzendenten Kurven auszuweihen, die man nicht auf die Rechnungen der Algebra zurückführen kann.⁸

Damit war die noch von DESCARTES scharf gezogene Trennungslinie zwischen geometrischem und mechanischem (transzendente) Denken durchlässig geworden.

Ein instruktives Beispiel für den fließenden Übergang von der geometrischen zur transzendenten (mechanischen) Auffassung des Funktionsbegriffs bildet ein von G.W. LEIBNIZ und C. HUYGENS (1629 - 1695) im Winter 1690/91 diskutiertes Problem, das die Geschwindigkeit v eines Körpers in einem widerstehenden Mittel betraf. Die von

LEIBNIZ ermittelte Lösungskurve mit der Gleichung $b' = \frac{1+v}{1-v}$ hielt HUYGENS lediglich für inhaltsleere Symbolik, da die veränderliche Größe völlig ungeomtrisch als Exponent erschien. Erst als Leibniz eine geometrische Konstruktion mit Hilfe der sogenannten *Logarithmica* ausführte, war HUYGENS zufriedengestellt, obwohl die *Logarithmica* (eine Exponentialkurve) zweifelsfrei eine mechanische Kurve war. Diese Hilfskurve veranschaulichte sich HUYGENS als Beziehung zwischen einer Folge von äquidistanten Abszissenpunkten und einer geometrischen Progression von Ordinaten

⁷ *Problema Beaurianum universalis conceptum*. In: *Acta eruditorum* 1696. Jac. Op. LXXII. *Streitschriften*, S. 213 - 221. Der entsprechende Text lautet: „Data quavis Curva, seu Algebraica, seu Transcendente, seu libera tantum manu formata.“ S. 213. - Hier und im folgenden werden die Opuszahlen von Johann und Jakob Bernoulli aus deren gesammelten Werken zur Werkangabe benutzt, die auch in den *Streitschriften* Verwendung finden.

⁸ *Acta eruditorum* 1684, p. 467. „... patet etiam methodum nostram porrigi ad lineas transcendentis, quae ad calculum Algebraicum revocari non possunt ...“ Leibniz benutzt an dieser Stelle vermutlich erstmals den Begriff „transzendent“ im Sinne von „nichtalgebraisch“. Es ist interessant, daß anders als Leibniz bei Jakob Bernoulli 1696 die nichtalgebraischen Kurven noch weiter aufgeteilt werden, wobei sich die Klasse der mit freier Hand gezeichneten Kurven von der Klasse der mechanischen Kurven dadurch unterschied, daß in der ersteren die größtmögliche Willkürlichkeit bestand, die bei (stetigen) Kurven überhaupt vorstellbar war.

geometrisch, und die ihm nunmehr anschauliche erscheinende Beziehung sah er im überkommenen geometrischen Sinn als konstruierbar an.⁹

Ohne sich dessen völlig bewußt zu sein, hatte HUYGENS damit den *Descarteschen Konstruktionsbegriff* überschritten, der nur noch einen verwässerten Standard darstellte und daher Freiräume für Veränderungen schuf. Der Wandel, der sich abzeichnen begann, kann in seinen Auswirkungen nicht besser als durch einen Vergleich der Inhaltsverzeichnisse zweier einschlägiger Werke aufgewiesen werden: während in dem ersten Lehrbuch der Differentialrechnung, in der *Analyse des infiniment petits* von G. DE L'HÔPITAL (1661 - 1704) aus dem Jahre 1696, das Wort Funktion überhaupt nicht auftaucht, erscheint es ein halbes Jahrhundert später in jeder Kapitelüberschrift von EULERS *Introductio in analysin infinitorum* von 1748.

Das Beispiel der frühen Variationsrechnung

JAKOB BERNOULLI stellte 1697 ein Variationsproblem, das das sogenannte *isoperimetrische Problem* der DIDO verallgemeinerte:

Unter allen isoperimetrischen Kurven über der gemeinsamen Basis BN soll die Kurve BFN bestimmt werden, die zwar nicht selbst den größten Flächeninhalt umschließt, die aber bewirkt, daß es eine andere Kurve BZN tut, deren Ordinate PZ irgendeiner Potenz oder Wurzel der Strecke PF oder des Bogens BF proportional ist.¹⁰

Von den isoperimetrischen Kurven BFN wurde dabei nur verlangt, daß sie - wie es der Name ausdrückt - von fester Länge seien. Wir können also davon ausgehen, daß diese Kurven (d.h. die Ordinaten PF solcher Kurven) stillschweigend als konstruierbar vorausgesetzt wurden.

Die Aufgabe besteht insgesamt aus drei Fragen. Wir haben dabei im ersten Teil des Problems unverkennbar den „geometrischen Funktions- bzw. Konstruktionsbegriff“ vor uns:

$$PZ = PF^n \quad \text{oder} \quad = \sqrt[n]{PF},$$

wobei nichtquadratische Wurzeln ($n > 2$) bereits unter die allgemeinere Descartessche oder algebraische Leibnizsche Fassung zu subsumieren sind. Für $n = 1$ bzw. $PZ = PF$ enthält das isoperimetrische Problem die klassische Aufgabe der DIDO. Diesen Fall sowie die *Kettenlinie* (Catenaria) nannte JAKOB als Beispiele für isoperimetrische Probleme.

Die letzte der drei Teilaufgaben betrifft die Abhängigkeit zweier geometrischer Größen, die im allgemeinen nicht durch algebraische Gleichung erfaßt werden kann:

⁹ Briefe vom 6. und 23. 2. 1691, in: *Oeuvres complètes de Huygens*, t. 10. Den Haag: Nijhoff 1905. Vgl. auch H. Bos, *Lectures in the history of mathematics*. AMS & LMS 1993, besonders S. 23 - 59.

¹⁰ „Quaeritur ex omnibus Isoperimetris super communi base BN constitutis illa BFN (Fig. VII), quae non ipsa quidem maximum comprehendat spatium, sed faciat, ut aliud curva BZN comprehensum sit maximum, cuius applicata PZ ponitur esse in ratione quavis multiplicata vel submultiplicata rectae PF vel arcus BF , hoc est, quae sit quocumque proportionalis ad datam A & rectam PF , curvamve BF ?“ *Solutio Problematum Fraternorum*, in: *Acta eruditorum*, 1697; *Streitschriften*, S. 275.

die Ordinate PZ einer gesuchten Kurve soll in Abhängigkeit von der Bogenlänge BF der isoperimetrischen Kurve BFN stehen. Die vorliegende *Erweiterung der geometrischen Funktionsauffassung* bemerkte zuerst JOHANN BERNOULLI (1667 - 1748) und wies nachdrücklich darauf hin. Aber er scheiterte unglücklicherweise - lange ohne dies einzugestehen - gerade an der transzendenten Fragestellung. BERNOULLI hat jedoch 1706 in seiner wenn auch unzulänglichen Lösung des isoperimetrischen Problems *Solution Du Problème proposé par M. Jacques Bernoulli ... trouvée en deux manières par M. Jean Bernoulli son Frere, & communiquée à M. Leibnitz au moins de Juin 1698* die funktionale Abhängigkeit neu gefaßt:

... ou généralement telle que les fonctions quelconques de ces appliquées, ... oder allgemein eine solche [Kurve], wie die beliebigen Funktionen von diesen Applikaten [Applikate = Ordinate],¹¹

und in den *Remarques* schrieb er 1718 deutlicher über den Zusammenhang von Größen:

On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable & de constantes. Man nennt hier eine Quantität, die in irgendeiner Weise aus dieser variablen Größe und aus Konstanten zusammengesetzt ist, Funktion einer variablen Größe.¹²

Damit war der Grundstein für eine neue Funktionsauffassung gelegt, wobei der ergänzungsbedürftige Unterbau noch durch die Angabe von zulässigen Operationen (der *quelque manière*) aufzustocken war. Neben den üblichen algebraischen Verknüpfungen zog JOHANN BERNOULLI dazu auch transzendente Operationen wie die unbestimmte Integration in Betracht.¹³ Es ist BERNOULLIS Schüler L. EULER (1707 - 1783), der von diesem rechnerischen Ausdruck ausging und ihn zum Fundament der Analysis machte.

Brieflich hatte JOHANN BERNOULLI seinem Freund LEIBNIZ ab 1694 einen allgemeinen („analytischen“) Funktionsbegriff mitgeteilt.¹⁴ Bemerkenswert ist weiterhin, daß JOHANN BERNOULLI bereits 1698 begann, Funktionen zu klassifizieren, indem er die Begriffe „functionem differentiari“ und „functio differentiata“ bildete.¹⁵ Damit wurden die Funktionen nicht mehr lediglich als Beschreibungsmittel für die Verrichtung einer bestimmten Aufgabe verstanden, sondern sie konstituierten sich auch als ei-

¹¹ Joh. Op. LXXV. *Streitschriften*, S. 515 - 526, Zitat S. 515.

¹² Joh. Op. CIII. *Streitschriften*, S. 527 - 568, S. 534.

¹³ Joh. Op. CXXXIX. *Méthode pour trouver les Tautochrones*. In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, éd. Paris 1730, 78 - 101, Def. I & II; auch *Opera*, t. 3, p. 173 - 197.

¹⁴ 1694: quantitates quomodocumque formatam ex indeterminatis et constantibus;

1696: quantitates utcumque datas per indeterminatam x et constantes;

1696: algebraice vel transcendentem ... dependentes ab x et constantibus;

1698: applicatae FP ad datam potestatem elevatae seu generaliter earum quaecumque functiones.

Briefe vom 2.9.1694, 25.8.1696 und 5.7.1698; in: C. Gerhardt, Bde. III, S. 150, 324 und 506.

¹⁵ Brief an Leibniz vom 26.8.1698, in: C. Gerhardt, Bd. III/2, 531. Leibniz äußerte sich zustimmend über die Vorschläge, die seinen eigenen entsprächen. „Placet etiam, quod appellatione Functionum uteris more meo.“ S. 525. Es schließt sich eine Diskussion über die Bezeichnung von Funktionen an. „Ad denotandam Functionem alicuius quantitas indeterminatae x , mallet uti litera majuscula cognomine X vel graeco ξ , ut simul appareat cuius, indeterminatae sit Functio.“ S. 531; vgl. S. 537, 324.

genständiger Untersuchungsgegenstand (um schließlich in unserem Jahrhundert Elemente von Funktionsräumen zu werden).¹⁶

BERNOULLIS Verallgemeinerung wurde zu seiner Zeit rasch zur Kenntnis genommen. In einem redaktionellen Beitrag der Pariser *Histoire de l'Académie Royale des Sciences* mit dem Titel *Sur les Isoperimetres*, der JOHANNIS Arbeit *Solution Du Problème* im Erscheinungsjahr 1706 resümierte, schrieb der Akademiesekretär B. DE FONTENELLE (1657 - 1757):

Er [Johann Bernoulli] veränderte die Potenzen der Applikaten in das, was er *Funktionen* nennt. ... Die Potenzen sind nichts als eine spezielle Art von Funktion. ... M. Bernoulli gibt damit im allgemeinen und für alle vorstellbaren Funktionen von Applikaten die Gleichung der gesuchten Kurve.¹⁷

Der Nachruf der Pariser Akademie auf JOHANN BERNOULLI hob 1748 ebenfalls dessen Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs hervor, und sein Autor fand im Stile der Zeit eine barocke Allegorie, in welcher der gestiegene Schwierigkeitsgrad der Aufgabe mit den schrecklichen Häufern der Hydra verglichen wurde, aber nicht mit den üblichen neun beständig nachwachsenden Köpfen (die erst ein HERKULES bewältigt hatte), sondern gleich mit einhundert sich stets erneuernden Schädeln dieser Art.¹⁸ Hieraus wird deutlich, daß die behandelte Materie für die damaligen Mathematiker außerordentlich schwierig gewesen sein muß, da offenbar auch die führende Köpfe die alten Unzulänglichkeiten in JOHANNIS Lösung nicht erkannt hatten.

Vermutlich war es dieser viel beachtete Artikel, der das etwas schiefe Bild in der französischen Mathematikgeschichte geprägt hat, ursprünglich habe Funktion lediglich Potenz im arithmetischen Sinn bedeutet. Solche Ansichten spiegelten sich ein Jahrhundert später in den ersten Zeilen der einflußreichen *Théorie des Fonctions analytiques* von LAGRANGE (1736 - 1813) wider:

Das Wort *Funktion* wurde von den ersten Analytikern gebraucht, um allgemein die Potenzen einer Größe zu bezeichnen. Später hat man die Bezeichnung dieses Wortes auf alle Größen ausgedehnt, die in irgendeiner Weise aus einer anderen Größe gebildet wurden. *Leibniz* und die *Bernoullis* haben als erste diese allgemeine Bedeutung benutzt.¹⁹

¹⁶ Der beschreibende Sinn des Terminus *functio*, der noch weitgehend dem alltäglichen Sprachgebrauch verpflichtet ist, findet sich bei Leibniz in Wendungen wie „... in qua applicatae figurae datae faciunt functionem EK“ (in der Handschrift 696 des Leibniz Archivs (UB Hannover), zitiert nach D. Mahnke, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*, Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften. 1925, Nr. 1, S. 47). Leibniz (1673) und Johann Bernoulli abstrahierten dann aus einer beständig gleichen Funktionsweise den mathematischen Terminus *Funktion*, wobei sprachlich das „functionem facere“ oder „relationes inter functiones“ zu „functio“ bzw. „functiones“ verkürzt wurde (Mahnke aaO., S. 47 - 51).

¹⁷ „Il [Jean Bernoulli] changea les puissances des Appliquées en ce qu'il appelle *fonctions*. ... Les puissances ne sont qu'une espèce [!] dont la fonction est le genre. ... M. Bernoulli donne donc en général, & pour toutes les fonctions imaginables d'Appliquées l'Équation de la Courbe que l'on cherchera.“ *Streitschriften*, S. 512.

¹⁸ *Éloge de Mr. Bernoulli*, in: *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, 1748 (éd. Amsterdam 1757), p. 184.

¹⁹ „Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité. Depuis, on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une

Diesen Bericht wiederholte und erweiterte beispielsweise M.A.A. COURNOT (1801 - 1877), inspecteur général des études, 1841 in seinem *Traité élémentaire de la Théorie des Fonctions et du Calcul infinitesimal*, womit sich diese Auffassung schließlich verfestigte.²⁰

Bei aller möglichen Kritik aus der heutigen Sicht an den Arbeiten der Brüder BERNOULLI zur frühen Variationsrechnung möchte ich an die Einschätzung von C. CARATHÉODORY (1873 - 1950) erinnern, daß es sich hierbei um *Leistungen allerersten Ranges* handelte und daß die Brüder sich dessen bewußt waren. Ein weniger beachtetes „Nebenprodukt“ der Spitzenleistungen war eine neue operationale Bewältigung des funktionalen Verhältnisses: nämlich der Wandel des Funktionsbegriffs von der *geometrischen* zur *arithmetischen* Auffassung. JAKOB BERNOULLI hatte beim isoperimetrischen Problemen 1697 noch einen geometrischen „Funktionsbegriff“ benutzt, der eine gewisse geometrische Größe (die Strecke *PZ*) als Potenz oder Wurzel einer anderen Größe (hier *PF*) ausdrückte, was ganz im Rahmen *geometrischer Konstruierbarkeit* abließ. Die verwickeltere Natur der Abhängigkeit im Fall der Bogenlänge wurde offenbar zunächst nicht wahrgenommen, jedoch begann JOHANN im gleichen Jahr, bewußt geometrische Beziehungen bei Kurven abzustreifen. Dieser Wandel ist in Briefen an LEIBNIZ, H. DE BASNAGE (1656 - 1710) oder P. VARIIGNON (1654 - 1722) belegt, die teilweise schon 1697 publiziert wurden, und die von BERNOULLI vorgenommene Änderung des Funktionsbegriffs ist in den beiden von uns bereits zitierten Arbeiten aus den Jahren 1706 und 1718 sowie in einer weiteren Arbeit aus dem Jahre 1730 gedruckt zu finden.²¹

Wie der Bernoullische Ansatz jedoch in späteren Zeiten mißverstanden worden ist, das möchte ich an der Kritik von KARL WEIERSTRAB (1815 - 1897) verdeutlichen, die dieser in seinen Vorlesungen über die *Theorie der analytischen Funktionen* immer wieder geäußert hat (hier in der Mitschrift von A. HURWITZ (1859 - 1919) aus dem Jahre 1878) und die aus seinem Bestreben nach (konstruktiver) Darstellbarkeit einer Funktion verständlich wird:

Eine andere und scheinbar sehr allgemeine Definition einer Funktion gab zuerst J[ohann]. Bernoulli: Wenn zwei veränderliche Größen so miteinander zusammenhängen, daß jedem Werth der einen eine gewisse Anzahl bestimmter Werthe der anderen entsprechen, so nennt man jede der Größen eine Funktion der anderen.²²

manière quelconque d'une autre quantité. *Leibnitz* et les *Bernoulli* l'ont employé les premiers dans cette acception générale.“ Paris: Courcier 1813 (augmentée édition), p. 1. Fast wörtlich auch in *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, Paris: Courcier 1806 (augmentée édition), p. 9. Entsprechen auch bei S.F. Lacroix, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*: „Les anciens Analystes comprenaient en général sous la dénomination de fonctions d'une quantité, toutes les puissances de cette quantité. Dans la suite on a étendu le sens de cet mot.“ T. I, Paris: Courcier 1810, p. 1.

²⁰ Vgl. die Bemerkungen von A. Pringsheim in *Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre in Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. II, Teil 1/1, S. 3 (Hrg. H. Burkhardt et al.). Leipzig: Teubner 1899.

²¹ Joh. Op. XXXVII & XL. *Lettres*; Joh. Op. LXXV (1706), CIII (1718), CXXXIX (1730); bis auf die Arbeit von 1730 in: *Streitschriften*, S. 284, 311; 515, 534, alles auch in den *Opera omnia*.

²² *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen (1878)*, Mitschrift von A. Hurwitz, hrg. P. Ullrich. Braunschweig 1988, S. 48. Vgl. die Mitschrift der Vorlesung *Ausgewählte Kapitel aus der*

Sich auf diese Definition beziehend fährt er überraschenderweise so fort: „Sie ist aber überhaupt vollkommen unhaltbar und unfruchtbar.“²² Weshalb kam WEIERSTRASS auf dieses vernichtende Urteil? Kurz gesagt störte ihn an diesem allgemeinen Begriff, daß er nicht *konstruktiv* ist und daß es unmöglich ist, aus ihm irgendwelche konkreten Eigenschaften von Funktionen wie etwa Differenzierbarkeit abzuleiten. Er selbst beendet eine Vorlesung so:

Der Zweck der vorstehenden Vorlesungen war zunächst, den Begriff der analytischen Abhängigkeit gehörig festzustellen; daran knüpfte sich die Aufgabe, die analytischen Formen zu ermitteln, in denen Functionen von bestimmten Eigenschaften dargestellt werden können. ... Die Darstellung einer Function ist mit der Erforschung ihrer Eigenschaften aufs innigste verknüpft, wenn es auch interessant und nützlich sein mag, Eigenschaften der Function aufzufinden, ohne auf ihre Darstellung Rücksicht zu nehmen. Das letzte Ziel bleibt doch immer die [tatsächliche] Darstellung einer Function.²³

H. POINCARÉ (1854 - 1912) hat in der Methode von WEIERSTRASS vor allem ein Beweisverfahren gesehen: „La méthode ... de Weierstrass est avant tout une méthode de démonstration.“²⁴

Es ist historisch bemerkenswert, daß die von WEIERSTRASS angeführte Definition JOHANN BERNOULLIS in keiner von dessen Arbeiten steht. Noch spricht BERNOULLI nicht arithmetisch vom Wert einer Größe, das tun erst S. LACROIX (1765 - 1843) und A. CAUCHY (1789 - 1857), und die *quelque manière* (irgendeine Art) ist im Sinne einer *mehrdeutigen* Funktion sicher überinterpretiert, wozu wir uns nur an die briefliche Kontroverse aus den Jahren 1712/13 zwischen LEIBNIZ und JOHANN BERNOULLI über die Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen zu erinnern brauchen, die erst L. EULER mit der Einführung der unendlichen Vieldeutigkeit des Logarithmus in seiner Arbeit *De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli*²⁵ 1749 zu einem inhaltlichen Abschluß gebracht hat.

Und es gibt noch eine weitere historische Kuriosität, die ich kurz erwähnen will, die unbeachtete Arbeit *Vera circuli et hyperbolae quadratura* von JAMES GREGORY (1638 - 1675). Das 1667 erschienene Buch behandelte Quadraturprobleme und konnte sich damit eigentlich der mathematischen Aufmerksamkeit sicher sein. GREGORY erklärte eine über die algebraischen Rechenoperationen hinausgehende *nostra sexta operatio*, die auf transzendente Größen führt, und er betrachtete schließlich sogar

Funktionenlehre, SS 1886, (Mittag-Leffler-Institut), in der Weierstraß im §1 die Definition Johanns an den Stetigkeitsbegriff knüpft.

²² *Ausgewählte Kapitel der Functionentheorie*. Ohne Jahresangabe. Mitschrift im Mittag-Leffler-Institut, Djursholm, S. 262. Weierstraß las im SS 1885/86 hierüber, vgl. das Vorlesungsverzeichnis in seinen *Mathematischen Werken*, Band 3, Berlin: Mayer 190, S. 360.

²⁴ Zitiert nach dem Vorwort von R. Remmert in P. Ullrichs Ausgabe von K. Weierstraß' *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen*. DMV/Vieweg: Braunschweig 1988, S. X.

²⁵ E 168. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres*, Berlin 1749 (ersch. 1751); *Opera* I/17, p. 195 - 232. Für Euler waren mehrdeutige Funktionen nichts Ungewöhnliches. Das hatte den Vorteil, daß implizit gegebene Funktionen sich stets auflösen ließen. Vgl. *Introductio*, § 16 (E 101, *Opera* I/8), oder *Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi* (E 711), in: *Nova Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* t. 16 (1771) 35 - 70; *Opera* I/25, S. 208 - 235; § 1. (E bezeichnet die Eneströmnummer der Eulerschen Werke)

„analytische Ausdrücke“ (*componi analyticè*), die denen von JOHANN BERNOULLI sehr ähnlich sind, die aber ohne jeden Einfluß auf die weitere Entwicklung der arithmetischen Funktionsauffassung waren.²⁶

Die von BERNOULLI hinterlassene Definition einer Funktion entspricht *formal* schon dem Eulerschen Funktionsbegriff. Allerdings sollte in das etwas unbestimmte „composée de quelque manière“ JOHANNIS nicht der „analytischer Ausdruck“ in unserem modernen Verständnis hineingelesen werden, denn JOHANN BERNOULLIS Funktionsbegriff setzte letztlich immer noch einen *geometrischen Hintergrund* voraus. Das wird an den von ihm als „gleichartig“ bezeichneten Funktionen (*fonctions semblables*) deutlich, die in dieser Form auch noch in Eulers *Introductio in analysin infinitorum* (1748) erscheinen.²⁷ EULER gab als ein Beispiel gleichartiger Funktionen

$$X = a + bx + cx^2, \quad Y = a + by + cy^2$$

an. Uns erscheint diese Differenzierung überflüssig, da ein und derselbe arithmetische Funktionsgedanke durch verschiedene Schreibweisen ausgedrückt werden kann. Das abstrakte arithmetische Denken steht dem logischen Schließen nahe, zu dessen Wesen es gehört, viele Fälle unter einen allgemeinen Begriff zu bringen. Es liegt daher in der Natur arithmetischer Untersuchungen, daß verschieden bezeichnete Gegenstände unter den gleichen Begriff fallen. Aber wenn wir eine Zuordnung von r zu $K(r)$ sowie von R zu $K(R)$ beispielsweise als Konstruktion von Kreisen aus den Radien r und R geometrisch deuten, dann wäre es in der anschaulichen Geometrie unsinnig, ein und dieselbe Größen mit verschiedenen Bezeichnungen zu erfassen. Unterschiedliche Radien ergeben verschiedene Kreise. Andererseits sind die verschieden konstruierten Kreise Ergebnisse *einer* gleichartigen Konstruktion (funktionalen Zuordnung). Diese Sicht gibt einen Fingerzeig auf die geometrische Beschaffenheit des *status nascendi*, in dem sich der sich formende arithmetische Begriff befand. Philosophisch erklärt für den allgemeinen Sachverhalt KANT in seiner *Kritik der reinen Vernunft* genau diese Problematik:

Ich verstehe aber unter Funktion, die Einheit der Handlung, verschiedene Vorstellungen unter einer gemeinschaftlichen zu ordnen.²⁸

JOHANN BERNOULLI erweiterte die von DESCARTES zugelassenen algebraischen Kurven um die mechanischen. Anders ausgedrückt, er ging von der *statischen* geometrischen zur bewegten *dynamischen* Beschreibung von Kurven über. Entsprechend den Möglichkeiten der neuen Analysis bezog er dabei in die Betrachtungen neben algebraischen auch transzendente Gleichungen ein. Gegenwärtige mathematische Definitionen einer Funktion betonen eher eine im statischen Sinn vorhandene Beziehung (Relation) als ein mit einer Tätigkeit verbundenes mathematisches Konzept. Das dynamische Konzept von BERNOULLI beruhte auf als stetig gedachten Veränderungen und wurde

²⁶ Siehe C.J. Scriba, *Gregorys frühe Schriften zur Infinitesimalrechnung*. Dissertation, Gießen 1957, S. 13 - 28.

²⁷ Joh. Op. CXXXIX: *Méthode pour trouver les Tautochrones*. In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, éd. Paris 1730, 78 - 101, oder *Opera*, t. 3, p. 173 - 197, Def. I & II; L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne: Bousquet 1748. § 26.

²⁸ *Kr. d. r. V.*, A 64 ('1781).

intuitiv durch entsprechende Vorstellungen von mechanischen Bewegungen gestützt.²⁹

EULER griff das Bernoullische Konzept auf, und seit ca. 1730 erweiterte er es laufend über jene algebraischen und transzendenten Operationen hinaus, die für JOH. BERNOULLI noch die allgemeine Art der Zusammensetzung einer Funktion darstellten, um wie beim herausfordernden Problemen der schwingenden Saite (1747) stets über einen auf seine jeweiligen Fragestellungen passenden Funktionsbegriff verfügen zu können. So löste sich EULER auch von der Orientierung am rechnerischen Ausdruck für eine (analytische) Funktion, von der unterstellten Potenzreihenentwicklung, und er verzichtete auf ein derartiges einheitliches Gesetz bei der Darstellung von Funktionen. Er gab schließlich eine allgemein gefaßte und scheinbar DIRICHLETS Erklärung vorwegnehmende Definition einer Funktion an (*Institutiones calculi differentialis*, 1755). Pathologische Funktionen wie die sogenannten Dirichletschen Funktionen, die auf rationalen und irrationalen Argumenten beliebig unstetig definiert werden können, sind weder in den Bernoullischen noch in den Eulerschen Vorstellungen denkbar, denn sie setzen wieder eine statische Auffassung der Funktion voraus.³⁰

Literatur

Johannis Bernoulli Opera omnia. 4 Bd. Hrg. G. Cramer. Lausanne: Bousquet 1742. (Reprint 1968).

Jacobi Bernoulli Opera. 2 Bd. Hrg. G. Cramer. Genf 1744. (Reprint 1967).

Der Briefwechsel von Johann Bernoulli. 3 Bd. Hrg. O. Spieß, P. Costabel, J. Peiffer. Basel: Birkhäuser 1955f.

Der Briefwechsel von Jacob Bernoulli. Hrg. D. Speiser. Basel: Birkhäuser 1993.

Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli. Hrg. D. Speiser. Basel: Birkhäuser 1991.

Leibniti et Johan. Bernoullii commercium philosophicum et mathematicum. 2 vol. Lausanne: Bousquet 1745. [Von Joh. Bernoulli „bereinigt“ herausgegeben.]

Leibnizens mathematische Schriften. Hrg. von C. I. Gerhardt. Band 1 - 7, Berlin, später Halle 1875 - 1890 (Reprint 1960 - 1961) [hierin Briefwechsel mit den Brüdern Bernoulli]; neuere Ausgabe der Briefe in: *Sämtliche Schriften und Briefe* (Reihe 3) im Akademie-Verlag, Berlin 1971f.

Opera omnia Euleri. 4 Serien. Basel: Birkhäuser, früher Teubner in Leipzig und Orell Füssli in Zürich, seit 1911.

Das diesem Artikel zugrunde liegende Vorhaben wurde von der *Deutschen Akademie der Naturforscher, Leopoldina*, mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft, Forschung und Technologie unter dem Förderkennzeichen LPD 1996 gefördert. Eine Arbeit zum gleichen Thema erscheint in der Festschrift für *Matthias Schramm*, GNT-Verlag 1999.

²⁹ „The connotations of activity make some scholars dissatisfied ... a function does not *do* anything but merely *is*.“ P.R. Halmos, *Naive set theory*. Princeton: van Nostrand 1960, p. 30. - Anfänglich hatte Leibniz auch den Terminus „relatio“ für Funktion erwogen. Siehe Mahnke aaO., S. 47f.

³⁰ Man vergleiche die 1727/28 zwischen Euler und Joh. Bernoulli gewechselten drei Briefe über die Form der Kurve mit der Gleichung $y = (-1)^x$. *Opera omnia Euleri*, IV A/2. Basel: Birkhäuser 1998.

Harald Boehme, Bremen

Eureka. Fand Thales die Anfänge der Geometrie?

I. Die Frage „entdeckt oder erfunden“ gehört zum Selbstverständnis der griechischen Mathematik. Nach Aristoteles bestimmen die eigentümlichen Prinzipien einer Wissenschaft daß etwas ist und was es ist. In der Geometrie sind dies die Punkte und Linien, während für Dreiecke und Kreise die Existenz und Bedeutung erst zu beweisen ist.¹ Ob Aristoteles damit die Postulate des Euklid gefordert hat, ist hier nicht zu entscheiden, jedenfalls stellen sie die Prinzipien für die Beweise dar, es sind die Grundkonstruktionen von Strecke und Kreis, entsprechend dem Gebrauch von Zirkel und Lineal. So ist bereits bei Aristoteles die Unterscheidung von Konstruktion mittels Postulaten und Deduktion aus Axiomen angelegt. Bei Proklos wird dies zur Unterscheidung von Problemen und Theoremen, jene beweisen die Existenz der Gegenstände, diese ihre wesentlichen Eigenschaften. In der Konstruktion wird hervorgebracht, „was hervorzubringen war“ (*poiein*), die Deduktion zeigt die Eigenschaften des Hervorgebrachten, „was zu zeigen war“ (*deiknynai*). Deren Prinzipien sind sowohl allgemein, wie die Größenaxiome, als auch eigentümlich, wie das Kongruenzaxiom. Proklos beschreibt diese Unterscheidung als Grundlagenstreit der Akademie, wobei Aristoteles von Menaichmos vertreten wird: „Ohne Eingehen in die Materie gibt es kein Finden von Lehrsätzen.“² *Euriskein* ist hier das Schlüsselwort, d.h. Theoreme werden in einer gegebenen Materie, den Konstruktionen, gefunden. Ordnen wir den Konstruktionen als gemachte das Erfinden zu, den Theoremen das Entdecken eines Gegebenen, dann bedeutet die gegenseitige Bedingtheit die Einheit von Erfinden und Entdecken, die in dem einen griechischen Wort *euriskein* ausgedrückt ist.³ Diese Einheit ist für die Griechen von Anfang an gegeben als Einheit von Kunst und Wissenschaft, sie zeigt sich auch darin, daß das Finden jeweils als die Tat eines Einzelnen begriffen wird.⁴

Das bekannte Resümee zur Geschichte der Geometrie beginnt mit den Worten: „Thales aber verpflanzte zuerst, nachdem er nach Ägypten gekommen, diese Wissenschaft nach Griechenland und machte selbst viele Entdeckungen, zu vielen anderen legte er für die Späteren die Anfänge (*archas*).“⁵ Proklos ist sicher nicht der Erste, der Thales die Anfänge der Geometrie zuschreibt, denn er steht in der Tradition des Eudemos. Allerdings gibt es vor Eudemos keinen Beleg für diese Behauptung, insofern ist sie erst 250 Jahre nach Thales entstanden; erstaunlich ist nur, daß sie sich danach 2300 Jahre gehalten hat. Zweifel daran wurden vor 40 Jahren von D.R. Dicks geäußert, blieben aber wirkungslos für die Zunft der Mathematikhistoriker.⁶ Erst in jüngster Zeit mehrten sich die Zweifel, z.B. hält B. Vitrac die Mathematik des Thales für eine Zuschreibung von Eudemos-Proklos.⁷ Diese erfolgte gemäß der Logik des Aristoteles, wonach die Prämissen einer Wissenschaft nicht nur evident, sondern auch „die ersten und unvermittelt sind und bekannter und früher sind als der Schlußsatz.“⁸ Diese Voraussetzungen sind dann auch am Anfang der Wissenschaft vorausgesetzt, d.h. die Wissenschaft beginnt mit ihren ersten, unvermittelten und bekannten Sätzen. Demnach wäre die Geometrie des Thales eine logische Rekonstruktion des Anfangs der Geometrie, aber keine historische Begebenheit. Vitrac läßt jedoch die Hintertür für einen historischen Geometer Thales offen, wenn er fürchtet, daß wir ohne neue Dokumente über die erste griechische Mathematik niemals etwas Konkurrentes wissen können.

Hingegen möchte ich den Standpunkt vertreten, daß wir aus den vorhandenen Dokumenten mehr wissen können als Nichtwissen. Natürlich ist jedes historische Wissen an die Quellen gebunden und kann nur bezüglich dieser als gesichert gelten. Für diese Sicherheit ist allerdings noch eine methodische Vorsicht geboten: „Quellen müssen in chronologischer Folge herangezogen werden.“⁹ Allein mit diesem Grundsatz hat D. Fehling die Kosmologie des Thales analysiert mit dem Resultat, daß sie lediglich eine Hypothese des Aristoteles ist, von der er glaubte, daß er sie Thales zuschreiben könne. In Wahrheit gab es die Lehre vom Wasser als dem Urstoff nicht vor Aristoteles, und Thales dürfte weder diesen noch einen anderen Urstoff gelehrt haben noch der erste Philosoph gewesen sein. Allein von daher erscheint es unwahrscheinlich, daß Thales die Anfänge der Geometrie gefunden haben soll, es bleibt aber dennoch die Aufgabe, diese Unwahrscheinlichkeit an Hand der vorhandenen Quellen nachzuweisen. Diese sollen nunmehr in chronologischer Folge betrachtet werden, dabei erhalten wir auch eine Vorstellung darüber, wie die Hypothese einer anfänglichen Geometrie des Thales entstanden sein könnte.

II. Die älteste Quelle zu Thales von Milet ist Herodot, der etwa 150 Jahre nach ihm lebte und ihn dreimal erwähnt, als Politiker, Ingenieur und Astronom.¹⁰ Da andere Quellen nicht ausfindig zu machen sind, ist wahrscheinlich alles, was später von Thales berichtet wird, „aus Herodot entstandene Pseudoinformation.“¹¹ Die dem Thales zugesprochene astronomische Leistung ist die Voraussage einer Sonnenfinsternis während einer Schlacht, so daß diese beendet und Frieden geschlossen wurde. Daß diese Voraussage in den Bereich der Legende gehört, folgt allein daraus, daß es keinen Zyklus für Sonnenfinsternisse an einem bestimmten Ort gibt.¹² Doch seitdem gilt Thales als der erste Astronom der Griechen, sogar auf dem Theater, wo dies von Aristophanes aufgegriffen und Thales zweimal im Zusammenhang astronomischer Konstruktionen erwähnt wird.¹³ Meton wird als Thales bezeichnet, während er mit Meßlatte und Zirkel hantiert, was noch als Quadratur des Kreises verspottet wird. Sokrates übertrifft angeblich Thales, derweil er vor der Denkerwerkstatt (für Astronomie, Geometrie und Geographie) trickreich mit dem Zirkel umgeht. Daraus wurde gefolgert, daß für das Athener Publikum Thales und die Geometrie bereits zusammen gehörten, in beiden Erwähnungen handelt es sich jedoch um Tätigkeiten, die auf die Astronomie bezogen sind. Daher genügt die Erklärung, daß Thales als legendärer Astronom bekannt war, der in der Komödie die Zeitgenossen blamierte. Später wird dieser Zusammenhang ernsthaft behauptet, so schuf Meton das erste Parapegma, darin sind die Zeiten zwischen den Wendungen ungleich, 180 und 185 Tage, nach Eudemos soll jedoch Thales die Sonnenfinsternis und die ungleichen Perioden zwischen den Wendungen gefunden haben.¹⁴

Platon erwähnt Thales viermal, entscheidend für die weitere Überlieferung ist jedoch seine erstmals aufgestellte Reihe der 7 Weisen, die von Thales angeführt wird.¹⁵ Mit Solon erscheint er darin als der praktische Staatsmann, an andere Stelle jedoch als Weiser, der sich von Staatsgeschäften fernhält. Auch die beiden letzten Stellen sind widersprüchlich, zusammen mit Anarchis gilt Thales einerseits als Erfinder von Künsten für das praktische Leben.¹⁶ Andererseits sagt man von Thales, daß er beim Betrachten der Sterne in einen Brunnen fiel, worauf ihn eine thrakische Magd verspottet habe. Dieser Spott schließt sich an den des Aristophanes an, wobei jeweils die Weltfremdheit der Astronomen die Zielscheibe ist. Hingegen erzählt Aristoteles eine Geschichte, welche an den von Herodot geschilderten Erfolg der Astronomie anknüpft. Demnach soll Thales dadurch reich geworden sein, daß er auf Grund seiner astronomischen Kenntnisse eine ergiebige Olivenenernte vorausgesehen und durch Spekulation daran verdient habe.¹⁷ Die Vorhersage

einer Olivenernte ist aber ebenso unmöglich wie die Vorhersage einer Sonnenfinsternis, eher sind dies Wundergeschichten, wie sie auch von anderen Propheten erzählt werden. Jedoch ist festzuhalten, daß Thales darin nie als Finder der Geometrie auftritt, obwohl Platon und Aristoteles der Geometrie und den Geometern große Bedeutung beimessen und auch Hippokrates, Theodoros und Theaitetos als solche erwähnen.

Allein aus den Texten des Aristoteles ergibt sich so etwas wie eine Philosophie des Thales. Einerseits sind dies mythische Vorstellungen von einer belebten Materie, denn er glaubte „der Magnet habe eine Seele, weil er das Eisen bewegt“ und „alles sei voll von Göttern“¹⁸. Andererseits tritt Thales scheinbar gegen den Mythos auf, wenn er ein materielles Prinzip zum Prinzip des Seienden macht. Dies ist das Wasser,¹⁹ Aristoteles zieht daraus den Schluß, daß die Erde auf dem Wasser schwimmt, eine Lehre die Thales gar nicht vertreten haben kann, weil nach der Erfahrung das Wasser auf der Erde ist, so daß nach alter Vorstellung der Okeanos ein Fluß ist, der um die bewohnte Erde fließt. Aber auch nach seinen eigenen Worten erweist sich die ganze Lehre vom Wasser als Prinzip als eine Hypothese des Aristoteles, denn er schreibt jeweils „man sagt“ (*legetai, phasin*), Thales habe dies ausgesprochen. Über eine damit erwähnte Quelle läßt sich nur spekulieren, es kann eine von Aristoteles erfundene Meinung sein oder eine, die an der Akademie entstanden ist, und daher nur als Gerücht zitiert werden konnte.

Die nächsten Nachrichten zu Thales stammen aus Eudemos Geschichte der Geometrie, die wir allerdings nur soweit kennen, wie sie von Proklos überliefert ist. In dessen Kommentar zum 1. Buch der Elemente des Euklid wird Thales an 5 Stellen erwähnt, davon zweimal mit Bezug auf Eudemos. Daß Thales nach ihm als Urvater der Geometrie galt, geht aus einem Iambos des Kallimachos hervor: „Er zeichnete die Figur, die (Pythagoras) entdeckt hat, der erste Mensch, der Dreiecke und Skalene zeichnete.“²⁰ Das Zwiegestirn Thales und Pythagoras steht nunmehr am legendären Anfang der Geometrie. Diogenes Laertius, der das Gedicht des Kallimachos aufgreift, wußte schon nicht, ob er den sogenannten Satz des Thales (Euklid III.31) ihm oder Pythagoras zuordnen sollte;²¹ allein daraus geht hervor, daß solche Zuschreibungen erst von den Doxographen vorgenommen wurden. Auch Proklos folgt diesem Mythos, wenn er neben Thales als dem ersten Geometer, Pythagoras preist, der die Mathematik zur reinen Wissenschaft erhob.²² Seitdem aber nur noch die Nachricht über Thales als möglicherweise echt gilt, weil sie aus der Überlieferung des Eudemos stammt, während die über Pythagoras in diesem Sinne unecht ist, da sie von Iamblichos übernommen wurde, kam die Ansicht auf, Thales allein könnte tatsächlich die Geometrie begründet haben.²³ Aus den bisher untersuchten Quellen ergibt sich dafür allerdings kein Hinweis, so bleibt die Frage, ob die sogenannte thaletische Geometrie einen solchen liefert.

III. Von Proklos werden die folgenden Theoreme Thales zugeordnet:

1. Daß der Kreis durch den Durchmesser halbiert wird. (I. Def. 17)
 2. Daß im gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel gleich sind. (I.5)
 3. Daß bei sich schneidenden Geraden die Scheitelwinkel gleich sind. (I.15)
 4. Daß zwei Dreiecke gleich sind, wenn zwei Winkel und eine Seite gleich sind. (I.26)
- Ad 4. „Eudemos führt in seiner Geschichte der Geometrie dieses Theorem auf Thales zurück. Denn bei der Art und Weise, wie man sagt (*phasin*), er die Entfernung von Schiffen auf dem Meer zeigte, sagt er, bedürfte es dieses Theorems notwendig.“²⁴ Das Theorem ist in unserer Sprache der Kongruenzsatz WSW; er wird bei Euklid angewandt, um zu zeigen, daß das Parallelogramm von der Diagonalen

halbiert wird (I.34). Weiter Anwendungen im Buch III sind dagegen hinfällig, wenn nur die Achsensymmetrie der Figuren benutzt wird. Diese ist hingegen beim Parallelogramm nicht gegeben, so daß der Kongruenzsatz dafür wesentlich ist, andererseits entstand die Parallelogrammtheorie nicht vor Aristoteles, ebenso ist dies für die Theorie der Kongruenz zu vermuten, so daß auch der genannte Kongruenzsatz nicht älter sein dürfte.²⁵ Dennoch wird er von Eudemos auf Thales zurückgeführt, weil er damit, „wie man sagt“ die Entfernung von Schiffen auf dem Meer gezeigt haben soll. D.h. aber nicht mehr, als daß Eudemos dies irgendwie erfahren hat, ähnlich Aristoteles, der die Urstofflehre des Thales ebenso erfahren haben will. Die Bestimmung der Entfernung von Schiffen auf dem Meer durch Thales muß also nicht mehr bedeuten, als eine an der Akademie aufgekommene Meinung, wonach er dieses hätte tun können. Wie man sich diese Messung wohl vorgestellt hat, ist aus dem dafür genannten Kongruenzsatz zu rekonstruieren, so erklärt dies P. Tannery mit der *fluminis varatio* des römischen Agrimensors Marcus Junius Nipsus.²⁶ Damit ist zwar eine abstrakt mögliche Erklärung gefunden, zur konkreten Bestimmung von Schiffen auf dem Meer taugt sie allerdings nicht. Denn diese bewegen sich in großer Entfernung, ein ebenso großes Beobachtungsdreieck auf dem Land abzustecken, dürfte kaum möglich sein, bevor das Schiff den Ort gewechselt hat, abgesehen vom Platzbedarf. Das Verfahren des Agrimensors ist auch nur zur Bestimmung der Breite eines Flusses vorgesehen, ob es derart bereits in archaischer Zeit bekannt war, oder ob man es sich an der Akademie erst ausgedacht hat, kann hier nicht entschieden werden. Wie man die Entfernung zu einem unzugänglichen Punkt in der Ebene praktisch bestimmen konnte, zeigt Heron in Dioptra VIII, dabei wird nicht die Kongruenz, sondern das Verhältnis von Dreiecken verwendet, welches als *seqed* bereits den Ägyptern bekannt war.

Gemäß der doxographischen Tradition gibt es ein weiteres Beispiel praktischer Geometrie, das Thales zugeschrieben wird: Nach Hieronymos von Rhodos „habe er die Höhe der Pyramiden gemessen vermittels ihres Schattens.“²⁷ Das Gleiche berichten Plinius und Plutarch, wobei das einfachste Verfahren, Schattenlänge = Körperlänge, das ursprüngliche des Thales gewesen sein soll. Dies Verfahren dürfte alt sein, und es ist zur Bestimmung der Höhe eines Baumes oder Turmes sicher anwendbar. Jedoch ist es nicht anwendbar bei Pyramiden, da die Entfernung des Schattens der Pyramidenspitze zum Höhenfußpunkt im Inneren der Pyramide nicht zu bestimmen ist, jedenfalls nicht durch eine direkte Messung, wie es das Verfahren intendiert. Hingegen besaßen die Ägypter lange vor Thales ein effektives Verfahren, um die Höhe der Pyramiden zu bestimmen, indem sie den Bau selbst vermaßen, und aus Seitenlänge und *seqed* dann die Höhe berechneten, eine Aufgabe, die im Papyrus Rhind gelöst wird.²⁸ Die dem Thales unterstellte Messung dürfte daher der doxographischen Phantasie entsprungen sein, womit demonstriert werden sollte, daß er nicht nur in Ägypten, sondern auch als Grieche den Ägyptern überlegen war. Daß er aber dort gewesen sein mußte, folgt daraus, daß dort die Geometrie gefunden wurde, an deren Anfang Thales stand. Insofern wurde ihm mit der Zeit immer mehr zugesprochen, z.B. die Ansicht, daß die Etesien (Sommerwinde) die Nilflut erzeugen, Herodot berichtet dies als die Ansicht einiger berühmter Hellenen, in der Doxographie wird sie dann eine des Thales.²⁹

Ad 3. „Es (dieses Theorem) wurde, wie Eudemos berichtet, von Thales zuerst entdeckt (*euremon*), des wissenschaftlichen Beweises aber vom Verfasser der Elemente für Wert erachtet.“³⁰ Eudemos unterscheidet also zwischen Finden einer Tatsache und Beweisen des Theorems, welches erst in den Elementen geleistet wird. Dies können nicht die Elemente des Euklid sein, sondern nur solche, die schon zu

seiner Zeit bekannt waren, wobei Hippokrates von Chios der erste sein soll, der Elemente geschrieben hat.³¹ Gemäß der von ihm überlieferten Schrift über die Mönchen behandelt er den Winkel als Größe, ebenso der von Euklid geführte Beweis des Theorems. Wenn Thales also diesen Beweis nicht geführt hat, dann kann dies heißen, daß er den Winkel nach Ansicht des Eudemos nicht als Größe behandelt hat, wie es ad 2. auch behauptet wird.

Ad 2. Proklos preist Thales als „Entdecker vieler anderer und besonders dieses Theorems. Denn man sagt (*legetai*), er habe als erster erkannt und ausgesprochen, daß in jedem gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel gleich sind, habe aber in altertümlicher Weise für „gleich“ (*isas*) „ähnlich“ (*homoias*) gebraucht.“³² Diese altertümliche Bezeichnung wird auch von Aristoteles verwendet, demnach ist der Winkel für ihn eine Qualität, denn „ähnlich ist, was eine Qualität, gleich, was eine Quantität hat,“ weiter gehört zur Qualität die Figur (*schema*), und zur Figur der Winkel.³³ Nach Proklos wurde diese Ansicht von Eudemos übernommen, „der ein Buch über die Winkel schrieb, worin er ihn als Qualität bezeichnete.“³⁴ Damit war für ihn die Bezeichnung „ähnlich“ für gleiche Winkel gegeben, die dann Thales, als dem ersten Geometer, unterstellt wird. Gemäß dieser Auffassung kann der Beweis des Theorems, wie er von Aristoteles mittels der Größenaxiome angedeutet wird,³⁵ kein Beweis des Thales sein. Jedoch soll er den Sachverhalt zuerst als Theorem „erkannt und ausgesprochen“ haben, wobei erkennen nicht mehr heißen muß, als daß er auch den Grund gesehen hat, was durch die Symmetrie der Figur naheliegt. Zu bemerken ist noch, daß Proklos als Quelle dafür „man sagt“ angibt, insofern seine Behauptung aber mit der Auffassung des Eudemos übereinstimmt, kann diese auch von ihm überliefert sein, eventuell durch Zwischenquellen vermittelt, die nicht zu zitieren sind.

Ad 1. „Daß der Kreis durch den Durchmesser halbiert wird, hat zuerst der berühmte Thales gezeigt (*apodeixai*), sagt man (*phasin*).“³⁶ Entsprechend dem Zusatz können wir annehmen, daß auch diese Aussage des Proklos auf Eudemos zurückgeht. Sicher fehlt aber geht die Deutung, daß Thales dieses Theorem deduktiv bewiesen haben soll,³⁷ denn das Verb für zeigen (*deiknymi*) wird ebenso für die Schiffsentfernung gebraucht. Seine ursprüngliche Bedeutung für die Geometrie war das „konkrete Sichtbarmachen“,³⁸ zum deduktiven Beweis wurde es erst, als die Geometrie allein im Denken zu betreiben war. Platon fordert noch diesen Übergang,³⁹ abgeschlossen ist er für die griechische Mathematik bei Euklid, wo die Anschauung weitgehend aufgehoben ist, und die Behauptungen aus den Voraussetzungen mittels der Axiome zu erschließen sind. So ist bei diesem Theorem der Durchmesser als Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises gegeben; die Behauptung ist, daß er den Kreis halbiert, d.h. in zwei gleiche (kongruente) Teile zerlegt. Proklos gibt dazu einen Widerspruchsbeweis, indem er die Teile aufeinanderlegt, wären sie nicht gleich, wären auch die Radien verschieden.⁴⁰ Dieser „mathematisch“ genannte Beweis erweist sich aber als nur eine logische Umformung der Anschauung, wonach die beiden Teile eben symmetrisch sind. Diese Anschauung ist ursprünglich mit dem Kreis gegeben, doch wann und warum wurde sie als Theorem formuliert, welches eines Beweises bedarf? Nach T.L.Heath ergibt sich die Antwort aus der Bedeutung, die der Satz bei Euklid hat:⁴¹ In Def. 17 wird der Durchmesser definiert, in Def. 18 der Halbkreis als eine Figur, die vom Durchmesser und der Kreislinie umfaßt wird; damit diese Figur „Halbkreis“ genannt werden kann, ist festzustellen, daß der Durchmesser den Kreis halbiert. Denn nach der Auffassung von Aristoteles sind die Gegenstände der Wissenschaft nicht nur nomi-

nal, sondern auch real gegeben, und dem entspricht Euklid, wenn er den Halbkreis als wirklich halben Kreis definiert.

IV. Zusammenfassend bilden die Sätze 1.-3. den Kern der sogenannten thaletischen Geometrie - was war jedoch für Eudemos der Grund, gerade diese einfachen Sätze Thales zuzuordnen? Man kann vermuten, daß dahinter die Vorstellung steht, die einfachsten Sätze seien am einfachsten zu finden, und seien daher zuerst gefunden worden. Diese Vermutung wird durch den Aufbau der „Elemente“ erhärtet; die einfachsten Sätze stehen dort am Anfang, weil es die Elemente der folgenden Sätze sind. Das zugrundeliegende Programm wird von Aristoteles ausgesprochen: „Elemente der *diagrammata* nennen wir dasjenige, dessen Beweise im Beweis dieser, entweder alle oder der meisten enthalten sind.“⁴² Die *diagrammata* sind also Sätze, in deren Beweis die Elemente eingehen, sei es als Postulat oder *lemma*, insofern bilden sie die Bausteine der Geometrie, analog den stofflichen Elementen der Natur. Und wie die Grundstoffe bei Aristoteles am Anfang der Naturphilosophie stehen, so auch die Elemente am Anfang der Geometrie. Wird also Thales an den Anfang der Geometrie gestellt, liegt die Hypothese nahe, daß seine Geometrie ihre anfänglichen Elemente enthalten müsse. Jedoch nicht nur die fehlenden Belege lassen diese Hypothese zweifelhaft erscheinen, sondern die Entwicklung der Mathematik selbst. Denn die Erfahrung zeigt, daß am Anfang Probleme und Lösungen stehen, während Axiome und Beweise erst am Ende gefunden werden, z.B. zeigt dies die Entwicklung der Analysis von ihren Anfängen bis Dieudonné's „*Éléments d'analyse*“. In der Antike dürfte sich die Entwicklung ähnlich abgespielt haben, ausgehend von Problemen, wie der Quadratur des Kreises, entstanden schließlich „Elemente“.

Im Gegensatz dazu ist die Hypothese einer anfänglichen thaletischen Geometrie als Ausdruck der aristotelischen Erkenntnistheorie zu begreifen, wonach sich aus der Wahrnehmung die Erfahrung und die Abstraktion des Allgemeinen bildet.⁴³ So finden wir am Anfang durch Induktion die Anfänge von Kunst und Wissenschaft. Dieses didaktische Modell des Erkennens wurde von Aristoteles und seiner Schule auch als Modell für die Geschichte von Kunst und Wissenschaft verstanden. In der Neuzeit reproduzierte sich die aristotelische Erkenntnistheorie in der empirischen Theorie der Abstraktion, aber damit reproduzierte sich auch das aristotelische Geschichtsmodell. Z.B. hat nach H.Hankel „Thales die Anschauung ins Bewußtsein gebracht und dafür den abstrakten Ausdruck gefunden.“⁴⁴ H.Zeuthen geht von einer sogenannten Wahrnehmungsgeometrie aus, wobei Thales seine Kenntnisse allein durch Betrachten einer geeigneten Figur erworben haben soll.⁴⁵ O.Becker nennt dies die thaletische Grundfigur,⁴⁶ und P.Lorenzen entwickelt daraus eine „thaletische Geometrie“.⁴⁷ Damit bedient sich auch der Konstruktivismus bei Thales, und kann sich dabei zurecht auf Kant berufen, bei dem es heißt: „Dem ersten der den gleichschenkligen Triangel demonstrierte, dem ging ein Licht auf,“⁴⁸ aber nicht aufgrund dessen, was er sah, sondern durch das, was er „selbst a priori hinein dachte.“ So wird der aristotelische Thales noch zum Zeugen der kantischen Kritik, indem auch seine Erkenntnistheorie an ihn geknüpft wird. Dagegen ist die Widerlegung der Hypothese von einer anfänglichen Geometrie des Thales längst hinfällig, doch damit stellt sich erneut die Frage nach den Anfängen der Geometrie.

¹ Aristoteles, Anal. post. 76a35, 92b13. Übers. E. Rolfes, Meiner, Hamburg 1981.

² Proclus, In primum librum Euclidis commentarius, ed. Friedlein, p.78. Übers. „Euklid-Kommentar“, Hrg. M.Steck, Halle 1945.

- ³ Im Sprachgebrauch sind *techné* und *epistémé* einander ersetzbar, z.B. Aristoteles spricht von *mathematikai technai*. Met. 981b23.
- ⁴ Wer zuerst eine Kunst erfand, der wurde von den Menschen bewundert wegen ihrer Nützlichkeit und seiner Weisheit. Met. 981b8.
- ⁵ Proclus, p.65.
- ⁶ Dicks, D.R.: „Thales“. *Classical Quarterly* 53 (1959), S. 294-309.
- ⁷ Vitrac, B.: „Mythes (et réalités) dans l'histoire des mathématiques grecques anciennes“. *L'Europe mathématique, mythes et réalités historiques*. Ed. Goldstein, C. et al. Paris 1995.
- ⁸ Aristoteles, Anal. post. 71b22.
- ⁹ Fehling, D.: *Materie und Weltbau in der Zeit der frühen Vorsokratiker*. Innsbruck 1994, S.7.
- ¹⁰ Herodot: *Historien*. I.74, 75, 120. Übers. A. Horneffer, Kröner, Stuttgart 1971.
- ¹¹ Fehling, D.: *Die sieben Weisen und die frühgriechische Chronologie*. Bern 1985, S. 57.
- ¹² Neugebauer, O.: *The Exact Sciences in Antiquity*. New York 1969, S. 142.
- ¹³ Aristophanes, *Wolken* 180, *Vögel* 1000. Übers. L. Seeger, Artemis, Zürich 1987.
- ¹⁴ Diels, H., Kranz, W.: *Die Fragmente der Vorsokratiker*. Berlin 1972, 11A17. Vgl. Bowen, A. Goldstein, B.: „Meton of Athens and Astronomy in the Late Fifth Century B.C.“ *A Scientific Humanist. Studies in Memory of Abraham Sachs*. Ed. Leichty, E. et al., Philadelphia 1988.
- ¹⁵ Plato, Prot. 343, Hipp. mai. 281.
- ¹⁶ Plato, Rep. 600a, Theaet. 174a.
- ¹⁷ Aristoteles, Pol. 1259a.
- ¹⁸ Aristoteles, De anima 405a20, 411a7. Übers. W. Theiler, Akademie, Berlin 1983.
- ¹⁹ Aristoteles, Met. 983b-984a, De caelo 294a.
- ²⁰ Diels-Kranz, 11A3a.
- ²¹ Diogenes Laertius: *Leben und Meinungen berühmter Philosophen*. Übers. O. Apelt, Meiner, Hamburg 1967, I.24.
- ²² Proclus, p. 65.
- ²³ Burkert, W.: *Weisheit und Wissenschaft*. Nürnberg 1962, Kap. VI.
- ²⁴ Proclus, p. 352.
- ²⁵ Vgl. Neuenchwander, E.: „Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids“. *Arch. Hist. Exact Sciences* 9 (1972), S. 325-380.
- ²⁶ Tannery, P.: *La Géométrie Grecque*. Paris 1887, S. 90.
- ²⁷ Diogenes Laertius, I.27. Vgl. Heath, Th.: *A History of Greek Mathematics*. I., Oxford 1921.
- ²⁸ Problem 57. Vgl. Gericke, H.: *Mathematik in Antike und Orient*. Berlin 1984.
- ²⁹ Herodot, II.20. Diels-Kranz 11A16.
- ³⁰ Proclus, p. 299.
- ³¹ Proclus, p. 66.
- ³² Proclus, p. 250.
- ³³ Aristoteles, De caelo 296b20, 311b34, Met. 1021a11, Phys 188a, Cat. 10a.
- ³⁴ Proclus, p. 125. Vgl. Heath, T.: *Euclid's Elements*. Cambridge 1908, Vol. 1, S. 177.
- ³⁵ Aristoteles, Anal. pr. 41b13.
- ³⁶ Proclus, p. 157.
- ³⁷ Van der Waerden, B.L.: *Erwachende Wissenschaft*. Basel 1966, S. 143 f.
- ³⁸ Szabó, A.: *Die Entfaltung der griechischen Mathematik*. Mannheim 1994, S. 335. In Kap. I enthält das Buch ungläubliche Spekulationen zu Thales, Anaximandros usw..
- ³⁹ Plato, Rep. 510.
- ⁴⁰ Proclus, p.157.
- ⁴¹ Heath, *Euclid*, Vol. 1, S. 185.
- ⁴² Aristoteles, Met. 998a25. Vgl. Proclus, p. 72.
- ⁴³ Aristoteles, Anal. post. 100a-b.
- ⁴⁴ Hankel, H.: *Beiträge zur Geschichte der Mathematik*. Leipzig 1874.
- ⁴⁵ Zeuthen, H.: *Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter*. Kopenhagen 1896.
- ⁴⁶ Becker, O.: *Das mathematische Denken der Antike*. Göttingen 1957.
- ⁴⁷ Lorenzen, P.: „Geometrie als meßtheoretisches Apriori der Physik“. *Physik und Didaktik* 8, 1980, S. 201-299.
- ⁴⁸ Kant, I.: *Kritik der reinen Vernunft*. Meiner, Hamburg 1956, B XI.

Die Kurven des Persäus

MARKO RAZPET

PÄDAGOGISCHE FAKULTÄT IN LJUBLJANA

SLOWENIEN

Der altgriechische Mathematiker Persäus ist in mathematischer Literatur kaum bemerkt. Es ist bekannt, dass Proklus (410–485), Neoplatonist, auch *Elemente* von Euklid (325–265 v. Chr.) kommentierte und dass dabei auch Persäus erwähnt wurde. Proklus schrieb auch, wie Kurven als Schnittkurven von verschiedenen Flächen entstehen. Aus allen bekannten Tatsachen kann man entnehmen, dass Persäus zwischen Geminus (130–70 v. Chr.) und Euklid lebte.

Ungefähr um 300 v. Chr. entdeckte Menächmus (380–320 v. Chr.) Kegelschnitte. Sie entstehen als Schnittkurven von einem Doppelkegel, der durch eine Ebene geschnitten wird. Spezielle Lagen der Ebene ergeben Ellipse, Hyperbel, Parabel, Geraden oder einen Punkt. Menächmus wurde auch von Proklus erwähnt: *Menächmus, ein Knabe von Eudoxus, und sein Bruder Dinostratus*. Eudoxus (408–355 v. Chr.) und Dinostratus (390–320 v. Chr.) studierten mit Platon (427–347 v. Chr.) und hatten die damalige Geometrie ziemlich verbessert. Ein vertieftes Studium von Kegelschnitten begann Apollonius aus Perga (261–190 v. Chr.).

In jener Zeit versuchten die Gelehrten drei Probleme der Antike lösen: Problem der Dreiteilung des Winkels, Problem der Quadratur des Kreises und Problem der Verdoppelung des Würfels. Durch diese Strebung entdeckte man viele interessanten Kurven.

Etwas 200 Jahre nach Menächmus entdeckte Persäus andere Kurven als Schnittkurven, die wir heute nach ihm nennen. Das sind Schnittkurven der gegebenen Torusfläche mit einer Ebene, parallel zur Achse des Torus. Man nennt diese Kurven oft nach Persäus. In englischer Literatur findet man oft die Benennung *the spiric sections of Perseus*, denn $\sigma\pi\epsilon\iota\rho\alpha$ bedeutet in altgriechischer Sprache den Torus.

Die Kurven des Persäus sind mit den Cassinischen (G. D. Cassini, 1625–1712) Kurven eng verbunden. Cassini, dem die Lehre von Kopernikus noch fremd war, meinte, dass die Sonne sich um die Erde dreht. Cassini nahm für die Bahn der Sonne eine von seinen Kurven und die Erde sollte in einem von den Brennpunkten stehen.

Die sehr bekannte Bernoullische Lemniskate (nach Jakob Bernoulli (1654–1705)) ist ein Spezialfall der Cassinischen Kurven. Es gibt noch allgemeinere Lemniskaten von James Booth (1810–1878). Auch von diesen Kurven ist die Bernoullische Lemniskate ein Spezialfall. Diese Behauptung wird in der Fortsetzung auch bewiesen.

Zu diesem Zweck müssen wir zuerst die Gleichung der Torusfläche finden. Es sei \mathcal{K} eine Kreislinie mit dem Halbmesser b und mit dem Zentrum $Z(a, 0, 0)$ im $Oxyz$ Raumkoordinatensystem.

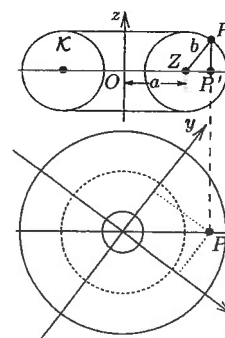


Abb. 1: Achsendschnitt (oben) und sein Grundriss (unten)

Die Torusfläche entsteht durch die Drehung dieser Kreislinie um die z -Achse. Dadurch beschreibt jeder Punkt auf der Kreislinie \mathcal{K} ebenso eine Kreislinie, die zur Oxy Ebene parallel ist. Die Kreislinie \mathcal{K} hat ihr Zentrum Z immer auf der Oxy Ebene und die Ebene des Kreises \mathcal{K} enthält die z -Achse. Der Punkt $P(x, y, z)$ auf der Torusfläche und seine orthogonale Projektion $P'(x, y, 0)$ auf die Oxy Ebene sind von der z -Achse um $\sqrt{x^2 + y^2}$ entfernt. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $ZP'P$ folgt:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2.$$

Nach der Quadrierung und Elimination der übrigen Wurzel bekommen wir die Gleichung der Torusfläche

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Wir bemerken, dass die Torusfläche eine algebraische Fläche vierten Grades ist. Dabei heißt b der Innenhalbmesser und a der Außenhalbmesser der Torusfläche.

Wenn $a > b$, hat die Torusfläche ein "Loch". Solche Fläche könnte die Standardtorusfläche heißen. Wenn $a = b$, wird dieses "Loch" gesperrt und wir haben die Horntorusfläche. Wenn aber $a < b$ ist, schneidet die Fläche sich selbst, sie heißt die Spindeltorusfläche.

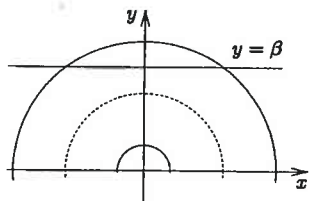


Abb. 2: Zur Entstehung der Kurve des Persäus

Schneiden wir unsere Torusfläche mit der Ebene $y = \beta$, parallel zur Achse unserer Torusfläche. Dabei kann $|\beta| \leq a + b$ gelten, so dass wir keinen leeren Durchschnitt haben. Falls $y = -\beta$ haben wir mit derselben Kurve zu tun, deswegen dürfen wir $\beta \geq 0$ nehmen. Die bekommene Raumkurve projizieren wir danach auf die Ozx Ebene. Auf diese Weise haben wir die gesuchte Kurve in impliziter Form:

$$(x^2 + \beta^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + \beta^2).$$

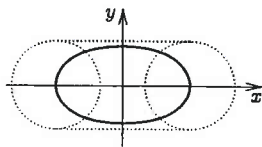


Abb. 3: Kurve des Persäus bei $a = 1.5, b = 1, \beta = 2$

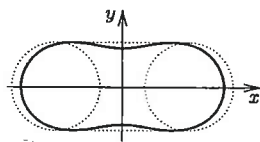


Abb. 4: Kurve des Persäus bei $a = 1.5, b = 1, \beta = 1$

Anstatt z schreiben wir lieber y , denn die Kurven des Persäus werden in dem Oxy Koordinatensystem behandelt. Die Gleichung der Kurve des

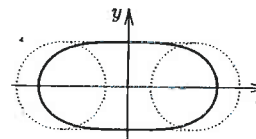


Abb. 5: Kurve des Persäus bei $a = 1.5, b = 1, \beta = 1.5$

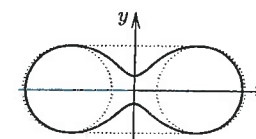


Abb. 6: Kurve des Persäus bei $a = 1.5, b = 1, \beta = 0.55$

Persäus heißt:

$$(x^2 + y^2 + a^2 - b^2 + \beta^2)^2 = 4a^2(x^2 + \beta^2). \tag{1}$$

Das ist eine algebraische Kurve vierten Grades und sie besitzt 3 Parameter: a, b, β . Dabei sind a und b positive Zahlen und $|\beta| \leq a + b$. Die Form einer Kurve des Persäus ist von den Relationen zwischen diesen Parametern abhängig.

Unsere Aufgabe besteht darin, dass wir eine Verwandtschaft zwischen den Kurven des Persäus und den Cassinischen Kurven finden.

Um die Cassinischen Kurven einzuführen nehmen wir Punkte $F_1(-c, 0)$ und $F_2(c, 0)$ im Oxy Koordinatensystem. Dabei ist c eine positive Zahl. Wir heißen F_1 und F_2 Brennpunkte der Cassinischen Kurve. Der Punkt P liegt der Definition nach auf der Cassinischen Kurve, wenn $|F_1P| \cdot |F_2P| = \alpha^2$, wobei α eine positive Konstante ist. Die Definition der Cassinischen Kurve ergibt die Gleichung:

$$|F_1P|^2 \cdot |F_2P|^2 = \alpha^4.$$

Diese Gleichung wird jetzt verallgemeinert, und zwar durch eine lineare Funktion von $|OP|^2 = x^2 + y^2$. So haben wir eine neue Schar von Kurven,

$$|F_1P|^2 \cdot |F_2P|^2 = c_1|OP|^2 + c_2,$$

wobei c_1 und c_2 zwei neue Konstanten bezeichnen. Wenn $c_1 = 0$ und $c_2 = \alpha^4$, haben wir die bekannten Cassinischen Kurven. Weil

$$|F_1P|^2 = (x + c)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad |F_2P|^2 = (x - c)^2 + y^2,$$

haben wir wieder eine algebraische Kurve vierten Grades:

$$((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) = c_1(x^2 + y^2) + c_2.$$

Durch Vereinfachungen geben wir der obigen Gleichung eine schönere Gestalt:

$$(x^2 + y^2)^2 + (2c^2 - c_1)y^2 - (2c^2 + c_1)x^2 + (c^4 - c_2) = 0. \quad (2)$$

Wir bemerken schnell, dass sich die Kurven des Persäus in dieser Familie befinden. Wenn wir die Gleichung (1) bearbeiten, haben wir:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(a^2 - b^2 + \beta^2)y^2 - 2(a^2 + b^2 - \beta^2)x^2 + (a^2 - b^2 + \beta^2)^2 - 4a^2\beta^2 = 0.$$

Die Kurve (2) ist mit Parametern c , c_1 und c_2 ganz bestimmt, die Kurve des Persäus (1) aber mit Parametern a , b und β .

Stellen wir sich vor, dass Parameter a , b und β der Kurve des Persäus (1) bekannt sind. Berechnen wir daraus alle Parameter c , c_1 und c_2 der Kurve (2). Durch die Vergleichung der Koeffizienten bekommen wir:

$$\begin{aligned} 2a^2 - 2b^2 + 2\beta^2 &= 2c^2 - c_1, \\ 2a^2 + 2b^2 - 2\beta^2 &= 2c^2 + c_1, \\ (a^2 - b^2 + \beta^2)^2 - 4a^2\beta^2 &= c^4 - c_2. \end{aligned}$$

Durch Addition der ersten zwei Gleichungen haben wir zuerst $c^2 = a^2$. Denn a und c positiv sind, gilt $c = a$. Durch Subtraktion derselben Gleichungen im System finden wir: $c_1 = 2(b^2 - \beta^2)$. Endlich folgt aus der dritten Gleichung im System noch c_2 . Die Lösung des Systems lautet:

$$c = a, \quad c_1 = 2(b^2 - \beta^2), \quad c_2 = a^4 - (a^2 - b^2 + \beta^2)^2 + 4a^2\beta^2.$$

Was geschieht, wenn aber Parameter $c > 0$, c_1 und c_2 der Kurve (2) bekannt sind? Welcher Kurve des Persäus entsprechen sie? Es ist klar, dass zuerst $a = c$ gilt, doch nach einer ähnlich komplizierter Rechnung folgt:

$$\beta^2 = \frac{1}{16c^2}(c_1^2 - 4c^2c_1 + 4c_2), \quad b^2 = \frac{1}{16c^2}(c_1^2 + 4c^2c_1 + 4c_2).$$

Es ist wahr, alle Kurven des Persäus sind vom Typ (2). Die Cassinische Kurve entsteht, wenn $c_1 = 0$ und $c_2 = \alpha^4$, wobei α eine positive Konstante ist. In diesem Fall entdecken wir $a = c$ und $b = \beta = \alpha^2/(2c)$.

Wenn $c_2 = c^4$, haben wir auch ein wichtiges Beispiel. Die Kurve (2) heißen wir *Boothsche Lemniskate*. Ihre Gleichung lautet:

$$(x^2 + y^2)^2 + (2c^2 - c_1)y^2 - (2c^2 + c_1)x^2 = 0.$$

Freilich ist die Boothsche Lemniskate von zwei Parametern abhängig: c und c_1 . Wir sagen, dass die Boothsche Lemniskate *elliptisch* ist, falls $c_1 > 2c^2$, und *hyperbolisch*, falls $|c_1| < 2c^2$. Eine hyperbolische Boothsche Lemniskate ist einer Bernoullischen sehr ähnlich. Die Bernoullische Lemniskate entsteht für $c_1 = 0$.

In der Fortsetzung werden wir erkennen, dass die Unterscheidung zwischen elliptischen und hyperbolischen Boothschen Lemniskaten einen Sinn hat, weil die Boothsche Lemniskate sehr eng mit der Ellipse beziehungsweise Hyperbel verbunden ist.

Die Boothsche Lemniskate ist gleichzeitig eine Kurve des Persäus, wenn wir folgende Werte einsetzen:

$$a = c, \quad b = \frac{1}{4c}|c_1 + 2c^2|, \quad \beta = \frac{1}{4c}|c_1 - 2c^2|.$$

Die Boothsche Lemniskate ist eine alte Bekannte, wenn $c_1 = 0$:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2).$$

Das ist die Bernoullische Lemniskate, die deswegen ein Spezialfall der Kurve des Persäus ist, und zwar wenn:

$$a = c, \quad b = \beta = \frac{c}{2}.$$

Eine neue interessante Verbindung mit der Boothschen Lemniskate finden wir, wenn wir die sogenannte *pedale Kurve* der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ oder Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ in Bezug zu ihrem Zentrum O konstruieren. Machen wir das zuerst für Ellipse. Die pedale Kurve der Ellipse in

Bezug zu ihrem Zentrum O ist der Definition nach geometrischer Ort aller orthogonalen Projektionen Q des Punktes O auf alle Tangenten der gegebenen Ellipse. Das heißt, die Punkte Q sind *Pedalen* des Punktes O auf den Tangenten der Ellipse.

Legen wir auf unsere Ellipse die Tangente in Punkte $P(s, t)$. Es gilt also $b^2s^2 + a^2t^2 = a^2b^2$. Die Gleichung der Tangente in P lautet: $b^2sx + a^2ty = a^2b^2$. Die orthogonale Gerade durch O auf die Tangente hat die Gleichung $-a^2tx + b^2sy = 0$. Den gesuchten Schnittpunkt $Q(x, y)$ bekommen wir als die Lösung des Systems:

$$\begin{aligned} b^2sx + a^2ty &= a^2b^2, \\ -a^2tx + b^2sy &= 0. \end{aligned}$$

Ganz ohne Schwierigkeiten finden wir

$$x = \frac{a^2b^4s}{a^4t^2 + b^4s^2}, \quad y = \frac{a^4b^2t}{a^4t^2 + b^4s^2}.$$

Wir haben jetzt die Parameter s und t zu eliminieren. Aus der Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{a^4b^4}{a^4t^2 + b^4s^2}, \\ a^2x^2 + b^2y^2 &= \frac{a^6b^8s^2 + a^8b^6t^2}{(a^4t^2 + b^4s^2)^2} = \frac{a^8b^8}{(a^4t^2 + b^4s^2)^2}, \end{aligned}$$

föhren wir aus eine neue Gleichung, der beide Koordinaten des Punktes $Q(x, y)$ genügen:

$$(x^2 + y^2)^2 - b^2y^2 - a^2x^2 = 0. \quad (3)$$

Das ist eben die pedale Kurve der Ellipse.

Ähnlicherweise finden wir auch die pedale Kurve der Hyperbel im Bezug zu ihrer Zentrum:

$$(x^2 + y^2)^2 + b^2y^2 - a^2x^2 = 0. \quad (4)$$

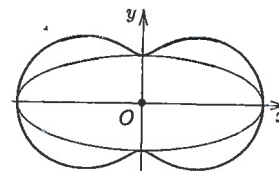


Abb. 7: Beispiel einer elliptischen Boothschen Lemniskate

In beiden Fällen geht es um die Boothsche Lemniskate mit Parametern c und c_1 , und zwar muss man feststellen, dass bei der Ellipse $a > b$ sein muss, dass man eine reelle Zahl $c = \sqrt{a^2 - b^2}/2$ bekommt. Daraus folgt: $c_1 = (a^2 + b^2)/2$. Bei der Hyperbel ist $c = \sqrt{a^2 + b^2}/2$ und $c_1 = (a^2 - b^2)/2$, wobei eine Begrenzung für a und b nicht nötig ist. In beiden Fällen ist c der Halbwert der linearen Exzentrizität des Grundkegelschnittes.

Aus der Ellipse und Hyperbel bekommene Kurven sind freilich die Kurven des Persäus, was sofort zu bemerken ist, wenn wir Gleichungen (3) und (4) mit der Gleichung (1) beziehungsweise (2) vergleichen. Ebenso ist es nicht schwer die entsprechenden Parameter auszurechnen. Die bezeichnen wir jetzt mit \bar{a} , \bar{b} und β . Dabei ist \bar{a} der Halbmesser jener Kreislinie, auf welcher die Kreislinie mit dem Halbmesser \bar{b} rotiert, so dass wir die richtige Torusfläche bekommen. Die wird dann durch die Ebene auf der Distanz β von der Achse dieser Fläche geschnitten.

Die Parameter bei der Ellipse sind von der Form

$$\bar{a} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \bar{b} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \beta = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}};$$

wir haben also mit der selbstschneidenden Torusfläche zu tun, weil $\bar{a} < \bar{b}$; für Hyperbel sind die Parameter analog:

$$\bar{a} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \bar{b} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \beta = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}};$$

das heißt, die Torusfläche hat ein "Loch", denn $\bar{a} > \bar{b}$.

Alle erwähnten Eigenschaften der Boothschen Lemniskaten, können wir für das Studium mit Hilfe von einem günstigen Computerprogramm benötigen. Es gibt nämlich Computerprogramme, sogenannte dynamische Geometriesysteme oder dynamische Geometrieprogramme, mit denen kann man

gut Kurven und ihre Eigenschaften beobachten und vielleicht auch neue Tatsachen entdecken.

Literatur

- [1] Y. Baulâc, F. Bellemain, J. M. Laborde: *The Interactive Geometry Notebook*, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove 1992
- [2] E. Brieskorn, H. Knörrer: *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, 1986
- [3] E. H. Lockwood: *A Book of Curves*, Cambridge University Press, 1963
- [4] H. Schumann, D. Green: *Discovering Geometry with a Computer - using Cabri Géomètre*, Chartwell-Bratt Ltd., Bromley 1994
- [5] <http://www.astro.virginia.edu/~ewv6n/math/SpiricSEction.html>
- [6] http://www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir/
- [7] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html>
- [8] <http://rzserv2.fh-lueneburg.de/u1/gym03/expo/jonatur/wissen/mathe/>



Harald Gropp

Was Virgil of Salzburg the zeroth Austrian mathematician or what is a geometer ?

Harald Gropp
Mühlingstr. 19, D-69121 Heidelberg, Germany
d12@ix.urz.uni-heidelberg.de

1 Introduction

In a talk and paper [8] in the IV. Austrian Symposion on the history of mathematics in 1995 Hermann von Kärnten was discussed as the first Austrian mathematician. In 1995 the main topic of this meeting was *999 Jahre Österreich — ein Teil der globalen Entwicklung der Mathematik*.

In this paper a scientist will be discussed who lived and worked in Salzburg more than 2 centuries before Austria started its existence. Maybe he is the first known scientist at all in the region of Salzburg.

A few sentences should be included here in order to explain the author's motivation for investigating the following. In 1995 a Colloquium Carolus Magnus was held in Aachen in order to celebrate the achievements of Alcuin of York and his group of scientists at the court of Charlemagne 1200 years ago. In this context it is quite remarkable that there is a collection of mathematical exercises which also contains combinatorial problems, e.g. the transport problem of a wolf, a goat, and a cabbage. For further details see [7]. Such a problem is not known in other early collections and poses the problem to further investigate the mathematics and science of the British Isles. A first paper on Celtic mathematics [6] mainly discusses the calendar of Coligny, a Gaulish calendar which was probably used in Gaul before the conquest of Julius Caesar.

The scientist who will be discussed in this paper is the Irish abbot Feirgil who later became the bishop of Salzburg. He is a key figure in the context of the Irish missionary movement of the Celtic Church in Central Europe and its dissemination of religious and scientific ideas. Moreover, in Ireland he was called Feirgil the Geometer which asks for a possible connection to mathematics.

To call Feirgil the zeroth Austrian scientist seems to be appropriate since he lived more than 200 years before Austria was created in 996. Formally, Feirgil was an Irish and a Bavarian scientist, but the period of the eighth century was very decisive for the later political and religious development of Southern Central Europe.

1.1 Further anniversaries

In 1984 a Virgil-Symposium was held in Salzburg in order to commemorate the 1200th anniversary of Feirgil's death in 784. The corresponding conference volume [4] contains many papers on Feirgil and his time from many different points of view.

14 years later the 1200th anniversary of the Archbishopry of Salzburg which was founded in 798 was celebrated by the visit of Pope John Paul II. in Salzburg. The current archbishop of Salzburg Dr. Georg Eder addressed to the Pope as follows.

Das kommende Jahr 1998 wird für die Erzdiözese Salzburg ein großes sein: Wir gedenken des Tages (20.4.798), an dem Ihr Vorgänger Leo III. auf Bitten Karl des Großen Salzburg zur Metropole über die vom hl. Bonifatius 739 gegr. Bistümer erhob.

The archbishop continues mentioning Salzburg as the center of missions in Central Europe, as the town with the cathedral of St. Rupert and St. Virgil.

During the time of Feirgil in Salzburg the cathedral was built from 767 until 774 as the episcopal church of St. Peter. In a large inscription in the cathedral Feirgil's involvement in this history is described as follows.

ECCLESIA PRINCIPALIS SALISBURGI A SANCTO VIRGILIO EPISCOPO PRIUS AEDIFICATA DEINDE SANCTI RUPERTI SOCIORVMQVE EIUS SANCTORVM CHVNIALDI ET GISLARI RELIQVIS EO TRANS-LATIS ANNO DCCLXXIV SANCTO RUPERTO EPISCOPO ET CONFESSORI DEDICATA DENIQVE ANNO DCCXCVIII ARNONE AN-TISTITE CATHEDRA ARCHIEPISCOPALI INSIGNITA EST.

While no direct textual sources of Feirgil are known today the most remarkable piece of his time is a chalice called Tassilokelch which was probably produced in Salzburg during Feirgil's years and which today can be regarded in the monastery of Kremsmünster, situated between Salzburg and Neuhofen/Ybbs. The participants of this symposium were able to see this relict of the culture of Salzburg of the eighth century during the afternoon excursion to Kremsmünster.

1.2 Further literature

Apart from short information in lexica and encyclopaediae of history and church history and the already mentioned conference volume of 1984 there are further main sources which shall be discussed briefly already here.

There is a 4 volume history of Christianity in Southern Central Europe [1] containing many details, also on the general history and church history in other parts of the world. For our purpose volume 3/1 (Von Columbanus zu Karl dem Großen) is the most interesting one describing the period from the first important Irish missionary Columbanus who came to the continent in 590 until the reign of Charlemagne whose activities brought this Irish tradition to an end.

A short general introduction to the Irish role in this part of the history of Europe can be found in [2]. The German subtitle of Cahill's book is as follows: *Die nie erzählte Geschichte der heldenhaften Rolle, die Irland vom Untergang Roms bis zum Aufstieg des mittelalterlichen Europa spielte.*

There are two recent and very informative books on the regional history of Salzburg and Austria. Wolfram's book [13] describes the history of the missionaries in Bavaria and Kärnten. The book of Dopsch [5] discusses the history of the town of Salzburg from its early beginning up to the present time.

2 The general history

Most of the important general facts on the history of the Merovingians and the Carolingians in the Frankish Empire, the Bavarian dukes, the popes in Roma, and the bishops of Salzburg can be found in the given references and in general books on history and church history. In the following only a very rough frame will be given.

The Carolingians were the chancellors (Majordomus) of the Merovingians. During the eighth century the political power and influence was shifted from the Merovingian kings to the Carolingian chancellors. In 751 Pippin III., the son of Karl Martell, was declared to be king by the Pope in Roma, and the legitimate Merovingian king was forced to resign. The son of Pippin, Karl, became his successor as king in 768. The later Charlemagne became Frankish emperor in Roma in the year 800.

In the middle of the eighth century the Frankish empire did not yet include the duchy of Bavaria whose duke Odilo succeeded to maintain quite a strong independence. In 748 Odilo died, and his 8 year old son Tassilo became the Bavarian king. Tassilo III. succeeded to keep his duchy of Bavaria out of the direct influence of the Frankish kings Pippin and Charlemagne until 788 when he had to give up in a decisive battle, was sentenced to death in Ingelheim. Tassilo was allowed to spend his last years in the monastery of Lorsch. The duchy of Bavaria was integrated into the Frankish empire.

2.1 Salzburg before Feirgil

The town of Salzburg (or Iuvavum as it was still called in the first half of the eighth century) became a bishop's town at the end of the seventh century when Rupert came from Worms in order to revive the Christian tradition of Iuvavum. Rupert returned to Worms in 716 and after several other not so well known intermediate bishops the bishop John died in 745.

2.2 Feirgil's biography

Feirgil was born in Ireland probably in the early beginning of the eighth century. Having been priest and later abbot in different monasteries, probably in Aghaboe in Central Ireland and maybe on the island of Iona Feirgil came to the court of the Frankish Majordomus Pippin III., the later Carolingian

king, in Quierzy (now in France) in 743 and stayed there until 745. Feirgil arrived in Salzburg in 745/746, together with several companions. Feirgil became the successor as the abbot of the monastery St. Peter in Salzburg without being bishop following the Irish monastery tradition where the abbot was the highest authority. The episcopal services were done by Feirgil's Irish companion Dub Da Chrich (in Latin Dobbdagrecus) who later became the leader of the monastery in Chiemsee.

Probably in 749 Feirgil became the bishop of Salzburg. His scientific controversies with clerical authorities will be described below.

Feirgil probably built up a tradition of science, education, and art in Salzburg. From 767 until 774 the first cathedral was built. In 777 the monastery of Kremsmünster was founded by the Bavarian duke Tassilo and the bishop Feirgil of Salzburg. These two enormous achievements demonstrated the importance of the episcopal and the political influence of Salzburg and Bavaria, resp.

In 784 Feirgil died and was forgotten very soon. After the integration of Bavaria into the Frankish empire in 788 and the founding of the archbishopric of Salzburg in 798 a quite different episcopal tradition was started in Salzburg focussing on the tradition of Rupert.

Only in 1181 the grave of Feirgil was rediscovered, and in 1233 Feirgil was canonized by the Pope, and still is the only official saint of Salzburg.

3 The scientific controversies

The scientific works and achievements cannot be discussed here in detail, and the reader is referred to the literature. In the following two controversies will be shortly described which may be interesting in connection with our question.

3.1 Baptize again?

In 741 Pope Zacharias became the successor of Pope Gregory III. His official representative in the Frankish empire (and also in Bavaria) was Bonifatius who was responsible for the creation of the episcopal organization of the Roman church in these regions.

It is reported that there were priests who baptized *in nomine patria et filia et spiritus sancti* in incorrect Latin which means something like *in the name father country and daughter and of the holy spirit*. Bonifatius gave the order to baptize these people a second time. In a first controversy between Feirgil who did not follow this order and Bonifatius the Pope supported Feirgil in 746.

3.2 The antipodes

A second controversy arose about the fact that maybe Feirgil supported a theory which claims the rotundity of the earth and furthermore discusses inhabitants of the antipodal areas. In this aspect, the Pope did not support

Feirgil. However, Feirgil could stay the bishop of Salzburg for many more years. Of course, Feirgil lived and worked outside of the Frankish empire and the direct influence of Bonifatius and the Pope.

From a modern point of view, Feirgil was right in principle, but wrong in detail. Of course, the earth is spherical and the southern hemisphere is inhabited by humans. However, the antipodal region of Salzburg is just water in the Pacific Ocean without islands. The closest island, the southern island of New Zealand, is antipodal to Northern Italy and North Eastern Spain. However, New Zealand was immigrated as late as 1100, hence at the time of Feirgil, there were no human beings on this island.

3.3 The otherworld

What follows is a brief discussion of this controversy from the general cultural point of view of Feirgil's time and his Irish background which may shed an interesting light. The following citations are taken from a paper of Carey [3] who tries to discuss the controversy in comparison with the cultural background of Irish traditions. For the convenience of the reader the citations are quoted together with the English translations from [3]. Several Irish citations are included in order to give a small flavour in the context of the general topic of this paper.

The exact words in a letter from Pope Zacharias to Bonifatius are as follows.

quod alius mundus, et alii homines sub terra sint, seu sol et luna

that there are another world and other men beneath the earth, or even the sun and moon

These words do not necessarily imply a statement in the sense of modern European science and remind us of the old Irish tradition of the so-called Otherworld which occurs as the maybe subterranean land of the immortals, underground or underwater.

The following verses are from an Irish poem, the *Saltair na Rann* (ca. tenth century) and cited from [3].

ceti arbair trebait ann dondleith tall dontalmain tinn? itat iltnatha fo muirib fon mbith

what are the multitudes which dwell there on the other side of the solid earth?there are many tribes under the seas, beneath the world

In the *Immram Brain maic Febail* the overseas Otherworld is described as follows.

Fil tri coicta inse cian
isind oceon frinn aniar
is mo Erinn co fa di
cach ai diib no fa thri

There are a hundred and fifty distant islands
in the ocean to the west of us:
twice the size of Ireland,
or thrice, is each of them.

In conclusion of this part the following citation from [3] summarizes a possible interesting aspect of the controversy about the problem concerning the antipodes. Whether Feirgil is the author of the so-called cosmography of Aethicus [9] seems to be doubtful.

Might it have figured in Virgil's preaching to his half-pagan Bavarian flock, an argument that the subterranean spirits of Germanic belief were really the faraway Antipodes?

4 What is a geometer?

Instead of answering the question in the title of this short paper and instead of a conclusion the last section shall shortly discuss the situation of science in Ireland in those centuries and a possible link to the problem of the etymology of the word "geometry". Anyhow it seems to be certain that Feirgil was an important educated scientist who influenced the region of Salzburg which later became a part of Austria very much. In order to decide whether he was a mathematician the possible meaning of the word "geometer" must be discussed further.

4.1 Science and culture in Ireland

It might surprise the reader that a missionary from Ireland brought science and knowledge to the continent. In addition to the already mentioned literature the reader is referred to a book [11] and a paper [10] of M. Richter for a general survey on Ireland in those centuries and to a book of Streit [12] for a discussion of the religious development in Ireland starting from the megalith culture many millennia ago.

The fact that the knowledge on early Ireland is not much known is more or less explained by the following citation from Richter [10] reflecting on the lack of knowledge of the Irish language among most of the researchers on Ireland.

Dazu ist es nötig, auf die Situation im frühen Irland einzugehen,, daß man im Fall von Irland, wie es so schön heißt, mit seinem Latein schnell am Ende ist und eine Kenntnis der irischen Sprache benötigt. Irland gehört nicht zu den Essentials europäischer Mediävisten. Wer die irische Sprache nicht beherrscht, kann bestenfalls die Produkte irischer Gelehrsamkeit in lateinischer Sprache rezipieren.....

The main motivation for scientists in Ireland was to develop the "computus" in order to be able to determine the correct date of Easter. This helped to develop sciences like mathematics, astronomy, physics, and chronology.

Moreover, there was a large interest in geography, cartography, and navigation because of possible applications in maritime travels, and also in medicine.

4.2 Mathematics, geometry, and gematria

The etymology of the word *geometry* looks easy in Greek language meaning something like *measuring the earth*. However, the axiomatic Greek geometry was not built up in order to measure the earth. Throughout the last 2000 years the terms *geometry* and *mathematics* as well as *geometer* and *mathematician* have been used rather differently.

Last but not least, there is a close similarity between the Greek word *geometry* and the Hebrew word *gmr* or *gematria* which means some kind of mathematical technique exploiting the relation of letters and numerals in Hebrew and Greek.

A discussion of the role of Ireland in the dissemination of ancient knowledge could help to answer some open questions in this aspect.

4.3 Some modern Irish words for sciences

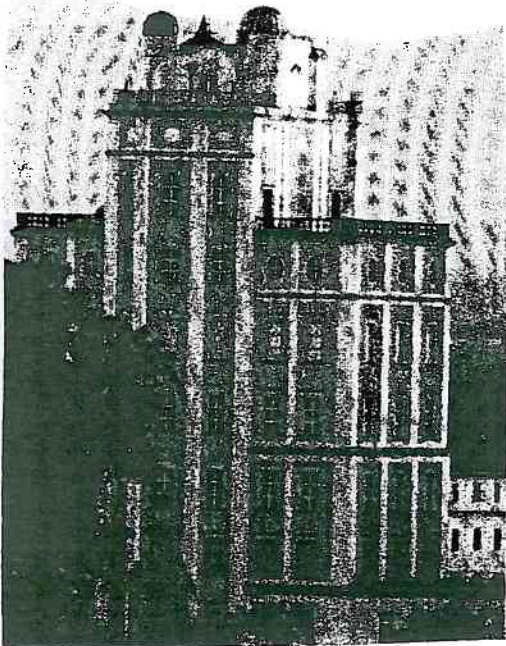
It is quite surprising that the modern Irish word for geometry is *ceimseata* which is derived from *ceim* : *step, stair, degree, phase* and obviously not at all connected to the Greek word. The corresponding words for other sciences are either direct variations from the Greek roots like e.g. *matamaitic* : *mathematics* or *fisic* : *physics* or *loighic* : *logic* or they are partial translations of the corresponding Greek word like e.g. *tireolaíocht* : *geography* (*tir* : *country, land*) or *realteolaíocht* : *astronomy* (*realta* : *star*).

Let us hope that further investigations will clarify the role of Feirgil in the eighth century as well as the origin of the word geometry.

References

- [1] P.F. Barton, *Geschichte des Christentums in Österreich und Südostmitteleuropa, Von Columbanus zu Karl dem Großen*, Wien (1995).
- [2] T. Cahill, *How the Irish saved civilization*, New York (1995); in German: *Wie die Iren die Zivilisation retteten*, München (1998).
- [3] J. Carey, *Ireland and the antipodes: The heterodoxy of Virgil of Salzburg*, *Speculum* 64 (1989), 1-10.
- [4] H. Dopsch (ed.), *Virgil von Salzburg: Missionar und Gelehrter*, Symposium Der heilige Virgil und seine Zeit, Salzburg (1985).
- [5] H. Dopsch, *Geschichte der Stadt Salzburg*, Salzburg (1996).
- [6] H. Gropp, *Some remarks on Celtic mathematics*, *Historia e Educação Matemática, Proceedings Braga 96, Vol. II*, (eds. M.J.Lagarto, A. Vieira, E. Veloso), Braga (Portugal) (1996), 162-169.

- [7] H. Gropp, *Propositio de lupo et capra et fasciculo cauli* — On the history of river-crossing problems, in: *Charlemagne and his heritage, 1200 years of civilization and science in Europe*, Vol. 2, (eds. P.L. Butzer, H.Th. Jongen, W. Oberschelp), Turnhout (Belgium) (1998), 31-41.
- [8] H. Kaiser, *Hermann von Kärnten — der erste österreichische Mathematiker?* in: C. Binder (ed.), *IV. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik in Neuhofen/Ybbs* (1995), Wien (1996), 123-126.
- [9] O. Prinz (ed.), *Die Kosmographie des Aethicus*, München (1993).
- [10] M. Richter, *das irische Erbe der Karolinger*, in: *Charlemagne and his heritage, 1200 years of civilization and science in Europe*, Vol. 1, (eds. P.L. Butzer, H.Th. Jongen, W. Oberschelp), Turnhout (Belgium) (1997), 79-96.
- [11] M. Richter, *Irland im Mittelalter, Kultur und Geschichte*, München (1996).
- [12] J. Streit, *Sonne und Kreuz, Irland zwischen Megalithkultur und frühem Christentum*, Stuttgart (1977).
- [13] H. Wolfram, *Salzburg, Bayern, Österreich: die Conversio Bagoariorum et Carantanorum und die Quellen ihrer Zeit*, Wien (1995).



Mathematik - entdeckt oder erfunden?

Die Historiographie als Prüfstein

Detlef D. Spalt

Die im Titel gestellte Frage nach der Erkenntnisweise der Mathematiker ist untrennbar verknüpft mit der ontologischen Grundfrage der Mathematik, also mit der Frage: Was sind die wirklichen mathematischen Gegenstände? Gibt es diese Gegenstände *vor* allem Tun, sodass sie durch das mathematische Arbeiten erkannt - d. h. dann: ins Kognitive transformiert - werden? Oder entstehen die mathematischen Gegenstände *allererst* im mathematischen Tun, sodass dieses hervorbringende Tun (griechisch: *poiésis*) zugleich Erkennen ist?

Eine Entscheidung in diesem Streit ist für die konkrete Arbeit des Mathematikers nicht primär von Bedeutung. Denn selbst, wenn die mathematischen Gegenstände an sich Seiende wären, so sind sie uns doch nicht unmittelbar gegeben oder zugänglich, sondern müssen in Anstrengung erarbeitet¹ und also er-funden werden. Dennoch hat dieser Streit seine Bedeutung als Kernthema der Philosophie der Mathematik.² Und die Geschichtsschreibung der Mathematik vermag einen - wie mir scheint: substantziellen - Beitrag zu dieser philosophischen Diskussion zu leisten.

Warum gerade die Geschichtsschreibung der Mathematik? Was überhaupt ist die Geschichtsschreibung der Mathematik, und wie ist Geschichtsschreibung der Mathematik möglich?

Aufgabe der Geschichtsschreibung der Mathematik ist es, zu sagen, was die Mathematik zu einem früheren Zeitpunkt wirklich gewesen ist. Und insofern der Geschichtsschreibung der Mathematik somit ein Gegenstand *vorgegeben* ist - eben das, was die Mathematik einst gewesen ist -, ist sie von jenem ontologischen Streit, um den es in der Philosophie der Mathematik geht, nicht tangiert: Die Aufgabe der Geschichtsschreibung der Mathematik ist keine erfindende, sondern eine entdeckende -

¹s. Hassan Givsan: "Wozu Historie? - Anmerkungen zur Frage der Geschichtsschreibung der Wissenschaften (Mathematik)" in: D. D. Spalt (Hrsg.): *Rechnen mit dem Unendlichen*, Basel 1990, S. 1-11; vgl. auch Herbert Robbins in: Albers/Alexanderson (Hrsg.): *Mathematical People. Profiles and Interviews*, Boston 1984, S. 294

²Das zeigt ansprechend Davis/Hersh: *Erfahrung Mathematik*, Boston 1981, dt. Basel 1985

jedenfalls sofern sie den Anspruch erhebt, eine seriöse Wissenschaft zu sein und nicht einfach ein freies Spielfeld für beliebige Konstruktionen.

Wie nun liegt die Mathematik, wie sie früher gewesen ist, vor? Im Allgemeinen in der Form geschichtlicher Quellen, also in der Form von Dokumenten, die von früherer Zeit ins Heute überdauert haben. Im günstigsten Fall handelt es sich um mathematische Texte, die im Idealfall aus der Feder des Urhebers der mathematischen Idee selbst stammen.

Solche Dokumente, solche Texte enthalten nun zwar die frühere Mathematik, aber sie müssen entziffert, gelesen werden, die Texte müssen zum Sprechen gebracht werden. Genau dies ist die Aufgabe des Historikers: Er muss die Quelle zum Sprechen bringen - ohne den Historiker bleibt die Quelle stumm. Zur Aufgabe des Historikers gehört es dabei, aus diesen Quellen möglichst viel von dem herauszuholen, was in ihnen enthalten ist, ohne dabei etwas Fremdes in sie hineinzutragen. Dieses Heraussholen, dieses Explizieren ist die entscheidende textanalytische Arbeit des Historikers.

Solches Explizieren hat zur selbstverständlichen Voraussetzung das vorherige Lesen des Quelltextes, das wirkliche Wieder-Lesen. So banal diese Bemerkung erscheinen mag, so kommt ihr doch eine zentrale Bedeutung zu, wie eine nähere Betrachtung zeigt. Denn Lesen ist nicht Lesen - anders gesagt: Es gibt sehr verschiedene Weisen des Lesens für mathematische Texte.

Ganz allgemein lernen wir alle das Lesen in früher Schulzeit: als jene Tätigkeit, die darin besteht, den Zeigefinger unter den Worten entlang zu führen, dabei aus den einzelnen Buchstaben die Worte zu formen, aus den Worten die Sätze und diese Sätze dann im Geiste zu Sinngehalten zusammenzufügen.

Diese Grundtätigkeit kulturellen Lebens erlernen wir alle, und im Laufe unseres Lebens vervollkommen wir diese Fähigkeit in je persönlicher Weise. Dabei entwickeln Mathematiker und insbesondere hervorragende Mathematiker als Bestandteil ihrer spezifischen Arbeitsweise eine besondere Form des Lesens, die sich von dieser Grundtätigkeit, wie wir sie in der frühen Schulzeit erworben haben, wesentlich unter-

scheidet. Der namhafte Mathematiker und Mathematikdidaktiker Hans Freudenthal hat diese spezifische Art des mathematischen Lesens genau beschrieben:

Ich kann mit Sicherheit nur von mir sagen, wie ich mathematische Arbeiten anderer lese. Nicht von A bis Z. Sondern erst die Resultate - ich schätze es hoch, wenn sie klar herausgestellt sind. Dann überlege ich sie mir selber. Wenn ich eines nicht bestätigen kann, so suche ich in der Arbeit Andeutungen über die Beweismethode. Vielleicht gelingt es mir dann, das Resultat zu bestätigen. Gelingt es nicht, so suche ich nach Hilfssätzen, die ich verstehe, und versuche, die Hauptsätze aus ihnen abzuleiten. Vielleicht muß ich mir schließlich einen Beweis genauer ansehen; wenn da ein früheres Resultat gebraucht wird, so muß ich eventuell zurück. Wenn ich schließlich mit eigenen Mitteln und etwas Abgucken alles bestätigt habe, also die Zusammenhänge beherrsche, lese ich vielleicht die Arbeit auch noch systematisch. Andere haben mir bestätigt, daß sie es mit fremden Arbeiten auch ungefähr so machen. Es gibt welche, die Arbeiten anderer systematisch lesen, Seite für Seite, Zeile für Zeile, Buchstabe für Buchstabe. Es gehört eine ungeheure Disziplin dazu, die - glaube ich - nur wenige aufbringen.³

Wir sehen: Was klein Hänschen in früher Schulzeit als Lesen gelernt hat - dies soll im Weiteren das *natürliche Lesen* heißen -, ist etwas gänzlich anderes als das, was der Mathematiker Hans in seiner Berufstätigkeit mit den Fachtexten anstellt, mit denen er umgeht - dies Letztere soll im Weiteren das *mathematische Lesen* heißen.

Analysieren wir noch kurz dieses mathematische Lesen: Handelt es sich hierbei wirklich um das Lesen eines Textes mit der Absicht, den Text zum Sprechen zu bringen, ihn zu explizieren? Doch offenbar nicht! Dem mathematischen Lesen geht es keineswegs darum, einen Text als Text, als eine Ganzheit, zum Sprechen zu bringen - sondern dem mathematischen Lesen geht es darum, das Denken des Lesers derart auszurichten, dass der Leser die *Resultate* des Textes einzusehen vermag. Dem mathematischen Lesen geht es nicht um die Ergründung dessen, was *der Autor* des Textes *sich* gedacht hat. Sondern das mathematische Lesen ist ein Weiterentwickeln der *Denkwelt des Lesers*, sodass dieses Denken instand gesetzt wird, sich die Resultate des Textes einzuverleiben (wobei der mathematische Leser unterstellt, er könne diese Resultate a priori verstehen⁴). Aus diesem Grund beginnt das mathematische Lesen auch nicht mit dem Anfang des Textes, sondern mit dessen Resultaten, und es schreitet dann nicht von Zeile zu Zeile fort, sondern sucht sich - solange der mathematische Leser diese Resultate nicht aus sich selbst heraus zu entwickeln vermag - geeignete Anhaltspunkte

³Hans Freudenthal: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Stuttgart 1973, Bd. 1, S. 111

⁴Wie problematisch diese Annahme ist, habe ich z. B. erläutert in: Detlef D. Spalt: "Vollständigkeit als Ziel historischer Explikation. Eine Fallstudie" in: *Collegium Logicum. Annals of the Kurt-Gödel-Society* 1, Wien u. a. 1995, S. 26-36

irgendwo im Text ("Beweismethode", "Hilfssätze, die ich verstehe"), bis er sein Ziel erreicht, sich die Resultate des Textes einverleibt hat.

Es besteht somit ein sehr großer Unterschied zwischen dem natürlichen Lesen - das z. B. das Explizieren eines Textes vorbereitet - und dem mathematischen Lesen, das auf die Inkorporation fremder Resultate in das eigene Denken angelegt ist.

Was geschieht nun, wenn sich ein Fachmathematiker der Geschichte widmet? Naheliegenderweise - d. h. sofern der Mathematiker den Wechsel seines Themenbereiches nicht reflektiert - das Folgende: Er nimmt sich historische Texte vor und liest diese in der ihm geläufigen Weise, also nach mathematischer Art. Er wird dies tun, weil es *seine* Arbeitsweise ist, jene Arbeitsweise, mit der er (als Mathematiker) erfolgreich ist und von der er sich daher auch im Bereich der Mathematikgeschichtsschreibung Erfolg verhofft.

Und nun sehen wir, in welcher Weise die Geschichtsschreibung der Mathematik einen Beitrag zu der philosophischen Diskussion um die Natur der mathematischen Gegenstände zu leisten vermag. Wir können nämlich einen historischen mathematischen Text einmal in mathematischer Weise und einmal in natürlicher Weise lesen (oder lesen lassen) und die jeweiligen Ergebnisse miteinander vergleichen. Zwei Ausgänge des Experiments sind möglich:

Erstens. Das mathematische Lesen des historischen Textes führt zum selben Ergebnis wie das natürliche Lesen dieses Textes. Dann, so scheint mir, haben wir ein starkes Argument dafür, dass der Mathematiker seine Gegenstände *entdeckt*. Denn der Geschichtsschreibung der Mathematik sind ihre Gegenstände vorgegeben, und wenn die mathematische Arbeitsweise - von der das mathematische Lesen ein zentraler Bestandteil ist - diese Gegenstände exakt zu erfassen imstande ist, so ist dies mindestens ein sehr starkes Indiz dafür, dass es der mathematischen Arbeitsweise jedenfalls möglich ist, Vorgegebenes zu *entdecken*.

Zweitens. Das mathematische Lesen des historischen Textes führt zu einem anderen Ergebnis als das natürliche Lesen dieses Textes. Dann, so scheint mir, haben wir ein starkes Argument für das Vorliegen des Gegenteils, also für die Gültigkeit des Ur-

teils, dass Mathematiker ihre Gegenstände *erfinden*. Denn in diesem Fall ist es offenkundig, dass der mathematisch lesende Historiker nicht den Text und damit dessen früheren Autor zum Sprechen gebracht, sondern allein sein eigenes Denken formuliert hat - und zwar genau so weit, wie es dem Denken des früheren Autors gleicht. Professor Laugwitz hat dafür die Formulierung gebraucht, "daß gewisse Formulierungen älterer und neuerer Mathematik partiell gleichlautend (*partially consonant*) sind".⁵

Nun habe ich seit 1985 mehrfach derartige Untersuchungen unternommen und gezeigt, dass die Ergebnisse des mathematischen Lesens und des natürlichen Lesens historischer Texte in der Tat recht unterschiedlich auszufallen pflegen,⁶ und auch andere haben schon zuvor solche Studien vorgelegt.⁷ Anhand meiner jüngsten Studie dieser Art⁸ werde ich diese Verschiedenheit in meinem Vortrag an einem (berühmten) Beispiel demonstrieren. Somit geben diese Studien aus historiographischer Perspektive Hinweise darauf, wie die Antwort auf die Titelfrage der Tagung lauten muss: Die Mathematik ist erfunden.

⁵Detlef Laugwitz: "Frühe Delta-Funktionen - Eine Fallstudie zu den Beziehungen zwischen Nichtstandard-Analyse und mathematischer Geschichtsschreibung" in: D. D. Spalt (Hrsg.): *Rechnen mit dem Unendlichen*, Basel 1990, S. 37

⁶vgl. u. a. Detlef D. Spalt: "Das Unwahre des Resultatismus. Eine historische Fallstudie aus der Analysis", *Math. Semesterber.* 35 (1988), S. 6-37; ders.: "Die Unendlichkeiten bei Bernard Bolzano" in: König (Hrsg.): *Konzepte des mathematisch Unendlichen im 19. Jahrhundert*, Göttingen 1990, S. 189-218; ders.: "Bolzanos Zahlbegriffe - bislang übersehene Marksteine feudal-absolutistischer Mathematik" in: *Bolzano's Wissenschaftslehre 1837-1987, Biblioteca di storia della scienza* 31 (1992), Firenze, S. 27-54; ders.: "Die mathematischen und philosophischen Grundlagen des Weierstraßschen Zahlbegriffs zwischen Bolzano und Cantor", *Archive for History of Exact Sciences* 42 (1991), S. 15-70; ders.: "Bolzanos Lehre von den meßbaren Zahlen 1830-1989", *Archive for History of Exact Sciences* 42 (1991), S. 311-362; ders.: "Le Continu de l'Analyse Classique dans la Perspective du Résultatisme et du Génésilogisme" in: Salanskis/Sinaceur (Hrsg.): *Le Labyrinthe du Continu*, Paris u. a. 1992, S. 85-95

⁷z. B. Henk J. M. Bos: "Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus", *Archive for History of Exact Sciences* 14 (1974), S. 1-90; ders.: "Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; the 'Construction of Equations', 1637-ca.1756", *Archive for History of Exact Sciences* 30 (1984), S. 331-380; Kirsti Andersen: *Cavalieri's Method of Indivisibles*, Preprint Aarhus Universität 1983

⁸Detlef D. Spalt: *Die Vernunft im Cauchy-Mythos*, Frankfurt am Main u. a. 1996

Wolfgang Breidert
 Maximinus und Minimajus
 Roger Pamans Begründung der Fluxionstheorie

Unter den durch George Berkeleys "Analyst" provozierten Erwidernungsschriften, die sich die Verteidigung der Fluxionsrechnung zum Ziel gesetzt hatten, blieb ein Buch bisher wenig beachtet. Da der Name des Autors nicht auf dem Titelblatt steht, wurde sehr seltene Buch gelegentlich sogar als anonymes Werk behandelt, doch sowohl die Widmung an Martin Folkes, den damaligen Präsidenten der Royal Society, als auch ein Advertisement am Anfang des Buches sind mit dem vollen Namen "Roger Paman" unterzeichnet.

In einer Historiographie der Mathematik, die eher an einem glatten kumulativen Verlauf interessiert war, fand Paman nur wenig Beachtung, doch könnte sein kleines Werk für eine Geschichtsschreibung interessant sein, die auch mißachtete und wirkungslos gebliebene Ansätze mit einbezieht. Björn Smestad, einer der wenigen Mathematikhistoriker, die sich überhaupt mit Paman befaßt haben, kommt zu einem Resultat, das die Aufmerksamkeit wecken sollte: "In my view, Paman's work is ... superior to Robins' and MacLaurin's concerning the foundation of the method of fluxions - in addition to introducing important concepts which could have been used in other connections."¹

Das in London 1745 erschienene Buch trägt den barocken Titel "The Harmony of the Ancient and Modern Geometry asserted: In Answer to the Call of the Author of the Analyst upon the Celebrated Mathematicians of the present Age, to clear up what he styles, their obscure Analytics". Der Titel des Buches nimmt wörtlich Bezug auf eine Stelle bei Berkeley, nämlich aus der ersten Antwortschrift auf die Einwände gegen den "Analyst". In dieser gegen James Jurin gerichteten "Defence of Free-Thinking in Mathematics" (§ 43) schrieb Berkeley, daß er sich seit der Veröffentlichung des

¹ Björn Smestad: Foundations for fluxions. Cand. Scient Thesis in Mathematics. University of Oslo, Department of Mathematics 1995, p. 77.

"Analyst" mit vielen, auch einigen der fähigsten Professoren unterhalten habe, aber keine Harmonie und Übereinstimmung unter den Mathematikern bezüglich der Analysis gefunden habe, sondern die größten Meinungsunterschiede. Roger Paman verstand diese Passage als eine Herausforderung, die Harmonie in dieser Sache nachzuweisen oder herzustellen.²

Habent sua fata libelli. Ich werde daher zunächst etwas über den Autor und die Entstehung dieses Buches sagen.

Wer ist Roger Paman? Man weiß nicht, wann und wo Roger Paman geboren ist. Er war, wie aus seinem Buch hervorgeht, sehr gut mit dem Arzt und Assoziationspsychologen David Hartley befreundet, der 1705 geboren war. Nimmt man an, daß die beiden Schul- oder Studienfreunde waren, so dürften sie etwa das gleiche Alter gehabt haben. Paman könnte also ca. 1705 geboren sein.

Im Vorwort zu seinem Buch berichtet Paman, daß er durch Mr. Frank vom St. John's College (Cambridge) auf den "Analyst" aufmerksam gemacht worden sei.³ Er habe dann darüber einen Artikel verfaßt, der in den 30-er Jahren bei einigen Mitgliedern der Royal Society die Runde gemacht habe.

1740-1742 nahm Paman an der von Admiral Anson geleiteten Weltreise teil. Das Unternehmen hatte vor allem das Ziel, die spanische Schifffahrt zwischen Spanien und dem Pazifik zu stören oder ganz zu unterbinden.⁴ Die Expedition startete am 18. September 1740 mit acht Schiffen, davon gingen fünf verloren, zwei brachen die Reise vorzeitig ab, so daß Anson nur mit einem Schiff; allerdings mit einem gekaperten Schatz von 400000 Pfund Sterling, die Weltumsegelung zu Ende bringen konnte. Paman befand sich auf einem der vorzeitig zurückgekehrten Schiffe und gelangte Anfang 1742 nach England zurück.

² Preface [p.28 f.]

³ Vermutlich ist der sonst nicht erwähnenswerte Theologe John Frank gemeint.

⁴ Der offizielle Bericht über das aufsehenerregende Unternehmen ist eines der bedeutendsten Bücher der Reise- und Abenteuerliteratur des 18. Jahrhunderts und kam 1749 auch in deutscher Übersetzung heraus (Richard Walter: Des Herrn Admirals, Lord Ansons Reise um die Welt [übers. b. Eobald Toze]. Göttingen: Vandenhoeck 1749; verb. u. verm. Aufl. Göttingen 1763).

Vor seiner Expeditionsteilnahme hatte Paman das Manuskript seines Buches bei seinem Freund David Hartley hinterlegt und sandte es nach seiner an die Royal Society. Paman hatte mindestens seit den späten 30-er Jahren des 18. Jahrhunderts Kontakte zu Mitgliedern der Royal Society und wurde, vermutlich aufgrund seines eingereichten Manuskriptes, am 12. Mai 1743 (u.a. auf Vorschlag von Abraham de Moivre) Fellow der Royal Society. 1748 starb Roger Paman.⁵

Damit ist über den Autor Paman fast alles gesagt, was wir wissen. Auf einem Zusatzblatt am Ende seines Buches zeigt der Verleger noch ein Werk von Paman an, nämlich als Subskriptionsaufruf für einen naturwissenschaftlichen Bericht von jener Südseeereise, doch scheint dieses Buch - vielleicht aus Mangel an Subskribenten - nicht erschienen zu sein.⁶

Das umfangreiche Vorwort des hier im Mittelpunkt stehenden Buches nimmt etwa ein Drittel des gesamten Werkes ein. Dieses Vorwort ist nämlich erst zur Zeit der Publikation verfaßt, also Jahre später als der ursprüngliche Text, so daß die inzwischen erfolgte Entwicklung noch zu berücksichtigen war.

Im ersten Abschnitt führt Paman Ungleichungen und Umgebungen ein.

⁵ William Musgrave (Ed.): Obituary Prior to 1800 (as far as relates to England, Scotland, and Ireland), Vol. 47 of "The Publication of The Harleian Society". The Harleian Society 1900 [zit. nach B. Smestad, 1995, p. 60.

⁶ Das Anzeigenblatt lautet:
"Subscriptions are taken in by J. Nourse fore the following work. By the same Author [i.e. Roger Paman].
An Account of the late Expedition to the South-Sea, illustrated with Draughts, and intermixed with Observations in Natural History, and the Sciences.
Among which will be contained, An Account of the Height of the Mercury in the Thermometer every Day at Noon, during the Months of February, March, April, and May, between the Latitudes of 40° and 60° South; whereby the Degrees of Heat and Cold in the Two Hemispheres may be compared.
Also, An Account of the Variations of the Needle, at different Distances, on the same Parallels from the Coasts of Brazil, Patagonia, and Terra del Fuego, whereby the Changes that have happened since Dr. Halley was in those Parts will appear, and the Doctor's Account of them will be confirmed.
Also, A Defence of the Coctoer's Chart of those Coasts, against the Exceptions of the French Navigators; and some Remarks upon the new French Chart of the South-Seas, constructed by Order of the Count de Maurepas, in the Year 1742.
With such Curious Particulars relating to different Parts of South America, as the Author hat an Opportunity of remarking himself, or procuring from Persons of Credit and Distindtion, during Seven Months that he lived in Brazil."

Zunächst wird zwischen Konstanten und Variablen unterschieden und dann die Möglichkeit des Vergleichs zwischen Konstanten und Variablen eingeführt. Ohne Verwendung von Größer- oder Kleinerzeichen werden Ungleichungen zwischen Konstanten und Variablen ("of the same Nature") aufgestellt, was, wie Paman bemerkt, nur unter bestimmten Eingrenzungen ("under certain Limitations") möglich ist. Z.B. "p ist größer als bx für alle Werte von x zwischen p/b und Null".⁷ Damit kann Paman Umgebungen einführen, die er mit den ungewöhnlichen Ausdrücken "first State" und "last State" benennt. Unter dem "ersten Stadium" einer Variablen x versteht Paman alle Werte von x zwischen einer Konstanten ("some certain assignable Value") und Null, also - modern gesprochen - eine offene Umgebung der Null im R^+ . (Die Null zählt selbst nicht dazu.) Analog dazu führt er das "letzte Stadium" der Variablen x ein, als die Menge aller Werte oberhalb einer gewissen Konstanten. Die Begriffe des ersten bzw. letzten Stadiums sind also auf eine jeweilige Konstante bezogen, ohne daß Paman diese immer explizit erwähnt. Es ist auch anzumerken, daß diese Begriffe keinerlei erstes oder letztes Element oder einen Grenzwert implizieren. Um eine solche Assoziation mit den berüchtigten "ersten und letzten Verhältnissen" zu vermeiden, hätte Paman vielleicht besser daran getan, die Ausdrücke "erste" und "letzte" zu vermeiden. Er hätte etwa auch von "Anfangs- und Endstück" sprechen können.

Ohne es ausdrücklich zu erwähnen, beschränkt sich Paman auf die Betrachtung von Polynomen, wobei er im Vorwort auch darauf hinweist, daß die "ausländischen" Mathematiker den Ausdruck "Funktion" verwenden.⁸ Die Funktionen werden nach ihrem Grad unterschieden, ohne daß dieser Ausdruck eingeführt wird. Paman benutzt für eine Funktion der Form ax^n den Ausdruck " x^n -Größe". Mit diesen Begriffen kann Paman seinen ersten Satz beweisen:

(Satz 1:) Im ersten Stadium ist eine beliebige Konstante p größer als eine beliebige x^n -Größe (z.B. ax^n).

⁷ p.2
⁸ Preface [p.6]

[Analoges für das letzte Stadium mit x^{-n} -Größe. Alle folgenden Sätze gelten entsprechend auch für das letzte Stadium. Ich beschränke meine Betrachtungen der Einfachheit wegen jeweils auf den Fall des ersten Stadiums.]

Bew.: Für alle Werte von x zwischen

$$\frac{p^{1/m}}{a^{1/m}} \quad \text{und Null ist } p \text{ größer als } ax^m.$$

Als Folgerung ergibt sich, daß im ersten Stadium jede x^m -Größe größer ist als jede Größe einer höheren Potenz (z.B. $px^m > ax^{m+n}$).

(Satz 3:) Ist im ersten Stadium $(a+p)x^m$ größer als bx^n und $(a-p)x^m$ kleiner als bx^n , dann ist $a=b$ und $m=n$.

Man sieht, wie Paman sehr wohl mit Ungleichungen und Umgebungen arbeiten kann.

Im zweiten Abschnitt führt Paman seine Begriffe der Maximinorität und der Minimajorität ein.

Def. 1: "Ich nenne einen Ausdruck die Wurzelgröße einer anderen ("radical Quantity"), wenn die zweite aus einer Potenz oder Potenzen der ersten oder deren Teile oder Vielfachen zusammengesetzt ist." (Es ist also die unabhängige Variable einer Funktion gemeint.)

Def. 2: "Ist ein Ausdruck im ersten oder letzten Stadium seiner Wurzelgröße kleiner als ein anderer und kann doch keine Größe derselben Art zum ersten Ausdruck addiert werden, ohne daß die Summe in diesem Stadium größer als der zweite Ausdruck wird, dann heißt jener kleinere Ausdruck das erste bzw. letzte Maximinus des zweiten Ausdrucks."

Z.B. Sei im ersten Stadium von x $ax^m < y$, aber für jedes p sei $ax^m + px^m > y$, dann ist ax^m das erste Maximinus von y .

Z.B. $ax < ax + bx^2$, aber für $0 < x < p/b$ [und von Null verschiedenes b] ist $ax + px > ax + bx^2$. Also ist ax das erste Maximinus von $ax + bx^2$.

Def. 3: Analog wird das erste Minimajus definiert, indem "größer" durch "kleiner" und "Summe" durch "Differenz" ersetzt wird.

Auch hier ist darauf zu achten, daß der Ausdruck "erstes" nichts mit Newtons "erstem" Verhältnis zu tun hat. Modern gesprochen bedeutet es nur, daß eine Umgebung von Null in Betracht gezogen wird. Es wird auch kein Grenzprozeß durchgeführt. Das Maximinus bzw. Minimajus ist allerdings eine Grenze, die aber nur mittels einer negativen Existenzaussage ins Spiel kommt: Jede Addition bzw. Subtraktion einer gleichartigen Größe führt über diese Grenze hinaus. Der Unterschied zwischen dem Maximinus bzw. Minimajus und einem Grenzwert wird sofort deutlich, wenn man sich klar macht, daß das Maximinus bzw. Minimajus keine Konstante ist, sondern selbst eine Funktion.

Paman setzt einen Punkt über das Gleichheitszeichen, wenn eine Funktion das erste Maximinus bzw. Minimajus eines anderen Ausdrucks ist:

$ax^m = A(x)$ bedeutet, daß ax^m das erste Maximinus bzw. Minimajus von $A(x)$ ist. Z.B. $x = x + x^2 + x^3$.

Paman beweist einige Sätze bzgl. dieser neuen Begriffe. Er zeigt, daß das Maximinus bzw. Minimajus eindeutig bestimmt ist. Die Existenz setzt er stillschweigend voraus, wobei zu berücksichtigen ist, daß er sich auf Polynome beschränkt. Er zeigt, daß für eine Funktion der Gestalt

$$a_1x^m + a_2x^{m+1} + \dots + a_kx^{m+(k-1)}$$

das Glied des kleinsten Grades, also a_1x^m das erste Maximinus oder Minimajus ist.

Der dritte Abschnitt des Buches ist der Rechnung mit Maximinussen [sic!

"Maximinus's"] und Minimajussen [sic! "Minimajus's"] gewidmet. Es werden Regeln für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division angegeben.

Im vierten Abschnitt wird die Ähnlichkeit zwischen Maximinussen und Minimajussen eingeführt. (Es sind modern gesprochen Funktionen gleichen Grades.)

Im fünften Abschnitt wird der Begriff der Fluxion auf eine sehr formale Weise eingeführt.⁹ Dazu definiert Paman zunächst den Begriff der "Differenz eines Ausdrucks":

⁹ p. 24 ff.

Def. 1: "Wird die Wurzelgröße eines Ausdrucks vermehrt oder vermindert, so heißt das zugehörige Inkrement bzw. Dekrement dieses Ausdrucks die Differenz des Ausdrucks."

Def. 2: Repräsentiert y einen Ausdruck mit der Wurzelgröße x [d.h. $y=y(x)$] und wird x um eine beliebige unbestimmte Größe z (das Inkrement oder Dekrement von x) vermehrt bzw. vermindert, so heißt z die Fluxion von x und wird durch x' bezeichnet.

Diejenige x' -Größe, die das erste Maximinus oder Minimajus der Differenz von y ist, heißt die erste Fluxion von y und wird mit y' bezeichnet.

Zu der dabei benutzten Differenz von y heißt es in Parenthese: Sie entstehe durch die Substitution von $x+-x'$ für x im Wert von y .

Paman unterscheidet in seiner Ausdrucksweise sehr klar eine Funktion ("represented by y ") von dem Wert der Funktion ("value of y ")

Z.B. Sei $y=x^m$. Dann ist die Differenz von y :

$$(x+-x')^m - x^m$$

Das erste Maximinus oder Minimajus dieser Differenz ist mx^{m-1} .

Dieses ist die erste Fluxion von x^m .

Diejenige x'^2 -Größe, die das erste Maximinus oder Minimajus der Differenz von y' ist - die dadurch entsteht, daß man in $y' x+-x'$ für x substituiert -, heißt die zweite Fluxion von y und wird mit y'' bezeichnet.

Analog werden Fluxionen höherer Ordnung definiert. (Paman führt noch die dritten Fluxionen explizit ein, bevor er auf die höherer Ordnung hinweist.)

Die Wurzelgröße [modern gesprochen: die unabhängige Variable] hat keine zweite oder höhere Fluxion. Alle Fluxionen überhaupt sind auf x' bezogen. Deswegen heißt x' die Wurzelfluxion ("radical fluxion"). [p.26]

An dieser Stelle gibt Paman eine wichtige Erläuterung, die seine Lehre mit der Newtonschen Fluxionslehre verbindet. Daß in Pamans Lehre eine Fluxion als die

Wurzelfluxion aller anderen Fluxionen genommen werde, habe seine Entsprechung in der ursprünglichen Fluxionsrechnung, nämlich in dem dort angenommenen einförmigen Fließen der Fluente.

Paman geht es vor allem um die Grundlagen der Fluxionsrechnung. Er führt auch Beispiele aus, aber bietet doch erheblich weniger Anwendungen als MacLaurin, der sich in seinem "Treatise" u.a. mit den Gezeiten, mit Windmühlen, mit Schwerpunktsberechnungen, Schwingung einer Saite und Planetenbahnen befaßt. Die große Bedeutung von Pamans Bemühungen, ohne kinematische Begriffe auszukommen, wird erst deutlich, wenn man seine Arbeit mit der seiner Zeitgenossen vergleicht. Als ein Beispiel dafür greife ich das Buch von John Muller (1699-1784) mit dem Titel "A Mathematical Treatise" heraus, das 1736 - also zwei Jahre nach dem "Analyst" - in London erschienen ist.¹⁰ Im Vorwort zu seinem "Treatise" schreibt John Muller bezüglich der Fluxionen, er mache keinen Gebrauch von unendlich kleinen Größen, auch nicht von entstehenden oder vergehenden Geschwindigkeiten, doch er betrachte eine Kurve als erzeugt durch die Bewegung eines Punktes, der durch zwei Kräfte in zwei verschiedene Richtungen (parallel zur Abszisse und parallel zur Ordinate) getrieben werde.¹¹ Die Richtung der Bewegung dieses erzeugenden Punktes in einem Kurvenpunkt ist dann die Bewegung in der Tangentenrichtung.

¹⁰ Nur nebenbei sei vermerkt, daß in den von Stella Mills edierten "Collected Letters" von MacLaurin dieser John Muller fälschlicherweise mit Johannes Müller Regiomontanus identifiziert wird.]

¹¹ John Muller: A Mathematical Treatise: Containing a System of Conic Sections; With the Doctrine of Fluxions and Fluents, applied to Various Subjects; viz. To the finding the Maximums and Minimums of Quantities; Radii of Evolution, Refraction, Reflection; Superficial and Solid Contents of Curvilinear Figures; Rectification of Curve-lines; Centers of Gravity, Oscillation and Percussion. As also To the Resolution of a Select Collection of the most useful, and many new Physico-Mathematical Problems. London: Printed by T. Gardner ... for the Author; and Sold by W. Innys and R. Manby ... and J. Nourse ... 1736.

Preface (p. II): "I make no use of infinitely small quantities, nor of nascent or evanescent velocities; and yet I think to have explained those Principles, so that any Person of a moderate capacity, reading that part of this Book with due attention, may be fully convinced of the Truth thereof.

In order to this, I consider a Curve-line to be generated by the motion of a point, urged by two powers acting in two different Directions, the one parallel to the Abscissas and the other parallel to the Ordinates. I prove from thence, that if this point (when arrived at a given place) did continue to move with the velocity it has there, it would proceed in a right-line touching the Curve in that place: ..."

Gegen solche kinematischen, ja sogar dynamischen Betrachtungsweisen in der Fluxionsrechnung versucht sich Paman abzusetzen. Mit seiner Begriffsbildung des ersten und letzten Stadiums kommt er sehr dicht an die mit Umgebungen arbeitende Epsilonantik heran. Das Besondere ist, daß Paman nur mit einseitigen "Umgebungen" (der Null bzw. des Unendlichen) arbeitet, ohne diese Elemente zu diesen "Umgebungen" hinzuzunehmen.

Mag uns Pamins Ansatz auch als "modern" erscheinen, seine Wirkung war sehr gering. Dafür gibt es mehrere Gründe:

- 1) Pamins Buch kam erst spät in die Öffentlichkeit, nachdem schon mehrere andere Werke gegen den "Analyst" erschienen waren.
 - 2) Paman war wohl ein mathematisch-naturwissenschaftlich gebildeter, aber kein besonders renommierter Autor, auch wenn er die Aufnahme in die Royal Society erreichte.
 - 3) Die Fluxionsrechner sahen nach den Publikationen von Benjamin Robins und Colin MacLaurin die Analyst-Kontroverse als erledigt an. MacLaurin galt als Autorität und hatte in seinem Buch nicht nur zwei Methoden zur Einführung der Fluxionen geboten, sondern auch einen erheblich größeren Anwendungsbereich abgedeckt als Paman in seiner Schrift. Vielleicht wäre sie mehr beachtet worden, wenn sie noch vor jener großen Seereise 1740, also vor MacLaurins Buch erschienen wäre.
 - 4) Die "kleineren" Mathematiker dürften wohl ohnehin keinen großen Gefallen an Pamins sehr abstrakter Begriffsbildung gehabt haben.
- Wie nicht nur das Verhältnis zwischen MacLaurin und Paman, sondern auch die vielen Prioritätsstreitigkeiten zeigen, kommt es in der Mathematik darauf an rechtzeitig zu publizieren. Förderliche Ansätze werden nicht immer sofort aufgegriffen. Und ganze Lehrgebäude wie die Fluxionsrechnung bzw. der Calculus können auch ohne ausreichende Fundierung lange überleben.

Literatur:

- Paman, Roger: The Harmony of the Ancient and Modern Geometry asserted: in Answer to the Call of the Author of the Analyst upon the celebrated Mathematicians of the present age, to clear up what he stiles their obscure Analyticts. London 1745. [National Central Library London]
- Robins, Benjamin: A Discourse Concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac Newton's Methods od Fluxions, and of Prime and Ultimate Ratios. London 1735.
- Muller, John: A Mathematical Treatise: Containing a System of Conic Sections; With the Doctrine of Fluxions and Fluents, applied to Various Subjects. London 1736.
- MacLaurin, Colin: A Treatise on Fluxions. 2 Vols. Edinburgh 1742.
- Berkeley, George: Works, ed. A. C. Fraser. Oxford 1871.
[III, 301 f.: "... forgotten tract consists of papers given in to the Royal Society in 1742, treats Fluxions as a particular branch of an alleged more general reasoning, called the doctrine of maximinority and minimajority".]
- Cajori, Florian: A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse. Chicago and London 1919.
[Ann. zu p. 188: "In 1745 there appeared an anonymous publication on fluxions which we have not had the opportunity to examine ..."]
- Berkeley, George: Schriften über die Grundlagen der Mathematik und Physik. Hrsg. v. W. Breidert. Frankfurt a.M. 1969, 1985.
- Sageng, Erik Lars: Colin MacLaurin and the foundations of the methods of fluxions. PhD Thesis Princeton University 1989.
- Guicciardini, Niccolò: The Development of the Newtonian Calculus in Britain: 1700-1800. Cambridge 1989.
- Breidert, Wolfgang: George Berkeley 1685-1753. Basel - Boston - Berlin 1989.
- Jesseph, Douglas M.: Berkeley's Philosophy of Mathematics. Chicago and London 1993.
- Smestad, Björn: Foundations for Fluxions. Cand. Scient Thesis in Mathematics. University of Oslo, Department of Mathematics 1995.



Wolfgang Breidert

GEORG VON VEGA (1754 - 1802) ERFINDUNGEN UND ENTDECKUNGEN



1. Biographie

Georg Vega wurde am **23. März 1754** in Zagorica in Slowenien geboren. Seine Eltern Bartholomäus und Helene Vecha waren arme slowenische Bauern. Georg erhielt seine erste Ausbildung bei Klerikern, die ihm neben der Grundalphabetisierung und dem Unterricht im Rechnen auch etwas Allgemeinbildung und Grundkenntnisse in Latein vermittelten.¹ Bis zu seinem 13. Lebensjahr blieb er in seiner Heimatgemeinde, dann trat er im Jahre 1767 in das Laibacher **Gymnasium**, die Jesuitenschule, ein. Der Unterricht wurde in lateinischer Sprache gehalten und umfaßte auch ziemlich viel Naturwissenschaft und vor allem Mathematik.

Nach der Auflösung des Jesuitenordens besuchte er in den folgenden 2 Jahren das Lyzeum in Laibach. Der Mathematiklehrer Joseph Maffei von Glattfort, der spätere Propst von Altbunzlau und Prälat des Königreichs Böhmen, förderte ihn besonders, da ihm schon nach kurzer Zeit seine überdurchschnittliche Begabung und sein erstaunliches Zahlengedächtnis aufgefallen waren. Im Jahre 1775 absolvierte Georg als bester seines Jahrganges das Lyzeum.

Die Prüfungsfragen der Abschlussprüfung waren gedruckt und befinden sich heute in der Universitätsbibliothek in Laibach. Die Prüfungskommission bestand aus seinem

¹ Sandi Sitar, Jurij Vega. (Ljubljana 1997). S. 77.

Mathematiklehrer Maffei, dem Physiker Gregor Schoettl und dem Metaphysikprofessor Anton Tschokl.

Georg startete seine berufliche Laufbahn als **k. k. Navigations-Ingenieur** in Innerösterreich mit einem jährlichen Gehalt von 600 Gulden. "Aus entschiedener Neigung"² zum Soldatenstand trat er am **7. April 1780** als **Unter-Kanonier** beim **2. Feld-Artillerie Regiment** ein. Nach einjähriger Dienstzeit rückte er zum **Unterleutnant** im Wiener Garnisons-Artillerie-Distrikt vor.

Am **18. November 1780** erhielt er das **Lehramt für Mathematik** in der **Artillerieschule**, dem er mehrere Jahre vorstand. Während dieser Tätigkeit verfasste er mehrere Lehrbücher. Am **1. April 1784** rückte Vega zum **Oberleutnant** vor und nach der Bildung des Bombardierkorps im Jahre 1786 wurde er am **1. März 1787** als **Professor der Mathematik** in diesem Korps mit Hauptmannsrank angestellt. Im gleichen Jahr fand auch Vegas **Vermählung** mit Josefa Swoboda, der Tochter eines Oberleutnants, statt.

Bei der **Belagerung von Belgrad** im Jahre 1789, erreichte er durch Änderung der Ladeweise der hundertpfündigen Mörser einen militärischen Erfolg. Sogar während dieses Krieges setzte er seine mathematische Tätigkeit fort, und laut Augenzeugen fand man ihn "im feindlichen Feuer ruhig Logarithmen berechnend". Im Laufe des Türkenkrieges entdeckte er eine bis zu dieser Zeit für unmöglich gehaltene Verbindung von Räderwerken. Im Jahre 1791 wurde Vega Vater seines ersten Kindes, dem der Name Heinrich gegeben wurde. Nach dem Ende des Türkenkrieges kehrte er im Oktober 1792 wieder nach Wien zurückkehrte. Im darauffolgenden September wurde seine Tochter Maria Theresia Regina geboren.

Im Verlauf der Feldzüge während des 1. Koalitionskrieges erkannte Vega, dass die Geschütze eine stärkere Kraft und Wurfweite erreichen könnten, wenn sie nach den "Regeln der Mathematik kalibriert und montiert würden." Er wurde mit dem **Ritterkreuze des Maria Theresien Ordens** in der 42. Promotion vom **11. Mai 1796** ausgezeichnet. Im Februar 1796 wurde Vegas drittes Kind geboren, das auf den Namen Franz getauft wurde. Im selben Jahr zeichnete sich Vega bei der Verteidigung von Mainz besonders aus. In der mathematisch-physikalischen Gesellschaft in Erfurt trug er am **2. Jänner 1798** seine Schrift "*Mathematische Betrachtungen über eine sich um eine unbewegliche Achse gleichförmig drehende feste Kugel*" vor.

² Georg Vega, Vorlesungen über die Mathematik, Bd. 4 (Wien 1800). Vorrede.

Am 7. Juli 1800 starb im Alter von 29 Jahren seine Frau Josepha, am 20. Juli des selben Jahres folgte ihr seine jüngste Tochter Maria Aloisia, die erst einige Wochen alt war, nach. Am **22. August 1800** wurde Vega in den **Freiherrnstand** erhoben. Im Jahre **1802** wurde er zum **Oberstleutnant** befördert, um diese Zeit beschäftigte er sich mit seinem letzten Werk.

Vega war seit Mitte September 1802 abgängig, man fand ihn schließlich **tot** in der Donau. Von der Ermordung bis zum Selbstmord gab es verschiedene Vermutungen über seine Todesursache. Die Laibacher Zeitung berichtete am Dienstag, den 12. Oktober 1802 folgendes: „*Der k. k. Artillerie Obristlieutenant, und Ritter des militärischen Marien Theresien-Ordens Freyherr v. Vega, welcher wegen seinen ausgebreiteten mathematischen Wissenschaften weltbekannt war; ist am 24. Sept. ober Wien bey Nußdorf, aus der Donau tod herausgezogen worden. Wie, und auf welche Art dieses unglückliche Ereigniß geschehen seyn mag, ist unbekant.*“³

2. Werke

Da die Artillerieschulen mit Lehrbüchern nur mangelhaft ausgestattet waren faßte er den Entschluß, selbst ein mathematisches Lehrbuch zu verfassen. Im Jahre **1782** gab er den **ersten Band** seiner „**Mathematischen Vorlesungen**“ heraus. Das Niveau dieses Buches übertraf weit das der damaligen Gymnasien, und da Vega keine Hochschule besuchte, dürfte er sich im Selbststudium diese Kenntnisse angeeignet haben. Der große Erfolg dieses Buches spornte ihn zu weiteren Arbeiten an. Ein Jahr später erschienen seine ersten **logarithmisch-trigonometrischen Tafeln**, die er mit Hilfe seiner Schüler berechnete. **1784** erschien der **2. Band** seiner "**Mathematischen Vorlesungen**".

Im Jahr **1787** verfaßte er die Arbeit "**Praktische Anweisung zum Bombenwerfen**". Im Jahre **1788** erschien der **3. Band** seiner "**Mathematischen Vorlesungen**".

Am 10. Juli 1790 schrieb er während seiner "Cantonierung zu Leipnik" die Vorrede zu der Beilage der 2. Auflage des dritten Bandes seiner mathematischen Vorlesungen, wobei er eine bis zu dieser Zeit für unmöglich gehaltene Verbindung von Räderwerken entdeckte und berechnete.

Ab Oktober 1792 arbeitete er an der Herausgabe der zweiten Auflage seiner mathematischen Vorlesungen, die er nach seinen mündlichen Vorträgen durch seinen Schüler Conrad Gemrath niederschreiben ließ.

³ Joze Poyšic, Bibliografija Jurija Vege. (Ljubljana 1974).

Trotz des militärischen Einsatzes bei der Rheinarmee setzte Vega seine wissenschaftlichen Arbeiten fort. Im Oktober 1793 erschien in Leipzig sein "**Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch**". Im Jahre 1794 erschien in Leipzig sein 3. Logarithmenbuch mit dem Titel "**Thesaurus logarithmorum completus ex arithmetica logarithmica et ex trigonometria**".

Nach dem Frieden von Campo Formido im Jahre 1797 widmete er sich intensiv der wissenschaftlichen Tätigkeit und gab neue Ausgaben seiner bisher erschienenen Werke heraus. In der mathematisch-physikalischen Gesellschaft in Erfurt trug er am 2. Jänner 1798 seine Schrift "**Mathematische Betrachtungen über eine sich um eine unbewegliche Achse gleichförmig drehende feste Kugel**" vor. Im selben Jahr erschienen in Erfurt "seine **Mathematischen Betrachtungen über eine sich um eine bewegliche Achse gleichförmig drehende feste Kugel und die Folgen dieser Voraussetzung für die Astronomie, Geographie und Mechanik in Beziehung auf unser Erdsphäroid**." Im Jahre 1800 erschienen der **4. Band** seiner mathematischen Vorlesungen und das Werk "**Versuch über die Enthüllung eines Geheimnisses in der bekannten Lehre der allgemeinen Gravitation**."

Das Manuskript seines letzten Werkes über "**Das natürliche Maß, Gewichts- und Münzsystem**" schickte er am 11. September 1802 an einen Buchhändler in Wien.⁴

3. Erfindungen und Entdeckungen

Auf Vegas militärische Erfindungen, die in engem Zusammenhang mit seinen mathematischen Leistungen stehen, kann in dieser Kurzfassung nicht eingegangen werden.

In Vegas Vorlesungen soll nicht nach „*neuen Sätzen*“ gesucht werden, wie er selbst im Vorbericht schrieb. Er bezeichnete die „*Neuheit, als diejenige, die aus der Verschiedenheit des Zusammenhanges, der Entwicklung und Anwendung einiger Sätze entspringt*“⁵. Das besondere Bemühen bei diesem Werk lag besonders auf didaktischem Gebiet. Vom ersten Band dieses Werkes erschienen noch zu Vegas Lebzeiten 3 Auflagen. Im 2. Band bemühte er sich durch zahlreiche Erläuterungen „*eine größere Deutlichkeit zu erzielen*“⁶. Weiters enthält dieses Werk die Differential- und Integralrechnung, die von Vega im Unterricht der Artillerieschule eingeführt

⁴ Gerlinde Faustmann, Österreichische Mathematiker um 1800 unter besonderer Berücksichtigung ihrer logarithmischen Werke. (Wien 1994).

⁵ Georg Vega, Vorlesungen über die Mathematik, 1. Band. (Wien 1802).

⁶ Vega, Vorlesungen, 2. Band. (Wien 1803).

wurde. Besonders beachtenswert scheint, dass diese erst nach den „Meraner Vorschlägen“ von 1905 im Lehrplan der österreichischen Realschule laut Verordnung vom 8. April 1909 zu finden ist. Die weiteren beiden Bände zeichnen sich durch „ungemeine Klarheit und Deutlichkeit,... nur zu oft (in älteren Werken) vermifste Eleganz und Correctheit“⁷ aus. Im 3. Band seiner Vorlesungen berichtete er „eine Stelle in Herrn L. Eulers scienta motus“ bezüglich der Tangentialgeschwindigkeit eines „frei geworfenen Körpers an der Erdoberfläche.“⁸

Im Vorbericht der „Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln“, die 1783 in Wien erschienen sind, findet man ein Verzeichnis, der von Vega entdeckten Fehler in den bislang erschienenen Tafeln von SCHULZE, GARDINER, VLACQ und PITISCI. Außerdem enthält dieses Werk die Umformung der Halleyschen Reihe. Vega berechnete mittels seiner Reihe:

$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2A\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \dots\right)$ die Logarithmen, wobei mit A das System bestimmt wird. Für A=1 erhält man die natürlichen Logarithmen. Zum

Vergleich sei Halleys Reihe angeführt: $\log\frac{a}{b} = \frac{2x}{z} + \frac{2x^3}{3z^3} + \frac{2x^5}{5z^5} + \frac{2x^7}{7z^7} \&c.$ ($z = a + b$, $x = a - b$, * - fehlende Glieder).

Die Entdeckung einer besonderen Verbindung von Räderwerken fand im Laufe des Türkenkrieges statt.

Das „Logarithmisch-trigonometrische Handbuch“ wurde für „die Mathematikbeflissenen eingerichtet“ und sollte an Stelle „der kleinen Vlackschen, Wolfschen und anderen der gleichen, meistens sehr fehlerhaften Tafeln“⁹ treten. Die Grundlagen zu Vegas umfangreichstem Werk mit dem Titel „Vollständige Sammlung großer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln“ oder „Thesaurus logarithmorum completus“ bildeten die Werke von Adrian Vlacq. Es wurden fehlerhafte Stellen berichtigt und weitere Tafeln hinzugefügt. Dieses Werk war für „Astronomen, große Seefahrer, Professoren und andere Liebhaber der Mathematik, welche äußerst feine Berechnungen zu machen haben“, gedacht. Er beendete es bei der kaiserlich königlichen Armee am oberen Rheine im Jahre 1794, wobei er in der Vorrede versprach „... für jede erste an mich zu machende Anzeige eines jeden übersehenen Fehlers, der zu falschen Rechnungen Anlaß geben kann, einen kaiserlichen Dukaten zu bezahlen“.¹⁰ In diesem Werk gibt Vega auch seine Entdeckung von 140 Stellen von π bekannt.

⁷ Johann Thomas Edlen von Trattner, in Vorlesungen, 2. Band. (Wien 1803).

⁸ Vega, Vorlesungen, 3. Band. (Wien 1818).

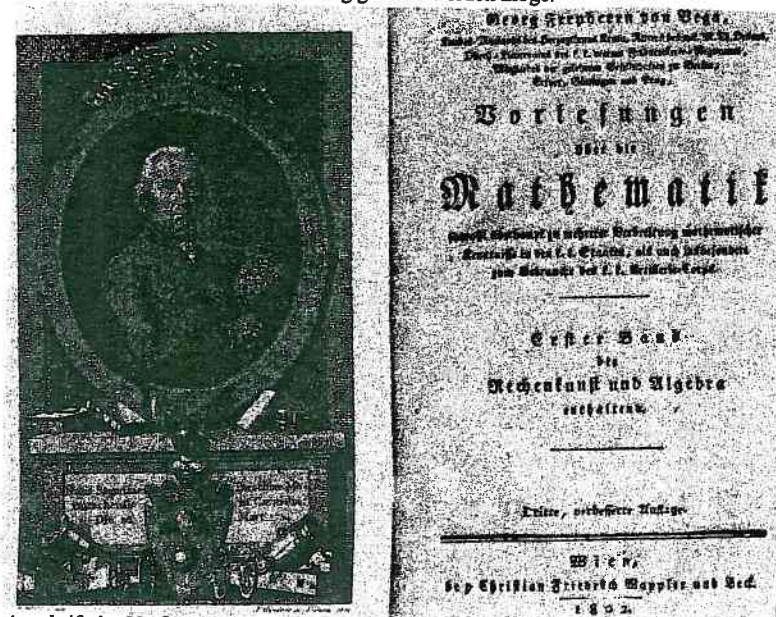
⁹ Vega, Log.-trig. Handbuch. (Leipzig 1800).

¹⁰ Georg Vega, Thesaurus logarithmorum completus. (Leipzig 1794) Vorrede.

4. Epilog

Vega wurde von seinen Zeitgenossen sehr geschätzt, Abraham Kästner rezensierte den "Thesaurus" im "Göttinger Anzeiger" vom 6. April 1790 mit folgenden Worten: "Man denkt dabei leicht an Archimedes von Syrakus,...". Joseph Lalande hob dieses Werk, von dem in den USA in den Jahren 1923-62 noch vier Reprints erschienen¹¹ sind, ebenfalls bewundernd hervor. Carl Friedrich Gauß verwendete ebenfalls Vegas Tafeln, äußerte sich jedoch bezüglich der Fehlerfreiheit kritisch. Noch 1882 bezeichnete Carl Bremiker den Thesaurus als beste vorhandene zehnstellige Tafel.

In Slowenien wurden Vega viele Denkmäler gesetzt. In Wien wurde eine Gasse im 19. Bezirk nach Vega benannt, die Vega-Payer-Weyprecht-Kaserne im 14. Bezirk trägt ebenfalls seinen Namen. Abschließend bleibt noch zu hoffen, dass an seinem 200. Todestag im Jahre 2002 seiner würdig gedacht werden möge.



Anschrift der Verfasserin:
Gerlinde Faustmann
Kaisersteingasse 6
A-2700 Wr. Neustadt, e-mail: faustmann@vip.at

¹¹ Sitar, Jurij Vega. (Ljubljana 1997).

JUAN CARAMUEL Y LOBKOWITZ und seine Beiträge zur Glücksspielrechnung -

vorgefunden, erfunden, entdeckt?

Robert Ineichen

Der Zisterziensermönch und spätere Bischof Juan Caramuel y Lobkowitz (1606-1682), ein überaus vielseitiger Barockgelehrter, publizierte 1670 seine umfangreiche zweibändige *MATHEMESIS BICEPS VETUS ET NOVA*, eine lateinisch geschriebene Darstellung der "alten" und der damals modernen, der "neuen" Mathematik. Im zweiten dieser Bände, in der *MATHEMESIS NOVA*, sind 65 Seiten der *KYBEIA* (dem Würfelspiel, den Teilungsproblemen) und - besonders bemerkenswert! - der *ARITHMOMANTICA* (dem "Zahlenlotto") gewidmet. - Ausführliche und einigermaßen vollständige Darstellungen von Juan Caramuels Überlegungen zu diesen Fragen der Glücksspielrechnung gab es bisher kaum. Und Caramuels Bemühungen um die Berechnung der Chancen beim "Zahlenlotto", werden in der Literatur in der Regel überhaupt nicht erwähnt, obwohl sie zu den frühesten mathematischen Überlegungen gehören dürften, die zu diesem Thema überhaupt gemacht und publiziert worden sind. Es schien uns lohnend, Caramuels Beiträgen zur Glücksspielrechnung nachzugehen (R. Ineichen 1999a, 1999b).

1. Biographische Angaben

Geboren 1606 in Madrid, Sohn eines aus Böhmen stammenden Vaters und einer friesischen Mutter; berechnet bereits in früher Jugend *TABULAS MOTUUM CAELESTIUM* und *EPHEMERIDES*;

- Eintritt in den Orden der Zisterzienser, "einer der originellsten Zisterzienser seiner Zeit" (H.J. Roth 1980); Studium der Philosophie und Theologie, Promotion zum Dr. theol. in Löwen; verschiedenste Aufgaben, vor allem im Dienste der Kirche, führten ihn durch ganz Europa; 1673 Bischof von Vigevano; gest. 1682: "Magnus Caramuel - episcopus Vigevani".

- aussergewöhnliche intellektuelle Aktivität während seines ganzen Lebens; sie führte zu einer umfassenden Gelehrsamkeit: er kannte 24 Sprachen (darunter z.B. auch das Chinesische), publizierte mehr als siebenzig Bände im Folioformat über Philosophie, Theologie, Moral, Musik, Poetik, Mathematik, Architektur usw.; ein Polyhistor! - dem enzyklopädischen Ideal des Barocks folgend wollte er in jedes Wissensgebiet eindringen.

2. Glücksspielrechnung vor Juan Caramuel y Lobkowitz

Glücksspiele gehören zu den ältesten Spielen der Zivilisation und sind z.B. bei den alten Indern, den Griechen und Römern der Antike und den Germanen jener Zeit nachgewiesen. Damals keine "Wahrscheinlichkeitsrechnung", doch zahlreiche Überlegungen und Begriffe, die ins *Umfeld* von grundlegenden Begriffen der heutigen Stochastik gehören (R. Ineichen 1996).

- Im 13. und 14. Jh. mathematische Beschreibungen der Chancen im Spiel mit drei Würfeln (Dichtung *DE VETULA*; Kommentare zur *DIVINA COMMEDIA*); Bearbeitungen, des Teilungsproblems.

- Um 1564 vollendet Girolamo Cardano (1501-1576) seinen *LIBER DE LUDO ALEAE* (gedruckt 1663), ein Buch das sich eher an die Spieler als an die Mathematiker richtete.

- Ein Durchbruch gelingt Blaise Pascal und Pierre de Fermat mit den Überlegungen, die sie in ihrem Briefwechsel von 1654 darstellen: Immer noch *keine Berechnung von Wahrscheinlichkeiten*, sondern eigentlich von *Chancenverhältnissen*, vor allem in vorzeitig abgebrochenen Spielen, zur Bestimmung der Verteilung des Einsatzes (Teilungsprobleme).

- 2 -

- 1656 vollendet Christiaan Huygens seine systematisch und streng deduktiv gehaltene Abhandlung *VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK*, in lateinischer Übersetzung 1657 als *DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEAE* erschienen, in Niederländisch 1660; *keine Berechnung von Wahrscheinlichkeiten*, sondern von *Erwartungswerten*.

- 1670 Juan Caramuel y Lobkowitz publiziert seine *MATHEMESIS BICEPS*, *beinahe eine Art Encyklopädie der Mathematik*, darin eingefügt eine *KYBEIA* (Würfelspiele, Teilungsprobleme) und eine *ARITHMOMANTICA* (Zahlenlotto!): *ut in Theologicis Mathematica inveniatur claritas, et in Mathematicis Theologica inveniatur securitas!* - Immer noch "Glücksspielrechnung", *keine Berechnung von Wahrscheinlichkeiten*.

(1713 erscheint schliesslich postum die *ARS CONJECTANDI* von Jakob Bernoulli [1655-1705], dem eigentlichen *Schöpfer der Wahrscheinlichkeitsrechnung*.)

3. Über die Kybeia von Juan Caramuel y Lobkowitz

Griechisch *kybos* heisst Würfel (lat. *tessera*), gr. *kybeia* Würfelspiel. - Caramuels Grundlage: die Lehre, "die allenthalben von den Theologen überliefert wird", dass bei Spielen und Lotterien, die allein vom Zufall abhängen, "völlige *aequalitas*" (Gleichheit; sinngemäss: Unparteilichkeit) herrschen muss. Dabei muss der Theologe auf die Mathematik zurückgreifen, denn "Damit *aequalitas* gewahrt werden kann, ist es notwendig, dass der Einsatz der Gefahr entspricht [...]". Dieses "entsprechen" (*correspondere*) hat bei den behandelten Problemen stets die Bedeutung von "proportional sein".

3.1 Teilungsprobleme

Ein typisches Teilungsproblem (problème des partis, problem of points): "Camillus und Fridericus würfeln; jeder hat eine Goldmünze eingesetzt. Gewinnen soll derjenige, der zuerst dreimal gewonnen hat. Fridericus hat bislang zweimal gewonnen, Camillus einmal. [...] Nun geht der Würfel verloren. Wie soll jetzt der Einsatz [*deposita pecunia*] geteilt werden?" Caramuels Überlegung: Wenn im nächsten, fiktiven Spiel Camillus siegen würde, so würde jeder eine Goldmünze erhalten; wenn Fridericus siegen würde, so würde er zwei Goldmünzen erhalten und Camillus keine. Der Sieg in diesem fiktiven Spiel ist "in gleicher Weise zweifelhaft" (*victoria est aequae dubia*). Also Teilung zwischen 1 und 2; die Mitte ist $1 \frac{1}{2}$: Fridericus erhält somit $1 \frac{1}{2}$ Goldmünzen, Camillus $\frac{1}{2}$. - Interessante Folgerung: "Bei jedem Spiel, bei welchem der eine sagt, 'Ich werde zweimal gewinnen, bevor du einmal gewinnst', muss dieser eine Goldmünze setzen, der andere drei."

Nun folgen einige weitere derartige Teilungsprobleme mit anderen Zahlen der noch fehlenden Siege, die zum Gewinn nötig wären; sie werden - rekursiv - richtig gelöst. Die eben genannte Folgerung wird in analoger Weise wiederholt und Caramuel sieht klar, dass man auf diesem Weg ins Unendliche fortschreiten kann. Er erläutert dies durch eine Tabelle:

Wer, bevor der andere einmal gewinnt,	einmal	zweimal	dreimal	viermal	...	gewinnen muss,
hat eine Goldmünze zu setzen gegen	1	3	7	15	...	Goldmünzen.

In moderner Formulierung: Wer *n*-mal zu gewinnen hat, bevor der andere einmal gewinnt, setze eine Goldmünze gegen $2^n - 1$ Goldmünzen. - Caramuel erläutert auch das Bildungsgesetz dieser wohl von ihm *entdeckten* richtigen Relation ganz korrekt. Während sich diese Teilungsprobleme mit denselben Zahlen im Prinzip auch im Briefwechsel von Pascal und

Fermat und alle auch bei Huygens (mit einer anderen Lösungsmethode, siehe unten) finden, hat Huygens die eben angeführte Verallgemeinerung nicht. Erst in der ARS CONJECTANDI bringt sie Jakob Bernoulli in einer Anmerkung zur Propositio V von Huygens. - Aus der Übereinstimmung der Zahlen in den gestellten Teilungsproblemen muss natürlich geschlossen werden, dass zum mindesten die Aufgabenstellungen einem weiteren Kreis von Interessenten, und so auch Caramuel, bekannt gewesen sind: Sie haben sie *vorgefunden*, nicht *erfunden* und nicht *entdeckt*. Huygens weist in einem Begleitbrief zu seiner Abhandlung darauf hin, dass sich einige der berühmtesten Mathematiker von Frankreich mit Rechnungen dieser Art beschäftigt haben, dass aber diese "indessen ihre Methoden geheim gehalten" hätten (eine Aussage, die nach A.W.F. Edwards "just possible to believe, [...] but difficult" ist).

Anschliessend versucht Caramuel auch Teilungsprobleme zu lösen, wenn drei Spieler miteinander spielen und ihr Spiel vorzeitig abbrechen müssen; weiter sucht er auch nach einer gerechten Teilung, wenn "ein Spiel gar nicht begonnen werden kann, nachdem man bereits festgelegt hat, wer den Vortritt hat". Alle diese Probleme löst er falsch; Huygens hat sie alle richtig gelöst!

3.2 Würfelprobleme

Caramuel berechnet u.a. für das Spiel mit zwei Würfeln für jede der Augensummen von 2 bis 12 richtig die Anzahl der Erzeugungsmöglichkeiten und stellt in einer Tabelle für jede dieser Augensummen "Hoffnung" (spes) und "Gefahr" (periculum) - für uns also die Zahlen der günstigen bzw. der ungünstigen Fälle - zusammen; er erfasst auch das entsprechende Problem mit drei Würfeln offensichtlich richtig. Zu beachten ist dabei: Diese Probleme waren in der damaligen Zeit nicht so trivial, wie sie uns heute erscheinen, selbst ein Leibniz hat dabei geirrt! Ferner: Caramuel hat keinen *Quotienten* aus der Zahl der günstigen und der Zahl der gleichmöglichen Fälle berechnet; eine Masszahl für das, was wir heute "*Wahrscheinlichkeit*" nennen, hat er *nicht erfunden*. Diesen *Quotienten* hat Girolamo Cardano *erfunden* und in seinem LIBER DE LUDO ALEAE (ca. 1564, publiziert 1663) an einzelnen Stellen verwendet - allerdings ohne von "Wahrscheinlichkeit", "günstigen Fällen" usw. zu sprechen.

Mehrfache Würfelversuche. Dazu ein Beispiel: "Es will Aurelius das Glück [mit dem Werfen eines Würfels] versuchen und sagt: Wenigstens beim zweiten von zwei Malen werfe ich einen Fünfer." Wieviel hat er nun zu setzen, "so dass die Ungleichheit im Geld durch die festgelegte Ungleichheit der Gefahr bestimmt werde?" Caramuel überlegt so: Ein Wurf ist $1/6$ wert. Nehmen wir an, der Sieger erhalte als ganzen Preis 36. Dann wird jener, der im ersten Wurf einen Fünfer erzeugen will, $1/6$ von 36, also 6 setzen müssen. Im ersten Wurf kann er sich aber - wenn er keinen Fünfer wirft - das Recht auf einen zweiten Wurf erwerben. Dieser zweite Wurf ist, bevor er gespielt wird, wieder $1/6$ wert. Doch $1/6$ wovon? Von der Differenz zwischen dem ganzen Preis, den Aurelius im Falle eines Gewinnes erhalten würde und dem bereits errechneten Einsatz, d.h. $1/6$ von $(36-6)$, also 5. Nun ist $6+5=11$, das Verhältnis der Einsätze also 11 : 25. Dies ist offenbar richtig: Der Multiplikationssatz liefert uns heute sofort die Gewinnwahrscheinlichkeit von $25/36$ für

den Gegner von Aurelius und damit $11/36$ für Aurelius.

Anschliessend folgt eine entsprechende Aufgabe, wenn einer in drei Würfeln mit einem Würfel mindestens einmal einen Fünfer werfen will. Auch sie wird richtig gelöst und wieder stellt Caramuel fest: poteris hinc computum in infinitum promovere. Er setzt nun ausdrücklich die Algebra ein - in einer Schreibweise, die auf uns heutige Leser sehr fremdartig wirkt - und kommt auf die Regel:

"Vermindere den ganzen Preis nacheinander um den sechsten Teil, und so wirst du das haben, was der Gegner zu zahlen hat." - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung in der heutigen Form zeigt uns sofort, dass diese Regel richtig ist. Hat sie Caramuel *entdeckt* oder *erfunden*? Oder sind diese Begriffe vielleicht *komplementär* zu verwenden?

Caramuel illustriert die Regel auch noch mit einer ausführlichen Tabelle - es ist bemerkenswert, dass diese von ihm mit dekadischen Logarithmen errechnet wird. - Huygens behandelt diese Probleme auch, bringt jedoch die allgemeine Regel nicht.

Schliesslich untersucht Caramuel die aequalitas noch beim das Spiel Passe-dix (Ludus ultra decem): Es werden drei Würfel geworfen: "Wenn dabei nicht zwei Würfel dieselbe Punktezahl haben, so gilt der Wurf nicht. [...] Wenn zwei Würfel dieselbe Punktezahl aufweisen [...], ist der Wurf gültig. Wenn die Augenzahl aller drei Würfel 10 übersteigt, dann gewinnt der, der diese Punktezahl geworfen hat; andernfalls verliert er." - Huygens bringt die Untersuchung dieses Spiels, das seit dem 15. Jh. nachgewiesen ist, nicht.

3.3 Abhängige und unabhängige Ereignisse

Die stochastische Unabhängigkeit wird heute meistens über die Produktformel (A. de Moivre 1712) für Wahrscheinlichkeiten definiert. Davon ist bei Caramuel noch keine Rede. Sehr beachtenswert ist aber, dass er durch Beispiele bereits auf diesen Sachverhalt hinweist. (Huygens hatte bei seinen Beispielen keinen Grund, die Unabhängigkeit als solche ausdrücklich zu erwähnen.) - Caramuel nimmt das Spiel, mit einem Würfel in zwei Würfeln mindestens einmal eine vom Gegner gewählte Zahl zu werfen. Er vergleicht es nun mit dem "Raten auf gut Glück": aus sechs verschiedenen Buchstaben in höchstens zwei Versuchen jenen Buchstaben zu erraten, den sich der Gegner ausgedacht hat. Wer beim ersten Mal den vom Gegner ausgedachten Buchstaben erraten will, hat die "Hoffnung" 1 und die "Gefahr" 5, genau wie wenn er eine befohlene Zahl in einem einzigen Wurf zu werfen hat. Geht es jedoch um zwei Versuche, so ist der, der sich beim Erraten das erste Mal geirrt hat, dadurch "informierter geworden": Er hat jetzt zwei modi non errandi und 4 pericula. "Doch der Würfelspieler hat das erste Mal 5 Gefahren, das zweite Mal 5, das dritte Mal 5, usw. immer 5." - Eine hübsche Darstellung eines *entdeckten* wichtigen Sachverhaltes!

3.4 Nochmals Caramuel und Huygens

Hat Caramuel bei den richtig gelösten Teilungsproblemen für zwei Spieler einfach Huygens kopiert? I. Todhunter neigt zu dieser Ansicht. Doch uns scheint, die Frage in dieser Form sei zu *verneinen*. Zunächst sagt Caramuel selbst, er hätte die Abhandlung von Huygens, die er dem dänischen Astronomen Christianus Severinus Longomontanus (1562-1647) zuschreibt,

erst erhalten, als er die KYBEIA bereits fertig hatte. Zudem fügt er seiner KYBEIA den ganzen Text von Huygens (bzw. Longomontanus) an, was kaum einen Sinn gehabt hätte, wenn er Huygens bereits kopiert gehabt hätte. Weiter sind die Unterschiede in der Formulierung der Probleme und ganz besonders in der Argumentationsweise gross: Huygens basiert z.B. strikte auf den Lehrsätzen, die er an den Anfang seiner Abhandlung stellt - more geometrico! Caramuel, nicht Mathematiker sondern Polyhistor, schliesst vielmehr mit dem "gesunden Menschenverstand"; es unterlaufen ihm auch Fehler, die er nicht gemacht hätte, wenn er einfach Huygens kopiert hätte. Caramuel zitiert in seiner MATHESIS BICEPS oft andere Autoren; wieso dann Huygens nicht? Ferner enthalten die Ausführungen von Caramuel manches, was bei Huygens nicht zu finden ist. Doch müssen Caramuel - und Huygens! - wohl eine Quelle gehabt haben, die für etliche Probleme mindestens die Aufgabenstellung enthalten hat. Und schliesslich behandelt Caramuel das Lotto (s.folg. Abschnitt), Huygens nicht.

4. Die ARITHMOMANTICA - Behandlung des "Zahlenlottos"

Er siedelt das Lotto in Cosmopolis an: Es "waren 5 Konsuln zu wählen, und weil es 100 fähige Bürger gab [...], wurde die Wahl dem Zufall anvertraut." Ein Kaufmann habe dann ein Spiel angeboten: (1) Wer mitspielen will, kann als Einsatz soviel zahlen, wie er will; er hat dazu 5 der 100 Namen zu nennen. (2) Wenn von diesen ein einziger unter den ausgelosten ist, erhält er den Einsatz zurück; sind 2 darunter, erhält er das 10-fache des Einsatzes, wenn 3, dann das 300-fache, wenn 4, das 1500-fache, wenn alle 5, dann das 10 000-fache. (3) Wer nicht nur die 5 Namen, sondern auch die Reihenfolge der Auslosungen richtig voraussagt, erhält das 20 000-fache. - Die Beschreibung erinnert sofort an die GENUESER LOTTERIE (Mitte 17.Jh.). Caramuels Frage: gerechte Spiele? (Für ihn eine *Quaestio Arithmo-Theologica*.) Mit der Kombinatorik, die er in der MATHESIS BICEPS an verschiedenen Stellen behandelt, versucht er für die genannten Fälle die Anzahl der modi lucrandi (spes) und der modi perdendi (periculum) zu finden. So stellt er z.B. richtig fest, dass wenn 5 Namen ausgewählt werden und diese 5 richtig vorausgesagt werden sollen, spes zu periculum sich wie 1 : 75 287 519 verhalten; soll auch noch die Reihenfolge richtig erraten werden, so ist das Verhältnis von spes zu periculum 1 : 9 034 502 399. Gelegentlich unterlaufen ihm kleine Versehen, auch solche, die er später korrigiert. Er untersucht noch viele andere denkbare Varianten, die er aber z.T. falsch beantwortet. Zusammengefasst: Höchstwahrscheinlich die erste Untersuchung von kombinatorischen Fragen beim "Zahlenlotto"; originell, mit vielen richtigen, aber auch etlichen falschen Überlegungen.

Literaturangaben in: Ineichen, R. (1996): Würfel und Wahrscheinlichkeit - Stochastisches Denken in der Antike, Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg 1996. - Ineichen, R. (1999a): Juan Caramuels Behandlung der Würfelspiele und des Zahlenlottos; NTM - Internat. Zschr. für Geschichte und Ethik der Naturwissenschaften, Technik und Medizin. - Ineichen, R. (1999b): Über die Kybeia und die Arithmomantica von Juan Caramuel y Lobkowitz - ein Kapitel aus der Frühgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung; ersch. 1999 in Bull. Soc. Frib. des Sciences Naturelles.

Formulae, Sketches, Tools

Nada Razpet, Ljubljana

One of the oldest math objects studied in the past were the conic sections, conics for short. It seems they have been discovered by Menaechmus (380-320 BC). He was a tutor of Alexander the Great. Menaechmus studied conics as contours of an intersection of a plane with a right-angular circular cone. He solved the problem of a cube duplication ($x^3 = 2$) by drawing two parabolas:

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx.$$

However, the values of a and b solving this problem could be: $a = 1$ and $b = 2$. The Greeks couldn't solve this problem by ruler and compass constructions. Menaechmus solved it by finding the intersection of two parabolas. He called the parabola a "section of a right-angled cone", the ellipse a "section of acute-angled cone", and the hyperbola a "section of an obtuse-angled cone". He studied these three curves as cross sections of three different cones. The angle between the generating line of the cone and the cross section plane was always 90° .

Euclide's four books about conic sections have been lost. Apollonius (261-190 BC), the great Greek geometer, was the first man who named these conic sections and studied them as sections of the same cone (right or oblique) but with different inclinations. He proved the equality

$$BC^2 = AB \cdot AP$$

where B is a midpont of a segment DC (Fig. 1). The segment AB is parallel to the axes of the parabola.

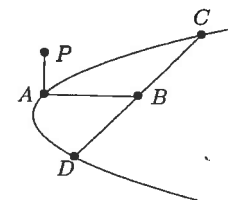


Fig. 1

In our modern notation we get

$$y^2 = 2px.$$

The word "parabola" means "equality" or "an exact comparison." We could write for the other curves:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2, \quad y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2, \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

So, we know why he called one of these curves ellipse ("falling short") and another hyperbola ("throwing beyond"). He didn't use expressions like focus and directrix. These expressions were involved by Pappus of Alexandria (about A.D. 300). He wrote "Synagoge". In this book, there are many historical notes about the Greek mathematicians.

The Greek mathematicians knew definitions of these curves as loci of points having certain distance relationships, which were specific for each curve.

In the year 1637, Descartes published his *Géométrie*. He created the "analytical geometry" and used algebraic methods in geometry and "the coordinate geometry". The ellipse, parabola, and hyperbola were defined as curves of the second degree.

Wallis was the first man (1655, *Tractatus de sectionibus conicis*) who treated parabola, ellipse, and hyperbola as plane figures.

It is not known which construction used the Greek mathematicians to draw the conic sections.

We shall try to find different ways to draw an ellipse, a parabola, and a hyperbola. Euclid was the first man who postulated which kind of instruments are allowed for geometrical constructions. They must:

- draw a straight line from any point to any point;
- produce a finite straight line from any point to any point;
- describe a circle with any center and distance.

The intention of this description is practical and theoretical. He never tried to use these instruments for an approximate solution that could be useful for application. He has been looking for exact solutions with straight line and circles. Some other drawing devices, which were not included as acceptable, were used to solve some practical problems. Descartes and other scientists of the seventeenth century studied different drawing mechanisms for practical and theoretical purposes, for example devices to cut hyperbolic lenses. In the *Géométrie*, Descartes described two methods of curves representation: the representation by a continuous motion and the representation by an equation. Descartes wrote in this book: "If a curve is to be accepted as a tool to solve a geometrical problem, one must be sure that, under certain conditions, the intersection points of two such curves exists." This standpoint was very important, it changed the status of a drawing devices from tools for solving a geometrical problem to objects of a theory. Many mathematicians designed and studied dozen of different drawing instruments for algebraic curves (Cavalieri, L'Hôpital, Newton, van Schooten).

In the nineteenth century, the scientists developed many linkage instruments. Geometers started to study, which linkages could be used for drawing curves and which curves could be drawing by n -bar linkage.

The problem of drawing curves, the study of linkages, and other geometrical problems are

still important today and it is similar at the problem of forcing a point of the robot to execute a given trajectory.

Conics drawing with tightened thread

The conics drawing with tightened thread were described by de L'Hôpital in his "*Traite analytiques des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problemes tant determinez q'indeterminez*".

This method used a common definition of the ellipse as the locus of points P for which the sum of distances from P to two fixed points F_1 and F_2 (called focus, foci) is constant (the length of a thread) (Fig. 2).

The hyperbola is a locus of points P for which the difference of distances from P to two fixed points F_1 and F_2 is constant (Fig. 3).

The parabola is a locus of points P for which the distance from a fixed line (directrix) to P is equal to the distance from P to a fixed point F (Fig. 4).

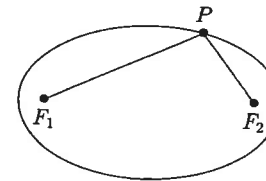


Fig. 2

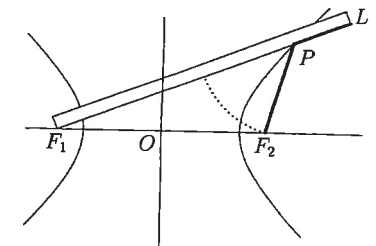


Fig. 3

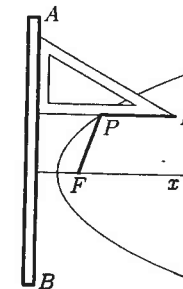


Fig. 4

The ellipsograph

A very known instrument from the age of "organic" geometry is the ellipsograph. An ellipse is generated by a point P on a rod which moves in a plane. Two other points A and B of this rod move on a pair of axes. The point P lies on the straight line through A and B . If P is the midpoint of the segment AB , then the generating curve is a circle. Similar to the ellipsograph, there are the parabolograph and the hyperbolograph.

Suppose that $PA = a$ and $PB = b$ and $\alpha = \angle ABO$. The coordinates of P are $x = a \cos \alpha$ and $y = b \sin \alpha$. The locus of points P is the ellipse with a semimajor axis a and semiminor axis b . The distance between A and B is constant (the points A and B are fixed on the rod s).

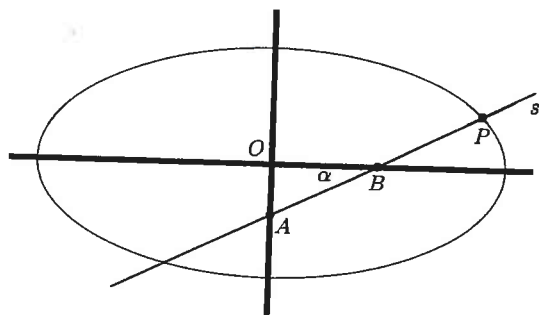


Fig. 5

The ellipsograph of van Schooten

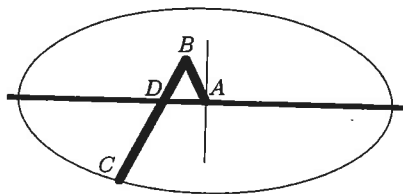


Fig. 6

We suppose that $AB = BD$. The point D moves on a straight slot DA . The semimajor axis is $a = CD + DB + BA = CD + 2DB$ and the semiminor axis $b = CD$.

The ellipse as hypotrochoid

An ellipse can be generated as a hypotrochoid, too. A small circle with the radius r is rolling without friction on a fixed circle with radius R . Let P be the tracing point. A distance from the point P and the centre of the rolling circle is d . We have to find d from the system

$$a = r + d, \quad b = |r - d|, \quad \varepsilon = \frac{e}{a}$$

If a relation between R and r is $R = 2r = 1$ holds than we have two values for d (1/8 or 2).

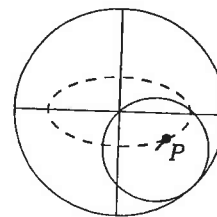


Fig. 7

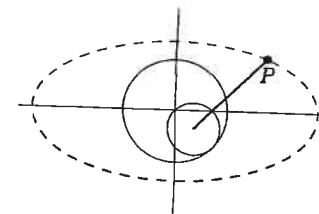


Fig. 8

The conics drawing as an envelope

The ellipse

We draw a circle with a fixed point F inside first. Using a right-angle triangle, we draw lines through A and B , and through A and F with right angle $\angle FAB$ from any point A on the circle. We repeat this for numerous positions of A keeping F fixed. An envelope of all lines through A and B will be an ellipse.

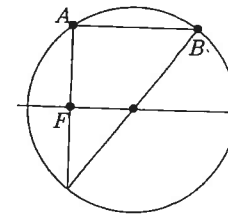


Fig. 9

The hyperbola

A point F must be outside of a circle (Fig. 10). We draw a perpendicular line through A and P to the line through F and A . Then we repeat this for numerous positions of A keeping F fixed. An envelope of all lines through A and P will be a hyperbola.

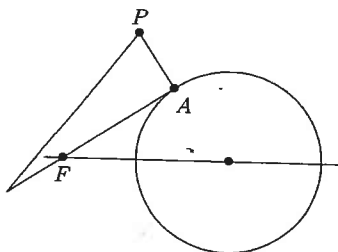


Fig. 10

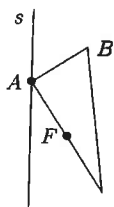


Fig. 11

The parabola

We draw a fixed line s and a point F (Fig. 11). A line through A and B is perpendicular to the line through A and F . A parabola is an envelope of all such lines through A and B .

Paper folding

The ellipse

We draw a circle with a fixed point F inside (Fig. 12). Let A be a point on the circle. Then we put A on F and fold the paper. We repeat this for numerous of points A on the circle. An envelope of all s produced in this way will be an ellipse.

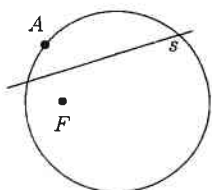


Fig. 12

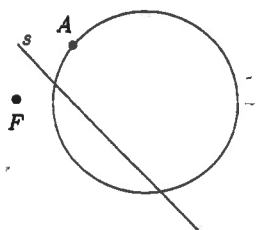


Fig. 13

The hyperbola

We draw a circle and a fixed point F outside (Fig. 13). Let A be a point on the circle. Put F on A and fold the paper. We repeat this for numerous of points A on the circle. An envelope of all such s produced in this manner will be a hyperbola.

The parabola

We draw a fixed line t and a point F . A point A is on the line t . Then we put point A on F and fold the paper. We repeat that for numerous of points A on the line t . An envelope of all s produced in this way will be a parabola.

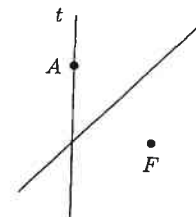


Fig. 14

Drawing conics with a computer

We could use Cabri Géomètre II, The Geometer's Sketchpad or some other programmes. Through the individual dragging of a point, usually along a guide-line, a locus is generated from one or more points constructively dependent on the dragged point.

Here we have three ways to generate ellipses:

Method 1

The endpoints A, B of a line segment slide along two orthogonal straight lines. The point $P \in AB$ is fixed on the segment. The point P and the image P' of this point, reflected across one of the orthogonal lines, together describe an ellipse.

Method 2

A line segment and a moveable point M on it are given. These two sub-segments are taken as radii of circles. The centres of these circles are foci F_1 and F_2 . The circles intersect at points P and P' . When the point M is moving along the segment, P and P' generate an ellipse.

Method 3

We use the converse of Pascal's Theorem. The converse states: "If the opposite sides of a hexagon intersect each other on a straight line, its six vertices lie on a conic section".

We could generate a hyperbola, and a parabola with a computer, too.

References

- [1] E. H. Lockwood, A book of curves, Cambridge the University Press. 1963
- [2] E. Brieskorn, H. Knörrer, Plane Algebraic Curves, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1986
- [3] Internet: <http://www.best.com/>
- [4] Internet: <http://155.185.1.61/labmat/>
- [5] D. J. Struik, Kratka zgodovina matematike, DMFA Slovenije, Ljubljana 1986
- [6] H. Schumann, D. Green, Discovering Geometry with a Computer, Chartwell-Bratt Ltd. 1994

**Möglichkeiten einer historischen Akzentuierung im Mathematikunterricht**

Stefan Deschauer

1 Einleitung

Selbst für den Laien wäre es kaum möglich, sich den Deutschunterricht ohne Literatur- und Linguistikgeschichte vorzustellen. Ähnliches gilt für Musik und Kunst. Keine Kulturwissenschaften kann sich – auch nicht bei ihrer Vermittlung – von ihren historischen Entstehungsbedingungen und Entwicklungsprozessen abkoppeln.

Dennoch wird den Schülern im heutigen Unterrichtsalltag suggeriert, daß die Mathematik ein weithin ahistorisches Gedankengebäude sei, mit immer schon gültigen und auch in Zukunft unumstößlichen Sätzen und den dazugehörigen, meist normierten Beweisen. Die Freiheit der Schüler besteht offenbar darin, sich diesem mehr oder weniger attraktiven Fertigprodukt im Studentakt anzunähern, indem sie diese Sätze und Beweise unter Anleitung und Führung des Lehrers „nacherfinden“, der die mathematische Wahrheit im voraus kennt.

Historische Akzente im Mathematikunterricht können dazu führen, daß Schüler Einblicke in die lebendige Entwicklungsgeschichte der Mathematik gewinnen, daß sie die Leistungen von Mathematikern respektieren, die ohne vorausgewußtes Wissen eines Mentors auskommen mußten, und daß sie über geeignete, historisch aufbereitete Beispiele Freude an der Mathematik (wieder)gewinnen.

Im vorliegenden Beitrag sollen Ermutigungen und Anregungen zu einem historisch akzentuierten Mathematikunterricht gegeben werden. Darüber hinaus werden aber auch Probleme und Grenzen aufgezeigt.

2 Wozu Geschichte der Mathematik im Unterricht?**2.1 Geschichte der Mathematik als Möglichkeit zu einem besseren Verständnis von Mathematik, zu einer Verbesserung des MU?**

F. KLEIN war wohl der erste, der die genetische Methode explizit mit dem MU verband. Dabei stützte er sich allerdings auf das heute überholte biogenetische Prinzip des Biologen E. HAECKEL, nach welchem das Individuum in seiner Entwicklung in abgekürzter Reihe alle Entwicklungsstadien der Gattung durchläuft (vgl. [6, S. 289]). Wir verstehen heute, auf der Grundlage der genetischen Erkenntnistheorie und Psychologie J. PIAGETS, die mathematischen Lernprozesse unserer Schüler besser und sind weit davon entfernt, sie auch die historischen Um- und Irrwege nachvollziehen zu lassen.

Andererseits sollen mathematikhistorische Elemente im Unterricht dazu beitragen, daß Mathematik als dynamischer Prozeß erlebbar wird. Eine ahistorisch vermittelte Mathematik führt zum Zerrbild eines unattraktiven Fertigprodukts, wie es H. FREUDENTHAL schon in den sechziger Jahren scharf kritisiert hat. (Vgl. [3, S. 110-114].) Hierzu können wir sogar CICERO ins Feld führen: *Nescire autem quid antea quam natus sis acciderit, id est semper esse puerum* (zit. n. [7, S. 9]).

Für manche Autoren bedarf die Geschichte der Mathematik nicht mehr an Rechtfertigung als etwa die Literaturgeschichte, die Musikgeschichte und die Kunstgeschichte. So äußert sich CH. SCRIBA (zit. n. [7, S. 12]): „Die Frage, ob die Geschichte der Mathematik etwas zur Verbesserung des mathematischen Unterrichts beitragen kann – gleich ob im Schul- oder im Hochschulunterricht – ist falsch gestellt. Es muß vielmehr heißen: Ist Mathematik ohne Geschichte der Mathematik überhaupt denkbar? Alles weitere folgt aus der Antwort, die nur lauten kann: Nein, es gibt keine Mathematik ohne ihre Geschichte.“

2.2 Mathematik als Teil unserer Kultur

Hinter diese Überschrift kann man getrost ein Ausrufezeichen setzen, und es versteht sich von selbst, daß man eine Kulturwissenschaft nicht „unkultiviert“ unterrichten kann. Wiederum CH. SCRIBA (vgl. [7, S. 13]) führt hierzu aus, daß Mathematik nicht als isolierte Wissenschaft, als reines Erkenntnisgebilde verstanden werden darf, sondern als Bestandteil der Kultur. In diesem Zusammenhang stellt er auch ausdrücklich fest, daß Mathematik als kulturelles Phänomen ohne historische Betrachtung nicht zu begreifen sei.

3 Welche mathematikhistorischen Akzente sind im MU möglich und sinnvoll?

Den MU historisch *orientieren* zu wollen scheint mir vermessen und auf Dauer ebenso zum Scheitern verurteilt zu sein wie die einseitigen Versuche einer Orientierung des MU an anderen vermeintlichen Leitlinien in der Vergangenheit. Mathematikgeschichte ist sicher nicht dazu geeignet, als didaktisches Leitprinzip für den gesamten MU zu fungieren, aber dieser Unterricht sollte zumindest historisch *akzentuiert* werden, wenn die in den Abschnitten 2.1 und 2.2 genannten wichtigen Aspekte zum Wissenschaftsverständnis der Mathematik im Unterricht berücksichtigt werden sollen. Historische Akzente zu setzen ist ein viel bescheideneres Ziel, als durchgängige historische Orientierungen zu entwickeln, aber es erscheint wesentlich realistischer und erfolgversprechender. Es wird darauf ankommen, eine möglichst große Vielfalt dieser Akzente zu erfassen und zu analysieren, um auf eine dauerhafte Veränderung des MU in eine der Wissenschaftsdisziplin Mathematik adäquate und daher didaktisch erwünschte Richtung hinzuwirken.

Die nachfolgenden Ausführungen, die hier aus Raumgründen nur skizziert werden können, wollen einen Anfang zu dieser Bestandsaufnahme und Analyse bieten.

3.1 Namen von Mathematikern

In zahlreichen Lehrplänen finden sich in Verbindung mit bestimmten Begriffen, Definitionen, Sätzen, Beweisen und Verfahren die Namen von zugehörigen Mathematikern. Manche Lehrbücher beschränken sich ebenso wie die Lehrpläne auf eine bloße Namensnennung; aber auch Unterrichtswerke, die ausführlicher auf Leben und Werk der Mathematiker eingehen¹, lassen die Frage der unterrichtlichen Umsetzung offen, insbesondere die der Integration in den jeweiligen Stoff, ohne die die Namen keine bleibende Bedeutung erlangen.²

3.2 Überlieferungen, Anekdoten und Legenden

Über Mathematiker wird eine Fülle von launigen Begebenheiten überliefert, die die angeblichen charakterlichen Eigenheiten auf amüsante Weise aufs Korn nehmen. Ein Beispiel hierzu stammt aus [10, Vorrede] und stellt THALES als den Prototyp des vertrottelten Mathematikers dar. Ich verweise in diesem Zusammenhang auf zwei weitere Anekdoten über D'ALEMBERT und HILBERT, die in [7, S. 181, 183 f.] nachzulesen sind.

Solche Anekdoten werden die Aufmerksamkeit der Schüler eher nur kurz auf sich ziehen und allenfalls ein Schmunzeln hervorrufen, vielleicht aber auch auf Unverständnis stoßen.

Aus diesem Grunde sollten im Unterricht im wörtlichen Sinne *lehr-reiche* Traditionen bevorzugt werden, wobei mir der nachprüfbar oder auch nicht mehr nachprüfbar Wahrheitsgehalt nicht sehr wesentlich erscheint. Ein Beispiel hierzu ist der „Bericht“ (ob Legende oder nicht) HERODOTS über die ägyptischen Seilspanner (Zwölfknotenseil: Umkehrung des Satzes von PYTHAGORAS, Einstieg in das Thema „pythagoreische Zahlentripel“).

Ähnlich lehrreich, zugleich aber auch erheitend, ist die von VITRUV [14] stammende wohlbekannte „Überlieferung“ der Entdeckung des spezifischen Gewichts durch ARCHIMEDES. In fast

¹ Vgl. die in Bayern wohlbekannte Algebra-Reihe [2] aus dem Ehrenwirth-Verlag, deren historische Texte für schulische Zwecke zu ausführlich und detailverliebt sind, aber reiches, zuverlässiges Material bieten.

² Vgl. hierzu Abschnitt 3.8!

allen Schulbuchwerken findet man hierzu mehr oder weniger ausführliche Erläuterungen, zumindest aber eine Aufgabe zur Gold-Silber-Legierung (Mischungsrechnung), die auf dem berühmten „historischen“ Vorbild beruht.

3.3 Titelblätter alter mathematischer Handschriften und Bücher, Briefmarken

Vielfach eignen sich auch exotisch anmutende Titelblätter oder einzelne Seiten alter mathematischer Handschriften und Bücher, um die Aufmerksamkeit der Schüler zu bündeln und ihr Interesse an der historischen Dimension der Mathematik zu wecken. Eindrucksvolle und relativ leicht zugängliche Beispiele sind neben vielen anderen der ägyptische Papyrus *Rhind* aus dem 19. Jh. v. Chr. [2, Band 1, S. 113], die Titelblätter von AL-HWARIZMI-Handschriften (ara-bisch / lateinisch) [ebda., S. 9] und vor allem von deutschsprachigen Frühdrucken, etwa von [1].

Auch Briefmarken bieten sich als Werbeträger für Mathematik(er) an.³

3.4 Herkunft von mathematischen Begriffen und Symbolen

Die Frage nach der Herkunft mathematischer Begriffe und Symbole führt häufig mitten in tiefliegende mathematikhistorische Zusammenhänge hinein. So gelangt man über die Etymologie des Wortes „Algebra“ zu den eigentümlichen Denkweisen der Muslime beim Lösen von Gleichungen. Ebenso lohnt es sich, dem Ursprung des Begriffs „quadratische Ergänzung“ nachzugehen, beim Erfinder des Gleichheitszeichens, ROBERT RECORD(E), die geradezu klassische Begründung für die Wahl seiner Symbolik nachzulesen ([9, Ff 1'], zit. in [13, S. 171]) und vieles andere mehr.

3.5 Historische Textaufgaben

Ein effektives Mittel, Schüler auf die historische Dimension der Mathematik aufmerksam werden zu lassen, ist die Präsentation von historischen Textaufgaben. Auch ist der hierzu notwendige Aufwand denkbar gering. In [2, Band 1, S. 119, 166, 161 bzw. Band 3, S. 67] findet man u. a. Beispiele zu linearen Gleichungen aus dem Papyrus *Rhind*, der *Anthologia Graeca* (Lebensalter des DIOPHANT) und dem Rechenbuch [12] von ADAM RIES, außerdem eine Textaufgabe aus einer deutschen Algebra-Handschrift von 1461, die auf eine Wurzelgleichung führt. Zahlreiche historische Aufgaben, die der Unterhaltungsmathematik zuzurechnen sind, können auch zu heftigem Schmunzeln verleiten. Hier bieten sich Aufgaben von APIAN [1] zur arithmetischen Progression an.

3.6 Historische Formeln und Verfahren

Als historisch werden hier Formeln und Verfahren bezeichnet, die in früherer Zeit eine wichtige Rolle spielten, heute aber aufgrund höherer mathematischer Methoden oder moderner Rechenhilfsmittel ihre Bedeutung teilweise weitgehend verloren haben. Im allgemeinen läßt sich die damalige Funktion dieser Formeln noch gut nachvollziehen.

Beispiele sind

- die Darstellung eines Produkts als Differenz von Quadraten (Babylonien, 17. Jh. v. Chr.)
- die Suche nach Möglichkeiten, die Multiplikation auf die einfacheren Rechenarten Addition und Subtraktion zurückzuführen (*Prasthaphairesis* des JOHANNES WERNER (1468-1528), Entdeckung der Logarithmen durch JOST BÜRGI (1552-1632) und JOHN NAPIER (NEPER) (1550-1617))
- die näherungsweise Bestimmung von Quadratwurzeln aus beliebigen natürlichen Zahlen (Babylonien, ca. 1600 v. Chr.; HERON, *Metriká*, 62 n. Chr.), die uns Respekt abnötigt.

³ Vgl. das Buch „Wissenschaftsgeschichte en miniature“ von WUSSING und REMANE (Leipzig 1989).

- Auch die Betrachtung historischer Verfahren kann im Unterricht lohnend sein, z. B.
- das schriftliche Divisionsverfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel, das APIAN [1] in entsprechend modifizierter Form bis zur 8. Wurzel durchführt
 - das bekannte HERONSche Iterationsverfahren, das bereits bei den Babyloniern nachweisbar ist
 - ein Ausschnitt aus der Geschichte der quadratischen Gleichung (Babylonier, geometrische Lösung der Griechen, italienische „Wortalgebra“, „deutsche Coß“). Für die letztgenannte Phase zeugt z. B. ADAM RIES [11], der die Thematik allerdings auch nicht immer fehlerfrei beherrscht.

3.7 Mathematikhistorisch bedeutsame Entdeckungen

Schülern sollte im Rahmen des Möglichen auch im Unterricht deutlich werden, daß es in der Mathematikgeschichte immer wieder epochale Entdeckungen gegeben hat, die die weitere Entwicklung ganz wesentlich beeinflussen haben. Um nur einige kurz zu nennen:

- die Entdeckung der Irrationalität durch die Pythagoreer (an der Quadratdiagonalen oder am regelmäßigen Fünfeck)
- die drei klassischen Probleme der Antike, um die mehr als 2000 Jahre äußerst fruchtbare Bemühungen wurde (mit einer schülergemäßen Information über die Unmöglichkeitbeweise)
- EUKLIDS Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlen
- EUKLIDS Elemente als historischer Prototyp einer axiomatischen Theorie (Stichwort: Parallelenaxiom)
- die Erfindung des dezimalen Positionssystems durch die Inder
- die Mathematisierung des Zufalls (Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung)
- die Entwicklung des Differentialkalküls⁴
- die Geometrisierung der Algebra und die Algebraisierung der Geometrie (griechische Antike, DESCARTES als Begründer der analytischen Geometrie).

3.8 (Kurz-)Texte über die Entwicklung mathematischer Teilgebiete

Solche Texte lassen sich evtl. schon nach dem Abschluß einer thematischen Einheit einsetzen und können den Überblick über das Erreichte im Sinne einer „Plateau-Erholung“ abrunden und vertiefen. Es ist jedoch zu bedenken, daß viele Schüler auch nach Abschluß eines Stoffgebiets noch handfeste Probleme mit dem Verständnis und der Anwendung von Begriffen, Sätzen und Verfahren haben. Solche Schüler werden etwa von historischen Verfahren, die von den gelernten modernen abweichen, eher verwirrt als bereichert. Daher empfiehlt es sich in der Regel, die historische Entwicklung eines mathematischen Teilgebiets im Sinne des Spiralcurriculums erst an späterer Stelle aufzugreifen, z. B. dann, wenn das Stoffgebiet selbst auf einer höheren Windung der Spirale behandelt wird. Auch für die Würdigung eines Mathematikers, dessen Namen mit einem Begriff, Satz, Beweis oder Verfahren verbunden ist, kann ein bewußt gewählter späterer Zeitpunkt geeigneter sein: Die weitgehende Festigung des Stoffs bei den Schülern oder deren Begegnung mit weiteren Leistungen dieses Mathematikers können hier als mögliche zeitliche Anhaltspunkte dienen.

Es soll jedoch auch angemerkt werden, daß nicht alle schulmathematischen Themenkreise eine sachgerechte historische Betrachtung im Rahmen des Gymnasiums, auch nicht des Leistungskurses, erlauben. Ein Beispiel ist die Entwicklungsgeschichte der Analysis, ein typisches Proseminar-Thema, das zu Recht im mathematischen Grundstudium angesiedelt ist.

⁴ siehe aber Abschnitt 3.8!

4 Fächerübergreifender Unterricht

Mit etwas Phantasie lassen sich Themen des MU unter historischem Aspekt in eine sinnvolle Verbindung mit Themen des Unterrichts anderer Fächer bringen. Leider aber sind die Probleme bei der Realisierung eines fächerübergreifenden Unterrichts oft riesengroß: Neben den schulorganisatorischen und personellen Hürden ist es oft der Lehrplan, der die Behandlung „affiner“ Themenbereiche verschiedener Fächer zu ganz unterschiedlichen Zeitpunkten vorsieht. Gelingt aber solch ein fächerübergreifender Unterricht, so können Schüler hieraus besonderen Gewinn ziehen: Sie erfahren, daß die Aneignung von Wissen, das zu einer echten Bildung beitragen soll, mit einem „Schubladendenken“ („hier Mathe, da Geo“) nicht gelingen kann. Darüber hinaus werden sie sensibilisiert für die erstaunlichen kulturellen und zivilisatorischen Vernetzungen einer historisch gewachsenen Kulturwissenschaft.

Auf einen Katalog möglicher Beispiele will ich hier verzichten und nur kurz auf das Verhältnis „Mathematikgeschichte und Sprache“ eingehen:

Im heutigen MU können mathematische Texte in fremder Sprache Schülern kaum noch vorgelegt werden; insbesondere ist das Griechische fast ganz aus den früher altsprachlichen Schulen verschwunden. Allenfalls können noch in Lateinklassen italienische Texte (zur Algebra) erschlossen werden.

Ein anderer sprachlicher Aspekt beim Lernen von Mathematik betrifft aber die Formulierung von Definitionen, Sätzen und Beweisen sowie die Beschreibung von Verfahren: Knappheit, fachsprachliche Korrektheit, Vollständigkeit und Verständlichkeit sind dabei maßgebliche Kriterien. Ein Blick in die Mathematikgeschichte kann hier lehrreich sein und zeigen, daß sich manche früheren Autoren – teilweise infolge mangelnder fachsprachlicher Möglichkeiten – nur schwer verständlich, mißverständlich oder auch falsch ausgedrückt haben.

5 Verwendung von Mathematik in verschiedenen politischen Systemen, ideologisch begründeter Mißbrauch von Mathematik

Zur Mathematikgeschichte gehört zweifellos auch die ideologisch motivierte mißbräuchliche Verwendung der Mathematik in verschiedenen undemokratischen Gesellschaftssystemen. Da man sich von einer möglichst frühen Indoktrinierung der Jugend die besten Erfolge versprach, war und ist immer auch der MU betroffen, wenn auch nicht so stark wie andere „ideologienahe“ Fächer.

„Harmlose“ Beispiele finden sich z. B. in Rechenbüchern aus der Zeit des „Vormärz“ bzw. des Wilhelminischen Kaiserreiches (vgl. [4, S. 179] und [8, S. 30, S. 70]), als weniger harmlos dagegen sind die Beiträge des MU der DDR zur Wehrerziehung einzustufen (vgl. [5]). Den Gipfel der Infamie stellen jedoch Aufgaben aus der Zeit des Dritten Reichs dar, bei denen die Kinder mit der rechnerischen Erfassung des Anteils der jüdischen Bevölkerung sowie der Gebrechlichen und Geisteskranken und der für sie aufzuwendenden Kosten auf Rassenhaß, Holocaust und Euthanasie eingestimmt werden.

6 Zur Prüfungsrelevanz von mathematikhistorischen Themen

Mathematikhistorische Elemente können im Unterricht nur dann dauerhaft verankert werden, wenn sie für Prüfungen relevant sind. Die einfachste Möglichkeit, die auch keinerlei Lehrpländerung erfordert, ist die Einbeziehung historischer Textaufgaben in die normalen Klassenarbeiten. Es ist ebenfalls nicht verboten, die üblichen Aufgabenplantagen in einer Klassenarbeit etwas zu lichten und den früher gepflegten mathematischen (Kurz-)Aufsatz – nunmehr über ein engumgrenztes historisches Thema – wiederzubeleben. Solche Kurzaufsätze müssen nicht allein der Sekundarstufe II vorbehalten sein. Im Rahmen der mündlichen Bewertung können – wie in anderen Fächern auch – Referate (über mathematikhistorische Themen) eine wichtige Rolle spielen.

Dennoch scheinen mir solche Vorschläge auf die Dauer nicht zu genügen. Wollen wir wirklich der kulturhistorischen Dimension unseres Unterrichtsfachs einigermaßen gerecht werden, so müssen wir auf veränderte Lehrpläne drängen, die ausreichende Stundenzahlen für die „mathematikhistorische Akzentsetzung“ zur Verfügung stellen.

Literatur:

- [1] Apian, Peter: Eyn Newe vnnnd wolgegründte vnderweysung aller Kauffmanß Rechnung ... Ingolstadt 1527
- [2] Barth, Friedrich / Federle, Reinhold / Haller, Rudolf: Algebra 1-4. Ehrenwirth München 1988-1991
- [3] Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1. Stuttgart 1977
- [4] Hirsch, Meier: Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Berlin 1846
- [5] Kämmler, Gert / Thomas, Gert: Ein Beitrag des Mathematikunterrichts zur Erfüllung des Klassenauftrages der Nationalen Volksarmee. In: Mathematik in der Schule 22 (Berlin 1984), Heft 1, S. 1-11
- [6] Klein, Felix: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt, Band 1. Berlin / Göttingen / Heidelberg 1924
- [7] Kronfellner, Manfred: Geschichte der Mathematik im Unterricht. Möglichkeiten und Grenzen. Habilitationsschrift Wien 1996. Kürzlich in überarbeiteter Fassung erschienen unter dem Titel: Historische Aspekte im Mathematikunterricht – eine didaktische Analyse mit unterrichtspraktischen Beispielen (Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik, Band 24). Wien 1998
- [8] Loebnitz, G. Th.: Rechenbuch für Gymnasien, Realgymnasien, Real- und höhere Bürgerschulen. Zweiter Teil: Die zusammengesetzten Rechnungsarten. Hildesheim 1888
- [9] Record(e), Robert: The whetstone of witte. London 1557
- [10] Reymers (Reimarus), Nicolaus: Geodaesia Ranzoviana. Leipzig 1583
- [11] Ries, Adam: Coß (Manuskript). Annaberg 1524. Faksimile und Kommentar durch W. Kaunzner und H. Wussing. Stuttgart / Leipzig 1992
- [12] Ries, Adam: Rechenbuch auf Linien vnd Ziphren in allerley Handthierung / Geschäften vnnnd Kauffmanschafft ... Frankfurt a. M. 1574
- [13] Tropfke, Johannes (hrsg. v. K. Vogel / K. Reich / H. Gericke): Geschichte der Elementarmathematik, 4. Auflage, Band 1: Arithmetik und Algebra. Berlin / New York 1980
- [14] (Marcus) Vitruvius (Pollio): *De architectura libri decem* – 10 Bücher über Architektur (hrsg. v. C. Fensterbusch, Darmstadt 1976), Vorrede zu Buch IX
- [15] Wittmann, Erich: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig 1976

Warum Geschichte der Mathematik?

In der Geschichte der Wissenschaften sollte die der Geschichte der Mathematik einen besonderen Platz einnehmen, gehört doch zum Literaturstudium die entsprechende geschichtliche Entwicklung, zur Kunst die Kunstgeschichte und zum Studium der Musik die Musikgeschichte. Ebenso wichtig ist die historische Entwicklung der Mathematik, beschränkt sich in den Schul- und Lehrbüchern bisher jedoch nur auf Namen und Lebensdaten einiger herausragender Mathematiker. Ihr sollte ein höherer Stellenwert eingeräumt werden, denn in vielen anderen Disziplinen, die seit dem Altertum bekannt sind oder die sich später entwickelten, mußten die Gesetze und Erkenntnisse neu überdacht werden; diejenigen der Mathematik jedoch haben größtenteils ihre Gültigkeit behalten. Zwar wurde in der Ausdrucks- und Schreibweise im Laufe der Jahrtausende einiges formalisiert und verändert, aber der Inhalt ist im wesentlichen erhalten geblieben. So hat ARCHIMEDES (284–212 v. Chr.) durch seine Exhaustionsmethode gezeigt, daß die Kugeloberfläche mit dem Radius r gleich $4\pi r^2$ ist. Dafür brauchte er mehrere Hilfssätze, um den eigentlichen Satz zu beweisen. Heute beweisen wir eben diesen Satz, der noch immer gilt, mit Hilfe nur einer Integration. Ebenso unterschied man bis zum 16. Jh. verschiedene Formen der Gleichungen 2. und 3. Grades, je nach den Vorzeichen der Koeffizienten, während heute je nur eine allgemeine Lösungsformel gelehrt wird. Der Gedanke der Proportionenlehre von EUDOXOS (um 368 v. Chr.) wurde über 2000 Jahre später von dem Braunschweiger Mathematiker RICHARD DEDEKIND (1831–1916) wieder aufgenommen und weiterentwickelt, um das reelle Zahlensystem aufzubauen.

Die Entwicklung der Mathematik von der primitiven bis zur heutigen Form ist durch die Einflüsse verschiedener kultureller Faktoren entstanden, weshalb sie nicht isoliert und ohne ihre Beziehungen dazu betrachtet werden kann. Sie stellt also einen Teil der Kulturgeschichte dar. Die geschichtlichen Hinweise sollen aber nicht allein eine oberflächliche Betrachtung der Leistungen großer Gelehrter betreffen, sondern auch die Eigenheiten des betreffenden Rahmens dieser Leistungen einbeziehen. In diesem Zusammenhang ist das nachfolgende Zitat sehr aufschlußreich¹:

„Ich glaube, das ist für die Anfänge mathematischen Denkens offenkundig. Wenn HERODOT behauptet, die ägypter hätten die Geometrie erfunden, da die jährlichen Überschwemmungen des Nils sie gezwungen hätten, stets von neuem ihre Felder zu vermessen und abzustecken, so mag dies historisch nur bedingt zutreffen, zeigt aber die Richtung an. Astronomische Kalkulationen, kaufmännische Rechnungen, Buchführungsaufgaben für den Nahrungsmittel- und Materialbedarf der Höfe und der großen antiken Stadtstaaten stehen am Anfang mathematischen Denkens, – hierzu mögen rituelle Vorschriften treten über die Gestaltung von Altären und Tempeln.“

¹Seite 118 aus: Scriba, Christoph J.: Die Rolle der Mathematik in der Auswirkung von Schülern und Lehrern, Jahresbericht d. Dt. Math.-Vereins 85 (1983), 113–128

oder die günstigsten Zeiten für Opfergaben und ebenso das spielerische Interesse an symmetrisch gestalteten Figuren und Ornamenten. Mit fortschreitender Entwicklung verselbstständigt sich mathematisches Denken mehr und mehr, so daß es nicht so offensichtlich wie in der Frühphase möglich zu sein scheint, kulturelle Bezüge nachzuweisen.“

Darin liegt auch ein wichtiger Grund für die Rechtfertigung des Studiums der Mathematikgeschichte. Zwei weitere Gründe sollen zeigen², warum jeder ernsthafte Student der Mathematik auch die Geschichte der Mathematik kennen sollte:

- Mathematikgeschichte lehrt uns, daß viele Teilgebiete, die einst außerordentlich großes Interesse und Begeisterung geweckt haben und auf denen die besten Mathematiker forschten, heute unbeachtet bleiben. So betonte ARTHUR CAYLEY (1821–1895), daß die projektive Geometrie alle Geometrie sei. Heute ist bekannt, daß diese Behauptung falsch ist, weil sie z.B. die der Relativitätstheorie zugrunde liegende Riemannsche Geometrie und einen wichtigen Teil der Geometrie, nämlich die Topologie, nicht beinhaltet. Dies führt zu Fragen, die uns die Mathematikgeschichte beantworten kann: Welche mathematischen Themen überleben und welche Ideen waren für die Weiterentwicklung der Mathematik wichtiger – und warum trifft Geschichte ihre logischen Bewertungen?
- Im üblichen Mathematikunterricht (Vorlesungen) werden die mathematischen Theorien meist in der fertigen Form dargestellt. Deshalb können dort in der Regel die Bemühungen der Mathematiker in deren schöpferischen Prozessen nicht aufgezeigt werden. Derartige Vorlesungen zeigen auch nicht die Frustration der Gelehrten und den langen schweren Weg, den sie erleben mußten, um eine Idee zu verwirklichen oder eine Struktur zu konstruieren. Wer auch von den Umwegen, Irrwegen, Ergebnissen sowie den Einschränkungen oder der Erweiterung von Behauptungen im Laufe der Zeit eine Ahnung hat, wird selber besser für die Schwierigkeiten der Forschung vorbereitet sein.

Die Mathematikgeschichte zeigt auf, wie die mathematischen Strukturen und Theorien stückweise geformt wurden und wie die verschiedenen „Stücke“ aus den verschiedensten Richtungen kommend uns zu der heute vorhandenen Vielfalt gebracht haben. Durch sie erfahren wir auch, daß Mathematiker oft Jahrzehnte und sogar Jahrhunderte brauchten, um eine Theorie oder ein Ergebnis in endgültiger Form zu erhalten. Sie gibt uns, wie schon angedeutet, einen Einblick darüber, wie die großen Mathematiker stolperten und in Dunkelheit tasteten, um etwas zu entdecken und manchmal auch durch Zufall zu gewissen Problemen stießen. Diese Tatsache, die der Anfänger aus der Mathematikgeschichte

²Preface aus: Kline, Morris; *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press, 1972

lernt, enthält ein wichtiges pädagogisches Element, denn es soll ihn ermutigen, seine Probleme hartnäckig zu verfolgen und sich nicht durch Mißerfolge entmutigen zu lassen; ihm wird dadurch geholfen, einen größeren Weitblick über seine Probleme zu gewinnen sowie seine Motivationsfähigkeit zu erhalten.

Hierzu ein Beispiel aus der neueren Geschichte: GOTTLLOB FREGE (1848–1925) veröffentlichte in den Jahren 1893–1903 Band I und Band II seines Buches „Grundgesetze der Arithmetik“ in Jena. Während Band II bereits in Druck war, hat BERTRAND RUSSELL (1872–1970) einen Widerspruch in dem System von FREGE gefunden (im Juni 1902). FREGE schrieb daher folgendes Nachwort für Band II:

„Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als daß ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird. In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Russell versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte. Es handelt sich um mein Grundgesetz (V). Ich habe mir nie verhehlt, daß es nicht so einleuchtend ist, wie die anderen, und wie es eigentlich von einem logischen Gesetz verlangt werden muß. Und so habe ich denn auch im Vorwort zum ersten Band S. VII auf diese Schwäche hingewiesen. Ich hätte gerne auf diese Grundlage verzichtet, wenn ich irgendeinen Ersatz dafür gekannt hätte. Und noch jetzt sehe ich nicht ein, wie die Arithmetik wissenschaftlich begründet werden könne, wie die Zahlen als logische Gegenstände gefaßt und in die Betrachtung eingeführt werden können, wenn es nicht — bedingungsweise wenigstens — erlaubt ist, von einem Begriffe zu seinem Umfang überzugehen. (...) Solatium miseris, socios habuisse malorum. Dieser Trost, wenn es einer ist, steht auch mir zur Seite.“

Es ist interessant, den Briefwechsel von FREGE und RUSSELL in diesem Zusammenhang zu betrachten:

RUSSELL an FREGE³:

Friday's Hill, Hasleiner, 16 June 1902

Dear colleague,

For a year and a half I have been acquainted with your Grundgesetze der Arithmetik, but it is only now that I have been able to find the time for the thorough study I intended to make of your work. I find myself in complete agreement with you in all essentials, particularly when you reject any psychological element in logic and when you place a high value upon an ideography [Begriffsschrift] for the foundations of mathematics and of formal logic, which, incidentally, can hardly be distinguished. With regard to many particular questions, I find in your work discussions, distinctions, and definitions

³Seite 29 aus: Flegg, Graham; *Fundamentals (Unit 16)*, Open University press 1987

that one seeks in vain in the works of other logicians. Especially so far as function is concerned (§9 of your Begriffsschrift), I have been led on my own to views that are the same even in the details. (...)

Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable collection does not form a totality. (...)

Very respectfully yours,

BERTRAND RUSSELL

FREGE an RUSSELL⁴

Jena, 22 June 1902

Dear colleague,

(...) Your discovery of the contradiction caused me the greatest surprise and, I would almost say, consternation, since it has shaken the basis on which I intended to build arithmetic. It seems, then, that transforming the generalization of all equality into an equality of courses-of-values (§9 of my Grundgesetze) is not always permitted, that my Rule V (§20, p 36) is false, and that my explanations in §31 are not sufficient to ensure that my combinations of signs have a meaning in all Cases. I must reflect further on the matter. It is all the more serious since, with the loss of my Rule V, not only the foundations of my arithmetic, but also the sole possible foundations of arithmetic, seem to vanish. Yet, I should think, it must be possible to set up conditions for the transformation of the generalization of an equality into an equality of courses-of-values such that the essentials of my proofs remain intact. In any case your discovery is very remarkable and will perhaps result in a great advance in logic, unwelcome as it may seem at the first glance. (...)

Very respectfully yours,

G. FREGE

Obwohl diese Forschung scheinbar keinen definitiven Erfolg hatte, eröffnete sie neue Wege für die weitere Untersuchung in mathematischer Logik, und dies ist langfristig als ein Fortschritt anzusehen.

⁴Seite 30 aus: ebenda

Nun werden einige konkrete Beispiele angeführt, um allgemeine Folgerungen ziehen zu können. ALBERT EINSTEIN schreibt⁵:

„its evident that the formulation of the general theory of relativity requires a generalization of the theory of invariants and the theory of tensors; ... The generalized calculus of tensors was developed by mathematicians long before the theory of relativity. Riemann first extended Gauss's train of thought to continua of any number of dimensions; (...) then followed the development of the theory (...),“

Also ohne die mathematischen Kenntnisse, die vor EINSTEIN bereits existierten, hätte er die Relativitätstheorie nicht in dieser wissenschaftlichen Form formulieren können. Diese Kenntnisse waren u.a. die Tensorrechnung und die Riemannsche Geometrie.

BERTRAND RUSSELL sagt, daß das mathematische Wissen wie ein Vorratsspeicher ist, aus dem wir im Notfall schöpfen können. Ein klassisches Beispiel ist die Anwendung der Theorie der Kegelschnitte in der Astronomie, und ein modernes Beispiel ist also die Relativitätstheorie.

Jede Forschung in der Mathematik ist in einem gewissen Sinne erfolgreich, d.h. sie hat einen direkten oder indirekten Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik und deshalb (durch Anwendung) auch auf die Entwicklung der Industrie und der reinen Wissenschaft.

Zusammengefaßt:

Forschung in Mathematik und ihrer Geschichte ist nützlich für die Weiterentwicklung der Mathematik selbst und für Industrie und Technik.

Nun ist die Zeitspanne zwischen der jeweiligen Forschung und deren Anwendung nicht voraussehbar:

Im Falle der Relativitätstheorie beträgt diese Spanne ungefähr 60 Jahre, im Falle der Kegelschnitte dagegen beträgt sie 18 Jahrhunderte! Genauer gesagt: Der Habilitationsvortrag von RIEMANN „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ erfolgte im Jahre 1854. Also hat RIEMANN im diesem Jahr seine Ideen über die jetzt sog. „Riemannsche Geometrie“⁶ mathematisch erklärt⁷.

⁵Seite 64 aus: Einstein, Albert; The Meaning of Relativity; Princeton University Press, Princeton 1956

⁶Natürlich entstand die Riemannsche Geometrie nicht mit einem Schlag. Sie war das Ergebnis einer langen Forschung auf dem Gebiet der Geometrie und ist seit Euklid (ca. 340-270 v. Chr.) belegbar. Der Leitfaden dieser Entwicklung wie auch derjenige, der zur Geometrie von Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski und Johann Bolyai führte, bildete die Versuche vieler Mathematiker, einen Beweis für das fünfte Postulat (Parallelenpostulat) Euklids zu finden. Zwar gelang ihnen nicht der direkte Bezug dazu, sie stießen jedoch auf die „nichteuklidischen Geometrien“. Dies zeigt, daß die Relativitätstheorie mit fast der ganzen Geschichte der Geometrie eng verbunden ist.

⁷S 272 aus: Riemann, Bernhard; Collected works of Bernhard Riemann, edited by Heinrich Weber; Dover publications, New York, 1953

Im Jahre 1892 veröffentlichte GREGORIO RICCI CURBASTRA die erste systematische Behandlung der Tensorrechnung. 1901 veröffentlichten er und sein Schüler TULLIO LEVI-CIVITA eine Abhandlung über die Tensorrechnung sowie eine genauere Erklärung der Rechnung und 1916 hat EINSTEIN seine allgemeine Relativitätstheorie veröffentlicht. Also liegt hier die Zeitspanne von 1854 bis 1916 mit der Folge RIEMANN, RICCI, LEVI-CIVITA, EINSTEIN zwischen der Entstehung einer mathematischen These und ihrer Anwendung in der Physik.

MENAICHMOS (um 350 v.Chr.) entdeckte die Kegelschnitte. KEPLER veröffentlichte seine astronomische Theorie in den Jahren 1609 und 1619 und benutzte Eigenschaften der Ellipse. Hier ist die Zeitspanne von 350 v.Chr. bis 1609 vergangen. Bereits vor KEPLER wird diese Theorie bei Spiegeln, Sonnenuhren und geometrischen Konstruktionen (in Griechenland und in den islamischen Ländern) zwar benutzt, aber der Gebrauch der Kegelschnitte durch KEPLER in der Astronomie war die wichtigste Anwendung.

Die angeführten Beispiele zur Astronomie und Physik lassen folgende Aussage zu:

Um eine fruchtbare Anwendung der Mathematik in Technik und Industrie zu erhalten, ist es manchmal notwendig, Probleme der reinen Mathematik und Logik zu lösen und in diesen Gebieten Forschung zu betreiben.

Überzeugende Beispiele zu dieser Behauptung lassen sich aus der gesamten Entwicklung der Mathematik heranziehen.

Als exemplarisches Beispiel für die Anwendung der Mathematik u.a. in der Informatik, Nachrichtentechnik und Elektronik dient die Algebra der Logik. Den ersten Ansatz dazu lieferte bereits ARISTOTELES (384–322 v.Chr.) im Organon. Darin liegen die Wurzeln zum logischen Formalismus und die Einführung des noch heute üblichen Aussagekalküls. Er besagt u.a., daß jeder „Aussage“ und jeder zulässigen Verknüpfung solcher Aussagen genau einer von zwei Wahrheitswerten zugeordnet wird: falsch oder richtig, es gibt keine dritte Möglichkeit (tertium non datur).

Bis ins 19.Jh. war diese Aristotelische Logik die alleinige Grundlage der Mathematik. Der Engländer GEORGE BOOLE (1815–1864) legte sie erstmals mathematisch dar und schuf das erste System der Algebra der Logik⁸. Es ist der Ausgangspunkt für die gesamte Entwicklung der mathematischen Logik und wurde nach ihm die „Boolesche Algebra“ genannt. BOOLE lieferte die Grundlagen; Mathematiker wie ERNST SCHRÖDER (1841–1902) setzten die Untersuchungen von BOOLE fort. CLAUDE SHANNON (geb. 1916) forschte im Jahre 1931 über die Gleichwertigkeit von Aussagenlogik und Kontaktschaltungen⁹. Im gleichen Zeitraum untersuchte ALAN MATHISON TURING (1912–1954) die sogenannte Turingmaschine im Zusammenhang mit den Begriffen seines

⁸Seite 117 aus: Fischer, Gerd; Hirzebruch, Friedrich; Scharlau, Winfried; Töring, Willi; Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990 Festschrift zum Jubiläum der DMV. Vieweg Verlag Braunschweig, 1991

⁹Seite 124 aus: ebenda

Algorithmus. Dadurch waren die theoretischen Grundlagen für den Bau von logischen Rechenwerken gelegt, von Netzwerken und ähnlichem. Die Boolesche Algebra findet Anwendung in der elektronischen Schaltungstechnik, denn komplizierte Schaltnetze kann man abstrakt mit Hilfe der „Wahrheitsfunktionen“ (auf der Basis logischer Operationen) mit den Werten wahr (1) und falsch (0) darstellen. Die Schalttechnik ist also ein wichtiges Anwendungsgebiet, durch die der Computer seine logische Grundlage erhielt, wodurch er als elektronisches Gerät erst ermöglicht wurde.

Die Algebra nach BOOLE ist eine zweiwertige Logik mit Beziehungen zum Binärsystem. Das wiederum wird in der Nachrichtentechnik zur Kodierung und Dekodierung von Informationen eingesetzt.

Die Mathematik hat ihren Platz nicht nur, wie historisch belegt, in den Naturwissenschaften, sie wird in neuerer Zeit auch in den Geistes- und Sozialwissenschaften verstärkt angewendet. Durch mathematische Berechnungen werden beispielsweise Ausbildung und andere gesellschaftliche Lebensprozesse leichter erfassbar und steuerbar. Besonders die Sprachwissenschaft (Linguistik) räumt der Mathematik einen weiten Wirkungsbereich ein. So erkannte man die Sprache als ein System von Zeichen, deren syntaktische Strukturen auf mathematische Satzfunktionen reduziert werden können. Diese Formalisierung ermöglicht den nahtlosen Übergang von umgangssprachlichen Informationen in das binäre „Sprach“-System des Computers, wodurch die Rationalisierung von Produktions- und Entscheidungsprozessen ohne Zwischenschaltung von „Computersprachen“ erfolgen kann.

Aus diesen Ausführungen läßt sich folgende weitere Aussage aufstellen:

Die Mathematik wird zu einem unentbehrlichen Hauptwerkzeug nicht nur der exakten Wissenschaften.

Diese kurze Darstellung soll dem Leser bewußt machen, daß die Mathematik, die in alle Disziplinen der Wissenschaft und das tägliche Leben eingedrungen ist, eine lange, interessante Entwicklung aufzuweisen hat. Die Kenntnis ihrer Wurzeln und ihr weiterer Fortgang können ein größeres Verständnis und sogar ein unterhaltsames Interesse in demjenigen wecken, der bereit ist, sich mit ihr auseinanderzusetzen.

Dr. Alireza Djafari Naini
Universität Hildesheim
Zentrum für Fernstudium und Weiterbildung
Marienburger Platz 22
D-31141 Hildesheim

A mathematical aspect of the 16th century cartography in the work of Gerhardus Mercator

by Jasna Fempl-Madjarevic

The origin and development of the differential and integral calculus is closely linked with the 17th century, and to the present days the infinitesimal method cannot bypass the names of Leibnitz and Newton as progenitors of a new idea in forming judgements, as well as in "applicability" of mathematics, in general. Particularly the role of the differential and integral calculus has been crucial for the development of physics, which is said to have the "soul" of mathematics! If one follows further the development of mathematics, then the 18th century was the century of the French in mathematics; the 19th century was known as the century of "German mathematics", while the current century has definitely introduced the scientists of the "new world" to the world scene of events in mathematics and science in general. In other words, it was generally the economic power of certain countries that has had a substantial impact on their "scientific supremacy". This means that scientists, mathematicians in particular, of the economic powers in specific periods used to have a "world power" in the scientific thought of the time. It is interesting that the region of the Netherlands did not fit into this cliché. Namely, it is almost impossible to speak of Belgian and Dutch mathematicians (about 16 or so of them) and some kind of their leading or "visible" role at the time when this region was economically flourishing. However, the field where they were dominant during the 16th century, in particular, was CARTOGRAPHY, and we can freely say that the

merits of their mathematician and cartographer Mercator was so important that it is felt even today. This happened especially with the start of a "massive" printing of maps which has precisely contributed to the linking of science and mathematics world-wide.

But, let's explain why cartography is closely linked with mathematics and who deserves most credit for that. What has it to do with infinitesimal calculus and, finally, who Mercator is? Why has the author of this paper decided to write for the Symposium dedicated to History of Mathematics about the famous 16 century cartographer. Let us first give some biographical data of this famous name of the world of cartography and his links with mathematics, and a number of fundamental concepts of cartography in the absence of which it would be hard to follow up the closeness of geography and mathematics.

The term map understands a graphic presentation drawn to scale on usually a flat surface of geographical, geological or geopolitical features of the Earth or of any other celestial body. The area dealing with manufacturing of maps and charts generally is called cartography. This means that cartography is both an art and science. Cartography as a science had its origin in the 16th century when it reached its peak in the works of Gerard Kremer, known as Mercator, and Ortelius. The merits of Mercator lie precisely in the fact that he understood the "mathematical principles of mapmaking", as well as the imperfection and value of different projections. Most of his charts represented a "phenomenon of a completely new order", he felt the importance of the "new method" which had not still been mathematically clearly formed in cartography or "disclosed" in mathematics at the time (the 16th century). The credit goes to Mercator because he was the first to

elaborate the "mathematical bases of cartography" thus placing cartography to the then highest possible scientific level, or he was the first to pave the way for those who later had at their disposal the "mathematical apparatuses and mathematical models" (H. Bond, for example).

Cylindrical projection understands treatment of the Earth as a cylinder where parallels are horizontal lines and parallels appear as vertical lines.

Mercator's biographical data: Gerardus Mercator (original name: Gerard de Cremer) was born on the 5th of March 1512 on Rupelmod, Flanders - currently in Belgium. His family had moved to Flanders from Germany before he was born. He was educated in Hertogenbosch (the Netherlands), receiving training in Christian doctrine and Latin. As a young schoolboy he showed an extraordinary talent and interest in mathematics, geometry in particular, which was for this type of school rather rare at that time and in that region. In 1530, he entered the University of Louvain (Belgium) to study the humanities and philosophy and graduated with a master's degree in 1532.

At that time religious doubts assailed him for he could not reconcile the biblical account of the origin of the universe with that of Aristotle. After two years of study which led him to Antwerp and Michelen, he emerged from his personal crisis, fortified in his faith, however, with less enthusiasm for philosophical speculation, and more zeal for "natural sciences", mathematics and, in particular, geography, whose fresh taste he acquired after the return to Louvain.

At that time, the leading Low Countries theoretical mathematician was Gemma Frisius, also a physicist and astronomer. Under his guidance, Mercator mastered the essentials of mathematics, geography and astronomy. Frisius

and Mercator also used to visit frequently the workshop of Gaspar a Myrica, an engraver and goldsmith. The combined work of these three men soon made Louvain an important centre for the construction of globes maps and astronomical instruments. In 1534, Mercator married Barbara Schellekens, by whom he had 6 children.

By the time he was 24, Mercator was a superb engraver, an outstanding calligrapher and a highly skilled scientific instrument maker. In 1535-35 he co-operated with Myrica and Frisius in constructing a terrestrial globe, and in 1537 its celestial counterpart.. By a graceful and free italic lettering of the globe, Mercator changed the face of 16th century maps (the number was to be introduced as a characteristic on the 16th century maps, although not massively, precisely thanks to Mercator). Also, during this period, Mercator began to build his reputation of the foremost geographer of the century with a series of cartographic works, a geographer who was a good "connoisseur" of mathematics, thus paving the way for a scientific mapmaking: in 1537 the map of Palestine, in 1538 - a map of the world on a double heart-shaped projection, and around 1540 - a map of Flanders. In the same year he also published a concise manual on italic lettering, the *Literarum Latinarum quas Italicas cursoriasque vocant scribende ratio*, for which he engraved wood blocks himself.

In 1544, on a charge of heresy, he was arrested and imprisoned (he was released only after seven months). His inclination to Protestantism and frequent absences from Louvain to gather information for his maps, had aroused suspicions, as in the case of 42 other citizens on the same charge, with the then authorities, the Inquisition. After

his release from prison he resumed his former way of life. He obtained a privilege to print and publish books, and was free to continue his scientific studies.

In 1552, Mercator moved permanently to Duisburg in the Duchy of Cleve (Germany) where he stayed until his death in 1594. Once in Duisburg, he became a well-known figure. He assisted the Duke in establishing a grammar school by helping to design its curriculum, and between 1559 and 1562 he taught mathematics in the grammar school. During these busy years he also undertook genealogical research for Duke Wilhelm, drew up a Concordance of the Gospels, and composed a detailed commentary on the first part of the Letter of Paul to the Romans. Public recognition of his accomplishments came in 1564 (in 1564 he completed a map of Lorraine which is now lost) when he was appointed as court "cosmographer" to Duke Wilhelm of Cleve. During these years he perfected his projection, which enabled mariners to steer a course over long distances by plotting straight lines without continual adjustment of compass readings. This technique immortalised his name in the "Mercator projection" which he used on his map of the world in 1569. Also, Mercator was the first to introduce the word ATLAS which is used still today to denote a collection of maps.

Mercator's idea was to execute a series of publications intended to describe the creation of the world and its subsequent history (unfortunately, his "Atlas" was never fully realised).

The most important Mercator's work, the Mercator projection was a kind of map projection introduced in 1569

by Mercator himself, which is described as a "cylindrical projection" which has to be derived mathematically. Mercator did not manage to do it, it was later done by the English mathematician E. Wright (1560-1615) who gave an approximate formula (in the form of an infinite sum of calculation of the increasing distances between the parallels. Mercator's intention was to create such a map for the needs of navigation, where different wind directions could be represented by simple lines, and which would also make among them the same angles as those made by corresponding directions on the map.

Mercator's greatest merit was that he managed to free the cartography from Ptolemy's influence who had obstructed its development (introduction of a new mode of copying, methodical utilisation of cartographic and geographic terms, as well as a critical approach and publication of 27 maps originally prepared by the Greek geographer Ptolemy) with adequate correction and commentary in 1578 - under the title *Tabulae Geographicae C. Ptolemei ad mentem autoris restitutae et emendatae*. During his lifetime, Mercator did not manage to publish all his maps (of Italy, "Sclavonia" - now the Balkan countries), and Greece, the British Isles, as the last part of the Atlas from 1589. After his death, his son engaged in publishing in 1595 an edition with the previous sections. Another printing followed in 1602, and further maps were added in a later edition in 1606, usually called the "Mercator-Hondius Atlas".

Mercator died on 2 December 1594 in Duisburg.

It now remains to us to wonder whether Mercator would have been the first true progenitor and reformer of cartography until the 16th century, which primarily thanks

to his merits became not only a skill but a serious scientific discipline currently an important part of geography, had he not been for his time and the then "Belgian environment" an excellent connoisseur and "fan" of mathematics, had he not been even ahead of Newton and Leibnitz in the "feeling" for infinitesimal method, but aware of his insufficient mathematical education (he never revealed his methods - this was done half a century later by the mathematician Bonelli in 1645 who elaborated in mathematical terms Mercator's mode and method of "cylindrical projection", and gave a formula for "calculation of the increment in geographic latitude - degrees which relied on integral calculus. Mathematics - did it represent "aliquot tones" in Mercator the geographer and whether, when we talk of Belgian mathematicians, the name of Gerard Cremer, a brilliant mind and visionary of the 16th century may with full right be included among them?

Bibliography:

1. Jozef Szaflarsky - Zarus Kartografii, Warsaw, 1965.
2. A.S. Osley, Mercator (1969).
3. Encyclopaedia Britannica.
4. Belgian Mathematicians.
5. Varen's general geography.

Prof. Jasna FEMPL-MADJAREVIC
V beogradska gimnazija
Nikole Garasanina 24
11000 Belgrade, Yugoslavia



Jasna Fempl-Madjarevic

UBER DIE GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN MUSIKTHEORIE II TEIL: UBER DIE MATHEMATISCHE TRITONUSTHEORIE Miloš Čanak, Beograd

I

Der bekannte jugoslawische Komponist und Musiktheoretiker D. Despić hat die Monographie "Tonalitätstheorie"/siehe [1]/ geschrieben, wo alle relevante Aspekte dieser Theorie mit verschiedener Beispiele aus der Musikpraxis verarbeitet werden. Schon am Anfang betrachtet er das Tonalitätsphänomen als Gegensatz von Statik und Kinetik und beschliesst dabei, dass die kinetischen Faktoren eine grössere Rolle spielen, denn der Musiklauf ohne Kinetik unbeweglich bleibt. Ein der wichtigsten solchen Faktoren ist die Erscheinung von Tritonen.

Tritonus stellt das musikalische Intervall von 6 Halbtöne oder 3 Ganztöne dar, und lässt sich als übermässige Quarte oder verminderte Quinte interpretieren. Man soll ihn als einen spezifischen Konflikt zwischen zwei gegensätzlichen kinetischen Elementen in der Tonalität, dominanten und subdominanten, betrachten.

Man kann 6 klangverschiedene Tritonen unterscheiden:

1. Dominanter Tritonus/D-Tritonus/ - /f-h/
2. Subdominanter Tritonus/s-Tritonus/ - /d-as/
3. Mixolydischer Tritonus/M-Tritonus/ - /e-B/
4. Lydischer Tritonus/L-Tritonus/ - /c-fis/
5. Dorischer Tritonus/d-Tritonus/ - /es-a/
6. Phrygischer Tritonus/f-Tritonus/ - /des-g/

Der bekannte sovjetische Musiktheoretiker A. Ogolevec/siehe [2]/ hat die ganze Tonalmaterie nach obigem/dominantem/ und unterem/subdominantem/ Bestreben im Bezug auf den Tonalkern/T-D/ Tonika-Dominante, sortiert. Auf Grund dieser Idee konstruierte und verarbeitete D. Despić [1] das sgn. kinetische Koordinatensystem, wessen Horizontalachse die subdominante oder S-Achse ist, während die Vertikalachse die dominante oder D-Achse darstellt/Bild 1/. Auf D-Achse stellen wir in den gleichen Abschnitten die Töne im Quintenzirkel nach oben im Bezug auf c/also g,d,a,e,h,fis/ während auf S-Achse die Töne im Quintenzirkel nach unten/c,f,b,es,as,des/ liegen.

Der wichtige Teil des Koordinatensystems ist auch die Symmetrie-Linie des ersten Quadrantes, die die Tonalachse darstellt. Wei-

terhin konstruiert man ein Gitter mit den Punkten, die durch ganzzahlige Koordinaten dargestellt werden. Diese Koordinaten werden kinetische Koordinaten genannt. In solchem Koordinatensystem kann man alle 6 Tritonen als Vektoren, wessen Anfang mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt und die Koordinaten des Endpunktes sind die Töne der entsprechenden Tritonen, konstruieren. Jeder Tritonus besitzt hier die musikalische Bedeutung eines dissonanten Zusammenhanges disparater Klänge, die einem Entlassung streben. Kinetische Koordinaten dieser Vektoren sind: $\vec{f} = (6, 1)$, $\vec{s} = (5, 2)$, $\vec{d} = (4, 3)$, $\vec{m} = (3, 4)$, $\vec{D} = (2, 5)$, $\vec{L} = (1, 6)$.

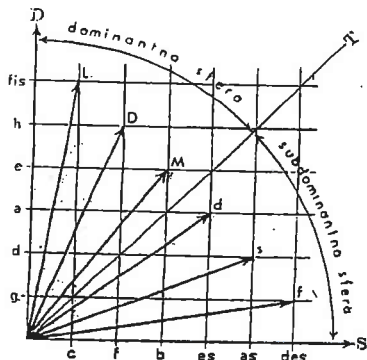


Bild 1

Im weiteren soll man die Lage und Wirkung diejeniger Tritonusvektoren, die die enharmonischen Äquivalenzen für die vorerwähnten darstellen. Sie erscheinen durch Fortsetzung des chromatischen Systems, zuerst in der Tonalität der Klassiker mit 15 Töne und 3 Enharmonismen und weiterhin im Stile der Spätromantik mit 18 Töne und 6 Enharmonismen/Bild 2/.

Diese neuen Tritonen gehen die Grenzen des Tonalgebietes nach oben und nach unten über, und die neuen Gebieten werden supratonale und infratonale genannt. Die Namen dieser neuen Tritonen sind wie folgt:

1. Supraphrygischer Tritonus/Sf/ - /cis-g ~ des-g/
2. Suprasubdominanter Tritonus/Ss - /d-gis ~ d-as/
3. Supradorischer Tritonus/Sd/ - /dis-a ~ es-a/
4. Infralydischer Tritonus/IL/ - /c-ges ~ c-fis/
5. Infradominanter Tritonus/ID/ - /f-ces ~ f-h/
6. Inframixolydischer Tritonus/IM/ - /fes-b ~ e-b/

Wenn wir die 6 neuen Tritonen mit den vorigen in ein einheitliches Bild vereinigen, so erhalten wir einen vollkommenen Überblick der tritonalen Erscheinungen und Wirkungen im Rahme der erweiterten spätromantischen Tonalität/Bild 3/.

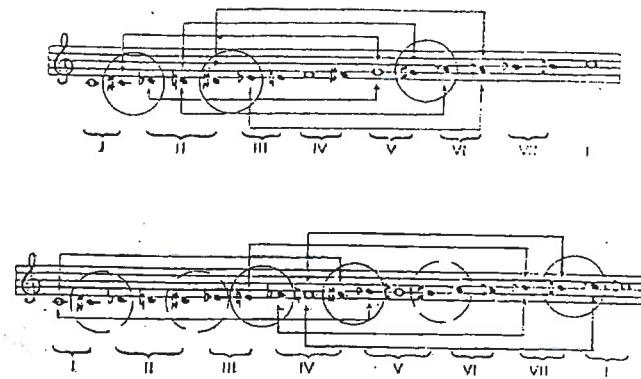


Bild 2

In seiner Dissertation "Tonalitätstheorie im Lichte der mathematischen Musiktheorie/siehe [3]/ hat M. Čanak verschiedene Operationen mit den Tritonusvektoren, die eine bestimmte musikalische Bedeutung haben, untersucht. Dabei hat er auch den sgn. Grundtritonussatz bewiesen.

Satz: Die Menge \mathcal{M} der tritonalen Vektoren lässt sich mittels einer isomorphen Abbildung in die Tonmenge Q des Quintenzirkels abbilden. Diese Abbildung realisiert sich durch Komposition der Abbildungen f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 /Bild. 4/. Dadurch lassen sich die Elemente der Menge \mathcal{M} bis zu den Elementen der Menge U von den verminderten Dreiklängen ergänzen.

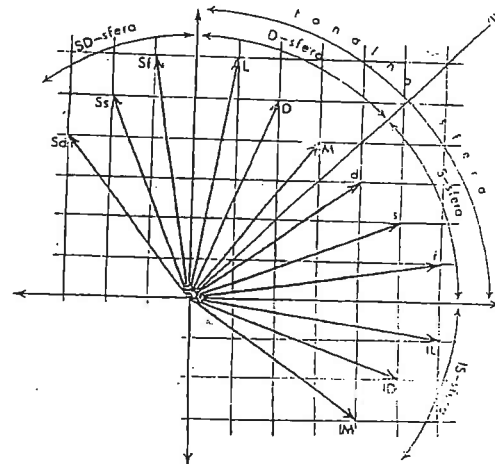


Bild 3

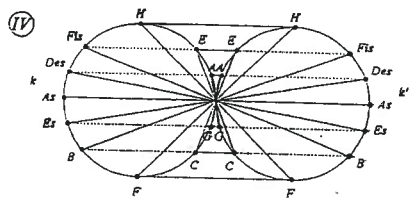
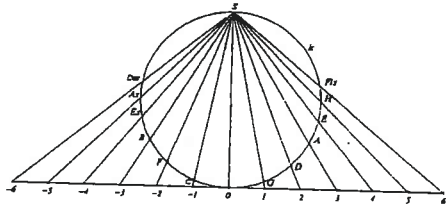
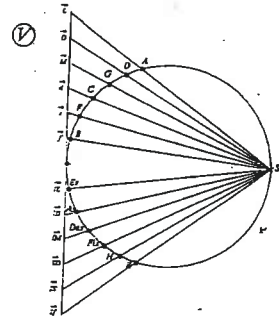
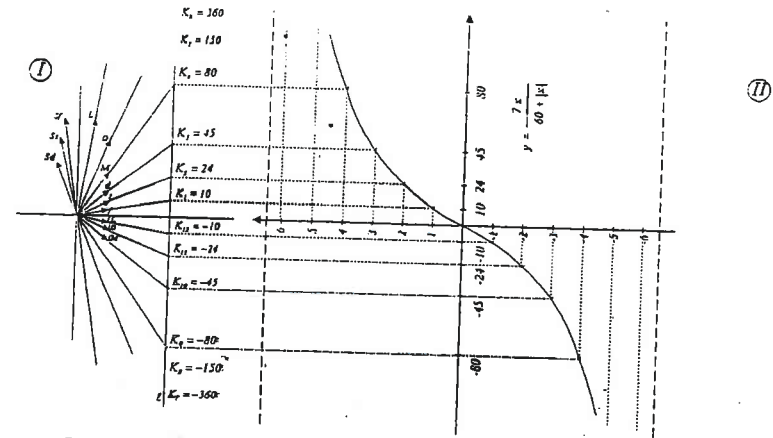


Bild 4

Noch die alten Pythagoräer haben eine Tonleiter auf Grund der Proportionen ausgebildet. Aber eine ganz andere Stimmung erhält sich durch die Oktavteilung mit Hilfe der Mittel. Denn Archytas schreibt: "Es gibt drei Mittel in der Musik: einmal das arithmetische, zweitens das geometrische und drittens das umgekehrte das sogenannte harmonische". Für zwei Zahlen a und b ergeben sich die drei Mittel wie folgt:

$$A(a,b) = (a+b)/2 \quad \text{oder} \quad a-A = A-b$$

$$G(a,b) = \sqrt{a \cdot b} \quad \text{oder} \quad a:G = G:b$$

$$H(a,b) = 2ab/(a+b) \quad \text{oder} \quad (a-H)/a = (H-b)/b$$

und für $a=1, b=2$

Prim $\rightarrow 1$, Oktave $\rightarrow 2$, Quinte $= A(1,2) = 3/2$, Quarte $= H(1,2) = 4/3$.

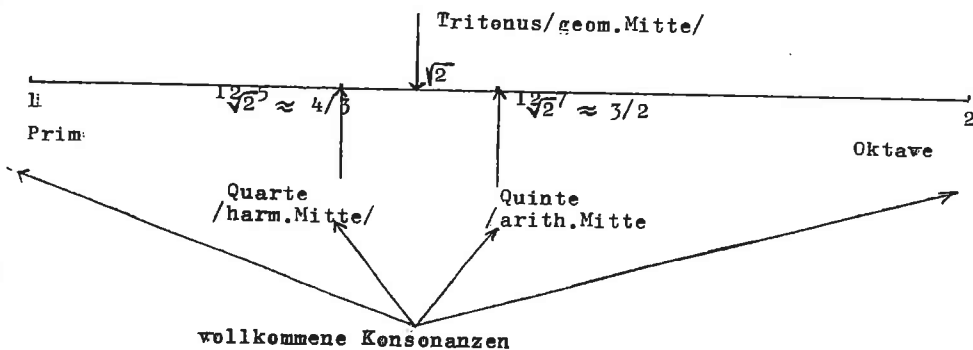
Aber was liegt zwischen Quarte und Quinte? Zur Proportion 2:1 gibt es im Bereich der rationalen Zahlen kein geometrisches Mittel, dies entspricht der Pythagoreern bekannten Inkommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrats. Da die irrationale Zahl jedoch keine Zahl im pythagoreischen Sinne ist, so sind sie dabei bereits auf das "Tritonusmysterium" gestossen. Dieses Problem könnten sie dann natürlich nicht lösen. Erst viel Jahrhunderten später wurde das gleichtemperierte Tonsystem eingeführt. Innerhalb einer Oktave sind zwölf Tonschritte eingebaut, so dass der Quotient der Schwingungszahlen zweier benachbarter, sonst beliebig wählbarer Töne $q = \sqrt[12]{2}$ ist. So erhält man die folgende Zahlenfolge

c	des	d	es	e	f	fis	g	as	a	b	h	c'
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2^2}$	$\sqrt[12]{2^3}$	$\sqrt[12]{2^4}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^6}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[12]{2^8}$	$\sqrt[12]{2^9}$	$\sqrt[12]{2^{10}}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	2

Hier sehen wir, dass in dieser Reihe ein Logarithmensystem mit der Basis $\sqrt[12]{2}$ vor uns steht, die Logarithmen sind die Exponenten 0, 1, 2, 3, 4 ... 12. Das Schreiten von Ton zu Ton entspricht also den Logarithmen. Das fortschreitende Musizieren, das Aneinanderreihen der Töne, das musikalische Tun hat in den Logarithmen sein arithmetisches Gegenbild. Die Aufstellung einer Logarithmentafel, das sukzessive Erreichen der Logarithmen ist gleichbedeutend mit der gleichmässigen Temperierung eines musikalischen Instrumentes. In der ersten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts wurden die Logarithmen erfunden und die ersten Tafeln hergestellt und in der zweiten Hälfte

desselben Jahrhunderts führte der Halberstädter Orgelbauer Andreas Werkmeister die moderne Stimmung ein. Johann Sebastian Bach war der erste, der daraus als Komponist mit seinem "wohltemperierten Klavier" die Konsequenzen zog. Seine Instrumente Klavichord und Spinett waren in entsprechender Weise gestimmt. Ferner schrieb er die berühmten achtundvierzig Präludien und Fugen für das Wohltemperierte Klavier. Damit suchte er zu beweisen, dass auf dem gleichschwebend temperierten Instrument alle Tonarten technisch spielbar sind, ohne dass dabei ungewollte Dissonanzen in Akkorden und Verfälschungen in der Melodie auftreten. In dieser Tonfolge stellt das mittlere Glied, das die geometrische Mitte des Grundtons und Oktave ist, gleichzeitig einen Tritonus dar, und diesem entspricht der Zahlenwert 2.

Leonhard Euler [4] war der erste, der eine Rangordnung der Intervalle durch einen linearen algebraischen Ausdruck definierte. In seiner Rangierung, wie auch in den Rangierungen von Helmholtz [5] Plomp-Levelt [6], Bindel [7], Hindemith [8] und anderen ist Tritonus immer an der letzten Stelle als das dissonanteste Intervall. So haben wir die folgende Illustration

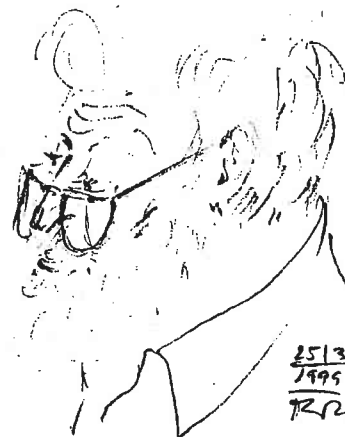


In seiner erwähnten Monographie "Tonalitätstheorie" hat D. Despić [1] die Entwicklung der klassischen Tonalität durch die Epochen von Barock, Rokoko, Klassik, Romantik und Impressionismus bis zum zwanzigsten Jahrhundert untersucht. In diesem Zeitverlauf verbreitete sich der Tritonusfächer und erreichte die optimale Zahl von 12. Diese Tritonen spielen eine dominierende Rolle in der Tonalitätstheorie, weil die Tonalbewegung in ihrer Abwesenheit leblos ist. Andererseits zeigt die mathematische Musiktheorie, dass sich der Sinn und

die Bedeutung der Tritonen nicht durch die Betrachtung der einzelnen, sondern durch die gleichmässige zyklische Bewegung, vollkommene Mitwirkung und harmonische Gesamtheit des Tritonusringes zeigen lässt.

L I T E R A T U R

- [1] Despić D., "Tonalitätstheorie", Akademija muzičkih umetnosti, Beograd, 1971.
- [2] Ogolevec A., "Vvedenie w sovremennoe muzikaljnoe mišlenie", Muzgiz-Moskva, Leningrad 1946.
- [3] Čanak M., "Tonalitätstheorie im-Lichte der mathematischen Musiktheorie", Dissertation, Beograd, 1996.
- [4] Euler L., "Tentamen novae theoriae musicae"/1739/. In: Opera Omnia, Ser. III, Vol. 1/Ed. Bernoulli, E. et. al./Teubner, Stuttgart 1926.
- [5] Helmholtz H. von, "Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage der Musik"/1863/Nachdr. Darmstadt 1968.
- [6] Plomp R., Lewelt W., "Tonal Consonance and Critical Bandwidth", J. Acoust. Soc. Am. 38, 548, 1965.
- [7] Bindel E., "Die Grundlagen der Mathematik im Lichte der Anthroposophie", Waldorfschulverlag, Stuttgart 1928.
- [8] Hindemith P., "Unterweisung im Tonsatz", Schott, Mainz 1940.



Anschrift: Prof. Dr. Miloš Čanak
11000 Beograd
Brzakeva 4
Jugoslawien

2513
1995
R22

Mathematics & Theology

Philip J. Davis

Emeritus Professor of Applied Mathematics
Brown University, Providence, R.I., U.S.A.

Abstract

Though there has been constant interplay over the millennia between mathematics and theology, this subject has been largely avoided by writers since the secularization and the disenchantment of the intellectual world, a relatively recent event that can be located, say, in the late seventeenth century. Thus, to my knowledge, though there is a plentiful and rich supply of material, there is no single book that deals in depth with the subject. The result has been a shameful program of intellectual cleansing that parallels the many acts of iconoclastic destruction that has overtaken civilization at various times in history.

Science and theology? There are thousands of books on this topic, particularly after Darwin, when the two were at daggers drawn. A warm rapprochement now appears to be in the offing. The recent encyclical of John Paul II, rehabilitates Galileo while quoting from the Buddhist scriptures.

God is returning to center stage from the wings, and science, say some observers, has become a much more overtly religious enterprise. There is a whole industry of popular and semi-popular books on science that invoke theological terminology: *The God Particle* of Leon Lederman, Nobelist; Frank Tipler's *The Physics of Immortality*, and numerous others.

Why this turnaround? From whence comes the necessity for the reintroduction of a hypothesis that LaPlace told Napoleon he had no need for? Is it that God is once again good for sales, and that clever literary agents and publishers, with their noses to the winds, sensing this, urge their authors to deisticize their mathematical descriptions? This tendency has even been noted by the media:

We may well look forward to the re-marriage of science and theology, complementary quests that were divorced at the dawn of modernity — The Times of India, Nov. 2, 1998.

Now science and theology is one thing. But mathematics and theology? Can the mathematical world continue to keep itself insulated? Though the relationship between mathematics and theology was neglected and despised by positivist thinkers of the past several centuries, its discussion was never completely extinguished.

In recent years, particularly as theoretical physics has become almost indistinguishable from applied mathematics, the relationship has made a comeback in a variety of ways. In the chain that connects the two, new links have been forged while old links have been broken. Thus, mathematical platonism, which appears to be the favorite (often unconscious) philosophy of professional mathematicians, is now acknowledged to

have a psychological underlay that is theistic, and so serves as a surrogate theism for mathematicians who are *theologen ohne Jehova* (H.M. Enzensberger's phrase).

In this lecture I shall first talk briefly about opinions held over the ages by a variety of thinkers: Pythagoras, Plato, St. Augustine, Kepler, Leibnitz, Maupertuis. The opinions of many, many other early writers could be cited.

It is not easy for us who are trained in late 20th Century mathematics, and whose minds have been *industrialized* (- H. M. E.) to enter into the frame of mind of ancient authors and of the civilizations of which they were part; to think through how the particular way in which they expressed themselves mathematically related to their total mental framework. But such an exercise would be stimulating.

I shall then concentrate on some opinions held in the last generation. These include the opinions of Kurt Gödel, Ann Forest, John Polkinghorne, Sarah Voss, and *neo-kabbalistic types* such as Aldous Huxley or Michael Drosnin. These authors display a wide variety of interpretations.

What is the relation between mathematics and theology and the theme of this Symposium: *Mathematics - Discovered or Created?* Simply this: I find it is difficult to discuss the one set of ideas and questions without the other set constantly insinuating itself into my thoughts.

It is my hope that in talking about these opinions, I can reawaken more scholarly interest in a topic that is both humanistic, interesting, and increasingly relevant. Perhaps it will inspire others who have deeper historical and philosophical knowledge to present us with a much wider and penetrating view of the issues involved.

BIBLIOGRAPHY AND A FEW NOTES

Stephen J. Brams, *Superior Beings*, Springer Verlag, NY, 1983.

Giordano Bruno (1548 - 1600): Allowed multiple worlds; so do some quantum theorists today. The Church cried *heresy*: this world is unique. The Crucifixion was a unique event in cosmic history. Bruno was burned.

Emilie de Chastellet & Voltaire (1694 - 1778) thought that once God had set the clockwork in motion, He paid no more attention to it. Newton, on the other hand, earlier, thought that God made slight *in flight corrections* from time to time with the mechanism. One might say he viewed God as a mathematical tinkerer.

Don Cupitt, *After God: The Future of Religion*, Basic Books, 1997. An attempt at an anti-Platonic conceptualization of God.

Paul C.W. Davies, *God and the New Physics*, Simon and Schuster, NY, 1983.

Michael Drosnin, *The Bible Code*, Simon and Schuster, NY, 1997.

Freeman Dyson, *Belief in God in an Age of Science*. New York Review of Books, May 28, 1998, Reviews of Feynman's and of Polkinghorne's books.

- Richard Feynman, *The Meaning of it All: Thoughts of a Citizen Scientist*, Perseus Press, 1998.
- Amos Funkenstein, *Theology and the Scientific Imagination*, Princeton University Press, 1986.
- Patrick Glynn, *God: The Evidence. The reconciliation of Faith and Reason in a Post-secular World*. Prima, 1998.
- Herbert Hovenkamp, *Science and Religion in America, 1800-1860*, Univ. Penna. Press, 1978.
- Aldous Huxley, *Point Counter Point*, Doubleday, Doran, 1928, Chapter XI.
- Paul H. Kocher, *Science and Religion in Elizabethan England*, Huntington Library, San Marino, 1953.
- Mary Jo Nye, et alii, eds., *The Invention of Physical Science: intersections of mathematics, theology, and natural philosophy since the seventeenth century*. Dordrecht, Boston, 1992.
- A.R. Peacocke, *Theology for a Scientific Age*, Fortress Press, Minneapolis, 1993.
- Karl Pearson, *The History of Statistics in the 17th and 18th Centuries, against a changing background of Intellectual, Scientific and Religious Thought*. (Lectures: 1921-1933). E.S. Pearson, ed., London, 1978., p.360 (Quoted in Theodore M. Porter, *The Rise of Statistical Thinking 1820-1900*. Princeton Univ. Press, 1986).
- John Polkinghorne, *One World: the Interaction of Science and Theology*, Princeton Univ. Press, 1987.
- John Polkinghorne, *The Faith of a Physicist*. The Gifford Lectures for 1993-4. Princeton Univ. Press.
- Joan Richards, *God, Truth and Mathematics in 19th Century England*: in: *The Invention of Physical Science*, Nye et al. eds., Kluwer, Dordrecht, 1992.
- Joan Richards, *Mathematical Visions: The Pursuit of Geometry in Victorian England*, Academic Press, 1988.
- Brian Rotman, *Ad Infinitum: The Ghost in Turing's Machine: Taking God out of mathematics and putting the body back in*. Stanford Univ. Press, 1993.
- Harlow Shapley, *Science Ponders Religion*, New York: Appleton, 1960. This book contains an article by Gerald Holton, explaining the theologies of Kepler, Newton, ..., Einstein.
- Ian Stewart and Martin Golubitsky, *Does God Play Dice?*, Oxford, Blackwell, 1989.
- Ian Stewart and Martin Golubitsky, *Fearful Symmetry: Is God a Geometer?*, Blackwell, 1992.
- Sarah Voss, *What Number is God? Metaphors, Metaphysics, Metamathematics, and the Nature of Things*, SUNY Press, 1995.

- Hao Wang, *A Logical Journey: From Goedel to Philosophy*, MIT Press, 1996. Contains a description of Goedel's religiosity.
- Margaret Wertheim: *Pythagoras' Trousers: God, Physics and the Gender Wars*, Random House, 1995,
- Norbert Wiener, *God and Golem, Inc.: A comment on certain points where cybernetics impinges on religion.*, MIT Press, Cambridge, 1964.
- Robert Wright *Three Scientists and their Gods*. Times Books, NY, 1988. Kenneth Boulding (Economist, sociologist, systems analyst, God is the potential); E.O. Wilson (Entomologist, sees the patterns of evolution as divine design), Ed. Fredkin (Computer scientist. The Cosmos is one big computer. Complexity theory rules.)



Phil Davis

R.D.
22/3/99



25.3
1999
R.D.

R. Davis - Goshue

Innovation as tool for discovery: mathematical modeling of Taylor vortex flows

Rita Meyer-Spasche,
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, EURATOM-Association,
D-85748 Garching, Germany
email: meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de

Mathematical modeling of flow instabilities

For nearly a century now, hydrodynamic stability has been recognized as a very important field of research. It is concerned with when and how laminar flows break down, their subsequent development, and their eventual transition to turbulence. Today, many instabilities of flows are modeled mathematically and numerically. The understanding why flows turn unstable and what is the mechanism of instability is important for technology and economy (crash of the Tacoma bridge in 1940; airplane industry; oil industry, etc).

The essential problems of hydrodynamic stability were recognized and formulated in the 19th century, notably by Helmholtz, Kelvin, Rayleigh and Reynolds. The mathematical modeling of instabilities, however, turned out to be too difficult at that time. 'Many attempts were made to *discover* some mathematical representation of fluid instability' (G.I. Taylor 1923) by adapting mathematical methods from particle mechanics to simple flow configurations. The case, for instance, in which the fluid is contained between two infinite parallel plates which move with a uniform relative speed (i.e. plane Couette flow) was discussed by Kelvin, Rayleigh, Sommerfeld, Orr, von Mises, Hopf and others. Orr summarized their efforts by the belief: 'It would seem improbable that any sharp criterion for stability of fluid motion will ever be arrived at mathematically' (W. M'F. Orr, 1907). Today we know from numerical simulations that their *qualitative* understanding of the instability was correct, but that any *quantitatively* correct mathematical modeling of the instability requires mathematical methods which are being developed only nowadays. The

problem is that the Principle of Linearized Stability is not valid for plane Couette flow.

In 1923, the mathematician G.I. Taylor was successful in 'obtaining a mathematical representation of the motion of a fluid in some particular case in which instability can actually be observed, so that a detailed comparison can be made between the results of analysis and those of experiment' [Tay]. Though flows between rotating cylinders seem much more complicated than flows between moving planes, the basic flow between infinitely long rotating cylinders corresponds to a known explicit solution of the Navier-Stokes equations. Moreover, the loss of stability of 'circular Couette flow' is governed by the Principle of Linearized Stability for wide ranges of the parameters involved. It is thus possible to study instability by perturbing the explicitly known solution. It is one of the merits of Taylor that he saw which aspects of flows between rotating cylinders can or must be neglected to obtain a simplified model which is accessible to mathematical analysis. In his work of 1923 he obtained calculated as well as measured results – impressive for their vastness, completeness and accuracy. Even more impressive are the comparison and good agreement (less than 5% deviation of the calculated from the measured values, with about 2% errors in the measurements). Since then, the '*Taylor problem*' is a popular research subject, because it is so simple and at the same time so complex.

Flows between rotating cylinders

In homogeneous fluids instability often is caused by dynamic effects of rotation. An important example for this type of centrifugal instability is flow between rotating cylinders. The instability of rotating fluid was first investigated by Lord Rayleigh (1880), in the case of **inviscid fluids** ($\nu = 0$, ν the kinematic viscosity of the fluid). Heuristic physical reasoning led Rayleigh to derive his famous stability criterion. Though the assumption $\nu = 0$ seemed to be a straightforward simplification in physics, it has strong consequences for the mathematical nature of the describing equations: they are then the (historically older) Euler fluid equations instead of the Navier-Stokes equations. The highest derivatives in the Navier-Stokes equations are discarded, and thus part of the initial boundary conditions cannot be posed.

The stability of viscous ($\nu \neq 0$) rotating fluids was first investigated by chance. In 1881, M. Margules in Vienna suggested to measure the viscosity ν by putting the fluid into the gap between two concentric cylinders, rotating one of them, and measuring the torque exerted onto the other cylinder. Couette (1890) measured the viscosity of water

of different temperatures by this technique and found values close to the values known today. For small angular velocities he observed the expected linear relation ($\nu = \text{const.}$). For larger angular velocities he observed a different inclination. This was interpreted as onset of turbulence [Me99, Figs. 1.2, 1.3].

Mallock (1888, 1896) independently performed similar experiments. Though he also focused on measuring viscosity, Lord Kelvin used his experiment to get insights on the stability of viscous flows between rotating cylinders (letter to Rayleigh [Do92]).

Taylor's model

Later on Taylor looked at Mallock's experiments under the viewpoint of stability [Tay]. He found that Mallock's results partially contradicted Rayleigh's criterion for inviscid flows and that it seemed practically impossible to deduce any rules from these experiments. Taylor analyzed and criticized Mallock's experiments very carefully and pointed out the following possible sources of error:

- a) length and diameter of the outer cylinder were nearly of the same size (ca 20 cm);
- b) Mallock used the full lengths of the cylinders for his measurements;
- c) one of the two cylinders was probably not held rigidly enough and could perform small lateral movements.

Mallock attempted to construct his three apparati such that 'the water' in the gap 'is very nearly in the same condition it would be if' the two cylinders 'were infinitely long' [Do92]. He substituted the original bottom by one of liquid mercury in the course of his work. This suggests that he himself noticed that influences of the bottom were a problem. Taylor guessed that a) and b) led to the result that Mallock's experiment featured instability by 3-dimensional disturbances favored by the bottom and was thus dominated by end effects [Tay]. He found new approaches such that these problems were carefully avoided and such that his experiment could actually be modeled mathematically with periodic boundary conditions in infinitely long cylinders. Also, he constructed his apparatus such that both cylinders could rotate independently. Thus a wider parameter regime became accessible [Dy, Figs. 127 - 131].

Experimenters usually give the aspect ratio $\Gamma := H/D$, $D = R_2 - R_1$ of their experiment, where H is the total length of the cylinders and R_1 and R_2 are the radii of the inner and the outer cylinder, resp.. Following Taylor, the Taylor problem in the strong sense has theoretically **infinitely long cylinders**, and the experimenters using

Taylor's model usually made sure that the published results do not depend on the aspect ratio. To achieve negligibly small end effects,

- * the aspect ratio Γ is made large (Taylor used $\Gamma \geq 90$);
- * measurements are performed only in the middle portion of the cylinders, far away from top and bottom (Taylor used 20 cm out of 90 cm);
- * the lids at top and bottom are designed in a sophisticated way.

Today, the most advanced way to mimic infinitely long cylinders is using ramps at the end portions of the cylinders: the radius of the inner cylinder may be increased or the radius of the outer cylinder may be decreased towards the ends, with optimized length and inclination angle.

Also, the influence of other effects which are not included in the mathematical model but which could be found in a real experiment must be kept small enough to be negligible. They are of two types: simplifying idealizations and unavoidable imperfections. Idealizations typically are eliminated when science gets more advanced and they turn out to be too unrealistic; imperfections get reduced with the advance of technology. Depending on the questions to be investigated, it is not always clear if a deviation mathematical model - real experiment has to be classified as idealization or imperfection.

Idealizations are for instance:

- * the fluid is inviscid (eliminated);
- * the cylinders are infinitely long, i.e. end effects can be neglected;
- * the fluid is homogeneous, i.e. the influence of the aluminum flakes in the oil can be neglected; the influence of gravity can be neglected;
- * the flow is isothermal, i.e. internal heating of the fluid because of dissipation can be neglected; viscosity and density are constant.

Imperfections are for instance:

- * the cylinders are not perfectly concentric;
- * a cylinder was not held rigidly enough and could perform small lateral movements;
- * the cooling device works reliably only up to certain speeds of the cylinders.

To keep the effects both of idealizations and of imperfections reliably negligibly small sometimes required quite some efforts and inventiveness of the experimenters and is discussed in their papers, see for instance the review article [Do92].

Following Taylor, comparison between experiment and mathematical model was always considered important. In some cases, the agreement between computed and mea-

sured values of flow parameters was excellent [Me99]. In several cases when agreement was poor, convincing explanations were found, and errors could then be reduced considerably. In one case, for instance, it was conjectured that gravity affected the results. Using horizontal cylinders instead of vertically standing ones actually improved agreement. In another case when computer simulation and experiment gave qualitatively the same, but quantitatively strongly differing results (the curves obtained were shifted from each other by a fixed amount), it was found that this was due to a systematic error in measuring.

The only pronounced modeling disagreement in the Taylor-Couette community is whether one can ever neglect the role of the aspect ratio of the experiment or if it always has to be taken into account.

Invented or discovered?

* The question 'Why and how do flows turn unstable?' is invented, though suggested by observation of Nature.

* The answer to the question 'Why and how do flows turn unstable?' must not be invented. It has to be discovered (→ discovery of laws of Nature).

* Physics experiments have to be designed and thus can be invented; they have to be invented *right* to foster a developing theory efficiently.

* Mathematical models and theories may and must be invented, but within limits set by mathematics itself and by Nature. The quality of a mathematical model strongly influences the dynamics, the potential and the range of the related mathematical development.

References

[Do92] R.J. Donnelly (1992): 'Evolution of instrumentation for Taylor-Couette flow', pp. 1 - 27 in *Ordered and Turbulent Patterns in Taylor-Couette Flow*; C.David Andereck, Fernand Hayot, eds.; Plenum Press, New York 1992

[Dy] *An Album of Fluid Motion*. M. van Dyke, ed. The Parabolic Press, Stanford 1982

[Me99] R. Meyer-Spasche: *Pattern Formation in Viscous Flows: The Taylor-Couette System and Rayleigh-Benard Convection* ISNM, Birkhäuser Verlag, in print

[Tay] G.I. Taylor: Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil. Trans. Roy. Soc. A 123 (1923), 289-343.

Euclid, Kepler, $(\sqrt{5}+1)/2$, and the Fibonacci Numbers.
by Peter L. Griffiths.

Notation. XX means to the power of, and // means to the root of.
\$[means opening subscript, and]\$ means closing subscript.
R means $(\sqrt{5}+1)/2$, and r means $(\sqrt{5}-1)/2$.

Outline

The Fibonacci numbers consist of the sum of the two previous Fibonacci numbers that is

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233 etc.

These integers were first recognised in 1202 AD by Leonardo Fibonacci in the course of discussing the mathematics of the breeding of rabbits. It is not however the breeding of rabbits as such which gives rise to the Fibonacci numbers but the allowance of one month for maturity as is apparent from the following table.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
AB1	AB2	AB3	AB4	AB5	AB6	AB7	AB8	AB9
	ab2	-	CD4	CD5	CD6	CD7	CD8	CD9
		ab3	-	EF5	EF6	EF7	EF8	EF9
			ab4	-	GH6	GH7	GH8	GH9
			cd4	-	IJ6	IJ7	IJ8	IJ9
				ab5	-	KL7	KL8	KL9
				cd5	-	MN7	MN8	MN9
				ef5	-	OP7	OP8	OP9
					ab6	-	QR8	QR9
					cd6	-	ST8	ST9
					ef6	-	UV8	UV9
					gh6	-	WX8	WX9
					ij6	-	YZ8	YZ9

Each column represents one month in the year. In the first month, Mr A1 and Mrs B1 consummate their relationship and produce in month 2 a brother and sister A2 and B2 (described as AB2). A1 and B1 then produce in addition further children for all the months of the year.

The Fibonacci numbers are the number of births in a particular month. There are assumed to be no deaths within the year. Applying the formula for the Fibonacci numbers, the number of births in a particular month (n) will be $[(1/r)XXn][1+(1/[(1/r)XX4]-1)]$.

Division into Extreme and Mean Ratio.

Definition.

A line is divided into extreme and mean ratio when the ratio of the whole line to the larger part equals the ratio of the larger part to the smaller part. For example let the whole length be a, the larger part b, and the smaller part c, so that

$a = b + c$. Also

$a/b = b/c$, that is

$(a/b) \times (c/b) = 1$, and

$(a/b) - (c/b) = 1 = (a/b) - (b/a)$. Hence

$(a^2 - b^2) / (bc) = ab$.

$(a^2 - b^2) - (ab) - (b^2) = 0$.

$(a - (b/2))^2 = (5/4)b^2$. Hence

$a - (b/2) = [(5/2)b/2]$ and

$a/b = [(5/2) + 1]/2 = R$.

Hence the division into mean and extreme ratio describes not just a geometric but also an algebraic relationship in the form of the quadratic equation

$a^2 - ab - b^2 = 0$.

Euclid discusses the geometric relationships of this quadratic equation in Elements book 2 proposition eleven, and it is highly unlikely that he could have done this without first knowing about the above algebraic relationship which he fails to discuss.

Neither Euclid nor Kepler nor any of their successors seemed to recognise that R and r were trigonometric versions of the rational angles, 18 degrees, 36 degrees, 54 degrees and 72 degrees. These angles are to be found in pentagons, decagons and icosahedrons (20 sides).

The algebraic version of a more general case of

$x^2 - bx - c = 0$ can be found much earlier than Euclid among the Old Babylonian cuneiforms.

Johannes Kepler in a letter dated 12 May 1608 to Joachim Tanckius a professor in Leipzig states

'Now the divine proportion cannot be perfectly expressed in numbers; it can nevertheless be expressed in such a way that through an infinite process we come closer and closer to it, and in delineating the square we are never more than a unity away....., I continue in this way so the shortage of the one is always equal to the surplus of the other'.

This can be shown in the following table where it will be noted that

$(f_n)^2 - (f_{n-1})(f_{n+1}) = (-1)^{n-1}$.

That is the surplus alternates between +1 and -1.

Column 1 is n, column 2 is f_n ,

column 3 is $(f_n)^2$,

column 4 is $(f_{n-1})(f_{n+1})$.

1	2	3	4	5	6
1	1	1			
2	1	1	2	-1	$=(-1)^{XX(n+1)}$
3	2	4	3	1	$=(-1)^{XX(n+1)}$
4	3	9	10	-1	$=(-1)^{XX(n+1)}$

5	5	25	24	1	$=(-1)^{XX(n+1)}$
6	8	64	65	-1	$=(-1)^{XX(n+1)}$
7	13	169	168	1	$=(-1)^{XX(n+1)}$
8	21	441	442	-1	$=(-1)^{XX(n+1)}$
9	34	1156	1155	1	$=(-1)^{XX(n+1)}$
10	55	3025	3026	-1	
11	89	7921			
12	144				
13	233				

Pell's equation supplies the format when the square of odd ordinal Fibonacci numbers is reduced by the product of the two adjacent (even ordinal) Fibonacci numbers, to equal +1.

It will be further noted that Pell's equation always but not exclusively applies when

$x = u + u + 1$, $y = 2$, and $n = u(u + 1)$ in

$x^2 - n(y^2) = 1$.

$4(u^2) + 4u + 1 - 4(u^2) - 4u = 1$.

Calculating the Fibonacci Integers.

The mathematical relationship between successive Fibonacci integers in fact converges to the irrational number

$R = 1.618033989 = 2\cos 36^\circ$.

It is however possible to be even more precise in calculating (as opposed to listing) the Fibonacci integers.

If we raise $R = 1.618033989$ to various positive integer powers, we will note that the results are fairly close to further Fibonacci integers.

In the following table, columns 1 and 2 are R^{XXn} , columns 3 and 4 are the nearest Fibonacci integers, column 5 is the difference between column 3 and column 2, column 6 is the product of column 2 and 1.170820394.

1	2	3	4	5	6
R^{XX1}	1.618034	2	$f_{[3]}$	-0.381966	1.89
R^{XX2}	2.618034	3	$f_{[4]}$	0.381966	3.065
R^{XX3}	4.236068	5	$f_{[5]}$	0.763932	4.96
R^{XX8}	6.854102	8	$f_{[6]}$	1.145898	8.025
R^{XX8}	46.97871	55	$f_{[10]}$	8.021286	55
R^{XX12}	321.9969	377	$f_{[14]}$	55.00311	377

RXX16	2207.000	2584	$f_{[18]}$	377.0005	2584
RXX32	4870847	5702887	$f_{[34]}$	832040	5702887

The raising of R to the above powers (n) results in products close to integers which are fairly consistently below the appropriate Fibonacci integer $f_{[n+2]}$.

The difference between R raised to various powers and the Fibonacci numbers $f_{[n+2]}$ is a fairly easily recognisable constant:

$$(f_{[n+2]})/R^{XXn} = 1 + (1/([RXX4] - 1)) = 1.170820394.$$

It will be noted that the higher differences in column 5 are themselves close to Fibonacci integers, 4 ordinal units or powers below. This means that each difference can be expressed as a constant factor,

$$1 + 1/([RXX4] - 1) = 1.170820394.$$

Reciprocals of Fibonacci Integers.

Each reciprocal of a Fibonacci integer consists of two factors, a constant factor and a variable factor.

The constant factor is

$$[(2R)XX4 - 2XX4]/[(2R)XX4] = 0.854101966.$$

The variable factor is

$$[1/R]XXn = 0.618033989XXn.$$

References.

Boncampagni, B. editor, 1857-60.
Liber Abbacl and Practica Geometricae in Scritti di Leonardo Pisano, 2 volumes.
Rome.

Eves, Howard 1980.
Great Moments in Mathematics before 1650, pages 161-164
Mathematical Association of America.

Heath, T.L. 1908.
The Thirteen Books of Euclid's Elements.
vol 1, page 137, Bk 2 proposition eleven, pages 402-403.
vol 2, Bk 4 propositions 10 and 11, pages 96-101.
vol 2 Bk 6 proposition 30 pages 267-268.
vol 3 Bk 13 proposition 8 pages 452-455
CUP.

Hertz-Fischler, R. 1987
A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio.
Wilfrid Laurier University Press.

1994
The Golden Number and Division in Extreme and Mean Ratio.
Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the
Mathematical Sciences edited by I. Grattan-Guinness.
Routledge.

Kepler, J 12 May 1608
Letter to Joachim Tanckius in Leipzig.
Complete Works vol 16 pages 154-165.
1954 C.H. Beck'sche, Munich.

A New Year's Gift, or On the Six Cornered Snowflake 1611.
translated by Colin Hardie
1966 Clarendon Press.

Neugebauer, O. 1935-37
Mathematische Keilschrifttexte, 3 vols Abt A3,
Berlin.

Philippou, A.N. etc. 1988.
Applications of Fibonacci Numbers.
Kluwer Academic.

Van der Waerden, B.L. 1978.
Mathematics and Astronomy in Mesopotamia.
Dictionary of Scientific Biography vol xv pages 667-686.
Charles Scribner's Sons, New York.

Vogel, Kurt. 1971.
Fibonacci, Leonardo, biography in Dictionary of Scientific Biography
vol iv pages 604-613.
Charles Scribner's Sons, New York.
November 1998.



I

Antonius van der Linde [1] und H.Murray [2] bezeichneten Indien als das Ursprungsland des Schachspiels. Aber eine ganz andere Theorie entwickelte J.Needham in seinem Werk "Science and Civilization in China"/siehe [3]. Needham hat dabei ein allen Schachhistorikern zuvor unbekanntes Dokument übersetzt: Die Verrede des Kanzlers Wang Pao zum Schachbuch des Kaisers Wu Ti, der 569 n.Chr. das grosse astrologische Schach Hsiang Hsi ersann. Diese Verrede ist in dem Sammelwerke "Thai Ping Yu Lan" aus dem Jahre 984 erhalten geblieben.

Die Übersetzung der Verrede von Wang Pao lautet wie folgt: "Das erste/grosse Bedeuten/des Bilder-Schachs/hsiang hsi/ ist ein astrologisches, wegen/der unter den Figuren dargestellten Bilder/des Himmels, der Sonne, des Mondes und der Sterne. Das zweite betrifft Erde, wegen/der unter den Figuren dargestellten Bilder/ von Erde, Wasser, Feuer, Baum und Metall. Das dritte betrifft die Yin und den Yang; wenn wir von einer geraden Zahl aus anfangen, bedeutet sie Yang und Himmel, wenn wir von einer ungeraden aus anfangen, bedeutet sie Yin und Erde. Das vierte betrifft die Jahreszeiten. Das fünfte betrifft die Reihenfolge von Permutationen und Kombinationen, laut den Veränderungen der Stellung der Himmelskörper und der fünf Elemente. Das sechste betrifft die musikalischen Töne, verfolgend die Zerstreung des chhi/Dieser Begriff bedeutet die fluiden, in der Atmosphäre vorhandenen Formen der fünf Elemente in Gestalt von Regen, Wind, Blitz und dergleichen/. Das siebente betrifft die 8 kua, ihre Stellung festsetzend; Chen nimmt Tui/Donner nimmt Meereswasser/, Li/Sonne/nimmt Khan/Mond/ usw. Das achte betrifft die Loyalität und Pietät der Kinder. Das neunte betrifft Verwalter und Minister..... Das zehnte betrifft Frieden und Krieg.... Das elfte betrifft Bräuche und Zeremonien Das zwölfte betrifft die Anerkennung von Tugend und die Bestrafung des Lasters/d.h. Rangerhöhungen und Entlassungen, usw/..... Die letzten fünf Punkte betreffen wohl die Art und Natur der Fragen, die man an das astrologische Urschach als einer Art wahrsagenden Gerät zur Beantwortung stellte. Hierunter sind bezeichnenderweise auch jene, die Krieg und Frieden zum Gegenstand haben. Das astrologische Urschach der Chinesen war unter anderem auch ein Planeten- und Elementenorakel zur Kriegs-

führung. Seine Rolle war ausserordentlich bedeutungsvoll, da in China, wie auch in Indien und Babylon, die Kriegsführung nach astrologischen Grundsätzen und Befragung des Orakels erfolgte.

Der bekannte jugoslawische Schachmeister und Philosoph Pavle Bidev [4] entwickelte eine Theorie, dass das indische Chaturanga nur eine Weiterentwicklung des Hsiang ist. Das chinesische Schach verfügt gegenüber dem Chaturanga die Originalität des Namens, jene des Brettes/Punkte anstelle von Feldern/, jene der Spielsteine/diskoidale Scheibchen anstelle von Figuren/. Diese Eigenschaften lassen das chinesische Schachspiel in einem primitiven Stadium der Entwicklung erscheinen, so dass das Schach als Weiterentwicklung eines schlichten Brettspiels anzusehen ist.

Bidev untersuchte ausführlich die Übereinstimmungen zwischen Schach, dem magischen Quadrat Nasik 8x8 und den fünf Elementen. Es besteht ein sehr wesentlicher Unterschied zwischen westlichen magischen Quadraten/m.Q./ und den indischen Nasiks: erstere stehen isoliert im Raum, und ihre Zahlen weisen keine dynamischen Eigenschaften auf, die sich über den Rahmen des gegebenen Quadrates hinaus erstrecken. Die indischen m.Q. des Typus Nasik sind demgegenüber so konstruiert, dass sich identische Nasiks in alle Richtungen anlagern können. In diesem unbegrenzten Kontinuum kann an beliebiger Stelle jedes Quadrat 8x8 herausgegriffen werden und es zeigt alle Merkmale des vollständigen m.Q.

Bidev stellt weiterhin die Frage, wie sich die Statik des Schachsatzes und die Dynamik der Schachsteine zur Zahlenanordnung innerhalb nur eines Nasik 8x8/siehe das Bild 1/ verhalten. Dabei betrachtet er das moderne, seit der Renaissance im Westen existierende Schach.

Seit seinem ersten Erscheinen in Indien um die Mitte des 6. Jahrhunderts nach Christus hat das achtreihige Schachbrett/indisch: Ashtapada/seine Dimensionen nicht verändert. Irgendwelche primitiveren Formen des Schachs sind in Indien bislang nicht entdeckt worden. Das zeigt auf die Möglichkeit, dass das indische Schach sein Dasein einem vollkommen ausgearbeiteten mathematischen Modell zu

1	58	3	60	8	63	6	61
16	55	14	53	9	50	11	52
17	42	19	44	24	47	22	45
32	39	30	37	25	34	27	36
57	2	59	4	64	7	62	5
56	15	54	13	49	10	51	12
41	18	43	20	48	23	46	21
40	31	38	29	33	26	35	28

Bild 1

verdanken hat.Und tatsächlich liefert das m.Q. Nasik 8x8 die theoretische Erklärung für das in all seiner Vollkommenheit so plötzliche Aufkommen des Schachspiels in Indien.

Aus der Definition des magischen Quadrats ergibt sich bereits, dass die 4 Reihen,auf denen die 32 Steine postiert sind,jeweils die magische Konstante 260 aufweisen,da jede Horizontale,Vertikale und zentrale Diagonale im beliebigen m.Q. diese Bedingung erfüllen muss.Die Zahlensumme jedes achtgliedrigen Komplexes,sei es auf dem Königs- oder Damenflügel einer Seite oder in kombinierter Weise auf beiden Seiten,ergibt stets die Konstante 260: 4 Türme mit ihren 4 Bauern,4 Springer und 4 Bauern,4 Läufer und 4 Bauern,beide Königspaare mit ihren 4 Bauern weisen die Zahlensumme 260 auf.Jeder solcher achtgliedriger Komplex stellt ein organisches Ganzes dar,das als eine Folge von zweimal erfolgter Zerspaltung in eine lichte und eine finstere Hälfte,in eine männliche und eine weibliche Seite/Königs- und Damenflügel/ aufgeteilt ist.

Bidev erklärt,dass im Schach die mittelalterliche indische Elementenlehre in arithmetisch-geometrischer Weise mittels mystischer Symbole dargestellt ist/Bild 2 und 3/.Jeder achtgliedrige Steinkomplex erklärt sich aus der sogenannten Mischungstheorie der fünf indischen Elemente:Die Erde/prithivi/ kommt in der Natur nicht rein vor,sondern ist stets mit anderen vier Elementen derart gemischt, dass ein Molekül Erde aus 4/8 eigener Substanz und 4/8 anderer Elemente zusammengesetzt ist.Die 4 Türme stellen die reine Substanz der Erde und die vier Turmbauern die anderen Elemente dar,die 4 Springer mit ihren 4 Bauern bilden den achtgliedrigen Komplex des Wassermoleküls,die 4 Läufer mit ihren 4 Bauern sind die 8/8 der Luft,und das Königspaar stellt die Hauptelemente der Natur, Ather und Feuer,symbolisch dar.Jede Figur zeichnet auf dem Brette durch die ihr zugeteilte Bewegung die entsprechende geometrische Symbolfigur des betreffenden Elements nach.Die Aufzeichnung dieser Symbolbilder führt in präziser Weise zur magischen Konstanten 260.

Der Schachkönig/indisch:rajah,persisch:shah/bewegt sich in bekannter Weise im Kreise der 8 ihn umgebenden Felder auf dem Schachbrett.Ein König vermag auf verschiedene Weise die Konstante 260 durch 7 aufeinander folgende Züge zu verwirklichen: 1. Wenn er die Felder von e1 bis e8 nacheinander durchschreitet.- 2. Wenn er abwechselnd gerade und schräge Züge in Form eines Oktogons aus-

führt,wie z.B. Ke1-f2-f3-e4-d4-c3-c2-d1 ,oder in Zahlen ausgedrückt: 33+23+10+64+4+54+43+29, die Summe ist 260.Dasselbe gilt genauso für den schwarzen König. Aber diese Oktogon-Marschroute kann man von jedem beliebigen Schachfeld beginnen.Die Summe der 8 durchschrittenen Felder wird unfehlbar die Konstante 260 ergeben.

Das Oktogon lässt sich als eine Approximation des Kreises betrachten.Der König bewegt sich,wie erwähnt,im Kreise der 8 ihn umgebenden Felder.Hier wird gleichfalls die Tendenz zur Kreisbewegung der Königsfigur sichtbar.Unter den 5 altindischen Elementen stellt der König auf dem Schachbrett das erste,wichtigste oder das königliche Element dar.Es ist der Ather,auf Sanskrit:akasha.Ihm ist als Symbolfigur das Bild des Kreises zuerteilt.Daraus erklärt sich die Bewegung des Königs im Kreise der 8 ihn umgebenden Felder.In der Sprache der Symbole bedeutet der Begriff "König" jedes Wesen oder Ding,das innerhalb seines Bereichs der lebenden oder unlebten Schöpfung den höchsten Rang beansprucht.Im Reiche der Elemente ist Ather,in jenem der Planeten die Sonne,im Reiche der Lebewesen der Mensch,in jenem der Metalle das Gold.Im Reiche der geometrischen Figuren betrachtet man den Kreis als die vollendetste Linie.

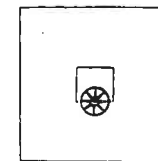
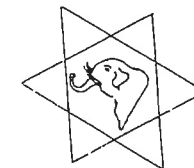
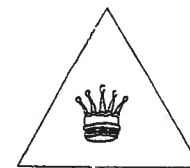
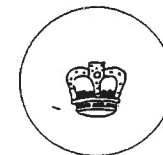
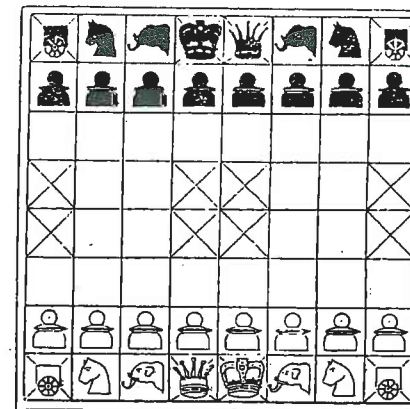


Bild 2 und 3

Die heutige Schachdame war ursprünglich eine männliche Figur, nämlich der Mantrin/Rat/ im indischen Chaturanga.König und Dame können durch ihre Bewegung die Konstante 260 realisieren,wobei auf dem Brett reine Bilder des Dreiecks erscheinen.Diese geometrische Figur ist das Symbolum des heiligen Elementes Feuer.

Weiterhin betrachten wir,wie die Pferde von ihren Ausgangsfeldern aus die Konstante 260 erzielen können.Die 4 Pferde können auf folgende 8 Felder springen:/Weiss/ a3,c3,f3,h3, /Schwarz/ a6, c6,f6,h6,oder in Zahlen des m.Q. Nasik 8x8 ausgedrückt:56+54+10+12 = 132 und 17+19+47+45 = 128 mit der Summe 260.Die beiden weissen Springer beeinflussen von b1 und g1 insgesamt 6 Felder:e2,c3,a3,d2,f3,h3 deren Zahlensumme 200 beträgt.Rechnet man noch die beiden Ausgangsfelder 31 und 35 hinzu,ergibt sich als Summe 266.Im gegnerischen Lager beträgt die entsprechende Summe 254.Eine Doppelkonstante vom Zahlenwert 520 entsteht,wenn man die beiden Summen 266 und 254 addiert.

Seit grauer Zeit ist das Pferd ein mytisches,dichterisches und volkstümliches Symbol der weisschäumigen Wellen am Meeres-,Wildbach- und Flussgewässern gewesen.Poseidens rasende Pferde sind nichts anderes als die stürmischen Wagen des bewegten Meeres.

Die Halbmondfigur des indischen Wassersymbols lässt sich gut auf dem magischen Quadrat der Fünffzahl beobachten./Bild 4/.Von allen vier Seiten her hat das Pferd durch vier nacheinander gemachte Sprünge vier reine Halbmondfiguren ausgeführt,wobei die Summe auf den jeweiligen fünf Zahlen die magische Konstante 65 zeigt. Auf dem gleichen Bild sehen wir auch die magischen Pfade für die anderen Figure.

Der moderne Läufer erhielt erst in der europäischen Renaissance seinen freien Lauf auf allen Diagonalfeldern;er entwickelte sich aus dem alten kurzschrittigen Elefanten,der bis ins europäische Mittelalter einen schrägen Sprung nur auf das dritte Feld des Schachbretts ausführte.

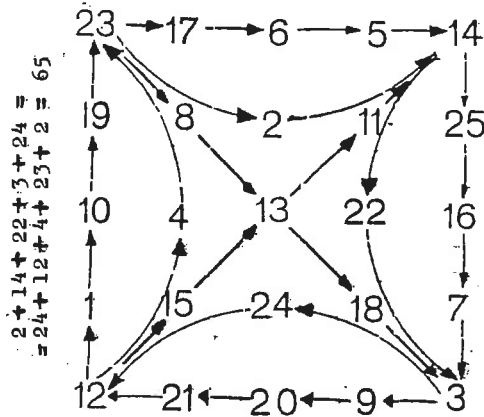


Bild 4

$$2+14+22+3+24 = 65$$

$$= 24+12+4+23+2 = 65$$

Hier lässt sich auch auf viele Art und Weise die Konstante 260 erhalten.Zum Beispiel betritt der linke weisse Elefant die Felder c1,a3,c5,e7,g5,e3,g1 und a7 oder die Zahlen 38,56,30,9,27,49,35 und 16 mit der Summe 260.Der rechte schwarze Elefant verfügt über folgende 8 Felder:c8,a6,c4,e2,g4,e6,g8 und a2.Die zugehörigen Zahlen sind: 3,17,59,48,62,24,6 und 41 ,ihre Summe ist wiederum 260.

Die Diagonalbewegungen der 4 Elefanten auf dem Schachbrett führen zu Dreiecksbildern.Das soll uns nicht wundernehmen,weil die Elefanten die Atmosphäre versinnbildlichen.Die symbolische Figur der Luft ist aus zwei ineinander verflochtenen Dreiecken zusammengesetzt.Dieses Symbol ist bekannt unter dem Namen Davidstern.In der hebräischen Geheimlehre Kabūala bezieht es sich auf die Harmonie der oberen himmlischen und der unteren irdischen Welt.Die Atmosphäre erfüllt den Raum zwischen diesen beiden Welten,so dass der Sechsstern auch bei den Indern die gleiche symbolische Bedeutung haben mag.

Man soll noch die symbolische Rolle der Eckfigur,des Wagens /jetzt Turm/,erklären.Selbst aus leblosem Stoff hergestellt,stellt er das tote Element der Erde dar.Se ist die ortogonale Bewegung des Wagens gleichfalls aus der symbolischen Figur des Quadrats der Erde zu erklären.

Der Wagen ist bei den Chinesen und Indern ein altertümliches Symbol der Erde.Sowohl bei der zeremoniellen Kutsche des chinesischen Kaisers als auch bei jener des indischen Radscha werden in ihren Grundformen der Himmel und die Erde nachgeahmt:über dem quadratischen Chassis des Wagens als Sinnbild der Erde wölbte sich die Kuppel des blauen Baldachins als Sinnbild des Himmels.Der Herrscher in der Kutsche galt als der Herr der Erde unter dem Schutze des Himmels.

II

Einige jugeslawische Erforscher haben die innere Harmonie des Schachspiels im Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt gesucht.Wie es bekannt ist,teilt der Punkt C bei dem goldenen Schnitt die Strecke AB derart,dass sich die ganze Strecke zum grösseren Teil so verhält,wie der grössere Teil zum kleineren.Hat die ganze Strecke Einheitslänge,dann gilt $1/x = x/(1-x)$.Das führt auf die quadratische Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$,deren positive Lösung $x = (-1 + \sqrt{5})/2$ oder ungefähr 0,61803 ist.Das Teilungsverhältnis des goldenen

Schnittes ist der Kehrwert dieser Zahl und beträgt ungefähr 1,61803.

B.Pavlović [5] hat den Begriff des Potentials für jede Figur auf dem Schachbrett eingeführt. Um den numerischen Ausdruck für das Potential einzelner Figur zu erhalten stellt man sie auf ein bestimmtes Feld F. Dann bestimmt man die Zahl n der Felder, wo diese von F betreten kann und numeriert das Feld F mit n. Dieses Verfahren

müssen wir für jedes Feld wiederholen: und so erhält man das folgende Diagramm/Bild 5/. Dabei nützen wir nur eine Viertel dieses Diagramms für jede Figur, weil alle Zahlen symmetrisch geordnet sind. Wenn wir die Summe aller Zahlen auf dem ganzen Brett als Potential der entsprechenden Figur nennen, so erhalten wir: S = 336, L = 560, T = 896

8	2	3	4	4	7	7	7	
7	3	4	5	6	6	9	9	7
6	4	5	6	8	8	11	11	9
5	5	6	6	8	8	11	9	7
4	14	14	14	27	23	23	21	
3	14	14	14	25	25	23	21	
2	14	14	14	23	23	23	21	
1	14	14	14	21	21	21	21	
	A	B	C	D	E	F	G	H

Bild 5

D = 1456. Daraus folgt $D = T + L$,

$T = L + S$ wie auch:

$D : T \approx T : L \approx L : S \approx 1,6 \dots$

Diese Konstante stellt das Teilungsverhältnis des goldenen Schnittes dar, was auf die Harmonie zwischen den Schachfiguren hinweist.

S.Gligorić und P.Micić [6] haben den Begriff der mittleren Kapazität für jede Figur auf dem Schachbrett eingeführt. Nach einer

längeren Rechnung haben sie die sog. Konversionstafel/Bild 6/ für die Kapazitätsverhältnisse einzelner Figuren ausgebildet. Hier erscheint wieder das Teilungsverhältnis des goldenen Schnittes in der Wertungsfolge D-T-L-S-B. Die Konstante dieses Systems nimmt den Wert $C \approx 0,63$.

Konstante des Systems: $C = 0,63$
Goldener Schnitt: $G \approx 0,61803$

Bild 6

L I T E R A T U R

- [1] Linde A.: "Geschichte und Literatur des Schachspiels", Berlin 1874.
- [2] Murray H.J.R.: "A History of Chess", Oxford 1913, Nachdruck 1962.
- [3] Needham J.: "Science and Civilization in China", IV, 1 Cambridge University Press 1962, s. 314-344: "The Magnet, Divination and Chess".
- [4] Bidev P. "Schachspiel als Weltsymbol"/serbisch/-Die Genese des Schachs von chinesischer Astrologie bis zur indischen Mystik, mit einem Vorwort von Prof. Dr. Max Euwe, Verleger: Organisationskomitée der Schacholympiaden, Skepje 1972.
- [5] Pavlović B.: "Aritmetika i geometrija na šahovskoj ploči", Račgovori o matematici, s. 223-235. Školska knjiga, Zagreb 1971.
- [6] Gligorić S., Micić P., "Šahovski Vodič", Beograd 1988.

Anschritt: Prof. Dr. Miloš Čanak
11000 Beograd
Brzakova 4
Jugoslawien

Dürers Geometrie - Genie und Irrtum

Peter Schreiber, Greifswald

Nach seltenen und meist kurzen Erwähnungen von Albrecht Dürers Beiträgen zur Geometrie (u.a. Kepler 1619, Doppelmayr 1730, Lambert 1774, Kästner 1796) machte die mathematikhistorische Literatur des ausgehenden 19. Jhs. erstmals breiteren mathematikhistorisch interessierten Kreisen bewußt, daß es in der Person Dürers ganz außerhalb der professionellen Renaissance-mathematik einen bemerkenswerten Kopf gegeben hat (Gerhardt 1877, Günther 1886, Staigmüller 1890/91, Cantor 1892*). Seitdem ist die Literatur über Dürer als Mathematiker zu gewaltigen Mengen angewachsen, und auch die jüngst vergangenen Jahre haben weitere Beiträge dazu gebracht (u.a. Herz-Fischler 1990, Peiffer 1996, 1997, Klingenberg 1997, Field 1997 u.a.). Ich sehe hier drei Probleme:

1. Die große Fülle von Sekundärliteratur hält Mathematiker, die sich für Dürer interessieren, womöglich davon zurück, die gerade in diesem Fall sowohl sprachlich als auch bibliographisch leicht zugängliche Originalliteratur immer mal wieder mit den Augen von heute anzusehen.
 2. Die mathematikhistorische Literatur hat bisher recht einseitig die „Ungerlehre“ (1525, 2. posthume Ausgabe 1538) ausgewertet und den „Vier Büchern von menschlicher Proportion“ (1528, im folgen - den kurz „Proportionenlehre“) relativ zu wenig Beachtung geschenkt.
 3. Eine Reihe durchaus guter Bücher, vor allem aber die mehr kunsthistorisch orientierte Literatur, haben den Eindruck erweckt, daß Dürers geometrische Interessen hauptsächlich der Zentralperspektive galten und, wie die nähere Betrachtung weitverbreiteter Bilder suggeriert, dabei mehr der technischen Herstellung solcher Bilder als der mathematischen Durchdringung der Prinzipien.
- Ich möchte daher hier vor allem
- I. zeigen, daß es sich lohnt, Dürer vom Standpunkt der heutigen Mathematik neu zu erschließen,
 - II. daß auch die „Vier Bücher von menschlicher Proportion“ Dürer in mehreren Richtungen als einen bedeutenden Vordenker ausweisen,
 - III. daß Dürers natürliches Interesse an der Zentralperspektive nur eine von mindestens 11 Komponenten seiner mathematischen Interessen gewesen ist, (Diese Komponenten seien, da sie im Vortrag nicht alle behandelt werden können, hier vorab aufgezählt: 1. Zentralperspektive, 2. Verfahren zugeordneter Normalrisse, 3. geometrische Konstruktionen mit deutlicher Unterscheidung zwischen exakten und approximativen Lösungen, 4. deutsche mathematische Fachterminologie einschließlich der Formulierung von Konstruktionsalgorithmen, 5. Erfindung neuer Prinzipien zur Erzeugung von Kurven durch punktweise Konstruktion bzw. Mechanismen, 6. Parkettierungen der Ebene mit regulären Polygonen, 7. Ornamentik, 8. Polyeder, 9. geometrische Transformationen, 10. die Beschreibung der Natur, insbesondere der menschlichen Anatomie, durch Zahlenverhältnisse, 11. die Konstruktion stilistischer einheitlicher Alphabete.
 - IV. daß auch Dürers gelegentliche Fehler für uns zum Teil lehrreich sind, da sie uns a) lehren, das nicht Selbstverständliche wieder als solches wahrzunehmen, b) historische Einsichten in den Stand und in charakteristische Defizite der damaligen Mathematik vermitteln.

Einige Details zu III:

- (2) Im Vortrag wird an Beispielen gezeigt, daß Dürer die Lösung seiner konstruktiven räumlichen Probleme mittels Grund- und Aufriß bzw. unter Heranziehung eines dritten Risses perfekt beherrschte, daß er insbesondere die Darstellung eines Körpers im Mehrtafelverfahren in allgemeiner Lage durch mehrfaches Drehen um geeignete Achsen aus einer speziellen Lage herleiten konnte. Dürer wendet das Verfahren auch in der Proportionenlehre vielfach an, um die Ansichten eines nach vorn oder nach hinten geneigten oder seitlich gedrehten Kopfes zu konstruieren. Ähnliche Konstruktionen finden sich mehrfach in der „Prospetiva pingendi“ des Piero della Francesca (um 1475, Abbildungen und extensive Besprechung neuerdings in [Field]), die aber während der gesamten Renaissance nicht publiziert wurde. Hat Dürer sie gesehen?
- (3) Dürers Verfahren zur approximativen Dreiteilung von Kreisbögen (also im wesentlichen von Winkeln) ist früh diskutiert worden, und die Analyse des Fehlers [Vogel 1931] ergab eine große Überlegenheit gegenüber allen späteren Vorschlägen von zum Teil sehr prominenten Mathematikern wie Huygens oder Newton. Dabei blieb bisher stets außer Betracht, daß Dürers Verfahren deutlich die Möglichkeit der Iteration nahe-

* Cantor behandelt 1892 auf 10 Seiten ausführlich Dürers approximative Winkeldreiteilung, die Konstruktion von regulären n-Ecken, einige Kurvenkonstruktionen (Muschellinie!) und Hilfsmittel zur Konstruktion von zentralperspektiven Bildern. Alles andere wird höchstens kurz erwähnt bzw. ist für ihn nicht Mathematik.

- legt, so daß Dürers Abbruch nach dem zweiten Schritt lediglich darin begründet scheint, daß die dann bereits erreichte Genauigkeit die Bedürfnisse und Möglichkeiten des praktischen Zeichnens längst übertrifft.
- (4) In der älteren Dürerliteratur ist viel die Rede von seinen Vorschlägen, geometrische Objekte und Operationen erstmals deutsch zu benennen. Sie sind oft von herzerfrischender Naivität und Deutlichkeit. Häufig weiß er gewisse Dinge „in deutsch mit anders zu sagen als...“ und dann kommt z.B. eine „kuglette ebne“ (Teil einer Kugelfläche), eine (ge)“bogne ebne“ (meint etwa Fläche mit der Gaußschen Krümmung Null) und eine (ver)“beulte ebne“ (für eine Fläche mit - modern gesagt - nichtkonstanter Gaußscher Krümmung). Parallele Linien sind „barlinien“, konzentrische Kreise also „zirckelkrumm barlinien“. Wesentlicher als all dies erscheint heute, daß seine Methode, Konstruktionen zu beschreiben, die euklidische Technik des „Adressierens“ richtig umsetzt. Seine Konstruktionsbeschreibungen sind nicht nur für den heutigen Leser leicht nachvollziehbar, was sich besonders dort bemerkbar macht, wo sich in den beigegebenen Zeichnungen Fehler oder Auslassungen befinden, sondern sie tragen alle Merkmale einer ordentlichen problemorientierten Programmiersprache.
 - (6) Dürers Versuche, die Ebene mit möglichst wenigen und formgleichen Zwischenräumen durch reguläre Fünf- oder Siebenecke zu pflastern, führen erstaunlich dicht an die erst Anfang der siebziger Jahre unseres Jhs. entdeckten und seitdem boomenden aperiodischen Parkette.
 - (7) Eines der von Dürer gezeichneten Zirkelornamente läßt sich als stereographische Projektion einer Parkettierung der Sphäre mit unendlich vielen Kreisbogensechsecken interpretieren, die sich auf zwei diametrale singuläre Punkte zusammenziehen. Damit soll nicht etwa behauptet werden, daß Dürer dies so gesehen bzw. beabsichtigt hat. Vielmehr zeigt das Beispiel, in welchem Maße Anregungen für die Mathematik von Dürers Schaffen ausgehen.
 - (8) Dem Vorbild Pacioli folgend, zeigt Dürer außer den fünf regulären Polyedern und einer Auswahl von archimedischen Polyedern auch einige, zum Teil selbsterfundene Polyeder, die im modernen Sinn keine kombinatorische Regelmäßigkeit aufweisen, jedoch sämtlich eine Umkugel besitzen. Auf diese besondere Eigenschaft der Polyeder weist er im zugehörigen Text wiederholt nachdrücklich hin.* Hier eröffnet sich nicht nur ein neues Verständnis des vieldiskutierten abgestumpften Rhomboeders auf seinem Kupferstich MELENCOLIA I (1514), der auch eine Umkugel besitzt und dessen Konstruktionsidee im Vortrag rekonstruiert wird, sondern darüber hinaus eine historische Einsicht in die Wesentlichkeit der „Kugelhähnlichkeit“ von Polyedern aus der Sicht der Renaissance, die noch bis zu Kepler nachwirkt.**
 - (9) In der „Proportionslehre“ probiert Dürer zahlreiche Techniken, durch nichtlineare geometrische Transformation aus einer menschlichen Normalgestalt bzw. einem Normalkopf die verschiedensten Varianten abzuleiten. Derartige Techniken liegen heute den sogenannten Phantombildern der Kriminaltechnik zugrunde. Dürer gibt die wirkungsvollen Transformationen geometrisch vor, jeder Mathematikstudent im ersten Semester müßte daraufhin in der Lage sein, die entsprechenden parameterabhängigen Abbildungsscharen analytisch zu beschreiben. Dürer unterwirft menschliche Körper bzw. Körperteile genau den gleichen Transformationsprinzipien, die er an anderer Stelle auf so abstrakte geometrische Objekte wie Kreise oder Kuben anwendet, er begreift also in einer Weise, wie es erst heute wieder denkbar ist, alle Objekte der Natur als möglichen und legitimen Gegenstand der Geometrie. Wie weit sein intuitives Verständnis von der Wirkungsweise geometrischer Abbildungen entwickelt ist, zeigen Sätze wie „Ein jeglich verzeichnet ding in eim cubo so oft der cubo verkert (d.h. transformiert, verzerrt, abgebildet) wird / so oft wird alles das mit verkert.“

Unter den Irrtümern Dürers gibt es solche, die sich leicht hätten vermeiden lassen, die zum Teil den Umständen geschuldet sind, unter denen die Bücher in Druck gingen.*** Zum Beispiel hat er anscheinend nicht bemerkt, daß die zwei von ihm gezeichneten archimedisch halbrekulären Parkette aus Quadraten und Achtecken gleich sind. (Das eine ist nur um 45° gegen das andere gedreht.) In dem von ihm gezeichneten Netz eines abgestumpften Würfels (mit Umkugel!), in dem die ursprünglichen Quadratseiten zu Zwölfecken umgestaltet

* Dürer schreibt: „Zum drytten sind Corpora die allenthalben gleych sind / von felderden (Flächen) ecken und seyten / die der Euclides corpora regularia nennet / der beschreibet ir fünffe / darumb das ir mit mer können sein / die in ein kugel darin sie allenthalben anrüren verfast mögen werden.“ Und von den danach gezeigten zum Teil nichtarchimedischen Körpern schreibt er wieder: „Dise corpora rüren in einer hollen kugel mit all iren ecken an. ... Solichs magst du auch gebrauchen mit den unregulirten corporen / wo sie in einer spera überall anrüren.“

** Kepler zählt in seiner „Harmonice mundi“ (1619) alle Möglichkeiten für Ecken von archimedischen Polyedern auf und stößt dabei, als erster - wie es scheint, zwangsläufig auch auf die Scharen der halbrekulären Prismen und Antiprismen, verwirft diese jedoch sofort wieder für den Fall von mehr als sechs Ecken der Grund (und Deck-)fläche, weil sie dann (obwohl sie natürlich immer noch eine Umkugel besitzen) die Form einer Scheibe haben und mehr einer ebenen Figur als einer Kugel gleichen. (Buch II, Def. XIII.)

sind, hat er übersehen, daß die Summe der Winkel von Flächen eines Polyedernetzes, die in einer beliebigen Ecke zusammentreffen, immer kleiner als 360° sein muß. Mit den ihm zur Verfügung stehenden Mitteln der Zweitafelprojektion hätte er die exakte Form der je vier Dreiecke, die in den ehemaligen Würfecken neu entstehen, leicht konstruieren können.

Ein in der älteren Dürerliteratur schon viel diskutierter Fehler betrifft die eiförmige Gestalt der Ellipse, die er nach dem Grund-Aufrißverfahren als Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebene konstruiert. Diesen Fehler halte ich für intelligent und lehrreich. Dürer wußte wenig über Kegelschnitte. Sein „gesunder Menschenverstand“ sagte ihm, daß die entstehende Schnittkurve wohl nur eine Symmetrieachse haben könne, da ja der Kegel in der Nähe der Spitze eine viel größere Krümmung zu haben scheint als weiter von der Spitze entfernt. Es gibt in der „Underweysung“ ein anderes Bild, wo eine Halbellipse als affine Streckung eines Kreises richtig konstruiert ist. Dürers Irrtum lehrt uns wieder das Staunen, daß die zwei auf so verschiedene Weise erzeugten Kurven in Wirklichkeit identisch sind. Die von ihm beim Schneiden eines Kegels angewendete Methode reicht trotzdem über die Antike hinaus, denn sie ist ja im Prinzip auf die Konstruktion der Schnittkurven vieler gekrümmter Flächen im Raum übertragbar. Hier wie an mehreren anderen Stellen muß Dürer als der direkteste und am weitesten vorgedrungene Vorläufer von Monge gelten.

Eine dritte Sorte von Fehlern bzw. Auslassungen dokumentiert deutlich das Defizit der Renaissance-Mathematik hinsichtlich des Begriffs der Tangente einer Kurve (und damit zusammenhängend Richtung einer Kurve in einem Punkt, Berührung zweier Kurven). Dies scheint ein antikes Erbe und der Tatsache geschuldet zu sein, daß für Kegelschnitte ausnahmsweise eine Tangente elementar als eine solche Gerade definiert werden kann, die mit der Kurve global genau einen Punkt gemeinsam hat. „Nun will ich leren machen ein lini / die einem wolgestalten ey gleich werdt“ schreibt Dürer, und dann macht er mit einigen Kreisbögen das, was man heute als „splining“ bezeichnet, was aber während der rund 100 Jahre nach Dürer beginnenden Herrschaft (beinahe möchte man sagen Diktatur) der analytisch-algebraischen Geometrie keinesfalls mehr ein legitimer Gegenstand von Geometrie sein durfte. In der Konstruktionsbeschreibung wird klar, was an der Zeichnung nicht zu sehen und darum sicher auch Dürer nicht aufgefallen ist: Seine „eilini“ hat an zwei zueinander symmetrischen Stellen minimale Knicke (in der Größenordnung von 3°), die sich durch geringfügige Abänderung der Konstruktion leicht hätten vermeiden lassen. Für das praktische Zeichnen spielen sie keine Rolle, aber sie zeigen, daß Dürer sich des Problems nicht annähernd bewußt war. In derselben Konstruktionsbeschreibung wird übrigens verlangt, einen Kreis mit gegebenem Mittelpunkt so zu konstruieren, daß er zwei zu diesem Mittelpunkt symmetrisch gelegene Kreisbögen von innen berührt. Das kann man mit Zirkel und Lineal konstruktiv leicht lösen. Daß Dürer hierzu nichts sagt, vielmehr anscheinend von der Vorstellung ausgeht, den passenden Radius durch Probieren zu finden (an anderer Stelle kommt noch mal ein analoges Problem vor), zeigt ein weiteres Mal, daß er in zeittypischer Weise über das Phänomen des Berührens nicht nachgedacht hatte.

Manches was Dürer insbesondere in seinen Vor- und Nachreden äußert, hören moderne Künstler nach meiner Erfahrung nicht so gern. „Wiewol etlych auß inen durch stetig übung eyn freye hand erlangt / also das sie ire werck gewaltigklich aber unbedechtlich / unnd alleyn nach irem wolgefalle gemacht haben (Underweysung). Was aber ganz leicht ist, kann nicht sehr künstlich sein. Was aber künstlich ist, will Fleiß, Mühe und Arbeit haben“. (Proportionenlehre). Wir sind in eine Zeit eingetreten, in der viele Künstler auf eine ganz neue Weise sich mathematisch-technischer Mittel bedienen. Ich denke an den Computer, und da füllen sich Dürers mahnende Worte mit einem neuen Sinn und Inhalt.

*** Dürer schreibt in einer Nachbemerkung zur „Underweysung“: „Wiewol ich müglichen fleyß hab angekert / das dise büchlein recht und wol corrigiert auß geen möchten / noch dann haben sich durch die außziehung und wider eynsetzung der pustaben / auch die eyl etlich yrrtum in Worten und dem verstand zugetragen...“ Und am Ende der „Proportionenlehre“ lesen wir: „Wiewol der frum und kunstreych Albrecht Dürer dise vier pucher geschrybenn / so hat er doch nur das erst wider übersehen und corrigiert / dann ee er an die andren drey komet ist / hat in die snelheyt des todes übereyit.“

Literatur:

A) Originalwerke Dürers

- Dresdner Skizzenbuch (um 1514), hrsg. von R. Bruck, Straßburg 1905.
- Underweysung der messung mit dem zirkel und richtscheyt in Linien eben und gantzen corporen... Nürnberg 1525, latein. Übersetzung: Paris 1532. Reprints ua. hrsg. von H. Thoma und A. Peltzer (nur Auszüge) 1908, Faksimile-Reprint Unterschneidheim 1972, Nördlingen 1980, 1983 (Verlag Dr. Alfons Uhl).
- Französ. übersetzt und ediert von Jeanne Peiffer 1995.
- Posthume erweiterte Ausgabe der Underweysung 1538. Neu hrsg. von Jaeggli und Papesch, Zürich 1966.
- Etliche underricht zu befestigung der stett schloß und flecken (Befestigungslehre) 1527. Neu hrsg. von Watzoldt 1917, Faksimile-Reprint Unterschneidheim 1969 und Nördlingen 1980.
- Vier bücher von menschlicher Proportion, 1528. Neu hrsg. von Max Steck 1969. Faksimile-Reprint Nördlingen 1980, 1996.
- Schriften und Briefe, hrsg. von E. Ullmann, Reclams Universalbibliothek, Leipzig 1973.

B) Sekundärliteratur (Auswahl in chronolog. Reihenfolge)

- H. Staigmüller: Dürer als Mathematiker. Programm des Kgl. Realgymnasiums Stuttgart 1890/91. (Der Klassiker zum Thema)
- M. Cantor: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik, Bd. II (1892), 421-430.
- F. Vogel: Über die Näherungskonstruktionen für die Dreiteilung des Winkels. Zeitschrift für Math. und Nat.-wiss. Unterricht, 62. Jahrgang 1931, 145-155.
- M. Steck: Dürers Gestaltlehre der Mathematik und der bildenden Künste. Max-Niemeyer-Verlag, Halle 1948.
- Derselbe: A. Dürer. In: Dictionary of Scientific Biography, ed. Ch. Gillispie, Scribners, New York 1970.
- J. E. Hofmann: Dürers Verhältnis zur Mathematik. In: Festschrift zum 500. Geburtstag A. Dürers. Selbstverlag des Vereins für Geschichte der Stadt Nürnberg 1971.
- Derselbe: Dürer als Mathematiker. In: Praxis der Mathematik 13 (1971) und in Humanismus und Technik 15 (1971).
- E. Schröder: Dürer - Kunst und Geometrie. Akademie-Verlag Berlin und Birkhäuser Basel-Boston 1980.
- G. P. Matwievskaia: Albrecht Dürer - der Gelehrte (russ.). Verlag Nauka, Moskau 1987. Enthält 563 Literaturangaben.
- J. Peiffer: La style mathématique de Dürer et sa conception de la géométrie. In: History of Mathematics. State of the Art. (In Honor of Ch. J. Scriba ed. Dauben, Folkerts, Knobloch, Wußing.) Academic Press 1996.
- Dieselbe: Dürers Geometrie als Propädeutik zur Kunst. In: E. Knobloch (Hrsg.): Wissenschaft - Technik - Kunst. Wiesbaden 1997.
- J. V. Field: The Invention of Infinity. Mathematics and Art in the Renaissance. Oxford University Press 1997.
- P. Schreiber: A new hypothesis on Dürer's enigmatic polyhedron in his copper engraving MELENCOLIA I. Historia Mathematica 1999, in print.

DIE PEANO KURVEN VON SCHOENBERG UND ISÉKI:
ENTDECKT ODER ERFUNDEN ?

HANS SAGAN

5004 Glen Forest Drive, Raleigh, N.C. 27612-3132

Zwei Grundbegriffe spielen eine wesentliche Rolle in den folgenden Ausführungen: Die *Stetigkeit von Funktionen* und die *Äquivalenz von Mengen*. Mit der Definition (*Erfindung*) der *Stetigkeit* werden alle stetigen Funktionen gewissermaßen "ins Leben gerufen" - vorerst außerhalb unseres Wissensbereiches - und "warten" darauf *entdeckt* zu werden. Gleichweise schafft die bekannte Definition (*Erfindung*) der *Äquivalenz von Mengen* alle möglichen Äquivalenzklassen von Mengen die auf *Entdeckung* warten. Nun hat Cantor nach dreijährigen heißen Bemüh'n in 1878 *entdeckt* daß die Kardinalität des Kontinuums von der Dimension unabhängig ist und daß, insbesondere, das Einheitsintervall $\mathcal{I} = [0,1]$ mit dem Einheitsquadrat $Q = [0,1]^2$ äquivalent ist ([1]). Es gibt also eine ein-eindeutige Abbildung von \mathcal{I} auf Q . Die Frage erhob sich: Gibt es eine stetige ein-eindeutige Abbildung von \mathcal{I} auf Q ? Eugen Netto zeigte in 1979 daß dies nicht möglich ist: Jede ein-eindeutige Abbildung von einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit auf eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist unstetig falls $m \neq n$ ([2]). Eine surjektive Abbildung von \mathcal{I} auf Q ist aber wegen Cantors Resultat gesichert. Dies war die Situation die G. Peano in 1890 vorfand als er eine stetige surjektive Abbildung von \mathcal{I} auf Q *entdeckte*: Die erste raum-füllende Kurve! ([3]). Peanos Abbildung war natürlich nicht ein-eindeutig. Ein Jahr später entdeckte David Hilbert eine einfachere raum-füllende Kurve und einen sehr anschaulichen geometrischen Erzeugungsprozess für Kurven dieser Art ([4], siehe auch [5]). Es sei hervorgehoben daß Hilberts Erzeugungsprozess von Cantors Resultat der Äquivalenz von \mathcal{I} und Q abhängt. Wir wollen uns mit raum-füllenden Kurven (oder Peano-Kurven wie sie oft genannt werden) beschäftigen die von Cantors Resultat nicht abhängen, Kurven die auf Henri Lebesgues surjektive Abbildungen der Cantorsche Menge auf das Quadrat, den n -dimensionalen Einheitswürfel $[0,1]^n$ und sogar den N_0 -dimensionalen Einheitswürfel $[0,1]^{N_0}$ beruhen.

Lebesgue *entdeckte* in 1904 die folgende surjektive Abbildung der Cantorsche Menge

$$\Gamma = \{ (0_{\frac{1}{3}}(2t_1))(2t_2)(2t_3)\dots \mid t_j = 0 \text{ oder } 1 \}$$

auf Q :

$$f(0_{\frac{1}{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = \begin{pmatrix} 0_2 t_1 t_3 t_5 \dots \\ 0_2 t_2 t_4 t_6 \dots \end{pmatrix}$$

die leicht auf n Dimensionen verallgemeinert werden kann:

$$f(0_{\frac{1}{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = \begin{pmatrix} 0_2 t_1 t_{n+1} t_{2n+1} t_{3n+1} \dots \\ 0_2 t_2 t_{n+2} t_{2n+2} t_{3n+2} \dots \\ 0_2 t_3 t_{n+3} t_{2n+3} t_{3n+3} \dots \\ \vdots \\ 0_2 t_n t_{2n} t_{3n} t_{4n} \dots \end{pmatrix} \quad (1)$$

([6]). Es ist leicht zu sehen daß diese Abbildung surjektiv ist: Sei

$$P = \begin{pmatrix} 0_2 \xi_{11} \xi_{12} \xi_{13} \xi_{14} \dots \\ 0_2 \xi_{21} \xi_{22} \xi_{23} \xi_{24} \dots \\ 0_2 \xi_{31} \xi_{32} \xi_{33} \xi_{34} \dots \\ \vdots \\ 0_2 \xi_{n1} \xi_{n2} \xi_{n3} \xi_{n4} \dots \end{pmatrix}$$

ein Punkt in $[0,1]^n$. Dann ist

$$f(0_{\frac{1}{3}}(2\xi_{11})(2\xi_{21})(2\xi_{31})\dots(2\xi_{n1})(2\xi_{12})(2\xi_{22})(2\xi_{32})\dots(2\xi_{n2})(2\xi_{13})(2\xi_{23})(2\xi_{33})\dots(2\xi_{n3})\dots) = P.$$

Schließlich *entdeckte* Lebesgue in 1905 eine surjektive Abbildung von Γ auf den N_0 -dimensionalen Einheitswürfel ([7]):

$$g(0_{\frac{1}{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = \begin{pmatrix} 0_2 t_1 t_3 t_5 t_7 \dots \\ 0_2 t_2 t_4 t_6 t_8 \dots \\ 0_2 t_4 t_{12} t_{20} t_{28} \dots \\ 0_2 t_8 t_{24} t_{40} t_{56} \dots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2)$$

Wir können die ν -te Komponente ψ_ν von g folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} & \psi_{\nu}(0_{\frac{1}{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = \\ & = 0_{\frac{1}{2}} t_{\nu-1} \frac{t}{2^{(2 \cdot 1 - 1)}} \frac{t}{2^{\nu-1(2 \cdot 2 - 1)}} \frac{t}{2^{\nu-1(2 \cdot 3 - 1)}} \dots \frac{t}{2^{\nu-1(2 \cdot k - 1)}} \dots \quad (3) \end{aligned}$$

Ein beliebiger Punkt in $[0,1]^{N_0}$ habe die Koordinaten

$$0_{\frac{1}{2}} \xi_{\nu 1} \xi_{\nu 2} \xi_{\nu 3} \dots \xi_{\nu k} \dots, \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Wir können

$$\xi_{\nu k} = t_{\nu-1} \frac{t}{2^{\nu-1(2 \cdot k - 1)}}$$

eindeutig für t_1, t_2, t_3, \dots lösen und sehen daß die Abbildung (2) von \mathcal{S} auf $[0,1]^{N_0}$ tatsächlich surjektiv ist.

In beiden Fällen ergänzte Lebesgue die Definition der Abbildungen f und g von Γ auf das ganze Intervall \mathcal{S} durch lineare Interpolation und erhielt stetige surjektive Abbildungen von \mathcal{S} auf $[0,1]^n$ und $[0,1]^{N_0}$, n -dimensionale und N_0 -dimensionale raum-füllende Kurven.

I.J. Schoenberg entdeckte in 1938 für den n -dimensionalen Fall und Kiyoshi Iséki in 1946 für den N_0 -dimensionalen Fall andere Interpolationen für die Lebesgueschen Abbildungen (1) und (2) ([8], [9]). Beide gaben ihr Resultat an und bewiesen *a posteriori* daß es die gewünschten Eigenschaften hat. Wir werden versuchen den Denkprozess zu rekonstruieren der die beiden Autoren zu ihren Resultaten führte.

Ausgehend von (1), schreiben wir die ν -te Komponente φ_{ν} von f wie folgt:

$$\varphi_{\nu}(0_{\frac{1}{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{n(k-1)+\nu} / 2^k \quad (4)$$

Können wir die Zähler in obiger Formel durch stetige Funktionen ersetzen die für $t \in \Gamma$ die gewünschten Werte annehmen und geeignet beschränkt sind sodaß die von (4) erhaltene Reihe gleichmäßig konvergiert und die Werte von φ_{ν} zwischen 0 und 1 liegen, haben wir das Ziel erreicht.

Wir bemerken daß

$$0 \leq 0_{\frac{1}{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots \leq 1/3 \text{ für } t_1 = 0$$

$$2/3 \leq 0_{\frac{1}{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots \leq 1 \text{ für } t_1 = 1$$

Wählen wir also eine stetige Funktion p für die $p(t) = 0$ für $0 \leq t \leq 1/3$ und $p(t) = 1$ für $2/3 \leq t \leq 1$, dann ist

$$p(0_{\frac{1}{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = t_1.$$

Wir können die m -te Ternärstelle auf den ersten Platz rücken indem wir $t = 0_{\frac{1}{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots$ mit 3^{m-1} multiplizieren

$$3^{m-1}t = ((2t_1)(2t_2)\dots(2t_{m-1}))_{\frac{1}{3}}(2t_m)(2t_{m+1})(2t_{m+2})\dots$$

und wir können den geraden ganzzahligen Teil in $p(((2t_1)(2t_2)\dots(2t_{m-1}))_{\frac{1}{3}}(2t_m)(2t_{m+1})(2t_{m+2})\dots)$ ignorieren falls wir verlangen daß p eine 2-periodische Funktion ist. Um eine lange Geschichte kurz zu machen, ergänzen wir die Definition von p wie wir in untenstehender Abbildung angedeutet haben. Dann ist

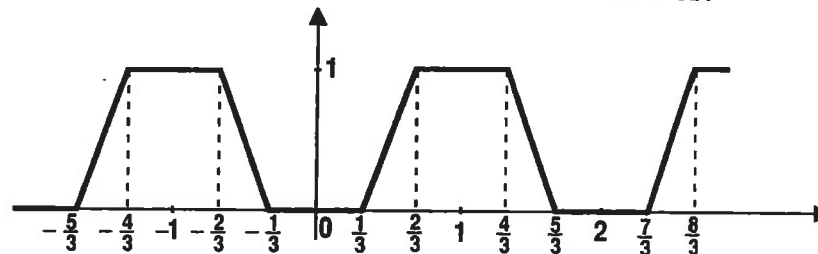


Abbildung: Die erzeugende Funktion p

$$p(3^{m-1} 0_{\frac{1}{3}}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = t_m \quad (5)$$

und

$$\varphi_{\nu}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p(3^{n(k-1)+\nu-1}t) / 2^k, \nu = 1, 2, 3, \dots, n$$

sind die Komponenten einer n -dimensionalen raum-füllenden Kurve, der n -dimensionalen Schoenberg-Kurve. Die Einführung der erzeugenden Funktion p , die bei Schoenberg und Iséki gleichsam als *deus ex machina* fungiert, stellt uns vor ein philosophisches Dilemma: p ist eine stetige Funktion und wurde sie als solche unter allen stetigen

Funktionen entdeckt, oder wurde sie als Werkzeug zur Erzeugung der Schoenberg-Kurve erfunden ?

Ausgehend von (2) gehen wir nun genau so vor wie bei der Konstruktion der Schoenberg Kurve: Wir schreiben (3) in der Form

$$\psi_\nu(0, (2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{2^{k-1}(2k-1)} / 2^k$$

und erhalten wegen (5) die Komponenten der N_0 -dimensionalen Iséki Kurve:

$$\psi_\nu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p(3^{2^{\nu-1}(2k-1)-1}t) / 2^k, \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Während die Komponenten der Lebesgueschen Kurven, die ja auf dem Komplement der Cantorsche Menge durch gerade Linien dargestellt werden, fast überall differenzierbar sind, sind die Komponenten der Kurven von Schoenberg und Iséki nirgends differenzierbar ([10], [11]).

Literatur

- [1] CANTOR, G., 1878, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", *Crelle J.* 84, 242 - 254
- [2] NETTO, E., 1879, "Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", *Crelle J.* 86, 263 - 268
- [3] PEANO, G., 1890, Sur une courbe qui remplit toute une aire plane, *Mathem. Annln.*, 36, 157 - 160.
- [4] HILBERT, D., 1891, Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück, *Mathem. Annln.*, 38, 459 - 460.
- [5] SAGAN, H., 1998, Skating along the Edge of Reason, *Mathematica Japonica*, 48, No. 2, 311 - 321
- [6] LEBESGUE, H., 1904, Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives, *Gauthier-Villars, Paris*, 44 - 45.
- [7] LEBESGUE, H., 1905, Sur les Fonctions représentables analytiquement, *J. de Math.*, 6 (1), 139 - 216.
- [8] SCHOENBERG, I. J., 1938, The Peano Curve of Lebesgue, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44, 9
- [9] ISÉKI, K., 1949, Simple construction of generalized Peano curve, *J. Osaka Inst. Sci. Tech.* 1, 1 - 2.
- [10] SAGAN, H., 1992, An Elementary Proof that Schoenberg's Space-filling Curve is nowhere differentiable, *Math. Mag.* 65, 125-128.
- [11] SAGAN, H., 1998, On the Nowhere Differentiability of the Coordinate Functions of the Iseki-curve, *Math. Mag.*, 71, 296.

Die Henselschen p -adischen Zahlen: Beispiel einer Erfindung in der Mathematik?

Peter Ullrich

Westfälische Wilhelms-Universität, Mathematisches Institut,
Einsteinstraße 62, D-48149 Münster

1 Die Idee: Reihenentwicklung algebraischer Zahlen

Nach eigener Angabe beschäftigte sich Kurt Hensel (1861-1941) seit 1893 mit „der Einführung der p -adischen Zahlen“ [10, S. 473]. Im September 1897, auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Braunschweig, stellte er seine Theorie dann zum ersten Mal der mathematischen Öffentlichkeit vor in einem Vortrag „Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen“. Dessen veröffentlichte Kurzfassung beginnt mit den Worten [5, S. 83-84]:

„Die Analogie zwischen den Resultaten der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen und der der algebraischen Zahlen hat mir schon seit mehreren Jahren den Gedanken nahe gelegt, die Zerlegung der algebraischen Zahlen mit Hülfe der idealen Primfactoren durch eine einfachere Behandlungsweise zu ersetzen, welche der Entwicklung der algebraischen Functionen in Potenzreihen für die Umgebung einer beliebigen Stelle völlig entspricht.“

Einige Erläuterungen hierzu erscheinen angebracht (zu Details und genauen Zitaten siehe [13, insb. S. 165-168] und [14]):

„Die Analogie ...“, auf die Hensel verweist, wird heutzutage oft so gesehen, daß man endliche Funktionenkörper in einer Unbestimmten und endliche Zahlkörper beides als Spezialfälle der Situation auffaßt, daß man es mit dem Quotientenkörper eines Dedekind-Ringes zu tun hat. Auch wenn der Namenspatron Richard Dedekind (1831-1916) dreißig Jahre älter war als Hensel, so muß man hierbei jedoch zugestehen, daß diese Sichtweise erst seit den entsprechenden Arbeiten von Emmy Noether (1882-1935) aus den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts angebracht ist.

Schon zu Hensels Zeit war allerdings bekannt, daß sich die Ringe der ganzen Elemente in beiden Fällen entsprechend verhalten, daß etwa in ihnen der Satz über Existenz und Eindeutigkeit der Primidealfaktorisierung gilt, wobei den Primzahlen p auf der Seite der Zahlkörper die Linearfaktoren in der Unbestimmten auf der Seite der Funktionenkörper entsprechen. Die Standardreferenz hierfür ist der Artikel [1] von Dedekind und Heinrich Weber (1842-1913) aus dem Jahre 1880, aber auch Hensels Doktorvater Leopold Kronecker (1823-1891) und Karl Weierstraß (1815-1897), bei dem er Vorlesungen gehört hatte, wiesen in ihren Veranstaltungen auf diese Analogie hin - und zwar bereits vor 1880.

Insbesondere hatte Weierstraß in seinen Vorlesungen über die „Theorie der Abelschen Functionen“ mit analytischen Mitteln einen Beweis der Primfaktorisation für algebraische Funktionen gegeben, und hierauf mochte Hensel sich beziehen, als er davon redete, „die Zerlegung der algebraischen Zahlen mit Hilfe der idealen Primfactoren durch eine einfachere Behandlungsweise zu ersetzen, welche der Entwicklung der algebraischen Functionen in Potenzreihen für die Umgebung einer beliebigen Stelle völlig entspricht“. Der Begriff „Potenzreihe“ ist hierbei etwas weiter zu fassen als heute üblich, nämlich unter Einschluß von Laurent-Reihen und Puiseux-Reihen.

Hensel kombinierte also die ihm bekannte Analogie des Zahlkörper- und des Funktionkörperfalls mit der Methode der Reihenentwicklung aus der Funktionentheorie zu der Idee, algebraische Zahlen als „Potenzreihen“ in einer gegebenen Primzahl p zu schreiben.

Wohlgemerkt, solche Reihen waren zuvor noch nirgendwo aufgetreten. Zwar gab es „ p -adisches Denken“ schon vor Hensel, nämlich bei Ernst Eduard Kummer (1810–1893) – und Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823–1852) –. Und Kummer war der Lehrer von Hensels akademischem Lehrer Kronecker, der diesen auch in direkten Kontakt zu Kummer brachte. Allerdings rechnete Kummer immer nur modulo einer geeignet hohen Potenz der Primzahl p , arbeitete also sozusagen nur mit den endlichen Partialsummen der p -adischen Reihe. André Weil (1906–1998) urteilte dazu als Herausgeber von Kummers Werken [11, Bd. 1, S. 6–7]:

„Of course he [= Kummer] never introduced the concept of p -adic fields; the credit for this goes to his pupil, or rather his pupil's pupil Hensel. Perhaps this concept could only occur to someone like Hensel, who had also been Weierstrass's pupil and who was familiar, not only with Cantor's definition of the real numbers, but with the ideas of Dedekind and Weber on the analogies between number-fields and function-fields.“

2 Die Ausführung: Konstruktion der p -adischen Zahlen

Hensel verließ sich auf diese Analogie, als er daran ging, algebraische Zahlen als Potenzreihen in einer gegebenen Primzahl p darzustellen. In welchem Sinne – und ob überhaupt – diese Reihen konvergieren sollten, dazu äußerte er sich zunächst nicht, weder in seinem Vortrag aus dem Jahre 1897 [5], wo er die Ergebnisse über die Reihendarstellung nur angab, noch in dem Artikel „Ueber die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen“ [6] mit den ausgeführten Beweisen, den er im Juni 1900 abschloß: Hensel erhielt die Reihenentwicklung einer algebraischen Zahl α , indem er, Kummers Ideen fortsetzend, modulo sämtlicher Potenzen p^N , $N \in \mathbb{N}$, der Primzahl p rechnete, so die Partialsummen gewann durch die Bedingung $\alpha \equiv \sum_{\nu=m}^{Nd} a_\nu p^{\nu/d} \pmod{p^N}$ und diese dann zu einer Reihe als

rein formalem Objekt zusammenfaßte. Die Darstellung $\alpha = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu p^{\nu/d}$ bedeutete dabei nichts anderes, als daß die obigen Kongruenz für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt.

In zwei Arbeiten [7], [8], die 1904 und 1905 erschienen, wagte Hensel dann den Sprung von der p -adischen Entwicklung algebraischer Zahlen zu den eigentlichen p -adischen Zahlen: Statt nur diejenigen Reihen zu betrachten, die auf die oben beschriebene Art aus

algebraischen Zahlen gewonnen werden, untersuchte er jetzt generell Reihen des Typs $\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu p^{\nu/d}$.

Im ersten der beiden Artikel, [7], beschränkte er sich dabei auf den Fall, daß $d = 1$ ist und die Koeffizienten a_ν Zahlen von 0 bis $p - 1$ sind; er konstruierte also – modern bezeichnet – die p -adische Komplettierung \mathbb{Q}_p der rationalen Zahlen. Diese Bezeichnung ist allerdings ahistorisch: Zwar führte Hensel durchaus die p -adische Bewertung für die von ihm betrachteten Zahlen ein [7, S. 61], der abstrakte Bewertungsbegriff findet sich jedoch erst 1912 bei Josef Kürschák (1864–1933) [12], der „zu diesen Untersuchungen durch Herrn K. Hensels Schöpfung, die Theorie der p -adischen Zahlen, angeregt“ worden war [12, S. 289].

Im zweiten der Artikel, [8], untersuchte Hensel dann die allgemeinen Reihen, bei denen gebrochene Exponenten ν/d von p und Koeffizienten a_ν auftreten, wie sie bei der p -adischen Entwicklung algebraischer Zahlen notwendig sind; modern und eben wieder ahistorisch gesagt, studierte er also die Theorie der endlichen Erweiterungen von \mathbb{Q}_p . Bemerkenswert ist dabei, daß der Titel dieses 1905 erschienenen Artikels gleich lautet wie der seines Vortrags im Jahre 1897, nämlich „Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen“. Offenbar sah Hensel erst jetzt, nach über sieben Jahren, das neue „Denkwerkzeug“, das er damals vorgestellt hatte, als hinreichend entwickelt an.

Daß er im Laufe dieser Entwicklung eine neue Art von Zahlen oder zumindest doch Zahlendarstellungen eingeführt hatte, irritierte Hensel dabei anscheinend recht wenig, wie man dem folgenden, die Arbeit von 1904 einleitenden, Passus entnimmt [7, S. 51]:

„In der Arithmetik sind die positiven ganzen Zahlen und nur sie durch die Natur gegeben; die Null, die negativen, die gebrochenen, die irrationalen und die imaginären Zahlen sind Symbole, welche man hinzugenommen hat, um in dem erweiterten Gebiete alle Rechnungsoperationen ausführen zu können. In welcher Weise man diese neu eingeführten Symbole bezeichnet, ist gleichgültig. Ich möchte in den folgenden Betrachtungen eine von der gewöhnlichen verschiedene Darstellung dieser Zahlen einführen und zugleich die aus ihr folgenden neuen Prinzipien der Arithmetik zur Begründung einer neuen Theorie der algebraischen Zahlen benutzen. Ich bemerke dabei aber, daß man auf diesem Wege auch Mittel für die arithmetische Untersuchung der transzendenten Zahlen erhält...; denn die vorliegenden Untersuchungen ergeben zum ersten Male eine notwendige Bedingung dafür, daß eine vorgelegte Zahl algebraisch und nicht transzendent ist, und zwar stimmt dieselbe wörtlich mit dem *Cauchy-Puiseuxschen* Kriterium für die algebraischen Funktionen einer Variablen überein.“

3 Das Lokal-Global-Prinzip: eine weitere Erfindung?

Das „*Cauchy-Puiseuxsche* Kriterium“ besagt dabei: Eine Funktion auf der Zahlenkugel ist genau dann algebraisch, wenn sich ihr Werteverlauf um jeden Punkt der Zahlenkugel durch (i.a. mehrere) Puiseux-Reihen mit endlichem Hauptteil beschreiben läßt. Hensel brachte mit dem letzten Teil des obigen Zitats somit die Idee ins Spiel, die p -adische Entwicklung für Algebraizitäts- bzw. Transzendenzfragen zu verwenden. In einem Vortrag, den er am 26. September 1905 auf der Jahresversammlung der deutschen Naturforscher und Ärzte in Meran hielt, führte er diesen Gedanken genauer aus [9, S. 545–546]:

Zunächst erinnerte er wieder an die Analogie zwischen Funktionen- und Zahlkörpern und an die Methode der Reihenentwicklung im Falle der Funktionen. Dann bemerkte er, daß man anhand dieser Reihenentwicklungen die rationalen, die algebraischen und die transzendenten Funktionen charakterisieren kann. Hensel fuhr dann fort [9, S. 545–546]:

„Viel weniger einfach liegen die Verhältnisse bis jetzt bei der Untersuchung der Zahlen. Auch für sie besteht, wie für die Funktionen, die Einteilung in die rationalen, die algebraischen und die transzendenten Zahlen... Dagegen erfordert die Entscheidung, ob eine vorgelegte Zahl a algebraisch oder ob sie transzendent ist, schwierige Untersuchungen und die Anwendung individueller Methoden für jedes einzelne Problem...; jedenfalls ist man augenblicklich in der Arithmetik weit entfernt von einem Kriterium von solcher Einfachheit und Allgemeinheit, wie der in der Funktionentheorie geltende Satz: Eine eindeutige Funktion ist dann und nur dann transzendent, wenn sie mindestens eine wesentlich singuläre Stelle hat.

Der Grund, warum die Untersuchung der Zahlen so außerordentlich viel schwieriger ist, als die der Funktionen, scheint mir nun ausschließlich der zu sein, daß wir für die Zahlen nur eine einzige Darstellung kennen, nämlich die in der Form eines Dezimalbruches... In der Funktionentheorie dagegen gibt es für die Umgebung einer jeden Stelle ein neues Funktionenelement, und die einfachsten Eigenschaften aller jener Elemente zusammengenommen gewähren uns einen vollen Einblick in die analytische Natur der Funktion... wollen wir umgekehrt diese transzendenten Zahlen ähnlich einfach behandeln, wie die transzendenten Funktionen, so müssen wir versuchen, statt der einzigen Darstellung durch einen Dezimalbruch unendlich viele andere zu finden, von denen jede einzelne uns einen neuen Aufschluß über das Verhältnis jener Zahl zu einer bestimmten ganzen Zahl gewährt.“

Hensel meinte hier also, man solle auch zahlentheoretische Problemstellungen so angehen, daß man die lokalen, p -adischen Reihenentwicklungen von Zahlen studiert, um globale Aussagen über die Zahlen selbst zu treffen. Damit formulierte er zum ersten Mal ein Lokal-Global-Prinzip für die Zahlentheorie, bemerkenswerterweise, ohne ein korrektes Beispiel angeben zu können: Sein sich an dieses Zitat anschließender Versuch, die Transzendenz von e mit p -adischen Methoden zu beweisen [9, S. 552–558], auch [10], scheiterte nämlich.

Von einer „Entdeckung“ des Lokal-Global-Prinzips durch Hensel kann also kaum die Rede sein. Üblicherweise wird auch Hensels Doktorand Helmut Hasse (1898–1979) als der „Entdecker“ dieses Prinzips bezeichnet, wobei dieser aber angibt [3], [4, Bd. 1, S. VIII–IX], Hensel habe ihm dieses „suggeriert“ [4, Bd. 1, S. VIII]:

Hensel hatte Hasse im Jahre 1920 die Aufgabe gestellt, zu untersuchen, wann sich eine rationale Zahl r durch eine gegebene quadratische Form $q(x_1, \dots, x_n)$ darstellen läßt. Es war Hasse bereits gelungen, äquivalente Bedingungen hierfür anzugeben, wobei er sich orientierte an einem Ergebnis von Adrien-Marie Legendre (1752–1833) über ternäre quadratische Formen, also solche in drei Veränderlichen. Sein Resultat schien sich jedoch nicht in die p -adische Sichtweise einzufügen, so daß er sich veranlaßt sah, Hensel deswegen zu schreiben. Dieser antwortete per Postkarte, qualifizierte Hasses Ergebnisse als „recht interessant“ und äußerte sich dann zu dem „ p -adischen Aspekt“ wie folgt [3, S. 4], [4, Bd. 1, S. IX]:

„Ich habe immer die Idee, daß da eine ganz bestimmte Frage zu Grunde liegt. Wenn ich von einer analytischen Funktion weiß, daß sie an allen Stellen rationalen

Charakter [d.h., eine Laurent-Entwicklung mit endlichem Hauptteil] hat, so ist sie rational. Wenn ich bei einer Zahl dasselbe weiß, daß sie für den Bereich jeder Primzahl p und für p_∞ [d.h., bezüglich der archimedischen Bewertung] p -adisch ist, so weiß ich noch nicht, ob sie eine rationale Zahl ist. Wie wäre das zu ergänzen?“

Hasses Reaktion hierauf sei in dessen eigenen Worten wiedergegeben [3, S. 4], [4, Bd. 1, S. IX] (Kursivsatz wie in [3, S. 4]):

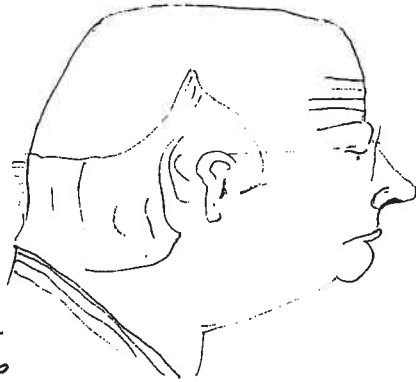
„Es war die Frage am Schluß dieser Mitteilung, die mir die Augen geöffnet hat: Die Bedingungen des Lagrangeschen [lies: Legendreschen] Satzes ließen sich ja dahingehend formulieren, daß die ternäre Form für jede Primstelle p eine nicht-triviale p -adische Nulldarstellung zuläßt! Und der Satz selbst besagt, daß sie dann auch eine nicht-triviale rationale Nulldarstellung zuläßt.“

Hasse formulierte daraufhin sein Ergebnis um zum heute so genannten „Satz von Hasse-Minkowski“: Die Gleichung $q(x_1, \dots, x_n) = r$ besitzt genau dann eine Lösung über dem Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen, wenn sie eine Lösung über jeder Vervollständigung von \mathbb{Q} besitzt, d.h., über den reellen Zahlen – der archimedischen Vervollständigung von \mathbb{Q} – und über dem p -adischen Körper \mathbb{Q}_p für jede Primzahl p [2, S. 130–131 bzw. S. 4–5, Fundamentalsatz].

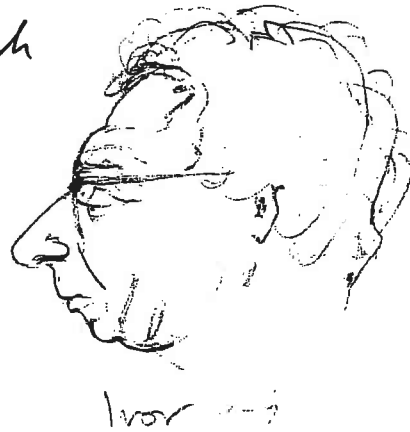
Literatur

- [1] Richard Dedekind und Heinrich Weber: Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. *J. Reine Angew. Math.* **92** (1882), 181–290.
- [2] Helmut Hasse: Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen. *J. Reine Angew. Math.* **152** (1923), 129–148; auch in [4, Bd. 1, S. 3–22].
- [3] —: Kurt Hensels entscheidender Anstoß zur Entdeckung des Lokal-Global-Prinzips. *J. Reine Angew. Math.* **209** (1962), 3–4.
- [4] —: *Mathematische Abhandlungen*, hrsg. v. Heinrich Wolfgang Leopoldt und Peter Roquette, 3 Bde. Walter de Gruyter: Berlin, New York 1975.
- [5] Kurt Hensel: Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **6** (1897), 83–88.
- [6] —: Ueber die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen, *Math. Ann.* **55** (1902), 301–336.
- [7] —: Neue Grundlagen der Arithmetik. *J. Reine Angew. Math.* **127** (1904), 51–84.
- [8] —: Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. *J. Reine Angew. Math.* **128** (1905), 1–32.
- [9] —: Über die arithmetischen Eigenschaften der algebraischen und transzendenten Zahlen. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **14** (1905), 545–558.
- [10] —: Über die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **16** (1907), I: 299–319, II: 388–393, III: 473–496.

- [11] Ernst Eduard Kummer: *Collected Papers*, hrsg. v. André Weil, 2 Bde. Springer: Berlin et al. 1975.
- [12] Josef Kürschák: Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie. In *Proceedings of the fifth international congress of mathematicians (Cambridge, 22-28 August 1912)*, hrsg. v. E. W. Hobson und A. E. H. Love, 2 Bde. At the University Press: Cambridge 1913, Bd. 1, S. 285-289.
- [13] Peter Ullrich: The genesis of Hensel's p -adic numbers. In *Charlemagne and his Heritage: 1200 Years of Civilization and Science in Europe, Vol. 2: Mathematical Arts*, hrsg. v. P. L. Butzer, H. Th. Jongen und W. Oberschelp, 163-178. Brepols: Turnhout 1998.
- [14] —: *Die Entdeckung der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern: der Ursprung der „Dedekind-Ringe“*. Manuskript Münster 1997.



P. Ullrich



Historical notes on the relations between mathematics and the Christianities

I. GRATTAN-GUINNESS
Middlesex University at Enfield, Middlesex EN3 4SF, England

1. Christianity in mathematics

An important factor common to mathematics and Christianity since the rise of the latter is their apparent statuses as *sources for certain knowledge*: Euclid an authority like the Bible, and so on. However, a substantial difference concerns the status of proof and argument: mathematics was extolled for its finesse (in Euclid, for example) while a religion was held *without* recourse to proof. The loss of certainty, or failure to establish it, in both areas shows some similarities; the invoking of metamathematics to study mathematics in a specific way has some parallel with theology trying to fill the vacuum caused by loss of faith.

Until the 18th century many European mathematicians were believing Christians of some persuasion, and sometimes belief played a role in theorising; but especially in the later decades such adhesions reduced considerably. An important figure in this tendency was J.L. Lagrange (1736-1813), especially in mechanics. Two cases are worth noting. Firstly, the principle of least action was expounded in the middle of the 18th century, especially by Pierre Maupertuis (1698-1759) and Leonhard Euler (1707-1783); and Maupertuis asserted, as a 'metaphysical' principle, that God was the guarantee of the principle — a "proof" of both its truth and its generality, as it were. Lagrange later took the principle as a mainstay of his algebraised mechanics, giving it higher status than had Euler; but he made no use of theology to guarantee generality (Pulte 1989).

Secondly, the basic path of a planet P was determined from Newton's laws by the central force from the Sun, but the perturbations off it caused by the forces coming from other planets could be large enough to send P either elsewhere in the ecliptic or give it a quite different inclination. (The accidental nearby passage of a comet might produce similar effects.) Thus the stability of the planetary could *not* be proved. For Newton this possibility was quite satisfactory: God would arrive to restore equilibrium should danger attend P, and hence God exists. Catholic Euler sees to have held a similar stance, maybe even doubting that instability could occur at all. But Lagrange hoped to *prove* that stability ensued from Newton's laws together with the assumption that the planets moved in the same direction around the Sun. Drawing upon Euler's own innovation in celestial mechanics to express perturbation in an infinite trigonometric series, he changed independent variables and thereby reduced the stability problem for P to a form that, in terms of the spectral matrix theory which this work helped to create in the first place, requires to show that all the latent roots of the matrix associated with the coefficients of the expansion for P were real, and that their attached latent roots were real. He formulated this method for a collection of mass-points in general; P.S. Laplace (1749-1827) adapted it more specifically for the planetary system (Grattan-Guinness 1990, ch. 6).

In their lifetimes both Lagrange and Laplace were held to be atheists. Had T.H. Huxley's word 'agnostic' then been available, it would probably have been more apposite, but certainly the secularisation of mathematics and science was a strong drive, and it continued in the new century.

However, in the 19th century Christianity sometimes played some role in theorising, especially in foundational theories. George Boole (1815-1864) was partly guided by his religious stance in forming his contributions to logic. An ecumenist, he rarely mentioned religion in his writings; however, in his *The laws of thought* he analysed passages from the writings of Samuel Clarke and Baruch Spinoza that surely did *not* just happen to deal with properties of the one and only God (Boole 1854, ch. 13). Again, in his final paragraph he saw the 'juster conceptions of the unity, the vital connexion, and the subordination to a moral purpose, of the different parts of Truth, among those who [...] profess an intellectual allegiance to the Father of Lights' (p. 424), this phrase a code term for his kind of Dissension to refer to the unifying Godhead. In the late 1850s he became a profound admirer of Frederick Denison Maurice, who was dismissed from his post as professor of Divinity at King's College London for advocating such a brand of Christianity instead of party-line Trinitarianism; he even had Maurice's portrait placed by his death-bed (Grattan-Guinness 1982). However, after his death only his widow advocated this aspect of his logic.

Georg Cantor (1845-1918) was the principal creator of set theory, including the doctrine of the completed infinite. He became aware, and indeed deeply informed about, predecessors who had affirmed the 'actual infinite', often in a Christian context. Especially drawn to Giordano Bruno and (like Boole) to Spinoza, his metaphysical framework included a central Christian component (Bandmann 1992). He saw his theory of the infinites as explicating and clarifying Christian doctrines of infinitude, and thereby informing believers (or those capable of understanding his theory). The audience for this aspect of his theory increased after 1879, when Pope Leo XIII issued an encyclical requiring Catholics to pay much more attention to the development of science, and various philosophers and theologians of that persuasion corresponded with him.

Cantor was also aware of a third kind of infinitude, the 'absolute infinite' of the supposedly greatest cardinal number C , from which two paradoxes follow ($C=C$ but also $C>C$; and $C>2C$ but also $C\leq 2C$). For him 'Cantor's paradox' (as Bertrand Russell will call the latter in the 1900s) was no problem, or at least the solution to it was evident; for this kind of infinitude 'thus appears to me in a certain sense as an appropriate symbol of the Absolute', and if Man played with it, so much the worse for him. Similarly, the greatest ordinal number had to be eschewed.

In all these cases a religious stance is playing a cognitive role in mathematical theories. In some other cases belief is present even if not cognitively operative. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) was an exceptional case: the mathematician, royalist and Catholic were united to an astounding degree, especially during the period of the Bourbon revolution (1816-1830) when he produced an astounding mass of major work, the equivalent of about 12 volumes in his collected works: truths in heaven and truths in applied mathematics; order

in society and order in mathematics, to which he consciously brought new standards of rigour and even pioneered the systematic numbering of formulae in papers and books. He also chastised his colleagues in the *Académie des Sciences* for studying natural history and biology, which lay in God's province. After the fall of the Bourbons in 1830 he followed the royal family into exile; and upon his return to Paris in 1838 he participated in organisations concerned with Catholic education, and refused to take oaths to the ruling regime (Belhoste 1991, esp. chs. 8-11).

Despite the increased secularisation of society, the history of the place in science of Christianity, and religions in general, is fairly well recognised. But in mathematics it is much less acknowledged; and the converse influence, from mathematics to Christianity, has gained even less attention. To it we now turn.

2. Mathematics in Christianity

A hypothesis adopted here, not confined to Christianity or to mathematics, is that ancient religious texts contained *important figurative or metaphorical elements*, and were then so understood; but such passages have been misinterpreted by later adherents as making *literal* claims. The thesis has been greatly strengthened for Christianity by some of the texts from Biblical times that have been discovered and deciphered in recent decades (the Dead Sea Scrolls and the Nag Hammadi collection); for they explicitly use a method that is not mentioned in Biblical texts, or else has been excised at some stage. The key word, in Hebrew, is 'peshet', which translates as 'interpretation of dreams'; it appears in the Bible in its own right (for example, Genesis 40:5, Ecclesiastes 8:1). An appropriate verse of text was supplemented by a peshet explaining the events or person involved, or the intention of the analogy or metaphor stated (Thiering 1992, ch. 8); thus they contain some of the secrets that theology seeks.

Concerning influence from mathematics, the most relevant branches are taken to be arithmetic (including numerology and gematria, and the use of digit strings), music, geometry, trigonometry and mechanics, together with astronomy and the measurement of time; with *very close interactions occurred in antiquity*. Important also is semiotics, the theory of relationships between signs and their referents, and the possibility of *multiply* interpreting a (mathematical) sign. Usually the mathematics is very elementary to modern eyes, or exists at the level of maybe intuitive thinking rather than formal(ish) theory; but it should not be derided, for all topics back then were in early stages, and the cultural impact could have been very considerable.

There have been two main streams of Christian faith, commonly known as 'Orthodox' and 'Apocryphal' (the latter referring not only to the addenda so named to the Old Testament); I use these adjectives, but without affirming or denying either connotation. The content of the Apocryphal tradition has become much clearer when in 1991 the Huntington Library made publicly available copies of the original texts of the Dead Sea Scrolls after decades of Vatican slowness over publication (Baigent and Leigh 1991). A happier history attends the Nag Hammadi texts, which were transcribed and translated much more quickly (Harrison 1988).

In both cases, especially the second, some texts are consonant with the Orthodox tradition, but several not.

Both traditions record activities of a Jewish sect with Jesus as a main figure, but major differences surround the accounts of his life and role. The three main ones are that in the Apocryphal line 1) he was born normally, not by virgin birth; 2) he was a rabbi, with Mary Magdalene as his wife; and 3) he survived the crucifixion rather than die then.

The main number in Orthodox numerology is 3: Jesus lived for 3×10 years in obscurity, apart from an address to the Pharisees in his 3×4 th year; then he ministered for 3 years a doctrine including the Trinity of God, Father and Holy Ghost prior to dying after 11×3 years in a 3some on a cross but coming back to life 3 days later and being seen 3 times. The last such occasion is very striking: for then Peter catches 153 fish (John 21:11). The number 153 was chosen for this figurative passage because it is the triangle number of 17, which was the number of Jewish sects, orders and societies at that time. Such numbers had long been extolled: indeed, 3 itself is one. A geometrical image also occurs here; for the triangle semiotically expresses the spread of the faith as a widening shape.

Another important number is 40, which is well-known in Christian numerology and earlier (Roscher 1909). The Old Testament mentions 40 years for the children of Israel eating manna (Exodus 16:35) and in the wilderness (Numbers 14:33), and of peace in Israel (Judges 3:11, 5:31) followed by disaster (13:1) and similarly for the Egyptians (Ezekiel 29:12). 40 days are involved in Moses and the tablets of the Covenant; interesting variants are the length of the Flood after 7 days and nights of rain start with the Flood (Genesis 7:4, 17 and elsewhere), and in 33 days the purification of a mother after the birth of a son after 7 days of uncleanness (Leviticus 12:1-6; $14+36=50$ days are required for a daughter).

The reasons for the popularity of 40 are not clear. One might assume it to lie in its simple ratio to 60, an eminent number since its prominent role in Babylonian and Egyptian astronomy; however, 60 is nearly absent from the Bible. Another possibility is the relationship

$$37 + 3 = 40 \quad \text{and} \quad 37 \times 3 = 111, \quad (1)$$

where 111 is also the trinity 'number' as the digit string 1-1-1. 37 is of considerable importance in Plato's metaphysical music theory (McClain 1976, 1978), which may form part of the background.

Another number of especial importance is 7, probably influenced by a Greek obsession (Roscher 1904 and other sadly forgotten works). A quite early manifestation is the North African Saint Augustine of Hippo, a Founding Father of the Church in the +4th century. His advocacy of numerical relationships became influential; for example, 12 ($=3 \times 4$) as the second 7 ($=3+4$). This property may lie behind the practise at the inauguration of a cathedral of giving three knocks at each of its four sides; note the similar placing of trios of oxen in the four compass directions (I Kings 7:25). A beneficiary is 70; its appearances include the Jews' years of captivity (Jeremiah 25:11-12) and weeks to terminate sin (Daniel 9:24), and the number of Jesus's new disciples (Luke 10:1).

By contrast, the Apocrypha advocates dualities; the literally binomial digit string 1-1 denoting Jesus and Mary Magdalene, and the corresponding number 11 and its powers. A major source for Christian conflict was whether the Blessing should be given with three fingers or with two. During the High and Late Middle Ages it was involved in the schisms between Rome and Kiev: when the Viking occupying forces chose Christianity for the faith of the Russian people, Trinitarianism was (and is) advocated with especial fervour, as one sense of the word 'orthodox'. Russian sacred paintings often depict just the heads of three Saints. Among other instances, heretic Leonardo Da Vinci made his position semiotically clear in his famous 'Last supper': the person next to Jesus seems to be a woman, her and his arms semiotically suggest an 'M', and there is no wine on the table (that is, no death by crucifixion).

The clash seems to arise in the design of cathedrals and major churches. In plan they show the shape of the orthodox cross; but in elevation one sees two towers, surely not just an attractive symmetry. The distinction of doctrine raises the question of the design and financing of these buildings, upon which reliable information is scarce; but one source seems to have been descendants of the Templarians. They had been one of the main proponents of the Crusades before the murder and torture of many of their members in Paris by the Catholics on 13 October 1307. This event is seemingly the origin of regarding 'Friday the 13th' as unlucky; maybe the day had been deliberately chosen for the stigma attached to 13 as the number of diners at the last supper.

One of the Templars' later manifestations was in Freemasonry: from the early 17th century in Scotland and then England, and after that across Europe and elsewhere, with a major role in the founding of the USA after the war of independence in the 1770s. They take their doctrines from Egyptian sources, especially the death of Hiram Abif, a pharaoh also known as 'Seqener Tao II' and linked to Biblical figures such as Joseph; apparently he was the builder of the Holy of Holies in the Temple of Solomon in the -16th century (Knight and Lomas 1997, written by two Masons who disclose the texts of some Masonic discourses).

A main Masonic symbol is the twin pillars of Boaz and Jachin (2 Chronicles 13:7, I Kings 7:21) in front of the Temple, with a semi-circular keystone over them forming a Trinity. The configuration may also have been a symbol of the sun waxing up one pillar, rising to its zenith and waning down the other one; views akin to sun-worship are prominent in Freemasonry. By contrast, the cognitive content of the Biblical Trinity of Father, Son and Holy Ghost is very hard to understand; among its consequences, Jesus is not a Christian, since such believers worship Jesus, which he did not do! Its parentage in the earlier Trinity is clearly hinted by Paul when twice he described Jesus as a 'corner stone' (Ephesians 2:20, I Peter 2:6); note also that Jesus's sect lived at Qumran, a name which means 'vault'.

A geometrical and semiotic difference between the two Christianities concerns the shapes of crosses.¹ The cross is a fertility symbol in that in a pre-Christian tradition vertical lines were male and horizontal ones female, and you can work out the rest for yourself. Now the orthodox cross '†' shows the dominance of male over female; but the Apocryphal tradition shows the equal-armed cross '✚', representing sexual equality — a semiotic distinction of great importance, which however seems to be largely unnoticed today. The latter shape continued in Apocrypha, coming to be connected with the Rosicrucian movement as the Rosy Cross, the Circular rose enclosing that cross: '⊕', but sometimes '⊙' using the ✕-shaped cross (a feature missed in Yates's important book 1972, on the movement, even though it appears in two of her figures!). Both orientations were also adopted by the Templars and their colleagues the Knights of Malta (§2.2), the latter with two corners on each arm giving the eight-point 'Maltese' cross. Nevertheless, all those movements, especially Freemasonry, were male sexist; contradictions are not confined to Orthodoxy.

Various other crosses have been shown in Christianity. An interesting one, of early origin, is the semiotic version based upon the superposition of the first letters 'chi' and 'rho' of 'christos' as the sign 'Ⲙ'; in semiotic style this sign also doubled as 'pax' in Latin (and since the 16th century has left a residue in the English word 'Xmas'). It was often accompanied to left and right by the letters 'α' and 'ω', the metaphor attributed 3 times to Jesus as 'alpha and omega, the beginning and the ending' (Revelation 1:8, 21:6 and 22:13) though maybe of pre-Christian Hebrew origin.

A related example occurs in letter-squares. Here are two cases of a 5x5 square; the second is not well-known.

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

S	A	T	A	N
A	D	A	M	A
T	A	B	A	T
A	M	A	D	A
N	A	T	A	S

Seemingly of Orthodoxedly Christian inspiration, the first one uses 8 letters. The two instances of 'TENET' form an equal-armed cross; in addition, 'ATO' on two edges and 'OTA' on the other two are presumably acronyms of 'alpha/omega tenus omega/alpha', with 'tenus' meaning both 'up to' and 'down to'.² The text sort-of means 'the planter turns the motion of the heavens with his plough', but it served mainly as an anagram: leave 'N' in the centre, and around it arrange both as a horizontal row and as a vertical column

¹ For reasons of space I set aside the question of historicity of the crucifixion, which is extremely complicated; great doubt can be cast upon the Biblical accounts of the entire episode. See also the next fount.

² The 'T' may also be semiotic in symbolising the shape of the cross upon which the crucifixion took place. Discussion of the shape used cannot be discussed succinctly here, and there is *no* Biblical authority on the matter.

A P A T E R N O S T E R O.

Again there is an equal-armed cross and 'alpha' and 'omega', now enclosing 'our father'; further, the 13 letters of each line symbolises the disciples surrounding Jesus, who is represented by 'N', the 13th letter of the Latin alphabet

In the second letter-square, of Templarian origin, 7 letters are used. The array of 12 'A's forms the equal-armed cross surrounded by 8 stars, like the Maltese cross; it serves also as an heraldic device. The central letters 'A' and 'B' may reflect the alphabet, not in its Greek letters but the Hebrew 'Alef bet', which meant 'learn wisdom'. The six non-central consonants as underlined above including both 'T's, serve as the acronym for the phrase 'Solomonis Templum Novum Dominorum Militiae Templariorum' (Endres 1951, 52-56).³ These two cases exemplify several of the features of studying mathematics in Christianity: arithmetic and geometry with semiotics, and historical information from Templarian sources.

Bibliography

This paper draws upon two of my own in preparation, where many more details, examples and references can be found: 'Christianity active in Western mathematics: some examples and issues' and 'Manifestations of mathematics in and around the Christianities: some examples and issues'. The list here includes relevant items marked '*', some of which are not well known and (for reasons of space) are not cited in the text.

- Baigent, M. and Leigh, R. *The Dead Sea Scrolls deception* (1991, London: Cape). [Somewhat polemical account of an indeed regrettable episode.]
- Bandmann, F. *Die Unendlichkeit des Seins. Cantors transfiniten Mengenlehre und ihre metaphysischen Wurzeln* (1992, Frankfurt am Main: Lang).
- Belhoste, B. *Augustin-Louis Cauchy. A biography* (1991, New York: Springer).
- Boole, G. *An investigation of the laws of thought* (1854, London: Walton and Maberley). Repr. 1958, New York: Dover.
- Dornseiff, F. *Das Alphabet in Mystik und Magie*, 1st ed. (1922, Leipzig: Teubner; 2nd ed. 1925). [Good introduction to gematria.]*
- Drosnin, M. *The Bible code* (1997, London: Weidenfeld and Nicholson). [Startling but corroborated predictions from the Hebrew Bible, which therefore must be ignored by rationalists.]*
- Endres, F.C. *Mystik und Magie der Zahlen*, 3rd. ed. (1951, Basel: Rascher).
- Ferrer Benimeli, J.A. *Masoneria, iglesia e ilustración. Un conflicto ideológico-político-religioso*, 4 vols. (1976-1977, Madrid: Seminario Cisnerós).*
- Grattan-Guinness, I. 'Psychology in the foundations of logic and mathematics: the cases of Boole, Cantor and Brouwer', *History and philosophy of logic*, 3 (1982), 33-53. Also in *Psicoanalisi e storia della scienza* (1983, Florence: Olschki), 93-121.

³ Endres prefers a much more complicated Templarian interpretation of the first square, which I suspect may have been put forward later as an alternative.

- Grattan-Guinness, I. *Convolutions in French mathematics, 1800-1840. From the calculus and mechanics to mathematical analysis and mathematical physics*, 3 vols. (1990, Basel: Birkhäuser; Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften).
- Hancock, G. *Heaven's mirror* (1998, London: Michael Joseph). [Important conjectures on the possible ancient awareness of precession, and its numerological consequences.]*
- Robinson, J.M. *The Nag Hammadi library in English*, 3rd ed. (1988, San Francisco: Harper and Row).
- Hopper, V.F. *Medieval number symbolism. Its sources, meaning, and influence on thought and expression* (1938, New York: Columbia University Press; repr. 1969, New York: Cooper Square). [Major source.]*
- Høyrup, J. 'Mathematics, algebra and geometry', in the *Anchor Bible dictionary*, vol. 4 (1992, New York: Doubleday), 602-612.*
- James, J. *The contractors of Chartres*, 2 vols. (1978, 1981, London: Croom Helm). [Important analysis of a major cathedral.]*
- Knight, C. and Lomas, R. *The Hiram key. Pharaohs, Freemasons and the discovery of the secret scroll of Jesus* (1997, London: Arrow).
- Lund, J.L.M. *Ad quadratum. A study of the geometric bases of classic and medieval religious architecture*, 2 vols. (1921, 1928, London: Batsford).*
- McClain, E.G. *The myth of invariance* (1976, York Beach, Maine: Nicolas-Hays). [Important analyses of Platonic numbers in terms of musical intervals in this and the next book.]
- McClain, E.G. *The Pythagorean Plato* (1978, York Beach, Maine: Nicolas-Hays).
- McClain, E.G. *Meditations through the Quran* (1981, York Beach, Maine: Nicolas-Hays).*
- Pennick, N. *Sacred geometry. Symbolism and purpose in religious structures* (1980, Wellingborough: Turnstone).*
- Pulte, H. *Das Prinzip der kleinsten Wirkung und die Kraftkonzeptionen der rationalen Mechanik* (1989, Stuttgart: Steiner).
- Purce, J. *The mystical spiral* (1974, London: Thames and Hudson).*
- Roscher, W.H. 'Die Sieben- und Neunzahl im Kultus und Mythos', *Abh. Königl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, philol.-hist. Kl.*, 24, no. 1 (1904), 126 pp. [See other articles in 21, no. 4 (1903), 94 pp.; 24, no. 6 (1906), 240 pp.; 26, no. 1 (1907), 170 pp.; and 28, no. 5 (1911), 155 pp.]
- Roscher, W.H. 'Die Zahl 40 im Glauben, Brauch und Schrifttum der Semiten', *Abh. Königl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, philol.-hist. Kl.*, 27 (1909), 93-138.
- Schneider, M. *El origen musical de los animales simbolos en la mitología y la escultura antiguas* (1946, Barcelona: Instituto Español de Musicología).*
- Seidenberg, A. 'The ritual origin of counting', *Archive for history of exact sciences*, 2 (1962), 1-40.*
- Seidenberg, A. 'The ritual origin of geometry', *Archive for history of exact sciences*, 1 (1962), 488-527.*
- Thiering, B. *Jesus the man* (1992, London: Doubleday). [A very important revision of tradition.]
- Yates, F. *The Rosicrucian Enlightenment* (1972, London: Routledge).

Modelle zum Linearkontinuum in der Geschichte der Mathematik

DETLEF LAUGWITZ, Darmstadt

Die heute fast selbstverständliche Identifikation des Linearkontinuums mit der Menge der reellen Zahlen ist ein Produkt der von Dedekind und Cantor ab etwa 1870 entwickelten Mengendenkweise. Reelle („reale“) Zahlen spielten zuvor schon jahrhundertlang eine wichtige Rolle (in der Form von Dezimalzahlen etwa) als zweckmäßige Parameter in der Naturwissenschaft, der Geometrie etc. Sie waren nützliche Erfindungen. Das Linearkontinuum selbst betrachten wir als anschaulich gegeben, als weder erfunden noch entdeckt. Hat man das Werkzeug der reellen Zahlen erst einmal erfunden, so lassen sich an ihm auch Entdeckungen machen: e ist transzendent; die Menge \mathbb{R} ist nicht abzählbar; die sogenannte „Kontinuumshypothese“ ist eine Vermutung über die Menge \mathbb{R} oder $2^{\mathbb{N}}$, nicht über das anschaulich gegebene Linearkontinuum.

Diese zeit- und anwendungsbedingte Rolle von \mathbb{R} wird durch Betrachtung anderer Vorstellungen deutlich.

In Übereinstimmung mit der Philosophie des Kontinuums bei Aristoteles (die primär von der Physik handelt) ist bei Euklid die Gerade nicht identisch mit einer Menge von Punkten. Sie ist geometrischer Ort für mögliche Punkte, welche durch zulässige Konstruktionen erzeugt werden. Dazu gehört eine Größenlehre. Größen sind linear geordnet, und Eudoxos redet nicht von der Menge aller möglichen Größenverhältnisse. Er trifft eine pragmatische Vereinbarung darüber, wann zwei Größenverhältnisse als gleich zu betrachten sind: Wenn sie sich beim Vergleich mit Verhältnissen ganzer Zahlen nicht unterscheiden lassen.

Auf die Diskussion der Kontingenzwinkel, die bis ins 17. Jahrhundert anhielt, soll hier nicht weiter eingegangen werden. Die Addition eines solchen Winkels zu einem beliebigen ändert letzteren zwar als geometrische Figur, aber nach der Festsetzung des Eudoxos macht das für die Maßverhältnisse nichts aus. In späterer Sprache sind Maßzahlen stets (positiv) reell. Das gibt ihnen einen besonderen Realitätsbezug.

Die erste umfassende neuere Philosophie des Kontinuums gibt Leibniz, mathematisch im Zusammenhang mit dem Differentialkalkül. Die unendlich kleinen Differentiale sind Erfindungen, Fiktionen, aber sie sind wohl fundiert im Realen. Ebenso sind die imaginären Ausdrücke Erfindungen, aber sie sind nützlich für den Kalkül, ja manchmal kann man reelle Lösungen (z. B. kubischer Gleichungen) nur mit ihrer Hilfe darstellen. Für die imaginären Ausdrücke oder für die Differentiale hat man feste Regeln für den Kalkül, und damit kann man Entdeckungen machen, in der Geometrie, in der Mechanik. Wenn Leibniz die Ruhe als unendlich kleine Bewegung auffassen will, so scheint es, daß das Unendlichkleine wenigstens als Fiktion in seinem Linearkontinuum Platz hat. Das Kontinuum ist für ihn ohnehin etwas Ideales, wie es auch die Infinitesimalien sind.

Aber philosophische Kontemplationen genügen nicht, die Sache hat ja eine praktische Bedeutung für Geometrie und Physik, und dieser wird man erst dadurch gerecht, daß man

Funktionen betrachtet, stetige Abhängigkeiten (im allgemeinen qualitativ) verschiedener Kontinua. Das Kontinuitätsprinzip in seiner hier wichtigsten Fassung besagt: Unendlich kleine Änderungen der Daten bewirken nur unendlich kleine Änderungen der Resultate. Man braucht nicht zu beweisen (auch Euler braucht das noch nicht), daß reelle Polynome dritten Grades eine reelle Nullstelle besitzen. Noch Gauß verwendet das, und Entsprechendes für beliebige algebraische Kurven, ohne daß er einen Beweis für erforderlich hält.

Bei Euler dominiert die Tendenz zu einer algebraischen Auffassung der Infinitesimalrechnung. Das (geometrische) Kontinuum tritt in der Analysis nicht in Erscheinung. Mit infinitesimalen und infiniten Zahlen wird umgegangen wie mit reellen, entsprechend dem Leibnizschen Prinzip, daß die Regeln des Endlichen im Unendlichen weitergelten. Bei Lagrange ist die Tendenz zur Algebraisierung noch stärker. Er will aber das Unendlichkleine aus der Mathematik verbannen, benutzt es jedoch heuristisch in der Mechanik.

Bei Bolzano und Cauchy kann man, z. B. in ihren Beweisen des Zwischenwertsatzes, Anfänge beobachten sowohl zu einer Arithmetisierung des Kontinuums als auch zu begrifflichen Fassungen z. B. der Stetigkeit. Doch finden sich bei beiden z. T. recht präzise Auffassungen zum Unendlichkleinen. Dazu später mehr.

Die algebraische Analysis, die sich auf Euler und Lagrange berief, wurde bald unfruchtbar. Cauchy ist der Exponent einer Auffassung, die wie Leibniz die stetige Variable als Grundbegriff nimmt, und Cauchy betrachtet die Integration auch nicht mehr als Antiderivation, sondern beweist die Integrierbarkeit stetiger Funktionen, indem er das bestimmte Integral als Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Größen auffaßt. In seinen Lehrbüchern wird nur von stetigen Funktionen geredet, und anscheinend sind sogar nur glatte Funktionen im Blickfeld. Dirichlet und Riemann bereiten einen Übergang vor. Riemanns Arbeit über die trigonometrischen Reihen, die so gar nicht zu seinen anderen Werken paßt, zeigt die Tücken des von Leibniz und Cauchy benutzten Stetigkeitsbegriffs. Dedekind bemängelt 1872, daß die stetige Veränderliche nie wirklich definiert worden sei. Mit der jetzt einsetzenden Arithmetisierung des Linearkontinuums wird dieses atomisiert. Zugleich wird das Infinitesimale eliminiert.

Anfang des 20. Jahrhunderts drücken Brouwer und Weyl ihr Mißbehagen über die Entfernung vom anschaulichen Linearkontinuum aus, stehen aber durchaus auf mengentheoretischem Boden. Brouwer sah als eines seiner wichtigsten Ergebnisse an, daß er beweisen konnte: Jede voll definierte Funktion ist stetig. Daraus folgt, daß man aus dem Kontinuum kein Teilstück herausreißen kann, denn dessen charakteristische Funktion wäre ja unstetig. Das Kontinuum hängt untrennbar zusammen. Aber die mengentheoretische reelle Analysis sorgte für so viele Arbeitsplätze, daß störende Außenseiter wenig Zuspruch fanden.

Ende der fünfziger Jahre kam das Infinitesimale erneut in Blickfeld, und die neuen Überlegungen öffneten uns die Augen für den Sinn historischer Entwicklungen, indem Modelle fürs Linearkontinuum inklusive passender Funktionsbegriffe erfunden wurden.

Der erste Ansatz kam von C. Schmieden und wurde 1958 publiziert. Identifiziert man zwei Folgen (rationaler oder reeller Zahlen) genau dann, wenn sie für fast alle Indizes

übereinstimmen, so erhält man die neuen Zahlen. Die Folge der natürlichen Zahlen selbst definiert eine unendlich große Zahl Ω . Entsprechend ist $\omega = 1/\Omega$ unendlich klein.

Als erster Beitrag zur Geschichte stellte sich 1965 heraus, daß gerade publizierte Überlegungen von Bolzano aus der Zeit nach 1830 damit verständlich interpretiert werden konnten. Bolzano war offenbar mit seiner Begründung der Vollständigkeitseigenschaft beim Beweis des Zwischenwertsatzes (1817) nicht zufrieden gewesen. Er untersuchte nun unendliche Zahlenausdrücke, z. B. Zahlenreihen ohne Rücksicht auf Konvergenz, und sonderte unter ihnen die „meßbaren“ Ausdrücke aus, welche – grob gesprochen – unendlich nahe bei reellen Zahlen sind.

Das ist ein konstruktiver Zugang, und heute ist klar, daß das Ziel des Beweises der Vollständigkeit so nicht erreichbar war.

Robinson publizierte seinen ersten Aufsatz über Nonstandard-Analysis 1961, und im Anfang zu seinem Buch von 1966 findet sich eine Darstellung zur Rolle der Infinitesimalien bei Cauchy. Letztere konnte dann einfacher auch mit dem Schmiedenschen Ansatz behandelt werden. In Übereinstimmung mit Cauchys Definitionen sind die unendlich kleinen Zahlen genau durch die Nullfolgen gegeben. Wir konnten nun auch erklären, warum Cauchys Begriffe zu seiner Zeit kaum Anklang finden konnten. Wenn eine Infinitesimalie α einmal als Variable mit Grenzwert 0 aufgefaßt wird, dann aber doch damit wie mit einer festen Zahl umgegangen wird, so war das schwer verständlich. Aber jetzt ist α ein festes Element eines neuen Zahlbereichs, und so hat man dieses Problem nicht. Das Abstraktionsniveau, auf welchem Cauchy verständlich wird, wurde von der Mathematik erst im frühen zwanzigsten Jahrhundert erreicht (abstrakte Räume). Angeblich falsche Sätze Cauchys können nun als korrekt begründet nachgewiesen werden.

Robinsons Erfindung seiner Nonstandard-Analysis gelang aus der Modelltheorie heraus. Luxemburg bemerkte sofort – und das war eine Entdeckung –, daß man dasselbe erreicht mit Mitteln der axiomatischen Mengenlehre ZFC, mit den reduzierten Ultraprodukten. Der Ansatz von 1958 benutzte, so formuliert, naive Mengenlehre und reduzierte Produkte. Damit war er näher an den Abstraktionsniveaus des 19. Jahrhunderts. Für neue mathematische Entwicklungen ist er aber neben den Modellen der Nonstandard-Analysis nicht konkurrenzfähig.

Alle Modelle leisten eine Neubegründung des Leibnizschen Kalküls. Das gilt auch für Eulers algebraische Analysis. Sie läßt sich besonders durchsichtig darstellen, wenn man die Methode von 1958 etwas abwandelt.

Man adjungiert (in einem sehr allgemeinen Sinne) ein neues Element Ω zu den reellen Zahlen und setzt fest: Eine Aussage $A(\Omega)$ ist genau dann gültig, wenn die Aussagen $A(n)$ für fast alle natürlichen Zahlen n zutreffen. (Damit folgt z. B. $\Omega > n_0$ für jede feste natürliche Zahl n_0 .) Dabei ist $A(\cdot)$ eine Aussageform. Hier schleicht sich Eulers analytischer Ausdruck in abgewandelter Form wieder ein! Das tut er sogar auch beim Funktionsbegriff. Man kann ja nicht etwa über jedem beliebigen angeordneten Körper Analysis treiben, versuchen Sie z. B. die Exponentialfunktion zu erklären! Aber hier geht das. Seien ξ, η

durch die Folgen x_n, y_n gegeben. Dann ist $\eta = \exp \xi$ genau dann wenn für fast alle n gilt $y_n = \exp x_n$. Und dann kann man alles wie üblich beweisen. Ganz entsprechend kann man eine spezielle Funktionenklasse aus Folgen reeller Funktionen erhalten: $\eta = \varphi(\xi)$ genau dann wenn $y_n = f_n(x_n)$ für fast alle n . Mit diesen „internen“ Funktionen gelang es, Deltafunktionen und ihre Verwendung in der Fourieranalysis bei Cauchy und seinen Zeitgenossen zu verstehen. Zuvor waren diese Arbeiten unbeachtet geblieben oder, wie in der Enzyklopädie, ganz mißdeutet worden.

Versuche zum Linearkontinuum, welche nicht zugleich einen brauchbaren Funktionsbegriff mit erfinden, sind zum Scheitern verurteilt. Das zeigt das Beispiel von Veronese (1890), der zwar auch ein Element ∞_1 in einem allgemeineren Sinne adjungierte, aber mit den Funktionen nicht weit genug kam. Trotz einiger Ansätze von Levi-Civita dazu (1893/98) blieb die Sache in den Grundlagen der Geometrie stecken.

Wie es scheint, kann jedes Abstraktionsniveau neue Erfindungen zum Kontinuum beisteuern, und der vorläufig letzte Ansatz, die Smooth Infinitesimal Analysis, geht von Kategorien- und Topos-Theorie aus (s. Bell 1998). Hier wird Brouwers Satz von der Stetigkeit aller voll definierten Funktionen als Postulat genommen. Dann ist die Funktion $f(0) = 1, f(x) = 0$ sonst, unzulässig, und das impliziert sofort den Verzicht auf das Tertium non datur. Man kann ja nicht sagen, daß $a = 0$ oder $a \neq 0$ stets gelten muß. Die Theorie führt auf (nilpotente!) Infinitesimalien. Solche will man bei L'Hospital sehen. Während alle vorher erwähnten Erfindungen genauso wie \mathbb{R} das Linearkontinuum als aus (immer dichter liegenden) Punkten zusammengesetzt erscheinen lassen, ist das hier nicht mehr so. Man kann kein Stück aus dem Kontinuum entfernen, schon gar nicht einen Punkt.

In den Modellen zur Nichtstandard-Analyse braucht man auf unstetige Funktionen nicht zu verzichten. Man kann z. B. eine Sprungfunktion beschreiben als eine interne Funktion, welche innerhalb der unendlich kleinen Umgebung der Sprungstelle stetig verläuft.

Der Satz von Brouwer läßt sich übrigens durchaus in Cauchys Begriffen formulieren und beweisen. Bezeichnet man als Cauchy-Kontinuum die Gesamtheit der durch Cauchy-Folgen erhaltenen Zahlen (im Sinne von 1958), so ist eine voll definierte reelle Funktion $f(x)$ stetig, wenn sie das Cauchy-Kontinuum in sich abbildet. Das ist eine Übungsaufgabe für Erstsemester.

Dieses Cauchy-Kontinuum hat eine anschauliche Eigenschaft: Es ist von unendlich kleiner positiver Dicke, eine Vorstellung, die man in der Geschichte oft belegt findet.

Als Fazit bleibt: Das Linearkontinuum gab Anlaß zu vielfältigen Erfindungen (Fiktionen), mit und an denen Entdeckungen (von Fakten) möglich waren.

Literatur mit Bezügen zur Mathematikgeschichte

- C. Schmieden und D. Laugwitz Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. Math. Zeitschr. 69, 1-39 (1958).
- A. Robinson Non-standard Analysis. Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam, ser. A, 64, 432-440 (1961).
- W. A. J. Luxemburg Nonstandard Analysis. Lecture Notes, Pasadena 1962.
- D. Laugwitz Bemerkungen zu Bolzanos Größenlehre. Archive for History of Exact Sciences 2, 398-409 (1965).
- A. Robinson Non-standard Analysis (1966; 3rd ed. Princeton University Press 1996).
- D. Laugwitz Zahlen und Kontinuum - Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik. Mannheim 1986.
- D. Laugwitz Definite Values of Infinite Sums: Aspects of the Foundations of Infinitesimal Analysis around 1820. Archive for History of Exact Sciences 39, 195-145 (1989).
- D. Laugwitz Mathematische Modelle zum Kontinuum und zur Kontinuität. Philosophia naturalis, 34, 265-313 (1997).
- J. L. Bell A Primer of Infinitesimal Analysis. Cambridge University Press 1998.

Erfundene Entdeckungen oder entdeckte Erfindungen?

Fallbeispiel Topologie

Birgit Spalt

„Columbus hat America erfunden.

Grünland ist im j. Chr. 982 erfunden.“

Franck, Sebast. Weltbuch: spielel vnd bildtnisz
des gantzen erdtbodens ... in vier bücher.

Tübingen 1534; 2. Drucke 1542.

Johann Benedikt Listings (1808-1882) erste Niederschrift zur Topologie
(Nachlaß 27 - aus einem Briefe an Herrn Müller, Catania 1836, April 1.)

„Der Gegenstand der Doctrin (der Topologie) kommt in der Praxis, im täglichen gemeinen Leben immerwährend vor, der unzähligen Fälle nicht zu gedenken, wo er in der Mathematik und den Naturwissenschaften eine Rolle spielt. An seine theoretische Bearbeitung hat Leibnitz wahrscheinlich zum erstenmal gedacht, aber nur gedacht, und seit ihm ist sogut als gar nichts dafür geschehen. Das Feld mochte zu weit, die Schwierigkeiten zu gross, die Sprache für die Begriffe zu mangelhaft scheinen. Die erste Idee, mich in der Sache zu versuchen, ist mir durch mancherlei Vorkommnisse bei den pract. Arbeiten in der Sternwarte zu Göttingen und durch hingeworfene Aeusserungen von Gauss beigegeben. Leibnitz wollte die Wissenschaft Geometria situs nennen und damit die Lehre von dem Zusammenhang und den Gesetzen der gegenseitigen Lage irgendwelcher (mathem. oder physischer) Körper im Raume abgesehen von den der Geometrie angehörigen Grössenverhältnissen bezeichnen. Da aber „Geometrie“ schicklicher Weise nicht einen

Zweig des Wissens bedeuten sollte, in welchem Mass und Grösse etwas Unwesentliches seyn soll, da man bereits eine sogenannte géometrie de position zu einer legitimen Wissenschaft erhoben hat, welcher einmal eingeführte Namen der Sache bewahrt bleiben muss und gleichwohl von jenem der geometria situs dem Wort nach nicht verschieden ist, und da insonderheit jener Name noch nicht recipiert ist, weil die Sache so gut wie nicht dagewesen, so bediene ich mich für jene Doctrin der, wie mir scheint, schicklichen Benennung ‚Topologie‘.

(...)

Eine (provisorische) Definition der Topologie wäre etwa: ‚die Lehre von den qualitativen Gesetzen der Ortsverhältnisse‘.

(...)

Es ist zu bemerken, dass die Lehre von den Eigenschaften und der Natur des Raumes, die man vielleicht hinter dem Namen der Topologie suchen möchte, als zur Metaphysik gehörig, ganz ausgeschlossen bleibt.

(...)

Die Anwendbarkeit nicht bloss auf andere Wissenschaften sondern auch auf die Technik, die Künste (zumal die gymnastischen: Tanzen, Reiten, Fechten, Turnen, Schwimmen) auf die Taktik & c. und auf das tägliche Leben überhaupt, erheischt, so oft, wie es fast bei jedem Schritte der Fall ist, die Sprache hinter dem Begriff zurückbleibt, die Einführung neuer nicht nur wissenschaftlicher, sondern häufig auch gemeinverständlicher und somit dem Genius der Sprache zusagender Ausdrücke. Für wissenschaftliche, exacte Namen habe ich die Absicht, dass die lateinische oder griechische Sprache geeigneter sei als die deutsche, zumal wenn die Concision sich mit einem deutschen Gewande, deutscher Endung vereinbaren lässt. Für die ins pract.

Leben einzuführenden neuen Benennungen werd' ich so viel wie möglich aus dem genuinen Wortvorrathe der deutschen Muttersprache zu schöpfen versuchen, wobei ich freilich des Rathes derer nicht selten bedürfen werde, welche Sprachkenntnisse zu ihrem Beruf gemacht haben. Dieses Element, so gering es anfänglich an Bedeutung scheinen mag, ist die Quelle nicht unerheblicher Schwierigkeiten. Die gebildeteren Sprachen und namentlich unsere deutsche sind reich an topologischen Bezeichnungen, aber nachtheilig ist, dass dieselben meist einer strengen oder klaren Bedeutung ermangeln. Was heisst im gemeinen Leben rund, viereckig, lang, gleich? Ein rechteckiges Stück Zeug nennen die Damen nicht viereckig. Schwieriger ist es vagen Begriffsbezeichnungen eine beschränktere und schärfere Bedeutung zu verleihen, als gar nicht vorhandene zu schaffen.“

Ausgehend von dieser Quelle möchte ich den Versuch einer Beantwortung der Frage: Erfunden oder Entdeckt? auf mehreren Ebenen angehen:

Erfindet oder entdeckt der Historiker seinen Gegenstand, die Quellen?

Erfindet oder entdeckt der Mathematiker seinen Gegenstandsbereich?

War Listing – für sein Selbstverständnis – ein entdeckender oder erfindender Mathematiker?

Vor der Möglichkeit einer Beantwortung steht die schwierige Aufgabe einer Begriffsklärung, wobei ich nicht nur auf Erfinden und Entdecken eingehen möchte, sondern auch auf das Forschen als zielgerichtetes Suchen.

Berliner Mathematiker zur Frage "Mathematik - entdeckt oder erfunden?" am Beispiel ihrer Gutachten zu Promotionen von Frauen von 1922 bis 1945.

Annette Vogt (Berlin)

Im ersten Teil des Vortrages werden einige Probleme der Fragestellung thematisiert und vorauszusetzende Informationen für das Folgende gegeben.

Im zweiten Teil des Vortrages werden die Auffassungen der Berliner Mathematiker zur Frage "Mathematik - entdeckt oder erfunden?" vorgestellt, wie sie sich aus den Gutachten der Betreffenden rekonstruieren lassen.

Im dritten Teil werden die zusammengestellten Äußerungen aus den Gutachten vor dem Hintergrund der Mathematikentwicklung zwischen 1920 und 1945 in Deutschland und der Spezifik der Vita der Beteiligten analysiert. Zu fragen ist dabei auch, inwieweit die Aussagen verallgemeinerbar sind, ob die Auffassungen für die Jahrzehnte zwischen 1920 und 1945 typisch oder a-typisch waren.

1. Mathematik - entdeckt oder erfunden?

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, sich der Beantwortung dieser Frage zuzuwenden. Zunächst kann man in einschlägigen Fach-Lexika nachschlagen, was Kenner bzw. Spezialisten hierzu zu verschiedenen Zeiten geschrieben haben.¹ Man kann philosophische Lexika oder Enzyklopädien befragen, ob und wie sich Philosophen zu verschiedenen Zeiten dazu geäußert haben, - dies soll aber nach Vorgabe unterbleiben. Man kann schließlich in herkömmlichen Lexika nachschlagen, was unter den Termini "entdeckt" bzw. "erfunden" an Wissenswertem aufgeschrieben wurde. Schließlich

¹ Vgl. Naas, Joseph und Schmid. Mathematisches Wörterbuch. Berlin, 1984.

kann man in den originären Werken bedeutender Mathematiker nach Antworten suchen.

Von einigen Mathematikern ist bekannt, daß sie - vor allem in den Einleitungen zu größeren Arbeiten - gleichsam eine "Philosophie der Mathematik" formulierten. Unter "Philosophie der Mathematik" kann dabei der engere Begriff gemeint sein, aber auch ein umfassenderer, der Überlegungen zum Gegenstand der Mathematik, seinen Zielen und Methoden einschließt.² Aber auch ohne explizit niedergeschriebene Artikel zu hinterlassen, haben alle Mathematiker eine bestimmte Auffassung über den verwendeten Wissenschaftsbegriff, über die Wissenschaftsauffassung oder "Wissenschaftsethik", zum Methodenarsenal der eigenen Disziplin, zum Problem des Erkennens und des Erkenntnisfortschritts. Diese Auffassungen entstanden im Laufe ihrer Bildung und im Verlauf ihrer wissenschaftlichen Arbeit. Mehr oder weniger unbewußt haben sie tradierte Vorstellungen übernommen und weiter gegeben oder diese bewußt in Frage gestellt und geändert.

Zu allen Zeiten waren diese Auffassungen von den philosophischen Fragestellungen ihrer Zeit beeinflußt oder sogar initiiert. Je "philosophischer" eine Frage formuliert war, um so enger mußte die Beziehung des jeweiligen Mathematikers zur Philosophie seiner Zeit sein. Bezüglich dieser Wechselbeziehungen gab es gravierende Unterschiede zwischen Mathematikern. Während zum Beispiel Bernhard Riemann (1826-1866) fast schon als Philosoph gezählt werden könnte, traf das für seinen Konkurrenten bei der Begründung der modernen Funktionentheorie, Karl Weierstraß (1815-1897), überhaupt nicht zu.³ Riemann nannte ausdrücklich den Philosophen Friedrich Herbart, der ihn beeinflusste, demgegenüber stand Weierstraß den Ideen Immanuel Kants näher. Aber nur

² Vgl. zur "Philosophie der Mathematik" zum Beispiel: Hermann Weyl. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. 1966; Rudolf Carnap. Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaft. 1974 sowie Christian Thiel. Philosophie und Mathematik: eine Einführung. 1995.

³ Zum Vergleich von Riemann und Weierstraß vgl. Vogt, Annette. Leipzig 1984. (Dissertation)

selten, wie im Falle der Habilitationsschrift Bernhard Riemanns, wurde von einem Mathematiker ein Philosoph als wesentliche Quelle seiner Gedanken genannt.

Was ergab nun die Suche in den Lexika für die Beantwortung unserer Frage?

Zur großen Überraschung gab es im "Mathematischen Wörterbuch" von Joseph Naas und Wolfgang Schmid weder den Terminus "entdecken" noch den "erfinden", auch nicht die Termini "Entdeckung" und "Erfindung".⁴ Aber auch der neue "Brockhaus" kannte kein Entdecken, sondern nur Entdeckungsgeschichte im Sinne geschichtlicher bzw. geographischer Entdeckungen, und kein "Erfinden", sondern nur Erfindungen im technischen Sinne.⁵ Dasselbe Resultat war beim Nachschlagen in "Meyers Neues Lexikon"⁶ herausgekommen.

Bevor wir ältere Lexika befragen, soll das Ergebnis der Suche nach der Verwendung beider Termini in Titeln wissenschaftlicher Veröffentlichungen hier vorgestellt werden. In zwei Bibliotheken (des Archivs der MPG und des MPI für Wissenschaftsgeschichte, die beide mit dem Computer abrufbar sind) wurde danach gesucht, ob und wie die Termini "entdeckt" und "erfunden" als Titel wissenschaftlicher Veröffentlichungen vorkamen. Bei 26.720 Titeln (Bibliothek des Archivs) kamen neunmal "entdeckt" und einmal "erfunden" vor. Der letzte Titel betraf das 1985 von Herbert Cerutti in Zürich herausgegebene Buch "China - wo das Pulver erfunden wurde: Naturwissenschaft, Medizin und Technik in China". Alle neun Titel, in denen "entdeckt" vorkam, betrafen Veröffentlichungen über die Entdeckung chemischer (Keimdrüsenhormonderivate), physikalischer (Kernspaltung) oder astronomischer (Urknall, Röntgenpulsar, Supernova) Sachverhalte. Im zweiten Fall kamen bei 24.388 Titeln (Bibliothek des MPIWG)

⁴ Vgl. Naas, Joseph und Schmid. Mathematisches Wörterbuch. Berlin, 1984, Bd.1, S.453 und S.460.

⁵ Vgl. Brockhaus, 19. Aufl., 1992, Bd.6, S.413-415 und S.514.

⁶ Vgl. Meyers Neues Lexikon, Leipzig, 1972, Bd.4, S.281, S.338.

achtmal "entdeckt" und zweimal "erfunden" vor. Die beiden Titel, die "erfunden" enthielten, waren Veröffentlichungen von 1789 über einen "neu erfundenen Chronometer" für die genauere Messung geographischer Längen bzw. von 1842 über ein erfundenes Rohrgestänge zum Abteufen der Bohrlöcher. Bei den "Entdeckungen" ging es um einen "neu entdeckten Planeten" (Johann Elert Bode, 1784), "neu entdeckten Muschel-Marmor" (Friedrich Christian Lesser, 1752), aber auch um "Das entdeckte Geheimnis der Natur in Bau und Befruchtung der Blumen" (Christian Konrad Sprengel, 1894) und um eine Biographie mit einem "Verzeichnis neu entdeckter Paracelsus-Handschriften" (Karl Weimann, Wiesbaden, 1963). Nur einer der acht Titel betraf unsere Fragestellung: Johann Schultz veröffentlichte 1784 in Königsberg die Schrift "Entdeckte Theorie der Parallelen nebst einer Untersuchung über den Ursprung ihrer bisherigen Schwierigkeit".

Aus dieser Bibliotheksrecherche wurde ersichtlich, daß die Verwendung beider Termini in den Titeln wissenschaftlicher Veröffentlichungen eher für das 18. und 19. Jahrhundert zutrifft.

Wenden wir uns nun einem Lexikon des 19. Jahrhunderts zu. Das Lexikon "Brockhaus" erschien 1898 in der 14. Auflage. In Band 6 wurden sowohl "Entdeckung" als auch "Erfindung" ausführlich beschrieben. Im einzelnen hieß es über "Entdeckung":
 "Entdeckung, die Auffindung eines bis dahin Nichtbekannten oder der Kenntnis der Menschen wieder Entschwundenen, sei dies ein neuer Gegenstand oder eine konkrete Thatsache (Urheberschaft eines begangenen Verbrechens), oder die Deutung eines bisher nicht Verständlichen (Schlüssel zu einer Geheimschrift, **Entzifferung der Keilschrift oder der Hieroglyphen**), oder eine allgemeine Wahrheit (**Gesetz der Primzahlen**), oder ein Naturgesetz. Im Gegensatz zur E. ist *Erfindung* die Auffindung eines neuen Weges, wie durch menschliche Thätigkeit ein neuer nützlicher Gegenstand oder ein bekannter Gegenstand vorteilhafter hergestellt werden kann, oder eines neuen nützlichen Verfahrens, oder eines Mittels, ein bekanntes Verfahren vorteilhafter ins Werk zu setzen. Der Unterschied ist

von großer Bedeutung, weil Erfinderpatente nicht auf bloße E. erteilt werden, sondern nur auf Erfindungen. (S. Patent.) Auch giebt die bloße E. kein Urheberrecht (s.o.). Eine neu aufgefundene, von dem Entdecker zuerst herausgegebene alte Handschrift, eine von dem Entdecker entzifferte Lesart, ein entdeckter mathem. Lehrsatz u.s.w. können beliebig nachgedruckt werden. Das Urheberrecht kann sich hier nur erstrecken auf die dem Entdecker eigentümliche Form der Darstellung. Im übrigen s. Erfindungen und Entdeckungen."⁷

Da ausdrücklich auf die Termini "Erfindungen und Entdeckungen" verwiesen wurde, lohnte es, nachzuschlagen, was der "Brockhaus" hier aufführte:

"Erfindungen und Entdeckungen. Die Begriffe Erfindung und Entdeckung sind, obwohl sie vielfach verwechselt werden, doch wesentlich verschieden. Eine *Entdeckung* betrifft etwas zur Zeit der Entdeckung bereits Vorhandenes, das aber bisher unbekannt war, an welchem aber durch die Entdeckung nichts geändert wird. Dies kann etwas rein Materielles sein, oder etwas der Materie Innewohnendes, eine Eigenschaft derselben; so sprechen wir von der Entdeckung eines Planeten, der Entdeckung Amerikas, der Entdeckung eines Minerals, eines Bacillus, irgend eines Gegenstands der **beschreibenden Naturwissenschaften**, aber auch von der Entdeckung der Schwerkraft, des Magnetismus, der chem. Verwandtschaft u.s.w. Solche Entdeckungen werden durch Beobachtung allein oder im Verein mit Vergleichung, durch Verallgemeinerung von aufgefundenen Thatsachen, Aufstellung von Hypothesen und Theorien und demgemäß planmäßig angestellte Experimente gemacht.

Eine *Erfindung* betrifft allerdings auch immer eine Sache, die vorher dem Menschen nicht bekannt war. Aber dieselbe steht mit schon bekannten Dingen in engem Zusammenhang; sie tritt nicht als etwas *völlig* Neues in Erscheinung. Es werden an bekannten Dingen Änderungen vorgenommen, so daß man mit dem veränderten Dinge qualitativ oder quantitativ bessere Wirkungen hervorbringen kann, als mit dem bekannten. ...

⁷ Brockhaus, 1898, 14. Aufl., Bd. 6, S. 165.

Die Entdeckungen betreffen jedoch nicht nur die materielle Körperwelt, sondern auch abstrakte Dinge, allgemeine Gesetze, wissenschaftliche Wahrheiten, die als solche einen rein geistigen Besitz darstellen; auch die Erfindungen können auf dem rein intellektuellen, dem künstlerischen, dem philosophischen, dem moralischen Gebiete liegen. **Die Rechenkunst mit Hilfe von Logarithmen ist als eine Erfindung zu bezeichnen, die Logarithmen selbst stellen eine Entdeckung dar.** Mann kann von der Erfindung eines Versmaßes, eines philos. Systems, einer Staatsform u. dgl. sprechen. Indessen neigt der Sprachgebrauch dazu, als Erfindungen nur Neuerungen auf materiellem Gebiete zu bezeichnen und speziell solche, welche, zur Befriedigung materieller Bedürfnisse bestimmt, eine gewerbliche Verwertbarkeit gestatten. ... Diesen Entwicklungen gemäß kann man die Erfindung im engeren Sinn, d. h. die *gewerblich verwertbare Erfindung*, definieren ...

Erfinden ist weder als eine Kunst, noch als eine Wissenschaft zu bezeichnen; es ist eine eigentümliche geistige Fähigkeit, welche bei dem einen stärker entwickelt ist als bei andern, bei verhältnismäßig wenigen überhaupt in beträchtlichem Maße vorkommt. Wissenschaftliche Kenntnisse, besondere Vertrautheit mit den Grundlagen, auf welchen die Erfindung erstehen kann, Konzentrierung des Verstandes auf ein zu erreichendes Ziel können für sich ohne Mithilfe der angeborenen Fähigkeit kaum zu Erfindungen führen. Große Gelehrte, Forscher und Entdecker sind nur selten große Erfinder. Die erfinderische Kraft besteht eher in einer besondern Kombinationsgabe; sie ist deshalb auch nicht im ausschließlichen Besitz besonderer Stände oder Berufsklassen. ... ("kleine" und "große" Erfindungen)

In den meisten Staaten sind Maßregeln getroffen worden, welche dem Erfinder gestatten, den ihm gebührenden Lohn an Geld und Anerkennung zu ernten, und trotzdem den Segen seiner Erfindung der Allgemeinheit zukommen zu lassen. Dies wird erreicht durch Patente (s.o.), welche der Staat gegen eine mäßige Abgabe erteilt.⁸

⁸ Brockhaus, 1898, 14.Aufl., Bd.6, S.264-268, hier S.264-265.

Im Anschluß an die hier auszugsweise zitierte Beschreibung des "Entdeckens" und "Erfindens" erschien eine Tabelle wichtiger "Erfindungen und Entdeckungen", in der u.a. die Sonnenuhr und das Fernrohr, das Gravitationsgesetz und die Spinnmaschine, der Augenspiegel und der Revolver, die Spektralanalyse und das Dynamit sowie - als neueste - das Argon und Helium in der Atmosphäre (1894) und die Röntgenstrahlen (1895) aufgeführt wurden.⁹

Nach der im "Brockhaus" gegebenen Beschreibung müßten die Theorien in der Mathematik entdeckt worden sein bzw. entdeckt werden. Was dachten Mathematiker selbst im späten 19. und beginnenden 20. Jahrhundert darüber?

Nur selten haben Mathematikhistoriker (und -innen) das Glück, authentische Äußerungen von Mathematikern zu dieser - von vielen Mathematikern als philosophische Frage betrachteten - Problematik zu finden. Wenn keine authentischen Zeugnisse von Mathematikern über unsere Frage vorliegen, d.h. keine Artikel oder Briefe, wo kann man dann trotzdem und sinnvoll nach Antworten suchen? Man sucht Aussagen, die implizit Auffassungen zu der Frage enthalten bzw. enthalten können. Solche Aussagen können vielleicht in Denkschriften oder Gutachten enthalten sein.

Eine Analyse von Gutachten (zu Promotionen, Habilitationen oder auch für Projekt-Anträge) würde es dann - wenigstens partiell - ermöglichen, indirekte oder direkte Aussagen über den eigentlichen Gegenstand des Gutachtens hinaus zu gewinnen, so zum verwendeten "Wissenschaftsbegriff", zu der "Wissenschaftsauffassung" oder "Wissenschaftsethik", zum Methodenarsenal der eigenen Disziplin, zum Verständnis dessen, was eine Promotion oder Habilitation zu leisten hat, und schließlich auch zu der Frage, ob die betreffenden Mathematiker

⁹ Vgl. Brockhaus, 1898, 14.Aufl., Bd.6, S.266-267.

die Problemlösungen in der Arbeit eine Entdeckung oder eine Erfindung nannten.

Für die so zu leistende Analyse wurden exemplarisch die Mathematiker der Berliner Universität ausgesucht. Zwischen 1922 und 1945 begutachteten einige von ihnen die Promotionen von Frauen. Diese Gutachten sollen analysiert werden.

Die erste Promotion einer Frau in Mathematik erfolgte an der Berliner Universität - verglichen mit anderen¹⁰ - relativ spät. Erst 1922 promovierte Dora Prölss (1889-1943) mit einer algebraischen Arbeit bei Issai Schur (1875-1941) und Erhard Schmidt (1876-1959). Von 1922 bis 1945 promovierten im Fach Mathematik insgesamt nur neun Frauen an der Berliner Universität. Außerdem promovierten zwei Frauen, 1931 und 1932, zur Philosophie der Mathematik. (Tabelle) Zum Vergleich sei erwähnt, daß an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg sogar nur zwei Frauen (1928 Dora Wehage (*1890) und 1942 Gertrud Kotowski (*1910)) im genannten Zeitraum promovierten.¹¹

Die neun Gutachten an der Berliner Universität galt es zu analysieren. Folgende Fragen wurden bei der Analyse berücksichtigt:

1. Enthielten die Gutachten Aussagen über die Promovendin bzw. allgemein über das Problem Frauen in der Mathematik?
2. Enthielten die Gutachten Auffassungen über den Gegenstand der Mathematik?
3. Wurden Aussagen über Methoden in der Mathematik getroffen?
4. Wurde explizit formuliert, ob eine Problemlösung in der Arbeit eine Entdeckung oder eine Erfindung gewesen ist?

¹⁰ Zu den mathematischen Promotionen von Frauen in Deutschland zwischen 1895 und 1933 vgl. Tobies, Renate (1997, 1998).

¹¹ Vgl. Knobloch, Eberhard. Mathematik an der Technischen Hochschule und der Technischen Universität Berlin. 1770-1988. Verlag für Wissenschafts- und Regionalgeschichte. Dr. Michael Engel. Berlin 1998. 123 S. (hier S.83-116) Von 1928 bis 1987 promovierten insgesamt nur 11 Frauen an der TH/TU.

5. Welche Auffassungen über die mathematische Erkenntnis kann man rekonstruieren, wurden Aussagen über einen Erkenntnisfortschritt getroffen?

2. Die Analyse der Gutachten

Die Gutachten der Mathematiker zu den Promotionen von Frauen

Bei den neun Promotionen kamen Erst-Gutachter unterschiedlich vor. Von 1922 bis 1936 war der Algebraiker Issai Schur dreimal Erstgutachter, d.h. bei drei der fünf Promotionen war Schur Erstgutachter. Der Wahrscheinlichkeitstheoretiker Richard von Mises sowie der Topologe Heinz Hopf waren je einmal Erstgutachter; ein einziges Mal äußerte sich der Zweitgutachter Erhard Schmidt explizit (im Gutachten zu Erika Pannwitz). Die Philosophen Maier und Spranger sowie Dessoir und Köhler begutachteten die beiden Promotionen zur Philosophie der Mathematik, aber im Unterschied zu der einen Arbeit zur Philosophie der Physik von Ilse Schneider 1920¹² gab es hier kein Gutachten eines Mathematikers. Deshalb können beide Promotionsvorgänge bei der folgenden Analyse unberücksichtigt bleiben, da sich kein Mathematiker dazu äußerte. An der 1936 gebildeten Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät waren Bieberbach, Knothe, Klose und Erhard Schmidt je einmal Erst-Gutachter.

Bei der Untersuchung aller Promotionen von Frauen an der Philosophischen bzw. Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät war aufgefallen, daß sich die Gutachten über Frauen nicht von denen über Männer unterschieden.¹³ In den Naturwissenschaften bestand das Gutachten normalerweise aus maximal einer Seite, vom Erstgutachter geschrieben, dem der

¹² Vgl. Archiv HUB, Phil. Fak. Nr.598. Zu Ilse Schneider-Rosenthal vgl. Vogt, Annette. Vortrag JKV Berlin, 1997, Manuskript.

¹³ Zu einer ersten Analyse der Gutachten vgl. Vogt, Annette. Vortrag Humboldt-Universität zu Berlin, Mai 1997. Manuskript.

Zweitgutachter ein "einverstanden" oder Ähnliches hinzufügte. In den Geisteswissenschaften schrieben beide Gutachter ihre Auffassungen getrennt nieder. Längere Gutachten bzw. ein Gutachten auch des Zweitgutachters waren in den Naturwissenschaften die absolute Ausnahme. Diese Gutachter-Praxis ließ sich für die gesamte untersuchte Zeit zwischen 1899 und 1945 nachweisen.

Analysieren wir nun im einzelnen die Gutachten der Mathematiker.

Sowohl 1922 als auch 1924 schrieb Issai Schur das Erstgutachten, und in beiden Fällen handelte es sich um Dissertationen zu algebraischen Problemen. Im Unterschied zur normalen Praxis verfaßte Schur jeweils ein Gutachten von 2 Seiten. Es fällt auf, daß Schur - in beiden Fällen - bei der Charakterisierung der Arbeiten schrieb, daß es sich um **Aufgaben** handelte. Die Verfasserinnen hatten also eine Aufgabe gestellt bekommen. Im ersten Fall beurteilte Schur die Beweisführungen, deren "recht geschickte" (Bl.265 und Bl.265R) Handhabung er lobend hervorhob.¹⁴ Im zweiten Fall lobte er zunächst die "außerordentlich langwierigen Rechnungen", die "nützliches Material für das Weiterverfolgen" (Bl.131) ergeben hätten und betrachtete die Aufgabe als gelöst. Er bemängelte jedoch, daß die Kandidatin keine eigene neue Methode angewendet hatte (Bl.131).¹⁵

Man könnte hieraus folgern, daß Dissertationen für Issai Schur Aufgaben darstellen, die Probleme lösen müssen, und für die Lösung müssen möglichst "geschickte" Beweise und neue Methoden "gefunden" werden.

Im Fall der Promotion von Hildegard Ille geschah etwas Unübliches. Der Zweitgutachter Schmidt schlug "In Anbetracht der

¹⁴ Vgl. Schur, Gutachten zu Dora Prölss, in: Archiv HUB, Phil. Fak. Nr.612, Bl.264R-265R.

¹⁵ Vgl. Schur, Gutachten zu Ille, in: Archiv HUB, Phil. Fak. Nr.623, Bl.130R-131.

kühnen Resultate" (Bl.131) ein besseres Prädikat vor als der Erstgutachter, und Schur schloß sich dem Vorschlag von Schmidt an.

Ein wesentliches Beurteilungsmerkmal für Dissertationen bildete die Qualität der Ergebnisse oder der Resultate. Normalerweise wurde in den Gutachten immer betont, inwiefern die Ergebnisse der zu beurteilenden Arbeit die jeweilige Disziplin um Erkenntnisse bereicherten. Implizit war dabei immer die Auffassung eines kumulativ wachsenden Erkenntnis-Fortschritts zu erkennen. Bei den Gutachten zu den Dissertationen in der Mathematik fehlte in fast allen Fällen eine solche Beurteilung.

12 Jahre später, 1935, schrieb Issai Schur sein letztes Gutachten, zu einem Zeitpunkt, als er schon von der Universität relegiert worden war. Wieder formulierte er, daß die Kandidatin eine Aufgabe gestellt bekommen hatte. Wieder beurteilte er vor allem ihr Vorgehen beim Finden des Existenzbeweises. Da ihr außerdem glückte, ein im Existenzbeweis "offenbar verborgen liegendes Konstruktionsverfahren" zu finden, lobte er die Arbeit ausdrücklich.¹⁶ Er hätte auch schreiben können, daß sie das Konstruktionsverfahren entdeckt habe, da es vorhanden, aber verborgen war. Er hat aber - zu Recht - nicht geschrieben, daß sie dieses Verfahren erfunden hätte, denn es existierte ja im Verborgenen. In diesem Gutachten wurde auch - ein einziges Mal - eine spezielle Begabung betont, nämlich "eine ausgesprochen starke Begabung für kombinatorische Überlegungen" (Bl.120aR). Das Wort Begabung fehlte sonst in allen Gutachten.

Auch Richard von Mises schrieb in seinem Gutachten, daß er der Kandidatin eine Aufgabe gestellt hatte. Sie sollte Ansätze einer bereits lange existierenden Theorie (von Lanchester 1910) erweitern und Rechnungs- und Konstruktionsverfahren entwickeln.

¹⁶ Vgl. Schur, Gutachten zu Peltesso, in: Archiv HUB, Phil. Fak. Nr.812, Bl.120-120aR.

Sie hatte diese Aufgabe gelöst und praktikable Ergebnisse erzielt.¹⁷

Wiederum wurde hier als Gegenstand für eine Dissertation die Aufgabe als Problemlösung verstanden und mit der Entwicklung praktikabler Verfahren, Rechnungs- und Konstruktionsverfahren, verknüpft. Könnte in diesem Kontext von Erfindungen in der Mathematik gesprochen werden? Sicher nicht, denn von Mises schrieb, daß sie "das Rechnungs- und Konstruktionsverfahren, das sie zur Anwendung bringt, dem Problem gut angepasst und Ergebnisse erzielt, ..." hat. (Bl.213) Daraus geht hervor, daß sie kein neues Rechnungs- und Konstruktionsverfahren entdeckt hat oder - im Verborgenen liegend - fand.

In allen vier betrachteten Fällen handelte es sich um Dissertationen, die eine Aufgabe des Doktor-Vaters behandelten, und diese Aufgabe lösten. Abgesehen von unterschiedlichen Inhalten (Algebra und Mechanik) und unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad handelte es sich um den Normalfall "normaler" Dissertationen bzw. "normaler Wissenschaft" (Th. S. Kuhn). Beurteilungskriterien bildeten die Eleganz der Lösung, das Geschick bei der Beweisführung oder die geschickte Handhabung von Methoden bzw. Verfahren sowie eventuelle "kühne Resultate". Implizit wurde unterstellt, daß die Beteiligten im Gutachterverfahren einen gemeinsamen Begriff dieses "Geschicks" oder der "Eleganz" besaßen, denn sie wurden nicht erläutert.

Eine Ausnahme unter den fünf Dissertationen zwischen 1922 und 1936 bzw. unter allen neun bis 1945 bildete die Arbeit von Erika Pannwitz (1904-1975). Diese Arbeit war keine "normale" Dissertation, weder in der Fragestellung, noch in der Praxis der Gutachter. Erika Pannwitz verfaßte ihre Dissertation "Eine elementargeometrische Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten." zu dem relativ neuen Spezialgebiet Topologie. Die Arbeit erschien im renommierten Journal "Mathematische

¹⁷ Vgl. von Mises, Gutachten zu Heinicke, in: Archiv HUB, Phil. Fak. Nr.731, Bl.212R-213.

Annalen"¹⁸, beide Gutachter verfaßten außergewöhnliche Stellungnahmen und bewerteten die Arbeit mit dem nur selten vergebenen "eximium".¹⁹ Das Gutachten von Heinz Hopf umfaßte acht Seiten, und auch Erhard Schmidt als Zweitgutachter schrieb noch acht Zeilen. Heinz Hopf war im Mai 1931, als er das Gutachten verfaßte, bereits Professor an der ETH Zürich, vielleicht auch deshalb schrieb er ein so umfangreiches Votum.

Offensichtlich wegen des Neuheitsgehalts in der Arbeit von Pannwitz beschrieb Heinz Hopf in seinem Gutachten alle von ihr behandelten Sätze und Hilfssätze. Bei seiner Beurteilung der Arbeit unterschied Hopf zwischen "objektivem wissenschaftlichem Wert" und "subjektiver Leistung". Nur Heinz Hopf machte diese Unterscheidung. Der "objektive wissenschaftliche Wert" betraf die Ergebnisse der Arbeit von Pannwitz, ihre aufgestellten Sätze. Hopf ließ noch offen, inwiefern diese Sätze eine neue Theorie ergeben würden oder interessante Einzeltatsachen darstellten. (Bl.21R) Die Bewertung der subjektiven Leistung schilderte Hopf mit den Worten:

"Die Verfasserin hat also durch ganz selbständige Untersuchungen ein schwieriges konkretes Problem, das ihr gestellt wurde, vollständig gelöst; sie hat dieses Ziel durch zweckmäßige Wahl neuer Begriffe, durch verständnisvolle und tiefe Einsicht in den schwierigen, sich ihr darbietenden Stoff, durch die Beherrschung älterer Methoden und deren neuartige Verwendung erreicht und damit in dieser ihrer ersten Abhandlung ihre wissenschaftliche Reife erwiesen.

Da somit nach meinem Urteil sowohl der objektive wissenschaftliche Wert dieser Arbeit als auch die in ihr vollbrachte subjektive Leistung das Niveau guter Dissertationen übersteigen, bitte ich die Fakultät, die von Fräulein Pannwitz eingereichte Abhandlung mit dem Prädikat "e x i m i u m" als Dissertation anzunehmen."²⁰

¹⁸ Vgl. Pannwitz, Erika. In: Math. Ann., Bd.108, Heft 5, 1933, S.629-672.

¹⁹ Vgl. Promotion Erika Pannwitz, in: Archiv HUB, Phil. Fak. Nr.744/11, Bl.19-23 Gutachten.

²⁰ Gutachten Hopf, 18.5.1931, in: Archiv HUB, Phil. Fak. Nr.744/11, Bl.22R.

Im Unterschied zur gewöhnlichen Praxis, bei der der Zweitgutachter ein "Einverstanden" unter das Votum des Erstgutachters schrieb, verfaßte Erhard Schmidt ein eigenes, acht Zeilen umfassendes, Gutachten, das komplett lautete: "Ich schliesse mich dem Votum des Herrn Hopf durchaus an. Die Topologie ist eines der zukunftsreichsten aber zugleich schwierigsten Gebiete der Mathematik, weil der methodisch-technische Apparat noch so in den Anfangsgründen steckt, dass jedes wertvolle Ergebnis nur mit einem hohen Masse starker Erfindungsgabe errungen werden kann. Durch die vorliegende Arbeit ist die Topologie um eine Reihe ausserordentlich schöner Sätze bereichert worden."²¹

In beiden Gutachten sind interessante Hinweise zur Klärung unserer Frage enthalten. Zunächst scheint die Unterscheidung in einen objektiven und einen subjektiven Wert wissenschaftlicher Arbeit(en) von Bedeutung. Der objektive Wert wird durch das Vorhandensein von Elementen einer - geschlossenen - Theorie definiert. Implizit ist die Auffassung von kumulativ wachsenden Theorien hier enthalten. Der subjektive Wert wird durch die Art und Weise der Problemlösung definiert. Zum Lösen von Problemen gehören nach Heinz Hopf die zweckmäßige Wahl neuer Begriffe, die Beherrschung älterer Methoden und ihre Verwendung auf neue Weise sowie die - nicht näher definierte - "tiefe Einsicht".

Schmidt hob besonders die Bedeutung eines methodisch-technischen Apparats für mathematische Gebiete hervor. Je weniger dieser Apparat entwickelt sei, um so mehr müsse eine "Erfindungsgabe" vorhanden sein. Ist für Schmidt die Mathematik demnach wesentlich mit Prozessen des Erfindens verbunden, des Erfindens auch im Sinne des Findens mathematischer Sätze? Oder steht die Formulierung "Erfindungsgabe" mit "erfinden" in keinem Zusammenhang? Ausdrücklich verwendete Schmidt das Wort

²¹ Gutachten Schmidt, 11.6.1931, in: Archiv HUB, Phil. Fak. Nr.744/11, Bl.23.

"bereichern" für diesen Vorgang, die Theorie wurde um "schöne Sätze" bereichert. Er verwendete also nicht das Wort "entdecken".

Bieberbach ging in seinem Gutachten 1940 ähnlich wie Schur in seinen drei Gutachten davon aus, daß er der Kandidatin eine Aufgabe gestellt hatte, aber er formulierte es nicht explizit. Sie sollte einen bekannten Satz (von David Hilbert) auf ein bisher nicht behandeltes Problem übertragen. Wiederum erscheint die Dissertation als eine Aufgabe, als Problemlösung. Bei der Beschreibung der Lösung vermerkte Bieberbach ausdrücklich, daß die Kandidatin weitere Sätze gefunden habe und bescheinigte ihr eine "geometrische Erfindungsgabe" (Bl.131R).²² Ähnlich wie Schmidt 1931 ging also auch Bieberbach 1940 davon aus, daß eine "Erfindungsgabe" existieren müsse. Aber kann man daraus schließen, daß beide dasselbe meinten und davon ausgingen, daß Sätze gefunden statt entdeckt werden? Überdies ist "gefunden" das Partizip von "finden" und steht nicht unmittelbar mit "erfinden" in einem Zusammenhang. Mindestens für Schmidt ist anzunehmen, daß er der Auffassung war, daß mathematische Sätze entdeckt werden, daß sie zu finden seien, nicht zu erfinden. Inwiefern auch Bieberbach diese Auffassungen teilte, muß hier offen bleiben.

Im Gutachten von Herbert Knothe 1940 finden sich keine Bemerkungen, die implizit etwas über seine Auffassungen von der Mathematik aussagen. Er beurteilte eine Arbeit, deren Aufgabenstellung offensichtlich von Bieberbach stammte, aber Bieberbach selbst war nur Zweitgutachter. Die Verfasserin hatte in ihrer Arbeit nur die analytische Ausarbeitung des Problems durchgeführt, ohne besondere Fähigkeiten oder Begabungen erkennen zu lassen. Dies ließ keinen Raum für weitergehende Formulierungen.²³

²² Vgl. Gutachten Bieberbach, in: Archiv HUB, Math.-Nat. Fak. Nr.155, Bl.131R.

²³ Vgl. Gutachten Knothe, in: Archiv HUB, Math.-Nat. Fak. Nr.162, Bl.113/1.

Die 1942 abgeschlossene Dissertation Charlotte von Baranows (geb. 1902) bildete wiederum eine Ausnahme. Es handelte sich um eine Arbeit zur Versicherungsmathematik, die erste und einzige Dissertation an der Berliner Universität dazu bis 1945. Es handelte sich um eine Arbeit zu Anwendungen der Mathematik. Gleich drei Gutachter schrieben separate Voten, und nur der Mathematiker Klose kam von der Universität. Paul Lorenz und Moldenhauer lobten das Herangehen, die systematische Darstellung des mathematischen Apparates und das überraschende Resultat. Der Mathematiker Klose bemängelte eine Reihe Details, die aber nichts an den Ergebnissen ändern würden und nur vor der Drucklegung zu beheben wären. Bei der Anwendung mathematischer Verfahren, die bekannt sind, entsteht gar nicht unsere Frage, ob was entdeckt oder erfunden wird.

Auch in der letzten Dissertation, die 1945 von Erhard Schmidt begutachtet wurde, ging es wieder um die Lösung eines gestellten Problems, bei dem bekannte mathematische Sachverhalte, die für einen bestimmten Fall als richtig erkannt waren, auf einen - erweiterten - Fall übertragen werden sollten. Schmidt lobte zwar, daß die Verfasserin die Schwierigkeiten "elegant" überwunden hatte, bemängelte aber die mangelnde Anknüpfung an die vorhandene Literatur (Bl.7R).²⁴ Wieder handelte es sich um ein Stück "normaler" Dissertation im Kontext "normaler Wissenschaft" (Th. S. Kuhn), so daß der Bezug zum Prozeß des Problemlösens gerechtfertigt erscheint.

3. Entdeckt oder erfunden?

Analysiert man die hier zusammengestellten Äußerungen aus den Gutachten vor dem Hintergrund der Mathematikentwicklung zwischen 1920 und 1945 in Deutschland und der Spezifik der Vita der Beteiligten, erkennt man zweierlei.

²⁴ Vgl. Gutachten Schmidt, in: Archiv HUB, Math.-Nat. Fak. Nr.206, Bl.7R.

Erstens erscheinen die Unterschiede in den Gutachten vor und nach 1933 marginal, obwohl die NS-Zeit gravierende negative Folgen auch für die Mathematikentwicklung in Deutschland hatte.²⁵ Schur wurde von der Universität vertrieben, sein ehemaliger Kollege Bieberbach denunzierte ihn beim Ministerium. Schur gelang schließlich die rettende Flucht ins Exil nach Palästina. Die Promovendinnen Hildegard Ille (geb. 1899), verh. Rothe, und Rose Peltessohn (geb. 1913) konnten emigrieren, Rothe in die USA und Peltessohn nach Palästina, aber beiden war eine Karriere als Mathematikerin verwehrt. Erika Pannwitz konnte trotz herausragender Dissertation in Nazi-Deutschland keine Universitäts-Karriere gelingen. Sie hatte auf einem Gebiet promoviert, das die Nazis entartet nannten, ihr Doktor-Vater war in der Schweiz, ihr Chef beim Referate-Journal "Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" Bieberbach deklarierte sich als "Führer" der Mathematik in Berlin. Der Bruch 1933 berührte alle diese Frauen existentiell.

Zwischen 1931 und 1940 fand nur die Ausnahmepromotion Rose Peltessohns statt. Von den vier Promovendinnen zwischen 1940 und 1945 gelang einer eine Anstellung im Versicherungswesen, die letzte wurde Assistentin an der Universität.

Zweitens scheinen allen Gutachten zwischen 1922 und 1945 gemeinsame Auffassungen über den Gegenstand einer Dissertation, die zu bewertenden Resultate, die Verwendung von Begriffen und Methoden, das Auftreten von Begabungen und die "Eleganz" von Lösungen zu Grunde zu liegen, obwohl die Gutachter mindestens zwei Generationen von Mathematikern angehörten.

Folgende Fragen wurden anfangs gestellt:

1. Enthielten die Gutachten Aussagen über die Promovendin bzw. allgemein über das Problem Frauen in der Mathematik?
2. Enthielten die Gutachten Auffassungen über den Gegenstand der Mathematik?
3. Wurde explizit über Methoden in der Mathematik gesprochen?

²⁵ Vgl. die Ausstellung Persecution and Expulsion of Mathematicians from Berlin between 1933 and 1945. Berlin, DMV, 1998. (Katalog).

4. Wurde explizit formuliert, ob eine Problemlösung in der Arbeit eine Entdeckung oder eine Erfindung gewesen ist?
 5. Welche Auffassungen über die mathematische Erkenntnis und welche Aussagen über einen Erkenntnisfortschritt wurden getroffen?

1. Kein einziges Gutachten ging explizit oder implizit auf die Tatsache ein, daß es sich bei der Promovendin um eine Frau handelte. Alle Gutachter verwendeten die weibliche Form, "die Kandidatin", "die Verfasserin", aber keiner verlor ein Wort über das Geschlecht der Bearbeiterin. Diese Beobachtung korrespondiert mit der Untersuchung aller Gutachten zu promovierenden Frauen. So ungewöhnlich es heute erscheinen mag, aber die Gutachten vermitteln den Eindruck, daß ein hohes Maß an Selbstverständlichkeit promovierenden Frauen gegenüber bestanden haben muß. Selbst Bieberbach, der am ehesten frauenfeindlich eingestellt war, schrieb erstens ein Gutachten und zweitens ein "vernünftiges".

2. Die Gutachten behandelten in fast allen Fällen Problemlösungen aus dem Umkreis bekannter mathematischer Gebiete (Algebra, Kombinatorik, Geometrie), so daß gar keine Notwendigkeit bestand, über den Gegenstand der Mathematik zu philosophieren. Es hätten nur in den beiden Gutachten zur Arbeit von Erika Pannwitz Gedanken über die Topologie als Gegenstand der Mathematik enthalten sein können.

3. Die verwendeten Methodiken wurden in mehreren Gutachten besprochen, auch bewertet. Zwei Aspekte fanden dabei Berücksichtigung, zum einen die Wahl geeigneter bekannter Methoden und ihre neuartige Verwendung und zum zweiten die Suche bzw. das Finden neuer Methoden. Danach konnten Methoden verwendet und angewendet, aber auch gefunden werden.

4. In allen Gutachten wurde die Dissertation als eine Arbeit beschrieben, die ein vom Doktorvater aufgestelltes Problem zu lösen hatte. Die Bewertung schätzte die Eleganz oder das Fehlen

derselben beim Problemlösungsprozeß ein. Das hier dargestellte Herangehen kann mit David Hilberts berühmtem Ausspruch "Da ist das Problem - löse es"²⁶ beschrieben werden.

5. Eine mathematische Erkenntnis ist eine Entdeckung, aber ein mathematischer Satz kann gefunden werden, man (auch Frau) benötigt eine "Erfindungsgabe" (Schmidt 1931, Bieberbach 1940). Mathematische Erkenntnis ist ein fortwährender Prozeß des Erkennens, die dabei gewonnenen Resultate bilden sukzessive, kumulativ, eine jeweils neue mathematische Theorie. Eine neue mathematische Theorie enthält frühere Theorien als Bestandteile.

Es war zu fragen, inwieweit diese Aussagen verallgemeinerbar und ob diese Auffassungen für die Jahrzehnte zwischen 1920 und 1945 typisch oder a-typisch waren. Die hier zusammengestellten Auffassungen scheinen eher typisch gewesen zu sein für die Zeit zwischen 1900 und 1945. Hilberts Ausspruch war gleichsam ein Leitfaden für ganz verschiedene Mathematiker, für Schur wie für Schmidt, für Hopf wie für Bieberbach.

Die Analyse der Gutachten zeigte zwar, daß durchaus aus Primärquellen wie diesen implizite und explizite Äußerungen zum Wissenschaftsbegriff, zum Wissenschaftsverständnis und zu Erkenntnisproblemen gewonnen werden können. Aber andererseits sind diese Quellen kritisch zu lesen und zu deuten. In den überwiegenden - Fällen, in denen Gutachten Ergebnisse "normaler Wissenschaft" beschreiben und bewerten, enthalten sie naturgemäß kaum Aussagen zur Beantwortung unserer Frage. Wenn es sich dagegen um Einschätzungen besonderer, herausragender, Leistungen handelt, können Gutachten mehr als Einschätzungen zum Lösen von Problemen widerspiegeln und durchaus tiefere Einsichten über den verwendeten Wissenschaftsbegriff und die Ethik des Faches vermitteln und zur Beantwortung unserer Frage beitragen.

²⁶ Vgl. Hilbert, David.

Drei Aspekte des mathematischen Schaffens, illustriert durch Probleme aus der Graphentheorie

Das vorgegebene Rahmenthema berührt Grundfragen der Philosophie, zu denen unterschiedliche Antworten gegeben worden sind. Hierauf will ich - der Vorgabe gemäß - nicht eingehen. Ich denke aber, wenn man "Entdecken", "Erfinden", "Finden" in ganz bestimmtem Sinne auffaßt, kann man sagen, daß im Erkennen des Mathematikers die Aspekte des Entdeckens, Erfindens und des Findens, des Auffindens nach systematischer Suche, unlösbar miteinander verknüpft sind. Schaffend bewegt er sich in seiner "Welt". Das ist eine Welt geistiger Konstrukte. In dieser Welt gibt es viele gut gesicherte und fundierte Gebäude, die axiomatisierten mathematischen Theorien - und auch etliche erst behelfsmäßig errichtete. In einigen ist er ganz zu Hause, in anderen weniger, und einige Gebäude nimmt er von weitem in ihren Umrissen wahr. Gelegentlich sieht er plötzlich in einem ihm sehr vertrauten Gebäude Dinge und Verhältnisse, die ihm so noch nicht aufgefallen waren - mag sein, er hatte seinen Standpunkt oder den Blickwinkel verändert. Und bisweilen lassen Assoziationen Beziehungen zwischen den Gebäuden deutlich hervortreten - was so erstaunlich für ihn auch wieder nicht ist, denn er weiß ja, daß all die Gebäude auf demselben festen Grunde stehen, daß sie im Urgrund seiner Zahlen und Formen verankert sind. Jedenfalls hat der Mathematiker in seiner Welt etwas Neues entdeckt. Besonders erfreut ist er, wenn das für ihn Neue auch von seinen Mathematikerkollegen noch nicht vordem gesehen wurde. Die geistige Welt des schaffenden Mathematikers darf natürlich nicht mit der realen Welt verwechselt werden, in der der Mathematiker lebt und arbeitet. Doch ist sie mit dieser eng verbunden - zum ersten durch ihren Urgrund, geschaffen durch die Fähigkeiten des Zählens, des Erkennens von Formen, des folgerichtigen Verknüpfens. Diese haben sich überlebensadäquat während der Evolution der menschlichen Art herausgebildet.

Der Mathematiker Ott-Heinrich Keller sprach davon, daß sich zwei evolutiv erworbene Fähigkeiten des Menschen, die er mit einigen Tierarten teilte, nämlich die zum intuitiven Erfassen von Ordinalzahlen (Rangordnung!) und die zum intuitiven Erfassen von Kardinalzahlen - bis zu einer gewissen (niedrigen) Ordnung - wie Kette und Schuß zur Fähigkeit des emotionslosen Zählens vereinten (Kell, 1984). Und was das adäquate Erfassen von Formen und Entfernungen betrifft, hat Simpson sicher recht, wenn er sagte: "Um es grob, aber bildhaft auszudrücken: Der Affe, der keine reale Vorstellung von dem Ast hatte, nach dem er sprang, war bald ein toter Affe und gehört also nicht zu unseren Vorfahren." (zitiert nach (Voll, 1985, S. 39)) Natürlich ist der Mathematiker nicht nur durch den Urgrund seiner geistigen Welt mit der wirklichen Welt verknüpft. Er und die gesamte Mathematikergemeinschaft sind unlösbar in ein dichtes Netz von ökonomischen, gesellschaftlichen, kulturellen Beziehungen eingebunden; in die Arbeitsteilung der Gesellschaft sind sie fest integriert. Ganze mathematische Disziplinen haben sich - verstärkt seit den vierziger Jahren dieses Jahrhunderts - in Wechselwirkung mit anderen Wissensgebieten herausgebildet, ständig stimuliert durch die Anforderungen, die die Lösung immer

komplexer werdender Probleme an die Mathematik stellte. Zunehmend interdisziplinär werden Problemlösungen gesucht und Algorithmenpakete geschnürt, die die Basis umfangreicher Software bilden. Für den Mathematiker, der in disziplinübergreifenden Kollektiven arbeitet, tritt der Aspekt des Erfindens deutlich hervor.

Dann haben wir da noch das Durchmusterung großer Zahlenmengen, das Vermutungen aus quasi empirischer Erfahrung gebiert, - denken wir etwa an das Gaußsche "planmäßige Tatonieren". Manche Probleme lassen sich durch eine vollständige Durchmusterung lösen, durch ein „mechanisches Rechnen“ eigentlich, das man getrost dem Rechner übertragen kann.

Das Zusammenspiel dieser drei Aspekte im mathematischen Schaffen wird bei Problemen und Aufgaben aus der diskreten Mathematik besonders deutlich. Einmal tritt der eine Aspekt deutlicher hervor, einmal der andere, - doch immer sind sie miteinander verknüpft. Einige graphentheoretisch-kombinatorische Probleme - auch solche mit einem breiten und bedeutenden Anwendungsfeld - lassen sich so formulieren, daß sie selbst ein mathematisch nicht besonders Vorgebildeter verstehen kann. Auch ein trivialer Lösungsalgorithmus leuchtet oft unmittelbar ein, der nur Ausdauer im Rechnen und Vergleichen zu verlangen scheint. Sollte sich vielleicht „alles“ durch Rechnen lösen lassen (vgl. (Bong, 1988, S. 20))?

Hier beginnt ein anderer Gesichtspunkt hineinzuspielen: Gerade an Hand solcher Beispiele aus der diskreten Mathematik läßt sich überzeugend klarmachen, daß die Schöpferkraft des Mathematikers unverzichtbar ist und nicht durch schnelle Rechner ersetzt werden kann. Die Idee, der schöpferische Gedanke, "die Entdeckung" in der Welt des Mathematikers, ist essentiell für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft!

Wir gehen ein auf

- das Königsberger Brückenproblem,
- die berühmte Arbeit von Kirchhoff aus dem Jahre 1847,
- das n-Arbeitskräfte-n-Jobs-Zuordnungsproblem und
- das Vierfarbenproblem.

1. Das Königsberger Brückenproblem

Anfang des 18. Jh. kursierte in der Unterhaltungsmathematik eine Aufgabe, in der ein Spazierweg über die sieben Königsberger Pregelbrücken gesucht wurde, der über jede der Brücken genau einmal führen und an seinem Anfangspunkt auch enden sollte (Abb. 1). Der Trivialalgorithmus leuchtet sofort ein: Wir schreiben jede der möglichen $7! = 5040$ Reihenfolgen der sieben Brücken auf und überprüfen, ob die an den Spazierweg gestellten Bedingungen erfüllt sind. "Diese Lösungsart könnte .. in andern Fragen, wo noch viel mehr Brücken vorhanden sind, gar nicht mehr angewendet werden." Zudem „würde vieles gefunden, wonach gar nicht gefragt war.....“, bemerkte Euler (Sachs, 1986, S. 291). Die Eulersche Lösung des Problems ist von genialer Einfachheit! Sie sprengte jedoch die mathematischen Denkmuster der

Zeit und bedurfte eines Geistes, der in der Lage war, diesen einengenden Rahmen zu verlassen.

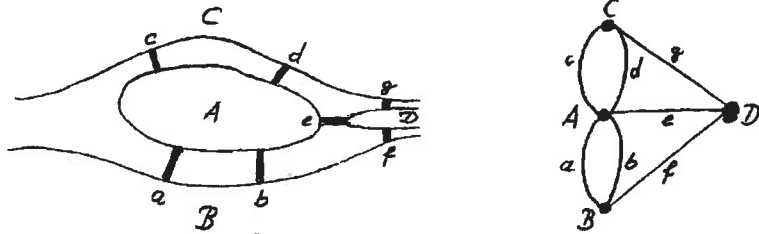


Abb. 1

Euler betrachtete das Problem aus einem nicht üblichen Blickwinkel und frei von jeder Schablone. In der in ihrer vermeintlichen Eintönigkeit in fast unangreifbarer Komplexität erscheinenden Menge von Permutationen der sieben Brücken sah er die bisher nicht erkannte Ordnung, die alles bestimmende Struktur: Die für die Aufgabe wesentlichen Beziehungen lassen sich durch einen Graphen, ein Gebilde aus Punkten und diese verbindende Linien, darstellen. Mit dieser neuen Sicht war der entscheidende Schritt vollzogen. Eulers Lösungsmethode ist dieser Struktur organisch angepaßt, - er reduzierte die Komplexität des Problems durch Ausnutzen seiner natürlichen Strukturierung. Eulers Arbeit kann im Nachhinein als ein früher Beitrag (methodisch als der erste wesentliche) in die Geschichte der Graphentheorie eingeordnet werden.

Euler betrachtete gleich den allgemeinen Fall von n Brücken; seinen Gedankengang wollen wir kurz skizzieren. Wir bezeichnen die einzelnen Stadtteile, die durch die Arme des Flusses voneinander getrennt werden, mit A, B, C, Ist n die Anzahl der Brücken, so entspricht jeder zulässigen Wanderung eine Folge von nacheinander betretenen Stadtteilen der Länge $n+1$ und somit eine Buchstabenfolge F der Länge $l(F) = n+1$.

$l(F)$ läßt sich aber - wie folgt - auf eine zweite Weise ausdrücken.

Der Stadtteil X sei durch genau $q(X)$ Brücken mit anderen Stadtteilen verbunden.

Dann gilt das folgende Lemma:

Ist $q(X) = 2r$, so kommt der Buchstabe X in der Folge F entweder $(r+1)$ -mal oder r -mal vor, je nach dem, ob der Spaziergang von X ausgeht oder nicht.

Ist $q(X) = 2r + 1$, so kommt X in F genau $(r+1)$ -mal vor.

Beweis:

1. $q(X) = 2r$:

a) F beginne nicht mit X . Dann erscheint X nur an inneren Punkten der Folge F , und mit jedem X , das in der Folge auftaucht, sind zwei Brücken verbraucht, nämlich die, über die man zum Stadtteil X gelangt ist und die, über die man ihn wieder verlassen hat. Da am Ende alle $2r$ Brücken "verbraucht" sind, erscheint X genau r -mal in F .

b) F beginne mit X , d.h. mit dem Verlassen des X am Anfang der Folge ist eine Brücke „verbraucht“, es bleiben $2r - 1 = 2(r-1)+1$. Damit erscheint X $(r-1)$ -mal im Inneren von F , und F endet mit X , - womit dann die letzte Brücke verbraucht ist. X tritt also $(r+1)$ -mal in F auf.

2. $q(X) = 2r + 1$:

Der Beweis wird durch eine ähnliche Überlegung wie unter 1. geführt.

Damit ergibt sich sofort die Lösung des Königsberger Brückenproblems:

Einerseits ist $l(F) = n+1 = 8$; andererseits folgt aus dem Lemma $l(F) = 3+2+2+2 = 9$.

Dieser Widerspruch besagt:

Es gibt keinen Spazierweg, der über jede der 7 Königsberger Pregelbrücken genau einmal führt und an den Ausgangspunkt zurückkehrt. (vgl. (Sachs, 1989, S. 626))

Euler fand weit mehr als die Lösung dieses Problems der Unterhaltungsmathematik. Unter dem „Satz von Euler“ versteht man heute in der Graphentheorie die folgende Aussage: Ein Graph läßt sich genau dann in einem geschlossenen Kantenzug (in dem jede Kante genau einmal enthalten ist) durchlaufen, wenn alle Knotenpunkte des Graphen von gerader Valenz sind (d.h. wenn von jedem Knotenpunkt des Graphen eine gerade Anzahl von Kanten ausgeht). Graphen, in denen alle Knotenpunkte von gerader Valenz sind, werden Euler-Graphen genannt.

2. Die berühmte Arbeit von Gustav Robert Kirchhoff aus dem Jahre 1847

In der Mitte des vorigen Jahrhunderts begannen sich in den Naturwissenschaften und in der Technik die Grenzen der kontinuierlichen Mathematik abzuzeichnen.

Als 21jähriger Königsberger Student hatte Kirchhoff 1845 die später nach ihm benannten Regeln für lineare Stromkreise erkannt, die "Knotenregel" und die "Maschenregel" (Abb. 2; aus (Kirch, 1847, S. 497)).

I. Wenn die Drähte k_1, k_2, \dots eine geschlossene Figur bilden, und w_k bezeichnet den Widerstand des Drahtes k , E_k die elektromotorische Kraft, die in demselben ihren Sitz hat, nach derselben Richtung positiv gerechnet wie I_k , so ist, falls I_{k_1}, I_{k_2}, \dots alle nach einer Richtung als positiv gerechnet werden:

$$w_{k_1} I_{k_1} + w_{k_2} I_{k_2} + \dots = E_{k_1} + E_{k_2} + \dots$$

II. Wenn die Drähte k_1, k_2, \dots in einem Punkte zusammenstossen, und I_{k_1}, I_{k_2}, \dots alle nach diesem Punkte zu als positiv gerechnet werden, so ist:

$$I_{k_1} + I_{k_2} + \dots = 0.$$

Abb. 2

Dieses und andere Probleme der linearen und kombinatorisch-graphentheoretischen Optimierung werden mit dem Simplexalgorithmus effizient gelöst. Das 70-Arbeitskräfte-70-Jobs-Zuordnungsproblem ließ sich bereits mit den Rechnern der 80er Jahre in wenigen Sekunden erledigen. Also: der Trivialalgorithmus kombiniert mit einem schnellen Rechner genügt nicht zur Lösung des Optimierungsproblems, wohl aber der Simplexalgorithmus, ausgeführt auf dem gleichen Rechner. Der Durchbruch, die entscheidende Reduktion der Komplexität des Problems, wurde durch einen schlagkräftigen, der Struktur des Problems angemessenen Algorithmus erzielt - und dieser entsprang der Schöpferkraft des Mathematikers.

4. Das Vierfarbenproblem

(vgl. dazu (Voss, 1993, S. 33 - 52)) Als 1976 ein rechnergestützter Beweis der 4-Farben-Vermutung vorgelegt wurde, hatte der - wohlprogrammierte - Computer bereits eine zwanzigjährige Probezeit als „Beweisführer“ hinter sich. Bereits in den 50er Jahren hatte Hao Wang ein Programm vorgelegt, das es gestattete, eine Vielzahl von Sätzen der „Principia Mathematica“ von Russell und Whitehead durch den Rechner beweisen zu lassen. All diese Sätze waren vorher bereits „traditionell“ bewiesen worden. In den 80er Jahren entstanden verschiedene Programme, die mit Hilfe des Rechners graphentheoretische Vermutungen produzierten, die dann in interaktiver Arbeit zwischen Mathematiker und Computer weiter bearbeitet wurden. Beim Beweis der 4-Farben-Vermutung ist der Sachverhalt ein anderer: Erstmals wurde ein Theorem vorgelegt, das unter (bisher) unersetzbarem Einbezug des Rechners bewiesen wurde. Mit Hilfe des Rechners wurde also eine neue (und wesentliche) mathematische Erkenntnis erhalten.

Das 4-Farben-Problem verlangt eine Antwort auf die Frage: Sind die Länder einer (regulären) Landkarte stets so mit vier Farben färbbar, daß (über eine Grenzlinie) benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben?

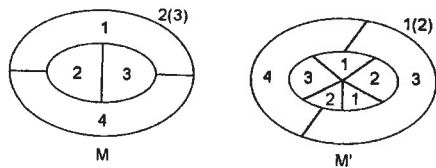


Abb. 5: Die Karten M und M' erfordern 4 Farben zum zulässigen Färben.

1852 an de Morgan herangetragen, fand es breiteres Interesse erst, als Arthur Cayley es 1878 den Mitgliedern der Londoner Mathematischen Gesellschaft vorgestellt hatte. Bereits im Jahr darauf legte der mathematisch interessierte Rechtsanwalt Arthur Bray Kempe einen Beweis vor, mit dem das Problem als "erledigt" und die 4-Färbbarkeit jeder regulären Landkarte als Tatsache galt, - aber wohl als eine für Mathematiker

doch nicht so interessante und mehr am Rande liegende. Es dauerte nämlich elf Jahre, bis der Fehler in Kempes Gedankengängen entdeckt wurde - von Heawood, der auch den ersten Beweis des 5-Farben-Theorems unter Nutzung der Kempeschen Ideen gab. Das nun wieder offene Problem wurde in mannigfacher Weise äquivalent umformuliert und von namhaften Mathematikern bearbeitet, widerstand aber allen Bemühungen. Insbesondere die graphentheoretische Forschung wurde durch das Ringen um die Lösung des 4-Farbenproblems befruchtet. Der Beweis des 4-Farben-Theorems (4FT), den schließlich Kenneth Appel und Wolfgang Haken, assistiert von John Koch, und gestützt auf die reichen Vorarbeiten von Heinrich Heesch und dessen Mitarbeiter (Biga, 1988), vorlegten, regte kontrovers geführte Diskussionen um Fragen auch philosophischer Relevanz an. Insbesondere war zu klären: Gibt es einen wesentlichen Unterschied zwischen einem traditionellen Beweis und dem Beweis des 4FT? Der traditionelle Beweis wird gewöhnlich durch drei Eigenschaften charakterisiert, er ist überzeugend, überschaubar und - im Prinzip - formalisierbar. Wir wollen einen Blick auf den Beweis des 4FT werfen, um zu sehen, inwieweit dieser die genannten Eigenschaften aufweist oder nicht.

Ein Graph heißt vierfärbbar, wenn jeder seiner Knotenpunkte mit einer von vier Farben so gefärbt werden kann, daß adjazente ("benachbarte") Knotenpunkte niemals dieselbe Farbe haben. Jede Landkarte bestimmt einen Graphen, ihren sogenannten dualen Graphen in der folgenden Weise: Innerhalb jedes Landes wird ein Knotenpunkt plaziert (seine Hauptstadt) und Knotenpunkte werden genau dann miteinander verbunden, wenn sie zu benachbarten Ländern gehören (Abb. 6).

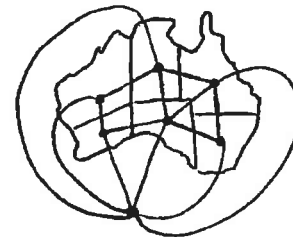


Abb. 6

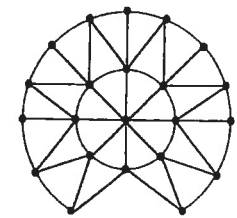


Abb. 7 Horseshoe

Es läßt sich zeigen: Wenn jeder einfache planare Graph, d.h. jeder planare Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten, vierfärbbar ist, dann auch jede reguläre Landkarte. Zum Beweis der 4FT genügt es offensichtlich, sich auf einfache planare Graphen, die Triangulationen sind, zu beschränken. Jede planare Triangulation hat nur endlich viele Knotenpunkte, so daß sich zum Beweis des 4FT eine Induktion über die Anzahl v der Knotenpunkte fast aufdrängt. Induktionsanfang: Für $v < 4$ ist jede Triangulation vierfärbbar - das ist offensichtlich. Induktionsvoraussetzung (IV): Jede planare Triangulation G^* mit n oder weniger Knotenpunkten ist vierfärbbar. Induktionsschluß: Jede planare Triangulation G mit $n+1$ Knotenpunkten ist vierfärbbar.

Der Induktionsschluß (IS) stützt sich zunächst auf die Euler-Descartesche Polyederformel für konvexe Polyeder, $2 = p - k + f$, wobei p die Anzahl der Knotenpunkte, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen ist. Bezeichnen wir mit v_i die Anzahl der Knotenpunkte der Valenz i und mit m die maximale Valenz eines Knotens der Triangulation, dann ist

$$p = \sum_{i=3}^m v_i, \quad k = \frac{1}{2} \sum_{i=3}^m i \cdot v_i \quad \text{und (wegen } 3f = 2k) \quad 3f = \sum_{i=3}^m i \cdot v_i.$$

Damit geht die Euler-Descartesche Polyederformel über in

$$(1) 3v_3 + 2v_4 + v_5 + 0v_6 - v_7 - 2v_8 - 3v_9 - \dots - (m-6)v_m = 12. \quad (\text{vgl. (Barn, S. 22 u. S. 29-30)})$$

Da die rechte Seite von (1) größer als Null ist, muß mindestens einer der Werte v_3, v_4, v_5 ungleich Null sein, wir haben also für den IS die folgenden drei Fälle zu betrachten:

Fall 1: G enthält einen Knotenpunkt x der Valenz 3 (Abb. 8).

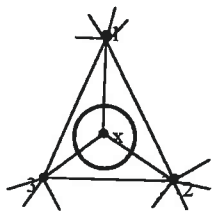


Abb. 8

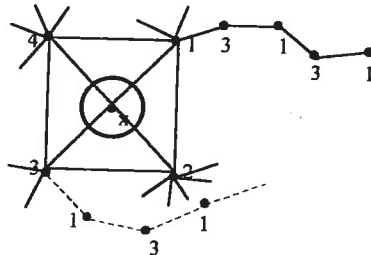


Abb. 9

Der nach Entfernung von x verbleibende Graph G^* ist nach IV vierfärbbar. Die drei Nachbarnpunkte von x verbrauchen drei Farben, die vierte Farbe erhält x .

Fall 2: $v_3 = 0$, aber v_4 ungleich 0, d.h. G enthält einen Knotenpunkt x der Valenz 4 (Abb. 9).

Es interessiert nur der Fall, daß für die Färbung der vier Nachbarnpunkte von x alle Farben benutzt werden. Jetzt greifen die Ideen Kempes: die Bildung von Kempe-Ketten und das Umfärbn längs solcher Ketten. Das Vorgehen wird in Abb. 9 angedeutet:

Vom Nachbarnknoten 1 ausgehend, wird eine (1,3)-Kette gebildet, auf der sich mit 1 und mit 3 gefärbte Knotenpunkte abwechseln.

1. Der Nachbarnknotenpunkt 3 (der mit der Farbe 3 gefärbte) von x liegt nicht auf dieser (1,3)-Kette. Dann werden die Knoten der Kette umgefärbt, so, daß die mit 1

gefärbten Knoten die Farbe 3 erhalten und die mit 3 gefärbten die Farbe 1. Die Vierfärbung von G^* bleibt dabei zulässig. Nach dem Umfärbn hat der Nachbarnknotenpunkt 1 von x die Farbe 3. Die Farbe 1 steht damit zur Färbung von x zur Verfügung.

2. Der Nachbarnknotenpunkt 3 von x liegt auf der (1,3)-Kette (wie in Abb. 9 angedeutet). Dann bringt uns die Umfärbung der Kette in der unter 1. angegebenen Weise nicht weiter. Die (1,3)-Kette „trennt“ jedoch die Nachbarnknotenpunkte 2 und 4, d.h. diese liegen nicht auf ein- und derselben (2,4)-Kette. Damit kann einer der Knoten 2, 4 umgefärbt werden. Damit läßt sich die Zahl der Farben, die zur zulässigen Färbung der Nachbarnknotenpunkte von x nötig sind, wieder auf drei reduzieren. Mit der vierten Farbe wird x gefärbt. (vgl. (Barn, 1983, S. 5 - 14))

Bemerkung:

Die Koeffizienten in Gleichung (1) lassen sich als „Ladungen“ betrachten: Jeder Knotenpunkt der Valenz i trägt die Ladung i . „Entladen“ des Knotenpunktes y bedeutet eine Verteilung der Ladung von y auf die Nachbarnknotenpunkte von y . (Dabei bleibt die Gleichung (1) bestehen.)

Die ohne Hochgeschwindigkeitsrechner nicht zu meisternde Schwierigkeit des Beweises liegt im Fall 3!

Fall 3: $v_3 = 0, v_4 = 0, v_5$ ungleich 0, d.h. G enthält einen Knotenpunkt x der Valenz 5. Es genügt nicht, wie bei den beiden vorhergehenden Fällen, den Knotenpunkt x und die mit ihm inzidenten Kanten zu entfernen und in dem so entstehenden Graphen G^* längs Kempe-Ketten umzufärbn. Stattdessen werden geeignete "Konfigurationen" entfernt, Systeme von miteinander verbundenen Knotenpunkten (Abb. 7 zeigt ein Beispiel).

Eine Konfiguration heißt "reduzibel", wenn die Vierfärbung der Triangulation G , in der sie enthalten ist, aus der Vierfärbung des Graphen G^* abgeleitet werden kann, der nach ihrer Entfernung aus G entsteht. Beim Beweis der Reduzibilität einer Konfiguration spielen die Methode des Umfärbens von Kempe-Ketten und gewisse Entladungsprozesse ineinander¹.

Es gilt eine sogenannte "unvermeidbare Menge von Konfigurationen" zu finden, d.h. eine Menge von reduzierbaren Figuren, die so umfassend ist, daß jede Triangulation eine Konfiguration aus dieser Menge enthält.

Aufbauend auf Untersuchungen von Heinrich Heesch, entwickelten Appel, Haken und Koch eine Theorie der Entladungsprozeduren, deren jede eine unvermeidbare Menge von Konfigurationen liefert.

Der publizierte Beweis des 4FT zerfiel in zwei Teile:

¹ Die Methoden zum Nachweis der Reduzibilität einer Konfiguration wurden bereits 1913 von George Birkhoff praktiziert.

- Eine Liste der 1482 Elemente einer Menge U und einen überschaubaren Beweis der Unvermeidbarkeit von U mit Hilfe des „Entladungssatzes“.
- Das Lemma: Jede Konfiguration aus U ist reduzibel.

Der Beweis des Lemmas wurde über ein Programm dem Computer übertragen. Er überprüfte jede der Konfigurationen aus U auf Reduzibilität und benötigte dazu über 1200 Stunden!

(vgl. (Tymo, 1979, S. 57 - 83) u. (Tymo, 1985))

Diese kurze Darlegung hat gezeigt, daß die Struktur des Beweises des 4FT durchaus überschaubar ist. Der Beweis selber jedoch enthält für den Leser eine Kluft, die von ihm nicht überbrückt werden kann. Auch traditionelle Beweise enthalten oft Abkürzungen der Art "wie man leicht sieht" oder "was der Leser selber beweisen mag" oder "wie aus den Lemmata A, B, C unmittelbar folgt". Das sind für den Leser zunächst auch Lücken im Beweis. Diese können jedoch von ihm gefüllt werden. Die Situation ist beim Beweis des 4FT eine ganz andere: Die Lebenszeit eines Mathematikers würde gar nicht ausreichen, um den Verweis "mit Hilfe des Computers" aufzulösen.

Hier läßt uns unser Rahmenthema ethische Dimensionen berühren:

Wie jede Arbeitsteilung in der menschlichen Gesellschaft, erfordert auch die wissenschaftliche Arbeit ein hohes Maß an Vertrauen, - auch in die wissenschaftliche Lauterkeit jedes einzelnen. Die Rolle des Vertrauens steigt außerordentlich an, ja sie gewinnt eine neue Qualität, wenn Lücken "mittels Computers" in einem publizierten mathematischen Beweis zugelassen werden. Um die Lösung des Vierfarbenproblems hatten namhafte Mathematiker 100 Jahre lang vergeblich gerungen, daher stand der vorgelegte Beweis des 4FT im Mittelpunkt mathematischen Interesses. Aber keinesfalls jeder der fast unüberschaubaren Menge jährlich veröffentlichter mathematischer Sätze stößt auf ein solch breites Interesse innerhalb der Gemeinschaft der Mathematiker! So wäre es durchaus möglich, daß - durch unkontrolliert gewährtes Vertrauen - ein lückenhafter Beweis eines richtigen Satzes oder, was viel schlimmer wäre, ein "Beweis" eines falschen Satzes durch den Hinweis "mittels Computer" in das System mathematischen Wissens eindringe und dort seine zerstörerische Wirkung ausübe.

Literatur :

- Ahrens, W. : Über das Gleichungssystem einer Kirchhoffschen galvanischen Stromverzweigung. - In: *Mathematische Annalen*, 49, 1897, S. 311 - 324
- Barnette, D.: Map Coloring, Polyhedra, and the Four-Color Problem. (The Dolciani Mathematical Expositions Number Eight) - 1983
- Bigalke, H.-G.: Heinrich Heesch. - Birkhäuser Verlag Basel-Boston-Berlin 1988
- Bongartz, K., Borho, W., Mertens, D., Steins, A.: Farbige Parkette. *Mathematische Theorie und Ausführung mit dem Computer.* - Basel-Boston-Berlin 1988

- Dantzig, G. B.: Reminiscences About the Origins of Linear Programming. - In: Bachem, A., Grötschel, M., Korte, B. (eds.): *Mathematical Programming - The State of the Art.* Bonn 1982. - Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1983
- Keller, O.-H.: Das Zählen als angeborene Verhaltensweise. *Sitzungsberichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-nat. Klasse*, Band 117, Heft 5 - Berlin 1984
- Kirchhoff, G.: Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. - In: *Poggendorffs Annalen der Physik*, 72, 1847
- Kirchhoff, G.: Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. - In: *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig 1882 (Johann Ambrosius Barth), S. 22 - 33
- König, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe.* - Leipzig 1936
- Sachs, H. (Hrg.): *Teubner-Archiv zur Mathematik Band 6 (D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen - mit einer Abhandlung von L. Euler)* - Leipzig 1986
- Sachs, H.: Einige Gedanken zur Geschichte und zur Entwicklung der Graphentheorie. - In: *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg*, Band XI, Heft 6, 1989; S. 623 - 641
- Tymoczko, T.: The Four Color Problem and its Philosophical Significance. - In: *Journal of Philosophy* 76 (1979), S. 57-83
- Tymoczko, T. (ed.): *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* - Boston-Basel-Stuttgart 1985
- Vollmer, G.: *Was können wir wissen? Die Natur der Erkenntnis.* - Stuttgart 1985
- Voss, Waltraud: *Mathematik für unsere Zeit. Gesellschaftliche Praxis - Theorie der Graphen und Netze - Informatik: Philosophische Aspekte ihrer Beziehungen.* - Europäische Hochschulschriften, Reihe XX Philosophie, Bd. 372 - Verlag Peter Lang, Frankfurt am Main-Berlin-Bern-New York-Paris-Wien 1993

Verfasser:

Dr. Waltraud Voss

Technische Universität Dresden

Institut für Geschichte

Arbeitsstelle „Geschichte der TU Dresden“

01062 Dresden

Goethe über Erfinden und Entdecken

Eher zufällig, denn systematisch gesucht, stieß ich bei der Beschäftigung mit den naturwissenschaftlichen Schriften und insbesondere mit den so zahlreichen Aphorismen aus dem Nachlaß J. W. von Goethes auf eine Überschrift, die dem Thema unserer Tagung entsprach. Einige der hierunter subsumierten Gedanken seien an dieser Stelle mitgeteilt, wenn sie auch vor allem der Psychologie des Entdeckens und Erfindens, dem Prioritätsproblem, aber auch den engen dialektischen Beziehungen zwischen Entdecken, Erfinden und Benutzen gewidmet, nur in sehr weitem Sinne als Beitrag zur Fragestellung unserer Veranstaltung angesehen werden können. Dies sei zugleich eine Referenz an den universellen Gelehrten aus Anlaß seines 250. Geburtstages in diesem Jahr.

"Erfinden und Entdecken"¹

Es ist immer der Mühe wert nachzudenken, warum die vielfachen und harten Kontestationen über Priorität bei Entdecken und Erfinden immer fort dauern und aufs neue entstehen.

Zum Entdecken gehört Glück, zum Erfinden Geist, und beide können beides nicht entbehren.

Dieses spricht aus und beweist, daß man ohne Überlieferung, unmittelbar persönlich Naturgegenstände oder deren Eigenschaften gewahr werden könne.

Das Erkennen und Erfinden sehen wir als den vorzüglichsten selbst erworbenen Besitz an und brüsten uns damit.

Der kluge Engländer verwandelt ihn durch ein Patent sogleich in Realitäten und überhebt sich dadurch alles verdrießlichen Ehrenstreites.

Aus obigem ersehen wir wie sehr wir von Autorität von Überlieferung abhängen, daß ein ganz frisches eigentümliches Gewährwerden so hoch geachtet wird; deshalb auch niemand zu verargen ist, wenn er nicht aufgeben will was ihn vor so vielen andern auszeichnet.

Um sich die Priorität zu bewahren einer Entdeckung die er nicht aussprechen wollte, ergriff Galilei ein geistreiches Mittel, er versteckte seine Erfindung anagrammatisch in lateinische Verse, die er sogleich bekannt machte um sich im Falle ohne weiteres dieses öffentlichen Geheimnisses bedienen zu können.

Ferner ist Entdecken, Erfinden, Mitteilen, Benutzen so nahe verwandt daß mehrere bei einer solchen Handlung als Eine Person können angesehen werden. Der Gärtner entdeckt daß das Wasser in der Pumpe sich nur auf eine gewisse Höhe heben läßt, der Physiker verwandelt eine Flüssigkeit in die andere und ein großes Geheimnis kommt an den Tag; eigentlich war jener der Entdecker, dieser der Erfinder.

"Über Mathematik und deren Mißbrauch sowie das periodische Vorwalten einzelner wissenschaftlicher Zweige"²

¹Johann Wolfgang von Goethe: Die Schriften zur Naturwissenschaft, Erste Abteilung: Texte, Bd. 11, Aufsätze, Fragmente, Studien zur Naturwissenschaft im Allgemeinen, Leopoldina-Ausgabe Weimar 1970, S. 180/181

Das neu hervorstrebende, frisch aufstrebende Erkenntnis erregt die Menschen zur Teilnahme. Männer die durch vorzügliche Beschäftigung sich in solchen Fächern vorgetan, arbeiten sie sorgfältig aus, die gewinnen sich Schüler, Mit- und Nacharbeiter, und so schwillt ein gewisser Teil des Ganzen zum Hauptpunkte auf, indessen die übrigen schon in ihre Grenzen als Teilnehmer einer Gesamtheit zurückgetreten sind.

... die Geschichte der Wissenschaften lehrt uns, daß gerade diese Vorliebe fürs Neue und noch Unbekannte das Glück der Entdeckung sei, das einen Einzigen begünstigte, und nun das lebhaft Zugreifen mehrerer zur Folge hat. ...

Jede unerwartete Entdeckung interessiert als Zeitungsneuigkeit die Welt; nun aber wird sie durchgearbeitet, durchgeprüft, durchgestritten, niemals erschöpft, zuletzt aber doch eingeordnet und beseitigt.

"Über Naturwissenschaft im allgemeinen einzelne Betrachtungen und Aphorismen"³

Es ist eine Eigenheit dem Menschen angeboren und mit seiner Natur innigst verwebt: daß ihm zur Erkenntnis das nächste nicht genügt; da doch jede Erscheinung, die wir selbst gewahr werden, im Augenblick das nächste ist, und wir von ihr fordern können, daß sie sich selbst erkläre, wenn wir kräftig in sie dringen.

Alles was wir Erfinden, Entdecken im höheren Sinne nennen, ist die bedeutende Ausübung, Betätigung eines originalen Wahrheitsgefühles, das, im stillen längst ausgebildet, unversehens mit Blitzesschnelle zu einer fruchtbaren Erkenntnis führt. Es ist eine aus dem Innern am Äußern sich entwickelnde Offenbarung ...

"Ferner über Mathematik und über Mathermatiker"⁴

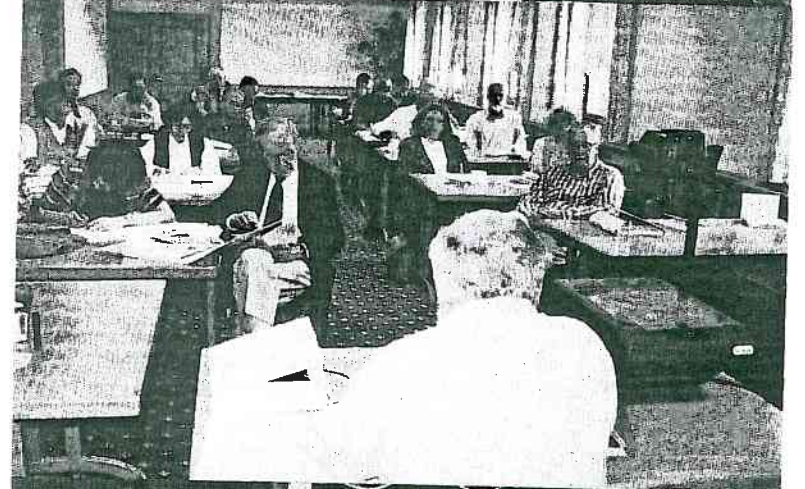
Die große Aufgabe wäre die mathematisch-philosophischen Theorien aus den Teilen der Physik zu verbannen, in welchen sie Erkenntnis anstatt sie zu fördern nur verhindern, und in welchen die mathematische Behandlung durch Einseitigkeit der Entwicklung der neuern wissenschaftlichen Bildung eine so verkehrte Anwendung gefunden hat.

Hannelore Bernhardt, Berlin

²a. a. o. S. 277/278

³a. a. o. S. 355/356

⁴a. a. o. S. 370



2613
1999
P. 20

Brigit Spalt



252
1999
P. 20

Ludwig Sanyer



2613
1999
P. 20

M. v. Renteln



2613
1999
P. 20

TEILNEHMER

HANNELORE BERNHARDT 186
Platz der Vereinten Nationen, D-10249 Berlin, Deutschland

CHRISTA BINDER
Institut für Analysis und Technische Mathematik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10/1141, A-1040 Wien, Österreich

* HARALD BOEHME 17
FB Math./Informatik, Universität Bremen, PF 330440, D-28334 Bremen, Deutschland

* WOLFGANG BREIDERT 46
Institut für Philosophie, Universität Karlsruhe, PF 6980 D-76128 Karlsruhe, Deutschland

* MILOŠ ČANAK 95, 116
Brzakova 4, YU-11000 Belgrad, Jugoslawien

LUDWIG DANZER
Institut für Mathematik, Universität Dortmund, D-44221 Dortmund, Deutschland

PHIL J. DAVIS 102
Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence, R.I., 02912 USA

* STEFAN DESCHAUER 75
Didaktik der Mathematik, Technische Universität Dresden, D-01062 Dresden, Deutschland

* ALIREZA DJAFARI NAINI 81
Universität Hildesheim, Zentrum für Fernstudium und Weiterbildung, Marienburger Platz 22, D-31141 Hildesheim, Deutschland

* GERLINDE FAUSTMANN 56
Kaisersteing. 6, A-2700 Wiener Neustadt

* JASNA FEMPL-MADJAREVIĆ 88
Ul. Partizanska br. 27/II, Vidirovac, YU-11000 Belgrad, Jugoslawien

JAROSLAV FOLTA
Narodni Technicke Museum, Kostelni 42, CS-17078 Praha 7, Tschechien

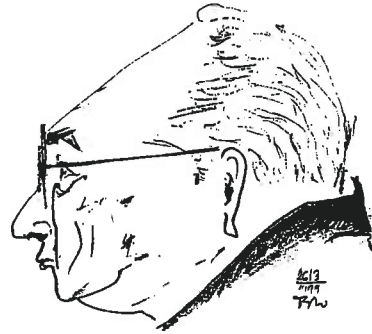
WILHELM FRANK
Custozzag. 13/7, A-1030 Wien, Österreich

* IVOR GRATTAN-GUINNESS 139
Mathematics, Middlesex, R.V. 43 St. Leonard's Road, GB-SG143JW Bengeo, Herts



23/2
1999
B.M.

vu et approuvé!
Robert Meisner



24/3
1999
B.M.

Le Gauds



25/2
1999
B.M.

Waltraud Pop



24/3
1999
B.M.

S. G. G.

- * PETER L. GRIFFITHS 111
67 Gloucester Place, London W1H 3PF U.K.
- * DETLEF GRONAU 1
Institut für Mathematik, Universität Graz, Heinrichstr. 36, A-8010 Graz, Österreich
- * HARALD GROPP 33
Mühlhngstr. 19, D-69121 Heidelberg, Deutschland
- MARIA GRUBER
Löbersdorferstr. 7, A-3382 Loosdorf, Österreich
- EDMUND HLAWKA
Institut für Analysis und Technische Mathematik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10/1141, A-1040 Wien, Österreich
- JOSEF HOFBAUER
Institut für Mathematik, Universität Wien, Strudlhofg. 4, A-1090 Wien, Österreich
- * ROBERT INEICHEN 62
Rigistrasse 63, CH-6006 Luzern, Schweiz
- GERHARD KOWOL
Institut für Mathematik, Universität Wien, Strudlhofg. 4, A-1090 Wien, Österreich
- DETLEF LAUGWITZ 147
Ahornweg 23, D-64367 Mühlthal, Deutschland
- * RITA MEYER-SPASCHE 106
MPI für Plasmaphysik, D-85748 Garching, Deutschland
- ROBERT MÜLLER
Institut für Mathematik, Universität Wien, Strudlhofg. 4, A-1090 Wien, Österreich
- * MARKO RAZPET 24
Pedagoška fakulteta, Kardeljeva ploščad 16, SL-1000 Laibach, Slowenien
- * NADA RAZPET 67
Levstikova c. 6, SL-1230 Domžale, Slowenien
- REINHOLD REMMERT
Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstr. 62, D-48149 Münster, Deutschland
- MICHAEL VON RENTELN
Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, Englerstr. 2, D-76131 Karlsruhe, Deutschland
- HERWIG SÄCKL
Gymnasium, Aschenbrennerstr. 10, D-92331 Parsberg, Deutschland
- * HANS SAGAN 128
5004 Glen Forest Drive, Raleigh, NC 27612-3132, USA
- KARL-HEINZ SCHLOTE
Elie-Wiesel-Str. 55, D-04600 Altenburg, Deutschland
- PETER SCHMITT
Institut für Mathematik, Universität Wien, Strudlhofg. 4, A-1090 Wien, Österreich
- PETER SCHREIBER 124
Institut für Mathematik und Informatik, Univ. Greifswald, Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15a, D-17487 Greifswald, Deutschland
- * DETLEF SPALT 41
Walther-Rathenau-Str. 6, D-64297 Darmstadt, Deutschland
- BIRGIT SPALT 152
Walther-Rathenau-Str. 6, D-64297 Darmstadt, Deutschland
- * RÜDIGER THIELE 7
Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften, Univ. Leipzig, Augustuspl. 10-11, D-04109 Leipzig, Deutschland
- * PETER ULLRICH 133
Mathematisches Institut, Universität Münster, Einsteinstr. 62, D-48149 Münster, Deutschland
- ANNETTE VOGT 155
Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, Wilhelmstr. 44, D-10117 Berlin, Deutschland
- * WALTRAUD VOSS 174
Institut für Geschichte - Arbeitsstelle TU-Geschichte, Technische Universität Dresden, D-01062 Dresden, Deutschland
- MARIANNE WENGER
Kommission für Geschichte der Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin, Österr. Akademie der Wissenschaften, Sonnenfelsg. 19, A-1010 Wien, Österreich