Third Austrian Symposion on the History of Mathematics

Neuhofen, November 8–14, 1992

The "Third Austrian Symposion on the History of Mathematics" will take place in Neuhofen an der Ybbs (Lower Austria) from November 8 to November 14, 1992. The theme of the Symposion will be "Detours, shortcuts, dead ends, and other deviations from the normal path of the development of mathematics."

For information contact:

Christa Binder
Institute for Technical Mathematics
Technische Universität Vienna,
Wiedner Hauptstr. 8-10/1141,
A-1040 Vienna, Austria
Tel.: +43-(0)222-58801-5389
e-mail: chbinder@email.tuwien.ac.at

HISTORIA MATHEMATICA
Vol. 19, No. 2, pp. 125–231/May 1992
Abstracts 19.2.1–19.2.104
Founded by KENNETH O. MAY

NOTICES OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
MARCH 1992, VOLUME 39, NUMBER 3
Providence, Rhode Island, USA

***8–14. Third Austrian Symposium on the History of Mathematics**, Neuhofen an der Ybbs (Lower Austria).

PROGRAM: The theme of the conference will be "Detours, shortcuts, dead ends, and other deviations from the 'normal' path of the development of mathematics."

INFORMATION: C. Binder, Institute for Technical Mathematics, TU Vienna, Wiedner Hauptstr. 8-10/1141, A-1040 Vienna, Austria; chbinder@email.tuwien.ac.at; tel: +43-(0)222-58801-5389.

NOUVELLES MATHÉMATIQUES INTERNATIONALES
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE NACHRICHTEN
INTERNATIONAL MATHEMATICAL NEWS

Geschichte der Mathematik

Das *III. Österreichische Symposium zur Geschichte der Mathematik* findet vom 8. bis 14. November 1992 in Neuhofen a.d. Ybbs (Niederösterreich) statt. Thema: *Umwege, Abschneider und Sackgassen: über Abweichungen vom „normalen" Gang der Entwicklung.* Auskünfte durch die Tagungsleiterin: Dr. Christa Binder, Institut für Technische Mathematik, TU Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10/1141, 1040 Wien, e-mail: chbinder@email.tuwien.ac.at. *(Einladung)*

„Umwege, Abschneider und Sackgassen … über Abweichungen vom ‚normalen' Gang der Entwicklung" wird das III. Österreichische Symposion zur Geschichte der Mathematik behandeln, das in Neuhofen an der Ybbs bei Amstetten (Niederösterreich) vom 8. bis 14. November 1992 veranstaltet wird. Die Gesamtkosten belaufen sich pro Person auf ÖS 2500 bzw. 2800. Nähere Auskunft erteilt: Dr. Christa Binder, Institut für Technische Mathematik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10/1141, A-1040 Wien.

IMU CANBERRA CIRCULAR
NO. 79 MAY 1992

*S: Third Austrian Symposium on the History of Mathematics; V: Neuhofen an der Ybbs, Lower Austria; D: 1992 November 08-14; A: Christa Binder, Insitute for Technical Mathematics, TU Vienna, Wiedner Hauptstr. 8-10/1141, A-1040 Vienna, Austria; email: chbinder@email.tuwien.ac.at .

Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte

III. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

Neuhofen an der Ybbs, 8. bis 14. November 1992

Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte

III. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

Neuhofen an der Ybbs, 8. bis 14. November 1992

Umwege, Abschneider und Sackgassen

... über Abweichungen vom „normalen" Gang der Entwicklung

Kurzfassungen der Vorträge

Herausgeber: Christa Binder, Wien

Die Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte dankt folgenden Institutionen und Firmen, ohne deren Unterstützung die Durchführung dieser Tagung nicht möglich gewesen wäre:

dem Amt der Niederösterreichischen Landesregierung,
der Kommission für Mathematik der Österreichischen Akademie der Wissenschaften,
der Ersten Österreichischen Sparkasse,
der Siemens AG Österreich,
dem Birkhäuser Verlag,
der MANZ-Verlagsbuchhandlung,
Elsevier Science Publishers,

sowie der Technischen Universität Wien, insbesondere dem Institut für Analysis, Technische Mathematik und Versicherungsmathematik, dessen Einrichtungen zur Organisation der Tagung unentbehrlich waren.

Wien, im November 1992

Gedruckt mit Unterstützung der Kulturabteilung des Amtes der Niederösterreichischen Landesregierung.

PROGRAMM

MONTAG (*9. November 1992*) 9.30 — 12.30

FRANCISCO POYATOS (*Madrid*) 1
Mathematische Hauptereignisse und ideologische Revolutionen.

MIRIAM FRANCHELLA (*Mailand*) 6
L. E. J. Brouwer und die intuitionistische Mathematik.

WOLFGANG BREIDERT (*Karlsruhe*) 73
Modelle mathematikhistorischer Entwicklung.

MONTAG (*9. November 1992*) 16.00 — 18.30

ROBERT INEICHEN (*Marly, CH*) 12
Der "Vierfeldertest" von Carl Liebermeister - eine Bemerkung zur Entwicklung der medizinischen Statistik im 19. Jahrhundert.

JASNA MADJAREVIĆ (*Belgrad*) 19
Bošković's curve: some limit problems.

MILOŠ ČANAK (*Belgrad*) 23
Einige Richtungen in der historischen Entwicklung einer Theorie der nichtanalytischen Funktionen, II. Teil.

DIENSTAG (*10. November 1992*) 9.30 — 12.30

WOLFGANG KAUNZNER (*Regensburg*)
Zur Geschichte der Logarithmen.

SERGIO NOBRE (*Leipzig*) 29,84
Die mathematischen Stichwörter in Zedlers Universal-Lexikon.

JOACHIM BUHROW (*Greifswald*) 31
Späte Anerkennung für Hermann Grassmann aus Stettin — ein pommersches Gelehrtenschicksal.

DIENSTAG (*10. November 1992*) 16.00 — 18.30

HERWIG SÄCKL (*Parsberg*)
Zur Auseinandersetzung zwischen Felix Klein und Alfred Pringsheim über die richtige Art, Mathematik zu lehren.

RENATE TOBIES (*Leipzig*) 94
Das Projekt "Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften ..." — Sackgasse der wissenschaftlichen Entwicklung?

MITTWOCH (*11. November 1992*) AUSFLUG

Abfahrt 9.30, Besichtigung von Waidhofen an der Ybbs, Fahrt mit der Schmalspurbahn nach Lunz, Mittagsbuffet im Zug, Besichtigung von Lunz am See, Rückfahrt nach Neuhofen über Gaming.

DONNERSTAG (*12. November 1992*) 9.30 — 12.30

MARKO RAZPET (*Laibach*) 36
Zur Geschichte der slowenischen Mathematik.

NADA RAZPET (*Laibach*) 37
The history of mathematical textbooks in Slovenia.

ROTRAUT STANIK (*Hamburg*) 100
Über die Ausarbeitung von Erich Hecke der Vorlesung von Felix Klein "Über die moderne Entwicklung des mathematischen Unterrichts" aus dem WS 1910/11.

MILOŠ ČANAK (*Belgrad*) 38
Über die Ableitung gebrochener Ordnung.

DONNERSTAG (*12. November 1992*) 16.00 — 18.30

HELMUTH URBANTKE (*Wien*) 45
Differentialtopologie des R^4 — ein Umweg über die Elementarteilchenphysik.

MICHAEL VON RENTELN (*Karlsruhe*) 46
Die Wiederentdeckung eines Lemmas von Wedderburn und seine Bedeutung für die moderne Funktionentheorie.

FREITAG (*13. November 1992*) 9.30 — 12.30

KARL-HEINZ SCHLOTE (*Leipzig*) 50
Freges Erweiterung des Größenbegriffes — eine Sackgasse?

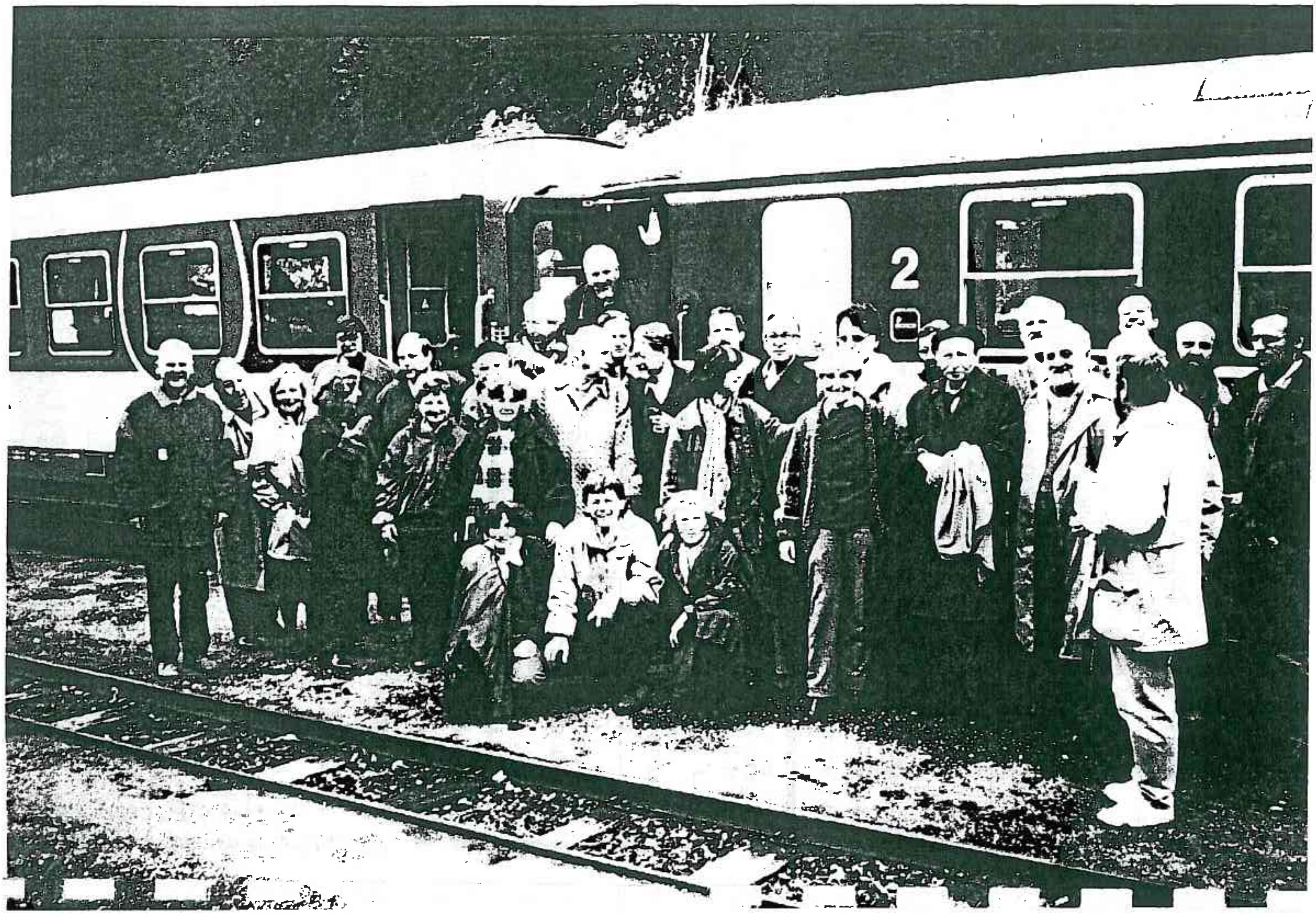
VOLKER PECKHAUS (*Erlangen*) 55
Wozu Algebra der Logik? Zum Lebenswerk von Ernst Schröder.

ANA MAROSTICA (*Los Angeles*) 60
Peirce's topological conception of continuity.

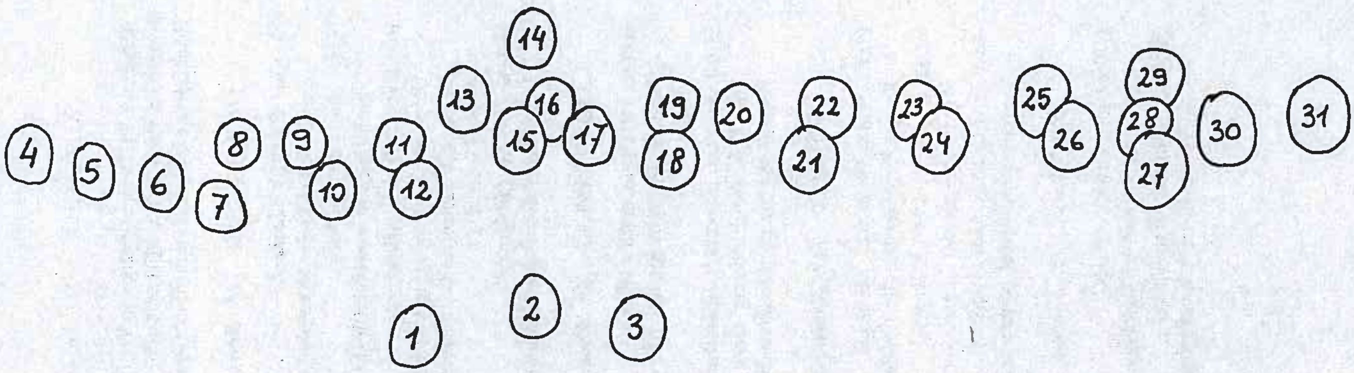
FREITAG (*13. November 1992*) 16.00 — 18.30

GREGORY NOWAK (*Paris*) 65
Poincaré's Road to Topology.

HARALD GROPP (*Heidelberg*) 67
Die Geschichte der Konfigurationen $(12_4, 16_3)$.



ahz Se M oc 11. o. 92



1	N. Razpet	9	Folkerts	17	H. Wussing	25	Breidert
2	Nobre	10	Fr. Lüneburg	18	Binder	26	Canak
3	G. Wussing	11	Frank	19	Schlote	27	Gronau
4	Lüneburg	12	Stanik	20	Fellmann	28	Ineichen
5	Poyatos	13	Baptist	21	Madjarević	29	Nowak
6	Fr. Poyatos	14	Folta	22	Grössing	30	Säckl
7	Tobies	15	Buhrow	23	Gropp	31	Peckhaus
8	M. Razpet	16	Danzer	24	Hlawka		

MATHEMATISCHE HAUPTEREIGNISSE UND IDEOLOGISCHE REVOLUTIONEN

von

Francisco Poyatos

Wir beginnen damit, daß wir die Begriffe definieren, die in diesem Artikel gebraucht werden.

1. Die Ideologie einer Person oder Epoche in bezug auf ein mathematisches Thema ist das System der Überzeugungen - der expliziten und der impliziten -, welche sie in dieser Hinsicht haben.
2. Eine dogmatische ideologische Revolution erfolgt dadurch, daß eine Person eine Überzeugung, die sie in bezug auf ein mathematisches Thema hat, durch eine andere ersetzt, welche die erste verneint und aufhebt.
3. Eine rationale ideologische Revolution besteht darin, daß eine Person sich gezwungen sieht, die gehabte Überzeugung hinsichtlich eines mathematischen Themas durch das Ergebnis eines Beweises zu ersetzen, das diese Überzeugung verneint und aufhebt.
4. Ein mathematisches Hauptereignis ist ein Ereignis, das drei Folgen hat, dieselben, wie eine naturwissenschaftliche Revolution im Sinne von Thomas Kuhn:
   a.) Einführung eines neuen Grundbegriffs oder Wechsel der Bedeutung eines Grundbegriffs in einer vorhergehenden mathematischen Lehre oder Doktrin.
   b.) Die in a) bezeichnete Einführung oder Änderung eröffnet der Forschung ein neues, weites Gebiet.
   c.) Einige Mathematiker verwirklichen kreative und akkumulatorische Fortschritte auf diesem Gebiet.

Im folgenden stellen wir einige mathematische Hauptereignisse und eine rationale ideologische Revolution im klassischen Griechenland dar.

Die Pythagoreer definierten die Proportion a/b=c/d zwischen vier Größen (engl. magnitudes) durch den Algorhythmus der aufeinanderfolgenden (engl. successive) Differenzen (oder gr. Antiphaireses), der nur gültig ist, wenn die vier Größen a, b, c und d kommensurabel, d.h. natürliche Zahlen oder Quotienten von natürlicnen Zahlen, sind. Sie glaubten, daß alle Größen kommensurabel und daß die Elemente aller Dinge natürliche Zahlen und ihre Quotienten wären.

Man schreibt Hyppasus von Metapontum (5. Jahrh. v. Chr.) die Entdeckung einer Größe zu, die nicht kommensurabel ist. Diese Tatsache ist ein Hauptereignis, welches die zuvor erwähnte Definition der Proportion unbrauchbar sein läßt; sie ist die Ursache für die Krisis des Fundaments in den Lehren von der Proportion und der Ähnlichkeit. Sie brachte eine ideologische rationale Revolution mit sich.

Dieses ist ein Hauptereignis, weil es
a) die Bedeutung der Größe ändert und
b) ein weites Gebiet für die Forschung eröffnet
in der neuen Disziplin der "geometrischen Algebra".

Ein anderes Hauptereignis war das Finden einer neuen Definition der Proportion durch Eudoxos, welche sowohl auf kommensurable als auch auf nicht kommensurable Größen anwendbar war.

a) Es ereignet sich eine Verallgemeinerung und zugleich eine stärkere Präzision und Strenge des neuen Begriffs der Größe, gegeben durch Axiome.
b) Es eröffnet sich ein weites Feld für die Forschung,
c) welches schon Eudoxos zum großen Teil ausfüllt (Bücher V und VI der "*Elemente*" von Euklid).

Thomas Kuhns Begriff der naturwissenschaftlichen Revolution als Widerlegung einer früheren Theorie durch eine spätere, ist in der Geschichte der Mathematik nicht anwendbar. Wir glauben ebenfalls nicht, daß eine mathematische Doktrin eine vorherige verneine. Die von uns definierten Revolutionen ereignen sich in der Ideologie der Mathematik, aber nicht in der Mathematik selbst. Wir stimmen also mit Michael Crowe überein:"*Ten 'Laws' Concerning Conceptual Change in Mathematics*", HM2 (1975), Seiten 469-470, jedoch nicht mit Joseph Dauben, "*Conceptual Revolutions and the History of Mathematics*", 1984, S. 81-103.

Wir führen folgende zusätzliche Definition ein:

5. Eine mathematische Anomalie ist ein Mangel in einem Bereich der Mathematik, welcher einige Mathematiker, die ihn bemerken, beunruhigt und stört. Deshalb versuchen manche ihn auszuschalten.

Diese Definition weicht von der Thomas Kuhns ab.

Zur Zeit von Euklid und noch während der späteren mehr als 2000 Jahre war sein 5. Postulat, auch genannt Parallelen-Axiom, eine doppelte Anomalie:

a) Seine Formulierung ist kompliziert im Vergleich zu den restlichen neun, die einfach formuliert waren.
b) Dieses Postulat schien weniger evident als die übrigen, die autoevident sind.

Um die Anomalien des 5. Postulats von Euklid auszuschalten, unternahmen Mathematiker seit 300 v. Chr. zwei Versuche:

1. Einen selbstevidenten und einfach formulierten Satz "P" aufzustellen, der diesem Postulat äquivalent sei und es ersetzen könne;
2. durch Reduktion ad absurdum zu beweisen, daß das Parallelen-Axiom eine Konsequenz der übrigen neun euklidischen Axiome und der 28 ersten Sätze ist, die Euklid ohne Hilfe des 5. Postulats bewiesen hatte.

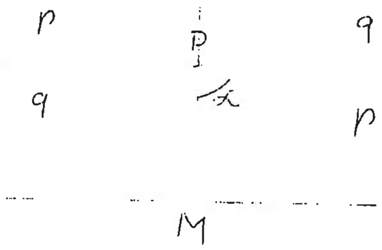
Als erster in der Geschichte der Mathematik bemerkte Georg S. Klügel (1739 -1812) in seiner Dissertation mit dem Titel "*Conattum praecipuorum ...*", Göttingen 1763, daß Saccheri in seinem Werk "*Euclides ab omni naeva vindicatus, sive ...*", Mailand 1733, nicht zum Widerspruch, sondern zu seltsamen und nur scheinbar paradoxen Resultaten gelangte.

Dies geschah nicht nur in diesem Werk Saccheris, sondern auch mit vielen vorhergehenden, die den 2. Versuch unternahmen. Weil auch Klügel keinen Widerspruch fand, dachte er, daß damit eine zweite neue Geometrie entstanden war. Mit dieser Überzeugung be-

gann die erste dogmatische ideologische Revolution über dieses Thema. Zuvor hatten alle geglaubt, daß nur eine einzige wahre Geometrie existiere, weil ihre Axiome selbstevident waren und sie auch die Körper im Raum beschrieb. So bedeutete die Behauptung einer neuen Geometrie, daß er eine zweite dogmatische ideologische Revolution realisieren mußte, nämlich die folgende: "Die Gewißheit, mit welcher die Menschen an das 5. Postulat glauben, ist in der Erfahrung begründet."

Diese zwei ideologischen Revolutionen, enthalten in Klügels Dissertation von 1763, erlaubten den Beginn eines mathematischen Hauptereignisses: die Entdeckung einer nichteuklidischen Geometrie, in welcher die Axiome mit allen euklidischen außer dem Postulat der Parallelen übereinstimmen. Das 5. Postulat wurde durch seine Verneinung ersetzt. Dieses 5. Postulat von Euklid ist dem folgenden Satz äquivalent: Es sei gegeben eine Gerade a und ein Punkt P, der nicht auf a liegt. Durch P verläuft <u>eine einzige Parallele</u> zu a.

Nun wurde es durch seine Negation ersetzt: Gegeben sei eine Gerade a und ein Punkt P, der nicht auf a liegt; entweder 1. verläuft keine Parallele zu a durch P oder 2. es gibt mindestens zwei verschiedene Parallelen zu a durch P, die wir p und q nennen. Der erste Fall widerspricht den neun restlichen Axiomen von Euklid.



Im zweiten Fall zeichnet man durch P die Senkrechte PM zu a; der Winkel α , den sie mit p bildet, wird Parallelwinkel genannt. Es beweist sich, daß der Winkel, den PM mit q bildet, gleich α ist.

Die neue Geometrie, die hieraus und aus den restlichen neun euklidischen Axiomen entstand, nannte Gauß die nicht-euklidische und Klein die hyperbolische Geometrie. Es begann ein neues mathematisches Hauptereignis, denn die drei genannten Folgen traten ein.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) vollzieht in seiner "*Theorie der Parallellinien*" von 1766, die 1789 publiziert wurde, originäre Fortschritte sowohl mathematischer als auch philosophischer Art.

Morris Kline behauptet in seinem Werk "*Mathematics. The Loss of Certainty*" von 1980: "Lambert denkt, daß eine Menge von Hypothesen, die nicht zum Widerspruch führen, eine neue mögliche Geometrie anbieten würden. Solche Geometrie wäre eine gültige logische Struktur ..., selbst wenn sie nichts mit den physischen Körpern zu tun hätte."

In dieser Hinsicht ging Lambert viel weiter als Klügel. So verursacht er die dritte dogmatische ideologische Revolution und nähert sich damit weiter als Klügel dem heutigen Denken über dieses Thema. Außerdem sagte er die Möglichkeit des Entstehens von weiteren nicht-euklidischen Geometrien vorher. Mit den Geometrien von Riemann und Klein traten diese Vorhersagen ein.

Verschiedene Autoren erzielten große Fortschritte in diesem mathematischen Hauptereignis:
Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859).
Franz Taurinus (1794-1874).
Karl Friedrich Gauß (1777-1855) entwickelte die hyperbolische Geometrie in beträchtlicher Weise, wie aus den Briefen an seine Kollegen und Freunde zu lesen ist. Als er sich auf die Abfassung seiner diesbezüglichen Resultate vorbereitete, gelangte am 14. Februar 1832 die Arbeit von Janos Bolyai (1802- 1860) in seine Hände, ein Werk, in dem die Entdeckungen von Janos B. zu dieser neuen Geometrie vorgestellt wurden; und das waren im wesentlichen die von Gauß. Deshalb entschied dieser, seine diesbezüglichen Ergebnisse nicht zu veröffentlichen.

Gauß zweifelte, welche von den beiden Geometrien diejenige sei, welche den Raum besser beschrieb. In der euklidischen Geometrie ist die Summe der Winkel in jedem Dreieck gleich 180°, in der hyperbolischen mißt sie weniger als 180°. Deshalb vermaß Gauß die Summe der Winkel des Dreiecks, dessen Ecken die Gipfel der drei Berge Brocken, Hohenhagen und Inselsberg bilden. Er fand (siehe Werke 4. Seite 258), daß die Winkelsumme um 14"85 größer als 180° war.

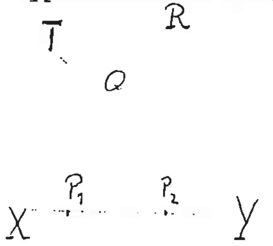
Morris Kline sagt (in "*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*", New York, Oxford Univ. Press (1972), Fifth printing (1979)): "The experiment proved nothing because experimental error was much larger than the excess, and so the correct sum could have been 180° or even less."

Vor Gauß glaubte man fest, daß die euklidische Geometrie den realen Raum beschriebe. Das bezweifelte Gauß und brachte damit beide Geometrien auf dasselbe Niveau. Dieses nennen wir die vierte dogmatische ideologische Revolution.

Auch Janos Bolyai und Nicolai Ivanovich Lobacevskii (1793-1856) trugen mit fortschrittlichsten systematischen Studien zur Entwicklung der hyperbolischen Geometrie bei. Deshalb nennt man Gauß und diese beiden auch, unberechtigterweise, die Schöpfer der nichteuklidischen hyperbolischen Geometrie.

Eugenio Beltrami (1835-1900) war mit seinem Artikel "*Saggi di interpretazioni della geometria no euclidea*", Neapel 1868, der erste Mathematiker, der ein euklidisches Modell der hyperbolischen Ebene fand. Felix Klein (1849- 1925) konstruierte die Abstandsfunktion dieses Modells in seinem Werk "*Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*", Leipzig 1871-1872.

Beltrami wählte einen Kreis g auf einer euklidischen Ebene. Die hyperbolischen Punkte werden durch die euklidischen Punkte innerhalb des Kreises g repräsentiert. Jede gerade Linie der hyperbolischen Geometrie wird durch eine offene Sehne (engl. open chord) XY (die weder X noch Y einschließt) dargestellt. Wir setzen Punkt Q innerhalb des Kreises g fest, der nicht auf der Sehne XY liegt. Von Q aus kann man zwei verschiedene Parallelen zur hyperbolischen Geraden XY ziehen, nämlich TY und RX.



Felix Klein definierte die Abstandsfunktion in folgender Weise: $d(P_1, P_2) = c.\log(P_1\ P_2, XY)$, wobei c eine Konstante und $(P_1 P_2, XY)$ der doppelte Quotient (engl. cross ratio) dieser vier Punkte ist. Auf diese Weise wurde also bewiesen: Falls die euklidische Geometrie konsistent ist, ist es auch die hyperbolische.

Dies war schon eine rationale ideologische Revolution. Zuvor bestanden zwei Dogmen bzw. Überzeugungen:
1. Die oben zitierten Mathematiker, welche sich mit der hyperbolischen Geometrie beschäftigten, fanden keinen Widerspruch, obwohl sie in sich widersprüchlich ist.
2. Diese Geometrie ist konsistent.
Von diesen zwei Dogmen bleibt nur das zweite gültig auf Grund eines Beweises, welcher das erste verneint. Damit ist das 5. euklidische Postulat unabhängig von den neun übrigen euklidischen Axiomen, und die zitierte doppelte Anomalie wurde eliminiert.

Rosenfeld sagt in seinem Buch "*A History of Non-Euclidean Geometry*" 1976: "The direct connection between hyperbolic geometry and special relativity was established by the German physicist Arnold Sommerfeld in the paper '*Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie*', Leipzig Phys.Z. 1909, 10, Nr. 22, Seiten 826-829."

Marvin Jay Greenberg schreibt in seinem Buch "*Euclidian and Non-Euclidian Geometries*" (1974): "Prof. Serg Lang now needs hyperbolic geometry for his research on automorphic functions and number theory."

Diese zwei zitierten Beispiele zeigen uns, daß dieses Hauptereignis Anwendungen sowohl in den empirischen Wissenschaften als auch in anderen mathematischen Disziplinen findet.

Consejo Superior de Investigaciones Cientificas
Instituto de Matematicas
c. Serrano 123
28006 Madrid. España

REVALUATING BROUWER'S INTUITIONISTIC MATHEMATICS

by Miriam Franchella
Dipartimento di Filosofia -Università Statale- Via Festa del Perdono 7- I-20122 - Milano- Italy

Brouwer's intuitionism is well known for its drastic cuts to mathematics. Yet, Brouwer also enriched mathematics in some aspects. That is why it is interesting to consider Brouwer's intuitionistic alternative mathematics.

Brouwer's mathematics was based on his Weltanschauung. It consists of a mysticism for which all attempts to reach something outside the Self are incomplete and, therefore, frustrating. On this ground, mysticism asserts that the possibility for a man to be happy lies in his inner self. There are three phases in this movement towards to the exterior: perception - through space-time intuition; domination of nature - by means of science; and domination of other men - by means of language. Since mathematics is both science and language, it has to be morally condamned. Therefore, Brouwer engaged himself with reconstructing a mathematics that could be accepted as morally positive. There were two basic conditions: mathematics had to be developed 1) in the intellect and 2) without any intention to apply it. Since mathematics studies number, temporal intuition can be plausibly accepted as its starting point: the possibility (intrinsic to man) of isolating an istant, conserving it in the memory, isolating another instant from the former, and so on, makes it possible to produce natural numbers. For this reason, Brower called temporal intuition ``intuition of two-oneness". As mathematics had to be developed internally, Brouwer could refer neither to a theory of mathematical entities as independent of man, nor to a classical theory of truth as correspondence to something outside man. Brouwer maintained that it is more appropriated both to affirm mathematical entities as existing only if they can be constructed mentally and to define truth as inner experience of mental evidence. So, according to Brouwer, mathematics has to be developed from a (simpler) piece of evidence to another (more complex), starting from the intuition of two-oneness.

This fact has two immediate consequences: a new definition of the continuum and the non reliability of the principle of excluded middle.

As for the principle of excluded middle, intuitionism defines logic as the set of the laws of thought. Now, mathematics has to be pure thought, and therefore proceeds autonomously without applying schemes from outside. Consequently, the only meaning which logical laws can have is as schemes of linguistic expressions, that is in collecting the regularities present in mathematical expressions. Hence, logical assertions have to correspond to mathematical reasoning (that is to mental constructions) in ordered to be reliable. In particular, a negative assert is true if and only if it corresponds to a construction which leads to an absurdity. So, the principle of excluded middle says that, for each property and for each mathematical entity, either there is a construction which proves that the entity possesses the property or there is a construction which proves that it would be absurd that the entity possesses the property. But this is the same as affirming the solvability of all mathematical problems. Therefore, the existence of a mathematical problem that is still open causes the unreliability of the principle of excluded middle.

As for the continuum, in the two-oneness it is included the concept of the possibility of splitting. Therefore, the continuum can be conceived as a set of

indefinitely proceeding sequences (potential and non actual infinity) and represented as an indefinitely branching tree, the so-called ``spread".

These two innovations yield in their turn a plenty of consequences in mathematics:
1) the rejection of the reductio ad absurdum;
2) the unacceptability of some classical properties;
3) the non validity of some classical theorems;
4) the redefinition of the notion of order on the continuum;
5) the continuity theorem and the non-splitting theorem;
6) the splitting of mathematical notions.

1) The reductio ad absurdum can no longer be used, since the principle --A->A, on which the last step of this kind of reasoning is based and which is classically equivalent to the principle of excluded middle, is no more reliable. Namely, intuitively, we can not affirm that in all cases, if we possess the proof that the absurdity of A is absurd, then we also possess the proof of A.

2) As examples of classical properties that do not hold any more there are the decidability of the finiteness of a species, the fifth Euclidean postulate and the existence of only three possible relations between two straight lines. From the intuitionistic point of view, their asserts affirm that there is a construction which proves respectively:
a) if a certain species is finite,
b) that there is a parallel through a given point;
c) that two given straight lines are parallel or intersect in one or two points.
Still, the definition of the continuum as a set of indefinitely proceeding sequences allows us to construct a real number referring to our state of knowledge at each stage of the sequence about a certain mathematical problem that is unsolved at the moment in which we begin the construction. As long as the problem remains unsolved, we do not know how the real number is, and consequently we cannot possess the above mentioned proofs, when the species and the lines resp. contain or pass through such a point (such a real number).

3) Some classical theorems can no longer hold, if reinterpreted intuitionistically. Some examples are: a) the theorem which affirms the existence of a maximum value for a continuous function everywhere defined on a closed interval, b) the Bolzano-Weierstrass theorem, and c) the Heine-Borel theorem .

a) The first theorem fails, because we can not find the maximum if some values of the function are real numbers (i.e. indefinitely proceeding convergent sequences) constructed as in 2), that is by referring to our state of knowledge at each stage of the sequence about a certain mathematical problem that is unsolved at the moment in which we begin the construction.

b) Brouwer mentioned two forms of the Bolzano-Weierstrass theorem:
b.1) every unitarily bounded infinite set of real numbers has an accumulation point;
b.2) every unitarily bounded set of real numbers without an accumulation point is bounded in number.
These two forms are classically, but non intuitionistically equivalent. However, neither of them holds intuitionistically, because we can construct infinite proceeding

sequences as above (see a)) such that we are not able to find neither the accumulation point (in the first case) nor the number by which the set is bounded (in the second case).

c) The Heine-Borel theorem affirms that if to each point P of a consolidated point species Q of the Cartesian plane a neighbourhood has been made to correspond, then from the species O of these neighbourhoods a finite subspecies O_1 can be selected such that for each point P of Q at least one element of O_1 is a neighbourhood. The theorem fails because, from the intuitionistic point of view, the subspecies O_1 has to be actually selected, and this is impossible if we choose for P a real number constructed as above (see a)).

As for theorems b) and c), Brouwer gave new asserts for them which referred to more restricted sets of real numbers, and could prove that they hold intuitionistically.

4) The classical order does not hold on the intuitionistic continuum, for trichotomy fails. Namely, if we consider the number zero and the real number defined as in 2), we can not prove if they are equal or if one is larger than the other. Therefore, Brouwer investigated the more essential characteristics that a relation must possess in order to be considered as a relation of order.

He found out that the simplest relation of order is what he called *partial order in projection.* A set is so ordered if there are relations $x<y$, $x>y$, $x=y$, each holding for certain ordered pairs x, y of S and satisfying the following conditions:

I) $a=a$;
II) $a=b$ implies $b=a$;
III) $a=b$ and $b=c$ imply $a=c$;
IV) $a<b$ and $b>a$ imply each other;
V) $a<b$ and $a=r$ and $b=s$ imply $r<s$;
VI) $a<b$ and $b<c$ imply $a<c$;
VII) $a<b$ precludes $a>b$.

A set S which is partially ordered in projection is *partially ordered* if for it equality of x and y has been defined in such a way that the relations $x=y$ and $x=y$ are equivalent.

A partially ordered set is *virtually ordered* if also the following condition hold:
VIII) the simultaneous absurdity of $a=b$ and $a<b$ implies $a>b$;
IX) the simultaneous absurdity of $a<b$ and $a>b$ implies $a=b$.

Brouwer proved that the sistem concerned of relations in the virtually ordered set S is inextensible, i.e. that no further assertions $x'=y'$, $x'<y'$, or $x'>y'$ (x' and y' elements of S) can be added to the existing ones in a non-contradictory manner. He also pointed out that the intuitionistic continuum is virtually ordered. This required that he revised the properties of density-in-itself, separability-in-itself, connectedness, everywhere-density, and local compactness, which are classically defined on the continuum referring to the to traditional notion of order (and that, therefore, could no longer hold on the intuitionistic continuum).

5) Both the continuity theorem and the non-splitting theorem are consequences of the so-called fan theorem. A "fan" is a tree whose nodes have only a finite number of

successors. The theorem affirms that, if to each branch *e* of a fan a natural number *n* can be assigned, then a natural number *m* can be calculated such that each n_e is determined by the node of order *m* belonging to *e*.

Starting from this theorem, it is possible to prove the continuity theorem, which affirms that each full function of the unity continuum is uniformly continuous. This result must not be considered really surprising, since the intuitionistic notion of full function is more restricted than the classical one.

The second corollary of the fan theorem is the splitting theorem, which affirms that the continuum cannot contain a removable proper subset, i.e. a subset such that each element of the continuum either belongs to the subset or cannot possibly belong to it. This corollary is particularly important, since it entails the contradictority of the principle of excluded middle. Namely, the splitting theorem causes the impossibility to decide for each natural number whether it is rational or not, such decidability being equivalent to splitting the continuum into the two proper subspecies of the rational and the irrational numbers. Therefore, there is at least a property (indeed, just the property "to be rational") and a domain of mathematical entities (the set of all real numbers x) for which -∀x(P(x) v -P(x)). Hence, the general assert of the law of excluded middle (∀P∀x(P(x) v -P(x)) is false. It must be remarked that this does not imply ∀x-(P(x) v -P(x)): this latter is also false, since it is equivalent to ∀x(-P(x) & --P(x)), which is a contradiction.

6) Some classical notions, if reinterpreted intuitionistically, have to be splitted, since they are no more equivalent. Among these we quote here:
a) the notion of difference between real numbers;
b) the notion of differentiability of functions;
c) the notions of equal sets, of different sets and of subsets
d) the notion of non-oscillating sequences.

a) The notion of difference between real numbers is splitted into the notion of difference *tout court* and the notion of apartness. Two real numbers *a* and *b* are *different* if their coincidence is absurd, i.e. is it is absurd that for every natural number *k* we can find a natural number *n(k)* such that $|a_{n+p}-b_{n+p}|<1/k$ for every natural number *p* ; two real numbers *lie apart* from each other if a natural number *n* and a natural number *k* can be found such that $|a_{n+p}-b_{n+p}|>1/k$ for every natural number *p*. The latter is a positive notion of difference, since it is indicated the very distance between the numbers, and not the mere impossibility of coincidence. Obviously, the positive notion is stronger than the negative one, because it demands the actual indication of the numbers *n* and *k*.

b) The notion of differentiability is splitted into the following two:
let F(x) be a total real function of one independent variable x on the intuitionistic continuum; P be an arbitrary chosen value of x; ρ be an indefinitely proceeding sequence i_1, i_2, ... of closed intervals (whose endpoints are apart from each other) containing P, which converges positively to P; d_v the difference quotient of F(x) corresponding to i_v.

b.1) If a real number *c* can be constructed with the property that to every natural number *n* a natural number *m* can be associated such that for every ρ and every i_v, $i_v<2^{-m}$ entails $|d_v-c|<2^{-n}$, then F(x) is *strongly differentiable* in x=P and it possesses the strong differential quotient *c* in x=P.

b.2) If a real number *c* can be constructed with the property that it is impossible to choose the sequence ρ in such a way that, for a suitably chosen natural number *m*, $|d_v-c|>2^{-m}$ for every *v*, then F(x) is *weakly differentiable* in x=P and it possesses the weak differential quotient *c* in x=P.
Also here there are a positive (and stronger) notion and a negative (and weaker) one.

c) Intuitionistic sets are called *species* and are defined as properties supposable for mathematical entities previously acquired, satisfying the condition that if they hold for a certain mathematical entity, they also hold for all mathematical entities which have been defined to be equal to it.

Two species are *equal* if for each element of them an element of the other equal to it can be indicated.

Two species are *different* if their equality proves to be absurd.

A species *deviates* from another if it possesses an element which cannot possibly belong to the other species, or, what is the same, is different from each element of the other.

Two species are *congruent* if neither can deviate from the other.

Two species M and N are *semiidentical* if they are congruent and every element of M is also element of N.

A species M is a *subspecies* of the species N if every element of M can be proved to belong to N.

M is a *proper subspecies* of N if in addition N deviates from M.

M is a *removable subspecies* of N if each element of N either belongs to M or cannot possibly belong to M.

The notion of equal species is stronger than the classical one, because it requires to find the element of the other species which is equal to a certain element of the given species. For the same reason, it is intuitionistically not equivalent to affirm that two species are not equal and that there is an element of the one specie which differs from all elements of the other. This causes the splitting of the notions of equality, difference and subspecies.

d) Let s_n be the sum of the first n elements of the infinite sequence $u_1+u_2+...$, where each u_n is a real number.

The sequence is non-oscillating if for each ε>0 it is impossible to find at the same time both an infinite sequence of indefinitely growing positive integers $n_1, n_2, ...$ and an infinite sequence of positive integers $m_1, m_2, ...$ such that $|s_{n_v+n_m}-s_{n_v}|>\varepsilon$ for every natural number v.

The sequence is negatively convergent if it exists a real number s with the property that for every ε>0 it is impossible to find an infinite sequence of indefinitely growing positive integers $n_1, n_2, ...$ such that $|s-s_{n_v}|>\varepsilon$ for every natural number v.

The sequence is bounded if there exist two real numbers g_1 and g_2 such that $g_1<s_n<g_2$ for every natural number n. The sequence is positively convergent if there exists a real number number s with the property that for every ε>0 there is a positive integer n_ε such that $|s-s_n|<\varepsilon$ for every $n>n_\varepsilon$. As for a) and b), the notion of oscillating sequences is the weakest of the four and the notion of positively-convergent sequences is the strongest, although they are classically equivalent.

I hope that at this point it is clear how much appropriate the observation which Heyting [3] wrote in 1932 (p. 275) referring to Brouwer's intuitionism is: "La nécessité de sacrifier plusieurs énoncés classique n'entraine pas forcément un appauvrissement de la science. La subtilité des nuances logiques engendre des distinctions mathématiques et des finesses de démonstration d'un charme incomparable. Même celui qui cherche la beauté dans le nombre des théorèmes sera content, car par ces distinctions nouvelles beaucoup de théorèmes se divisent en plusieurs cas différents".

REFERENCES

[1] Brouwer L.E.J. [1975] *Collected Works* vol. 1 (= CW I) (A. Heyting ed.), North-Holland, Amsterdam

[2] id. [1981] *Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism* (D. van Dalen ed.), Cambridge University Press, Cambridge

[3] Heyting A. [1932] "Réponse à MM. Barzin et Errera, *L'enseignement mathématique 31* pp. 274-275

Der "Vierfeldertest" von Carl Liebermeister - eine Bemerkung zur Entwicklung der medizinischen Statistik im 19. Jahrhundert

Von Robert Ineichen, Fribourg

I

"Wenn wir aus den thatsächlichen Erfolgen Schlüsse ziehen wollen, so ist die unumgänglich notwendige Vorbedingung, zu untersuchen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass die beobachteten Verschiedenheiten des Erfolgs nicht einfach dem Zufall zuzuschreiben sind."- Mit dieser Ansicht stand Prof. Dr. med. Carl Liebermeister (1833 - 1901) - zunächst von 1865-1871 Direktor an der Medizinischen Universitätsklinik in Basel, dann Professor an der Universität Tübingen[1] - zu jener Zeit nicht allein. Ganz ähnlich und ebenso deutlich hatte sich zum Beispiel schon L.D.J. Gavarret[2], Arzt und Professor für Physique médicale an der Medizinischen Fakultät von Paris, in seinen "Principes généraux de statistique médicale" von 1840 geäussert: "Le premier travail d'un observateur qui constate une différence dans les résultats de deux longues séries d'observations, consiste à chercher si l'anomalie n'est qu'apparente ou si elle est réelle...Le calcul des probabilités peut être employé avec le plus grand succès à éclairer cette question.." Und dieser Gavarret hat ja mit dem eben erwähnten Buch, das eine sehr allgemeinverständlich geschriebene Darstellung von damals zur Verfügung stehenden Methoden der mathematischen Statistik im Hinblick auf die Anwendungsmöglichkeiten in der medizinischen Forschung gibt, offensichtlich "eine neue Epoche der mathematischen Statistik eingeleitet" (H. Freudenthal u. H.G. Steiner, 1966), - "the most influential and controversial book on the mathematics of medical statistics" (Th.M. Porter, 1986). Die von Gavarret dargelegte Lehre ist sehr bald in verschiedene einschlägige Abhandlungen eingegangen. Wir erwähnen an deutschsprachigen Darstellungen aus dem hier interessierenden Zeitraum jene von G. Schweig (1854), Fr. Oesterlen (1865), A. Fick (1866), W. Jessen (1867) und von J. Hirschberg (1874)[3].

Gavarrets Ausführungen gestatten - in der heute gebräuchlichen Terminolgie ausgedrückt - im wesentlichen, die folgenden beiden Aufgaben zu behandeln:

- Berechnung eines Konfidenzintervalls für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit, wenn eine entsprechende relative Häufigkeit vorliegt, die auf Grund einer grossen Zahl von Beobachtungen bestimmt worden ist, und weiter
- die Untersuchung, ob der Unterschied von zwei relativen Häufigkeiten, beide wiederum bestimmt aus einer grossen Zahl von Beobachtungen, signifikant sei oder nicht.

Er arbeitet dabei stets mit einer Konfidenzzahl (Vertrauenswahrscheinlichkeit) von 0,9953 bzw. mit einem Signifikanzniveau von 1-0,9953, also von ungefähr 5‰. Die entsprechenden Formeln konnte er dem Buch seines Lehrers an der Ecole Polytechnique von Paris entnehmen, den "Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et civile" von S.D. Poisson aus dem Jahre 1837.

Trotz der Bemühungen von Gavarret und von allen jenen, die seine Ideen zu verbreiten versuchten, war die medizinische Statistik damit noch keineswegs etabliert. - Carl Liebermeister stellt zwar in seiner Abhandlung "Ueber Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung auf therapeutische Statistik" (1877), aus der wir oben zitiert haben, "nicht in Abrede", dass Gavarrets Tabellen "unter Umständen eine gewisse Brauchbarkeit besitzen". Er weist aber auf zwei nach seiner Ansicht gravierende Mängel hin:

- Zunächst die Beschränkung auf eine einzige Konfindenzzahl bzw. auf ein einziges Signifikanzniveau. Er möchte "vielmehr, dass man für jedes vorliegende Beobachtungsmaterial mit Sicherheit und Genauigkeit berechnen könne, mit welchem Grad von Wahrscheinlichkeit der Zufall ausgeschlossen ist". Diesen Mangel hätte man leicht beheben können. So gibt z.B. schon J. Hirschberg (1874) neben der Tabelle von Gavarret auch noch eine solche für die Konfidenzzahl 0,916, also für ein Signifikanzniveau von ungefähr 8,5 %.
- Viel gewichtiger ist jedoch der zweite Einwand von Liebermeister: "Ferner ist es für die praktische Verwendung sehr ungünstig, dass die Tabellen gewöhnlich erst mit der Zahl 300, ausnahmsweise mit 200 anfangen. ... Offenbar sind dadurch die meisten in praxi vorkommenden Beobachtungsreihen von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgeschlossen." - Grosse Zahlen, aber doch wohl nicht immer 200 oder gar mehr, mussten deshalb verlangt werden, weil Gavarret Formeln gegeben hat, die auf der Normalverteilung beruhen.

III

Diesen Mängeln will Liebermeister mit seiner Darstellung abhelfen. Er tut dies auf einem sehr originellen Weg, der sich vollständig von den Ausführungen in den oben genannten Werken über medizinische Statistik abhebt, und sich - soweit wir sehen - in dieser Form nicht in den zeitgenössischen Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorfindet. Er sagt denn auch, dass es ihm gelungen sei, "Formeln abzuleiten, welche für die praktische Anwendung kaum irgendwelche mathematischen Kenntnisse voraussetzen, dabei aber geeignet sind, die alltäglich vorkommenden Fragen der therapeutischen Statistik mit jedem nur wünschbaren Grad der Genauigkeit zu lösen". Die einschlägige Fachliteratur war ihm bekannt, wie aus verschiedenen Aeusserungen in seiner Arbeit hervorgeht.

Liebermeister geht von der Situation aus, wo bei einer bestimmten Krankheit zwei verschiedene Behandlungsweisen , etwa B' und B", angewendet worden sind. B' habe zu a Todesfällen und b Genesungen geführt, B" zu c Todesfällen und d Genesungen. Die Situation kann also – wie wir heute sagen – durch eine Vierfeldertafel dargestellt werden:

	Todesfälle	Genesende	Summen
B'	a	b	a+b
B"	c	d	c+d
Summen	a+c	b+d	

Diese Vierfeldertafel weist in jenen Fällen, die Liebermeister interessieren, kleine Randwerte auf. Es liegt nach heutiger Ausdrucksweise eine "schwach besetzte Vierfeldertafel" vor, und man würde heute wohl den in den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts entwickelten "exakten Test von R.A. Fisher" verwenden, um abzuklären, ob zwischen den Ergebnissen der beiden Therapien B' und B" ein signifikanter Unterschied vorhanden ist, also genau das, was auch Liebermeister interessiert. Man testet dabei die Nullhypothese "Keine unterschiedliche Wirkung der beiden Behandlungsweisen" und fragt nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter dieser Hypothese – und bei festgehaltenen Randwerten – die eben beobachtete Verteilung oder noch unwahrscheinlichere Verteilungen zufällig ergeben (vgl. z.B. L. Sachs, 1969).

IV

Liebermeister packt das Problem völlig anders an: "Denken wir uns zwei Urnen, deren jede eine sehr grosse Zahl theils schwarzer theils weisser Kugeln in beliebigem unbekanntem Verhältnis enthält." – Er zieht aus der ersten Urne mit Zurücklegen Kugeln und erhält dabei a schwarze und b weisse, analog aus der zweiten c schwarze und d weisse. Dies ist offensichtlich ein recht plausibles Modell für die oben geschilderte Situation: Die Kugeln der ersten Urne stellen jene Grundgesamtheit dar, aus der eine Stichprobe im Umfange z' gezogen worden ist (mit Zurücklegen), deren Elemente der Behandlung B' unterzogen worden sind; dabei haben sich a Todesfälle und b Genesungen ergeben, z'=a+b. Analoges gilt für die zweite Urne. – Es sei nun dabei etwa $c : (c+d) < a : (a+b)$. Jetzt stellt sich Liebermeister die Frage: "Wie gross ist nach diesem Resultat der beiden Ziehungen die Wahrscheinlichkeit, dass das Verhältnis der schwarzen Kugeln zur Gesamtzahl der Kugeln in der zweiten Urne kleiner ist als in der ersten ?" Ist diese Wahrscheinlichkeit relativ

gross gegenüber der Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses, so würde dies für ihn heissen, dass "wirklich bei der zweiten Reihe von Beobachtungen die constanten Verhältnisse günstiger waren".Er überlegt jetzt so:

(1) In der ersten Urne, U', seien n Kugeln, wovon s schwarze, in der zweiten Urne, U", seien ebenfalls n Kugeln, davon t schwarze. Binomische Verteilung und Multiplikationssatz ergeben ihm sofort, dass sich das eben beschriebene Ergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit ergibt, die durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$[(a+b)!(c+d)!\cdot(s/n)^a\cdot(1-s/n)^b\cdot(t/n)^c\cdot(1-t/n)^d] \ : \ a!b!c!d!.$$

(2) s und t sind unbekannt: "In Betreff ihres Verhaltens kommen für uns zwei Möglichkeiten in Betracht, die wir nach ihrer Wahrscheinlichkeit zu vergleichen haben." Es sind dies

- "Erste Hypothese": Es ist $t < s$. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Situation vorliegt, bezeichnet Liebermeister mit P.
- "Zweite Hypothese": Es ist $t \geqq s$. Die Wahrscheinlichkeit dieser Situation wird mit 1-P bezeichnet.

Weiter wird vorausgesetzt, dass $a,b,c,d \neq 0$, also $1 \leqq s \leqq n-1$ und ebenso $1 \leqq t \leqq n-1$. Und schliesslich noch – sehr wichtig! – "dass vor Beginn der Ziehungen kein Grund vorhanden gewesen sei, irgend ein bestimmtes Verhältnis der schwarzen Kugeln für wahrscheinlicher zu halten als ein anderes". – Wenn wir heute Liebermeisters Rechnung nachvollziehen müssen, so werden wir wohl eine Serie von (n-1) Urnen U_i einführen, i=1,2,...,(n-1), wobei jede Urne mit n Kugeln, wovon i schwarze und (n-i) weisse, gefüllt ist. Wir denken uns zunächst eine Urne ausgewählt, etwa U_s , und die Ziehungen mit Zurücklegen ausgeführt, die uns a schwarze und b weisse Kugeln geliefert haben. Wir wählen nochmals eine Urne aus, etwa U_t und denken uns wieder die Ziehungen mit Zurücklegen ausgeführt, die uns diesmal c schwarze und d weisse Kugeln ergeben. Die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Urne zu wählen, ist auf Grund der in diesem Abschnitt genannten Voraussetzungen jedesmal 1:(n-1). Und nun suchen wir die bedingte Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des Ereignisses "$t < s$" unter der Bedingung, dass das in (1) geschilderte Ereignis, also das in der Vierfeldertafel dargestellte, eingetreten ist. Wir ziehen den Satz von Bayes heran und kommen nach einigen Umformungen zum gleichen Resultat wie Carl Liebermeister. – Den Terminus "bedingte Wahrscheinlichkeit" kannte man übrigens damals noch nicht; noch E. Czuber (1914) spricht in solchen Fällen von "relativer Wahrscheinlichkeit".– Wie wir oben bemerkt haben, bezeichnet Liebermeister diese Wahrscheinlichkeit einfach mit P, die des Gegenereignisses mit 1-P.

3) Für das Verhältnis P : (1-P) findet Liebermeister dann durchaus richtig

$$P : (1-P) = \sum_{s=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{s-1} s^{a}(n-s)^{b}t^{c}(n-t)^{d} : \sum_{s=1}^{n-1}\sum_{t=s}^{n-1} s^{a}(n-s)^{b}t^{c}(n-t)^{d}$$

(4) "Mit der Gewinnung dieses Resultates ist die Aufgabe, die wir uns gestellt hatten, gelöst. Es bleibt nur noch übrig, mittels rein mathematischer Manipulationen die erhaltenen Ausdrücke so umzuformen, dass sie für die Rechnung möglichst bequem werden." Die notwendigen "Manipulationen" führen auf Eulersche Integrale und Reihenentwicklungen. Wesentlich ist zu beachten, dass dabei $n \to \infty$ geht, dass aber a,b,c,d ihre - allenfalls kleinen - Werte behalten dürfen. Für P findet Liebermeister dann die Formel

$$P = \frac{(a+b+1)!(c+d+1)!(a+c+1)!(b+d+1)!}{a!(b+1)!(c+1)!d!(a+b+c+d+2)!}\left[1 + \frac{ad}{(b+2)(c+2)} + \frac{a(a-1)\cdot d(d-1)}{(b+2)(b+3)(c+2)(c+3)} + \frac{a(a-1)(a-2)\cdot d(d-1)(d-2)}{(b+2)(b+3)(b+4)(c+2)(c+3)(c+4)} + \cdots\right]$$

Eine entsprechende Formel wird auch für 1-P gegeben. Liebermeister bemerkt noch, dass er seine "Formeln dem Professor der Physik Herrn Hagenbach-Bischoff und dem Professor der Mathematik Hernn Kinkelin in Basel[4] vorgelegt" hat "und dass Diese die Richtigkeit derselben bestätigten".- Ob diese Formeln, die ja jeweils den Anfang einer verallgemeinerten hypergeometrischen Reihe darstellen, im Hinblick auf den anvisierten Kreis von Benützern wirklich das Prädikat "bequem" verdienen ? Bei ganz kleinen Zahlen sind diese Formeln ja durchaus praktikabel: So führt etwa die Vierfeldertafel

2	1
1	3

relativ rasch auf P = 4!5!4!5!(1 + 2/3 + 1/12) : (2!2!2!3!9!) = 5/6 und damit auf 1-P = 1/6. "Man kann demnach 5 gegen 1 wetten, dass in der zweiten Urne das Verhältnis der schwarzen Kugeln geringer sei als in der ersten.[5] Wären von gleichartigen Krankheitsfällen bei einer Behandlungsmethode von 3 Kranken 2 gestorben, bei einer andern von 4 Kranken nur 1, so wäre schon 5 gegen 1 zu wetten, dass dies nicht Zufall sei, sondern dass bei der zweiten Reihe von Fällen die Bedingungen günstigere waren." Doch Stärker besetzte Tafeln verlangen leider sofort Rechnungen, die damals logarithmisch ausgeführt werden mussten. Liebermeister gibt selbst entsprechende Beispiele.

V

Kann man es in dieser Situation den Medizinern verargen, dass sie hier offensichtlich Liebermeister nicht gefolgt sind ? Man findet übrigens weder in den damaligen Ausgaben des "Correspondenzblatt für Schweizer Aerzte" noch in "Schmidts Jahrbüchern" Hinweise auf Liebermeisters Arbeit.[6] - "Liebermeister ist mit seinen Forderungen nicht durchgedrungen. Zum Teil kommt dies daher, dass die von ihm entwickelten Formeln reichlich kompliziert sind", schreibt 70 Jahre später - sicher mit Recht - wiederum ein Direktor der Medizinischen Universitätsklinik Basel, nämlich Rudolf Stähelin (1943). Und im heutigen Arsenal der mathematischen Statistik, "als eigene Disziplin etwa 1890 entstanden" (H. Witting, 1990), stösst man nicht mehr auf den Test von Liebermeister; andere Prüfverfahren sind an seine Stelle getreten, vor allem der bereits eingangs genannte "exakte Test von R.A. Fisher" im Falle von schwach besetzten Vierfeldertafeln und der Chi-Quadrat-Test bei stark besetzten Tafeln (vgl. z.B. L. Sachs, 1969). - Allerdings muss bemerkt werden, dass heute neben den bereits als "klassisch" geltenden Schätz- und Testverfahren auch wieder Methoden vorliegen, die auf Gedankengängen von Bayes beruhen. Sie schliessen jedoch nicht an Liebermeister an.[7]

Sehr beachtenswert erscheint uns aber trotzdem, dass hier ein Mediziner nicht nur den Einbezug stochastischer Methoden fordert, sondern selbst einen originellen Weg aufzeigt, einen Weg, der nur mit sehr beachtlichem mathematischen Fachwissen gefunden werden konnte! So überrascht es denn nicht, in seiner Biographie, verfasst von seiner Tochter (M.Abegg-Liebermeister, 1919), zu lesen: "...er besass in der Tat ein für einen Mediziner ungewöhnliches Mass von mathematischem Wissen und Können. Jahrelang befasste er sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die er auch für die eigene Wissenschaft nutzbar zu machen hoffte." - Daneben war er aber auch ein bedeutender Mediziner, schon in seinen Basler Jahren: "Was er in den kurzen Jahren seines Wirkens hier aufbaute, hatte Bestand. Mit Liebermeister ist die medizinische Universitätsklinik Basel zu einem Zentrum wissenschaftlicher Medizin geworden" (H.M. Koelbing, 1969).

Anmerkungen

1 Ueber das Leben und das sehr reichhaltige Lebenswerk von Carl Liebermeister orientieren M.Abegg-Liebermeister (1919), H.R. Baumberger (1980) und H.M. Koelbing (1969). - Geboren 1831 in Ronsdorf (D), Prof. an der Univ. Basel 1865-71, dann Prof. an der Univ. Tübingen, gestorben in Tübingen 1901.

2 Louis-Dominique-Jules Gavarret (1809-1890): Studium zunächst an der Ecole Polytechnique, dann an der Medizinischen Fakultät in Paris. 1844 Berufung an die Medizin. Fakultät in Paris: "1844, le jeune médecin inaugura à la faculté une très brillante carrière de professeur, où il manifesta ses remarquables dons de vulgarisateur ... et l'originalité de

ses vues qui...tenait compte des progrès en sciences physiques et mathématiques." (Dict. de Biogr.française, t.15, Paris 1982)

[3]Eine sehr reichhaltige, detaillierte Darstellung der Geschichte der medizin. Statistik bei O.B. Sheynin (1982).

[4]Eduard Hagenbach-Bischoff, 1833-1910. - Hermann Kinkelin, 1832-1913 (u.a. Gründer und erster Präs. der Schweiz.. Statist. Ges.).

[5]Der exakte Test von Fisher liefert für diese Tafel die Wahrscheinlichkeit, dass die beobachtete Besetzung der Tabelle oder eine noch unwahrscheinlichere zustandekommt. Diese Wahrscheinlichkeit P* finden wir als eine Summe von Gliedern einer hypergeometrischen Verteilung (vgl. z.B. L. Sachs, 1969): P* = 13/35. - Dass P ≠ P* ist, braucht uns nicht zu stören: Die Fragestellungen in den beiden Tests sind ganz verschieden voneinander.

[6]Nach einer freundlichen Mitt. von Prof. U. Boschung vom Medizinhistor. Inst. Univ.Bern.

[7]So darf es nicht überraschen, ihn in histor. Darstellungen, z.B. bei St.M. Stigler (1986) oder bei H. Witting (1990), nicht vorzufinden ; Th. M. Porter (1986) erwähnt ihn kurz, ohne aber auf seinen Test näher einzugehen.

Literatur

- Abegg-Liebermeister, M.(1919), Carl Liebermeister. H. Laupp Tübingen.
- Baumberger, H.R.(1980), Carl Liebermeister 1833 - 1901. Diss. Zürich 1980.
- Czuber, E.(1914), Wahrscheinlichkeitsrechnung Bd.1, Teubner Leipzig.
- Fick, A.(1866), Ueber Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf medicinische Statistik. In: Fick, A.(1866), Die medicinische Physik. Vieweg Braunschweig.
- Freudenthal H. u. Steiner, H.G.(1966), Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. In: Behnke, H. e.a., Grundzüge der Mathematik IV. Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen.
- Gavarret, L.D.J. (1840), Principes généraux de statistique médicale.Bechet et Labé Paris.
- Hirschberg, J.(1874), Die mathematischen Grundlagen der medizinischen Statistik elementar dargestellt. Von Veit Leipzig.
- Jessen, W.(1867), Zur analytischen Statistik.Zeitschr. f. Biologie, III, 128-136.
- Koelbing, H.M. (1969), Carl Liebermeister (1833-1901), der erste Chefarzt der Basler medizin.Universitätsklinik. Gesnerus 26, 232-248.
- Liebermeister, C.(1877), Ueber Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung auf therapeutische Statistik. In: Richard Volkmann (Hrsg.), Sammlung klinischer Vorträge 110, 935-962.
- Oesterlen, Fr.(1865), Handbuch der medicinischen Statistik. H.Laupp Tübingen.
- Porter, Th.M.(1986), The rise of statistical thinking 1820-1900. Princeton Univ.Press Princeton.
- Sachs, L.(1969), Statistische Auswertungsmethoden. Springer Berlin.
- Schweig, G.(1854), Auseinandersetzung der statistischen Methode in besonderem Hinblick auf das medicinische Bedürfniss. Archiv für physiolog. Heilkunde 13, 305-355.
- Sheynin, O.B.(1982), On the History of Medical Statistics. Arch. for History of Exact Sciences 26, 241-286.
- Staehelin, R.(1943), Grundsätzliches zur Bewertung des Erfolges von Arzneimitteln. Schweiz. Medizin. Wochenschrift 1943, 549-552.
- Stigler, St.M.(1986), The History of Statistics - The Measurement of Uncertainty before 1900. Harvard Univ. Press, Cambridge Mass.
- Witting, H.(1990), Mathematische Statistik. In: Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990. Festschrift zum Jubiläum der Dt.Math.-Verein. Vieweg Braunschweig, 781-815.

SUMMARY

BOŠKOVIĆ'S CURVE: SOME LIMIT PROBLEMS

In numerous and diverse mathematical researches made by Rudjer Bošković, the three so called "Bošković's curves" have a special role and place. Bošković's curve most frequently understands a curve deriving from Bošković's law of forces by observing the attractive-repulsive force depending on distance. Namely, Bošković noted himself that any two material points are equally determined to approach at one distance and recede at another. He called this determination force, attractive in the first case and repulsive in the second. Bošković presented the continuous change of force by a curve in the coordinate system where the distance between material points is given by the abscissa and the force itself by the ordinate. Attractive force was presented by negative ordinate and the repulsive by positive.

According to Bošković, the force is repulsive at very small distances, and attractive at great distances, and is thus in agreement with Newton's law of gravitation. Since the change in force is continuous, it will have to change at least once from repulsive to attractive, which means that the corresponding curve will have to intersect the x-axis once at least. Many reasons and examples, however, have led Bošković to assume that there should be more transitions of this kind, and that the force between particles changes from repulsive to attractive, and vice versa, several times. If intersection points with x-axis, where neither attraction nor repulsion exist, are denoted with x_0, x_1, x_2 ... x_4, Bošković concluded that they could be divided into

two groups. At points of x_0 type /with even indexes/, the particle stands stable and by receding from them it will return. He called such points limits of cohesion /limes cohaesionis/. At points of x_1 type /with odd indexes/, the particle does not move by itself, but if it recedes under the action of an external force, the particle will recede infinitely. Such a point is called limit of non-cohesion /limes non-cohaesionis/.

Bošković further concluded that by an unlimited approach of two particles the repulsive force between them increases to infinity, and the curve representing it will approach the y-axis asymptotically. On the other hand, if the distance between particles increases to an extent where the value x takes on the values greater than the biggest abscissa x_n, the attractive force between the particles will decrease in agreement with Newton's law of gravitation, and the curve will approach the X-axis asymptotically.

The above variant was expanded by Bošković as some facts had led him to believe that a curve might look differently. For example, at very great distances it could again intersect the x-axis or, if going to the right, it could approach a vertical straight line asymptotically. It might also be possible to have several, rather than only one, extremes on one arc which represents the attractive or repulsive force. Possible is also existence of several separate branches of a curve. Bošković studied and analyzed all such and other possibilities which he either accepted or rejected and thus gave rise to different problems.

The importance of Bošković's theory and the examples

of application of his curves in the 18th, 19th and 20th centuries were numerous. A great number of reputed researchers of the time have either fully accepted his theory, or taken it as a basis which they further improved, or which served, directly or indirectly, as an inspiration for their works.

The second curve originated when the issue of the so called maximum attraction was considered and formulated. Namely, Bošković was once suggested to study a problem relating to a solid of maximum attraction, which was: from a given mass of a homogenous matter a solid of revolution needs to be made which, acting by a certain specific law of attraction, would produce maximum effect at a given material point A on the rotation axis.

Here, as in many other problems, Bošković gave priority to geometrical reasoning, and the problem was solved on a purely geometrical basis.

Bošković considered different cases of the law of attraction and constructed geometrically a corresponding derivative curve for each individual curve of attraction. In each case the arithmetical nature of both curves was the same.

There is no evidence of Bošković's personal dealing with the theory of limit problems. However, his first and second curves do deserve, due to their attractiveness, specificities and importance, to be taken as a contour upon which some Bošković's problems will be discussed and solved.

The third Bošković's curve originated from the problem related to Descartes' oval. Bošković defined it in the following way: let there be two fixed points, focuses P and F in a plane. If a thread of a given length is taken and one of its ends is fixed at point P, and the other end carries a pencil at M, M will be the point of the required curve in the plane, if the stretched thread passes from P about M and then farther about F, and returns to M. Consequently, the section PM of the thread is of single, and the section MF of double length. Thus, the basic property of the curve is that the sum of the first and double second length is always equal to the given length of the thread. By introducing the circle with a center at P, and a radius equal to the length of the thread, Bošković generalized the problem and defined the so called general curve.

Literature

I. Supek, Rudjer Bošković as a Humanist and Scientist.

I. Martinović, Bošković on his own Theory of Forces: from a Sentence to the Theory of Natural Philosophy.

F.A. Horman S.J., Boscovich's Philosophy of Mathematics.

E. Stepanić, Bošković's Mathematical Conception of Continuity and the Differentiability of Function in his Time.

A. Rossi, Bošković's Philosophy of Space.

A. Prince, The Phenomenalism of Newton and Bošković, A Comparative Study.

EINIGE RICHTUNGEN IN DER HISTORISCHEN ENTWICKLUNG EINER THEORIE DER NICHTANALYTISCHEN FUNKTIONEN

II Teil

Miloš Čanak

In seiner Arbeit [1] hat der Verfasser gezeigt,dass sich durch Verallgemeinerungen einzelner Eigenschaften der analytischen Funktionen,eine Theorie der nichtanalytischen Funktionen in 6 Richtungen ausbilden lässt.Dabei hat er auf einige Verallgemeinerungen der CAUCHY-RIEMANNschen Bedingungen/erste und zweite Richtung/ hingewiesen. In dieser Arbeit untersucht man noch 4 Entwicklungsrichtungen.

III/ Analytische Funktion $f(z)$ genügt der CAUCHYschen Integralformel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases} \qquad (1)$$

wobei L eine glatte,geschlossene Kontur ist,die die komplexe Ebene auf das innere Gebiet D^+ und äussere Gebiet D^- teilt.Das Integral vom CAUCHYschen Typus

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} \qquad (2)$$

längs einer glatten,geschlossenen oder nichtgeschlossenen Kontur L, stellt eine analytische Funktion in der ganzen komplexen Ebene,ausser der Punkte auf L dar/Analytizität im Sinne von Cauchy/.

Die dritte Entwicklungsrichtung stellt die Ausführung der Formeln für die wichtigen Klassen der nichtanalytischen Funktionen,die den Formeln (1) und (2) analog sind,dar.

In seiner Monographie [2] hat I.Vekua die verallgemeinerte CAUCHYsche Integralformel ausgeführt,die den Wert einer regulären Lösung der komplexen Differentialgleichung

$$U'_{\bar z} - A(z,\bar z)\bar U = 0 \qquad (3)$$

mittels des Grenzenwertes dieser Lösung auf einer einfachen,glatten, geschlossenen Kontur L ausdrückt.

In seiner Arbeit [3] hat V.Pokazeev ausführlich eine Theorie des polyanalytischen Integrals vom CAUCHYschen Typus

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}\left(\frac{\bar z}{z} - \frac{\bar t}{t}\right)\frac{g_k(t)}{t-z}\,dt \qquad (4)$$

für die polyanalytischen Funktionen der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z)\bar{z}^k \tag{5}$$

entwickelt, wobei $g_k(t)$, $k = 0,1 \ldots n-1$ die gegebenen, stetigen Funktionen auf der glatten Kontur ∂D sind. Dieses Integral stellt eine polyanalytische Funktion in der ganzen komplexen Ebene, ausser der Punkte auf ∂D dar.

J. Kečkić [4] hat die CAUCHYsche Integralformel für die sgn. C-analytischen Funktionen, die eine Modifikation der gewöhnlichen, analytischen Funktionen darstellen, ausgeführt.

Man kann auch die entsprechenden Integralformeln für die anderen Klassen der nichtanalytischen Funktionen ausführen.

IV/ Analytische Funktion $f(z)$ lässt sich als Summe einer konvergenten Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{6}$$

in der Umgebung des Punktes z_0 darstellen /Analytizität im Sinne von Weierstrass/.

Die vierte Entwicklungsrichtung untersucht die Möglichkeit der Entwicklung einer beliebigen, differenzierbaren, nichtanalytischen Funktion $w(z,\bar{z})$ in eine günstige, komplexe Reihe und die Frage ihrer Konvergenz.

In seiner Dissertation [5] hat der Verfasser den Begriff der areolären Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}^k f_k(z) \tag{7}$$

eingeführt und die Frage ihrer Konvergenz untersucht. In der späteren Arbeit [6] hat er auch den Begriff der verallgemeinerten, areolären Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{k-1}(z)\varphi_k(z) \tag{8}$$

eingeführt, wobei $\varphi_k(z)$ beliebige, analytische Funktionen sind. Er nützte dieselbe zur Integration der elliptischen Systeme von Differentialgleichungen mit den analytischen Koeffizienten.

V. Gabrinović, N. Ralević [7] und M. Čanak [8] haben den Begriff der p-polyanalytischen Funktionen in der Form

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^k \cdot f_k(z,\bar{z}) \tag{9}$$

eingeführt, wobei die Koeffizienten f_k die beliebigen p-analytischen Funktionen mit der gegebenen, konstanten Charakteristik p darstellen. Diese komplexe Polynome sind sehr günstig für die Approximation einer beliebigen, nichtanalytischen Funktion $W(z,\bar{z})$. Andererseits, wenn man die endliche Summe (9) mit der unendlichen vertauscht, so erhält man die Möglichkeit der Entwicklung der Funktion $W(z,\bar{z})$ in eine konvergente p-areoläre Reihe. Dabei ist es auch möglich, die Koeffizienten $f_k(z,\bar{z})$ zu ausrechnen.

Parallel mit der komplexen Reihen, spielen auch die komplexen Kettenbrüche eine wichtige Rolle in der Theorie der nichtanalytischen Funktionen. In seiner Arbeit [9] hat der Verfasser einen kurzen historischen Uberblick dieser Theorie gegeben. In der Arbeit [10] entwickelte er eine nichtanalytische, komplexe Funktion $s(z,\bar{z})$ in einen Kettenbruch der Form

$$s(z,\bar{z}) = w_0(z) + \cfrac{w_1(z)\bar{z}}{1 + \cfrac{w_2(z)\bar{z}}{1 + \cdots + \cfrac{w_k(z)\bar{z}}{1 + \cdots}}} \tag{10}$$

Die unbekannten, analytischen Koeffizienten $w_i(z)$ lassen sich auf Grund der gegebenen Interpolationsbedingungen

$$\mathcal{L}_{g_0(z)} s(z,\bar{z}) = s_0(z), \quad \ldots\ldots \quad \mathcal{L}_{g_n(z)} s(z,\bar{z}) = s_n(z)$$

bestimmen.

Weiterhin, entwickelte er in der Arbeit [11] die nichtanalytische Funktion $s(z,\bar{z})$ in einen verzweigten Kettenbruch der Form

$$s(z,\bar{z}) = c_0 + \cfrac{z - z_0}{c_1 + \cfrac{z - z_0}{c_2 + \cdots}} + \cfrac{\bar{z} - z_0}{d_1 + \cfrac{z - z_0}{d_2 + \cdots} + \cfrac{\bar{z} - z_0}{e_2 + \cdots}} \tag{11}$$

in einer Umgebung des Punktes z_0, und untersuchte die Frage seiner Konvergenz.

V/ Es ist bekannt, dass die analytische Funktion $f(z)$ im Punkte $z_0/f'(z_0)\neq 0/$ eine konforme Abbildung realisiert. Eine wichtige Verallgemeinerung war die Erscheinung der quasikonformen Abbildung in der ersten Viertel des zwanzigsten Jahrhunderts. So entstand ein wichtiges Gebiet der komplexen Analysis die mit der Topologie, Theorie der Differentialmannigfaltigkeiten, Mathematischen Physik, Theorie der elliptischen Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung, Theorie der FREDHOLMschen Eigenwerte usw. tief gebunden wird.

Es existieren zwei äquivalente Konzepte der Quasikonformität, die einen parallelen Entwicklungsweg haten. Im analytischen Konzept /im Sinne von Lavrentjev [12] /, betrachtet man die Gleichung von Beltrami

$$w_{\bar z} - \mu(z) w_z = 0 \quad , \quad z \in D \tag{12}$$

wobei die Funktion $\mu(z)$ im Gebiet D einigen, bestimmten Bedingungen genügt. Die Abbildung f des Gebietes D in ein Gebiet $D' \subset \bar C$ nennt man <u>quasikonforme Abbildung</u>, wenn f eine verallgemeinerte, homöomorphe Lösung der Gleichung (12) ist und die komplexe Charakteristik $\mu(z)$ im Punkte $z_0 \in D$ der Bedingung $|\mu(z_0)|<1$ genügt.

Das andere, geometrische Konzept wurde zuerst von H. Grötsch [13] und später von L. Ahlfors [14] gegründet. Es beginnt von ganz anderen Voraussetzungen, aber führt zur gleichen Abbildungsklasse.

In der Monographie [15] haben S. Krushkal und R. Kühnau einen ausführlichen Uberblick dieser Theorie gegeben. Auch die jugoslawischen Mathematiker befassen sich mit dieser Problematik/siehe V. Mićić [16] .

VI/ Es ist bekannt, dass das Vektorfeld der analytischen Funktion gleichzeitig potentiell und solenoidisch ist/Analytizität im Sinne der Vektoranalysis/. Darum ist auch durch Verallgemeinerung dieser Eigenschaft möglich, eine Theorie der nichtanalytischen Funktionen zu entwickeln. Eine solche geometrische Theorie hat A. Bilimović/1960/ in seiner Monographie [17] ausgebildet. Die Grundlage dieser Theorie stellt der Vektor der Abweichung von der Analytizität

$$\vec B = \mathrm{grad}\ u + \vec k \times \mathrm{grad}\ v = (u'_x - v'_y)\vec i + (u'_y + v'_x)\vec j \tag{13}$$

dar. Weiterhin entwickelte er die geometrische Theorie der Ableitung einer nichtanalytischen Funktion in einer gegebenen Richtung

$$\dot w^{(\theta)} = \mu + b\cdot e^{-2\theta i} \quad , \quad /b = \tfrac{1}{2} B / \tag{14}$$

wobei θ - der Winkel zwischen x-Achse und dieser Richtung ist und μ - die Mittelableitung dieser nichtanalytischen Funktion darstellt. Die Formel

$$d_\theta w = \rho(\mu e^{\theta i} + b\ e^{-\theta i}) \tag{15}$$

für das Differential einer analytischen Funktion lässt sich auch in der Theorie der nichtanalytischen Differentialtransformationen anwenden. Man bestimmt die Hauptrichtungen der nichtanalytischen Funktion in einem gegebenen Punkte, wie auch das Netz von Leitlinien und Hauptlinien. Bilimović hat auch die anderen Differentialformeln aus der Theorie der nichtanalytischen Funktionen ausgeführt.

Auf Grund dieser Theorie hat S. Fempl [18] eine Klassifikation der nichtanalytischen Funktionen ausgebildet. Für $\nabla^2 u = 0$, $\nabla^2 v \neq 0$ ist das Vektorfeld von $\vec B$ ein solenoidisches Feld. Für $\nabla^2 u \neq 0$, $\nabla^2 v = 0$ ist das Feld ein potentielles Feld. Im allgemeinen Falle $\nabla^2 u \neq 0$, $\nabla^2 v \neq 0$ ist das Feld ein zusammengesetztes, während für $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$, repräsentiert der Vektor $\vec B$ ein LAPLACEsches Feld.

Durch Ausnützung dieser Klassifikation hat der Verfasser [19] das Vektorfeld für die verallgemeinerten analytischen Funktionen im Sinne von Vekua untersucht. Er hat die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, wenn dieses Vektorfeld potentielles oder solenoidisches ist, ausgeführt.

\- - - - - - - - - - - - - - -

L I T E R A T U R

[1] Čanak M., "Einige Richtungen in der historischen Entwicklung einer Theorie der nichtanalytischen Funktionen", I Teil, II Osterreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik, Neuhofen, 1989, s.9-13.

[2] Vekua I., "Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung und Randwertaufgaben", VEB Verlag, Berlin 1956.

[3] Pokazeev V., "Integrali tipa Cauchy dlja polianalitičeskih funkcii", Trudi seminara po kraevim zadačam, Kazan 1980, s.133-139.

[4] Kečkić J., "Analytic and C-analytic functions", Publications de L'Institute Mathematique, Beograd, t.9/23/, 1969, s.189-198.

[5] Čanak M., PMF Thesis, Beograd, 1977.

[6] Čanak M., "Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Methode der verallgemeinerten areolären

Reihen",Publications de L'Institut Mathematique,Beograd,t.33/47/, 1983,s.35-39.

[7] Ralević N.,"Boundary-value problems of Hilbert type for linear p-areolar differential equations in the form $D_p^n\ f = 0$",Matematički Vesnik,Beograd,38,1986,s.561-568.

[8] Čanak M.,"Randwertaufgabe von Riemann-typus für die p-polyanalytischen Funktionen",Matematički Vesnik,Beograd,40,1988,s.197-203.

[9] Čanak M.,"Historische Entwicklung und Anwendungen der Kettenbrüche",I Osterreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik, Neuhofen,1986,s.26-30.

[10] Čanak M.,"Der Begriff der inversen areolären Ableitung in der Theorie der areolären Kettenbrüche",Matematički Vesnik,Beograd,38, 1986,s.391-398.

[11] Čanak M.,"Die Anwendung der verzweigten komplexen Kettenbrüche in der Theorie der nichtanalytischen Funktionen",ZAMM-Z.angew.Math. Mech.68/1988/,5,s.450-451.

[12] Lavrentiev M.,"Obščaja teorija kvazikonformnih otobraženii ploskih oblastei",Dokladi Ak.Nauk/DAN/USSR,N 3-4,1946.

[13] Grötsch H.,"Uber die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des PICARDschen Satzes",Ber.Verh.Sächs.Akad.Wiss.,1928,Bd 80,s.503-507.

[14] Ahlfors L.,"Lekcii po kvazikonformnim otobraženiam",Moskva, izd.Mir,1969.

[15] Kruškalj S.,Kühnau R.,"Kvazikonformnie otobraženija",Novosibirsk,izd.Nauka,1984.

[16] Mićić V.,"Some continuum phenomena and quasiconformal mappings", Matematički Vesnik,Beograd,38,1986,s.529-533.

[17] Bilimović A.,"Sur la geometrie differentielle d'une fonction non analytique",GLAS de L'Academie Serbe des Sciences,Beograd,t. CCXLII,N.19,1960,s.1-82.

[18] Fempl S.,"Uber eine Klassifikation der nichtanalytischen Funktionen",Mathematica Balkanica,Beograd,N.1,1971,s.88-92.

[19] Čanak M.,"Eine Klassifikation der verallgemeinerten analytischen Funktionen durch die Methode des Vektorfeldes",Revue Roumaine de mathematiques,Bucuresti,1992.

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

Anschrift: Prof.Dr.Miloš Čanak
11000 Beograd
Brzakova 4
Jugoslawien

Grosses vollständiges

UNIVERSAL LEXICON

Aller Wissenschafften und Künste,
Welche bißhero durch menschlichen Verstand und Witz erfunden und verbessert worden,
Darinnen so wohl die Geographisch-Politische
Beschreibung des Erd-Creyses, nach allen Monarchien, Käyserthümern, Königreichen, Fürstenthümern, Republiquen, freyen Herrschafften, Ländern, Städten, See-Häfen, Vestungen, Schlössern, Flecken, Aemtern, Klöstern, Gebürgen, Pässen, Wäldern, Meeren, Seen, Inseln, Flüssen, und Canälen; samt der natürlichen Abhandlung von dem Reich der Natur, nach allen himmlischen, lufftigen, feurigen, wässerigen und irrdischen Cörpern, und allen hierinnen befindlichen Gestirnen, Planeten, Thieren, Pflantzen, Metallen, Mineralien, Saltzen und Steinen rc.
Als auch eine ausführliche Historisch-Genealogische Nachricht von den Durchlauchten und berühmtesten Geschlechtern in der Welt,
Den Leben und Thaten der Käyser, Könige, Churfürsten und Fürsten, grosser Helden, Staats-Minister, Kriegs-Obersten zu Wasser und zu Lande, den vornehmsten geist- und weltlichen Ritter-Orden rc.
Ingleichen von allen Staats- Kriegs- Rechts- Policey- und Haußhaltungs-Geschäfften des Adelichen und bürgerlichen Standes, der Kauffmannschafft, Handthierungen, Künste und Gewerbe, ihren Innungen, Zünfften und Gebräuchen, Schiffahrten, Jagden, Fischereyen, Berg- Wein- Acker- Bau und Viehzucht rc.
Wie nicht weniger die völlige Vorstellung aller in den Kirchen-Geschichten berühmten
Alt-Väter, Propheten, Apostel, Päbste, Cardinäle, Bischöffe, Prälaten und Gottes-Gelehrten, wie auch Concilien, Synoden, Orden, Wallfahrten, Verfolgungen der Kirchen, Märtyrer, Heiligen, Sectirer und Ketzer aller Zeiten und Länder,
Endlich auch ein vollkommener Inbegriff der allergelehrtesten Männer, berühmter Universitäten, Academien, Societäten und der von ihnen gemachten Entdeckungen, ferner der Mythologie, Alterthümer, Müntz-Wissenschafft, Philosophie, Mathematic, Theologie, Jurisprudentz und Medicin, wie auch aller freyen und mechanischen Künste, samt der Erklärung aller darinnen vorkommenden Kunst-Wörter u. s. f. enthalten ist.

Mit Hoher Potentaten allergnädigsten Privilegiis.

Anderer Band, An — Az.

Halle und Leipzig,
Verlegts Johann Heinrich Zedler,
Anno 1732.

/ → 84 /

Späte Anerkennung für HERMANN GRASSMANN (1809-77) AUS Stettin - ein pommersches Gelehrtenschicksal.

von Joachim Buhrow

Genau vor 150 Jahren trat in Stettin, der altehrwürdigen Residenzstadt von ganz Pommern, der junge Studienreferendar Hermann Graßmann seinen Dienst als Mathematik- und Physiklehrer am königlichen Gymnasium seiner Heimatstadt an. Er ahnte und wünschte wohl auch nicht, daß er dort, von einer kurzen Unterbrechung abgesehen, sein Leben lang unterrichten würde. Rein äußerlich gesehen trat er in die Fußstapfen seines Vaters Justus Günther, der als erster Mathematikprofessor am selben Gymnasium ebenfalls bis zu seinem Tode unterrichtete. Doch schon 1843 wechselte Hermann zur Friedrich-Wilhelm Realschule über, um erst nach dem Tode des Vaters 1852 auf die Stelle des 1. Mathematiklehrers am Gymnasium zurückzukehren.

Für heutige Verhältnisse ist jedoch sein Ausbildungsweg aus einer Familie mit 12 Kindern sehr ungewöhnlich. Mit 18 Jahren ging er 1827 nach Berlin, um dort Theologie und Philosophie zu studieren. Vor allen war Schleiermacher dort sein Lehrer, nebenbei(!) betrieb er mathematische Studien und hörte verstärkt alte Sprachen. Schon 1831 bestand er in Stettin das Staatsexamen für die Lehrbefähigung in alten Sprachen, die er dann auch unterrichtete. Eine Teilfacultas für Mathematik konnte er ebenfalls erwirken. Bald darauf folgte das erste theologische Staatsexamen im Sommer 1834, denn noch war er sich über seinen beruflichen Weg nicht im Klaren. Nach kurzer Lehrtätigkeit an der Berliner Gewerbeschule, an der er Jacob Steiner flüchtig kennenlernte, kam er schon 1836 wieder nach Stettin zurück- für immer. Er trat seinen Dienst an der Bürgerschule an, die den Namen Otto von Bamberg zur Erinnerung an die Christianisierung Pommerns trug.

Neben dem vollen Unterricht in verschiedenen Fächern bestand er bereits 1839 das 2. theologische Staatsexamen mit Glanz. Ohne eine lange Erholungspause einzulegen, meldete er sich zum 2. Lehrerexamen für die Gymnasialstufe und absolviert im Mai 1840 die mündliche Prüfung sehr erfolgreich, zuvor hatte er als schriftliches Theme "Zur Theorie von Ebbe und Flut" eingereicht, diese Schrift ist dann vollständig in den gesammelten Abhandlungen erneut gedruckt worden. In der Arbeit wendet er erstmalig seine neuen Gedanken zur allgemeinen Ausdehnungslehre an, der Beginn seines Lebenswerkes in der Mathematik und wohl auch die Entscheidung für den beruflichen Weg in der Mathematik.

Glücklicherweise ist uns die Prüfungsakte erhalten geblieben. Wegen der unerhörten Anspannung aller Kräfte neben dem vollen Unterricht soll das Protokoll der mündlichen Prüfung hier im vollen Wortlaut

wiedergegeben werden: "In der Mathematik besitzt derselbe ebenso umfassende als gründliche Kenntnisse, die sich über das ganze Gebiet der Wissenschaft mit Einschluß der Mechanik und der gesamtem höheren Analysis erstrecken. Seine Probearbeit behandelte die Theorie der Ebbe und Flut durchaus gründlich und streng und er hatte sogar nicht ohne Glück eine von der Laplaceschen Theorie in manchen Stücken abweichende eigentümliche Methode gewählt. Bei der mündlichen Prüfung wußte er sich in vorgelegte Aufgaben schnell und mit Besonnenheit zu finden und zeigte überhaupt eine so tüchtige mathematische Durchbildung, daß er vollkommen befähigt ist, den mathematischen Unterricht in allen Klassen eines Gymnasiums und einer höheren Bürgerschule zu leiten. Ebenso zeigte er sich mit allen Teilen der Physik und mit der Anwendung der Mathematik auf dieselbe sehr gut bekannt, und er wird auch hierin in allen Klassen eines Gymnasiums den Unterricht mit Nutzen übernehmen können. In der Mineralogie zeigte der Kandidat nicht nur recht gründliche Kenntnisse in der allgemeinen Lehre der Wissenschaft, namentlich in der Kristallographie, der chemischen Proportionslehre, der Lehre von dem Iso-und Dimorphismus, als auch eine gründliche Kenntnis der einzelnen Mineralien. Ebenso erschien er auch in der allgemeinen theoretischen und in der analytischen Chemie sehr gut bewandert, wo er namentlich die verschiedenen Methoden, den Kupferkies zu analysieren, genau anzugeben wußte. Weniger vertraut war er mit manchen Zweigen der technischen Chemie, wie der Hüttenkunde, was zum Teil darin seinen Grund hat, daß er nur flüchtig einzelne Hüttenwerke aus eigener Anschauung kennen zu lernen Gelegenheit hatte. Dieser Mangel ist jedoch bei einigem Fleiß leicht nachzuholen, daher ihm unbedenklich der Unterricht in der Mineralogie und Chemie durch alle Klassen einer höheren Bürgerschule übertragen werden kann. Die Kommission erklärt ihn deshalb zu jeder Lehrstelle bei einem Gymnasium oder einer höheren Bürgerschule im Fach der Mathematik, der Physik, der Mineralogie und der Chemie für vollkommen und vorzugsweise befähigt."

Mit diesem glänzenden Zeugnis entschied sich Graßmann für das höhere Lehramt und beantragte kein kirchliches Amt mehr.

Ohne große Erholungspause gelang ihm mit einem gewaltigen Arbeitspensum die Ausarbeitung eines völlig neuen Gebietes der Mathematik: "Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik", 1844 bei Wigand in Leipzig gedruckt. Der Inhalt ist eine ausführlich aber sehr umständliche und eigenwillige Begründung der linearen n-dimensionalen Vektorräume, doch der publizistische Erfolg blieb gänzlich aus. Fast die ganze Auflage mußte später wieder eingestampft werden, nur wenige Exemplare erreichten ihre Leser, selbst die Rezensenten meldeten sich nicht. Die Mathematiker nahmen keine Notiz von den neuen Ideen. Nach vergeblichen Bemühungen bei den Zeitgenossen mußte Graßmann in Grunerts Archiv für Mathematik und Physik, Band VI(1845) sein Buch selbst besprechen, wieder ohne Resonanz. Dort lesen wir:"Die Ausdehnungslehre ist die von allen räumlichen Anschauungen gelöste, rein mathematische Wissenschaft, deren spezielle Anwendung auf den Raum dann die Raumlehre ist.". Damit sind bei Graßmann die Riemannschen Mannigfaltigkeiten vorgezeichnet, vergeblich. Die Art der Darstellung, die eigenwilligen Beteichnungen und vor allem die umständliche philosophische Interpretation machen ein gründliches Studium des Buches sehr schwer. Einer der wenigen, die den Wert des Buches erkannten, war Möbius, er schrieb:"Daß es in der Tat mich innigst gefreut hat, in Ihnen einen Geistesverwandten kennenzulernen, daß aber diese Geistesverwandtschaft nur hinsichtlich der Mathematik nicht auch in Beziehung zur Philosophie stattfindet. Das philosophische Element Ihrer vortrefflichen Schrift nach Gebühr zu würdigen, bin ich daher unfähig". Sehr viel später, als Graßmann eine Neubearbeitung plante,, fügte Möbius hinzu:"Ich bin innigst überzeugt, daß die Wissenschaft des Raumes dadurch einen großen Gewinn erhalten würde."

Gauss reagierte auf Anforderung, wie wir ihn kennen:"!!daß die Tendenzen des Buches teilweise denjenigen Wegen begegnen, auf denen ich selbst seit fast einem halben Jahrhundert gewandelt bin, und ich sehe wohl, daß, um den eigentlichen Kern Ihres Werkes herauszufinden, es nötig sein wird, sich erst mit Ihren eigenwilligen und eigentümlichen Terminologien zu familiarisieren." So auch Grunert: "Gewünscht hätte ich auch, daß Sie sich weniger in philosophische Reflexionen eingelassen, und lieber nazh Ihrem 1. Plene die Euklidische Form beibehalten hätten."

Erfreulich dagegen Hamiltons Meinung, mit dem sich Graßmann die Einführung der Vektoranalysis teilen muß, er schrieb 1853:
"I have recently been reading more then 100 pages of Graßmanns "Ausdehnungslehre", with great admiration and interest, he published 1844, a little later than myself, but with the most obvious and perfect independence. Graßmann is a great and most German Genius, his view of space is at least as new and comprehensive as mine of time".

Erst 1862 hatte der Verlag Enslin in Berlin Mut zu einer neuen überarbeiteten Auflage der "AUsdehnungslehre", doch der Erfolg war wieder eher bescheiden zu nennen, eine Tragik für den Autor.

Wir lesen im Vorwort zur 2. Auflage Graßmanns Hoffnungen:
"Meine Hoffnung, einen akademischen Lehrstuhl zu gewinnen, und dadurch jüngere Kräfte in die Wissenschaft einzuführen und sie zum weiteren Ausbau derselben anzuregen, schlug fehl. Zwar konnte es nicht ausbleiben, daß späterhin verschiedene Mathematiker auf anderen Wegen zu vereinzelten Resultaten gelangten, die schon in meiner Ausdehnungslehre von 1844 behandelt waren, aber fast nie geschah dabei meines Werkes Erwähnung. Vielmehr zeigte sich, daß dasselbe ihnen fast allen ganz unbekannt geblieben war, da sonst die Resultate durch den inneren Zusammenhang sich viel einfacher und fruchtreicher hätten gestalten müssen."

Über seine vergebliche Hoffnung, eine Universitätsprofessur zu bekommen, gibt es im Greifswalder Universitätsarchiv umfangreiche Akten Nach anfänglicher Ablehnung unterstützte Grunert 1868 in der Fakultät die Bemühungen, auf die 2. ordentliche Professur, leider vergeblich, wie wir wissen, Graßmann kam nicht auf die Berufungsliste.

Nach dieser tiefen Enttäuschung wandte Graßmann sich mit ungebrochener Energie und Schaffenskraft seinen sprachwissenschaftlichen Studien zu und leistete auch hier Bleibendes und fand auch Anerkennung bei den Altphilologen. Nach umfangreichen Arbeiten über vergleichende Grammatik wandte er sich mit aller Energie dem Sanskrit zu, arbeitet ein umfangreiches Wörterbuch in mehreren Bänden aus (1872-1875) und übersetzt die Rig-Veda-Texte, die in 2 Bänden noch in seinem letzten Lebensjahr auf den Markt kommen, als Sprachforscher fand er noch zu Lebzeiten weithin die verdiente Anerkennung.

Er war Theologe, Mathematiker, Physiker, Sprachforscher und dazu erfolgreicher Autor von Schulbüchern für die Fächer Deutsch, Latein und Mathematik. Sein Lehrbuch der Arithmetik für die Schule von 1861 wird von keinem Geringeren als von Peano als wichtige Grundlage für dessen Axiomensystem ausdrücklich genannt. Hinzu kommen vielseitige Arbeiten auf verschiedenen Gebieten der Physik, auch hier muß er wiederholt um die Priorität seiner Ideen kämpfen. Sowohl Clausius als auch Helmholtz nehmen keine Notiz von seinen früher datierten Publikationen.

Zu aller Last im Beruf und in der Wissenschaft war er seit 1849 glücklicher Familienvater von 11 Kindern, 2 verlor er zu Lebzeiten. Seine Frau Marie Therese, gb. Knappe, war Tochter der Rittergutsbesitzer auf Altstorkow in Pommern. Aktive Musikpflege und innige Naturverbundenheit gehörten zum festen Bestandteil des Familienlebens. Eine Sammlung pommerscher Volkslieder und ein Büchlein über deutsche Pflanzennamen gehören zum Schriftenverzeichnis.

Vor 115 Jahren, am 26. September 1877 schloß er nach langem Leiden für immer seine Augen. Wenn wir heute nach der Wiedervereinigung in Deutschland endlich wieder Pommernforschung und pommersche Tradition pflegen können, so darf im Reigen großer Persönlichkeiten aus Pommerns Geistesgeschichte der Mathematiker und Sprachforscher und Schulmann Hermann Graßmann aus Stettin nicht vergessen sein. Das Schicksal später Anerkennung seiner Verdienste teilt er mit vielen Dichtern, Künstlern und Gelehrten, wie uns die Geschichte der Kulturvölker immer wieder mahnend lehrt.

Sein Schüler Victor Schlegel, so wie er Mathematiklehrer am Gymnasium in Waren/Mecklenburg, ist zugleich sein erster Biograph: "Hermann Graßmann, sein Leben und seine Werke", Leipzig 1878.
Im selben Jahr erschien der unveränderte Nachdruck der ersten Auflage von 1844. Moritz Cantor nennt Graßmann in der "Allgemeinen deutschen Biographie":"Einen der bedeutendsten Mathematiker unserer Zeit und zugleich hervorragenden Sprachforscher und Sanskritist".

Friedrich Engel, Mathematiker in Leipzig und Greifswald, unternahm es dann ab 1894, im Auftrage der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, die "Gesammelten mathematischen und physikalischen Werke von Hermann Graßmann" in Leipzig zum Druck zu befördern. Es sind bis 1911 praktisch 6 umfangreiche Bände geworden. Der letzte, eine umfangreidhe wissenschaftliche Biographie von Engel selbst, entstand in Greifswald, gewissermaßen eine späte Wiedergutmachung.

Zum ersten Band von 1894 schrieb der Herausgeber im Vorwort:
"50 Jahre sind vergangen, seit Graßmann seine erste Ausdehnungslehre in die Welt schickte. Möge sie jetzt, wo sie zum dritten Male, im neuen und schönen Gewand erscheint, mehr Teilnahme finden als damals, und möge überhaupt die hiermit begonnene Ausgabe dazu wirken, daß die Leistungen Graßmanns endlich nach Verdienst gewürdigt werden". Und an anderer Stelle lesen wir:
"Außerdem ist es eine einfache Pflicht der Gerechtigkeit, auch die anderen Leistungen Graßmanns anzuerkennen und überhaupt Graßmann die ihm gebührende Stellung unter den Mathematikern des 19. Jahrhunderts nicht länger vorzuenthalten."
Dem wollen wir fast ~~wieder 50~~ 100 Jahre später nichts hinzufügen.

RAZPET M.

Zur Geschichte der slowenischen Mathematik

Marko Razpet
Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta v Ljubljani
und
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
Slovenija

Zusammenfassung

Im Beitrag wird die Entwicklung der slowenischen Mathematik vorgestellt. Die Anfangsgründe trifft man schon im Mittelalter. Der berühmteste Vertreter jener Zeit ist Mathematiker, Astronom, Philosoph und Schriftsteller Hermann de Carinthia (12. Jahrhundert). Er hat einige Texte aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt. Man kann ihm dankbar sein, daß *Planispherium* von Ptolemeus bewahrt war.

Humanist Andreas Perlach (geschrieben auch Perlah, Perlacher, Perlachius) (1490–1551) war in der Nähe von Maribor geboren. Er befaßte sich mit Mathematik, Astronomie und Medizin, lehrte Mathematik an der Universität in Wien und war eine Zeitlang sogar ihr Rektor.

Der Vorgänger von Jurij Vega (Baron Georg von Vega) war Janez Florjančič (1691–1757), Mathematiker, Astronom und Kartograph. Er schrieb ein Handbuch der Geometrie und hat viel getan, um Logarithmen praktisch zu nutzen.

Augustin Hallerstein (1703–1774) war Mathematiker und Astronom und setzte sein Wissen besonders bei der Kartographie ein. Er reiste viel in die Welt hinaus, er wurde in China sogar ein Mandarin.

Jurij Vega (1754–1802) war ein echter Meister der Logarithmen. Sein Werk auf diesem Gebiet besteht aus vier Büchern mit logarithmischen Tabellen (sogar auf 10 Dezimalen), die er mit Hilfe seiner Kriegskameraden am Rhein als Kanonier schuf.

Josip Plemelj (1873–1967) war der erste Rektor an der Universität in Ljubljana. Er studierte in Wien Mathematik, Physik und Astronomie. Seine wichtigsten Forschungsgebiete waren Differential- und Integralgleichungen, Potential- und Funktionentheorie. Weltbekannt wurde er durch die Lösung des Riemannschen Problems.

RAZPET N.

The history of mathematical textbooks in Slovenia

Nada Razpet

Board of education and sport

Ljubljana, Slovenia

ABSTRACT

First textbooks for Slovene pupils had been written in German language. Some of important Slovene textbooks were written by Franc Močnik and Blaž Matek. Močnik's books have been translated into many European languages, and were very popular, because they contained many problems from real life. In next Slovene textbooks new ideas about teaching were developed. Today's authors include in their textbooks new trends of mathematical education.

UBER DIE ABLEITUNG GEBROCHENER ORDNUNG

Čanak Miloš

Die Idee der Verallgemeinerung von Differentiation $d^pf(x)/dx^p$ auf nichtganze Werte p erschien noch bei Entstehen der Differentialrechnung. In einigen ihren Briefen haben G.Leibniz und J.Bernoulli verschiedene Fragen im Bezug auf dieses Problem gestellt.

L.Euler/1738, siehe [1]/ hat gesehen, dass die Ableitung d^px^a/dx^p der Potenzfunktion auch die Bedeutung für den nichtganzen Wert p besitzt. P.Laplace/1812, siehe [2]/ hat die Differentiation nichtganzer Ordnung des Integrals $\int T(t)t^{-x}dt$ untersucht.

Den folgenden Schritt hat J.Fourier /1822, siehe [3]/gemacht. Er nützte die Gleichheit

$$\frac{d^pf(x)}{dx^p}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^p d\lambda \times \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(tx - t\lambda + \frac{p\pi}{2})dt \tag{1}$$

auch im Falle, wenn p die nichtganzen Werte nimmt.

In den Arbeiten [4] und [5] von Abel wurde die Integralgleichung

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\mu}} = f(x) \quad , \quad x > a \;, \quad 0 < \mu < 1 \tag{2}$$

gelöst. Die linke Seite dieser Gleichung stellt die Operation der gebrochenen Integration von der Ordnung $1-\mu$ dar. Andererseits stellt die Inversion dieser Operation die gebrochene Differentiation dar. Aber diese Tatsache wurde viel später entdeckt.

In den Jahren 1832-1837 erschien eine Reihe der Arbeiten von J.Liouville/siehe zB. [6] und [7]/, die die Formel für die Differentiation von Exponentialfunktionen nützten. Man betrachtet die Funktionen in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x} \quad .$$

Auf Grund der Definition von Liouville gilt

$$D^p f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^p \, e^{a_k x} \tag{3}$$

für jede/komplexe/ p. Das Problem dieser Konzeption ist die Frage der Konvergenz dieser Reihe.

B.Riemann [8] untersuchte den Ausdruck

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad , \quad x>0 \tag{4}$$

der mit der LIOUVILLEschen Form

$$D^{-p} f(x) = \frac{1}{(-1)^p\Gamma(p)}\int_0^{\infty} \varphi(x+t)\,t^{p-1}\,dt \tag{5}$$

die wichtigste Form der gebrochenen Integration war.

A.Grünwald/1867, siehe [9] / entwickelte ein Konzept der gebrochenen Integrodifferentiation auf Grund der RIEMANNschen Formel

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(\Delta_h^n f)(x)}{h^n} \tag{6}$$

durch Verallgemeinerung auf die gebrochenen Werte von n

$$D^{\alpha} f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(\Delta_h^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}} \quad , \tag{7}$$

wobei $\Delta_h^p f$ die sgn. Differenzen gebrochener Ordnung sind.

Die nächste Idee wurde mit der CAUCHYschen Formel

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)dt}{(t-z)^{p+1}} \tag{8}$$

für die analytischen Funktionen, in der komplexen Ebene, gebunden. Der unmittelbare Ubergang auf die nichtganzen Werte von p führt bis verschiedenen Schwirigkeiten im Bezug auf die Verzweigung der Funktion $(t-z)^{-p-1}$. Diesen Ubergang untersuchte N.Sonin /1872/ in seiner Arbeit [10]. Er zeigte, dass dieses Verfahren im Falle der analytischen Funktionen, für $\operatorname{Re} p < 0$ mit dem RIEMANNschen Verfahren (4) koinzidiert.

Ein neues Konzept erschien in der Arbeit [11] von J.Hadamard /1892/. Es handelt sich um der Differentiation der TEILORschen Reihe

$$D^{\alpha} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)}c_k(z-z_0)^{k-\alpha} \tag{9}$$

$$/\; c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \;/ \quad .$$

In der gleichen Arbeit erschien zum ersten Mal die Konstruktion der gebrochenen Integration in der Form

$$I^{\alpha} f(z) = \frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(zt)\,dt \tag{10}$$

die sehr günstig für die Wahl des eindeutigen Zweiges ist.

In seiner Arbeit [12] definierte H.Weil (1917) die gebrochene Integration für die periodischen Funktionen

$$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\pm ik)^{-\alpha}\varphi_k \cdot e^{ikx}$$

$$\varphi_k = \frac{1}{2k\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt \quad , \quad \varphi_0 = 0 \tag{11}$$

die sich in einer Faltungsform

$$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_{\pm}^{\alpha}(x-t)\varphi(t)\,dt \tag{12}$$

realisiert.Er zeigte,dass sich das gebrochene Integral (11) - (12) in der Form

$$I_{+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

$$I_{-}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \tag{13}$$

schreiben lässt,was das linkseitige und rechtseitige Integral vom LIOUVILLEschen Typus darstellt.

M.Riesz /1936/ hat in seiner Arbeit [13] die gebrochene Integration einer Funktion von n Veränderlichen,mittels der Operatoren vom Potentialtypus eingeführt.Ein von dieser Potentiale ist die negative, gebrochene Potenz $(-\Delta)^{\alpha/2}$ vom LAPLACEschen Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad .$$

E.Love und L.Young [14] haben eine nützliche Formel

$$\int_a^b (D_{a+}^{\alpha} f)(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)(D_{b-}^{a} f)(x)\,dx \tag{14}$$

für die gebrochene,partielle Integration ausgeführt.

A.Erdelyi und H.Kober [15] haben eine Modifikation der gebrochenen Integrodifferentiation in der Form

$$2x^{-2(\alpha+n)}\int_0^x (x^2-t^2)^{\alpha-1}\cdot t^{2n+1}\varphi(t)\,dt$$

$$\frac{2x^{2n}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}(t^2-x^2)^{\alpha-1}\cdot t^{1-2\alpha-2n}\varphi(t)\,dt \tag{15}$$

eingeführt,die sich in der Theorie der Integral- und Differentialgleichungen anwenden lässt.

H.Kober/1941,siehe [16]/hat auch die Integration imaginärer Ordnung eingeführt.

Nach dem zweiten Weltkrieg entwickelte sich weiterhin diese Theorie sehr schnell und ihre Ergebnisse gaben dabei P.Butzer,A. Erdelyi,M.Džrbašjan,E.Love,A.McBride,P.Lizorkin,M.Mikolas,T.Osler, S.Nikoljski,I.Sneddon,U.Westphal usw.

In der neusten Zeit hat die Praxis gezeigt,dass das Konzept von Riemann-Liouville die besten Möglichkeiten zur Entwicklung dieser Theorie gibt.Dabei betrachtet man zuerst die ABELschen Integralgleichungen

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x) \quad , \quad x > a \tag{16}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x) \quad , \quad x < b \tag{17}$$

und zeigt,dass ihre einzigen Lösungen durch die Formeln

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} \quad , \quad x > a \tag{18}$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}} \quad , \quad x < b \tag{19}$$

gegeben sind.

Weiterhin betrachtet man die Formel

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x \varphi(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)\,dt \tag{20}$$

die sich leicht mit Hilfe der mathematischen Induktion beweisen lässt.Da die rechte Seite von (20) auch den Sinn für die nichtganzen Werte von n hat,so definiert man das linkseitige und rechtseitige,gebrochene Integral der α-ten Ordnung durch die Formeln

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad , \quad x > a \tag{21}$$

$$(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad , \quad x < b \quad . \tag{22}$$

Diese Integrale sind evident die Konstruktionen aus der ABELschen Gleichungen und werden als gebrochene RIEMANN-LIOUVILLEsche Integrale genannt.

Die gebrochene Differentiation definiert man später als inverse Operation. Die Formeln

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} \tag{23}$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}} \tag{24}$$

stellen die linkseitige und rechtseitige, gebrochene Ableitung der α-ten Ordnung im Sinne von Riemann-Liouville dar.

Durch weitere Entwicklung dieser Theorie führt man die gebrochenen, partiellen Ableitungen einer Funktion mit n Veränderlichen ein. Eine besondere Rolle spielt auch die Theorie der Differentialgleichungen mit den gebrochenen Ableitungen in der Form

$$F(x,y(x),D_{a_1}^{\alpha_1}\omega_1(x)y(x),D_{a_2}^{\alpha_2}\omega_2(x)y(x)\;\ldots\;D_{a_n}^{\alpha_n}\omega_n(x)y(x))=g(x) \quad (2$$

mit den bestimmten Anfangs- und Randbedingungen. Einige Ergebnisse dieser Theorie lassen sich auch auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen anwenden.

Theorie der gebrochenen Integrodifferentiation wendet sich auch zum Auflösen der singulären Integralgleichungen der Form

$$M\varphi \equiv \int_{\Omega} K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{26}$$

derer Kern $K(x,t)$ eine Singularität vom logarithmischen Typus besitzt, an.

Man untersucht die partiellen Differentialgleichungen gebrochener Ordnung, wie auch die Randwertaufgaben von Dirichlet und Neumann für diese Gleichungen.

In der Monographie [17] haben S.Samko, A.Kilbas und O.Maričev einen ausführlichen Uberblick dieser Theorie, wie auch einige ihre Anwendungen, gegeben.

Der Verfasser befasst sich auch mit dieser Problematik. In seiner Arbeit [18] untersuchte er eine Klasse reeller Funktionen dere Ableitung n-ter Ordnung in der Form $f^{(n)}(x)=\varphi(x,n)$ darstellbar ist. Der Ausdruck $\varphi(x,n)$ kann auch für $n=-1$ eine Bedeutung haben und dadurch erhält man in einigen Fällen das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$. Man führt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, wenn $\varphi(x,-1) = \int f(x)\,dx + C$ gilt, aus.

In der Theorie der nichtanalytischen Funktionen und der komplexen Differentialgleichungen spielt die sgn. areoläre Ableitung

$$Dw = (u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x) = 2w'_{\bar{z}} \tag{27}$$

$/\; w(z,\bar{z}) = u(x,y)+iv(x,y)\,, \quad D^{(n)}w = D\,(D^{(n-1)}w\;/$

eine wichtige Rolle. In seiner Arbeit [19] hat der Verfasser gezeigt, wie sich eine nichtanalytische, beliebig oft differenzierbare Funktion $W(z,\bar{z})$ in eine konvergente, komplexe Reihe der Form

$$W(z,\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}^n \varphi_n(z) \tag{28}$$

entwickeln lässt und wie man die analytischen Koeffizienten $\varphi_n(z)$ ausrechnen kann. Die k-te areoläre Ableitung

$$D^{(k)}W = 2^k \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\;\ldots\;(n-k+1)\bar{z}^{n-k}\varphi_n(z) \tag{29}$$

kann auch für gebrochene Werte k eine Bedeutung haben. Dadurch ist es auch möglich, eine Theorie der gebrochenen, areolären Ableitung für die nichtanalytischen Funktionen zu entwickeln.

- - - - - - - - - - - - - - - -

L I T E R A T U R

[1] Euler L., "De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt"/L.Eulero/Comment.Acad.Sci. Imperialis petropolitanae 1738, T.5, p.38-57.

[2] Laplace P., "Théorie analytique des probabilites", Paris, Courcier, 1812.

[3] Fourier J., "Théorie analytique de la chaleur", Paris, Ches firmin didot père et fils, 1822.

[4] Abel N., "Solution de quelques problèmes a l'aide d'integrales défines", Mag.Naturvidenkaberne, Aurgang 1, Bd 2, Christiania, 1823.

[5] Abel N., "Auflösung einer mechanischen Aufgabe", J.für reine und angew.Math. 1826, Bd 1, s.153-157.

[6] Liouville J., "Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions", J.l'Ecole Roy.Polytechn.1832, T.13, sect.21, P.1-69.

[7] Liouville J., "Mémoire sur l'intégration des équations differentielles a indices fractionnaires", Ibid.1837, T.15, N.55, P.58-84.

[8] Riemann B.,"Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation",Gesammelte Mathematische Werke,Leipzig: Teubner 1876,S.331-344.

[9] Grünwald A.,"Uber begrenzte Derivationen und deren Anwendung", Z.angew.Math.und Phys.1867,Bd.12,S.441-480.

[10] Sonin N.,"O differencirovanii s proizvoljnim ukazateljem",Mat. sb.1872,T.6,vip.1,s.1-38.

[11] Hadamard J.,"Essai sur l'etude des fonctions données par leur développement de Taylor",J.math.pures et appl.Ser.4,1892,T.8,p.101-186

[12] Weyl H.,"Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung",Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich,1917,Bd 62,N. 1-2,S.296-302.

[13] Riesz M.,"Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green",C.R.Congrès Intern.Math.Oslo,1936,T.2,p.62-63.

[14] Love E.,Young L.,"In fractional integration by parts",Proc.London Math.Soc.Ser.2,1938,Vol.44,p.1-35.

[15] Erdelyi A.,Kober H.,"Some remarks on Hankel transforms",Quart. J.Math.Oxford ser.1940,Vol.11,N.43,p.212-221.

[16] Kober H.,"On a theorem of Schur and on fractional integrals of purely imaginary order",Trans.Amer.Math.Soc.1941,Vol.50,N.1, p.160-174.

[17] Samko S.,Kilbas A.,Maričev O.,"Integrali i proizvodnie drobnogo porjadka i nekotorie ih priloženija",Minsk 1987.

[18] Čanak M.,"Jedna definicija antidiferencijala i veza sa klasičnim pojmom neodredjenog integrala",VI Kongres MFAJ 1975.

[19] Čanak M.,"Uber die α-Approximation einer nichtanalytischen Funktion durch ein areoläres Polynom",ZAMM-Z.angew.Math.Mech.69/1989/ 4,T71-T73.

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

Anschrift:Prof.Dr.Miloš Čanak
11000 Beograd
Brzakova 4
Jugoslawien

Differentialtopologie im Umweg über die Elementarteilchenphysik:

H. Urbantke
Institut für Theoretische Physik
Universität Wien

Zusammenfassung

Es wird beschrieben, wie sich neue Einsichten über die differenzierbaren Strukturen auf vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten auf einem völlig unerwarteten Umweg über die Elementarteilchenphysik ergaben. Die direkte topologische Attacke hatte die Rolle der sogenannten Schnittform klar herausgestellt; der Umweg förderte aber eine überraschende und entscheidende Eigenschaft der Schnittform im differenzierbaren Fall zutage. Da auf technische Einzelheiten nicht eingegangen werden kann, beschreibt der Vortrag hauptsächlich den historischen Ablauf dieses Umweges, der psychologisch gesehen sogar vom physikalischen Experiment beeinflußt ist.

Die Wiederentdeckung eines Lemmas von Wedderburn und seine Bedeutung für die moderne Funktionentheorie

Michael von Renteln (Karlsruhe)

1 Einleitung

Es kommt in der Mathematik immer wieder vor, daß Sätze wiederentdeckt und publiziert werden, ohne daß der Fachwelt unmittelbar danach auffällt, daß diese Sätze schon früher gefunden und veröffentlicht wurden. Ein bekanntes Beispiel aus dem Bereich der Funktionentheorie ist der Satz von JENSEN.

JENSEN [5] hat in einer großangelegten Arbeit mit dem Titel „*Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions*" in der Zeitschrift Acta Mathematica kurz vor dem Jahre 1900 die heute sogenannte JENSENsche Formel veröffentlicht, die einen fundamentalen Zusammenhang zwischen dem absoluten Betrag einer holomorphen Funktion f auf einem Kreis und der Verteilung der Nullstellen von f innerhalb dieses Kreises herstellt. Erst in den Jahren 1914 bzw. 1918 wurden von E. LANDAU ([10], vgl. auch [9]) und G. KOWALEWSKI [8] unabhängig voneinander Arbeiten veröffentlicht, in denen sie darauf hinwiesen, daß der Satz und die Formel von JENSEN im wesentlichen bereits 72 Jahre zuvor von JACOBI [4] in einer Arbeit im Crelleschen Journal ausgesprochen und bewiesen wurden.

In diesem Vortrag möchten wir über ein anderes, weniger bekanntes Beispiel aus dem Gebiet der Funktionentheorie berichten. Dabei handelt es sich um einen Satz über ganze Funktionen, der auch eine rein algebraische Formulierung erlaubt. Während es beim Satz von JENSEN gelang, innerhalb von 20 Jahren den wahren Urheber ausfindig zu machen, dauerte es in unserem Fall rund 40 Jahre.

2 Polynomringe und Potenzreihenringe

Polynome bilden einen der frühst- und bestuntersuchten Gegenstände innerhalb der Mathematik. Während man anfänglich Eigenschaften einzelner Polynome studierte, wurden später auch Strukturaussagen von gewissen Gesamtheiten von Polynomen gewonnen. Betrachten wir den einfachsten Fall: die Menge P aller (komplexen) Polynome einer (komplexen) Variablen (Unbestimmten). P ist bekanntlich unter den (punktweisen) algebraischen

Operationen der Addition und Multiplikation ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Einselement 1. Ein zentraler Satz bezüglich der Ringstruktur von P besagt, daß jedes Ideal ein Hauptideal ist ([15], S. 60).

Die einfachste Verallgemeinerung von Polynomen $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ sind die (in ganz $\mathbb{C}$ konvergenten) Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Eine solche Potenzreihe ist eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, eine sogenannte ganze Funktion.

Wie die Menge der Polynome, so bildet auch die Menge aller ganzen Funktionen unter den (punktweisen) Operationen von Addition und Multiplikation einen nullteilerfreien (Identitätssatz!) kommutativen Ring mit Einselement. Mit der algebraischen Struktur dieses Ringes der ganzen Funktionen hat man sich erst relativ spät beschäftigt; und zwar nachdem bereits zuvor in den zwanziger und dreißiger Jahren die abstrakte Ringtheorie von EMMY NOETHER und ihrer Schule entwickelt worden war.

Die erste einschlägige Arbeit über die Ringstruktur des Ringes E der ganzen Funktionen stammt von OLAF HELMER [3] aus dem Jahre 1940.

3 Der Ring der ganzen Funktionen

Es sei E der Ring der ganzen Funktionen. Das Hauptergebnis von O. HELMER [3] ist sein Theorem 9, welches aussagt, daß jedes endlich erzeugte Ideal $(f_1, \ldots, f_n)$ im Ring E ein Hauptideal ist.

Ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Einselement, in dem jedes endlich erzeugte Ideal ein Hauptideal ist, nennt man nach BOURBAKI ([1], S. 85, Exc. 20) einen Bezoutring. Der Ring E der ganzen Funktionen und auch etwas allgemeiner der Ring $H(G)$ aller auf einem Gebiet G holomorphen Funktionen sind also Bezoutringe. Diese Tatsache bildet die Basis für alle weiteren Ergebnisse, die in der Ringtheorie holomorpher Funktionen in den fünfziger und sechziger Jahren erzielt wurden. Die diesbezüglichen Ergebnisse drangen auch teilweise in die neuere Lehrbuchliteratur über Funktionentheorie ein, siehe z.B. das 1979 erschienene Buch von R. BURCKEL ([2], S. 393 f.).

4 Das Lemma von Wedderburn

Das Hauptergebnis von HELMER über den Ring E der ganzen Funktionen sagt aus, daß jedes endlich erzeugte Ideal $(f_1, \ldots, f_n)$ ein Hauptideal ist, und zwar dasjenige, welches durch den größten gemeinsamen Teiler d der Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ erzeugt wird (dieser existiert immer), d.h. es gibt Funktionen $g_1, \ldots, g_n \in E$ derart, daß gilt

$$d = g_1 f_1 + \ldots + g_n f_n \, .$$

Dieses Ergebnis läßt sich einfach durch vollständige Induktion aus der entsprechenden Aussage für zweifach erzeugte Ideale (f, g) ableiten. Diese Aussage wiederum wird reduziert auf den Fall, in dem f und g keine gemeinsame Nullstelle haben. Denn angenommen, die Funktionen f und g besitzen gemeinsame Nullstellen, so dividiert man durch den größten gemeinsamen Teiler d von f und g. Die Funktionen f/d und g/d haben nun keine gemeinsame Nullstelle, denn der größte gemeinsame Teiler ist eine ganze Funktion mit denjenigen Nullstellen, die f und g gemeinsam haben (wobei die Vielfachheiten berücksichtigt werden).

Das Hauptergebnis von HELMER ist also im wesentlichen identisch mit folgendem Lemma, welches auch bei ihm gesondert behandelt wird.

Lemma: *Sind f und g zwei ganze Funktionen, die keine gemeinsame Nullstelle besitzen, so gibt es zwei weitere ganze Funktionen α und β derart, daß die Identität*

$$1 = \alpha f + \beta g$$

gilt.

Algebraisch kann man das Lemma wie folgt interpretieren: Sind f und g teilerfremd (im Ring E), so ist das von ihnen erzeugte Ideal (f, g) gleich dem Gesamtring E, d.h. es gilt $E = (1) = (f, g)$.

Dieses Lemma wurde allgemein HELMER zugeschrieben und entsprechend zitiert (siehe z.B. BURCKEL [2], S. 410; LUECKING-RUBEL [11], S. 109).

Erst Anfang der achtziger Jahre wurde von verschiedenen Seiten (u.a. von N.L. ALLING, siehe [14], S. 7, und C.U. JENSEN, siehe [6] und [7], S. 277) unabhängig voneinander bemerkt, daß das obige Lemma schon ein Vierteljahrhundert früher in einer Arbeit des Algebraikers WEDDERBURN [16] über Matrizen (!) auftaucht, und zwar mit einem viel einfacheren und eleganteren Beweis als der von HELMER. Diese Tatsache wirkte damals wie eine Sensation. In neueren Lehrbüchern der Funktionentheorie wird diese Sachlage inzwischen berücksichtigt (siehe z.B. NARASIMHAN [12], S. 133 oder REMMERT [13], S. 118 ff.).

Auf die Geschichte und die näheren Umstände der Wiederentdeckung des Lemmas von WEDDERBURN sowie über die verschiedenen Beweise wird im Vortrag näher eingegangen.

Literatur

[1] N. BOURBAKI: Éléments de Mathématique, Algèbre commutative, Chapitre 7: Diviseurs. Paris (Hermann) 1965.

[2] R. BURCKEL: An Introduction to Classical Complex Analysis, Vol. 1. Basel (Birkhäuser) 1979.

[3] O. HELMER: Divisibility properties of integral functions. Duke Math. J. 6 (1940), 345–356.

[4] C.G.J. JACOBI: Über den Ausdruck der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale. J. Reine Angew. Math. 2 (1827), 1–8.

[5] J.L.W.V. JENSEN: Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. Acta Math. 22 (1898/99), 359–364.

[6] C.U. JENSEN: Brief vom 11. Januar 1983 an den Verfasser.

[7] C.U. JENSEN: Some curiosities of rings of analytic functions. J. Pure Appl. Algebra 38 (1985), 277–283.

[8] G. KOWALEWSKI: Ein funktionentheoretischer Satz Jacobis. Jahresber. DMV 27 (1918), 53–55.

[9] G. KOWALEWSKI: Bemerkung zu meinem Aufsatz über einen funktionentheoretischen Satz Jacobis. Jahresber. DMV 27 (1918), S. 160.

[10] E. LANDAU: Über eine Aufgabe aus der Funktionentheorie. Tôhoku Math. J. 5 (1914), 97–116.

[11] LUECKING und L. RUBEL: Complex Analysis, A Functional Analysis Approach, Berlin-Heidelberg (Springer) 1984.

[12] R. NARASIMHAN: Complex Analysis in one Variable. Boston-Basel-Stuttgart (Birkhäuser) 1985.

[13] R. REMMERT: Funktionentheorie II. Berlin-Heidelberg (Springer) 1991.

[14] D. RUSH: Rings which resemble rings of entire functions. Glasgow Math. J. 24 (1983), 7–16.

[15] B.L. VAN DER WAERDEN: Moderne Algebra. Berlin (Springer) 1930.

[16] J.H.M. WEDDERBURN: On matrices whose coefficients are functions of a single variable. Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), 328–332.

Freges Erweiterung des Größenbegriffs - eine Sackgasse?

Karl-Heinz Schlote(Leipzig)

Die Reflexionen einzelner Mathematiker über ihr eigenes Lebenswerk kritisch durchzusehen, scheint eine Möglichkeit zu sein, um Umwegen und Sackgassen in der Entwicklung der Mathematik auf die Spur zu kommen. Nicht selten wird in diesen Äußerungen das einst so erfolgversprechende wissenschaftliche Programm als gescheitert bzw. unerfüllbar erklärt, klagt der Betreffende über mangelnde oder völlig ausgebliebene Anerkennung seiner Ideen usw. Natürlich sind diese Lebensrückblicke immer individuell geprägt. Doch fügt man in jenen Fällen, in denen die Berichte eines der erwähnten negativen Urteile enthalten, die mitunter fehlende sachlich objektive Einschätzung der Entwicklung des jeweiligen Fachgebiets hinzu, so wird man mit großer Wahrscheinlichkeit einen Umweg oder eine Sackgasse der Mathematikgeschichte entdecken können.
Ein Fall, in dem dieses Verfahren nur bedingt zum Erfolg führt, ist der Logiker Gottlob Frege. Es soll hier jedoch nicht analysiert werden, ob und in welchem Umfang Freges logische Forschungen einen Umweg in der Geschichte der Mathematik darstellen. Frege, dessen Ideen zur Logik erst sehr spät anerkannt wurden und der angesichts der Entdeckung der Antinomien der Mengenlehre den größten Teil seines Lebenswerkes als gescheitert ansah, würde sicher sogar von einer Sackgasse sprechen. Im folgenden soll lediglich eine der frühen wissenschaftlichen Schriften des Mathematikers Frege, seine Habilitationsschrift, genauer unter dem Gesichtspunkt betrachtet werden, ob die darin entwickelte Theorie in eine Sackgasse der mathematischen Forschung führte oder nicht.
Gottlob Frege reichte am 16. März 1874 der Philosophischen Fakultät der Universität Jena ein Habilitationsgesuch mit der zugehörigen Abhandlung "Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffs gründen" ein. Als Ausgangspunkt für diese Arbeit wählte er die Tatsache, daß die Einführung der negativen und imaginären Zahlen eine Erweiterung des Größenbegriffs notwendig gemacht hatte. In diesem Prozeß hatte sich der Größenbegriff von der scheinbaren Bestimmung durch die Anschauung gelöst, die ihm durch die geometrische Interpretation der einzelnen Zahlarten zukam. Charakterisierende Merkmale von Größen sind nach Frege vielmehr jene Eigenschaften, die sich beim Operieren mit ihnen ergeben, und wir selbst bestimmen, welche Vorstellungen mit dem Größenbegriff verbunden werden.

"Da das Object der Arithmetik keine Anschaulichkeit hat, so können auch ihre Grundsätze aus der Anschauung nicht stammen. ... Hieraus folgt, dass wir die zum Aufbau der Wissenschaft nöthigen Sätze in den Begriff der Grösse hineinlegen, indem wir Alles ausschliessen, was ihnen sich nicht fügt." /Frege 1874, S. 1/
Für Frege war der Größenbegriff letztlich eine Eigenschaft, von der in jedem konkreten Fall gesagt werden kann, ob sie einem Gegenstand zukommt oder nicht und wann zwei Gegenstände in ihr übereinstimmen. Zugleich muß natürlich die Moglichkeit bestehen, daß zwei Dinge in dieser Eigenschaft nicht übereinstimmen, beiden aber diese Eigenschaft zukommt. Der Größenbegriff begründet auf diese Weise eine Größer-Kleiner-Relation, ohne die die Definition sinnlos wird und ihren "wesentlichen Inhalt" verliert. Die durch diese Variationsmöglichkeiten für eine "Grössenart" bestimmte Menge bildet nach Frege das Größengebiet. "Wenn wir den Größenbegriff ... selber schaffen" und so allgemein festgelegen, dann, fährt Frege fort, kann man versuchen, ihn so zu bestimmen, daß eine möglichst breite Anwendung möglich, also "der Arithmetik ein möglichst grosses Gebiet unterthan" wird. /Frege 1874, S. 2/ Für Frege war die Arithmetik die Lehre von den Größen und ein logisch einwandfreier Aufbau der Mathematik mußte einen solchen Aufbau zuerst für die Arithmetik als der entscheidenden Grunddisziplin leisten. Er hob dann die Addition als die Operation hervor, auf der die anderen arithmetischen Operationen fußen, und wies auf die Größengleichheit als den entscheidenden Begriff hin, verzichtete aber an dieser Stelle darauf, den Aufbau der Arithmetik nach diesen Grundsätzen zu vollziehen. Das Ziel seiner Habilitationsschrift sah er in dem Nachweis, daß man auch Operationen (Funktionen) in sinnvoller Weise eine Größe zuordnen und diesen Größenbegriff nutzbringend anwenden konnte. In einem ersten Schritt kam es also darauf an, einen entsprechenden Größenbegriff zu definieren.
Einer Operation (Funktion) ordnet er eine gewisse nicht näher bestimmte Größe zu. Die Operation (Funktion), die durch n-ma-

liges Ausführen der Ausgangsoperation entsteht, hat dann den n-fachen Wert der Ausgangsgröße. Sucht man dagegen die Operation (Funktion), die n-mal hintereinander ausgeführt die Ausgangsoperation ergibt, so entspricht der gesuchten Operation die 1/n-fache Größe. Analog ordnet Frege der Operation, die die Wirkung der Ausgangsoperation wieder rückgängig macht, also der inversen Operation, den negativen Wert der Ausgangsgröße und schließlich der identischen Operation die Nullgröße zu. Die Gesamtheit der auf diese Weise entstehenden Operationen bezeichnet er als Größengebiet.

"Man sieht leicht, dass diese Operationen und alle, die hieraus auf die angegebenen Weisen entstehen können, zusammen ein Größengebiet bilden. Es mögen nun unter diesem Gesichtspunkte arithmetische Operationen betrachtet werden." /Frege 1874, S. 2/

Damit hatte Frege die grundlegenden Eigenschaften angegeben, die er von einer Größenzuordnung zu Operationen (Funktionen) forderte. Um das eingangs formulierte Ziel seiner Habilitationsschrift zu erreichen, entwickelte er folgende Idee: In der Arithmetik gibt es eine Reihe von Verfahren, die auf der Wiederholung von gewissen Grundoperationen beruhen. Als Beispiele führt Frege aus dem Gebiet der Arithmetik, die Multiplikation, das Potenzieren, die Näherungsrechnung und die Rekursionsformeln an. Gelingt es für die Grundoperationen einen Größenbegriff nach den obigen Prizipien zu definieren, so genügte es, die zum n-fachen Wert der Grundgröße gehörige Funktion zu bestimmen, um dann das Ergebnis der n-fachen Anwendung der Ausgangsoperation, z. B. die Summe einer endlichen Reihe, auf einfache Weise ableiten zu können. Zunächst demonstrierte Frege, wie für Addition und Multiplikation eine Größe eingeführt werden kann, und wandte sich dann der allgemeinen Aufgabe zu, einer Funktion einer Veränderlichen eine Größe zuzuordnen. Die Fragen

"Welches ist die Function, deren Grösse zu der Grösse einer gegebenen Function in einem gegebenen Verhältnis steht?

Gehören die Grössen zweier gegebener Functionen demselben Grössengebiet an, und in welchem Verhältnisse stehen sie dann?" /Frege 1874, S. 4/

arbeitete er als die für seine Problemstellung wichtigsten heraus. Diese reduzierte er darauf, die allgemeine Form einer Funktion zu finden, welche das n-fache einer gegebenen ist. Über

eine Funktionalgleichung leitete Frege dann die sogenannte Größengleichung ab, deren explizite Bestimmung Voraussetzung für praktische Realisierung seiner Ideen ist. Nach der Übertragung der Theorie auf Funktionen mehrerer Veränderlicher und Funktionensysteme untersuchte er die Größengleichung eines Systems linearer homogener Funktionen genauer und nutzte die Ergebnisse zur Behandlung von periodischen Kettenbrüchen, Funktionalgleichungen, Reihenentwicklung u. a. Da Frege bereits einleitend betont hatte, daß "eine allgemeine Theorie des auf Functionen bezogenen Grössenbegriffes" wegen ihres Umfanges und der Schwierigkeiten, die mit einer solchen "Theorie in ihrer grössten Allgemeinheit und Vollständigkeit" verbunden wären /Frege 1874, S. 3/, in der vorliegenden Arbeit nur in ihren Grundzügen entwikkelt werden kann, war damit das gestellte Ziel erreicht.

Die Arbeit wurde von Ernst Abbe sehr positiv begutachtet und vor allem als ein Versuch angesehen, in der Klassifikation der verschiedenen Funktionen voranzukommen. Bei allem Lob schätzte Abbe die Situation jedoch richtig ein, indem er vermerkte, daß man erst nach weiteren, detaillierteren Studien als die vorliegende entscheiden kann, ob die entwickelten Ideen als bedeutend in die Annalen der Mathematik eingehen werden oder ob sie sich mit den Ausführungen des Kandidaten im wesentlichen erschöpft haben. Auf der Basis des Abbeschen Gutachtens und das ordnungsgemäße Ableisten der vorgeschriebenen öffentlichen Disputation und der Probevorlesung voraussetzend, genehmigten die "durchlauchtigsten Erhalter der Gesammt-Universität Jena" am 1. Mai 1874 die Habilitation Freges zum Privatdozenten. Mit Freges Probevorlesung am 18. Mai wurde das Habilitationsverfahren erfolgreich abgeschlossen.

Die weitere Entwicklung der Mathematik hat die skeptischen Bemerkungen Abbes zur Bedeutung der Fregeschen Arbeit bestätigt. Der Größenbegriff für Funktionen scheint später nicht wieder aufgegriffen worden zu sein. Stellt also die von Frege eingeschlagene Richtung eine Sackgasse der mathematischen Forschung dar? Bezogen auf die konkreten Ausführungen Freges muß sicher mit Ja geantwortet werden. Wird der Rahmen jedoch etwas größer gefaßt und die Habilitationsschrift als ein Versuch gesehen, durch quantitative Elemente eine gewisse Klassifikation in einer Menge von Funktionen einzuführen bzw. gewisse qualitative Aussagen über Funktionen zu erhalten, so ließen sich durchaus Fortsetzungen und genauere Realisierungen der Fregeschen Ansätze finden. Bei einer derartigen Interpretation kommen die Fregeschen Gedanken allerdings nicht über das Stadium recht allgemeiner philosophischer Formulierungen hinaus. Die Bedeutung der Arbeit liegt vor allem darin, daß Frege bewußt machte, welche Anwendungsbreite der abstrakte Größenbegriff ermöglicht, und dies an einer schwierigen, neuen Materie getestet hat. Bei der im Titel genannten Erweiterung des Größenbegriffs handelt es sich also nicht um eine inhaltliche Erweiterung bzw. Neubestimmung dieses Begriffes, sondern um eine Vergrößerung des Anwendungsrahmens. Die Arbeit war zugleich ein Beitrag zu jener allgemeinen Diskussion des Größenbegriffs, die über Jahrhunderte hinweg immer wieder von einzelnen Mathematikern geführt wurde, und paßte sich in diesem Sinne durchaus in den breiten Strom der mathematischen Forschung ein. Wenn auch die konkrete Umsetzung der Ideen das Ganze zu einer scheinbar nutzlosen Randströmung werden ließ, die im Ufersand versickerte, so darf nicht außer Acht gelassen werden, daß diese Studien zum Größenbegriff letztlich eine der Quellen waren, die Frege zur Begriffsschrift und zur Grundlegung der Arithmetik führten.

Literaturauswahl:

Frege 1874: Frege, Gottlob: Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffs gründen. Jena 1874.

Frege 1967: Angelelli, Ignacio (Hrsg.): Gottlob Frege: Kleine Schriften. Hildesheim 1967.

Kutschera 1989: Kutschera, Franz v.: Gottlob Frege. Eine Einführung in sein Werk. Berlin, New York 1989.

Sluga 1984: Sluga, Hans: Frege: the early years. In: Rorty, R.; Schneewind, J. B.; Skinner, Q.(ed.): Philosophy in History. Cambridge 1984, p. 329 - 356.

Wozu Algebra der Logik?
Zum Lebenswerk von Ernst Schröder

Volker Peckhaus
Institut für Philosophie
der Universität Erlangen-Nürnberg
Bismarckstr. 1, D – 8520 Erlangen
e-mail: peckhaus@cnve.rrze.uni-erlangen.de

Gegenstand des Vortrages ist das Lebenswerk des Karlsruher Mathematikers Ernst Schröder (1841–1902), wobei der Stellenwert, den die Algebra der Logik in seinem Schaffen besessen hat, besondere Berücksichtigung finden soll. Mit einem solchen, auf die Arbeiten eines einzelnen Autors beschränkten Ansatz läßt sich natürlich nur ein kleiner Aspekt des Begriffs wissenschaftlicher Entwicklung abdecken. Dennoch können der Entwicklungsbegriff und damit zusammenhängende Begriffe wie „Umweg", „Abweichung" oder „Sackgasse" auch in diesem Kontext gewinnbringend angewendet werden, insbesondere dann, wenn sich das Lebenswerk eines Autors als der Versuch der sukzessiven Einlösung einer zu Anfang des wissenschaftlichen Schaffens formulierten übergeordneten Programmatik erweist. Dies ist bei Ernst Schröder der Fall. Neben frühen programmatischen Äußerungen liegt auch eine kurz vor seinem Tod verfaßte autobiographische Notiz vor, die es erlaubt, die in der Programmatik sozusagen „prognostizierte Entwicklung" mit dem von ihm selbst als Zwischenergebnis erachteten Stand seiner Arbeit zu vergleichen.

Die erwähnte autobiographische Notiz erschien *1901* in dem Prachtband *Geistiges Deutschland*, in dem Porträts bedeutender deutscher Wissenschaftler zusammen mit kurzen Lebensbeschreibungen veröffentlicht wurden. Schröder teilt dort seine wissenschaftlichen Arbeiten in drei Bereiche ein: Er nennt zunächst „eine [...] Anzahl von Abhandlungen über einige seine Wissenschaft betreffende Tagesfragen". In die zweite Gruppe fallen die Arbeiten zur Schaffung einer „absoluten Algebra",

> d.h. zu einer allgemeinen auch über das Assoziationsgesetz hinausgehenden Theorie der Verknüpfung. Von Arbeiten wie diese, SCHRÖDERS ureigenstes Forschungsgebiet repräsentierend, ist noch wenig veröffentlicht.

Das dritte Gebiet stellen die Arbeiten dar, „die sich auf eine Reform und Weiterentwicklung der Logik beziehen." In diesen Arbeiten habe er versucht,

> die Logik zu einer rechnerischen Disziplin zu gestalten, insbesondere die relativen Begriffe einer exakten Behandlung zugänglich zu machen und durch Emanzipation von den Gewohnheitsfesseln der Wortsprache fortan auch auf dem Gebiete der Philosophie der „Phrase" jeden Nährboden zu entziehen. Es soll damit eine wissenschaftliche Universalsprache angebahnt werden, die von den linguistischen Bestrebungen à la Volapük himmelweit verschieden, sich mehr als Zeichen- wie als Lautsprache darstellt.

Schon diese wenigen Zitate machen deutlich, daß die übliche Charakterisierung Schröders als Algebraiker der Logik zwar historisch gerechtfertigt ist, aber kaum seinen eigenen Vorstellungen über sein wichtigstes Arbeitsgebiet entspricht: Sein „ureigenstes Forschungsgebiet" ist die „absolute Algebra", ein Gebiet, das zumindest von den Ausgangsfragen und Grundannahmen her der modernen abstrakten Algebra bzw. der *Universal Algebra* ähnlich ist.

Doch wie stehen absolute Algebra und Algebra der Logik im Werk Schröders zueinander? Es scheint lohnend, dieses Verhältnis von den algebraischen Schriften aus zu beleuchten. Dabei wird sich zeigen, daß Schröder den formalen Teil der Logik, der sich unter Verwendung einer algebraischen Notation als „rechnende Logik" und damit als „exakte Logik" gestalten läßt, als *Modell* einer umfassenderen, von ihm in der letzten Ausbauphase „absolut" genannten formalen Algebra auffaßte. Das Programm der „absoluten Algebra" formulierte er in dem ersten und einzig erschienenen Band seines *Lehrbuchs der Arithmetik und Algebra* (*1873*). Die darin entwickelten Gedanken führte er in der ein Jahr später erschienenen Baden-Badener Schulprogrammschrift *Über die formalen Elemente der absoluten Algebra* (*1874*) aus.

Als grundlegend für die absolute Algebra hebt er dort die Annahme der Gegebenheit einer „unbegrenzten Mannigfaltigkeit von Objecten (irgend einer Art)" hervor (*1874*, 3),

> welche begrifflich — durch ein Merkmal oder eine Grenze — von einander unterschieden sind. Beliebige Elemente dieser gedachten Mannigfaltigkeit werden mit Buchstaben a, b, c ... bezeichnet. [...] Die gegebene Mannigfaltigkeit kann ein *Zahlengebiet* — im weitesten Sinne des Wortes — genannt werden.

Die hier eingeführte Benennung des betrachteten Gegenstandsbereiches mit „Zahlengebiet"[1] ist weitgehend willkürlich, denn als Beispiele von solchen,

[1] Die Bezeichnung selbst wurde von Schröder allerdings schon in *1873*, 233, verwendet.

„eine Mannigfaltigkeit constituirenden Objecten" nennt Schröder „Eigennamen, Begriffe, Urtheile, Algorithmen, Zahlen, Grössen- und Operationssymbole, Punkte und Punktsysteme, oder irgend welche geometrische Gebilde, Quantitäten von Substanzen, u.a.m." (Schröder *1874*, 3).

Zur formalen Algebra rechnet Schröder „im engsten Sinne des Wortes" (*1873*, 233)

> diejenigen Untersuchungen über die Gesetze algebraischer Operationen [...], welche sich auf lauter allgemeine Zahlen eines unbegrenzten Zahlengebietes beziehen, *über dessen Natur selbst weiter keine Voraussetzungen gemacht sind*.

Sie leiste damit die Vorarbeit „für die Betrachtung der verschiedenartigsten speciellen Zahlensysteme und Rechnungsoperationen, welche zu besondren Zwecken ersonnen werden mögen" (*1873*, 233). Den Gegenstand der formalen bzw. absoluten Algebra faßt Schröder im *Lehrbuch* in einem Katalog von vier Punkten zusammen (293*f*.):

(1) Die formale Algebra stellt in systematischer Vollständigkeit alle Annahmen zusammen, die überhaupt dazu dienen können, Verknüpfungsoperatoren von Zahlen eines Zahlengebietes zu definieren.

(2) Die formale Algebra stellt zu jeder Prämisse bzw. Prämissenkombination das vollständige System der Folgerungen auf („Separation").

(3) Die formale Algebra untersucht, in welchen in sich abgeschlossenen Zahlensystemen die definierten Operationen gültig sind.

(4) Schließlich hat die formale Algebra zu entscheiden, „welche geometrische, physikalische oder überhaupt vernünftige Bedeutung diesen Zahlen und Operationen zukommen, welches reale Substrat ihnen unterlegt werden kann" (294).

Erst nach Erledigung der Schritte (3) und (4) hat sich die formale Algebra zur *absoluten Algebra* fortentwickelt. Diese Schritte zeigen zugleich den modelltheoretischen Charakter der absoluten Algebra.

Schröder untersucht exemplarisch die nicht-kommutative „symbolische Multiplication" samt ihren beiden Inversen „Messung" und „Theilung". Er stellt u.a. das für Multiplikation und Division der reellen Zahlen geltende Formelsystem auf und bemerkt schließlich, daß u.a. auch *logische Addition* und *logische Multiplikation* von *Begriffen* „(oder auch Individuen)" und von *Urteilen* „(desgl. auch Algorithmen)" den durch die Formeln ausgedrückten Gesetzen unterliegen (*1874*, 25).

Angesichts der Punkte (3) und (4) seines Programmes erscheint es durchaus konsequent, daß Schröder sich in der Folgezeit zunächst vor allem der Analyse dieses Modelles der absoluten Algebra widmet. Mit seinem *Operationskreis des Logikkalkuls* (*1877*) veröffentlicht er eine erste, ausschließlich der Logik gewidmete Schrift, in der er eine Interpretation und Modifikation des Booleschen Logikkalküls gibt. Das Schwergewicht legt er auf die Darstellung der Dualität von logischer Addition und logischer Multiplikation, also die Strukturgleichheit dieser Operationen. Es bleibt festzuhalten, daß Schröder mit „Algebra der Logik" im wörtlichen Sinne die *Struktur* der Logik bezeichnet, nicht eine spezielle Form ihrer Darstellung oder gar eine besondere Art von Logik. Auch in seinen monumentalen *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*1890–1905*) trennt Schröder den Gegenstand der Logik von ihrer Struktur. Der Kalkül wird als „Hülfsdisciplin" aufgefaßt, der der eigentlichen Logik voraus- oder parallel mit ihr einhergeht (*1890*, 157). Im dritten Band der Vorlesungen, der mit *Algebra und Logik der Relative* (*1895*) überschrieben ist, schafft Schröder durch die Einführung von relativer Multiplikation und relativer Addition eine weitere Verallgemeinerung, wobei er nicht müde wird, den Doppelcharakter dieser Disziplin als Logik und als Algebra zu betonen. In dem einzig erschienenen ersten Teil behandelt er lediglich die algebraische Seite.

In der *Algebra und Logik der Relative* offenbart sich eine Erweiterung des ursprünglichen Programms der absoluten Algebra zu einem Grundlegungsprogramm für alle formalisierbaren bzw. mit formalen Mitteln arbeitenden Wissenschaften. Dieses Programm war zweigeteilt. Es bestand aus der absoluten Algebra als allgemeiner Theorie der Verknüpfungsoperationen und der Relativlogik, als allgemeiner logischer Theorie. Durch die Relativlogik wurde eine formale Sprache bereitgestellt, die sich bei geeigneter Interpretation der schematischen Buchstaben und der relativen Operatoren auf unterschiedlichste Gebiete wie Geometrie, Mengenlehre oder auch die menschlichen Verwandtschaftsbeziehungen anwenden ließ. Schröder übersetzte u.a. die Dedekindsche Kettentheorie in die Sprache der Relativlogik mit dem

> *Endziel* [...]: zu einer streng logischen *Definition* des *relativen* Begriffes ‚*Anzahl von*–' zu gelangen, aus welcher sich alle auf diesen Begriff bezüglichen Sätze rein deduktiv werden ableiten lassen [*1895*, 349*f*.].

Schröders logisches System rückt damit in die Nähe des Fregeschen Logizismus, eine Richtung, die mit der Algebra der Logik üblicherweise nicht oder nur als Gegenpol in Verbindung gebracht wird.

Schröders Lebenswerk ist Ausdruck einer konsequenten Entwicklung seiner wissenschaftlichen Arbeit. Er ist seinem in den frühen Schriften vertretenen universal-algebraischen Programm über fast dreißig Jahre treu geblieben.

Seine Arbeiten zur Algebra der Logik passen nahtlos in dieses Programm hinein, stellen also keinen Umweg oder eine unabhängige Entwicklung dar. Daß Schröder letztendlich scheiterte, in dem Sinne, daß er weder seine absolute Algebra, noch sein logisches System zu einem Abschluß bringen konnte, hängt wohl vor allem damit zusammen, daß seine Algebra der Logik, insbesondere die Algebra und Logik der Relative zum „Selbstläufer" wurde und Arbeitsfelder eröffnete, die Schröder nicht vorhergesehen hatte und als einzelner auch nicht bewältigen konnte.

Literaturverzeichnis

SCHRÖDER, Ernst *1873 Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende*, Bd. 1 [mehr nicht erschienen]: *Die sieben algebraischen Operationen*, B.G. Teubner: Leipzig.

— *1874 Über die formalen Elemente der absoluten Algebra*, Schweizerbart'sche Buchdruckerei: Stuttgart; zugl. Beilage zum Programm des Pro- und Real-Gymnasiums in Baden-Baden für 1873/74.

— *1877 Der Operationskreis des Logikkalkuls*, B.G. Teubner: Leipzig; Repr. als „Sonderausgabe" Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt 1966.

— *1890 Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, Bd. 1, B.G. Teubner: Leipzig; Repr. Schröder *1966*.

— *1891 Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, Bd. 2, Tl. 1, B.G. Teubner: Leipzig; Repr. Schröder *1966*.

— *1895 Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, Bd. 3, Tl. 1: *Algebra und Logik der Relative*, B.G. Teubner: Leipzig; Repr. Schröder *1966*.

— *1901* „Grossherzoglich Badischer Hofrat Dr. phil. Ernst Schröder[,] ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe i. Baden", *Geistiges Deutschland. Deutsche Zeitgenossen auf dem Gebiete der Litteratur, Wissenschaften und Musik*, Adolf Eckssteins Verlag: Berlin-Charlottenburg o.J., unpag., 2 S.

— *1905 Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, Bd. 2, Tl. 2, hg. v. Karl Eugen Müller, B.G. Teubner: Leipzig; Repr. Schröder *1966*.

— *1966 Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, [„second edition"], 3 Bde., Chelsea: Bronx, N.Y. 1966.

PEIRCE'S TOPOLOGICAL CONCEPTION OF CONTINUITY

by

Ana Marostica

In this paper, Cantor's conception of continuity is first briefly introduced. Next, the topological conception of continuity given by Peirce is presented. Finally, some consequences of the Stone Representation Theorem related to the discussed issue of continuity is evaluated.

1. Cantor. Cantor's theory of continuity was originally put forward in the framework of his set theory. The concept of continuity had a very important role in motivating Cantor's mathematical research. In the Grundlagen.. of 1883, he tried to give a precise definition of the concept of continuity.

After referring shortly to the discussion of this concept in some philosophers such as Aristotle, Epicurus and Kant, Cantor claimed that the concept of continuity must be treated independently of philosophical considerations.

Cantor rejected, as well, the connection between intuition and continuity, because time and space were generally used to explain the mind's intuition of continuity. For him, references to the conception of time (especially to the continuity of time) were not admissible. This is because, according to Cantor, the conception of time and space can only be clearly explained by means of the conception of continuity, which must be independent of them.

Cantor proposed, instead, a purely mathematical analysis of the continuum. He started from the n-dimensional arithmetical space Gn, that is to say, the totality of systems of values, $(x_1, \ldots, x_n)$, in which every $\underline{x}$ can receive any real value from $-\infty$ to $+\infty$ independently of the others. Every such system is called an "arithmetical point" of Gn. The "distance" between any two such points is defined by the formula:

$$\left| \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \cdots + (x'_m - x_m)^2} \right|$$

For Cantor, the question was when an arithmetical point-aggregate P, contained in Gn, is to be called a continuum. He claimed that, for any set P whose first derived set P' was nondenumerable, P' could always be written as $P' \equiv R + S$, where the aggregate $\underline{S}$ was a perfect set, and $\underline{R}$ was either finite or denumerable. In applying this result to examples of continuum sets, Cantor concluded that those sets must be perfect sets. However, this condition, by itself, was not enough to describe the continuum. The example of his ternary set showed Cantor that perfect and dense sets need not be continuous. Therefore, some other property was required before the continuum could be completely

described. This other property is that the set must be connected.

The concept of connectedness, used to replace the idea of everywhere-denseness (idea equivalent to that of connectedness), freed Cantor from having to introduce the auxiliary concept of space with reference to which a given point set could be said to be everywhere-dense. With the predicate of connectedness, no such additional considerations were required. As Cantor said in the Grundlagen: "I believe, now, that I recognize in these two predicates 'perfect' and 'connected' the necessary and sufficient characteristics of point-continua." He added that, in this context, 'perfect' and 'connected' are not simply words, they are quite general predicates, conceptually characterizing, most sharply, the essence of the continuum.

2. Peirce. Peirce struggled, for many years, to arrive at an accurate mathematical definition of continuity. In 1889, he was partially satisfied with Cantor's definition of continuity. However, the influence of Cantor on Peirce was obvious. In fact, Peirce denies almost every possible influence upon his work on multitudes [by the word "multitude" Peirce means what Cantor had called the 'power' of a collection, or cardinal number] and continuity except that of Cantor. In the definition of continuity for the Century Dictionary, Peirce wrote: "The less unsatisfactory definition is that of G. Cantor, that continuity is the perfect concatenation [coordination] of a system of points..."

In 1900, Peirce suggested that since collections have multitude [power of a collection] and obey Cantor's Theorem, a continuum is not really a collection. (CP 3.568) But, if the continuum is not a collection, Peirce must develop some other way of explaining the continuum. His criticism of Cantor's definition of continuity goes further in 1903 (in notes for the Supplement of the Century Dictionary): Peirce said then that Cantor's definition is not satisfactory because it involves a vague reference to all the points. According to Peirce, this is wrong because a continuous line contains no points until the continuity is broken by marking the points.

This is because Peirce tried to find a better definition in a branch of mathematics different from calculus. In 1903, in the same Supplement, he presented his definition of continuity "as the relation of the parts of an unbroken space or time." In the same year, Peirce said that there is a serious dispute between those who approach the definition of continuity from the side of calculus [Cantor], and those who approach the subject from the side of topology [Peirce called it "topics"]. He adds that:"topicists say that what the analysts call continuity is not continuity at all;we call it 'pseudo-continuity.'" (Mc 458)

In 1904, Peirce tried to justify his definition by explaining that geometrical topics [another name for topology] are one of the three divisions of geometry (the other ones are graphics and metrics). In the field of topology we still suppose objects to move about in space. But we must assume that, at will, any of these objects can be made to expand, to contract, to bend, to twist, and to move free from any law, except only that it is nowhere to be broken or welded. He adds that we suppose the connection of parts to be undisturbed. However, this connection of parts, which is the sole law of topical movables, is a property of the very space itself. According to Peirce, space for topology can only be a general concept; and the only general concept of space we have, or can have, is that it is a law imposed upon certain changes of objects, namely, their motion. Topology [or topics] is, for Peirce, the only mathematics of pure space that is possible. (Ms 137)

In the manuscript mentioned before, Peirce claimed that the doctrine of topics presupposes the doctrine of time, because it considers motions. Later in the same passage Peirce said that the time of our knowledge, considered as a system of relations between instants, is quite illusory like the difference between the past and the future. This is because the dates in themselves are alike in themselves. He believed that the two directions of time, from the topological point of view, are as alike as the two directions along the line.

In order to improve his definition of continuity, Peirce used some of the ideas given by Kant in his Kritik der reinen Vernunft (1781). Namely Kant defines a continuum as one all of whose parts have parts of the same kind. (CP 6.168, 1903) This should not be confused with Peirce's earlier interpretation of Kant's definition of continuity as an infinite divisibility. This new interpretation of Kant's definition implies that a continuum cannot have point-like parts at all. Related to that conception, in 1908, Peirce said that Kant's definition of continuity could be interpreted in a better way as saying that "all of the parts of a perfect [or topological] continuum have the same dimensionality as the whole." Hence, this requires not only that all of the parts must have parts of the same kind, but also that sufficiently small parts must have a uniform mode of immediate connection.

However, in this endeavor to explicate "immediate connection," Peirce had to introduce the idea of time. Peirce said that this does not involve a vicious circle, because when we say that time is continuous, we are using that expression in the same way that the expression 'atomic weight,' as a standard of all the other atomic weights, is used when we say that the atomic weight of oxygen is 16. Peirce has come full circle since 1889 when he agreed with Cantor that the notion of continuity should be defined independently of the concept of time. His definition of continuity after 1903 can be stated completely in terms of the time-like mode of immediate connection which obtains between sufficiently small time-like parts.

MAROSTICA

3. Concluding remarks. In the historical reconstruction of this paper, I tried to emphasize some important points. First, Peirce was one of the first thinkers in this century to present a topological characterization of continuity, though wrongly. Nowadays, it is very common to read a topological definition of the continuum as a compact, connected Hausdorff space. (Bellamy, 1983) The inaccuracy of Peirce's definition of continuity, based in the concept of time, is due to the fact that at the beginning of this century topology was considered as a rubber geometry (sometimes, wrongly, topology was called by this name). This is because Peirce says that topology presupposes time, since time presupposes motion.

Second, Peirce was correct when he criticized Cantor's definition of continuity, because a continuous line contains no points. If we mark the points, we interrupt the continuity. However, in 1936, M.H. Stone presented a paper which was concerned primarily with the problem of determining the representation of a given Boolean algebra by the algebra of classes, or aggregates. In that article, he solved the problem by constructing an algebra of classes isomorphic to a given Boolean algebra. It is a curious fact that one of the consequences of the Stone Representation Theorem implies that if a Boolean ring A has just one element, the class B(A) that is the algebra of classes representing A, consists of the void class alone. This allows us to conclude that it is possible to determine a homomorphism of one class with members (e.g. points) into another class without members. If we apply this result to the problem of Cantor's definition, the problem disappears.

Finally, the aim of this paper was to stress the importance of the historical reconstruction of two different mathematical approaches to the definition of continuity.

REFERENCES

BELLAMY, D.P.: 1983, 'Some Topics in Modern Continua Theory', in R.H. Bing et al. (eds), Continua Decompositions Manifolds, University of Texas Press, pp 1-22.

CANTOR, G.: 1883, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leipzig: B.G. Teubner.

PEIRCE, C.S.: 1960, Collected Papers of Charles S. Peirce, Vol. I-VI Ed. by C. Hartshorne and P. Weiss; Vol. VII-VIII, Ed. by A.W. Burks. The Belnap Press of Harvard University Press.

PEIRCE, C.H.: 1967, Manuscripts and Letters. As Arranged in Annotate Catalog of the Papers of Charles S. Peirce, By R.S. Robin. University of Massachusetts Press.

PEIRCE, C.S.: 1976, The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce. Ed. by C. Eisele, Vol. II (Algebra and Geometry). The Hague-Paris, Mouton Publ.

5
STONE, M.H.: 1936, 'The Theory of Representation for Boolean Algebra,' Transactions of the American Mathematical Society, 40, pp 37-111.

PEIRCE'S CONCEPTION OF CONTINUITY

ABSTRACT

Charles S. Peirce (in notes for the Supplement of the Century Dictionary, 1903) had cast doubt on Cantor's definition of continuity, which says that continuity is the perfect concatenation of a system of points (Grundlagen..., 1883). This paper presents Peirce's characterization of continuity as the relation of the parts of an unbroken space or time. The distinction between "true continuity," as it was studied by topology (Peirce), and "pseudo-continuity," as it was studied by calculus (Cantor), is presented. The main argument given by Peirce shows that Cantor's definition is unsatisfactory because a continuous line contains no points until the continuity is broken by marking the points. I shall evaluate the relationship between Cantor's definition of continuity and some consequences of the Stone Representation Theorem for Boolean Algebra (Trans. Amer. Math. Soc., 1936).

Poincaré's Road to Topology

Gregory Nowak

Algebraic topology traces its origins back to a set of six papers published by Henri Poincaré during the years 1895–1904 (See references [3] - [8], collected in [10]). This branch of mathematics has proven to be a resounding success, and its rapid development, especially since the 1930s, has been marked by an ever-expanding interaction of new problems and new methods used to solve them. However, this very success has tended to obliterate from view the concerns and methods of Poincaré himself. I trust that I will not need to convince an audience of historians of mathematics that mathematicians do not normally sit down to their desks with the intention of creating a new branch of mathematics — yet this is the picture that most current literature tends to give us of Poincaré's work in this field.

One historiographical trend has been to connect the work of Poincaré with earlier homological insights of Riemann and Betti ([1], [11]). Though correct, this connection provides only part of the story, and more general surveys of "topological" ideas presented as leading to Poincaré's work appear unified only in hindsight. Equally important to an understanding of Poincaré's topological work is a consideration of his papers of the 1880s on the qualitative theory of differential equations ([9]). We see in these papers the same concern with qualitative features of geometric objects which was later to become the defining feature of topological thought. In addition to the published articles, we are lucky enough to have Poincaré's own insights on the unity of his mathematical work. In 1901, Mittag-Leffler had asked Poincaré to survey his works and attempt to provide an overview; this survey was only published after Poincaré's death ([10]). It is less generally known that this text is based on two essays Poincaré had written in 1884 and 1887 to support his candidacy to the Academy of Sciences, and published as pamphlets for distribution to the Academy members. By a comparison of the three texts, we can learn that many of his "insights" of 1901 can be traced as far back as 1884, and interpreted as his hopes for the further development of his mathematical work. If in addition, we consider that as early as 1892, Poincaré had published a summary of his first paper on Analysis Situs ([2]), it becomes apparent that his early work on "analysis situs" followed very closely on his expression during the 1880s of a desire for a more powerful theory of qualitative features of geometric objects. These hopes were thus the motivation for Poincaré's first study of Analysis Situs ([3]). When, shortly afterward, he learned that Heegaard had discovered counterexamples to several of his claims, he responded to them by refining his ideas and correcting his errors in ([4], [5]). However, these revisions were not just a matter of changing details in proofs, but a fundamental reworking of the hypotheses used to prove his theorems. In short, the "analytic" flavor of the first paper began to be replaced by more "combinatorial" methods, starting with ([4]). These changes allowed Poincaré to redefine his terms in such a way that Heegaard's counterexamples no

1

longer applied — but as a result, Poincaré's new methods began to move further away from the considerations related to the qualitative theory of differential equations which first inspired him. The new foundations provided in ([4], [5]) were to determine the combinatorial flavor of algebraic topology for the following thirty years — a process that helped to obscure the initial concerns which motivated Poincaré's work.

Literature

[1] Dieudonné, Jean, A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960, Birkhäuser: Boston 1989.

[2] Poincaré, H. Sur L'Analysis Situs. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, t. 115, p. 663-666 (31 Octobre 1892).

[3] Poincaré, H. Analysis Situs. Journal de l'Ecole Polytechnique, t. 1, p. 1-121 (1895).

[4] Poincaré, H. Complement a l'Analysis Situs. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 13, p. 285-343 (1899).

[5] Poincaré, H. Second Complement a l'Analysis Situs. Proceedings of the London Mathematical Society, t. 32, p.277- 308 (14 juin 1900).

[6] Poincaré, H. Sur Certaines Surfaces Algebriques; Troisième Complement à l'Analysis Situs. Bulletin de la Societe Mathématique de France, t. 30, p. 49-70 (1902)

[7] Poincaré, H. Sur les Cycles des Surfaces Algebriques; Quatrième Complement a l'Analysis Situs. Journal de Mathématiques, t. 8, p. 169-214 (1902).

[8] Poincaré, H. Cinquième Complement a l'Analysis Situs. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 18, p. 45-110. (1904).

[9] Poincaré, H. Oeuvres, Vol. II, Gauthier-Villars, Paris.

[10] Poincaré, H. Oeuvres, vol. VI, Gauthier-Villars, Paris.

[11] Poincaré, H. Analyse de ses travaux scientifiques. Acta Mathematica, v. 38, pp. 3-135 (1921).

[12] Pont, Jean Claude, La Topologie algébrique des origines a Poincaré. Presses Univ. de France, Paris, 1974.

The history of configurations $(12_4, 16_3)$

Harald Gropp
Mühlingstr.19, D-6900 Heidelberg, Germany

1 Introduction

In this talk the history of the construction of the configurations $(12_4, 16_3)$ is described. In the beginning a short survey on configurations as combinatorial structures is given. Configurations were defined in 1876 by T.Reye in the following way.

Definition 1.1 *A configuration (v_r, b_k) is a finite incidence structure with the following properties:*

1. There are v points and b lines.

2. There are k points on each line and r lines through each point.

3. Two different lines intersect each other at most once and two different points are connected by a line at most once.

For $v = 12, b = 16, k = 3, r = 4$ we obtain configurations $(12_4, 16_3)$. The interested reader is referred to [4] for more information on the history of configurations in general.

Configurations (v_r, b_k) include projective planes, affine planes, and Steiner systems as special cases. If $v = b$ (and hence $r = k$) these configurations are called symmetric.

The most interesting history of a certain class of non-symmetric configurations is that of configurations $(12_4, 16_3)$. It goes back to 1848 where such a structure was constructed in a non-combinatorial context. Until 1954 there were some singular constructions of further non-isomorphic examples. In 1990 I found a thesis written by a Dutch mathematician in Amsterdam in 1907 which contains six configurations $(12_4, 16_3)$ a fact which had not been known before. Between 1955 and 1980 a systematic research was started in Czechoslovakia. More than 200 configurations were constructed. However, these results were only published in Czechoslovak journals in German or Czech. So they were not known to many people. Also in 1990 the author succeeded in constructing all 574 non-isomorphic configurations $(12_4, 16_3)$. For further details concerning the mathematical background of this construction see [6].

2 The configurations of Hesse and de Vries

In 1848 the German mathematician O. Hesse (Königsberg) wrote a paper [7] in which he discussed curves of third order and conics which intersect these curves in three different points.

In this context he "constructed" the first example of a configuration $(12_4, 16_3)$ if the intersection points of algebraic curves are regarded as the points of an incidence structure and the curves are interpreted as lines. The following comment of Hesse describes his point of view.

> [7, p.153] Wenn man aus den drei Schnittpuncten einer beliebiegen geraden Linie und einer Curve dritter Ordnung die 12 Tangenten an die Curve zieht, so liegen von den 12 Berührungspuncten 16mal drei Puncte in einer geraden Linie.

Of course, it can be discussed whether such an interpretation of an algebraic geometric structure in terms of modern combinatorics is allowed or not.

About 30 years after the paper of Hesse the formal concept of a configuration was developed by T.Reye (see [4]). This initiated a more systematic research for these structures, at first in a closely geometrical context (i.e. realized in a plane over the reals or embedded in other geometrical spaces), but very soon also as purely combinatorial structures described only as a system of subsets (the lines) of a set of elements (the points). In the first years the most interesting configurations were symmetric ones.

However, in 1889 the Dutch mathematician Jan de Vries (Kampen) wrote a paper on "certain planar configurations" [15]. This was one of many important contributions of de Vries to the theory of configurations. I would like to draw the reader's interest especially to [5] where I describe an early contribution to graph theory. A good description of the work of de Vries on configurations is contained in [1].

After defining a configuration as follows

> [15, p.63] Eine ebene Figur,welche aus p Punkten und g Geraden derart zusammengesetzt ist, dass jeder Punkt mit γ Geraden und jede Gerade mit π Punkten incident ist, heisst bekanntlich eine Configuration; ich bezeichne sie mit dem Symbol (p_γ, g_π) falls γ und π verschieden sind: für $\gamma = \pi$ hat Herr REYE die Bezeichnung p_π eingeführt.

de Vries mainly discusses configurations $(12_4, 16_3)$ in this paper. He constructs all (i.e. two, including the one of Hesse) configurations with a special property.

> [15, p.67] ...... Es gibt nur zwei Cf. $(12_4, 16_3)$, deren Punkte drei Quadrupel bilden, in welchen jeder Punkt von den übrigen getrennt ist. .....

This property means that the configuration graph (for terminology not explained here see [6]) is a union of three complete graphs of four vertices each. He denotes them as follows.

[15,p. 64]

A.

$I \equiv 11'1''$	$V \equiv 21'2''$	$IX \equiv 31'3''$	$XIII \equiv 41'4''$
$II \equiv 12'2''$	$VI \equiv 22'1''$	$X \equiv 32'4''$	$XIV \equiv 42'3''$
$III \equiv 13'3''$	$VII \equiv 23'4''$	$XI \equiv 33'1''$	$XV \equiv 43'2''$
$IV \equiv 14'4''$	$VIII \equiv 24'3''$	$XII \equiv 34'2''$	$XVI \equiv 44'1''$

B.

$I \equiv 11'1''$	$V \equiv 21'2''$	$IX \equiv 31'3''$	$XIII \equiv 41'4''$
$II \equiv 12'2''$	$VI \equiv 22'1''$	$X \equiv 32'4''$	$XIV \equiv 42'3''$
$III \equiv 13'3''$	$VII \equiv 23'4''$	$XI \equiv 33'2''$	$XV \equiv 43'1''$
$IV \equiv 14'4''$	$VIII \equiv 24'3''$	$XII \equiv 34'1''$	$XVI \equiv 44'2''$

Jan de Vries was teacher of mathematics in Kampen when he wrote this paper. Between 1897 and 1927 he was professor in Utrecht. His successor in Utrecht was Jan Anthony Barrau who wrote his thesis in Amsterdam in 1907.

3 The thesis of Barrau

In this thesis ("Contributions to the theory of configurations") [1] Barrau gave a very good survey on the knowledge of configurations of his time, even a better one than the encyclopedia articles of Steinitz and Merlin (compare [4]). Moreover, the thesis contains a lot of his own research results. In the following only his contributions to the construction of configurations $(12_4, 16_3)$ are described.

In section 36 Barrau refers to the earlier results of Hesse and de Vries, called configurations A and B. By a certain construction he generalizes these configurations to a "achthoek met 6 perspectiviteitscentra". By a reverse operation he finds 4 non-isomorphic configurations including A and B. Barrau gives the drawing of a fifth configuration and refers to a construction of a sixth one by de Vries. At last he summarizes as follows.

> [1, p.112] ...dan zijn dus 6 vormen der cf. $(12_4, 16_3)$, waarvan er 4 in ééne figuur voorkomen, bekend geworden. Dat ze werkelijk verschillend zijn, is door onderzoek harer restfiguren gebleken; alleen A en B zijn regelmatig.

Altogether he describes 6 non-isomorphic configurations $(12_4, 16_3)$ in his thesis, a result which was not known to those who continued his research in the following 80 years.

4 Some other constructions until 1954

After 1910 there was not much interest in configurations. The general development is described in [4]. However, there were two small groups of people in Berlin (Germany) and Praha (Czechoslovakia) who some 30 years later published again results on these configurations $(12_4, 16_3)$. In [9] there is a reference to schools of algebraic geometry.

> [9, p.130] Dá se říci, že konfigurace $(12_4, 16_3)$ se stala soutěžním problémem pražské a berlínské školy algebraické geometrie.

Until now I only know of a few members of these schools in Berlin and Praha. The Czechs B. Bydžovský [2] (1939) and J. Metelka [8] (1944) constructed two further configurations $(12_4, 16_3)$ (without considering the results of Barrau as described above).

In 1948 the German M. Zacharias [16] constructed a fifth one. He had been a teacher in Berlin and lived in Quedlinburg (former German Dem. Republic) after his retirement. He published several papers on configurations, among them [17] in 1952 which contains a survey on those 5 configurations $(12_4, 16_3)$ which were known to him.

5 A systematic search after 1954

B. Bydžovský who was the rector of Charles University in Praha after World War II started a systematic search which produced about 200 configurations. At first he constructed two further examples in 1954 [3]. In the same paper he remarked:

[3, p.217] Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, dass man, wie eben die bisherigen Arbeiten über die Konfiguration $(12_4, 16_3)$ zeigen, versuchsweise zu neuen Konfigurationen gelangen kann, dass es jedoch wünschenswert wäre, irgendein Ordnungsprinzip einzuführen, das gestatten würde, in irgendeinem Maasse Übersicht über die ganze Materie zu gewinnen.

Bydžovský's colleagues J. Metelka, V. Metelka, and J. Novák continued this research by ordering all possible configurations in the following way. Each point in the configuration is not connected to exactly three other points. Depending on the incidences of these three points 10 point types were classified: $A, B^1, \ldots B^4, C^1, C^2, D, E^1, E^2$.

[13. p.254] In der Literatur sind schon alle Konfigurationen, die A-, oder D-Punkte enthalten vollbeschrieben, ebenso wie die Konfigurationen, welche keine B-Punkte haben. Die umfangreiche Menge der Konfigurationen mit B-, C- und E-Punkten in einer übersichtlichen Arbeit beschreiben ist fast unmöglich. Eben deswegen beschränke ich mich in diesem Artikel nur auf die Fälle mit B^3-, C-, E- und ohne B^4-Punkten.

Die Schemas dieser Konfigurationen sind in dem Kapitel 2 eingeführt. Gerade neunzig von diesen (und zwar R-1 bis R-89 und N-11) sind realisierbar in der Projektionsebene, wie in dem Kapitel 4 bewiesen ist.

These remarks in a paper of V. Metelka [13] published in 1980 describe the situation quite well. The problem of constructing all these configurations is split into parts by searching for those structures with only points of certain types and/or without points of other types. Moreover, the realizations of these configurations in the plane are investigated.

Unfortunately it is not possible to give a report of all the papers which were published in Czechoslovakia in this period. Some important papers are by J. Metelka [10], V. Metelka [11],[12],[13], and J. Novák [14]. The reader will find more references in these papers.

Before describing the final step of the construction of all non-isomorphic configurations $(12_4, 16_3)$ a personal remark of the author should be allowed. I was not aware of the existence of all these papers written after 1954 in Czechoslovakia in the beginning of 1990. At that time I decided to construct all these configurations and to give a talk on this research in a combinatorial conference in Prachatice in Czechoslovakia because of the Czech tradition and with the small hope to find there people and/or papers related to the subject.

Of course, I was very lucky to meet Jiří Novák and Václav Metelka in Prachatice and Liberec. It turned out that they had felt quite isolated in their research all over these years and that they were very surprised that there is still somebody interested in these configurations.

6 The final step in 1990

The final step of the construction is described in [6]. Here I only describe the construction very briefly and then end up with some general conclusions.

I think the main reason why this project succeeded was the embedding of the construction in a much broader context of combinatorial structures and the use of relations among them which have been obtained in combinatorial theory in the mean time.

What was needed, for example, was the enumeration of all Steiner triple systems on 15 points in 1919, results on colourings of cubic graphs on 12 vertices which are related to the famous four-colour-conjecture, but also old concepts like the "Restfigur" in a configuration.

Of course, the main technical tool was a computer without which the aim could not have been reached. The following result was proved.

[6, p.89] **Theorem 4.1.** There are exactly 574 non-isomorphic configurations $(12_4, 16_3)$, 5 of them have graph no. 63 as configuration graph.

By the way, graph no. 63 is a cubic graph on 12 vertices which can be obtained from the Petersen graph by replacing one of the vertices by a triangle. It is not 3-colourable.

Here is at least one out of the 574 solutions, say configuration no. 574.

[6, p.88] Cfg. 574:

$\{4,5,11\}, \{7,5,6\}, \{4,10,12\}, \{8,9,6\}, \{2,7,8\}, \{2,9,10\}, \{2,11,12\}, \{3,4,9\},$
$\{3,7,10\}, \{1,8,5\}, \{2,4,6\}, \{1,7,12\}, \{3,8,11\}, \{3,5,12\}, \{1,9,11\}, \{1,10,6\}.$

Why is the history of the construction of configurations $(12_4, 16_3)$ interesting ? It shows how a problem in mathematics is solved throughout a period of nearly 150 years. In the beginning these configurations were only discussed in a strictly geometrical context whereas in the end they are just purely combinatorial incidence structures. The different periods of this research are characterized by singular results of certain mathematicians or by small groups of mathematicians. These results remained relatively unknown since they were not published in famous journals and in well-known languages in most cases. This is just one example where mathematicians in small countries (here the Netherlands and Czechoslovakia) contributed a lot to the development of a mathematical theory without there results becoming known to a general mathematical public.

References

[1] J.A.Barrau, Bijdragen tot de theorie der configuraties, Thesis Amsterdam (1907)

[2] B.Bydžovský, Über eine ebene Konfiguration $(12_4, 16_3)$, Věstník Král. České Spol. Nauk II 2 (1939)

[3] B.Bydžovský, Über zwei neue ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$, Czech. Math. Journal 4 (1954), 193-218

[4] H.Gropp, On the history of configurations, in: Internat. Symposium on Structures in math. theories, ed. A.Díez, J.Echeverría, A.Ibarra, Bilbao (1990), 263-268

[5] H.Gropp, Enumeration of regular graphs 100 years ago, Discrete Math. 101 (1992), 73-85

[6] H.Gropp, The construction of all configurations $(12_4, 16_3)$, Annals of Discrete Math. 51 (1992), 85-91

[7] O.Hesse, Über Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Puncten berühren, J. reine angew. Math. 36 (1848), 143-176

[8] J.Metelka, O jistých konfiguracích $(12_4, 16_3)$ v rovině, Věstník Král. České Spol. Nauk II 21 (1944)

[9] J.Metelka, Akademik Bohumil Bydžovský, Matematika ve škole 5 (1955), 129-133

[10] J.Metelka, O rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$, Časopis pro pěstování matematiky 80 (1955), 133-145

[11] V.Metelka, Rovinné konfigurace $(12_4, 16_3)$ s D-body, Časopis pro pěstování matematiky 82 (1957), 385-439

[12] V.Metelka, Über gewisse ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$, die auf den irreduziblen Kurven dritter Ordnung endliche Gruppoide bilden und über die Konfigurationen C_{12}, Časopis pro pěstování matematiky 95 (1970), 25-53

[13] V.Metelka, O jistých rovinných konfiguracích $(12_4, 16_3)$ obsahujících B, C, a E-body a konfiguracích singulárních, Časopis pro pěstování matematiky 105 (1980), 219-255

[14] J.Novák, Užití kombinatoriky ke studiu rovinných konfigurací $(12_4, 16_3)$, Časopis pro pěstování matematiky 84 (1959), 257-282

[15] J.de Vries, Über gewisse ebene Configurationen, Acta mathematica 12 (1889), 63-81

[16] M.Zacharias, Eine neue ebene Konfiguration $(12_4, 16_3)$, Math. Nachrichten 1 (1948), 332-336

[17] M.Zacharias, Konstruktionen der ebenen Konfigurationen $(12_4, 16_3)$, Math. Nachrichten 8 (1952), 1-6

Wolfgang Breidert

Modelle mathematikhistorischer Entwicklung

Um das sehr weitgefaßte Thema etwas einzugrenzen, möchte ich vorab sagen, daß ich einerseits nicht vorhabe, einen Vortrag zur Modelltheorie zu halten, und daß ich andererseits nicht direkt über die Entwicklung der Historiographie der Mathematik spreche. Hinter dem hochtrabenden Titel verbirgt sich ein bescheideneres Anliegen, denn mein Ziel ist es, Anregungen zum Nachdenken über unser Tun als Mathematikhistoriker zu geben.

Nachdem die Wissenschaftshistoriker – und unter ihnen auch die Mathematikhistoriker – jahrzehntelang in Frieden ihr wissenschaftliches Material gesammelt und durchforscht hatten, wurden sie vor dreißig Jahren durch das Buch von Thomas S. Kuhn über die wissenschaftliche Revolution aus ihrer Ruhe aufgeschreckt,– und wir feiern hiermit wieder eines der unter Wissenschaftshistorikern so beliebten Gedenkjahre. Nach Kuhn hatten die Wissenschaftshistoriker plötzlich nicht mehr nur zu sammeln, zu sortieren und zu ordnen, sondern jetzt wurden sie herausgefordert, zwischen "normaler" Forschung auf dem Boden eines sogenannten Paradigmas und revolutionären Phasen des Paradigmenwechsels zu unterscheiden. Die von Kuhn ausgelöste Revolution der Wissenschaftsgeschichtsschreibung bereitete gerade den Mathematikhistorikern besonders große Schwierigkeiten, denn schließlich galt die Mathematik, abgesehen von der Logik, noch immer als die Disziplin mit dem geringsten Maß an Beliebigkeit und Willkür in ihrer Entwicklung.[1] Offenbar erkannten nicht alle Mathematikhistoriker sofort den Vorteil, den Kuhns Modell bot, nämlich den, daß alle bisherigen Untersuchungen, die auf

1 z.B. Markus Jaroschka, *Zur Frage des Erkenntnisfortschrittes in der mathematischen Wissenschaft*, in: Kurt Freisitzer u. Rudolf Haller (Hrsg.), *Probleme des Erkenntnisfortschritts in den Wissenschaften*, Wien 1977, S. 119-174.

stetige Kumulation ausgerichtet waren, auch unter der Kuhnschen Fahne segeln konnten, nämlich als Untersuchungen zur normalen Phase der Wissenschaftsentwicklung. Und diejenigen, die sich bisher auf abrupte Neuerungen konzentriert hatten, konnten diese unter dem Stichwort "revolutionäre Phase" unterbringen. Im übrigen hielt man es in der Mathematik schon immer mit Permanenzprinzipien, so daß man schon von daher gegen die Gefahr inkommensurabler Paradigmen weitgehend geschützt zu sein schien.

Sobald historische Forschung Daten und Fakten aufsucht oder aus der Fülle des vorhandenen Materials auswählt, und erst recht, wenn diese interpretierend verknüpft werden, sind (bewußt oder unbewußt) Modellvorstellungen historischer Entwicklung mit im Spiel. Diese Hintergrundvorstellungen gehen in die Darstellungen unserer Befunde mit ein, ja sie bilden oft konstruktive Bestandteile dessen, was wir bloß zu finden meinen. Zwar scheint seit Kuhn das Modell des linearen, stetig monotonen Wachstums wissenschaftlichen Wissens aus den Köpfen der Wissenschaftshistoriker weitgehend verschwunden zu sein, doch wer macht sich schon jederzeit klar, daß hinter scheinbar so harmlosen Begriffen wie "Entwicklung" oder "Einfluß" unterschiedliche Prozeßvorstellungen stehen. Solchen modellartigen Hintergrundvorstellungen möchte ich mich im folgenden zuwenden, und dazu habe ich etwas getan, was man vielleicht "<u>normal</u>erweise" nicht tut und was fast schon an Unhöflichkeit zu grenzen scheint: Ich habe nämlich das Rahmenthema dieser Tagung ernstgenommen und darüber nachgedacht, und ich muß gestehen, es hat mich fasziniert.

Warum habe ich dazu mit dem Kuhnschen Entwicklungsmodell begonnen? Das Kuhnsche Modell hat offensichtlich in weiten Kreisen Anerkennung gefunden. Ich will mich aber im folgenden weniger den in allen Kuhn-Debatten thematisierten wissenschaftsgeschichtlichen Unstetigkeitsstellen, den sogenannten Revolutionen, zuwenden, sondern eher dem, was man den

"normalen" Gang der Entwicklung nennt, ohne mich auf den Begriff der paradigmenorientierten normalen Wissenschaft zu konzentrieren. Doch im Thema zu dieser Tagung wird ja auch von der "normalen" Entwicklung gesprochen. Nun ist der Gebrauch <u>eines</u> Wortes in <u>verschiedenen</u> Texten sicher nichts Ungewöhnliches, und es bleibt in solchen Fällen immer eine Frage, ob hinter dem gleichen Wort nicht doch Bedeutungsunterschiede stehen.
Was mag das sein, der "normale" Gang der Entwicklung? In unserem Tagungsthema steht der Ausdruck in Anführungszeichen, aber trotzdem könnte ein späterer Historiker vielleicht schon allein an diesem Ausdruck erkennen, daß es sich um eine Tagung handelte, die <u>nach</u> der Kuhnschen Revolution der Wissenschaftsgeschichte stattfand. Es sei denn, er nimmt als Bezugspunkt die Zeit der Wende zu unserem Jahrhundert, in der der Physiker Max Planck oder der Geologe Melchior Neumayr[2] die Überzeugung äußerten, daß sich neue Auffassungen in der Wissenschaft nicht durch bessere Gründe durchsetzen, sondern durch das Aussterben der Gegner.
Wie kompliziert der Begriff der <u>normalen Entwicklung</u> sein kann, wird deutlich, wenn man sieht, daß gerade im Hinblick auf das Kuhnsche Denken der Zweifel entstehen kann, ob sein Modell mit dem Wechsel von normalen und revolutionären Phasen ein adäquates Bild vom "normalen" Gang der Entwicklung liefert. Das Nachdenken über Normalität führt zu einem zentralen Gedanken meiner Ausführungen, der allerdings ohne die folgenden Bezüge zur Mathematikgeschichte geradezu trivial ist:
Normalität steht in Relation zu dem, was man als Norm akzeptiert.

Der <u>Umweg</u> oder die <u>Abkürzung</u> als mathematikgeschichtliche Modellvorstellung, wie auch die später noch zu betrachtende der <u>Sackgasse</u>, setzen voraus, daß ein bestimmtes Ziel oder wenigstens eine bestimmte Richtung als Hauptrichtung

---
2 Neumayr wird erwähnt bei E. Study, *Die realistische Weltanschauung*, 1914, S. VII.

ausgezeichnet ist. Erst wenn man sich über Ziel oder Richtung klar ist, kann man sinnvoll von "Umweg" oder "Abkürzung" reden.

Um die mathematikhistorische Relevanz dieser scheinbar so trivialen Bemerkungen deutlich zu machen, möchte ich einige Beispiele von Umwegen, Abkürzungen und Sackgassen skizzieren:

I. Umwege

1) Wenn eine der Hauptaufgaben der Mathematik darin gesehen wird, Mittel zur Entwicklung leistungsfähiger Rechenmaschinen bereitzustellen – sei es für die Raumfahrt oder sonstige technisch erforderliche Rechnungen –, so mag die intensive Beschäftigung mit den figurierten Zahlen und anderen merkwürdigen Zahluntersuchungen, wie sie bei den Pythagoreern betrieben wurden, als Umweg, wenn nicht sogar als Sackgasse, erscheinen. Sieht man dagegen in der Erforschung des Wesens der Zahlen im pythagoreeischen Sinn das Hauptziel der Mathematik, so mag sich die Untersuchung der figurierten Zahlen als Abkürzung erweisen, während [illegible] die symbolische Behandlung von Zahlen in Strichkalkülen oder in Form des binären Codes als Um- oder Abweg erscheinen mag. –
Ebenso mag die pythagoreische Zahlenlehre im Hinblick auf die Datenverschlüsselung in modernen Computern als ein mühsamer Umweg angesehen werden, denn für diesen Zweck sind zwar Primfaktorzerlegungen und ähnliche Kenntnisse erforderlich, aber wohl kaum das umfangreiche Drumherum an Zahlenmystik.

2) Ein anderes Beispiel für einen Umweg betrifft die Anschaulichkeit in der Mathematik. Wo die Entwicklung unseres Anschauungsvermögens zum Ziel der Mathematik erklärt wurde, müssen Arithmetisierung oder Kalkülisierung für Umwege gehalten werden, während bei einer solchen Zielvorgabe die

anschaulich-geometrischen Methoden als direkte Wege (zum Ziel) aufgefaßt werden können.[3]

3) Für einen Bourbaki-Schüler, für den der "normale" Gang der Mathematikentwicklung vom konkreten Einzelfall hin zur Erarbeitung bloßer Strukturuntersuchungen geht, mögen algebraische und topologische Forschungen eventuell Abkürzungen gebenüber vielen umständlichen zahlentheoretischen Detailbetrachtungen sein, während die Bemühungen Bourbakis bei einer anderen Zielvorgabe geradezu als "Abwege" erscheinen mögen.
4) Da in der Unterhaltungsmathematik schon lange Permutationen geläufig waren, hätte von dort aus direkt ein Weg zur Entwicklung der Gruppentheorie führen können. Wir wissen, daß die Geschichte anders verlaufen ist. Sie hat einen großen Umweg über die Zahlentheorie mit der Theorie der Potenzreste (bei Euler und Gauß) und über die Theorie der Auflösung algebraischer Gleichungen (die Galois-Theorie) gemacht.[4] Sogar der Weg zur Gruppentheorie über die Permutations-Spiele in der Unterhaltungsmathematik könnte vielleicht auch noch als Umweg angesehen werden, denn man hätte ja vielleicht auch direkt von irgendwelchen Verknüpfungsspielen zum Gruppenbegriff gelangen können. "Man hätte vielleicht ..."
Nun ist die Verwendung irrealer Konditionalsätze in den Geschichtswissenschaften eine besonders heikle Angelegenheit, weil die Bestätigung oder Widerlegung von Aussagen mit irrealen Konditionalsätzen wissenschaftstheoretisch äußerst problematisch ist, doch – und deswegen erwähne ich sie hier – die Rede von "Umwegen" in der geschichtlichen Entwicklung kommt der Verwendung irrealer Konditionalsätze gleich, denn man will ja sagen, daß die Entwicklung auch einen anderen Weg hätte nehmen können.
5) In den Kontext von Umwegen gehört auch die Rede von "Hindernissen" oder einer irgendwie hervorgerufenen "Wirkungslosigkeit" in einer geschichtlichen

3 z.B. bei Kant
4 Dazu Hans Wußing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs*, Berlin 1969, S. 34 ff.

Entwicklung, denn mit der Verwendung solcher Ausdrücke suggerieren wir ja, daß die Entwicklung hätte schneller gehen können. Um auch hierzu ein Beispiel zu nennen, möchte ich auf Cayleys Arbeit "On the Theory of Groups ..." von 1854 verweisen, die man etwa als zu abstrakt und daher "historisch verfrüht" einordnet. "... sie blieb daher zunächst im wesentlichen wirkungslos".[5]

II. Abkürzungen, Abschneider

1) Einen typischen Abschneider finden wir in Cavalieri, denn dieser geniale Mathematiker fand ja das Cavalierische Prinzip schon lange bevor der Caculus rechtmäßig ausgebildet war. Man mag einwenden, daß Cavalieri sein Prinzip ja doch noch nicht hinreichend beweisen konnte, aber er war ja auch kein Abschneider in der Begründung des Calculus, sondern ein Abschneider in Bezug auf die Erkenntnis, daß das neue Verfahren sehr fruchtbar ist. Und das Lob, das Leibniz seinem Vorgänger Cavalieri zollt, gilt eben dieser Erkenntnis der Fruchtbarkeit. Wenn man aber die Mittel und Methoden Cavalieris betrachtet, insbesondere seinen Indivisibilienbegriff, so sieht man, daß er sich in einer Sackgasse bewegte, bestenfalls auf einem Umweg zur Infinitesimalrechnung.

2) Leibniz selbst war ein mindestens ebenso erfolgreicher Abschneider wie Cavalieri, denn Leibniz wußte ja schon, was wir aufgrund erst später gewonnener Einsichten wissen. So jedenfalls liest sich die Geschichte der Mathematik bei Herbert Breger, wenn er zur bekannten, offensichtlich widersprüchlichen Formel

$$x + dx = x$$

über Leibniz schreibt:

5 Hans Wußing, a.a.O. S. 172-174 [Der vollständige Titel von Cayley Artikel lautet: *On the Theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation* θ^n [Theta hoch n].

"Auffallend ist, daß diese scheinbare Konfusion oder gar Widersprüchlichkeit Leibniz offenbar nicht stört: Er *wußte*[6], daß er durch seine unendlichkleinen Größen nicht zu einem falschen Ergebnis geführt würde, und wir wissen heute, daß er darin recht hatte."[7] Demnach wußte Leibniz, das, was wir heute wissen, hat es aber leider nicht gesagt. Oder hat Leibniz es vielleicht nur geahnt? Dann liegt aber die Frage nahe, ob das Erahnen von später gewonnenen Erkenntnissen auch unter die Rubrik "Abschneiden" oder "Abkürzung" gehört?

III. Sackgasse

In der Forschung nicht-mathematischer Disziplinen kennt man "Sackgassen". Man denke etwa an die Medizin, wo die Aufgabe bestehen kann, eine gewisse Krankheitsursache oder eine Therapie für eine bestimmte Krankheit zu finden. Dabei kann die Suche erfolglos bleiben, weil man "einfach nicht weiterkommt", d.h. man sich in einer Sackgasse befindet. Vielleicht gibt es in der Geschichte der Mathematik weniger Sackgassen als in der Geschichte anderer Disziplinen – und es ist vielleicht kein Zufall, daß im Vorläufigen Programm zu dieser Tagung die beiden Vortragsthemen, die das Stichwort "Sackgasse" aufgenommen haben[8], mit einem Fragezeichen versehen sind.

1) Ein Beispiel für eine Sackgasse in der Mathematik habe ich schon genannt, allerdings unter dem Modell der Abkürzung, nämlich Cavalieris Indivisibilienmethode.

2) Auch Newtons Fluxionslehre scheint eine Sackgasse zu sein, jedenfalls wird sie nicht mehr weiterverfolgt. Aber man mag einwenden: Newtons Fluxionenlehre führte doch zu etwas! Ja, sie führte zu Einsichten,

6 Im Original kursiv.
7 Herbert Breger, *Know-how in der Mathematik*, in: Detlef D. Spalt (Hrsg.), *Rechnen mit dem Unendlichen*, Basel - Boston - Berlin 1990, S. 56.
8 Karl-Heinz Schlote: *Freges Anwendung des Größenbegriffes - eine Sackgasse?*. - Renate Tobies: *Das Projekt "Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften ... - Sackgasse der wissenschaftlichen Entwicklung?*

nämlich zu Einsichten – in die Fluxionenlehre! ~~Diese~~ Newtons Erkenntnisse kann man in solche der modernen Analysis übersetzen. Man wird aber kaum behaupten, daß diese Ergebnisse der Analysis überhaupt nur aufgrund der Fluxionentheorie gewonnen werden konnten. War Newtons Lehre also ein Umweg zur modernen Analysis oder nicht vielmehr doch eine Abkürzung auf dem Weg dorthin? Und wenn man die Fluxionenlehre gar als Sackgasse auffaßt, weil sie ja schließlich nicht weitergeführt hat, so können wir doch gerade angesichts von Renaissancen in der Wissenschaftsgeschichte – wie z.B. der Renaissance der Infinitesimalien in der Nonstandard-Analysis – kaum jemals sicher sein, daß aus einer angeblichen Sackgasse nicht doch noch ein Weg weiterführt.

3) Wie eng Sackgassen und Abkürzungen in der Mathematikgeschichte zusammengehören, zeigt wieder ein Blick auf die pythagoreische Zahlenlehre, denn deren Fixierung auf natürliche Zahlen führte zunächst einmal mit der Entdeckung irrationaler Verhältnisse – ich sage nicht "Zahlenverhältnisse" – in eine Sackgasse. Irrationale Verhältnisse mußten bei der gemachten Zielvorgabe als Skandal erscheinen. Die Auffassung, daß die physische und die psychisch-geistige Welt nach ganzzahligen Verhältnissen geordnet sei, hatte letztlich in diese Sackgasse geführt. Sie konnte daher in der ursprünglichen Weise nicht weiterverfolgt werden. Verschiebt man aber den Schwerpunkt der Betrachtung nur ein klein bißchen, so erscheinen die Pythagoreer andererseits als die hervorragendsten Abschneider, nämlich auf dem Weg zu der in unserem Jahrhundert hochgehaltenen Überzeugung, daß die Strukturen dieser Welt mathematisch zu fassen seien.

In der Mathematik – und das verbindet sie mit der Philosophie – lassen sich oft die Sackgassen, d.h. die Unmöglichkeit einer Lösung, doch in positivem Sinne in die Wissenschaftsentwicklung integrieren. In der Philosophie führt das Reflektieren über das Ende der Philosophie immer wieder in neue Philosophien hinein. Und in der Mathematik bildet man aus den zunächst als "unmöglich"

auftretenden Gebilden selbständige Objekte, denn im Bereich des Geistes können Undinge zu Dingen gemacht werden. So werden die "falschen Wurzeln" oder "absurden Zahlen" schließlich als negative Zahlen zugelassen, ebenso wie man die irrationalen Zahlen akzeptiert, und die "unmöglichen Größen" werden unter dem Namen "imaginiären Zahlen" als mathematische Objekte anerkannt. (Auch unstetige Funktionen werden akzeptiert.)

4) Die Versuche der Quadratur des Kreises haben in eine Sackgasse geführt, wenn man nur das ursprüngliche Ziel im Auge behält. Und doch wird kein Mathematiker die Einsicht, daß Pi transzendent ist, missen wollen, – wir feiern ja in diesem Jahr das 110. Jubiläum von Lindemanns Beweis.

4) Und noch eine Sackgasse möchte ich erwähnen: Euklid war wohl nicht nur ein Abschneider, sondern hat die Mathematiker auch auf Irrwege oder gar in Sackgassen geleitet.

Richtet man die Aufmerksamkeit nur auf die Entstehung der allgemeinen Topologie, insbesondere auf die Entwicklung des Begriffs vom allgemeinen topologischen Raum, so erscheint die metrische, euklidische Geometrie eher als ein Hindernis. Hätte man – und noch einmal verwende ich einen irrealen Konditionalsatz – die Reflexionen über die Begriffe "Rand", "Berührung" und "Nachbarschaft", wie man sie am Anfang des sechsten Buches der *Physik* des Aristoteles findet, fortgesetzt, so wäre die allgemeine Topologie vielleicht Jahrhunderte früher zu ihren grundlegenden Begriffen gelangt. Unter diesem Aspekt erscheint Euklids Geometrie als ein großes Hindernis.

Auch die Suche nach einem Beweis für das Parallelenaxiom wird man im besten Falle als einen langen Umweg zum modernen Begriff der Geometrien auffassen können. Jedenfalls gelangte Thomas Reid – ein Nicht-Mathematiker – schon lange vor Gauß, nämlich schon 1764, und auf einem ganz anderen Weg zur Anerkennung einer nichteuklidischen Geometrie, während sich Lambert zur selben Zeit noch mit dem Versuch abplagte, das Parallelenaxiom zu beweisen oder zu widerlegen. Allerdings kann man mit Blick auf Thomas Reid die Frage erheben, ob ein Nicht-Mathematiker überhaupt eine mathematikgeschichtliche Entwicklung abkürzen kann. ~~Ihm~~ Reid ist es jedenfalls nicht gelungen, denn die Mathematiker waren von ihrem Umweg nicht abzubringen. Vielleicht haben wir es bei Reid aber auch nur mit einem Beispiel der unzeitgemäßen Vorwegnahmen zu tun, und "Antizipation" ist in diesem Kontext wohl doch nur ein Synnonym für "Abkürzung". Und damit ziehe ich die oft geübte wissenschaftsgeschichtliche Rede von den "Antizipationen" mit in den Strudel der Relativität der historischen Betrachtungsweise.

Die Unlösbarkeit des Parallelenproblems war zunächst einmal eine Sackgasse, doch Sackgassen sind in der Mathematik wahrscheinlich selten auf Dauer Sackgassen, und so führte die Unbeweisbarkeit und Unwiderlegbarkeit des Parallelenaxioms, wie ja bekannt ist, zur Einführung der nichteuklidischen Geometrien. Die Unmöglichkeit wird gleichsam relativiert. Was in einem System als Sackgasse erscheint, bekommt einen Ausweg in einem anderen, neuerschaffenen System.[9] Um es in einem Schlagwort zu sagen:
Die Mathematik münzt ihre Sackgassen in Auswege um.

(Nebenbei bemerkt: Warum soll man nicht in eine Sackgasse gehen? Manchmal kann das Ziel eines Weges ja gerade dort liegen!)

Was ich Ihnen hier vorgetragen habe, enthält keine spezielle These, ich schlage nicht einmal ein bestimmtes Modell für die mathematikgeschichtliche Entwicklung vor, sondern möchte Sie nur anregen, nicht in absolutem Sinne nach Umwegen, Abschneidern oder Sackgassen zu suchen, sondern in der Mathematikgeschichte darauf zu achten, daß die hier in Erwägung gezogenen Hintergrundsbegriffe als Relationsbegriffe jeweils auf Zielvorstellungen zu beziehen sind. Und wenn man unter diesem Aspekt in die

9 (s. P. Germain, in: Le Lionnais, S. 240)

Mathematikgeschichte blickt, so ergeben sich, wie ich meine, neuartige Aussichten.

Bismarck sagte einmal[10]: "Welcher Weg der richtige, welcher der fehlerhafte ist, entscheidet die Zukunft, vielleicht wenn wir alle nicht mehr leben." Dabei hat er wohl ein bestimmtes politisches Ziel vor Augen gehabt. Doch Wege können nicht per se die richtigen oder fehlerhaften sein, und das sollten wir auch in der Mathematikgeschichte berücksichtigen.

10 6.2.1868 im Preußischen Landtag (zit. nach Lipperheide S. 971).

Die mathematischen Stichwörter in Zedlers Universal-Lexikon

Siehe auch S. 29

Von Sergio Nobre *

1. Kurze Einführung

Eine wichtige Frage im Gebiet der Geschichte der Naturwissenschaften ist: *"Wie schnell wurden neue Entdeckungen publiziert ?"*. Im Feld der Sozial-Geschichte der Naturwissenschaften wird in gleicher Richtung noch eine andere Frage gestellt: ***"Wie schnell wurden die neuen Entdeckungen der breiten wissenschaftlichen Öffentlichkeit zugänglich ?"***. Um diese zweite Frage zu beantworten, begann ich im Gebiet der Mathematik eine Forschungsarbeit, und als deren Quelle ich eine große deutsche Enzyklopädie aus der 1. Hälfte des 18. Jahrhunderts auswählte: nämlich das *"Grosse vollständige Universal Lexicon aller Wissenschaften und Künste"*, das nach seinen Verleger Johann Heinrich Zedler(1706-1763) benannte Zedlersche Lexikon.

Nicht so bekannt wie die französische Enzyklopädie, die eine große und wichtige Rolle in der Frühaufklärung spielte, hatte das Zedlersche Lexikon jedoch auch maßgeblichen Wert für die Aufklärung in Deutschland. Gedruckt zwischen 1732 und 1754, besitzt das Lexikon, das 64 Folienbände und 4 Supplementbände[1] mit ca. 67.000 Seiten umfaßt, für uns heute immer noch eine wichtige Funktion durch seine genealogischen und biographischen Artikel von und über Zeitgenossen[2]. In diesem Sinne wurde das Lexikon durch die Akademische Druck- und Verlagsanstalt (Graz-Austria) von 1961 bis 1964 in seiner Originalversion nachgedruckt.

[1] Der 64.Band wurde im Jahr 1750 beendet; danach begannen die Ergänzungsbände, welche jedoch nie abgeschlossen wurden. Die Ergänzungen reichen bis zur Buchstabengruppe "Caq".

[2] Brockhaus Enzyklopädie - 19. Auflage, 1988 - Stichwort "Enzyklopädie", Band VI, Seite 452.

Eine Arbeit über die Ähnlichkeiten und die Unterschiede zwischen der französischen und der Zedlerschen Enzyklopädie ist mir nicht bekannt, und es ist auch nicht meine Absicht, diesen großen schwierigen Vergleich im Ganzen zu unternehmen. Aber es ist wichtig zu sagen, daß einer der größten Unterschiede zwischen beiden in der Organisation der Werke besteht. In der Frage der Autoren der Stichwörter z.B. merkt man diesen Unterschied sofort. In der französischen Enzyklopädie findet man die Namen der Verantwortlichen der Sachgebiete im ersten Band, aber in der Zedlerschen Enzyklopädie gibt es in seinen 64 Bänden keine Information darüber.

Das Nachforschen nach den Autoren der mathematischen Stichwörter in Zedlers Universal-Lexikon brachte einige Ergebnisse, die ich jetzt im nächsten Abschnitt kurz darstellen will.

2. Zur Frage nach den Autoren der mathematischen Stichwörter

Die Frage nach den Mitarbeitern an Zedlers Universal-Lexikon ist nicht restlos geklärt. Zwar ist die Zahl der Mitarbeiter genannt, ihre Namen aber werden nicht mitgeteilt. Es ist aber bekannt, daß es drei Redakteure gab, die nacheinander gewirkt haben: J.A.Franckenstein (1689-1733), P.D.Longolius (1704-1779) und C.G.Ludovici (1707-1778). Bei den nach wie vor bestehenden Unsicherheiten weiß man nur, daß Ludovici das Lexikon ab Band 19 bis zum Ende leitete[3]. Da Franckenstein bald starb, ist die wahrscheinlichste Vermutung für die Leitungsperiode die folgende:

1.Periode: 1. und 2. Band:	Redakteur = Franckenstein
2.Periode: vom 3.bis 18.Band:	Redakteur = Longolius
3.Periode: vom 19. bis zum Ende:	Redakteur = Ludovici

[3] Es wurde von Zedler in der Vorrede des 17. Bandes bekanntgegeben, daß Carl Günter Ludovici die Direktion des 19. und der folgenden Bänden übernommen hat.

Für eine Analyse der mathematischen Stichwörter wurde diese Teilung in Perioden sehr wichtig. Nach einem Vergleich zwischen den mathematischen Stichwörtern in Zedlers Universal-Lexikon und anderen mathematischen Werken, immer noch beim Versuch, den Autor oder die Autoren zu finden, konnte ich den Einfluß der Redakteure, zumindest im mathematischen Gebiet, herausfinden und klarstellen.

Das beste Ergebnis kommt durch den Vergleich mit dem *"Vollständigen Mathematischen Lexicon"*[4] von Christian Wolff (1679-1754) zustande und ist das Folgende:

Von 585[5] verglichenen mathematischen Stichwörtern:

sind 49% Kopien aus Wolffs mathematischem Lexikon

Von den kopierten Stichwörtern:

gehören 21% zur 1. Periode

2% zur 2. Periode

77% zur 3. Periode

Eine nähere Erklärung zu jeder Periode:

Von 96 math. Stichwörtern im 1.und 2.Band

sind 61% Kopien;

---

[4] Die 1.Auflage von 1716 und die Auflage von 1947 wurden in diesem Vergleich benutzt.

[5] Es wurden nur die Stichwörter ausgewählt, die eine direkte Beziehung zur Mathematik haben. Stichwörter aus den Gebieten Optik, Mechanik, Fortifikation, u.s.w. wurden nicht verglichen.

NOBRE

Für eine Analyse der mathematischen Stichwörter wurde diese Teilung in Perioden sehr wichtig. Nach einem Vergleich zwischen den mathematischen Stichwörtern in Zedlers Universal-Lexikon und anderen mathematischen Werken, immer noch beim Versuch, den Autor oder die Autoren zu finden, konnte ich den Einfluß der Redakteure, zumindest im mathematischen Gebiet, herausfinden und klarstellen.

Das beste Ergebnis kommt durch den Vergleich mit dem *"Vollständigen Mathematischen Lexicon"*[4] von Christian Wolff (1679-1754) zustande und ist das Folgende:

Von 585[5] verglichenen mathematischen Stichwörtern:

sind 49% Kopien aus Wolffs mathematischem Lexikon

Von den kopierten Stichwörtern:

gehören 21% zur 1. Periode

2% zur 2. Periode

77% zur 3. Periode

Eine nähere Erklärung zu jeder Periode:

Von 96 math. Stichwörtern im 1.und 2.Band

sind 61% Kopien;

---

[4] Die 1.Auflage von 1716 und die Auflage von 1947 wurden in diesem Vergleich benutzt.

[5] Es wurden nur die Stichwörter ausgewählt, die eine direkte Beziehung zur Mathematik haben. Stichwörter aus den Gebieten Optik, Mechanik, Fortifikation, u.s.w. wurden nicht verglichen.

(3)

87

Von 228 math. Stichwörtern aus den Bänden 3 bis 18

sind 2% Kopien[6];

Von 261 math. Stichwörtern aus den Bänden 19 bis 64

sind 84,5% Kopien.

Aus diesem Ergebnis folgt:

1. Christian Wolff hatte einen großen Einfluß sowohl in der ersten Periode als auch in der dritten Periode, aber es ist nicht erkennbar, ob er Mitarbeiter des Verlags war, die Kopien von seinen Texten durch freundliche Beziehung mit dem Redakteur[7] übernommen wurden, oder ob es ein Plagiat war.

2. In der Periode, in welcher P.D.Longolius als Redakteur tätig war, stellen die mathematischen Stichwörter keine Kopien des mathematischen Lexikons von Wolff dar. Aus diesem Grunde kann die Originalität der Enzyklopädie Zedlers für diesen Zeitraum besser analysiert werden. Es ist ein glücklicher Umstand, daß gerade in diesem Teil der Enzyklopädie die Mehrzahl derjenigen Stichwörter steht, die eine Beziehung mit damals neuen Entdeckungen in der Mathematik hatten. Somit ergibt sich auch der Sinn der Analyse dieser mathematischen Stichwörter.

Noch andere Werke[8] wurden verglichen, aber analog weitreichende Ergebnisse noch

---

[6] Es ist nötig hervorzuheben, daß nur im Band 18 derartige Kopien mathematischer Ausführungen enthalten sind. In der Periode von Longolius war das Kopieren offensichtlich nicht üblich. Man kann vermuten, daß Ludovici seine Arbeit als Redakteur bereits im 18.Band begann, obwohl er nur ab dem 19.Band offiziell Redakteur war.

[7] Es ist bekannt, daß Christian Wolff und Carl Günter Ludovici Freunde waren.

[8] Fontenelle,B: **Elemens de la Geometrie de L'Infini**, Paris, de L'Imprimerie Royale, 1727.
Longolius, J.D.: **Entlarvte Mathematic**, Bautzen, 1735
Meißner,H.: **Arithmetische Kunst=Schule...**, Hamburg, Druck- und verlägts E.Schäfer, 1689.

nicht erreicht[9] .

Nachdem ich die Frage nach den Autoren verfolgt hatte, begann ich die mathematischen Stichwörter in Zedlers Universal-Lexikon zu analysieren. Ein wesentliches Ziel dieser Analyse besteht darin zu prüfen, wie modern die Enzyklopädie Zedlers war. Erste Ergebnisse kann ich vorlegen.

3. Die Modernität von Zedlers Universal-Lexikon im Gebiet der Mathematik

Es lag nahe, zu diesem Zweck den Rückvergleich mit Christian Wolff, insbesondere mit seinem Lehrbuch ***"Der Anfangs=gründe aller Mathematischen Wissenschafften"***[10] und dem ***"Vollständigen Mathematischen Lexikon"***[11] anzustellen. Diesen Weg bin ich gegangen.

Die mathematischen Stichwörter, die enge Beziehungen zu den damaligen neuen Entdeckungen der Mathematik, insbesondere der Differential- und Integralrechnung, haben, standen zuerst auf meinen Programm, und der erste analysierte Punkt ist **"der Begriff der unendlichen kleinen Größen"**.

Der nordamerikanische Mathematikhistoriker Carl Benjamin Boyer(1906-) nannte die erste Periode der Infinitesimalrechnung, beginnend mit den Entdeckungen von Leibniz und Newton, "The Period of Indecision"[12]. In dieser Periode der Unschlüssigkeit kam dem **"Begriff der unendlichen kleinen Größen"** die Hauptrolle zu.

---

[9] Durch eine Analyse des Lebens von P.D.Longolius wußte ich, daß sein Vater, der Pfarrer Johann Daniel Longolius, ein mathematisches Buch unter dem Titel: "Entlarvte Mathematic, oder zulänglicher Entwurff einer ganz neuen Grund-Mathematic" in Jahr 1735 geschrieben und selbst verlegte hatte. Es könnte sein, daß dieses Buch einige Beziehungen zu den mathematischen Stichwörtern hat. Das Buch wurde gefunden, aber leider konnte ich keine Beziehungen identifizieren. Trotzdem muß ich sagen, daß dieses Buch eine wichtige historische Quelle ist.

[10] Die Auflagen von 1717 und von 1750 wurden benutzt.

[11] Die Auflagen von 1716 und von 1747 wurden benutzt.

[12] Boyer,C.B.: **The History of the Calculus and its conceptual development**, New York, Dover Publications, Ed. of 1949.

Dieser Begriff tritt in Zedlers Lexikon in verschiedenen Stichwörtern auf. Davon wähle ich zwei geeignete Beispiele aus.

1.Beispiel: Als Erklärung der Definition "Differential-Rechnung" schrieb Wolff:

"Die 2. Erklärung

3. Eine unendlich kleine Grösse ist diejenige / welche so ein geringer Theil von der anderen ist / daß er mit ihr nicht vergli= chen werden kan." [13]

Zum Vergleich zeige ich die Definition aus dem Stichwort "Grösse" (Band XI - 1735) des Universal-Lexikons:

"...; oder unendlich kleine Grössen, Lat. Quantitates infinite paruas, seu in- finitesimae, welche kleiner sind als eine jede assigna- ble Grösse, und werden auch Elementa Differentia- lia genennet,..."(S.1018)

Es ist erkennbar, daß es einen großen Unterschied zwischen diesen zwei Definitionen gibt. Wolff behandelt den Begriff der unendlichen kleinen Größen als solche, "welche so ein geringer Theil von der anderen ist" und bei Zedler steht ein besserer und modernerer Begriff: Unendlich kleine Größen, "welche kleiner sind als eine jede assignable Grösse".

[13] Auflage von 1717 - 4.Teil - S.253; Auflage von 1750 - 4.Teil - S.1799.

2.Beispiel: Um einen anderen wichtigen Punkt zu betonen: Es ist der Begriff der unendlichen kleinen Größen im Vergleich zu einer endlichen Größe. Bei Wolff, z.B., ist dieser Begriff durch ein Beispiel erklärt:

" Die 1. Anmerckung

6.Mercket aber wohl/ daß eine unendlich kleine Grösse nur in Ansehung einer anderen für nichts zu achten; in sich aber nicht nichts ist. Denn bildet euch ein/ ihr wol= let die Höhe eines Berges messen und indem ihr über der Arbeit begriffen wäret/ jagte der Wind ein Körnlein Sand von der Spitze weg. So wäre der Berg umb den Dia= meter eines Sand=Körnleins niedriger worden. Allein da die Ausmessung der Höhe eines Berges so beschaf= fen ist/ daß die Höhe einerley gefunden wird/ ob das Sand= Körnlein liegen bleibet/ oder von dem Winde weggeja= get wird; so kan man das Sand=Körnlein in Ansehung eines grossen Berges für nichts und seine Grösse in Ansehung der Höhe des Berges für unendlich kleine hal= ten." [14]

Im Stichwort "Calculus differentialis" (Band V - 1733) aus Zedlers Universal-Lexikon wurde dasselbe Beispiel benutzt, aber nach dem behandelten Beispiel, kommt ein wichtiger Hinweis:

[14] Auflage von 1717 - 4. Teil - S.253/254; Auflage von 1750 - 4.Teil - S.1799/1800

"...Das Exempel quadriret nur in so weit hier her,um sich eine deutliche Vorstellung zu ma= chen, wie ein finitum das infinitum weder vermehren noch vermindern könne; obgleich in rigore zu reden, die Höhe des Berges respectu des Sand=Körnleins kein infinitum ist; und man sich auch die Elementa nicht solcher Gestalt concipiren darf,indem sie an und vor sich unendlich kleine, das ist,quavis adsignabili quantitate minora sind, welches an dem Sand= Körnlein nicht Statt findet."(S.188)

Das deutet auf die moderne Entwicklung des Grenzwertbegriffs hin.

Folgende weitere mathematischen Begriffe in Zedlers Lexikon wurden mit den Angaben bei Christian Wolff verglichen: Differential-Rechnung, Integral-Rechnung, Größe, Unendliche Reihe, Infinitum u.a. Das bisherige Ergebnis lautet:

Der oder die Verfasser derartiger mathematischer Stichwörter in Zedlers Universal-Lexikon waren in einigen Punkten moderner als Christian Wolff: z.B. "Begriff der unendlichen kleinen Größen", "Begriff von unendlicher Reihe". In anderen Punkten verließen sie den traditionellen Standpunkt von Wolff nicht: z.B. das Beispiel von Wolff über "die Höhe des Bergs" ist lediglich im Stichwort "Calculus differentialis" kritisiert. Dasselbe Beispiel wurde in anderen Stichwörtern ohne Kommentar benutzt.

NOBRE

4. Hauptbibliographie

Wolff,Christian: **Mathematisches Lexicon**, Leipzig, bey Joh. Friedrich Gleditschens, 1.Aufl.:1716, 2.Aufl.1734/1742, 3. Aufl.1747

Wolff,Christian: **Der Anfangs=gründe aller mathematischen Wissenschaften: zu mehreren Aufnehmen der Mathematik so wohl auf höhen als niedrigen Schulen**, Halle im Magdeburgischen, Verlegt in der rengerischen Buchhandlung, Auflagen von 1717 und von 1750.

Wolff,Christian: **Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften**, Frankfurt und Leipzig, 1734.

Wolff,Christian: **Elementa matheseos universa**, Genevae, Bousquet, 1713-1715 und 1732-1741.

Zedler,J.H.(verleger): **Grosses Vollständiges Universal Lexicon**, Leipzig und Halle, 1732-1754, Neue Auflage von Akademische Druck- und Verlagsanstalt, Graz, 1961-1964.

=============

* **Sergio Nobre** ist Assistent an der Universität of Sao Paulo - Brasilien und Doktorand an der Universität Leipzig.

Adressen: bis Februar 1994 : Titaniaweg 7 / 614
O-7063 Leipzig
Germany

ab März 1994 : UNESP - Dep. Matemática
C.P. 178
13500 - Rio Claro - SP
Brazil

Das Projekt "Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften..." - Sackgasse der wissenschaftlichen Entwicklung?

von RENATE TOBIES (Leipzig)

Der mit einem Fragezeichen versehene Titel des Vortrags sagt aus, daß die Autorin zur Ansicht gelangt ist: die "Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen"[1] stellt nicht nur den Abschluß einer Entwicklungsperiode der Mathematik dar, sondern die mit diesem Projekt verbundene Tätigkeit regte zugleich weiterführende Forschungen an.

Aussagen von Zeitgenossen deuten an, daß die Arbeit an dem groß angelegten Unternehmen zu einem Teil geringschätzt wurde. Insbesondere Vertreter der Berliner mathematischen Schule sowie Sophus Lie (1842-1899) äußerten sich nachweislich negativ. Ein Argument war, daß die "Sammeltätigkeit" für das Projekt nur rückwärtsschauende Sicht darstelle und kein Weg zu neuen Erkenntnissen öffne. Die Initiatoren der Encyklopädie wehrten sich entschieden gegen die Vorstellung, daß die mit dem Unternehmen verbundene Tätigkeit in eine Sackgasse führen könne.

Zu den Initiatoren gehörten Franz Meyer (1856-1934), Heinrich Weber (1842-1913) und Felix Klein (1849-1925). Die bisher eingesehenen Korrespondenzen zwischen Mathematikern und die Berichte über die Zusammenkünfte der "Akademischen Kommission über die Herausgabe der 'Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften' " dokumentieren, daß Heinrich Weber sich nur in geringem Maße an der Leitung des Unternehmens beteiligte. Franz Meyer redigierte zwar die Bände I (Arithmetik und Algebra)[2] und III (Geometrie), sein fachlicher Weitblick unterlag jedoch scharfer Kritik, sodaß er als Koordinator des Gesamtprojekts schließlich keine Rolle spielte. Diese Rolle übernahm in fachlicher Hinsicht Felix Klein, während sein Schüler Walther Dyck (1856-1934) als Organisator und als ständiger Vorsitzender der erwähnten Akademischen Kommission fungierte.

Als dominierender Koordinator des Gesamtprojekts erklärte Klein in einer Vorlesung des Herbstsemesters 1910/11 zu Ansichten über die Encyklopädie:

> "Man hat bei dieser Gelegenheit auf eine etwas missliche Analogie mit dem Altertum hingewiesen: In Alexandrien wurden grosse Encyclopädieen geschaffen und man begann, die Wissenschaft zu kanonisieren, <u>als die Productivität aufhörte</u>. So wurde auch bei unserer Encyclopädie die Meinung ausgesprochen, dass die Idee dazu ein Zeichen dafür sei, dass die <u>mathematische Productivität ihrem Ende zugehe</u>; man habe jetzt schon nichts anderes zu tun, als das Vorhandene zu sammeln. Nun, wir haben bei unserem Plane einen solchen Gedanken nicht gehabt, und die Entwicklung der Wissenschaft seit 1894 ist auch einen anderen Weg gegangen. Auch hat die Encyclopädie mehr zu tun, als zu sammeln, sie hat vielfach heterogenen Stoff erst einheitlich zu verarbeiten."[3]

Das Prüfen dieser Aussage setzt ein gründliches Studium des Projekts durch eine Vielzahl von Spezialisten voraus. Beim Stand der bisherigen Untersuchungen[4] kann nur anhand einiger Beispiele angedeutet werden, daß zum Teil mehr erreicht wurde, als vorhandenen Stoff zu sammeln.

Die von Klein erwähnte einheitliche Verarbeitung von Stoff vermerkten zum Beispiel Oskar Perron (1880-1975) über die Encyklopädie-Beiträge von Alfred Pringsheim (1850-1941):

> "Seine ausführlichen Referate über unendliche Prozesse und über die Grundlagen der Funktionenlehre sind richtungsweisend für das ganze Werk geworden; sie sind zudem die erste zusammenfassende Darstellung des Gegenstandes."[5]

David Hilbert (1862-1943) schrieb über den von Hermann Minkowski (1864-1909) verfaßten Beitrag "Kapillarität", daß dieser "...die sämtlichen theoretischen Gesichtspunkte dieses Kapitels der Physik auseinandersetzt und die schwierigen mathematischen Grundlagen, insbesondere soweit sie die Variationsrechnung betreffen, in origineller, zum Teil ganz neuer Form entwickelt."[6]

Ein weiterer interessanter Aspekt ist, daß Briefe zwischen Heinrich Burkhardt (1861-1914), welcher den Band II (Analysis) redigierte, Felix Klein und Walther Dyck andeuten, daß das Studium der französischen Autoren beitrug, daß ab 1990 in Göttingen Forschungen zur Analysis stärker befördert wurden. So läßt ein Brief Kleins an Dyck vom 2. Februar 1899 vermuten, daß Klein Einfluß auf Hilberts veränderte Forschungsrichtung seit 1900 nahm:

> "Sehr viel liegt daran, dass unsere jungen deutschen Mathematiker gar nicht ihren Vorteil verstehen, nämlich an den alten und abgegrasten Theorien weitermachen, statt nach dem Beispiel der Franzosen und Italiener neue Gedanken in Angriff zu nehmen! Meine Hoffnung auf positive Besserung ruht wesentlich auf Hilbert, auf den meine Aeusserungen in der That ihren Eindruck nicht verfehlt haben."[7]

Klein war begeistert von den neueren Forschungen junger französischer und italienischer Mathematiker, mit denen er durch die Arbeit am Encyklopädieprojekt detaillierter vertraut wurde. Gemeinsam mit Burkhardt diskutierte er die Aufsätze von Ernest Paulin Joseph Vessiot (1865 - 1952) und Paul Painlevé (1863 - 1933) für den Analysis - Band und war zugleich bemüht, französische Autoren für die "Mathematischen Annalen" zu gewinnen.[8] Wenn sich in Göttingen die Arbeiten zur Analysis mehrten, Dissertationen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, zur Theorie der Integralgleichungen u.ä. vergeben wurden, gemeinsame Seminare Kleins mit Hilbert und Minkowski der Theorie der linearen Differentialgleichungen und der automorphen Funktionen gewidmet wurden, so spielte die Kenntnisnahme der neueren Forschungen zur Analysis in Frankreich in Verbindung mit dem Encyklopädieprojekt eine nachweisliche Rolle.

Eine noch konkretere Vernetzung zwischen der Arbeit am Encyklopädieunternehmen und der Förderung neuer Forschungsergebnisse ist für das Gebiet der Mechanik belegt. Klein, unter dessen Leitung der Band IV (Mechanik) seit 1899 stand, widmete sich in Seminaren und Vorlesungen seit dieser Zeit vornehmlich Gegenständen der theoretischen und technischen Mechanik: Hydrodynamik, Theorie der Schiffsbewegung, Elastizitätstheorie, Graphische Statik, Elektrotechnik, Theorie der Baukonstruktionen. Seminare zu derartigen Themen gestaltete er gemeinsam mit den Professoren für Astronomie (Karl Schwarzschild, 1873-1916), Geophysik (Emil Wiechert, 1861-1928), Theoretische Physik (Woldemar Voigt, 1850-1919), Angewandte Elektrizitätslehre (Theodor Hermann Simon, 1870-1918), Technische Physik (Ludwig Prandtl, 1857-1953) und Angewandte Mathematik (Carl Runge, 1856-1927). Außer Voigt und Simon beteiligten sich die genannten alle am Encyklopädieprojekt. Hinzu trat Max Abraham (1875-1922), der Aufsätze für die Bände IV und V schrieb und im SS 1900 mit Klein ein Seminar "Technische Anwendungen der Elastizitätstheorie" durchgeführt hatte. Aus dem Kreise der Seminarteilnehmer gewann Klein weitere Autoren, insbesondere seinen engsten Mitarbeiter, Conrad Müller (1878-1953), für die Herausgabe von Band IV sowie als Sekretär für die AKademische Kommission zur Herausgabe der "Mathematischen Encyklopädie". Klein schilderte selbst die Verbindung zwischen Lehrtätigkeit und Arbeit für die Encyklopädie:

> "Ein besonderes Mittel, sich in Gebiete, die ihm ferner liegen, einzuarbeiten, ist für den deutschen Universitätsdozenten, der in höherem Maße über die besondere Richtung seiner Lehrtätigkeit frei verfügen kann, die Abhaltung geeigneter Vorlesungen und Übungen. Ich habe von diesem Mittel im Interesse meiner Tätigkeit an Band IV der Encyklopädie alle die Zeit hindurch Gebrauch gemacht. Insbesondere las ich im Winter 1899-1900 über Schiffstheorie; - Vorlesung und Übungen waren nicht mehr als ein erster Versuch, aber sie haben mir denjenigen Mitarbeiter zugeführt, der mir für die Aufgabe sehr bald die allerwesentlichste Hilfe werden sollte, Hrn. Conrad H. Müller."[9]

Das inhaltliche Niveau dieser Lehrveranstaltungen wurde insbesondere von Erkenntnissen der britischen Mechanik geprägt. Klein hatte 1897 eine Studienreise nach Großbritannien unternommen, um Autoren für die Encyklopädie zu gewinnen. In seinen Aufzeichnungen schilderte er das hohe Niveau der britischen Mechanik und mathematischen Physik, gab Hinweise für die Auswertung entsprechender Literatur, welche er im Mathematischen Lesezimmer auslegen ließ, für die konkrete Tätigkeit in Maschinenlaboratorien und regte Forschungen an. "Die jüngeren Herren müssen daraus Vortheil ziehen."[10]

Mit der durch das Encyklopädieprojekt entstandenen Lehrtätigkeit regten Klein und andere Göttinger Wissenschaftler eine Reihe junger Wissenschaftler zu Forschungen an. Zu diesen gehörten u.a. der erwähnte Conrad Müller, Georg Hamel (1877-1954), Karl Wieghardt (1874-1924)[11], Alois Timpe (1882-1959)[12], Paul Ehrenfest (1880-1933) und seine spätere Ehefrau Tatjana A. Afanaseva (1876-1964)[13].

Daß die in Deutschland vermehrt einsetzenden Forschungen zur Mechanik ihren Ausgangspunkt durch von Klein gegebenen Anregungen hatten, ist im übrigen weitgehend anerkannt. Richard von Mises (1883-1953), der 1921 die "Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" begründete, äußerte:

> "Man sagt nicht zuviel, wenn man die außerordentliche vom Ausland schon vielfach als vorbildlich anerkannte Entfaltung des Studiums der Mechanik in Deutschland ... als eine Auswirkung der weitblickenden Pläne Kleins bezeichnet, die in den Mechanikbänden der Encyklopädie ihre erste Verwirklichung gefunden haben."[14]

Bibliographie

1 Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. Bd.I Arithmetik und Algebra(redigiert von F. Meyer), Bd. II Analysis (redigiert von H. Burkhardt, R. Fricke und W. Wirtinger), Bd. III Geometrie (redigiert von F. Meyer), Bd. IV Mechanik (redigiert von F. Klein und C. Müller), Bd. V Physik (redigiert von A. Sommerfeld), Bd. VI.1. Geodäsie und Geophysik (redigiert von Ph. Furtwängler und E. Wiechert), Bd. VI.2. Astronomie (redigiert von K. Schwarzschild). B. G. Teubner: Leipzig und Berlin, 1898 bis 1935.

2 Band I war zuerst fertiggestellt und inhaltlich am frühesten überholungsbedürftig. Die notwendige Überarbeitung wurde in den 20er Jahren diskutiert und zu Beginn der 30er Jahre noch von Walther Dyck auf den Weg gebracht. Die zum Teil bereits in den 30er und 40er Jahren ausgearbeiteten Manuskripte erschienen nach dem Zweiten Weltkrieg beim Teubner - Verlag, allerdings nicht in vollständigem Maße: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Berlin, Göttingen, Heidelberg, Leipzig, München und Wien sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. Bd. I (Algebra und Zahlentheorie), hrsg. v. M. Deuring, H. Hasse E. Sperner (ab 1958 G. Köthe) mit Unterstützung der Akademie der Wissenschaften zu Mainz und unter Mitwirkung der Forschungsinstituts für Mathematik in Oberwolfach. B.G. Teubner: Leipzig, 1952 bis 1959.

3 Klein, Felix: Vorlesung über die moderne Entwicklung des mathematischen Unterrichtes. Wintersemester 1910/11. Handschriftliche Ausarbeitung von Erich Hecke. Nachlaß Erich Hecke, Mathematisches Institut der Universität Hamburg, S. 272. (Ich danke Frau Dr. R. Stanik für die Einsicht in die Materialien.)

4 Das Projekt verfolgt die Absicht, eine Geschichte des Unternehmens auszuarbeiten, welche der vorgesehenen Neuauflage der französischen Ausgabe der Encyklopädie beigefügt werden soll.

5 Perron, Oskar: Alfred Pringsheim zum 80. Geburtstag. In: Forschungen und Fortschritte, 6 (1930) S. 315.

6 Hilbert, David: Hermann Minkowski. In: David Hilbert. Gesammelte Abhandlungen. Bd. 3. Berlin: Julius Springer, 1935, S. 355-356.

7 Bayerische Staatsbibliothek, Handschriftenabteilung, Dyckiania.

8 Offensichtlich war es schwierig, französische Autoren für die "Mathematischen Annalen" zu gewinnen. Ein guter Kontakt entstand zunächst mit Emile Borel (1871 - 1956), der an der Encyklopädie mitarbeitete, seit 1897 Sekretär und seit 1905 Präsident der Société Mathématique de France war. Borel publizierte in den Annalen-Bänden 55 (1902), 60 (1905), 72 (1912). Übrigens schrieb Borel auch Schulbücher für den Mathematikunterricht, die Klein den Studierenden in seiner Vorlesung empfahl. Neben Borel publizierte zwischen 1900 und 1914 nur noch ein weiterer französischer Autor in den "Mathematischen Annalen": Maurice Fréchet (1878-1973) in Bd. 68 (1910).

9 Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften..., Bd. IV.1. Vorrede von F. Klein, S. VI.

10 Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung (UBG), Cod. Ms. Klein XXII F Bl. 93.

11 Wieghardt beteiligte sich z. B. im SS 1900 am Seminar "Technische Anwendungen der Elastizitätstheorie" mit dem Vortrag "Räumliche Fachwerke, insbesondere bei Kuppeldächern" (18.7.1900), brachte im Seminar "Graphische Statik und Festigkeitslehre" des SS 1903 mehrere Erörterungen und Zusätze, insbesondere zur Gewölbetheorie, und sprach im Seminar "Hydrodynamik" des WS 1903/04 zum Thema "Bemerkungen von Klein über Wassersprung" (vgl. Protokollbücher der Seminare F. Kleins, Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen). Im Jahre 1903 verteidigte er bei Klein seine Dissertation zum Thema "Über Statik ebener Fachwerke mit schlaffen Stäben". Für die Encyklopädie schrieb er einen Aufsatz über die Theorie der Baukonstruktionen (Bd. IV).

12 Timpe trug im Seminar "Graphische Statik und Festigkeitslehre" des SS 1903 zu "Balkenbiegung nach Saint Verout" vor, im Seminar "Wahrscheinlichkeitsrechnung" (SS 1904) über "Statistik der Eigenbewegungen" (3.8.1904) und im Seminar "Ausgewählte Teile der Elastitzitätstheorie" (WS 1904/05) über "Das Lamésche Problem". Er verteidigte 1905 bei Klein seine Dissertation zum Thema "Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen". Für die Encyklopädie verfaßte er gemeinsam mit Conrad Müller einen Beitrag über die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätslehre und gemeinsam mit dem Italiener O. Tedone den Aufsatz "Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper".

13 Beide trugen im Seminar "Prinzipien der Mechanik (WS 1902/03) vor. Sie sprach über "Das Unendlich Kleine bei Lagrnge". Er über "das Prinzip der variierenden Wirkung und die geometrisch- optischen Arbeiten Hamiltons". Für die Encyklopädie schrieben sie gemeinsam den Aufsatz "Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik.

14 Mises, Richard von: Felix Klein zum 75. Geburtstag. In: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 4 (1924) S. 88.

Über den Nachlaß des Mathematikers Erich Hecke (1887–1947)

Rotraut Stanik

Erich Hecke wurde am 20.9.1887 in Buk (Provinz Posen) als Sohn des Baumeisters Heinrich Hecke geboren. Vom SS 1905 an studierte E. Hecke Mathematik und Physik an den Universitäten Breslau, Berlin und Göttingen. 1910 promovierte er bei David Hilbert in Göttingen mit dem Thema: *Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendungen auf die Zahlentheorie.*

Im Juli 1912 erhielt er die Venia Legendi für Mathematik an der Universität Göttingen. Die Habilitationsschrift trägt den Titel: *Über die Konstruktion relativ Abelscher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variablen.*

Im WS 1910/11 war E. Hecke Assistent bei F. Klein und ab Ostern 1911 Privatassistent bei D. Hilbert in Göttingen.
1915 wurde Hecke außerordentlicher und 1916 ordentlicher Professor in Basel.
Von 1918 bis 1919 war E. Hecke ordentlicher Professor in Göttingen (Nachfolge Carathéodory).
Im Herbst 1919 ging E. Hecke an die neu gegründete Universität Hamburg (als ordentlicher Professor) und blieb dort bis zu seinem Tode 1947.
Am 13.2.1947 starb Erich Hecke in Kopenhagen, am 17.2.1947 sprachen Harald Bohr und Jacob Nielsen anläßlich seiner Feuerbestattung in Kopenhagen.
Am 23. Mai 1947 fand an der Universität Hamburg eine Gedenkfeier für Erich Hecke statt (Reden von H. Zassenhaus und W. Maak).

Überblick, was sich im Nachlaß befindet:

1. Geburtsurkunde von E. Hecke.
2. Zeugnis der Reife, Gymnasium in Posen, 9.2.1905.
3. Immatrikulationsbogen der Universitäten Breslau (SS 1905–WS 1905/1906) und Berlin (SS 1906–WS 1907/08).
4. Ernennungsurkunde zum planmäßigen ordentlichen Professor zum 1.10.1919; Hamburg, den 18.1.1924.
5. Diensteid der hamburgischen Beamten; 12.12.1919.
6. Die vier Gedenkreden anläßlich der Trauerfeierlichkeiten in Kopenhagen und Hamburg 1947 (getippt, broschürt).
7. Mitschriften und Ausarbeitungen von Vorlesungen oder Büchern fremder Autoren, insgesamt 36 Hefte (1905–1911?), hs*.

*hs = handschriftlich

8. Ausarbeitung einer Vorlesung von F. Klein (WS 1910/11), hs.
9. Ausarbeitungen von fünf Hilbertschen Vorlesungen (1911–1914), ms† und hs.
10. Manuskripte und Notizen zu Vorlesungen von E. Hecke (1913–?).
11. Buchmanuskript von E. Hecke: *Kinetische Gastheorie*, 127 Blätter, hs [vor 1917?].
12. Zahlreiche *Notizen* (hs), die meisten zur Mathematik, aber auch zur Physik und Geschichte der Mathematik. [ca. 1910–1945]. Formeln, Problemstellungen. 12 Tagebuch-ähnliche Hefte (Okt. 1935–Juli 1938).
13. Über 280 *Briefe* an Hecke (1910–1943).
14. Schriftverkehr (1 Mappe), der die Neuherausgabe des Algebra-Bandes der Math. Enzyklopädie der Wissenschaften betrifft (1934–1939). (Hasse, Hecke, Teubner-Verlag).
15. Einige Manuskripte fremder Autoren.
16. Ein Gutachten über Harald Bohr, hs.
17. Sonstiges.
18. Eine Aufstellung, was (offenbar bald nach dem Tode von Hecke) vernichtet worden ist: Briefe „belanglosen“ Inhalts; Briefe zurückgegeben. Sämtlicher Schriftverkehr mit Behörden. Gutachten von Hecke, Hörerlisten, Rundschreiben. Schriftverkehr: Mathematische Annalen an Behnke (wo heute ?).

Mitschriften und Ausarbeitungen von Vorlesungen oder Büchern fremder Autoren von E. Hecke (1905–1911?), hs, 36 Hefte

1. Integralrechnung II
   von Landsberg, Breslau SS 1905
2. Theorie der algebraischen Gleichungen
   von Landsberg, Breslau WS 1905/06
3. Theorie der algebraischen Funktionen
   von Landsberg, Breslau WS 1905/06
4. Funktionentheorie
   von Kneser, Breslau WS 1905/06
5. Allgemeine Mechanik II
   [von Pringsheim, Breslau WS 1905/06]

†ms = mit Maschine geschrieben

6. Determinanten (4-stündig)
   von Frobenius, Berlin SS 1906
7. System der gesamten Physik (4-stündig)
   von M. Planck, Berlin SS 1906
8. Übungen zur Physik (Mechanik, Wärmelehre)
   Berlin SS 1906
9. Zahlentheorie
   [von Landau, Berlin WS 1906/07]
10. Lösungen zu Übungsaufgaben zur Vorlesung Zahlentheorie
    von Landau, Berlin WS 1906/07 (5.11.1906–25.2.1907)
11. Theorie der Raumkurven
    [von Knobloch, Berlin WS 1906/07]
12. Theorie der krummen Flächen
    von Knobloch, Berlin WS 1906/07
13. Kinetische Gastheorie
    [von Valentiner, Berlin WS 1906/07]
14. Elliptische Funktionen
    [von Schwarz, Berlin SS 1907]
15. Integralgleichungen
    von Landau, Berlin WS 1907/08
16. Mehrfache Integrale, Attraktion der Ellipsoide; Ausarbeitung, Sept.–Okt. 1905
17. Algebra; Ausarbeitung nach dem Buch von Weber: *Algebra*.
    April 1906 und Sept.-Okt. 1907, Posen
18. Theorie der divergenten Reihen; Ausarbeitung des Buches von Borel
19. Vektorrechnung
20. Synthetische Geometrie der Ebene
21. Linien zweiten Grades
22. Jacobische Theorie der elliptischen Funktionen
23. Das absolute Maßsystem und die Beziehungen der Einheiten zueinander
24. Theorie der Wellenbewegung
25. Theorie der Wärme
26. Hydrodynamik
27. Elekrizität und Magnetismus

28. Elektromagnetismus

(Teilweise sind die Mitschriften lückenhaft).

Ausarbeitungen Hilbertscher Vorlesungen (1911–1914)

1. Mechanik der Kontinua.
   SS 1911, hs, ausgearbeitet von Hecke.
2. Differentialgleichungen (gewöhnl.).
   SS 1912, 10 Hefte, ms, Durchschlag.
3. Molekulartheorie der Materie.
   WS 1912/13, ms, Durchschlag.
4. Elektronentheorie.
   SS 1913, ms, Durchschlag.
5. Elektromagnetische Schwingungen.
   SS 1913 oder WS 1913/14, ms, Durchschlag.

(Bei den Vorl. 2–5 steht nicht fest, wer sie ausgearbeitet hat).

Ausarbeitung einer Vorlesung von Felix Klein:

Die moderne Entwicklung des mathematischen Unterrichtes.
WS 1910/11, hs. Ausgearbeitet von E. Hecke.
(Wird als Buch erscheinen in der Reihe: Dokumente zur Geschichte der Mathematik).

Manuskripte oder Ausarbeitungen von fremden Autoren

1. F. Klein : Die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.
   Seminarvorträge. Dritter Teil. Funktionentheorie von 1850 bis ca. 1900.
   Ausgearbeitet von den Damen Heinemann und Staehlin. Göttingen. WS 1915/16. 214 S., ms, Durchschlag
   (→ Buch: F. Klein: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Teil I, 1926).
2. O. Toeplitz : Infinitesimalrechnung, hs
   [wahrscheinlich aus der Zeit 1913–1919, Göttingen]
   (Vermutlich ein Vorläufer des Buches :
   O. Toeplitz: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*, Berlin 1949).

3. O. Toeplitz : *Die Idee der mathematisch-didaktischen Kolloquien.* Referat in Hannover vom 8. April 1925, ms, Durchschlag.

4. Einige Aufzeichnungen fremder Autoren, die bisher nicht identifiziert werden konnten. hs.

Manuskripte (bzw. Notizen) zu Vorlesungen, die Hecke selbst gehalten hat

1. Theorie der algebraischen Zahlkörper (4-stündig), SS 1913, Göttingen, hs
(→ Buch: E. Hecke : Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. 1. Auflage 1923, 2. Auflage 1954, Englische „Übersetzung" 1981)

2. Funktionentheorie komplexer Variabler (4-stündig), SS 1914, Göttingen, ms

3. Kurven und Flächen (4-stündig), WS 1914/15, Göttingen, hs

4. Algebra (4-stündig), SS 1915, Basel, hs

5. Funktionen reeller Variabler (4-stündig) WS 1915/16, Basel, hs

6. *Antrittsvorlesung* in Basel vom 7.7.1916, hs. Thema: Beziehungen zwischen Mathematik und Physik. Es liegt ein Zeitungsartikel vom „Sonntagsblatt der Basler Nachrichten" (6.8.1916) bei, der über die Antrittsvorlesung berichtet.

7. Integralgleichungen (2-stündig) SS 1916, Basel (und SS 1927, Hamburg), hs

8. Theorie der algebraischen Zahlen (2-stündig) SS 1918, Basel, hs
(→ Buch von Hecke 1923)

9. Einführung in die höhere Geometrie (2-stündig) SS 1918, Basel, hs

10. Zahlentheorie (unvollständig) SS 1919, Göttingen, hs

11. Anwendungen der Analysis auf Zahlentheorie Teil I, II (4-stündig) SS 1920, Hamburg und Teil III, SS 1921, Hamburg (2-stündig)
(→ Buch: E. Hecke : *Analysis und Zahlentheorie.* Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Bd 3, 1987).

12. Allgemeine Relativitätstheorie (4-stündig) WS 1920/21, Hamburg, hs, (lückenlos) (von Hecke?)

13. Nicht-Euklidische Geometrie (4-stündig) WS 1921/22, Hamburg, hs, (lückenlos)

14. Dirichletsche Reihen (4-stündig) SS 1922, Hamburg, hs

15. Infinitesimalrechnung I, II (Teile) (4-stündig) [SS 1925 und WS 1925/26, Hamburg] hs

16. Elliptische Modulfunktionen, Teil I, II, III, hs
Teil I WS 1925/26 (4-stündig)
Teil II SS 1926 (4-stündig)
Teil III WS 1926/27 (4-stündig)
(als Kopie in der Bibliothek „Fachbereich Mathematik" in Hamburg vorhanden)

17. Mehrfach-periodische Funktionen [SS 1927, Hamburg, 4-stündig], hs

18. Elliptische und algebraische Funktionen [WS 1928/29, Hamburg], hs

19. Analytische Zahlentheorie, WS 1930/31 (2-stündig) und SS 1939 (4-stündig), Hamburg, hs

20. Fastperiodische Funktionen [WS 1933/34 ?], hs

21. Algebra II (4-stündig) SS 1935, Hamburg, hs

22. Dirichlet Series, Modular Functions and Quadratic Forms. Vorlesung, USA Frühjahr 1938
(→ Buch: E. Hecke : Lectures on Dirichlet Series, Modular Functions and Quadratic Forms, Göttingen 1983)

23. Dirichlet Series, Modular Functions and Quadratic Forms.
Ausarbeitung von H. Serbin, Ann Arbor 1938 (→ Buch 1983)

Buchmanuskript von E. Hecke: *Kinetische Gastheorie.* Bereits 1917 erwähnt Hecke in einem Brief an Hilbert im Zusammenhang mit seiner Berufung nach Göttingen (Nachfolge Carathéodory) die kinetische Gastheorie. Er gibt in seinem Brief genau an, was von Hilbert ist und welchen Beitrag er selbst zur kinetischen Gastheorie geliefert hat. Hecke: *Was die Gastheorie anlangt, so ist die Theorie der einatomigen Gase und Gasgemische, soweit sie über ihre Annalenarbeit hinausgeht, mein ausschliessliches Eigentum ...* [Aus einem Brief an Hilbert vom 24.11.1917].

1922 kündigt Hecke die Gastheorie als Buch in seiner Arbeit „Über die Integralgleichungen der kinetischen Gastheorie" (Math. Zeitschr. Bd 12, (1922)) an.

Im WS 1919/20 hielt Hecke eine Vorlesung über kinetische Gastheorie in Hamburg.

Mathematische Encyklopädie der Wissenschaften

1884 war die Encyklopädie geplant. Erschienen: Arithemetik und Algebra, Bd I (in 2 Teilen)

1. Teil 1898–1904
2. Teil 1900–1904.

Auf Anregung der DMV und im Einverständnis mit dem Verlag wurde beschlossen, diesen Band in völliger Neubearbeitung in zweiter Auflage erscheinen zu lassen. Als Herausgeber wurden 1934 die Professoren Hasse und Hecke gewählt (vgl. das Schlußwort von Carathéodory (Aug. 1935) im Registerband zur Encyklopädie.) Der Schriftverkehr mit dem Teubner-Verlag, der die Neuherausgabe : *Algebra und Zahlentheorie* betrifft, ist von Jan. 1934 bis Okt. 1939 vorhanden. Der Schriftverkehr behandelt technische Einzelheiten, wie Länge der Artikel, zeitliche Reihenfolge u.s.w. Er ist aber auch *politischer Natur*, da es ab 1935 um die Mitarbeit dreier jüdischer Mathematiker (Baer, R. Brauer, Mahler) geht.

Briefe an Erich Hecke (1910-1943)

Artin, E.	1 Br	1922
Bessel-Hagen, E.	2 Br	1935
Blumenthal, O.	2 Br	1938
Bohr, Harald	7 Br	1920–1937
Brandt, H.	7 Br	1930–1939
Carathéodory, C.	18 Br	1928–1938
Courant, R.	11 Br	1926–1938
Eichler, M.	3 Br	1937
Fuß, H.	4 Br	1912–1919
Hardy, G.H.	1 Br	1935
Hasse, H.	21 Br	1925–1938
Herglotz, G.	5 Br	1940–1941
Hilbert, D. u. Käthe	7 Br	1921–1938
Jessen, B.	4 Br	1937–1939
Klostermann, H.	4 Br	1928–1941
Knopp, Konrad	1 Br	1934
Krasner, M.	1 Br	[vor 1946]
Landau, E.	24 Br	1916–1918
Landherr, W.	2 Br	1935–1937
Landi, G.	1 Br	1938
Lochs, G.	1 Br	1934
Marke, P.	8 Br	1936–1937
Meier, Wilhelm	1 Br	1934
Mohrmann, H.	4 Br	1930–1931
Mordell, L.J.	8 Br	[1928–1938]
Myrberg, P.J.	4 Br	1929–1942
Nielsen, Jacob	11 Br	1921–1940
Noether, Emmy	1 Br	1930
Pfeiffer, F.	12 Br	1910–1913
Pólya, G.	3 Br	1926–1931
Rademacher, H.	22 Br	1924–1938
Reidemeister, K.	16 Br	1928–1940
v. Sanden, H.	9 Br	1912–1933
Schmidt, Erhard	2 Br	1923–1943
Schmidt, F.K.	2 Br	1943
Schur, I.	4 Br	1928–1934
Seifert, K.	2 Br	1937–1938
Senftleben, H.	1 Br	1942
Siegel, C.L.	10 Br	1934–1938
Tietze, H.	1 Br	1940
Threlfall, W.	13 Br	1935–1941
Toeplitz, O.	6 Br	1927–1936
Turán, P.	2 Br	1942
van der Waerden, B.L.	10 Br	1930–1943
Weil, André	2 Br	1934–1936
Weyl, Hermann	11 Br	1925–1937

Insgesamt: 281 Briefe von 46 verschiedenen Briefschreibern

STANIK

Über die Briefe

Alle Briefe sind von Mathematikern geschrieben.

Die Briefe beinhalten Mathematik, Universitätsangelegenheiten, Stellenangelegenheiten und damit zusammenhängende Angaben über bestimmte Mathematiker (Gutachten) oder Privates.

Viele Briefe sind gemischt und beinhalten diese aufgezählten Dinge gleichzeitig. Insgesamt sind diese Briefe **erstaunlich offen** geschrieben. Sie enthalten viele kleine Einzelheiten, von denen man nicht glauben würde, daß sie Hecke mitgeteilt worden sind und von denen man annehmen darf, daß sie wahrheitgemäß aufgeschrieben worden sind.

Ich möchte nun einige Gesichtspunkte aufzählen, die mir interessant erscheinen und zu denen diese Briefe auch etwas aussagen:

1. David Hilbert (Hecke war Hilbertschüler)
2. Der Kreis um Hilbert—Göttingen
3. Der Annalenstreit (dazu Briefe von Hilbert und Carathéodory)
4. Das Dritte Reich (Briefe von Blumenthal, R. Courant, Rademacher, v.d. Waerden und C.L. Siegel, die politische Ereignisse beschreiben). Rundschreiben von H. Hasse zugunsten von Emmy Noether vom 6. Juni 1933.
   Rundschreiben von C.L. Siegel zugunsten von E. Landau vom 20. Januar 1934.
   Besonders hinweisen möchte ich auf die mutige Haltung Siegels und die feste Haltung Heckes während des Dritten Reiches.
5. Die glanzvolle Zeit des Mathematischen Seminars der Universität Hamburg (1921 und 1927 hält Hilbert mehrere Vorträge, H. Weyl trägt vor).
   Aus einem Brief von Toeplitz von 5.12.1927 (über die Nachfolge von Toeplitz in Kiel) zitiert:... „Ich könnte den Namen Artin nur dann ernsthaft nennen, wenn ein plausibler Grund vorläge, daß Artin den glänzenden Hamburger Wirkungskreis mit dem hiesigen zu vertauschen [gedächte]. Ich kann mir sogar nicht denken, daß die materielle Verbesserung, die er hier vielleicht erhalten würde, ihm mehr wiegt, als die beruflichen Lasten einer kleinen Universität, wo man ganz anders Mädchen für alles ist ...“. Briefe von Rademacher.
6. Die Person Heckes, seine Freunde, insbesondere H. Weyl und in Dänemark die Brüder Bohr und J. Nielsen.

TEILNEHMER

PETER BAPTIST
Dr., Sterntalerring 21, D-8580 Bayreuth, Deutschland

CHRISTA BINDER
Dr., Inst. für Techn. Math., Techn. Univ. Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10/1141, A-1040 Wien, Österreich

* WOLFGANG BREIDERT 73
Dr., Institut für Philosophie, Universität Karlsruhe, Postfach 6980, D-7500 Karlsruhe, Deutschland

* JOACHIM BUHROW 31
Goethestr. 1a, D-O-2200 Greifswald, Deutschland

* MILOŠ ČANAK 23, 38
Prof. Dr., Brzàkova 4, YU-11000 Belgrad, Jugoslawien

LUDWIG DANZER
Prof. Dr., Stortsweg 9, D-46 Dortmund 50, Deutschland

AUGUSTE DICK
Hofrat Dr., Marxerg. 18/6, A-1030 Wien, Österreich

GERLINDE FAUSTMANN
Dr. Mag., Kaisersteing. 6, A-2700 Wiener Neustadt

EMIL FELLMANN
Dr., Arnold Böcklinstr. 37, CH-4051 Basel, Schweiz

MENSO FOLKERTS
Prof. Dr., Inst. für Gesch. der Naturwiss., Univ. München, Deutsches Museum, D-8000 München 26, Deutschland

JAROSLAV FOLTA
Dr., Akad. der Wiss., Abt. Wissenschaftsgeschichte, Vysehradská 49, CS-12826 Praha 2, Tschechoslowakei

* MIRIAM FRANCHELLA 6
Dr., Dipart. di Filosofia, Univ. Statale, Via Festa del Perdono 7, I-20122 Mailand, Italien

WILHELM FRANK
Prof. Dr., Custozzag. 13/7, A-1030 Wien, Österreich

DETLEF GRONAU
Prof. Dr., Inst. für Math., Univ. Graz, Heinrichstr. 36, A-8010 Graz, Österreich

* HARALD GROPP 67
Mühlingstr. 19, D-6900 Heidelberg, Deutschland

HELMUTH GRÖSSING
Prof. Dr., Inst. f. Geschichte, Univ. Wien, Dr. Karl Lueger-Ring 1, A-1010 Wien

RUDOLF HILDEBRANDT
Dr., Turmbergstr. 20, D-7516 Karlsbad-Spielberg, Deutschland

EDMUND HLAWKA
Prof. Dr., Inst. für Techn. Math., Techn. Univ. Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10/1141, A-1040 Wien, Österreich

HANS HOFER
Dr., Serviteng. 24/22, A-1090 Wien, Österreich

* ROBERT INEICHEN 12
Prof. Dr., chemin de l'Aurore 1, CH-1723 Marly

* WOLFGANG KAUNZNER
Prof. Dr., Zollerstr. 9, D-8400 Regensburg, Deutschland

HEINZ LÜNEBURG
Prof. Dr., Fachber. Math., Univ. Kaiserslautern, Erwin Schrödingerstraße, PF 3049, D-6750 Kaiserslautern, Deutschland

* JASNA MADJAREVIĆ 19
Dr., Ul. Partizanska br. 27/II, Vidirovac, YU-11000 Belgrad, Jugoslawien

* ANA MAROSTICA 60
Dr., Dept. of Phil., California State Univ., 5151 State University Drive, Los Angeles, CA 90032, USA

* SERGIO NOBRE 29,84
Titaniaweg 7/614, O-7063 Leipzig, Deutschland

* GREGORY NOWAK 65
8, rue d'Italie, F-75013 Paris, Frankreich

* VOLKER PECKHAUS 55
Dr., Inst. f. Phil. Univ. Erlangen, Bismarckstr. 1, D-8520 Erlangen, Deutschland

* FRANCISCO POYATOS 1
Prof. Dr., Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, Instituto de Matematicas, c.Serrano 123, E-28006 Madrid, Spanien

* MARKO RAZPET 36
Dr., Pedagoska fakulteta, Kardeljeva ploscad 16, SL-61000 Laibach, Slowenien

* NADA RAZPET 37
Prof., Board of Education and Sport, Ministry of Education and Sport, Poljanska 28, SL-61000 Laibach, Slowenien

* MICHAEL VON RENTELN 46
Prof. Dr., Math. Inst. I, Univ. Karlsruhe, Englerstr. 2, D-7500 Karlsruhe, Deutschland

* HERWIG SÄCKL
Dr., Gymnasium, Aschenbrennerstr. 10, D-8433 Parsberg, Deutschland

* KARL-HEINZ SCHLOTE 50
Dr., Eli-Wiesel-Str. 55, D-0-7400 Altenburg, Deutschland

PETER SCHMITT
Doz. Dr., Inst. für Math., Univ. Wien, Strudlhofg. 4, A-1090 Wien, Österreich

* ROTRAUT STANIK 100
Math. Sem., Univ. Hamburg, Bundesstr. 55, D-2000 Hamburg 13

* RENATE TOBIES 94
Doz. Dr., Karl-Sudhoff-Inst., Univ. Leipzig, Augustuspl. 9, D-O-7010 Leipzig, Deutschland

* HELMUTH URBANTKE 45
Dr., Peter Jordanstr. 94/14, A-1190 Wien, Österreich

HANS WUSSING
Prof. Dr., Braunschweigerstr. 39, D-O-7022 Leipzig, Deutschland

BENNO ZIMMERMANN
Dipl. Math., Birkhäuser-Verlag, Postfach 133, CH-4010 Basel, Schweiz