NOUVELLES MATHÉMATIQUES INTERNATIONALES

INTERNATIONALE MATHEMATISCHE NACHRICHTEN

INTERNATIONAL MATHEMATICAL NEWS

IMU CANBERRA CIRCULAR

NO. 67

JUNE 1989

5: Österreichisches Symposium Zur Geschichte Der Mathematik; V: Linz and Vienna, Austria; D: 22-28 October 1989; A: Dr Christa Binder, Institut für Mathematik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10/1141 A-1040 Vienna, Austria.

Geschichte der Mathematik

Das *II. Österreichische Symposium zur Geschichte der Mathematik* findet unter dem Motto: *Mathematik – à la mode?* vom 22. bis 28. Oktober 1989 in Neuhofen an der Ybbs (Niederösterreich) statt. Organisation: Dr. Christa Binder, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10/1141, A-1040 Wien.

(Ankündigung)

HISTORIA MATHEMATICA

Volume 16, Number 2, May 1989

II. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik

By Christa Binder

Institut für Technische Mathematik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10/1141, A-1040 Wien, Österreich

Thema: Mathematik—à la mode?
Tendenzen und Modeerscheinungen in Forschung, Lehre und Stil
Ort: Neuhofen an der Ybbs
(Niederösterreich, zwischen Linz und Wien)
Zeit: Sonntag, 22. Oktober 1989 bis Samstag, 28. Oktober 1989
Kosten: ca. 2600 Österreichische Schilling (pro Person, Einbettzimmer mit Bad/WC)
ca. 2300 Österreichische Schilling (pro Person, Doppelzimmer mit Bad/WC)
inklusive Vollpension, Transfer, Ausflug, Tagungsband
Organisation:

Dr. Christa Binder
Institut für Technische Mathematik
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8-10/1141
A-1040 Wien, Österreich
Telefon: 0222/58801/5381

Anregungen, Vorschläge, Wünsche, Anfragen, Kommentare, Anmeldungen werden an diese Anschrift erbeten.

EUROPEAN MATHEMATICAL NEWSLETTER

April 1989 and later

*22 - 28 II. ÖSTERREICHISCHES SYMPOSIUM ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK
Neuhofen a. d. Ybbs, Austria
C: Dr. Christa Binder, Inst. f. Techn. Math., Techn. Univ. Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10/1141, A-1040 Wien;

II. ÖSTERREICHISCHES SYMPOSIUM ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

NEUHOFEN AN DER YBBS, 22. BIS 28. OKTOBER 1989

Ostarrichi nuuvanhova 996

II. ÖSTERREICHISCHES SYMPOSIUM ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

NEUHOFEN AN DER YBBS, 22. BIS 28. OKTOBER 1989

MATHEMATIK - À LA MODE?

Tendenzen und Modeerscheinungen in Forschung Lehre und Stil

KURZFASSUNGEN DER VORTRÄGE

VERANSTALTER: ÖSTERREICHISCHE GESELLSCHAFT FÜR
GESCHICHTE DER NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEBER: CHRISTA BINDER, WIEN

PROGRAMM

MONTAG *(23. Oktober 1989)* — Vormittag

MONTAG *(23. Oktober 1989)* — Nachmittag

DIENSTAG *(24. Oktober 1989)* — Vormittag

DIENSTAG *(24. Oktober 1989)* — Nachmittag

MITTWOCH *(25. Oktober 1989)* — Vormittag

MITTWOCH *(25. Oktober 1989)* — Nachmittag

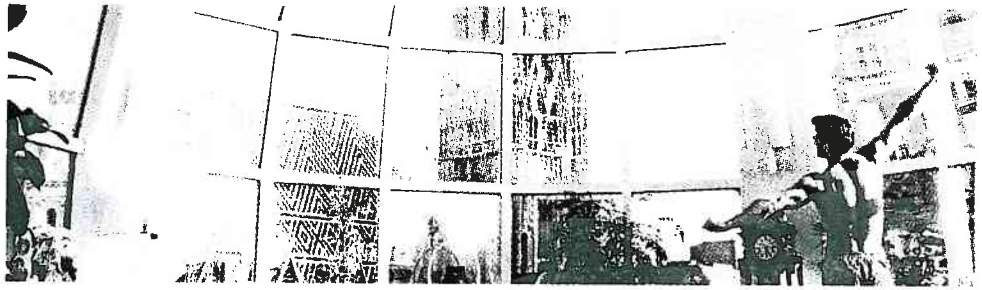
AUSFLUG: Stift Melk und Ausstellung "900 Jahre Benediktiner in Melk".

DONNERSTAG *(26. Oktober 1989)* — **Vormittag**

DONNERSTAG *(26. Oktober 1989)* — **Nachmittag**

FREITAG *(27. Oktober 1989)* — **Vormittag**

FREITAG *(27. Oktober 1989)* — **Nachmittag**



The Logarithms - From Calculation to Functional Equations.

Detlef Gronau, Graz/Austria

0. Introduction

John Napier (1550-1617) and Jost Bürgi (1552- 1632) together share the merits to be the inventor of the logarithms. The first printed publications about the logarithms of both, Napier[1] and Bürgi[2] are preserved in the socalled *"Bibliotheka Mathematika"* at the Library of the University of Graz.. This *Bibliotheka Mathematika* is a special part of the rara and incunabla collection, which has its origin in the private library of Paulus Guldin (1576-1643). Guldin was professor for mathematics at the (former Jesuit) University of Graz, where he died *"Anno 1643 Ætatis 67. Societatis 42 relictis plurimis libris et instrumentis"* as one can read from the subtitle of an old oil painted portrait of Guldin.

Especially the possession of *Bürgi's "Progreß Tabulen"* is important in view of several facts. First, there are preserved only very fiew issues of the *Progreß Tabulen*, since they are printed two years after the beginning of the Thirty Years' War, in Praha, the initial place of this war. So, the main part of the edition seems to be destroied by these war events. On the title page of the *Progreß Tabulen* a user's guide for these tables (*"sambt gründlichem unterricht ··· "*) is announced. But this user's guide never was printed at Bürgi's time. The first printing was done by Dr. Gieswald in the year 1856, following the manuscript of the library of the city of Danzig/Gdansk ([Gieswald 1856]). So it seems that in Graz is the second of the two unique hand written guide to the Progreß Tabulen, slightly different from the version of Danzig.

Shortly after the contributions of Bürgi and Napier appeared the logarithmic papers of Johannes Kepler (1571- 1630), the *"Chilias Logarithmorum"*, Marburg 1624 and the *"Supplementum Chiliadis Logarithmorum"*, Marburg 1625 (see [Kepler 1624 and 1625]). Also Johannes Kepler spent a period of his life in Graz. It

[1] *John Napier: Mirifici Logarithmorum canonis descriptio, Eusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica Mathematica, Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, Edinburgi 1614.*

[2] *Jost Bürgi: Arithmetische und Geometrische Progreß Tabulen/ sambt gründlichem unterricht/ wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/ und verstanden werden sol. Gedruckt/ In der Alten Stadt Prag/ bey Paul Sessen/ der Löblichen Universität Buchdruckern/Im Jahr/ 1620.*

1

was the beginning of his career after his study. But these logarithmic papers have been written by Kepler in Linz in Austria, and have been finished in 1621 about. He knew the "Logarithms" of both, Bürgi and Napier.

As a matter of fact Kepler, a professional mathematician, was the first who propound the logarithm as a function - the function of the natural logarithm, as one says nowaday. Indeed he proposed the logarithmic functional equation, but not only the general wellknown one, namely, in our terminology

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

but the restricted one

$$f(x^2) = 2 \cdot f(x). \tag{2}$$

Each of the two functional equations characterize the natural logarithm as the only one (up to a constant) continuous differentiable solution of the considered functional equation.

Kepler investigated equation (1) and (2), and determined their solution, which he called "mensura". He used the formula $f(x^{2^n}) = 2^n \cdot f(x)$, derived from (2), for calculating his "Logarithmus".

It seems worthwile to me, to reveal the logarithmic papers of Johannes Kepler and to show his mathematical merits in the theory of functional equations. There are several reference books on the history of mathematics, where the work of Kepler on the logaritms is represented (see e.g. [Hammer], [Naux], or [Tropfke]), but in more or less short way, and not from the point of view of the theory of functional equations. So I hope to present some new and interesting facts on this very impressive period of the development of the mathematic. First I will give a short survey on the theory of the both ancessors of Johannes Kepler.

I. The Logarithms of Bürgi and Napier.

Bürgi and Napier both, use the same mathematical principle for their tables. The two entry rows of the tables are mathematical sequences. One row is an arithmetical sequence

$$x_n = n \cdot s; n = 0, 1, \cdots$$

the other is a geometrical one

$$y_n = z^n \cdot q; n = 0, 1, \cdots$$

where s, z and q are fixed constants, individually chosen. Bürgi uses in his series the constants

$$s = 10, z = 10^8 \text{ and } q = 1 + 10^{-4},$$

Napier takes

$$s = 1 + 0.5 \cdot 10^{-7}, z = 10^7 \text{ and } q = 1 - 10^{-7}.$$

Napier calls the number x_n the "Logarithmus" of y_n . Rules like multiplication, division, calculation of the geometrical mean (regula detri) and root extraction are demonstrated in a intuitive way. If one denotes the "Logarithmus" of Napier by $L_N(y)$, using the defining identities

$$x = L_N(y) \text{ if and only if } y = 10^7(1 - 10^{-7})^{x/s}$$

one gets the approximative formula

$$L_N(y) \approx 10^7 \cdot log\frac{10^7}{y}.$$

For further explanations of Napiers tables see for example [Tropfke 1980], p. 303f and [Hammer 1960], p. 469 ff.

Ia. The Unterricht of Bürgi.

Bürgi quotes in his *"Unterricht"* (a user's guide to the Progreß Tabulen, see [Gieswald 1856], p. 321) a method of Simon Jacob Moritius Zons and others. This method is nothing else but the method of Michael Stifel (~ 1487 – 1567). In his book Arithmetica integra, Nürnberg 1544, Stifel shows how to calculate with exponents (even negative ones) of the number 2. Stifel wrote: *"Man könnte ein ganz neues Buch über die wunderbaren Eigenschaften dieser Zahlen schreiben, aber ich muß mich an dieser Stelle bescheiden und mit geschlossenen Augen daran vorübergehen"*[3] (see [Tropfke 1921], p. 171 ff.).

In Bürgis tables the arithmetical sequence consists of

$$0, 10, 20, 30, \cdots.$$

Bürgi calls these numbers the red numbers (*"rote Zahlen"*) and they also are printed in this colour.

The geometrical sequence is

$$100000000, 100010000, 100020001, 100030003, \cdots.$$

[3] *It would be possible to write a very new book on the miraculous properties of these numbers, but at this point I have to be modest and fail to see it.*

These are the black numbers (*"schwarzen Zahlen"*). Let us denote the "Logarithmus" of Bürgi by $L_B(y)$. Then in contemporary mathematical notation one gets

$$L_B(y) = 10^5 \cdot {}_a log \frac{y}{10^8}.$$

Here $a = (1 + 10^{-4})^{10000}$ and ${}_a log$ denotes the logarithm to the base a. This number a=2.71814595 is almost equal to the Euler number e=2.7182818285.

In the introduction to the users guide (*"Vorrede an den Treuherzigen Leser"*) one can read:

Betrachtendt derowegen die Aigenschafft und Correspondenz der Progressen als der Arithmetischen mit der Geometrischen, das was in der ist Multiplizieren ist in jener nur Addieren, und was ist in der dividieren, in Jehner Subtrahieren, und was in der ist Radicem quadratam Extrahieren, in Jener ist nur halbieren, Radicem Cubicam Extrahieren, nur in 3 dividieren, Radicem Zensi in 4 dividieren, Sursolidam in 5. Und also fort in Anderen quantitaten, so habe Ich nichts Nützlichres erachtet, dan dise Tabulen.[4] (Issue of Graz, compare also with [Gieswald 1856], p. 320).

In the sequel follows the users guide (*"Kurzer Bericht der Progreßs Tabulen wie dieselbige nützlich in Allerley Rechnung zugebrauchen"*). Here he quotes Simon Jacob Moritius Zons, and shows some calculations with the geometrical sequence to the base 2. Afterwards follow many examples how to use the Progreß Tabulen. We give one example, comparing the issues of Danzig and of Graz:

Issue of Danzig ([Gieswald 1856], p. 327):

Aus einer gegebenen Zahlen Radicem quadratam extrahiern. Man sol zum Exempel Radicem quadratam auß 4015374 extrahiern, wird also erstlich punctiert wie bei der extraction breuchlich ist und steht also $\dot{4}01\dot{5}3\dot{7}4$ und weil alhier fünf punkten seindt, so wirdt sein Radix auch 5 Ziffern haben, die rothe Zahl dieser obgeführten ist 139020 dieße halbirt kombt 69510 dessen Schwarze Zahl ist $2003\overset{\circ}{8}3982$ *oder soll verstanden werden* $20038\frac{3982}{1000}$.

Issue of Graz:

[4] *Considering the properties and the correspondence of both sequences. the arithmetical sequence and the geometrical one, what in this one is multiplication in the other is addition, in this one division in that one subtraction, and what in this one is square root extraction in the other one is to halve, cube root extraction only division by 3, forth root division by 4 and fifth root by 5. And so on in the other quantitities. thus I have considered nothing more useful than these tables.*

4

Aus einer gegebenen Zahlen Radicem quadratam zu extrahieren. Man sol zum Exempel Radicem quadratam aus 4015374 Extrahieren, wird also erstlich punctiert wie bey der extraction bräuchlich ist und steht also $\dot{4}01\dot{5}3\dot{7}4$ und weil alhir vier Punkten seindt, so wirdt sein Radix auch vier Ziffern haben, die rothe Zahl dieser obgeführten ist 139020 dieße halbiret kombt 69510 dessen Schwarze Zahl ist $2003\overset{\circ}{8}3982$ *oder soll verstanden werden* $20038\frac{3982}{1000}$.

There are misprints in both versions. Actually the following calculation is to be performed:

$$\sqrt{401537400} = 20038.398140.$$

Remarkable is the exactness of these calculations, which cannot be improved by normal pocket calculators. Remarkable further is, that Bürgi uses a sign (the small circle $^\circ$) for the decimal point.

The theoretical motivation of the tables of the two authors is different. Bürgi uses simply algebraic laws, respecting the addition law of exponents. Napier makes use of the physical visualisation of motion for introducing these two sequences.

Of course both authors use the addition law for the exponents but, one cannot say that they solved the functional equation (1), or a similar one for the logarithm. This is firstly done by Johannes Kepler.

II. Johannes Kepler and the Logarithm.

Johannes Kepler came across with the logarithms when he was engaged to establish a big volume of astronomical tables, the socalled "Tabulae Rudolphinae". At about the year 1616 he got the knowledge of the new method of Napier, calculating with the logarithms. But not before 1619 Johannes Kepler obtained for his own an issue of Napier's ***"Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio"***.

But the tables of Napier were not conform to the purpose of Kepler. On the other hand, Kepler did not know the theoretical foundation of Napier's logarithms, which was published posthumous in 1619 by Napier's son Robert. Johannes Kepler therefore decided to establish new theoretical fundamentals for Napier's logarithms and to construct tables, which are more suitable for his own purpose. The results are Kepler's ***"Chilias logarithmorum"***, the theoretical part of his logarithmic work, consisting of three postulates, 30 propositions, several corollaries and one definition together with the numerical tables. It follows the ***"Supplementum Chilias logarithmorum"***, a kind of user's guide.

In order to establish his own theory of Napier's logarithms, Johannes Kepler came to slight different numbers than Napier. Kepler refered this to the fact, that he had used smaller intervals for the interpolation than Napier, therefore his

5

calculations were getting more exact. This should be true too. But in reality Johannes Kepler used another theoretical method to derive the logarithms. So he got for his logarithmic function L_K, as we will see below, the folowing one

$$L_K(y) = 10^7 \cdot log \frac{10^7}{y}.$$

As it was pointed out, the logarithmic papers of Johannes Kepler were inspired by John Napier. But Kepler must have known also the method of Bürgi, since they lived both for several years in Praha together, namely from 1605 until 1612. It is known that they had several common scientific interests, and that they worked together in mathematics. But the only reference in connection with the logarithms by Kepler to Bürgi is the following one in the Tabulae Rudolphinae (see [Kepler 1627], p. 48): *"qui etiam apices logistici Iusto Byrgio multis annis ante editionem Neperianam viam praeiverunt ad hos ipsissimos Logarithmos. Etsi homo cunctator et secretorum suorum custos foetum in partu destituit, non ad usus publicos educavit".*[5]

The method of Johannes Kepler in the "Chilias logarithmorum" (see [Kepler 1624]) is, roughly speaking, the following. He introduces a function on the set of all ratios, say real positive numbers (Postulatum I: *Omnes proportiones ⋯ quantitate metiri seu exprimere*), which is called measure (mensura). This measure satisfies the functional equation

$$M(x \cdot y) = M(x) + M(y) \tag{1}$$

or even the restricted one

$$M(x) = 2 \cdot M(x). \tag{2}$$

It is not clear, which one of the two functional equations are used primarily. Equation (2) appears in the first place in I. Propositio. Using only (2), Kepler shows in the EXEMPLUM SECTIONIS how to calculate the Logarithmus which is defined lateron in the DEFINITIO. Equation (1) one can find expressis verbis in XIX. Propositio. In Postulatum II Kepler requires, one can say, that the measure should be sufficiently smooth. In Postulatum III he states, that the measure M, which is a solution of (2) and therefore is of the form

$$M(x) = c \cdot log(x),$$

[5] *these logistic apices showed Jobst Bürgi, many years before Napier's edition, the way to even the same Logarithms. But this lingerer and secret monger did neclect his foetus and did not educate it for the public use.*

6

GRONAU

should have as derivative in a fixed point z the value 1. This yields for the measure M the representation

$$M(x) = z \cdot log(x). \tag{6}$$

Kepler takes for the constant z in his papers different values. In the EXEMPLUM SECTIONIS he takes for z the value 10^{20}, in the DEFINITIO the value 1000. and finally in the logarithmic tables and in the Supplementum (see [Kepler 1625]) the value 10^7 . Thus Kepler's mensura is, up to the decimals the function of the natural logaritms. In his DEFINITIO (see [Kepler 1625], p. 297) he introduces his *"Logaritmus"* as

$$L_K(y) = M\left(\frac{z}{y}\right)$$

hence if $z = 10^7$

$$L_K(y) = 10^7 \cdot log \frac{10^7}{y}.$$

All the propositions, examples, corollaries and remarks between Postulatum I ([Kepler 1625], p. 280) and DEFINITIO build the proof that the measure M can be computed in a unique way. That is, Johannes Kepler gives a constructive proof of existence and uniqueness of the solutions of the functional equation (2). In order to do this, he proves many of identities and inequalities and uses the same tricks as they are used nowaday in the elementary theory of functional equations.

The style of the representation of the mathematics in the *"Chilias logarithmorum"* seems sometimes to give rise for doubts, how to interprete the particular statements. Sometimes these doubts come from the fact that Johannes Kepler really introduced new things, for those the vocabulary was not founded. He personally writes in the "Chilias": *"At cùm in re insolatâ laboremus penuria vocabulorum"*[6].

On the other hand, in generally the formulation of the mathematical statements and their proofs is astonishingly clear. So, if there is some vagueness in the representation of some statements, then this may also have its origin in the very complicate history of printing of the logarithmic works of Johannes Kepler. For more details of the history of Keplers logarithmic works see [Hammer], p. 461ff. and 469ff., [Naux], p. 128ff. [Belyj Ju.A. and D. Trifunovic] and [Gronau].

Concluding these explanations, finally one can say that Johannes Kepler was the first, who introduced the real function of the natural logarithm, he called it "mensura". He propound a functional equation for it, and solved this functional equation in the constructive way, showing how to compute the values of the solution of this functional equation.

[6] *Unusual things effort more work due to the lack of denominations.*

7

References

Aczél, János: Lectures on Functional Equations and their applications. Academic Press New York. San Francisco, London 1966.

Belyj Ju.A. and Dragan Trifunovic: Zur Geschichte der Logarithmentafeln Keplers. NTM-Schriftenr. Gesch., Naturwiss., Technik. Med.. Leipzig 9(1972)1, p. 5-20.

Gieswald, Dr.: Zur Geschichte und Literatur der Logarithmen. Archiv der Math. u. Phys. 26(1856), 316-334.

Gronau, Detlef: Johannes Kepler und die Logarithmen. Ber. der Math.- statist. Sektion in der Forschungsgesellschaft Joanneum. Ber. Nr.284(1987), Graz 1987.

Hammer, Franz: Nachbericht zu den logarithmischen Schriften von Johannes Kepler. In: Johannes Kepler. Ges. Werke Bd. 9, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1960, 461-483.

Kepler, Johannes: Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos. Marburg 1624. In: Ges. Werke Bd. 9, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1960, 275-352.

Kepler, Johannes: Supplementum Chiliadis logarithmorum. Marburg 1625. In: Ges. Werke Bd. 9, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1960, 353-426.

Kepler, Johannes: Tabulae Rudolphinae. Ulm 1627. In: Ges. Werke Bd. 10, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1969.

Naux, Charles: Histoire des logarithmes de Neper a Euler. Tome 1, Librairie A. Blanchard, Paris 1966.

Seidel, Ernst: Bibliotheka Mathematica. Von Euclid bis Gauß. Ausstellungskatalog, Universitätsbibliothek der Universität Graz, Graz 1985.

Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementarmathematik. 2. Aufl. Bd. 2: Allgemeine Arithmetik, Walter de Gruyter Berlin- Leipzig 1921.

Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementarmathematik. 4. Aufl. Bd. 1: Arithmetik und Algebra, Walter de Gruyter Berlin- New York 1980.

Address of the author: Institut für Mathematik
Universität Graz
Brandhofgasse 18
A-8010 Graz/Austria

8

EINIGE RICHTUNGEN IN DER HISTORISCHEN ENTWICKLUNG EINER THEORIE DER NICHTANALYTISCHEN FUNKTIONEN

I Teil

Miloš Čanak

In der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderliche spielen die folgenden Eigenschaften eine wichtige Rolle.

I/ Reeller und imaginärer Teil der analytischen Funktion $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ genügen den Bedingungen von Cauchy-Riemann

$$u'_x = v'_y \quad , \quad u'_y = - v'_x \quad , \tag{1}$$

/Analytizität im Sinne von Riemann/.

II/ Analytische Funktion $f(z)$ genügt der einfachsten komplexen Differentialgleichung

$$f'_{\bar{z}} = 0 \quad . \tag{2}$$

III/ Analytische Funktion $f(z)$ genügt der CAUCHYschen Integralformel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{t - z} = \begin{cases} f(z) & , \; z \in D^+ \\ 0 & , \; z \in D^- \end{cases} \tag{3}$$

wobei L eine glatte, geschlossene Kontur ist, die die komplexe Ebene auf das innere Gebiet D^+ und äussere Gebiet D^- teilt. Das Integral vom CAUCHYschen Typus

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{t - z} \tag{4}$$

längs einer glatten, geschlossenen oder nichtgeschlossenen Kontur L, stellt eine analytische Funktion in der ganzen komplexen Ebene ausser der Punkte auf L dar/Analytizität im Sinne von Cauchy/.

IV/ Analytische Funktion $f(z)$ lässt sich als Summe einer konvergenten Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{5}$$

darstellen/Analytizität im Sinne von Weierstrass/.

V/ Wenn die Funktion $f(z)$ im Punkt z_0 analytisch ist, so realisiert sie in diesem Punkt eine konforme Abbildung.

VI/ Vektorfeld einer analytischen Funktion ist gleichzeitig potentiell und solenoidisch/LAPLACEsches Feld/.

Auf Grund dieser Eigenschaften kann man in 6 Richtungen eine Theorie der nichtanalytischen Funktionen ausbilden.

I/ Die Bedingungen (1) stellen das einfachste, elliptische Gleichungssystem dar. E. Beltrami /1867/, /siehe [1] / gab die Idee, dass man durch Verallgemeinerung dieses Systems auch andere Klasse der komplexen Funktionen erhalten kann. E. Picard /1891/, /siehe [2] / untersuchte die Systeme der Form

$$v'_x = au'_x + bu'_y \quad , \quad v'_y = cu'_x + du'_y \quad , \qquad (6)$$

wobei die Koeffizienten $a(x,y), b(x,y), c(x,y)$ und $d(x,y)$ der Bedingung $(a-d)^2 + 4bc < 0$ genügen.

Diese Idee entwickelten weiterhin L. Bers, A. Gelbart [3], I. Vekua [4] und G. Položij [5]. Sie haben die sgn. Σ-monogenen, p-analytischen, /p,q/-analytischen und verallgemeinerten analytischen Funktionen durch folgende Definitionsrelationen

$$\sigma_1(x)u'_x = \tau_1(y)v'_y \quad , \quad \sigma_2(x)u'_y = -\tau_2(x)v'_x \quad , \qquad /\ \Sigma\ /$$

$$u'_x = \frac{1}{p}\, v'_y \quad , \quad u'_y = -\frac{1}{p}\, v'_x \qquad /\ p\ /$$

$$pu'_x + qu'_y - v'_y = 0 \quad , \quad -qu'_x + pu'_y + v'_x = 0 \qquad /p,q/$$

$$u'_x - v'_y = au + bv + f \quad , \quad u'_y + v'_x = cu + dv + g \qquad /\ V\ /$$

eingeführt, wobei p, q, a, b, c, d, f, g gegebene Funktionen von x, y sind die den bestimmten Bedingungen genügen. Alle diese Funktionen besitzen zahlreiche Eigenschaften, die den entsprechenden Eigenschaften bei den analytischen Funktionen analog sind.

Eine weitere Entwicklung in diesem Richtung führt uns zum Aufbau einer zeitgenössischen Theorie der elliptischen Systeme von Partialgleichungen. Diese Systeme haben einerseits eine grosse theoretische Bedeutung. Andererseits sind sie in vielen Gebieten der Mechanik, Physik und Technik anwendbar. Eine wichtige Rolle spielt hier die Theorie der Randwertaufgaben für die elliptischen Systeme. Auch die jugoslawischen Erforscher haben ihre Ergebnisse zu dieser Theorie gegeben /siehe S. Fempl [6], N. Ralević [7], M. Čanak [8] /.

II/ Auf der Menge der komplexen Funktionen $w(z,\bar{z}) = u(x,y)+iv(x,y)$ hat G. Kolossov /1909/, /siehe [9], [10], [11] / den Operator

$$Dw = u'_x - v'_y + i(v'_x + u'_y) = 2w'_{\bar{z}} \qquad (7)$$

eingeführt, und nützte denselben zur Integration verschiedener Sy-

steme der Differentialgleichungen die in der mathematischen Physik und in der Elastizitätstheorie erscheinen.

D. Pompeiu /1912/, /siehe [12] / suchte eine solche Formel die der CAUCHYschen Integralformel für die analytischen Funktionen analog ist, und kam zum Ausdruck

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(G_n)}\, \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_n} w(z)\, dz \qquad (8)$$

wobei $m(G_n)$ den Flächeninhalt des Gebietes G_n bezeichnet und die Schreibweise $n \to \infty$ die Tatsache ausdrückt, dass sich die Kurve Γ_n unter Abnahme ihrer Länge auf einen Punkt z zusammenzieht. Dieser Ausdruck wurde als <u>areoläre Ableitung</u> der nichtanalytischen Funktion $w(z)$ genannt. A. Bilimović/1953/, /siehe [13] /hat den Begriff der Abweichung einer nichtanalytischen Funktion $w(z,\bar{z}) = u(x,y)+iv(x,y)$ von Analytizität, als Vektor

$$\vec{B} = \operatorname{grad} u + \vec{k} \times \operatorname{grad} v = (u'_x - v'_y)\,\vec{e}_1 + (u'_y + v'_x)\,\vec{e}_2 \qquad (9)$$

$$/B = (u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x)\ /$$

eingeführt, wobei $\vec{k} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ Vektorprodukt der orthogonalen Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ ist.

Denn die areoläre Ableitung von Pompeiu dem Operator D proportional ist und $D \equiv B$, so ist klar, dass Kolossov der erste Erforscher war, der den Operator D eingeführt hat.

Weiterhin zeigte Kolossov dass sich die komplexen Differentialgleichungen der Form

$$F(\bar{z}, w, Dw, D^{(2)}w \ \ldots\ D^{(n)}w) = 0 \qquad (10)$$

auf eine ähnliche Art und Weise wie die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$F(x, y, y', y'' \ \ldots\ y^{(n)}) = 0 \qquad (11)$$

lösen können. Bei Ubergang von der gewöhnlichen Gleichung auf die komplexe Gleichung soll man anstatt x die Veränderliche $\bar{z}/2$ einsetzen, anstatt der gewöhnlichen Ableitung y' die areoläre Ableitung D nehmen und beliebige Konstante mit beliebiger analytischen Funktion vertauschen.

Jugoslawische Erforscher D. Mitrinović, S. Fempl, J. Kečkić, D. Dimitrovski, M. Čanak, B. Damjanović und N. Ralević haben auch ihre Ergebnisse zu dieser Theorie gegeben. Sie untersuchten verschiedene Klassen der nichtanalytischen Funktionen, die die allgemeinen Lösungen einiger komplexen Differentialgleichungen darstellen. Ausserdem haben D.Mitrinović und J.Kečkić eine kleine Geschichte der nichtanalytischen Funktionen geschrieben/siehe [14],[15] /.S.Fempl [16] und J. Kečkić [17] haben gezeigt, dass die allgemeine Lösung der komplexen Differentialgleichung

$$D^{(n)}w + a_1 D^{(n-1)}w + \dots + a_{n-1} Dw + a_n w = 0 \tag{12}$$

mit der analytischen Koeffizienten $a_k = a_k(z)$,/$k = 1 \dots n$/ die folgende Form

$$w = \sum_{k=1}^{n} c_k(z) \cdot e^{r_k \bar{z}/2} \tag{13}$$

besitzt, wobei $c_k(z)$,/$k = 1 \dots n$/ beliebige, analytische Funktionen sind und $r_k(z)$ die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \tag{14}$$

darstellen. V.Gabrinovič hat diese Funktionen als <u>metaanalytische Funktionen</u> genannt/siehe [18] /.

Im speziellen Fall /$a_k(z) = 0$, $\forall k = 1,2 \dots n$/ reduziert sich die Gleichung (12) auf die sgn. polyanalytische Gleichung

$$D^{(n)} w = 0 \quad . \tag{15}$$

In seiner Arbeit [19] /1931/ definierte N.Theodorescu die sgn. areolären Polynome als Lösung der Gleichung (15) und zeigte dass sie die Form

$$w(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \cdot c_k(z) \tag{16}$$

besitzen, wobei $c_k(z)$ beliebige analytische Funktionen sind.

Weitere Betrachtungen in dieser Richtung führen uns zum Aufbau einer Theorie der partiellen komplexen Differentialgleichungen/siehe z.B. [20] /.

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

L I T E R A T U R

[1] Beltrami E., "Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque", Ann.Mat.pura appl./1/2/1867/68/,329-366.

[2] Picard E., "Sur une généralisation des équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe", C.R.Acad.Sci.Paris 112/1891/, 1399-1403.

[3] Bers L., Gelbart A., "On a class of functions defined by partial differential equations", Trans.Amer.Math.Soc.56/1944/,67-93.

[4] Vekua I., "Obobščenie analitičeskie funkcii", Moskva 1959.

[5] Položij G., "Obobščenie teorii analitičeskih funkcii kompleksnogo peremennogo", Izdateljstvo Kievskogo un.1965.

[6] Fempl S., "Reguläre Lösungen eines Systems partieller Differentialgleichungen", Publ.Inst.Math.Beograd 4/18/,1964,115-120.

[7] Malević N., "PhD Thesis, Belgrade 1986.

[8] Čanak M., "Schwarz-sche Randwertaufgabe für eine Klasse der verallgemeinerten analytischen Funktionen", Matematički Vesnik, Beograd, 37,1985,s.63-70.

[9] Kolossov G., "Ob odnom priloženii teorii funkcii kompleksnogo per. k ploskoi zadače matematičeskoi teoriji uprugosti", Jurjev 1909.

[10] Kolossov G., "Uber einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie", Z.Math.Phys.62/1914/,384-409.

[11] Kolossov G., "O soprjažennih differencialjnih uravnenijah sa čas. pr.", Ann.Inst.electrot.Petrograd 11/1914/,179-199.

[12] Pompeiu D., "Sur une classe des fonctions d'une variable complexe", Rend.Circ.Mat.Palermo 33/1912/,108-113.

[13] Bilimović A., "Sur la mesure de deflexion d'une fonction non-analytique par rapport a une fonction analytique", C.R.Acad.Sci.Paris 237/1953/,694.

[14] Mitrinović D., Kečkić J., "From the history of nonanalytic functions", These Publications N.274-N.301/1969/,s.1-8.

[15] Mitrinović D., Kečkić J., "From the history of nonanalytic functions, II", These Publications N.302-N.319/1970/,s.33-37.

[16] Fempl S., "Areoläre Exponentialfunktion als Lösung einer Klasse Differentialgleichungen", Publ.Inst.Math.Beograd 8/22/1968,138-142.

[17] Kečkić J., "O jednoj klasi parcijalnih jednačina", Matematički Vesnik, Beograd, 6/21/1969,71-73.

[18] Gabrinovič V., "O kraevoi zadače tipa Karlemana dlja metaanalitičeskih funkcii", Dokl.AN BSSR,1977,t.XXI,N.2,112-115.

[19] Théodorescu N., "La dérivée aréolaire et ses applications physiques", Thesis, Paris 1931.

[20] Tutschke W., "Partielle komplexe Differentialgleichungen", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1977.

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

Anschrift: Prof.Dr.Miloš Čanak
11000 Beograd
Brzakova 4
Jugoslawien

"ARCHIMEDES'S COMPUTATION OF π, A CLARIFICATION"

by Peter L. Griffiths

Outline

Archimedes's "On the Measurement of the Circle" is divided into two sections, the circumscribed section purporting to compute the upper limit for π and the inscribed section purporting to compute the lower limit for π.

Most of the fractions in "On the Measurement of the Circle" are either cotangents or cosecants of the angles 30°, 15°, $7\frac{1}{2}^\circ$, $3\frac{3}{4}^\circ$ and $1^7/8^\circ$.

The denominators of the fractions in the circumscribed section are all 153, whereas the denominators of the fractions in the inscribed section are mostly 780.

In the circumscribed section the fraction for $\sqrt{3}$ is $\frac{265}{153} < \sqrt{3}$, whereas in the inscribed section the fraction is $\frac{1,351}{780} > \sqrt{3}$. T.L. Heath complains that Archimedes gives no explanation as to how he arrived at these fractions.

Archimedes uses only one formula for both sections namely the cotangent half angle formula which can be variously expressed as

$$\cot\frac{a}{2} + \operatorname{cosec}\frac{a}{2} = \cot\frac{a}{4} \quad \text{or}$$

$$\cot\frac{a}{2} + \sqrt{1 + \cot^2\frac{a}{2}} = \cot\frac{a}{4}$$

which is an iteration or recursion formula in that the cot $\frac{a}{4}$ result of one calculation can be used as the data of the next calculation. The proof of this formula makes use of a proof in Euclid's Elements book 6 proposition 3, namely that a line bisecting the angle of a triangle will cut the opposite side in the ratio that the other two sides bear to each other.

In theory only one instead of two applications of the cotangent half angle formula should give the upper and lower limits for π. The reason for the two separate operations was the inaccuracy of Archimedes's fractions particularly the fractions for $\sqrt{3}$. Archimedes did not work in a decimal system.

Application of the cotangent half angle formula gives $\frac{96 \times 153}{4673\frac{1}{2}}$ as $3^1/7$ as the upper limit in the circumscribed section. The lower limit for π in the circumscribed section would be $\frac{48 \times 153}{2339\frac{1}{4}}$ which is 3.1394678.

In the inscribed section Archimedes computes the lower limit of π as $\frac{96 \times 66}{2017\frac{1}{4}}$ as $3^{10}/71$. The upper limit for π in the inscribed section is computed as $\frac{96 \times 66}{2016^1/6}$ which is 3.142597, but this is below $3^1/7$ obtained as the upper limit in the circumscribed calculation, and so $3^1/7$ is regarded as the upper limit for both methods.

In the circumscribed section, Archimedes has $\frac{265}{153}$ for $\sqrt{3}$, and in the inscribed section he has

$\frac{1351}{780}$.

It seems that Archimedes obtained both these fractions for $\sqrt{3}$ from square root tables which were probably constructed either by himself or under his supervision.

Archimedes would multiply by 3 the items in the square column of his tables and then compare the product with other higher figures in the square column.

$153^2 = 23409$ which when multiplied by 3 is 70227.

$276^2 = 70225$.

This is a difference of 2 in 70225.

$780^2 = 608400$ which when multiplied by 3 is 1825200.

$1351^2 = 1825201$.

This is a difference of 1 in 1825200.

Archimedes at each stage in his calculations had to have a method of finding square roots. The method he seems to have employed was the use of tables showing the squares of integers from 1 to 3000.

References

Dijksterhuis, E.J.	1987	Archimedes (1st printed 1956 by E. Munksgaard) Princeton University Press
Heath, T.L.	1987	The Works of Archimedes CUP
	1921	A History of Greek Mathematics Vol 2, 1982 Dove Publications, New York
Ver Eecke, P.	1960	Les Oeuvres Complètes d'Archimède Vol 1 pages 127-134 Albert Blanchard

January 1989

Konstruktionen des verlorengegangenen Mittelpunktes von Euklid bis Hilbert

Michael Toepell, München

Das Konstruieren spielt in der Geometrie eine besondere Rolle. **Euklid** (um 300 v.Chr.) beginnt in seinen *Elementen* [8] nach Angabe der Voraussetzungen mit Konstruktionsaufgaben. Die ersten vier Bücher enthalten neben 77 Lehrsätzen immerhin 38 Konstruktionsaufgaben. **David Hilbert** beschließt 1899 seine *Grundlagen der Geometrie* [14] mit einem eigenen Kapitel über geometrische Konstruktionen.

Während **Euklid** mit Zirkel und Lineal konstruiert, bemühte man sich im Laufe der Zeit - wie das ja Mathematiker gern tun - die Hilfsmittel immer weiter einzuschränken. Man möchte nicht nur fragen, welche Einschränkungen hier von wem vorgenommen wurden, sondern auch: An welchem Problem ließe sich diese Entwicklung zusammenfassend darstellen?

Euklid beginnt seine Kreislehre [8; Buch III] mit der Aufgabe, den verlorengegangenen Mittelpunkt eines Kreises zu konstruieren. Gerade dieses überschaubare Problem hat immer wieder zur Vereinfachung der Hilfsmittel angeregt. An ihm soll die historische Entwicklung elementarer geometrischer Konstruktionsmethoden von **Euklid** bis hin zu den zirkel- und linealgeometrischen Lösungen des 19. und 20.Jahrhunderts verfolgt werden.

Eine heute in der Schulgeometrie übliche Vorgehensweise ist etwa die folgende:
Aufgabe: "Zeichne mit Hilfe einer Tasse einen Kreis. Konstruiere den Mittelpunkt dieses Kreises." [4; S.74/12]
Lösung: "Man konstruiert zu 2 Sehnen die Mittelsenkrechten. Ihr Schnittpunkt ist M." [5; S.14]

1. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal bei Euklid

Bei **Euklid** heißt es in der Übersetzung von **Clemens Thaer** [8; III,§1 (Aufg.1)]: "Zu einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu finden." Dabei versteht **Euklid** unter einem Kreis nicht nur die Kreislinie, sondern die gesamte Kreisfläche. Im ersten Buch hat **Euklid** die Grundlagen einer Theorie der geometrischen Konstruktionen zusammengestellt (wie etwa die Konstruktion einer Senkrechten oder eines Streckenmittelpunktes). Zwar gab es Konstruktionszeichnungen, wie sie etwa Architekten angefertigt haben, schon früher, etwa in den Kulturen Indiens, Mesopotamiens oder Ägyptens - Reste davon sind auch erhalten. Doch gibt es keine Hinweise darauf, daß vor den Griechen das Konstruieren zum Gegenstand einer Theorie gemacht wurde (**Gericke** in [11; S.127]).

Das noch heute in der Schulgeometrie vielfach gepflegte Bemühen, dabei möglichst nur Zirkel und Lineal (ohne Skala) zu verwenden, wird auf **Platon** (429 - 348 v.Chr.) zurückgeführt. **Platon** tadelte, einer Überlieferung zufolge,

die Benutzung weiterer Konstruktionshilfsmittel, wie sie etwa auch Gelenkmechanismen darstellen. Dadurch würde das Gute an der Geometrie zerstört, denn der Sinn der Geometrie bestehe gerade darin, zu zeigen, wie alle Figuren aus Geraden und Kreisen entstehen [11; S.89].

Zur Lösung der genannten Aufgabe gibt **Euklid** folgende *Konstruktion* an [8; III, § 1 (Aufgabe 1)]:
Man zeichne eine beliebige Sehne, errichte in ihrem Mittelpunkt die Senkrechte, die den Kreis in zwei Punkten schneidet und bestimme den Mittelpunkt dieser neuen Sehne.
Mit gutem Grund löst und begründet **Euklid** diese Aufgabe am Beginn seiner Kreislehre (Buch III). Sie wird in den Beweisen von Buch III und IV ungewöhnlich häufig angewendet. **E. Neuenschwander** hat in seinen Untersuchungen über den mathematischen Aufbau der ersten vier Bücher der *Elemente* die 23 entsprechenden Propositionen zusammengestellt [21; S.337]. Wir sehen hier, was für eine Rolle diese Aufgabe für die Kreisgeometrie spielt.

Euklid löst auch den Fall eines beliebigen Kreisbogens [8; III,§ 25 (Aufg.3)]: Man zeichne wieder eine beliebige Sehne, etwa AB, und errichtet in ihrem Mittelpunkt D die Senkrechte, die den Bogen in C schneidet. Der Winkel ACD wird in A an AC angetragen. Sein freier Schenkel schneidet sich mit der Geraden CD im Kreismittelpunkt E.

Aus verschiedenen Gr"unden wird angenommen [21; S.370], daß unter anderem diese Aufgabe zwar in **Euklids** *Elementen* überliefert wurde, jedoch nicht von **Euklid** selbst, sondern aus etwas späterer nacheuklidischer Zeit stammt.

2. Konstruktionen bei konstanter Zirkelöffnung im Mittelalter

Lösungen des Arabers Abu al-Wafa'

Neue, weitere Lösungen enthält das im 10.Jahrhundert verfaßte *Buch über das, was ein Handwerker an geometrischen Konstruktionen benötigt* des Arabers **Abu al-Wafa'** (940 - 997) [15].
Abu al-Wafa' gibt bei der Konstruktion des fehlenden Mittelpunktes neben der Lösung von **Euklid** noch zwei weitere an, die sich, wie der Autor hervorhebt, sogar mit konstanter Zirkelöffnung ausführen lassen. Dadurch fand **Abu al-Wafa's** Werk besonderes Interesse (s. **Kutta** in seiner *Geschichte der Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung* [16; S.74ff]). Für diese Lösungen müssen sich natürlich auch seine zwei *Grundkonstruktionen* (Errichten einer Senkrechten, Halbieren einer Strecke) mit konstanter Zirkelöffnung durchführen lassen:

(1) Um in A auf einer Geraden AB das Lot zu errichten, ([15; S.60 (I/7)]; [16; S.75/1.]), trägt man die gegebene Zirkelöffnung von A aus auf AB an und erhält

den Punkt C. Über AC errichtet man das gleichseitige Dreieck ACD und verlängert CD um sich selbst bis E. Dann ist AE das gesuchte Lot.
(2) Um eine Strecke AB in zwei gleiche Teile zu teilen ([15; S.62 (II/2)]; [24; (1986) S.640/1.a]), errichtet man in A und B die Lote, trägt darauf in entgegengesetzten Richtungen die Zirkelöffnung ab und erhält C und D. Die Strecke CD halbiert AB in E.

Um nun damit den fehlenden Kreismittelpunkt zu konstruieren, stützt sich **Abu al-Wafa'** auf den Satz des **Thales**:
Man beginnt wieder mit einer beliebigen Sehne AB und errichtet in einem ihrer Endpunkte, etwa in A, das Lot *(1)*. Es trifft den Kreis in C. Die Mitte von BC *(2)* ist der gesuchte Kreismittelpunkt [15; S.65(II/10)]; [24;(1986)S.641/7.a].
Abu al-Wafa's zweite Zusatzlösung setzt nur einen kleinen Bogen voraus:
Zu zwei beliebigen auf dem Bogen gelegenen Punkten A und B bestimmt man *(1,2)* den Mittelpunkt D des zwischen ihnen liegenden Bogenstücks. Man erhält den Punkt C als Schnittpunkt der in A und B errichteten Lote *(1)* auf AD und BD. Die Mitte *(2)* von DC ist der gesuchte Kreismittelpunkt ([15; S.65(II/11)]; [24; (1986) S.642/7.b].

Die weitverbreitete Lösung der Inkunabel "Geometria deutsch" (um 1484)

Unsere heutige Mittelpunktskonstruktion mit Hilfe der Mittelsenkrechten zweier Sehnen findet sich in der um 1484 anonym erschienenen Inkunabel *Geometria deutsch* [10], einem der ältesten geometrischen Drucke. Hierbei kommt man ebenfalls "mit unverrucktem zirckel"[10; S.2r] aus.
Auch **Albrecht Dürer** geht 1525 in seiner *Underweysung der messung* [7] so vor, wenn er die Aufgabe löst: "Es wirdet von notten seyn / das man wyß einem zirckeltrum seyn Centrum oder mittelpunckt zu finden."

Einige axiomatische Überlegungen

Das Konstruieren mit konstanter Zirkelöffnung entwickelte sich gegen Ende des 15.Jahrhunderts und in der ersten Hälfte des 16.Jahrhunderts zu einer besonderen Liebhaberei [12; S.8-11 (= § 7)]. 1547 glaubte **Ferrari** in Zusammenarbeit mit **Cardano** gezeigt zu haben, daß sich sowohl alle Aufgaben als auch die Lehrsätze **Euklids** mit dieser eingeschränkten Voraussetzung konstruieren bzw. beweisen lassen [16; S.80-86]. Heute wird der Däne **Georg Mohr** (1640 - 1697, bekannt durch die allein mit dem Zirkel konstruierbare Geometrie) als derjenige angesehen, der das Problem 1673 in seinem *Compendium Euclidis Curiosi* [19] tatsächlich allgemein löste.

Warum reduziert man die Konstruktionsvoraussetzungen? Neben dem praktischen Grund, etwa den Zirkel nicht verstellen zu müssen, wäre folgende allgemeinere Überlegung denkbar:
Euklid stellt in seinen axiomatisch aufgebauten *Elementen* neben seinen Definitionen und Größenaxiomen fünf Postulate auf. Er möchte natürlich keine unnöti-

gen Forderungen aufstellen. Die Postulate sollen voneinander unabhängig sein - ohne das man das so formuliert hätte (die Entwicklung der Frage nach der Unabhängigkeit wurde in [25] untersucht). Das Bemühen, das etwas umständlich anmutende fünfte Postulat (das sogenannte Parallelenpostulat) zu beweisen, führte im 19.Jahrhundert zum Aufbau der nichteuklidischen Geometrie und schließlich 1899 zu einem formal-deduktiven System, wie es **Hilbert** in seinen *Grundlagen der Geometrie* aufgestellt hat (zur Entstehung siehe [26]).
Wie Bourbaki bemerkt [6; S.27] "hatten die Nachfolger und Kommentatoren **Euklids** auch versucht, noch andere Postulate zu beweisen." Das Ziel, beim Beweis der Lehrsätze mit möglichst schwachen Voraussetzungen auszukommen, legt nahe, dies auch auf die Konstruktionsaufgaben auszudehnen.
Das dritte Postulat fordert [8; S.2],
"daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann."
Eine Einschränkung wäre nun, dies nur für einen konstanten Abstand zuzulassen, d.h. eine Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung aufzubauen, wie sie sich in ersten Ansätzen bei **Abu al-Wafa'** findet und bei Mohr ausgeführt wurde.

3. Allein mit dem Zirkel ausgeführte Konstruktionen

Lösungen von Mohr (1672) und Mascheroni (1797) - die Napoleonsaufgabe

Die beiden ersten Postulate **Euklids** beziehen sich auf das Konstruieren mit dem Lineal. Stellt man die Frage, inwiefern sie eingeschränkt werden können, so wird man ebenfalls auf eine neue Geometrie geführt - die Geometrie des Zirkels. In seiner 1672 erschienenen Schrift *Euclides danicus* [20; S.III] gelang es **Georg Mohr**, die Konstruktionen **Euklids** systematisch allein mit Hilfe des Zirkels auszuführen. Natürlich muß man sich dann damit zufrieden geben, gesuchte Geraden nur durch zwei Punkte festlegen zu können. Dadurch wird die Konstruktion des Schnittpunktes zweier Geraden oder einer Geraden mit einem Kreis etwas aufwendiger. **Mohrs** umfangreiche **Lösung** unseres Problems beruht auf der Konstruktion der vierten Proportionalen [20; S.16f].

Die Schrift von **Mohr** blieb bis zur Neuherausgabe 1928 durch **Hjelmslev** [20] so gut wie verschollen, so daß der Autor der 125 Jahre nach **Mohr** erschienenen *Geometria del Compasso* (1797) lange Zeit als der Urheber der allein auf Zirkelkonstruktionen beruhenden Geometrie galt: **Lorenzo Mascheroni** (1750-1800). Zu Beginn seines zehnten Buches [18; S.136-138] gibt er eine zielstrebige Lösung unseres Problems ohne Verwendung des Lineals an.

Mascheroni hat seine "im Jahre V der französischen Republik" (Pavia 1797) erschienene *Geometria del Compasso* dem Feldherrn **Bonaparte** (1769-1821), dem späteren Kaiser **Napoleon**, gewidmet. Etwas merkwürdige Umstände führten dazu, daß unser Mittelpunktsproblem schließlich als *Napoleonsaufgabe* im 20.Jahrhundert bekannt wurde [9; S.322][27; S.229f].

Zirkelgeometrische Konstruktionsvarianten

Eine weitere zirkelgeometrische Lösung, die auf der Inversion am Kreis beruht, gibt **August Adler** (1863-1923) 1890 in einem Aufsatz *Zur Theorie der Mascheronischen Constructionen* [3] an. **Adler**, der damals als Lehrer in Klagenfurt tätig war, publizierte ihn in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien (Zusammenfassung in seinem Buch *Theorie der geometrischen Konstruktionen* [1; S.117f]). Die Inversion transformiert alle nicht durch das Zentrum gehenden Geraden und Kreise stets in Kreise. Dies erlaubt, Probleme der *Linealgeometrie* (ein Ausdruck von **Johann Heinrich Lambert** (1728-1777) [17; S.370 und 412]), wie etwa den Schnitt zweier Geraden, auf solche der *Zirkelgeometrie* zu übertragen. Die elegante Lösung unseres Problems wird dem französischen Ingenieur **Descubes** (1885) zugeschrieben.

Den inneren Zusammenhang zwischen dieser Lösung und derjenigen von **Mascheroni** hat **Herbst** 1909 dargestellt [13; S.30]. **Herbst** gibt darüberhinaus mehrere weitere allein mit dem Zirkel konstruierbare Lösungen unseres Problems an [13; S.27f].

4. Linealgeometrische Konstruktionen

Mit festem Hilfskreis (Lambert 1774 und Steiner 1833)

Verzichtet man auf das dritte Postulat **Euklids**, so wird man auf die allein mit dem Lineal möglichen Konstruktionen geführt. **Lambert** stellte 1774 in seiner *Freyen Perspective* die Aufgabe, eine Geometrie aufzubauen (die erwähnte *Linealgeometrie*), "wenn man unter Ausschluss des Zirkels sich nur den Gebrauch des Lineals erlaubt."[17; S.370]
Er erkannte, daß dann nur ein Teil der Konstruktionsaufgaben **Euklids** lösbar sind. **Lambert** schlägt daher vor, zusätzlich lediglich einen festen Kreis mit seinem Mittelpunkt als gegeben vorauszusetzen. **Poncelet** (1822) [22] und - in besonders sorgfältiger Form - **Jakob Steiner** (1833) [23] haben diesen Gedanken weiter entwickelt und gezeigt, daß damit nun alle mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Aufgaben ebenfalls lösbar sind. Die Aufgabe, den Mittelpunkt eines Kreises unter diesen Voraussetzungen zu konstruieren, tritt hier zwar nicht explizit als Aufgabe auf, läßt sich aber dennoch unschwer lösen [27; S.236ff].

Mit Parallel- und Winkellineal (Adler 1890)

1890 veröffentlichte **Adler** ebenfalls in den Wiener Sitzungsberichten eine Arbeit *Über die zur Ausführung geometrischer Constructionsaufgaben zweiten Grades nothwendigen Hilfsmittel* [2]. Er zeigt darin, daß statt eines Zirkels jeweils ausreichend wären:

- das Parallellineal, d.h. das Lineal unter Berücksichtigung seiner Eignung zum Konstruieren paralleler Geraden konstanten Abstands oder
- ein rechter Winkel oder
- ein fester schiefer Winkel.

Adler gibt keine explizite Lösung unseres Problems an. Sie läßt sich aber leicht selbst finden; etwa
- bei gegebenem Parallellineal:
  a) falls der Parallelenabstand a kleiner als der Kreisdurchmesser d ist, ergibt sich, wenn man die Geraden in numerischer Reihenfolge zeichnet, zuletzt der Kreisdurchmesser d_1; analog wird d_2 konstruiert. Beide schneiden sich im gesuchten Kreismittelpunkt (Abb. 1).
  b) falls $a \geq d$, konstruiert man so lang Parallelen im halben Abstand ("Mittelparallelen"), bis eine von ihnen den Kreis zweimal schneidet. Weiter wie in a) (Abb. 2).

Abb. 1:

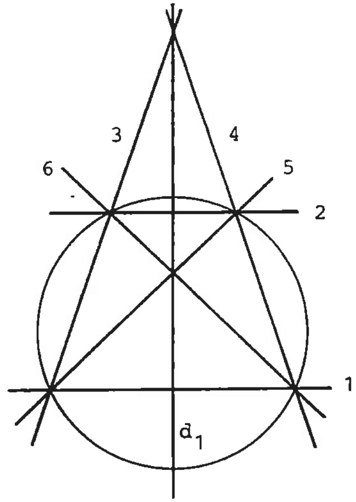
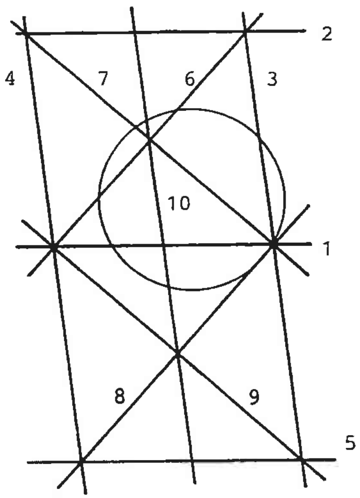
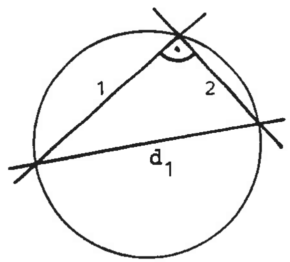


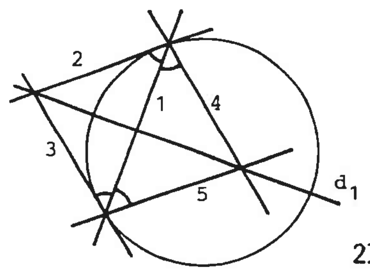
Abb. 2:



- bei gegebenem rechten Winkel: (analog wird anschließend d_2 konstruiert) Abb. 3:



- bei gegebenem spitzen Winkel: (die Geraden 2,3,4,5 bilden eine Raute, daher ist d_1 Kreisdurchmesser; analog anschließend d_2) Abb. 4:



Mit Streckenübertrager (Hilbert 1899)

Die genannten Arbeiten von **Adler** machten gegen Ende des 19.Jahrhunderts auf neue Konstruktionsmöglichkeiten aufmerksam. Auch **Hilbert** kannte sie (wie einer Notiz in Hilberts Exemplar seiner Vorlesungsausarbeitung *Elemente der Euklidischen Geometrie* vom März 1899 zu entnehmen ist). In seinen *Grundlagen der Geometrie* (1.Auflage Juni 1899) untersucht **Hilbert** im Abschlußkapitel (über dessen Entstehung siehe [26; Kap. 5.9 und 6.7]) linealgeometrische Konstruktionen. Statt neben dem Lineal einen gegebenen Hilfskreis mit Mittelpunkt vorauszusetzen, läßt **Hilbert** einen Streckenübertrager zu - ein dem Stechzirkel entsprechendes Instrument zur Übertragung von zunächst beliebigen Strecken.

Mit Hilfe von zwei Grundaufgaben (Konstruktion der Parallelen durch einen beliebigen Punkt und der Senkrechten zu einer gegebenen Geraden) läßt sich auch hiermit ein Sehnenrechteck und damit der verlorengegangene Mittelpunkt konstruieren. Aufgrund von Anregungen **Hilberts** haben Schüler von ihm die Theorie der geometrischen Konstruktionen weiterentwickelt [27; S.240]. Später kamen systematisierende modell- und beweistheoretische Gesichtspunkte hinzu.

Literatur

[1] Adler, August: Theorie der geometrischen Konstruktionen. Leipzig 1906.
[2] Adler, August: Über die zur Ausführung geometrischer Construktionsaufgaben zweiten Grades nothwendigen Hilfsmittel. Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wiss. Wien 99(1899)846-859.
[3] Adler, August: Zur Theorie der Mascheronischen Constructionen. Sitzungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wiss. Wien 99(1890)910-917.
[4] Barth, Friedrich u.a.: Anschauliche Geometrie 1. München 1985.
[5] Barth, Friedrich u.a.: Anschauliche Geometrie 1. Lösungen. München 1986.
[6] Bourbaki, Nicolas: Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen 1971.
[7] Dürer, Albrecht: Underweysung der messung / mit dem Zirckel und richtscheyt. Nueremberg 1525. Faksimile-Nachdruck Dietikon-Zürich 1966.
[8] Euklid: Die Elemente. Ed. J.L.Heiberg 1883. Deutsch von Clemens Thaer, Leipzig 1933-37. Nachdruck Darmstadt 1975.
[9] Fischer, Joachim: Napoleon und die Naturwissenschaften. Stuttgart 1988.
[10] Geometria deutsch. Anonym. Um 1484. Neuherausgabe siehe Hrsg. S. Günther.
[11] Gericke, Helmuth: Mathematik in Antike und Orient. Berlin 1984.
[12] Günther, Siegmund: Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Hist.-lit. Abteilung. 20(1875)1-14, 57-60, 113-120.
[13] Herbst, Carl: Die Napoleonsaufgabe. Ein Beitrag zur Geometrie des Zirkels. Unterrichtsbl. f. Math. u. Nat. 15(1909)27-30.
[14] Hilbert, David: Grundlagen der Geometrie. Leipzig ^{1}1899.Stuttgart ^{12}1977.
[15] Krasnova, S. A.: Abu al-Wafa': Das Buch über das, was ein Handwerker an

geometrischen Konstruktionen benötigt. Russische Übersetzung des arabischen Textes mit Kommentar von S. A. Krasnova. In: Fisiko-matematiceskie nauki v stranah vostoka. Sbornik statei i publikacii. Vyp. I(IV). [Physikalisch-mathematische Wissenschaften in den Ländern des Orients. Sammlung von Artikeln und Veröffentlichungen. Nr. I(IV).] S.56-130. Anmerkungen S.131-140. Moskau 1966.
[16] Kutta, W. M.: Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung. Nova Acta. Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Akademie der Naturforscher Halle 71(1897)71-101.
[17] Lambert, Johann Heinrich: Freye Perspective. Zürich 1774. In: J.H. Lambert: Schriften zur Perspektive. Hrsg. v. Max Steck. Berlin 1943.
[18] Mascheroni, Lorenzo: La Geometria del Compasso. Pavia 1797. Palermo 1901.
[19] Mohr, Georg: Compendium Euclidis curiosi. Amsterdam 1673.Copenhagen 1982.
[20] Mohr, Georg: Euclidis danicus. Amsterdam 1672. Mit einem Vorwort v. Johannes Hjelmslev u. einer dtsch. Übers. v. Julius Pál. Kopenhagen 1928.
[21] Neuenschwander, E.: Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids. Untersuchungen über den mathematischen Aufbau, die Zitierweise und die Entstehungsgeschichte. Arch. for Hist. of Exact Sciences 9(1972/73)325-380.
[22] Poncelet,J.V.: Traité des propriétés projectives des figures. Paris 1822.
[23] Steiner, Jakob: Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten und zur practischen Benutzung. Berlin 1833. In: Ges. Werke. Bd. 1 (von 2 Bdn.). Hrsg. v. K. Weierstraß. Berlin 1881. Reprint 1971. S.461-522.
[24] Suter, Heinrich: Das Buch der geometrischen Konstruktionen des Abu al-Wafa'. In: Beit. z. Gesch. d. Math. bei den Griechen und Arabern. Erlangen 1922 (=Abh. z. Gesch. d. Nat. u. d. Medizin. 4), S. 94-109. Neudruck Frankfurt a.Main 1986, S.635-650.
[25] Toepell, Michael: Zur historischen Entwicklung der Frage nach der Unabhängigkeit der Axiome geometrischer Axiomensysteme bis zu Hilbert. Staatsexamensarbeit (nicht veröff.). München 1974.
[26] Toepell, Michael: Über die Entstehung von David Hilberts "Grundlagen der Geometrie". Diss. Göttingen 1986.
[27] Toepell, Michael: Der verlorengegangene Mittelpunkt. Eine historische Betrachtung zur Kreisgeometrie. Didaktik d. Math. 17(1989)218-242.

Dr. Michael Toepell, Mathematisches Institut der Universität München, Theresienstraße 39, D-8000 München 2

"Mathematik à la Philosophie - Philosophie à la Mathematik: ein historischer Überblick"

Knut Radbruch (Kaiserslautern)

Zwischen Mathematik und Philosophie bestehen seit der klassischen Antike vielfältige Interdependenzen. Oft hat eine Analyse der Grundlagen in einer der beiden Disziplinen neue Entwicklungen in der anderen Disziplin hervorgerufen. Auch der umgekehrte Denkweg ist begangen worden: Entwicklung und Wandlung der einen Wissenschaft hat zu einer Neubesinnung der Begründung gerade in der anderen Wissenschaft herausgefordert. Mitunter haben ungelöste oder unlösbare Problemstellungen hier neue Produktivkraft dort freigelegt: zu anderen Zeiten haben sich beide Disziplinen in wechselseitiger Forderung und Förderung entfaltet. Die Konstellation in Mathematik bzw. Philosophie hat also vielfach die Konzeption von Philosophie bzw. Mathematik entscheidend mitgeprägt.

Dabei läßt sich im historischen Rückblick deutlich erkennen, daß nicht eine der beiden Disziplinen eine durchgängig dominante und führende Rolle eingenommen hat und die andere nur im Schlepptau oder gar am Gängelband mitgezogen worden ist. Beide Partner haben einander gegeben und voneinander genommen. Darüberhinaus ist nicht zu sehen, wie eine der beiden Wissenschaften ohne die ständige Herausforderung und Stützung durch die andere sich in der Weise hätte entwickeln können, wie das in den vergangenen zwei Jahrtausenden geschehen ist. Mathematik und Philosophie haben sich in einem stets fruchtbaren Spannungsverhältnis nicht nebeneinander sondern miteinander entfaltet - diese Interdependenz ist eine wichtige Komponente in der Konstitution und Wesensbestimmung für jede der beiden Disziplinen.

Es soll hier mit Blick auf Werk und Wirken einiger maßgebender Denker exemplarisch illustriert werden, wie Mathematik und Philosophie untrennbar miteinander verwoben und also bedingungslos aufeinander angewiesen sind.

1. Platon

Platons Denken enthält Einsichten und Aufschlüsse über die Interdependenz von Mathematik und Philosophie, welche durch den Reichtum der eingearbeiteten Bezüge und die innere Konsequenz der vielfältig, jedoch nicht

systematisch ausgearbeiteten Wechselbeziehungen als Maßstab für jede Begegnung von Philosophie und Mathematik angesehen werden müssen.

Gerade in jüngster Zeit haben Philosophen, Philologen und Mathematiker in einem konzertierten Forschungsverbund neue Erkenntnisse über Mathematik und Philosophie bei Platon gewinnen können.

a) Platon hat seine Ideenlehre offensichtlich mit Blick auf Mathematik konzipiert. So schreibt Patzig: *"Wir können annehmen, daß Platon am Beispiel der Geometrie etwas aufgegangen ist, das er in der Ideenlehre festhielt."*

b) In der von ihm gegründeten und geleiteten Akademie hat Platon intensiv mit Mathematikern zusammengearbeitet und dabei Impulse für die mathematische Forschung gegeben. Gaiser spricht von einer *"»platonischen Reform« der Mathematik, deren Ergebnisse sich in den »Elementen« Euklids niedergeschlagen haben."*

c) Platons Studien der Mathematik haben Inhalt und Form seiner Dialoge stark beeinflußt.

2. Nikolaus von Kues

Für den Cusaner ist Mathematik *"ein Rätselbild, die Werke Gottes zu erjagen."* Methodisches Hilfsmittel ist ihm dabei die konstruktive Approximation: man kann ihn ohne Übertreibung als Vorläufer oder Urheber des mathematischen Konstruktivismus bezeichnen. Da die von ihm vorgefundene Mathematik die gewünschte Hilfestellung auf dem Weg zu philosophischer und religiöser Wahrheit nicht optimal leistet, widmet er sich selbst der mathematischen Forschung und veröffentlicht insgesamt zwölf Abhandlungen zur Mathematik - natürlich gezielt mit genauem Blick auf seine Philosophie.

3. Leibniz

Bei Leibniz sind mathematische und philosophische Denkformen so miteinander verwoben und aufeinander bezogen, daß jede Frage nach Prioritäten den originellen und produktiven Forschungsansatz völlig verfehlt. Die ebenso überzeugende wie folgenreiche Neukonzeption des Begriffspaars Quantität - Qualität ist Leibniz nur dadurch möglich geworden, daß er mathematische und philosophische Argumentationen in einem komplexen Verbund mosaikartig zusammensetzte.

4. Kant

Die Literatur zur Beziehung von Mathematik und Philosophie bei Kant ist Legion! Darf überhaupt noch auf ein Körnchen neuer Einsicht gehofft werden? Wenig beachtet wurde bislang eine Passage aus Kants Abhandlung, mit der er sich 1770 um die ordentliche Professur für Logik und Metaphysik bewarb: *"Demnach ist die reine Mathematik, welche die Form aller unserer sinnlichen Erkenntnis erörtert, das Werkzeug zu einer jeden anschauenden und deutlichen Erkenntnis; und weil ihre Gegenstände nicht allein formale Gründe aller Anschauung, sondern selber ursprüngliche Anschauungen sind, bietet sie eine ganz wahre Erkenntnis und zugleich das Urbild höchster Evidenz in anderen."* Von hier aus bietet sich ein Dialog an mit der transzendentalen Deduktion und dem Schematismus, die beide im Brennpunkt gegenwärtigen philosophischen Interesses stehen.

5. Hegel

Die Bedeutung der Mathematik für die Philosophie des Idealismus hat erst in neuerer Zeit das Forschungsinteresse der Philosophen gefunden. Überzeugende Ergebnisse liegen bislang nur in bezug auf Hegel vor. Toth meint sogar: *"Die Philosophie der Mathematik seines* [Freges] *Jahrhunderts ist weder in den Grundlagen* [der Geometrie] *noch in den Grundgesetzen der Arithmetik Freges sondern in Hegels Ästhetik dargelegt."* Aber auch bei nüchterner Betrachtungsweise bleibt festzuhalten:

a) Es gibt enge Interdependenzen zwischen Hegels Dialektik und dem Begründungsdefizit der Analysis im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts.

b) Über Hegels »Wissenschaft der Logik« gilt die Aussage von Wolff: *"Eine genaue Analyse der zweiten Auflage des Ersten Bandes zeigt sogar, daß sie eine direkte Auseinandersetzung mit Cauchys Theorie enthält."*

c) Es bestehen verblüffende Verwandtschaften zwischen philosophischen Argumenten Hegels und Denkformen der nonstandard-Mathematik.

6. Schopenhauer

Sowohl in sein Werk als auch in seine (wenigen) Vorlesungen hat Schopenhauer ausführliche Passagen über Mathematik eingearbeitet. Allerdings lesen sich seine diesbezüglichen Ausführungen wie "Prolegomena zu einer jeden künftigen Mathematik, die nicht als beweisende Wissenschaft wird auftreten müssen." Schopenhauer entwirft ein Bild von Mathematik, das in wesentlichen Punkten von der zu jener Zeit akzeptierten Mathematik differiert. Die Analyse dieser Differenz ist philosophisch relevant, denn sie gibt Interpretationshilfen und Einsichten sowohl in die Methode als auch in die kunstvolle Architektonik von Schopenhauers Philosophie. Darüberhinaus sind die etwas exzentrischen mathematischen Ansichten zumindest in didaktischer Hinsicht bis in die Gegenwart anregend.

7. Weyl

Die Bedeutung Hermann Weyls als einem der einfallsreichsten Mathematiker unseres Jahrhunderts ist unbestritten. Doch hat Weyl in vielfältiger Weise und mit starkem persönlichem Engagement auch über die Mathematik reflektiert wie sonst kaum einer seiner Kollegen. Kanitscheider meint: *"In verschiedenen Andeutungen Hermann Weyls, die Stützungen in der Existenzphilosophie, Fundamentalontologie und Transzendentalphilosophie erhalten, klingt durch, daß der Konstruktivismus auch eine metaphysische Wurzel besitzt."* Indem man Weyls Entwicklung und Wandlung in Mathematik und Philosophie parallel in den Blick nimmt, gewinnt man Aufschlüsse über Abhängigkeit und Unabhängigkeit der beiden Disziplinen - zunächst im Denken Hermann Weyls, dann jedoch auch intersubjektiv.

8. Heidegger

In neuerer Zeit rückt die Beziehung zwischen der Philosophie Heideggers und seiner Einschätzung der Wissenschaften wieder ins Zentrum der philosophischen Diskussion. Dabei muß sorgsam unterschieden werden zwischen dem jungen, noch stark von Husserl und Rickert geprägte Fundamentalontologen, dem Kant-Interpreten der zwanziger und dreißiger Jahre sowie der um Technik und Kehre bemühten Philosophie des späten Heideggers. In den verschiedenen Stadien seines philosophischen Denkens hat sich Heidegger immer wieder, jedoch mit sehr unterschiedlicher Akzentuierung, über Mathematik geäußert.

Literatur

Artmann, B.: Die Mathematik in der Akademie Platons. Über eine neue Rekonstruktion von D.H. Fowler; Mathematische Semesterberichte Bd. 35 (1988), S.162-182

Baer, R.: Hegel und die Mathematik; Verhandlungen des 2. Hegel-Kongresses vom 18.-21.10.1931 in Berlin [Veröffentlichungen des Internationalen Hegel-Bundes Bd.2]: Tübingen 1932, S.104-120

Beisswanger, P.: Die Anfechtbarkeit der klassischen Mathematik. Studien über Hermann Weyl; Dissertation Stuttgart 1965

Beisswanger, P.: Die Phasen in Hermann Weyls Beurteilung der Mathematik; Mathematisch-Physikalische Semesterberichte Bd.12 (1965), S.132-156

Breger, H.: Leibniz, Weyl und das Kontinuum; in: A. Heinekamp (Hrsg.): Beiträge zur Wirkungs- und Rezeptionsgeschichte von Leibniz [= studia leibnitiana supplementa, Bd. 26]; Stuttgart 1986, S.316-330

Breger, H.: Möglichkeit, Konstruktion, Geschichte: Bemerkungen zur Erkenntnistheorie Hermann Weyls; in: Deppert-Hübner-Oberschelp-Weidemann (Hrsg.): Exakte Wissenschaften und ihre philosophische Grundlegung; Frankfurt 1988, S.325-341

Breidert, W.: Mathematik und symbolische Erkenntnis bei Nikolaus v. Kues; Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft Bd. 12(1977), S.116-126

Engfer, H.-J.: Philosophie als Analysis. Studien zur Entwicklung philosophischer Analysiskonzeptionen unter dem Einfluß mathematischer Methodenmodelle im 17. und frühen 18. Jahrhundert; Stuttgart-Bad Cannstadt 1982

Fey, Th.A.: Heidegger. The origin and development of symbolic logic; Kant-Studien Bd. 69 (1978), S.444-460

Fowler, D.H.: The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction; Oxford 1987

Gaiser, K.: Platons Zusammenschau der mathematischen Wissenschaften; Antike und Abendland Bd. 32 (1986), S.89-124

Gaiser, K.: Philodems Academica. Die Berichte über Platon und die Alte Akademie in zwei herkulanesischen Papyri; Stuttgart-Bad Cannstadt 1988

Granville, C.H.Jr.: Aspects of the Influence of Mathematics on Contemporary Philosophy; Philosophia Mathematica Bd.3 (1966), S.17-38

Grell, H.: Mathematischer Symbolismus und Unendlichkeitsdenken bei Nikolaus von Kues; Deutsche Akademie der Wissenschaften in Berlin, Vorträge und Schriften Bd. 97; Berlin 1965, S.32-42

Grüsser, O.-J.: Ein Erkenntnismodell des Nikolaus von Kues und der Grad der Bewährung einer wissenschaftlichen Hypothese; Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie Bd. 19 (1989), S.232-238

Henrich, D.: Identität und Objektivität. Eine Untersuchung über Kants transzendentale Deduktion; Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Klasse, Jahrgang 1976. 1. Abhandlung

Henrich, D.: Kant und Hegel; in: ders.: Selbstverhältnisse; Stuttgart 1982, S.173-208

Henrich, D.: Die Formationsbedingungen der Dialektik. Über die Untrennbarkeit der Methode Hegels von Hegels System; Revue internationale de philosophie Bd. 36 (1982), S.139-162

Hofmann, J.E.: Mutmaßungen über das früheste mathematische Wissen des Nikolaus von Kues; Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft Bd.5 (1965), S.98-136

Kanitscheider, B.: Hermann Weyl und die Philosophie der Naturwissenschaft; in: Deppert-Hübner-Oberschelp-Weidemann (Hrsg.): Exakte Wissenschaften und ihre philosophische Grundlegung; Frankfurt 1988, S.325-341

Kockelmans, J.J.: Heidegger and Science; Washington 1985

Krämer, H.J.: Die Ältere Akademie; in: Ueberwegs Grundriß. Die Philosophie der Antike, Bd.3; Basel - Stuttgart 1983

LaRocca, C.: Schematismus und Anwendung; Kant-Studien 80. Jahrgang (1988), S.129-154

Malter, R.: Schopenhauers Transzendentalismus; Schopenhauer-Jahrbuch Band 66 (1985), S.29-51

Martin, G.: Arithmetik und Kombinatorik bei Kant; Berlin 1972

Mittelstraß, J.: Die geometrischen Wurzeln der platonischen Ideenlehre; Gymnasium Bd. 92(1985), S.399-418

Moretto, A.: L'Influence de la "Mathematique de l'Infini" dans la formation de la Dialectique Hegelienne; in: Horstmann, R.-P. u. Petry, M.J. (Hrsg.): Hegels Philosophie der Natur; Stuttgart - Bad Cannstadt 1986, S.175-196

Nagel, F.: Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften; Münster 1984

Oberer, H. - Seel, G. (Hrsg.): Kant. Analysen - Probleme - Kritik; Würzburg 1988

Patzig, G.: Platons Ideenlehre, kritisch betrachtet; in: ders.: Tatsachen, Normen, Sätze; Stuttgart 1980, S.119-143

Poser, H.: Zum Verhältnis von Logik und Mathematik bei Leibniz; in: Müller - Schepers - Totok (Hrsg.): Leibniz. Questions de logique [= studia leibnitiana, Sonderheft 15]; Stuttgart 1988, S.197-207

Radbruch, K.: Anschauung und Beweis in der Mathematik. Skeptische Anmerkungen zum Optimisten Schopenhauer; Schopenhauer-Jahrbuch, Band 69 (1988), S.119-126

Radbruch, K.: Ein mathematischer Blick auf die Philosophie von Kant und Jaspers; Vortrag auf dem Weltkongreß für Philosophie in Brighton 1988 (unveröffentlicht)

Radbruch, K.: Quantität und Qualität als Grundkategorien einer Philosophie der Mathematik bei Leibniz, Hegel und in der Gegenwart; V. Internationaler Leibniz-Kongreß, Vorträge. Hannover, 14.-19. November 1988, S.777-784

Radbruch, K.: Ein non-standard Blick auf die Mathematik bei Hegel; erscheint im Hegel-Jahrbuch 1989

Radbruch, K.: Heideggers Philosophie der Mathematik als Vorbild für eine Philosophie der Künstlichen Intelligenz; in: J. Retti u. K. Leidlmair (Hrsg.): 5. Österreichische Artificial - Intelligence - Tagung, Proceedings [Informatik-Fachberichte 208]; Berlin 1989, S.325-333

Radbruch, K.: Mathematik in den Geisteswissenschaften; Göttingen 1989

Schwarz, H.: Versuch einer Philosophie der Mathematik verbunden mit einer Kritik der Aufstellungen Hegel's über den Zweck und die Natur der höheren Analysis; Halle 1853 (in Worten: achtzehnhundertdreiundfünfzig)

Seebohm, Th.M.: Wissenschaftsbegründung und Letztbegründung im Denkweg Martin Heideggers; in: W. Marx (Hrsg.): Zur Selbstbegründung der Philosophie seit Kant; Frankfurt 1987, S.157-177

Stuhlmann-Laeisz, R.: Kants Thesen über sein Kategoriensystem und ihre Beweise; Kant-Studien 78. Jahrgang 1987, S.5-24

Szigetti, J.: Hegel und G. Cantor; Hegel-Jahrbuch 1971, S.283-293

Toth, I.: Mathematische Philosophie und hegelsche Dialektik; in: Petry, M.J.: Hegel und die Naturwissenschaften; Stuttgart - Bad Cannstadt 1987, S. 89-182

Vlastos, G.: Elenchus and Mathematics: a Turning-Point in Plato's Philosophical Development; American Journal of Philology, Bd. 109 (1988), S.362-396

Volkmann-Schluck, K.H.: Nicolaus Cusanus. Die Philosophie im Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit; 3. Aufl. Frankfurt 1984

Wieland, W.: Platon und die Formen des Wissens; Göttingen 1982

Wolff, M.: Hegel und Cauchy. Eine Untersuchung zur Philosophie und Geschichte der Mathematik; in: Horstmann, R.-P. u. Petry, M.J.(Hrsg.): Hegels Philosophie der Natur; Stuttgart - Bad Cannstadt 1986, S.197-263

Rudolf Hildebrandt
D 7516 Karlsbad

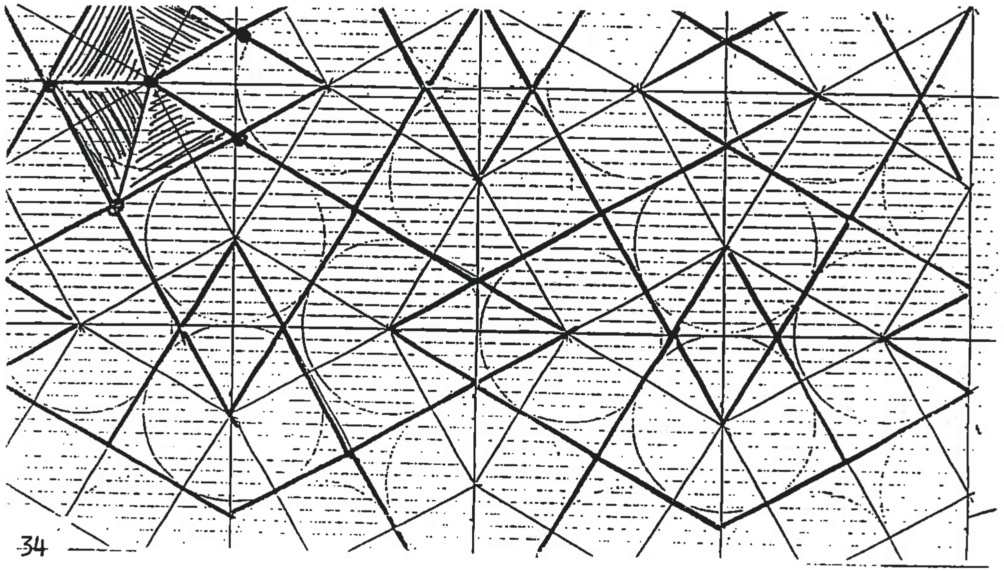
Das sympathische Zahlentripel 3, 4, 5

Bei den mathematischen Vergnügungen meines Lebens als Pensionär hat sich die Beschäftigung mit diskreten Objekten bewährt. Dazu gehören etwa die Folgen natürlicher Zahlen und Figuren, die sich zur Parkettierung eignen. Ich habe Spaß an interessanten konkreten Spielarten, betreibe also keine allgemeine zoologische Typenlehre, sondern untersuche mathematische Buntspechte oder Okapis. Weiter bin ich der ketzerischen Ansicht, daß wir im allgemeinen die Axiomatisierung und die Beweislast viel zu ernst nehmen. Von Schülern habe ich gelernt, daß mathematische Erfindung und Einsicht ("Ecce!" sagten die Alten) viel wichtiger sind. Schließlich ist es mir in einer Welt der geistigen Spaltung sehr wichtig, Kohärenzen und Zusammenklänge (Sinfonien) in vielen Gebieten des Denkens zu finden.

Das Zahlentripel 3, 4, 5 findet man zuerst bei pythagoräischen Dreiecken. Haben Sie übrigens schon einmal versucht, draußen im Gelände einen rechten Winkel nach Art der alten Seilspanner abzustecken? Zu schönen Parkettierungen eignet sich ein Dreieck, dessen Winkel sich wie 3 : 4 : 5 verhalten. Die regulären und halbregulären Körper- und Kugelteilungen haben es mit diesen drei Zahlen und ihren Produkten zu tun, ebenso die einfachsten Gebilde in zwei, drei und vier Dimensionen. Sicher fallen uns so berühmte Mathematiker wie Omar Khayyam und Gauss bei Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades ein. Wer als Lehrer mit diesen Zahlen Freundschaft schließt, kann leicht eine Fülle von geschickten Aufgaben mit guten rationalen Koordinaten stellen, so bei Geraden, Ebenen, Kreisen, Ellipsen und Kugeln.

Das alles hängt damit zusammen, daß wir es mit den drei kleinsten Primzahlen zu tun haben. Mühelos läßt sich das auf die Musiktheorie übertragen, die bei den Intervallen beim Takt, bei der Stimmenzahl und bei seriellen Techniken von diesen drei Zahlen beherrscht wird. Die Menge der symbolischen Beziehungen ist überwältigend. Vielleicht hat der verehrte Leser einmal die erste Seite von Bachs Matthäuspassion aufgeschlagen. Dort im Eingangschor findet er Triolen in Vierertakten, die zu je fünf zusammengehören. Die Deutung liegt nah, wenn man an die Drei als Symbol für das Göttliche, die Vier als Zeichen der Welt und die Fünf als Schlüssel für den Menschen denkt.

Es folgt etwas genauer die Darstellung einer Zahlenfolge, die 3, 4 und 5 enthält. Ich habe Freude daran gehabt und mache mich wegen meiner Leichtfertigkeit auf Schläge "ernsthafter Mathematiker" gefaßt, die ich dankend annehmen werde.



Besonders gefreut hat mich die Beschäftigung mit einer Folge von natürlichen Zahlen, in der das Zahlentripel 3, 4, 5 vorkommt:

1 1 1 2 2 3 4 5 7 9 12 16 21 ...

Viva Fibonacci! Das Bildungsgesetz heißt

$$x_{n+3} = x_{n+1} + x_n$$

Sehr bald scheint sich der Quotient von Nachbarzahlen $x_{n+1} : x_n$ einem Grenzwert k zu nähern, der in der Nähe von $4 : 3$ liegt. Setzt man versuchsweise die Exponentialfunktion $x_n = c \cdot k^n$ an, so erhält man die charakteristische Gleichung

$$\underline{k^3 = k + 1}$$

Diese hat die reelle Lösung

$$k_1 = u + v$$

und die konjugiert komplexen Lösungen

$$2 \cdot k_{2,3} = -(u + v) \pm i \sqrt{3} \cdot (u - v)$$

Dabei ist

$$6u = \sqrt[3]{12 \cdot (9 + \sqrt{69})}$$

$$6v = \sqrt[3]{12 \cdot (9 - \sqrt{69})}$$

Es ist schon hübsch, daß die Zahlen 3, 4 und 5 auch hier wieder auftauchen. Noch vergnügter sieht man, daß nach der Idee von Brinet (1843) eine Linearkombination von drei Exponentialfunktionen exakt die Folge x_n liefert.

$$x_n = c \cdot k_1^n + (a + ib) \cdot k_2^n + (a - ib) \cdot k_3^n$$

Die Konstanten a, b und c erhält man natürlich durch die Startwerte $x_0 = 0 \quad x_1 = x_2 = 1$

$$-a\cdot 6\cdot(u^3-v^3) = (u^2-v^2)+(u-v)$$

$$b\cdot 6\cdot(u^3-v^3) = \sqrt{3}\cdot[(u^2+v^2)-(u+$$

$$c\cdot 3\cdot(u^3-v^3) = (u^2-v^2)+(u-$$

Es ist doch einfach erstaunlich, wie freundlich die imaginären Bestandteile sich gegenseitig aufheben und wie, wegen $a^2 + b^2 < 1$, die beiden Korrekturglieder immer kleiner werden. Zum Schluß noch eine kleine Nebenbemerkung. Man beweist leicht, daß bei Exponentialfunktionen mit einer natürlichen Zahl als Basis die Neunerreste sich periodisch wiederholen:

2	4	8	16	32	64	128	256
2	4	8	7	5	1	2	4

Auch bei 3, 4, 5-Folge sind die Neunerreste periodisch. Die Periodenlänge ist 39. Mit dieser kabbalistischen Bemerkung schließe ich diesen Bericht über die mathematischen Vergnügungen eines Pensionärs.

R. Hildebrandt.

NEUENSCHWANDER, Erwin (Zürich, CH)

DER AUFSCHWUNG DER ITALIENISCHEN MATHEMATIK ZUR ZEIT DER POLITISCHEN EINIGUNG ITALIENS UND SEINE AUSWIRKUNGEN AUF DEUTSCHLAND

In den meisten Darstellungen zur Geschichte der Mathematik und der Wissenschaften in Italien wird behauptet, dass die Wissenschaften im 18. und in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts in Italien darniederlagen und sich erst mit der politischen Einigung Italiens wieder entwickelten. Dementsprechend soll auch in der Mathematik in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts ein kräftiger Aufschwung eingesetzt haben, der nach einer kurzen Phase der Absorption der vorangegangenen Entdeckungen der Franzosen und Deutschen der italienischen Mathematik innert weniger Jahrzehnte wiederum einen der ersten Plätze unter den führenden mathematischen Schulen der Welt sicherte (Peano, Volterra, Enriques, Levi-Civita usw.). Für den Mathematikhistoriker stellt sich damit die verlockende Aufgabe zu prüfen, ob die von italienischen Autoren so bereitwillig angenommene Parallelität zwischen dem wissenschaftlichen und politischen Aufschwung in Italien sich auch anhand von Quellen belegen lässt, durch welche Faktoren der Aufschwung bedingt war und ob dieser zu irgendeiner Resonanz ausserhalb von Italien führte.

Nach dem Frieden von Aachen (1748) zerfiel Italien für die nächsten hundert Jahre in eine Reihe von Kleinstaaten, was für die Verbreitung der wissenschaftlichen Forschung sehr hinderlich war. Der italienische Mathematiker und General Antonio Maria Lorgna (1735–1796) gründete deshalb im Jahre 1781 eine private italienische Gesellschaft der Wissenschaften, die alle zwei Jahre Abhandlungen herausgab und später den Namen "L'Accademia Nazionale Italiana delle Scienze, detta dei Quaranta" annahm. Auch in den nachfolgenden Jahren haben die italienischen Wissenschaftler ganz erheblich zur Verbreitung der Idee eines vereinigten Italiens beigetragen. Hervorzuheben sind vor allem die von 1839–1847 jährlich stattfindenden Kongresse der italienischen Wissenschaftler sowie die zahlreichen Mathematiker und Naturwissenschaftler, die sich in jenen Jahren aktiv für die Unabhängigkeit Italiens einsetzten, wie z.B. Mossotti, Matteucci, Felici, Betti, Brioschi, Battaglini, Cremona und Beltrami. Nach der Erlangung der Unabhängigkeit (1859) bekleideten diese Gelehrten häufig auch politische Aemter, was wiederum zur Schaffung von zahlreichen Lehrstühlen und neuen wissenschaftlichen Institutionen führte.

Die italienische Einigung und der anschliessende Aufschwung der Wissenschaften wurde im Ausland vor allem von den deutschen Liberalen mit Begeisterung aufgenommen und fand sowohl in politischen als auch wissenschaftlichen Journalen einen höchst signifikanten Niederschlag. So zeigt eine statistische Auswertung der Rezensionen in dem von Johann August Grunert (1797–1872) herausgegebenen "Archiv der Mathematik und Physik", dass während in den vor 1856 erschienenen Bänden 18–24 überhaupt keine Berichte aus Italien vorkommen, diese in den nachfolgenden Bänden 27-54 in keinem einzigen Band mehr fehlen und dort durchschnittlich etwa 20% aller Berichte ausmachen. Vor allem in den Jahren 1862–1866 ist eine überaus enthusiastische Berichterstattung festzustellen, wobei sich Wendungen wie die "erleuchtete Königliche italienische Regierung", eine "herzerhebende Erscheinung" usw. finden. Es ergibt sich damit eine erstaunliche Parallelität zwischen der Begeisterung für Italien im "Archiv" und in den von E. Portner untersuchten politisch-historischen Blättern "Preussische Jahrbücher" und "Grenzboten". Auch dort setzt die positivere Berichterstattung um das Jahr 1856 ein, findet alsdann von 1860-1866 einen Höhepunkt, indem 1860 die weltgeschichtlichen Verdienste der italienischen Einheitsbewegung mit "tiefer Beschämung" festgestellt werden und 1865 dem preussischen Ministerpräsidenten Bismarck die "männliche Kraft und Klugheit" Cavours zur Nachahmung empfohlen wird. Mit dem preussischen Sieg von Königgrätz (1866) und der unglücklichen Kriegsführung der Italiener in Oberitalien erleidet die italienische Beispielhaftigkeit einen ersten Dämpfer, um dann nach dem deutsch-französischen Krieg und der deutschen Einigung (1871) vollends zu verblassen.

Literatur: E. Neuenschwander, Der Aufschwung der italienischen Mathematik zur Zeit der politischen Einigung Italiens und seine Auswirkungen auf Deutschland, Symposia Mathematica, Bd. 27 (1986), 213–237; E. Portner, Die Einigung Italiens im Urteil liberaler deutscher Zeitgenossen, Bonner Historische Forschungen, Bd. 13, Bonn 1959.

MATHEMATISCHE LABYRINTHENTHEORIE

Čanak Miloš

Labyrinth ist in dem menschlichen Bewusstsein ein aus sich kreuzenden und verschlingenden Gängern und Gemächern bestehendes Gebäude. Es ist zuerst aus der griechischen Sage vom König Minos bekannt. Aus Rache für die Tötung seines Sohnes Androgeos überzog Minos Athen mit Krieg und zwang es, einen Tribut von Menschen zu schicken. In seinem Labyrinth lebte Minotaurus, ein Ungeheuer mit Menschenleib und Stierkopf, den Minos eingesperrt hatte und dem er die Jünglinge und Jungfrauen vorwarf, die ihm die Athener als Tribut liefern mussten. Endlich kam Theseus, der Sohn von Egeius, um Minotaurus zu töten. Ariadne, die Tochter des Königs Minos die Theseus libte, gab ihm ein Garnknäuel. Theseus besiegte endlich Minotaurus und mit Hilfe des Ariadnefadens fand den Weg und Ausgang von Labyrinth.

Aus der ägyptische Frühgeschichte ist auch ein Labyrinth bekannt, das von Amenemhat III /2200 v.Ch./als Pantheon für die ägyptischen Gottheiten erbaut wurde.

In der Natur können wir uns auch mit dem Labyrinth begegnen. In der Anatomie ist das innere Ohr, genauer das häutige Labyrinth entwicklungsgeschichtlich zunächst nur das Organ des Gleichgewichtssinnes. Erst von den Amphibien an, dient ein Teil, der sich zur sogenannten Schnecke einrollt, als Gehörorgan und zwar als der Teil in dem die Schwingungen der Luft durch Vermittlung des Trommelfells und der Kette der Gehörknöchelchen auf die das häutige Labyrinth erfüllende Flüssigkeit/Peri- und Endolymphe/übertragen werden und dann zu Nervenerregungen Anlass geben.

Eine Familie von Süsswasserfischen Chinas, Ostindiens, Sundainseln und Südafrikas, die durch ein besonderes Atmungsorgan, das sogenannte Labyrinth ausgezeichnet ist, wird als Labyrinthfische oder Labyrinthici genannt. Oberhalb der Riemenbogen befindet sich jederseits im Schädel eine grössere Ausstülpung mit einem blättrigen, aus seinen Knochenlamellen bestehenden Organ, das von Schleimhaut mit zahlreichen Blutgefässen überzogen ist und es den Fischen ermöglicht, neben der im Wasser gelösten Luft, auch ausserhalb des Wassers atmosphäre Luft aufzunehmen. Infolge dieser Fähigkeit sind die Fische in der Lage,einmal wie der Kletterfisch/Anabas scandens/das Wasser zu verlassen,auf dem Lande sich fortzubewegen und mit Hilfe der Dornen am Riemendeckel selbst Bäume zu erklettern oder bei eintretender Dürre sich in den Schlamm zu einem längeren Sommerschlaf ohne Gefahr des Erstickens einzuwühlen.

In der Epoche des unteren Karbons lebte eine Gruppe von molchförmigen Stegozephalen,die sogenannten Labyrinthodonten oder Labyrinthzähner bei denen die Dentinsubstanz der Zähne labyrinthisch gefaltet war.Ausserdem waren sie meist durch gewaltige Fangzähne ausgezeichnet.

Viele Menschen aus verschiedener Zeiten und Kulturepochen haben einfache und komplizierte Labyrinthe gezeichnet und gebaut.Aber wir können eine prinzipielle Frage der Existenz eines unlösbaren Labyrinthes stellen,in dem man nur zufällig den Weg und Ausgang finden kann.Die Antwort ist negativ; es existiert kein unlösbares Labyrinth. Jedes Labyrinth lässt sich mit Hilfe der Topologie und der Graphentheorie auf eine gleiche Art und Weise lösen,wenn wir die bestimmten Regeln anwenden/siehe [1] /.

Französischer Mathematiker Jordan/1838-1922/ hat bewiesen,dass jede einfache,geschlossene Kurve L ,die ganze Ebene auf das innere Gebiet D^+ und das äussere Gebiet D^- teilt. Aber es existieren komplizierte JORDANsche Kurven/Bild 1/ und manchmal ist schwer zu sagen,ob ein Punkt zu D^+ oder D^- gehört. Um Antwort auf diese Frage zu geben,muss man das entsprechende Labyrinth lösen und sehen ob eine stetige Trajektorie zwischen der Punkte A und B existiert. Aber das Auflösen von Labyrinthen ist manchmal kompliziert und dann hilft uns der zweite JORDANsche Satz:Wenn die Zahl der Schnittpunkte des Abschnittes AB mit der Kurve L gerade ist, so gehören die Punkte A und B zum gleichen Gebiet.Im Beispiel auf dem Bild 1 ist diese Bedingung erfüllt.

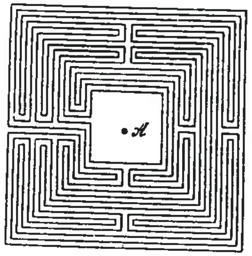


Bild 1

Ein Labyrinth mit Schlingen,Sackgassen,Kreuzungen und vielen verzweigten Wegen,Gängen,Koridoren und Schachten kann sehr kompliziert sein.Aber wir können immer die Kreuzungen als Punkte und Wege,Gänge

und Koridore als Linien die diese Punkte verbinden,darstellen. So erhalten wir ein geometrisches Netz oder ein Graph unseres Labyrinthes.

Der berühmte deutsche Mathematiker L.Euler/1707-1783/ befasste sich mit dem Problem über 7 Brücken von Königsberg /Bild 2/. Dabei formulierte er die folgenden Gesetze,die auch in der heutigen Graphentheorie eine wichtige Rolle spielen.

1. Die Zahl der ungeraden Knotenpunkte eines konnexen Graphes ist immer gerade.
2. Ein Graph mit nur geraden Knotenpunkten lässt sich mit einem Federstrich zeichnen.Dabei ist es möglich,aus dem beliebigen Punkte beginnen und in den gleichen Punkt zurückkommen.

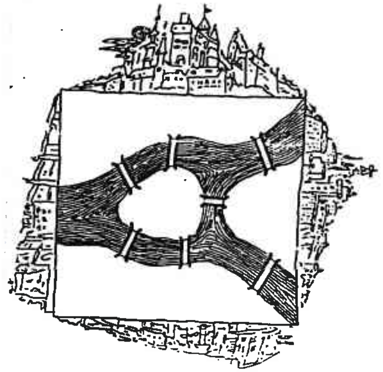


Bild 2

3. Ein Graph mit nur 2 ungeraden Knotenpunkten A und B lässt sich mit einem Federstrich zeichnen.Dabei muss man aus A /oder B/ beginnen und in B /oder A/ beenden.
4. Ein Graph mit mehr als 2 ungeraden Knotenpunkten lässt sich nicht mit einem Federstrich zeichnen.

Auf Grund des Gesetzes 4 sehen wir folgendes:Man kann den Graph auf dem Bild 2 mit einem Federstrich nicht zeichnen und das Problem über 7 Brücken von Königsberg ist unlösbar.

Euler hat auch einfach- und mehrfach zusammenhängende Graphen und Labyrinthe unterschieden.Einfach zusammenhängende Labyrinthe lassen sich mittels der Regel der linken Hand lösen/siehe das Bild 1/. Bei den mehrfach zusammenhängenden Labyrinthen ist es oft nicht möglich/siehe das Bild 3/.

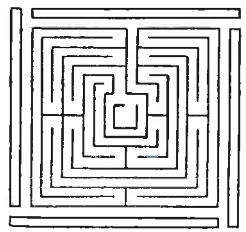


Bild 3

Auf Grund der EULERschen Gesetze kann man beweisen,dass jedes Labyrinth lösbar ist,wenn man die folgenden Regeln anwendet/siehe [2]/.

Regel 1: Man geht aus dem Ausgangspunkt in einer beliebigen Richtung bis zur neuen Kreuzung oder bis zu einer Sackgasse.Dann unterscheiden wir zwei Fälle.

I/ Wenn wir in eine Sackgasse einfallen,gehen wir zurück und markieren dabei diesen Weg mit zwei Strichen/mit einem bei Eingang und mit anderem bei Ausgang; siehe das Bild 4 /.

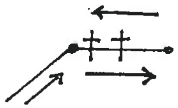


Bild 4

II/ Wenn wir bis zur neuen Kreuzung kommen,so gehen wir mit einem neuen beliebigen Weg weiter und markieren dabei mit einem Strich das Ende des alten und mit zweitem Strich den Anfang des neuen Wegs/siehe das Bild 5/.

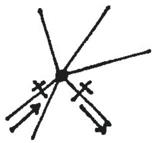


Bild 5

Immer wenden wir die erste Regel an,wenn wir eine neue Kreuzung durchgehen.Aber einmal müssen wir bis zu einer Kreuzung kommen, wo wir schon früher waren.Dann soll man die folgenden Regeln anwenden.

Regel 2: Wenn wir auf die bekannte Kreuzung mit einem neuen Weg kommen,so müssen wir uns zurückkehren und diesen Weg dabei mit zwei Strichen markieren/Ankunft und Abgang,siehe das Bild 6 /.

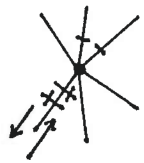


Bild 6

Regel 3: Wenn wir auf die bekannte Kreuzung mit einem bekannten Weg kommen,so ist dieser Weg schon mit einem Strich markiert.Dann markieren wir ihn noch mit einem Strich und gehen mit einem unbekannten Weg weiter,wenn ein solcher existiert/siehe das Bild 7/.

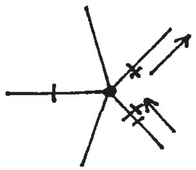


Bild 7

Wenn kein solcher Weg existiert,müssen wir jenen bekannten Weg auswählen,mit dem wir nur einmal gegangen sind/siehe das Bild 8/.Dabei müssen wir wie immer auf die Markierung achten.

Wenn wir diese Regeln strikt anwenden, können wir die allen Linien unseres Netzes zweimal übergehen und in den Anfangspunkt ankommen./Der Beweis gründet sich auch auf

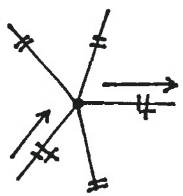


Bild 8

die Tatsache,dass sich die Figur,die aus unserem Netz mittels Verdoppelung seiner Linien entsteht,mit einem Federstrich beschreiben lässt/.

Wegen seiner einfachen Beurteilung und elementares Beweises ist die mathematische Labyrinthentheorie sehr interesantes und dem heutigen Mensch aktuelles Thema.Es schickt uns eine ethische Ermutigung dass aus jeder Schwirigkeit und jeder Sackgasse ein Ausgang existiert.Wie im gewöhnlichen Leben kann die Irre kürzer oder länger dauern,aber das genaue Verfahren versichert uns die endliche Ausgang auf das Sonnenlicht des Tages.Andererseits ist die Labyrinthentheorie in verschiedenen Gebieten der Mathematik/Wahrscheinlichkeitstheorie,Informatik,Graphentheorie,Schachspiel und Schachtheorie,Topologie,Theorie der Verzweigungssysteme/siehe [3] / usw./ sehr anwendbar.

\- - - - - - - - - - - - - -

L I T E R A T U R

[1] Konforovič A.,"Matematika labirinta",Kiev,1987.

[2] Ignjatjev E.,"Labirinti",V carstve smekalki,Moskva,1984, s.111-124.

[3] Temnikov F.,"Metodi i modeli razvertivajuščih sistem",Moskva,1987.

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

Anschrift: Prof.Dr.Miloš Čanak
11000 Beograd
Brzakova 4
Jugoslawien

1

Deutsche Mathematik

Zwei Phasen einer Deutschen Mathematik lassen sich festhalten: die der völkischen Wissenschaft, oden auch der okkulten Auffassung dessen, was Wissenschaft sein soll und die Phase die durch verstärkte Kriegsvorbereitung und dessen Führung andere Aufgaben verlangte, die allgemein eine nationale Verpflichtung darstellten und dementsprechend materielle Leistungsfähigkeit ihrer Wissenschaft abverlangten.
Ich möchte mich auf die erste Phase beschränken und der Frage der Begründungsversuche einer Deutschen Mathematik nachgehen, ohne dabei die Auswirkungen: Mord, Vertreibung, Zwangsarbeit von Mathematikern in Konzentrationslagern, Besetzungspolitik an Universitäten zu vergessen.
Zu den Vorbedingungen einer Deutschen Mathematik gehören m.E.: die Vorstellung/Definition einer Deutschen Wissenschaft, der Grundlagenstreit, aber auch die Vertreibung nach 1933.
Deutsche Naturwissenschaft ist dadurch gekennzeichnet, daß innerwissenschaftliche Qualitätsnormen nach einer "völkischen Wissenschaft", wie sie Ph.Lenard und J.Stark für die Physik forderten und auch bei F.Klein anklangen, ausgerichtet werden sollten.
Reichsminister Bernhard Rust vermittelt das Bild des Menschen, wie er von der ns Philosophie begriffen wird. als eine eindeutige Beziehung zwischen Wissenschaft und Mensch, Wissenschaft und Volk und Wissenschaft und Weltanschauung. Ernst Krieck verwehrt sich gegen eine rationale Begründung einer ns Wissenschaft und folgerichtig gerät die Wertfreiheit der bestehenden Wissenschaftstratition zu einem der Hauptkritikpunkte. Die Wissenschaft sei gebunden an die Weltanschauung als dem letzten Geltungsfundament. Diese "Gebundenheit aller Wissenschaft" stellt unweigerlich die Frage nach dem Subjekt, dem einzelnen Forscher. Die ns Position ist dadurch gekennzeichnet, daß sie die Freiheit und Unabhängigkeit des einzelnen Forschers bestreitet. Auf dem Hintergrund der verstärkten Bemühungen der Naturwissenschaft und Philsophie zu Beginn des 20. Jh., das Verhältnis zwischen Wissenschaft und anderen Lebensbereichen zu bestimmen, bzw sie zu verbinden, bemühte sich auch des Ns eine 'eigene' Ganzheitsvorstellung zu entwickeln. 'Die Bindung des Menschen an das Ganze seiner Wirklichkeit' sei durch die 'Gemeinschaft des Blutes und der Geschichte' gegeben, die aber nicht zufällig, sondern schicksalhaft begriffen wird. Die "10 Grundsätze für eine ganzheitlichen Wissenschaft" von E.Krieck, die auch explizit Gültigkeit für die "Mathematik und die von ihr durchgeformten mechanisierten Wissenschaften" haben, stellen den einzigen systematischen Forderungskatalog einer 'ns Wissenschaftstheorie' dar. Es wird auch darin die zirkelhafte Vorstellung deutlich, die letztendlich auf die Leerformel hinausläuft:
- der Wissenschafter kommt aus dem Volksganzen
- er arbeitet im Rahmen einer völkischen Wissenschaft,
- die selbst wieder in das Volksganze zurückführen müsse.

Im Gegensatz zur Lenard/Stark'schen Physik lieferte die Deutsche Mathematik keine wie immer geartete positive Handlungsanweisung. Vielmehr ist sie durch ein Wirrwarr von Ansätzen und Ideen gekennzeichnet, die der Entwicklung der Mathematik nichts entgegensetzen konnte. Allerdings versuchten ihre Vertreter durch die Konstruk-

2

tion eines Gegentypus des mathematischen Forschers indirket dessen Mathematik als gegentypisch und somit die "arteigene Mathematik" zu definieren.
Hiebei ist allerdings auch zu beachten, daß die Mathematik keinesfalls eine unangefochtene Stellung im Rahmen des "Neuen Wissenschaften" hatte. Und somit hatte die ns Mathematik zwei Ziele vor Augen, die sie mit Hilfe einer Deutschen Mathematik erreichen wollte. Einerseits die Gleichstellung mit den anderen ns Wissenschaften und andererseits für ein Lebensrecht der Mathematik an Schulen und Universitäten. Die ns Mathematiker versuchten das Gemeinsame von Mathematik und Nationalsozialismus hervorzuheben. G.Hamel formuliert dies 1933 so: "Die Grundhaltung beider ist die heroische [...]. Beide sind antimaterialistisch [...]. Beide wollen Ordnung, Disziplin, beide bekämpfen das Chaos, die Willkür."
Für mich existieren drei unterschiedliche Vorgangsweisen, die in eine Deutsche Mathematik führen, die mit drei Namen verbunden sind. L.Bieberbach, Friedrich Requard und Max Steck.

Der bekannteste Vertreter einer Deutschen Mathematik war der Berliner Ordinarius für Mathematik Ludwig Bieberbach.
Im WS 33/34 war er Leiter einer Arbeitsgemeinschaft über große deutsche Mathematiker, dessen Ergebnis ein Vortrag mit dem Titel: **"Persönlichkeitsstruktur und mathematisches Schaffen"**. Zwei umfangreichere, aber nicht wesentlich weiterführende Aufsätze folgten:
1934 – Stilarbeiten mathematischen Schaffens
1940 – Die völkische Verwurzelung der Wissenschaft
Bieberbach beruft sich auf Felix Klein und Henri Poincaré, die er als seine Vordenker begreift. Einen echten Vorkämpfer allerdings, an den er anknüpfen konnte, fand er in Theodor v. Vahlen (1869-1945). Vahlen hielt 1923 eine Rektoratsrede in Greifswald mit dem Titel **Wert und Wesen der Mathematik**, worin er die Mathematik als Spiegel der Rasse darstellt.
Mit Bieberbach gemeinsam gab Vahlen die hervorragend ausgestattete Zf DEUTSCHE MATHEMATIK 1936 – 1942 heraus. Mit dieser Zf, herausgegeben im Auftrag der Forschungsgemeinschaft, erreichten die Bestrebungen nach einer DM ihren institutionellen Höhepunkt. Sie ist gegliedert in die Bereiche Arbeit, Belehrung, Geschichte und Forschung. Die Beiträge unter "Forschung" unterschieden sich in keiner Weise von den Beiträgen in anderen mathematischen Zf des Auslandes und spiegeln den innerwissenschaftlichen Forschungsstand wider. Berühmt sind die von Teichmüller veröffentlichten Abhandlungen.
Bieberbach beruft sich einerseits auf die Integrationstypologie von Jaensch/Althoff, einem Konglomerat aus philosophischer Anthropologie und idealistische Wertphilosophie, und andererseits auf die offizielle Rassenseelenkunde.
Jaensch/Althoff unterscheiden J – Typen und S – Typen. Letztere seien die Gegentypen, die bekämpft werden müssen.
Die arteigenen J – Typen hätten etwas Gemeinsames. "[illegible] angebunden, in freier Willkür mit ihrem Denken [illegible], sondern daß es ein gegebenes gibt, das sie gestalten und [illegible]."
Dagegen laufen – nach Bieberbach – die S-Typen [illegible] den Zusammenhang mit einem größeren Ganzen zu [illegible]. Als besonders eindringlichen Beispiel führt er E.Landau an [illegible].

der "jede Rücksicht auf den natürlichen Sinn und den natürlichen Standort der Dinge außer Acht läßt."
Anhand der Einführung trigonometrischer Funktionen durch Potenzreihen versuchte Bieberbach die Vorgangswiese des Juden Landau, im Gegensatz zu der organischen Vorgangswiese eines deutschen Mathematikers, der von der Anschauung ausgehe, zu zeigen.
Den Grundlagenstreit sah Bieberbach rassisch bedingt und ordnete dem S - Typus den Formalismus zu. So war Landau Vertreter des Formalismus, Mitglied der Göttinger Mathematikerschule, die nach der Vertreibung von Emmy Nöther nur durch den emeritierten David Hilbert repräsentiert wurde, der allerdings ab seiner Verdienste und als Nichtjude unangreifbar war.

Einen ähnlichen, wenn auch eigenständigen Ansatz lieferte der Kölner Lehrer Friedrich Requard. Er, der Physiklehrer am Friedrich-Wilhelmgymnasium und Ordinarius für Physik an der Tung-Chi Universität in Shangai zwischen 1930 und 1936 publizierte in für einen breiten Leserkreis zugänglichen Zeitschriften. Requard griff bei seiner Konstruktion auf die Erbcharakterkunde E.Pfahlers und den Volunatrismus des "geläuterten" Hugo Dinglers zurück.
Requard spricht von einer Wissenschaftsauffassung, in der die Voraussetzungslosigkeit und die Wertfreiheit - als Kennzeichen einer liberalen Wissenschaft - durch die Bedingtheit von Rasse, Volkstum und Geschichte ersetzt werden müssen. Da dies, wie Requard schreibt von großer Tragweite sei, bedürfe es Beweise zu finden und nicht bei bloßem Meinen stehen zu bleiben. Die Beweise ergeben sich für ihn einerseits aus dem Vergleich der Kulturen Chinas und Deutschlands mit besonderem Augenmerk auf Kausalität. Kausalität - für Mathematik unumgänglich - sei die besondere Eigenart der arisch-nordischen Rasse. Weiters konstruiert er mit Hilfe der Pfahler'schen Erbcharakterkunde einen Gegentypus mit weiter, wandernder Aufmerksamkeit und geringer Beharrungskraft, ein sowohl als auch Denker, der den Grundlagenstreit in der Mathematik provoziert hätte.
Requard ordnet in einem weiteren Beweisschritt seine zwei Typen-Typus I und Typus II oder Gegentypus den von Ostwald 1919 unterschiedenen Klassikern und Romantikern zu. Als ein Beispiel für das im Gegensatz zum absoluten Erkennen des Klassikers stehende relative Erkennen des Romatikers sieht er die Kopenhagener Deutung des Lichtes. Doch auch am Beispiel der Behandlung der reellen Zahlen, kann er seine Typenunterscheidung finden, wobei er auf die unterschiedlichen Positionen des Grundlagenstreites zurückgreift.
Er fordert eine von der Logik unabhängige völlig sichere Erkenntnis, die er in der Mathematik seines Typus I findet, der in erster Linie eine Realisierung reiner Ideen durch manuelles Machen und damit sein Ideal der strengen Wissenschaft entspreche; zudem nähert er sich damit der Position des Intuitionismus des Grundlagenstreites.

Mit der Forderung nach einer ganzheitlichen Auffassung der Kulturäußerungen eines Volkes findet der Münchner Doz.f.Mathematik Max Steck seinen Ansatz: gegen den wissenschaftlichen jüdischen Erkenntnisliberlismus. Durch seinen morphologisch-ontologischen Zugang sieht er den Grundlagenstreit rassisch bedingt und fordert Konsequenzen im wissenschaftsorganisatorischen Bereich.
Steck will eine erkenntnistheoretisch-methodische Wertung des

Mathematischen geben und nach den eigentlichen denkerischen Grundlagen der Mathematik suchen.
Im Gegensatz zur urbildlich-nordischen Denkweise der Griechen und der Denker der Deutschen Linie stehe die abstrakt nominalistische Denkweise der Mathematik, deren Anfänge bei Descartes zu finden wären. Er bezeichnet den Formalisten als reinen Solipsisten und als einen Jongleur mit Definitionen und führt als Beispiel den wissenschaftsfeindlichen jüdischen Erkenntnisliberalismus A.Einsteins an. Er bezeichnet schließlich den Formalismus als mathematischen Futurismus und Kubismus und als antartete Mathematik.
Neben den formalen Axiomen müsse ein Axiom der Gestalt gegeben werden, um zu einer MORPHOLOGIE DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN zu kommen.
In der DM findet sich eine Auseinandersetzung zwischen Steck und Bruno Baron von Freytag gen. Löringhoff, die ontologischen Grundlagen der Mathematik betreffend, in der sich Stecks schlampige Argumentation zeigt, die viele Zitate aus dem Zusammenhang reißt um sie für seine Weise verwenden zu können.
Steck's Auftreten gegen Hilbert veranlaßten schließlich Bieberbach selbst als Schriftleiter der DM, H.Scholz, Mitglied der Schule von Münster, aufzufordern, über den effektiven Sinn der Hilbert'schen Grundlagenforschung zu berichten. Scholz legt die Aufgaben der Grundlagenforschung der Mathematik und ihre Vorgangsweise dar. Er zeigt dabei Stecks Denkfehler auf, so die falsche Annahme eines Konkurrenzverhältnisses zwischen Mathematik und ihrer Grundlagenforschung und verweist auch auf seine stehenden inhaltsleeren Floskeln, so die von Steck verwendeten impliziten Defintionen.

Andere Mitstreiter einer DM wie F.Kubach, E.Tornier, E.A.Weiß, die Liste ließe sich lange fortsetzen, ohne Gewähr dafür zu bieten, alle Namen erfaßt zu haben, orientieren sich immer an Lenards Einleitung zur DEUTSCHEN PHYSIK, F.KLEIN, THEODOR VON VAHLEN und L.BIEBERBACH.

Spätestens hier stellt sich die Frage, ob es genügt, das Phänomen einer 'arischen Wissenschaft' festzustellen und dabei von antisemitisch vorgeprägten Kreisen der Mathematiker oder Physiker als Träger dieser Kombination zu sprechen, die zusätzlich noch revolutionäre Umbrüche in ihrer eigenen Wissenschaft oder fachliche Isolation nicht verkraftet haben und deshalb auf politisch-ideologischem Feld versuchten, ihren Standpunkt nach 1933 durchzusetzen.
Es drängt sich vielmehr die Frage auf, ob hinter der, in den Äußerungen von Nationalsozialisten, seien es Politiker oder Wissenschafter, erkennbaren Theoriefeindlichkeit nicht eine geistesgeschichtlich tiefreichendere Gegenreaktion steht.
Christian Thiel wies darauf hin, daß als philosophiegeschichtlich auffallend eine Beschäftigung mit Naturwissenschaft und der Naturwissenschaft mit Philosophie in den 30iger Jahren festzuhalten ist.
E.Krieck deutet 1934 die Zielrichtung an, wenn er meint: "Es hat sich ganz einfach eine Idee der Aufklärung, also eine zeitbedingte abendländische Idee, absolut gesetzt und zum Maß aller Völker und Zeiten erklärt - ein Teilstück des abendländischen Imperialismus, ein Herrschaftsanspruch".
Die Wissenschaftsideologie seit Kant habe dabei einen ganzen Begriffsapparat ausgebildet: "Die Objektivität der Wissenschaft,

5

die Frage der Unbedingtheit und Allgemeinheit, der Internationalität, der Neutralität und Abgelöstheit, der Voraussetzungslosigkeit und Wertfreiheit der Wissenschaft. Endlich auch das Fundament von alledem: die Lehre von der reinen Vernunft oder dem Reich des reinen Geistes......."

Wirklich irritierend wird diese Kritik dann, wenn man sie mit einer anderen, etwa der von Goethe formulierten vergleicht, die sich ebenfalls gegen Auswirkungen eines aufklärerisch-rationalen Wissenschaftsbegriff richtet und in Newton den Prototypen eines moderenen Naturwissenschafters kritisiert.

Will man nicht den verkürzten Schluß ziehen, der NS führe die etwa von Goethe formulierte Kritik an der objektiven Wissenschaft weiter oder gar zu Ende, unterscheide sich aber nicht grundsätzlich, so muß man weiter differenzieren.

Die Unterschiede werden feststellbar, sobald man danach fragt, was unter dem GANZEN zu verstehen sei.

Für Goethe bleibt immer der ungebundene Einzelne Ausgangspunkt wissenschaftlicher Erkenntnis, die zwar immer auf eine übersubjektive, allgemeine Wahrheit abzielt, die international ist, nach Öffentlichkeit suchen sollte und von anderen beurteilt und ausgewählt werden kann, aber:

> Der schwach Faden, der sich aus dem manchmal so breiten Gewebe des Wissens und der Wissenschaft durch alle Zeiten, selbst die dunkelsten und verworrensten, ununterbrochen fortzieht, wird durch Individuen durchgeführt. Diese werden in einem Jahrhundert wie in dem anderen von der besten Art geboren und verhalten sich immer auf diesselbe Weise gegen jedes Jahrhundert, in welchem sie vorkommen. Sie stehen nämlich mit der Menge im Gegensatz, ja im Widerstreit. Ausgebildete Zeiten haben darin nichts voraus vor den barbarischen, denn Tugenden sind zu jeder Zeit selten, Mängel gemein.

Gerade diesen Gegensatz zur Menge versucht der NS aufzuheben, indem er völkische und nationale Gebundenheit des Wissenschafters behauptet. Folgerichtig zielt die ns Ganzheitsvorstellung auf das Volk : das Volk ist das Ganze. Der Wissenschafter ist auf Grund seiner völkischen Bedingtheit in dieses Ganz eingebunden, womit die Freiheit der Wissenschaft letzlich aufgehoben ist.

Bei Goethe ist die Einheit innerhalb der Wissenschaft, also auch zwischen Wissenschaft und anderen Lebensbereichen, stets das Individuum.

Hans Hofer, Wien

Detlef Laugwitz:

Infinitesimalien von Leibniz bis Levi-Cività
- mathematische Methode oder metaphysische Mode?

1. Seit Leibniz stand die Rolle der Infinitesimalien immer wieder unter dem Einfluß "metaphysischer" oder "antimetaphysischer" Strömungen. In der heutigen Terminologie ging es um die Seinsweise des Unendlichgroßen und des Unendlichkleinen in der Mathematik. Noch zwei Jahrhunderte nach Leibniz' erster Publikation, um 1890, gab es eine Kontroverse zwischen Georg Cantor und Giuseppe Veronese über "transfinite" Zahlen, und diese ist nur aus philosophischer Sicht verständlich. Veroneses Schüler Tullio Levi-Cività hat aber mit seinen Publikationen zur Verteidigung Veroneses auch einen wesentlichen Schritt zur sogenannten "Entontologisierung" der Mathematik getan. Die Wiener Dissertation von Hans Hahn [1907] schließt an Levi-Cività an: Die Theorie der angeordneten algebraischen Strukturen ist entstanden, aber mit der Analysis im Sinne von Leibniz hat das nichts mehr zu tun. Dokumente zur Auseinandersetzung von Schoenflies mit Levi-Cività werden hier erstmals vorgestellt werden.

2. Entgegen einer verbreiteten Meinung hat Leibniz sich deutlich über die Infinitesimalien geäußert. Es gibt für ihn drei Grade des Unendlichen. Der niederste ist: Das Unendliche ist größer als jede angebbare Größe; alles mathematisch Unendliche gehört zu diesem Grad. Zum mittleren Grad gehört das, was in seiner Gattung das Größte ist; der Raum ist das Größte aller Ausgedehnten. Der höchste Grad des Unendlichen kommt allein Gott zu.

Für das mathematisch Unendliche gibt es drei Erklärungsniveaus: Ein erstes "pour tout le monde" (Vergleich Sandkorn - Erdball), ein zweites, auf dem gezeigt ist, daß der Fehler bei Infinitesimalrechnungen stets kleiner ist als jede angebbare Größe, und ein drittes, philosophisches Niveau, auf dem die für Leibniz gültige Begründung angesiedelt ist. Die Infinitesimalien sind Fiktionen mit einem "fundamentum in re". Das zweite Niveau erlaubt es dem Mathematiker, metaphysische Streitereien zu vermeiden. (Die Epsilontik ist eine Durchführung dieses Vorschlags.)

Auf dem philosophischen Niveau erfolgt die Handlungsanweisung für den Umgang mit dem mathematisch Unendlichen: "Die Regeln des Endlichen behalten im Unendlichen Geltung ... und umgekehrt gelten die Regeln des Unendlichen für das Endliche, wie wenn es metaphysische Unendliche gäbe, obwohl man ihrer in Wirklichkeit nicht bedarf, und die Teilung der Materie niemals zu solchen unendlich kleinen Stücken gelangt." Dieser Brief an Varignon vom 2.2.1702 wurde bald und wiederholt zugänglich publiziert. Aber er scheint kaum beachtet worden zu sein. Anders sind spätere Kontroversen, die das philosophische Niveau von Leibniz kaum erreichen, nicht zu verstehen.

3. Euler verwendet das Infinitesimale und Infinite zunächst ganz selbstverständlich und, wie es auch gar nicht anders möglich ist, im Sinne des Leibnizschen Prinzips. Erst in der Differentialrechnung von 1755 findet sich ein (mißlungener) Rechtfertigungsversuch. Eulers Dilemma ist, daß er die aktuale Existenz von unendlich Kleinem in der physischen Welt ablehnt (aus philosophisch-theologischen Gründen), andererseits aber das Rechnen mit solchen Größen im mathematischen Kalkül für nützlich erklärt; diese sind dann "revera = 0". Den von Leibniz gewiesenen Ausweg aus dem Dilemma scheint Euler nicht bemerkt zu haben.

4. Extrem anti-metaphysisch ist die Position von Lagrange, der schon in der Berliner Preisfrage die Grenzwerte von Newton und d'Alembert für ebenso wenig begründet hält wie das unendlich Kleine, dessen Erfolge im Kalkül entweder streng zu rechtfertigen wären oder aber durch eine ebenso einfache, aber strenge Methode ersetzt werden sollten. Das gelang den Teilnehmern nicht, und Lagrange 1797 nur partiell.

Carnot publizierte gleichzeitig eine erweiterte Fassung seiner in Berlin eingereichten Schrift und stellte die Lösungsversuche zusammen, wobei er Berkeleys Vision von der Fehlerkompensation favorisierte. Von Leibniz scheint er nur mathematische Publikationen gekannt zu haben.

5. Cauchy erkennt Carnots Einfluß an. Er lehnt das Aktual-Unendliche ab, benutzt aber das Unendlich-Kleine in Definitionen und Beweisen. Nur habe es, da es unbestimmt sei, in Theoremen und Endergebnissen von Rechnungen nichts zu suchen. Den Stellenwert des Unendlichkleinen verschiebt er von den Differentialen weg zur Stetigkeit und zur Konvergenz in seinen Lehrbüchern ab 1821. In seinen Forschungen benutzt Cauchy auch solche divergente Reihen, denen er mit unendlich kleinen Korrekturfaktoren bestimmte, d.h. endliche Werte zuordnen kann. In seinen Lehrbüchern finden sich mehrere Anläufe zu einer Axiomatik des Infinitesimalen.

Cauchys Einfluß scheint sich auf die technischen Hilfsmittel beschränkt zu

haben (Konvergenztests, komplexe Analysis, ...), während seine Betonung der Rolle der Infinitesimalien - die ja eine späte Antwort auf die Berliner Preisfrage gab - nicht wirksam wurde.

Du Bois-Reymonds "Metaphysik" von 1884 ist eine weitschweifige Darstellung philosophischer Positionen, die bei Leibniz und auch bei Carnot schon klarer erkennbar gewesen waren.

6. Aber nun kamen zwei wesentlich neue Impulse, die transfiniten (Ordinal-) Zahlen von G. Cantor (1845-1918) und die Segmente in den Fondamenti di Geometria (1891) von G. Veronese (1857-1917), denen dieser auch "numeri transfiniti" zuordnete. Mit seinem Zeichen ∞_1 bildet Veronese u.a. Ausdrücke wie $\frac{1}{\infty_1}$, auch $\infty_1^{\infty_1}$, und Reihenentwicklungen mit Gliedern wie $\frac{m}{\infty_1^{\mu}}$, μ endlich oder unendlich groß, m reell.

Die Fondamenti sind auch heute noch kaum lesbar, und es ist wohl nicht zu entscheiden, ob sie grundsätzliche Fehler enthalten. Interpretiert man sie im Sinne des Leibnizschen Prinzips, so kommt man weiter als mit den Rettungsversuchen seitens Levi-Cività, welche spezielle Bildungen als Körper von Reihen $\sum_{k \geq 0} a_k \omega^{n_k}$, $n_k \nearrow \infty$, erfassen. Dabei sind die a_k, n_k selbst Elemente eines (schon vorher konstruierten) angeordneten Körpers A, und die n_k genügen der Bedingung, daß unter jeder Schranke aus A höchstens endlich viele n_k liegen, $0 < \omega$ ist unendlich klein gegen die positiven Elemente von A. Die Veroneseschen Zahlen sind danach ständiger Erweiterung fähig und bilden keine feste Menge. (Ähnliches könnte man auch bei Euler hineindeuten.)

7. Veronese kollidiert in mehrfacher Hinsicht mit Cantor: Er hat ganz andere transfinite Ordinalzahlen als Cantor (z.B. ist $\infty_1 - n < \infty_1$), er läßt die von Cantor abgelehnten Infinitesimalien zu, und die Punkte eines Raumes bei Veronese bilden keine Menge. Die Korrespondenz mit Cantor beendet letzterer (s. Purkert/Ilgauds, S. 202-203) unter dem 17.11.1890 abrupt: "Ich habe niemals geschrieben, daß ich andere *transfinite* Cardinal- und Ordinalzahlen für möglich hielte als die von mir erkannten ...."

Für Cantor waren seine Zahlen in einem (naiven) platonischen Sinne objektiv existent, für Veroneses Fondamenti genügte die Möglichkeit von symbolischen Konstruktionen und der Nachweis der Gültigkeit von Rechenregeln. Das wird allerdings verschleiert durch die Benennung "Hypothesen". Angreifbar waren auch, weil man dann nicht mehr multiplizieren kann, beiderseits ins Unendliche gehende Potenzreihen, wie sie Veronese zunächst zugelassen zu haben scheint, wenn auch nur in einem einzigen Beispiel.

Die Angriffe von Cantor, Peano (1892) und W. Killing (1897) sind schon deswegen mathematisch unhaltbar, weil sie die Widersprüchlichkeit des Infinitesimalen beweisen wollen. An ihnen wird aber die andere philosophische Grundposition deutlich.

8. Ernster zu nehmen sind Einwände von Schoenflies: Im Nachlass von Levi-Cività finden sich vier Briefe (7.4. bis 1.5.1898) von Schoenflies an Levi-Cività, die jener während der Abfassung seines im November 1898 abgeschlossenen Encyklopädie-Artikels I.1.A.5 über Mengenlehre geschrieben hat, und nach dem Erscheinen der beiden Noten von Levi-Cività [1898]. Bis hin zu seinem Aufsatz [1906] versucht Schoenflies immer wieder, Unstimmigkeiten bei Veronese aufzuzeigen. Zunächst geht es (im Briefwechsel) um die Ausführbarkeit der Division, später (noch 1906) um das Ziehen von Wurzeln.

Levi-Cività, auf dessen Antworten man zurückschließen kann, hat geduldig unter Hinweis auf seine Körper geantwortet; diese sind übrigens, wie man *heute* weiß, in der 1898 publizierten Version sogar reell-algebraisch abgeschlossen, und sie sind vollständig sowohl im Sinne von Cauchy als auch im Sinne von Veronese. Levi-Civitàs Körper in [1898] bestehen aus Reihen

$$(*) \qquad \sum_{k\geq o} a_k\, \omega^{\nu_k},$$

wo die a_k einem angeordneten Körper A, die ν_k einer angeordneten Gruppe M (z.B. der additiven Gruppe von A) angehören und $a_k \neq 0$ ist für die aufsteigende Folge der ν_k, von denen unter jeder Schranke aus M höchstens endlich viele liegen $(\nu_k \nearrow +\infty)$. Die Elemente $(*)$ bilden einen neuen angeordneten Körper $A^{(1)} \supseteq A$, mit dem man fortfahren kann. Dann bilde man die Vereinigung A' aller dieser Körper. Deutet man $\omega = \frac{1}{\infty_1}$ in Veroneses Terminologie, so enthält A' alles, was bei Veronese explizit vorkommt. [Ich habe die Ausdrucksweise "modernisiert", Levi-Cività vermeidet die formalen Potenzreihen, um sich nicht noch weitere Gegner zu schaffen, und spricht von Folgen von Paaren (a_k, ν_k).]

Die vorbildliche Konstruktion von A' hat Schoenflies offenbar nicht verstanden, obwohl Levi-Cività doch (anders als Veronese) einen mengentheoretischen Weg geht. Am 1.5.1898 schreibt er: [unendliche Summen] "kann man wissenschaftlich gar nicht anders einführen, denn als Grenzgebilde. Eine

andere Bedeutung wird meiner Kenntnis nach mit ihnen nie und nimmer verbunden. Jede andere Auffassung enthält meines Erachtens einen reinen Formalismus und definiert das, was Cantor 'papierne Größen' genannt hat." (Kurz darauf erschienen vom gleichen Göttingen aus Hilberts Grundlagen der Geometrie mit Beispielen für Potenzreihenkörper!) Es wird deutlich, daß Levi-Cività in der Betrachtung von algebraischen Strukturen weiter war als Schoenflies. Schon in [1892-93] hatte er übrigens erste Schritte für eine Infinitesimalrechnung über seinem Körper angedeutet, insbesondere transzendente Funktionen von $\mathbb{R}$ auf die nicht unendlich großen Elemente fortgesetzt.

9. Levi-Cività ist von uns schon in [1958] erwähnt worden. Seine Körper sind Unterkörper jedes Nichtstandard-Modells $^*\mathbb{R}$, und Veroneses Zahlen lassen sich heute aus den verschiedenen Versionen des Leibnizschen Prinzips erhalten. Peiffer-Reuter sieht Veronese sogar in der Prähistorie der Nichtstandard-Analysis, wozu kein Anlaß besteht. Doch gehören die Ansätze von Veronese und Levi-Cività zum dritten, dem "eigentlichen" Erklärungsniveau Leibnizens für das mathematisch Unendliche. Eine tragende Methode für die Analysis geben sie nicht.

Bibliographie

Der Brief von Leibniz an Varignon vom 2.2.1702 wurde im Heft vom 20.3.1702 des "Journal des Scavans" publiziert (pp. 183-186 Pariser Ausgabe; Nachdruck Amsterdam 1703, pp. 297-302); ferner in Leibniz, Opera; hrsg. von Dutens, Bd. 3 (unter Mitwirkung von Lagrange), pp. 370-372, Genf 1768. Diese Angaben verdanke ich H. Breger, Hannover. - Deutsche Übersetzung in O. Becker, Grundlagen der Mathematik.

D. LAUGWITZ [1975]: Tullio Levi-Cività's work on nonarchimedean structures; in: Atti dei convegni Lincei, Acc. naz. d. L. Roma, 297-312.

[1986]: Zahlen und Kontinuum. Mannheim.

[1987]: Infinitely small quantities in Cauchy's textbooks.

[1989]: Definite values of infinite sums. Arch. Hist. Ex. Sci. 39, 195-245.

T. LEVI-CIVITÀ [1892/93]: Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici.
[1898]: Sui numeri transfiniti 1, 2.
(Alles in Opere, Bd. 1).

R. PEIFFER-REUTER [1989]: L'infini relatif chez Veronese et Natorp. Un chapitre de la prehistoire de l'analyse non-standard. In: La mathématique non standard, Éd. du CNRS, Paris. (Hrsg.: H. Barreau, J. Harthong).

C. SCHMIEDEN, D. LAUGWITZ [1958]: Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. Math. Z. 69, 1-39.

G. VERONESE [1891]: Fondamenti di geometria. Padova.

K. Volkert: Zur Genesis der Poincaré-Vermutung

Im Jahre 1986 veröffentlichten Colin Rourke und Ian Stewart einen Artikel mit der Überschrift 'Poincaré's Perplexing Problem', in dessen Untertitel zu lesen war: 'More than 80 years ago, the great French mathematician Henri Poincaré asked an innocent-sounding question. Its solution has defeated generations of mathematicians since. But the problem has at least yielded its secrets.' Die letzte Behauptung sollte sich bald als falsch erweisen: In Rourkes und Rêgos Beweis wurden Lükken gefunden, die bis heute nicht geschlossen werden konnten. Der ursprünglich von Poincaré betrachtete Fall ('Ist eine geschlossenen orientierbare dreidimensionale einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit homöomorph zur 3-Sphäre?) bleibt weiterhin offen.

In meinem Vortrag möchte ich die Entstehungsgeschichte der Poincaré-Vermutung schildern. Dabei wird Gelegenheit sein, etwas auf die Frühgeschichte der algebraischen (oder kombinatorischen) Topologie eizugehen, insbesondere auf das Problem der Klassifikation der Flächen. Das Hauptgewicht möchte ich auf die Entfaltung des Poincaréschen Gedankenganges legen, der sehr explizit die Entwicklung der Vorstellungen dieses g großen Mathematikers zeigt. Schließlich werde ich noch kurz auf das weitere Schicksal der Poincaré-Vermutung eingehen.

Lit. C.Rourke/I.Stewart. Poincaré's Perplexing Problem (New Scientist, 4.September 1986)

H. Poincaré. Oeuvres. Tome 6 (Paris, 1953)

J. Dieudonné. A History of Algebraic and Differential Topology (Boston/Basel, 1989)

E. Scholz. Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffes von Riemann bis Poincaré (Boston/Basel/Stuttgart, 1980)

Libbrecht U.J., University of Leuven, Belgium

The social position of a mathematician in Mediaeval China

1. *The period of the Southern Sung (1127-1279) and Yüan (1277-1367) dynasties was a very troubled time because of the invasions of the Mongols; but from the scientific viewpoint it was a very productive period. The most striking characteristics were: a certain degree of rationalism - of which Chu Hsi's philosophy is a good example; a trend to systematization (for instance, in architecture, the famous compendium, the Ying-tsao fa-shih ; in military sciences, the Wu-ching tsung-yao...works that give a systematic synthesis of the knowledge of their time). It is also clear that arithmetics plaid an important part in the development of technology.*

2. *Which was the position of a mathematician in China?*
   a. *There was an old, almost classical handbook of arithmetics, the Chiu-chang suan-ching (Nine books on mathematics) (translated into German by Kurt Vogel, Neun Bücher Arithmetischer Technik, 1968), giving a synthesis of the mathematical knowledge of the Han period (ca 200 B.C. - ca 200 A.D.), although part of the contents is much older. In this work we find 246 problems solved in a proto-algebraic way. This work was surely on a high level, much higher than any Egyptian, Babylonian or Greek book on arithmatics. The negative consequence of this fact was that it obstructed all progress during a whole millenium, because this book became the official manual of mathematics, which had to be studied by all clercs-calculators. All the problems the official could be faced with, found their solution in this book; so for instance, financial problems concerning currency, credit systems, commercial affairs, taxes, and so on; construction of dykes, architecture, military sciences, etc. We know from the work of Ch'in Chiu-shao (1247) that he also studied the ancient 'Nine Books', and that he made variations on the old problems without any creative contribution. It's typical that the Yü-hai encyclopedia of 1267 mentions only this mathematical work.*
   b. *Simple arithmetics belonged to the subjects confucian literati had to study - this means it was included in the official curricula of students. Nevertheless, they considered it as a 'minor art', on the same level as etiquette, music, archery, horse-driving and calligraphy.*

c. Relation to astronomy and calendrical sciences.

i. Circa 600 A.D. a Bureau for Mathematics (<u>suan-kuan</u>) was established. The purpose was nothing but the education and training of minor officials, not in theoretical mathematics, but in practical problems of measuring and calculating. The number of students was always lower than in the other bureaus (there was a numerus clausus). On the other hand it would be interesting to make a comparison with official mathematical life in Europe at the same time.

ii. The calendar-mathematics (<u>li-suan</u>) were studied in the Astronomical Bureau. It was in this place that the great mathematician Ch'in Chiu-shao studied, but this was rather exceptional, because a mathematician had actually nothing to do with the Bureau of astronomy. Any way, this is the only reason why the well-known Chinese Remainder Problem (to which I devoted a monograph, and on which I lectured in Oberwolfach) came down to us.

d. The independent mathematician appears for the first time during the Sung period. Ch'in Chiu-shao was never an official mathematician, but an official in civil service; once he was recommended to the throne for his acquaintance with calendrical calculations, but not as a mathematician stricto sensu. Chu Shih-chieh was a scholar, traveling about as private professor. Yang Hui was a civil official and Li Yeh a retired scholar. This means that none of the great mathematicians belonged to the Bureau of Mathematics.

One of the consequences of their social situation was that they were not bound to official mathematics, which was apparentky deadening for all creativity; and that with those men mathematics could develop to a high level. On the other hand, as they were not professors in official service, they never could establish a school, and their activities were of short duration. During the Ming-period (1368-1644) nobody was familar with their works any more, and copies of their works were only made for the imperial library by men who didn't understand any word of the contents.

e. Confucianists hadn't high respect for mathematicians. In his preface, Ch'in Chiu-shao complains about this fact, but on the other hand he doesn't hid his disdain for officials calculators, who do not understand what they are doing, and calculate in a mechanical way. A mathematician was, in the first place, a technician. Artisans were in general illiterates, who needed scribes for drawing up their books on technology. We state also that, with mathematicians, the problems are conceived so that they can be applied immediately to practical problems; so we see that mathematicians calculate at the same time: the number of workmen necessary for a certain work, the duration of the work, the amount of nourishment, the salaries, and all kind of things which have rather to do with intendance than with mathematics. So, for instance, the <u>Ying-tsao fa-shih</u> gives a description of materials, constructions and measures, but no calculations...calculations for architecture were to be found in the mathematical handbooks.

I have the impression that the books of the great mathematicians were never used as manuals. Too many things are supposed as known (e.g. root extractions are never explained, they were obviously too elementary). Moreover, the problems are too complicated for beginners. Orientation to practical life results in all kinds of acrobatics invented for constructing complicated equations with the only purpose of resolving them. This means that many problems, which they try to present as practical are not practical at all. So for instance, Ch'in Chiu-shao gives an equation of the tenth degree, which he solves with the Horner-Ruffini method; he build up this equation starting from a practical problem, and seems to be very proud to have solved it, although it can easily be reduced to an equation of the 5th and even of the 3rd degree.

f. Many times one reproaches to Chinese mathematics their so-called empirical character. However, it is undoubtedly a mistake to make comparisons with our modern mathematics, and to forget that, even in our own mediaeval mathematics, there are almost no proofs, and that they are always operational in nature: the algoritm proves its validity by means of its results. On the other hand, it seems very obvious to me that many results could never have been found, when only trial-and-error procedures were used, without any logical reasoning. However, it is very inconvenient for the historian of mathematics that the logical analysis of the algorithms was never written down.

g. In the west we think many times that Chinese mathematics are completely reducible to operations on a kind of chess-board (the counting-board, which is totally different from the abacus), and to the notations used for these operations. But, one forgets that this counting-board cannot solve any problem, and that it cannot do anything but providing a kind of matrix notation. It is clear that some developments have been stimulated by this kind of automatic calculation, but the counting-board could never have become creative, no more than a modern ordinator.

h. Chinese mathematics are far remote from the ideal of Greek geometry: we do not find there either deductive systems or argumentations. Chinese mathematics is nothing but a part of algorithmical mediaeval mathematics; but we shall never forget that modern algebra has its roots in these algorithms. Chinese were able to solve some complex problems as:
- in the field of indeterminate equations, they knew already in 1247 the integral solution of what we still call in our handbooks on number theory: the Chinese remainder problem. In Europe this problem was solved for the first time by Euler and Gauss for mutual indivisible moduli; for moduli non mutual indivisble, the integral solution was found by Lebesgue in 1859 and by Stieltjes in 1890.
- Numerical equations of higher degree were very well known in China, and solved by a method identical to the Horner-Ruffini method of 1819.
- they invented a special notation for non-linear equations, mainly elaborated in the work of Chu Shih-chieh.
- Cubic interpolation, which correspons with the Newton-Sterling formulae of 1711/1730.
- The triangle of Pascal (the binominal coefficients), which are found for the first time in Europe in the work of Apianus (1527) and later with Pascal (1665).
- they had a remarkable knowledhe of series and progressions.

Obviously, although Chinese mathematics is proto-algebraic in nature, a lot of practical geometrical procedures for calculating areas and volumes were known, but they were never incorporated into a deductive system. The algorithmical nature of mathematics has for consequence, that they solved many analogous problems, but that the progress was very slow. In my opinion, this was the main reason why Chinese mathematics came to a dead point, to a total stagnation, whereas in Europe the way into logical deduction was discovered in the 16th century - and this is the basis for real mathemtics. One can say that in Chinese mathematics, there are many beautiful bricks, but no building. Another reason for stagnation is that, because of the official organiation of mathematics, there was not much space for creativity.

Edmund Landau - Werk und Leben
(1877-1938)

"Er war der Pflichtgetreueste von uns allen". Dies sagte David Hilbert, als man ihm die Nachricht vom Tode Edmund Landaus brachte. Dieser Hilbertsche Ausdruck charakterisiert treffend Landaus Tätigkeit und Wirken für unsere Wissenschaft und könnte auch als Motto über seinem Lebenswerk stehen.

Ich möchte nun in diesem Vortrag einen Überblick über Landaus Schaffen geben, wobei ich das, was allgemein bekannt ist, nur knapp behandle und das weniger Bekannte etwas ausführlicher darlege.

Landau hat 255 Aufsätze und 7 Bücher geschrieben, die in reprints heute noch erhältlich sind. 28 Aufsätze entstanden in Zusammenarbeit mit Co-Autoren (insgesamt 18), worunter insbesondere Harald Bohr, G.H. Hardy, J.E. Littlewood, J. Hadamard, C. Caratheodory, O. Toeplitz und A. Ostrowski zu nennen wären.

Landau´s wirklich große Leistung liegt in der Zahlentheorie, wo er, wie Ostrowski sich ausdrückte, sehr viel Unrat, der sich angesammelt hatte, aus dem Wege räumt. Damit hat er sich nicht unbedingt Freunde gemacht, ganz im Gegenteil; aber nun wußte man endlich, was wichtig, was bewiesen war und was nicht bewiesen war. Vor Landau gab es eine Unmenge von Arbeiten, in denen der Primzahlsatz bewiesen war, aber eben falsch bewiesen war und es waren zum Teil auch erlauchte Namen dabei. Diese Leute leisteten sich den Spaß, von hoher Warte aus tiefliegende Sätze auszusprechen (wie Ostrowski es formulierte).

Die Beweise von Hadamard und von de la Vallée-Poussin waren natürlich in Ordnung, aber doch sehr kompliziert. In einer Arbeit von Sylvester, in der er auf einen Aufsatz von Tschebischeff hinwies, der als erster eine kleinere Fassung des Primzahlsatzes beweisen konnte, schreibt Sylvester, daß jemand erst noch geboren werden muß, dem der Beweis des vollen Primzahlsatzes gelingt. In Landaus Handbuch über die Verteilung der Primzahlen wird das angeführt und dann schreibt er: "Als Sylvester diese Worte schrieb, war Jacques Hadamard schon geboren".

Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß hierdurch Landau indirekt eine wichtige Rolle in Hadamards beruflicher Karriere gespielt hat. Es ist wohl nicht allgemein bekannt, daß Hadamard mit dem Hauptmann Dreyfus verschwägert war. Seine Frau war eine geborene Dreyfus. Es war wohl so, daß er eine Zeit lang mit der Verbannung rechnete und in der Tat wurde Hadamard zuerst nach Bordeaux "verbannt". Aber in dem Augenblick, wo Hadamard ausgerechnet in einem deutschen Buch gefeiert wurde, da konnte man ihn unmöglich in Bordeaux lassen. Er kam dann schnell nach Paris und hat dort rasch alle Stufen erklommen (aus einem Gespräch mit Ostrowski).

Von größtem Erfolg für Landau sind seine Ergebnisse auf dem Gebiet der Funktionentheorie gewesen, wo er eine Verallgemeinerung und Vertiefung des berühmten Picard´schen Satzes beweisen konnte, mit dem er überall in der mathematischen Welt Anerkennung gefunden hat. Er hatte allerdings insofern damit Pech, als sich Schottky der Sache annahm und dann den Schottky´schen Satz gefunden hat, der Landaus Satz überdeckt.

Charakteristisch für Landaus Arbeitsweise war, daß er alle Beweise auch von anderen Mathematikern bis in kleinste Details neu durchdachte.

Dabei fand er natürlich viele Verbesserungen aber auch viele Fehler. Dadurch, daß Landau veröffentlichte und bewies, daß sie und die Sachen falsch waren und wie man es richtig beweist, hat er sich viele Feinde erworben. Die Benutzung seiner charakteristischen knappen Ausdrucksweise, die man heute auch als Landaustil bezeichnet, sollte vor allen Dingen auch sicherstellen, daß man keine Fehler macht, indem alles, was nicht zum Beweis benötigt, wegläßt.

Es sei hier bemerkt, daß natürlich auch Landau selbst nicht vor Fehlern gefeit war. Gerade in seiner 100. Arbeit, die aber noch nicht gedruckt war, fand Polya einen Fehler und hat dies mit besonderem Geist (wie Polya selbst Ostrowski sagte) Landau mitgeteilt und ihm die berichtigte Fassung gleich mitgeliefert.

Landau blieb dann nichts anderes übrig als in einer Korrektur hinzuweisen, daß da ein Fehler sei, der leicht zu korrigieren ist, worauf ihn Herr Polya gleichfalls hingewiesen habe. (Man findet das in Aufsätzen No 98 und 99 im Band 6 von Landaus Gesammelten Werken).

Zum Schluß sei bemerkt, daß einige Aufsätze von Landau, die man in seinen Oeuvre als nebensächlich einschätzen würde, den Anfang zur Entwicklung von Gebieten bildeten, deren Ende noch nicht abzusehen ist. Besonders sind hier die Aufsätze zu nennen:

Nr. 55: Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion.

Nr. 103: Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktionen.

Hierüber werde ich auch in meinem Vortrag sprechen.

Literatur:

E. Landau: Collected Works, in 10 Bänden herausgegeben von W. Schwarz, H. Wefelscheid u.a. Thales Verlag Essen, 1984 - 1990, vol. 1 bis vol. 9 sind bereits erschienen, Band 10 erscheint voraussichtlich 1990.

W. Kluge: Edmund Landau - sein Werk und sein Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik; Staatsexamensarbeit Duisburg 1983.

Gespräche mit A. Ostrowski am 21. und 22. September 1984.

Continuafractionitis intermittens

Evert M. Bruins

Plato mentions, *Politeia* 546, "the rational diagonal of five", Euclid states, *Elements*, X,2 a condition for incommensurable quantities, not very well formulated, and Theon of Smyrna gives an ARSIS, incorrectly called anatanairesis, constructing increasing numbers in a procedure, according to Dijksterhuis leading to convergents of the modern continued fraction, emphasising that M. Cantor is too positively when he writes on "the approximations with Theon of Smyrna given for $\sqrt{2}$". Nevertheless this led to periods of cultus of continued fractions as used by the ancient Greeks. We refute first a set of examples in which the Greek, just as any competent computer would not do, did not use a continued fraction.

1. Aristarchos gave: $7921 : 4050 > 88 : 45$, and $71755875 : 61735500 > 43 : 37$. The sixth convergent of the first ratio is, indeed, $88 : 45$. We have, however, $7921 : 4050 > 7920 : 4050 = 88 : 45$, whereas the elimination of common factors in the second ratio leads to $21261 : 18292$. Taking only "thousands" we find $21 : 18 = 7 : 6\ldots$ the first convergent, whereas the doubles $42522 : 36584$ show $43 : 37$, confirmed by $(494 \times 43 + 19) : (494 \times 37 + 14)$ to be greater too, and the second convergent.

2. Erathostenes gave for the inclination of the ecliptic, e, as states Ptolemy, $47\frac{2}{3} < e < 47\frac{3}{4}$. As $5'$ is one half of "the possibly to observe quantity" we have $47\frac{3}{4} = 47\frac{2}{3} + 1/12$. The ratio $47\frac{2}{3} : 360 = 143 : 1080$ is equal to $11 \times 13 : (13 \times 83 + 1) < 11 : 83$. The other bound leads to $191 : 1440$, which is $(17 \times 11 + 4) : (17 \times 83 + 29)$ which is greater than $11 : 83$ as $4 \times 83 = 332$ is greater than $29 \times 11 = 319$.

3. That Archimed's results $3\frac{1}{7}$ and $3\frac{10}{71}$ have nothing to do with convergents of a continued fraction with him is clear from the derivation in totally different

1

computational schemes, for the different bounds.

After Freudenthal suffered, about 1950, from the disease indicated, it arose again, in the 70-s with W. Knorr and D. Fowler. Having Heron's bound for π as 211875 : 67441, indicated as a lower bound, but being an upper one, Knorr thought it to be impossible to find the lower bound $3\frac{1}{8}$. The continued fraction begins with the indices $3; 7, 15, 1, 1, .$, and has the convergents 3, 22/7, 333/106, 355/113. Knorr obviously did not know of "interpolated fractions", here $22k+3$, $7k+1$, leading for $k=1$ to 25/8, for $k=10$ to 223/71, Archimed's lower bound, and for $k=15$ to the next convergent 333/106. Then follows the upper bound of Metius. Next combining 22/7 and 355/113 we find 377/120 and a contact with Ptolemy's table of chords. For chord $\frac{1}{2}^\circ = 0; 31.25$, which is 377/720 we find the perimeter of the 720-gon to be 377 if the diameter is 120. For this reason the approximation is called "the approximation by Ptolemy of π."

These direct methods for reducing fractions make clear that there is no question of convergents of a continued fractio as such.

If a Greek had to solve an equation $ax - by = 1$ in integers ... he would not bother about "theories" but take the multiples of the greatest coefficient, say a, compute its multiples $ak = M$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, divide $M - 1$ by b ..., and is sure to find before he reaches $k = b$ to have found an existing solution. The "length" of a year is, according to Ptolemy in sexagesimals 365.14.48 days, which corresponds to 1314888/3600 days. The "length" of a month, a lunation L, was stated as $29; 31.50.8.20$ days, which is 3827165/12960 days, or decimally 29.53059414 days. The continued fraction for the ratio *year: month* is $12; 2, 1, 2, 1, 1, 525, \ldots$ with the convergents 12, 25/2, 37/3, 99/8, 235/19, 334/27 ... The denominator gives possible adaptations as: "19 years = 6939,66667 days, $235L$ = 6939,689623 days". For the calendar years of $365\frac{1}{4}$ days were used. The analogous continued fraction is $12; 2, 1, 2, 2, 25$ giving with one exception, the same convergents, whereas the last

mentioned is 5974/483. Ptolemy quotes results of many a computation: $223L$ = 18.029 years, $669L$ = 54.088 years, $4267L = 345 - 0.011$ years, and even $5458L$ = 441.281 years, reducing the sexagesimal fraction to decimal. Quite an effort has been exerted! The convergents are much more precise: 19 years differ from 235 lunations by 0.000165 in excess for the lunations; $5974L$ = 483.000053 years. The numbers 223, 345, 5458 do not even correspond to some interpolated fraction. Ptolemy did certainly not use any continued fraction!!

Fowler, incorrectly, treated using $L = 29\frac{1}{2}$ days and a solar year to be 11 days longer than 12 lunations — the excess is 10,87 days — the solution of the equation $59p = 22q$. It is not necessary to compute continued fractions: we have $59 \times 3 = 177 = 22 \times 8 + 1$, which indicates the convergents 59/22, 8/3, 3 in reversed order. The result 19/7 is not a convergent but an interpolated fraction: $2 \times 8 + 3 = 19$; $2 \times 3 + 1 = 7$.

Though Plato has no approximation, no antanairesis or anthyphairesis ... D.H. Fowler set out to describe the "Mathematics of Plato's Academy". He does not diminish quantities by any "hairesis" but uses only increasing "mean values" — the only correct naming is in Greek language "mesotês" —, and from an upper and a lower bound of a quantity a/b, c/d he determines the numbers $(a+nc, b+nd)$ ... and forms increasing values by taking $n = 1, 2, 3, \ldots$ till the value becomes too great, and has then a new upper and lower bound. Thus starting with a pair of subsequent convergents ... he computes interpolated fractions!! Comparing for increasing values of n the results with the limit wished it was not necessary to proceed thus unskilled. Taking a good approximation of the limit L, one can compute n from a linear equation, asking only for the integral part of the solution: $n = -(Lb - a)/(Ld - c)$. For roots of a polynomial equation, one uses algebraic relations. From a, b and c, d we have for square and cubic roots the simple relations

$$n^2(c^2 - Nd^2) + 2n(ac - Nbd) + (a^2 - Nb^2).$$

and

$$n^3(c^3 - Nd^3) + 3n^2(ac^2 - Nbd^2) + 3n(a^2c - Nb^2d) + (a^3 - Nb^3).$$

Starting with some simple values, as $a = 1$, $b = 0$, $d = 1$, c the integral part of the square root one finds the equation and the positive root in integral part, then computes the next fraction and the next equation ...etc ...

For $x^2 = 19$ we have $c = 4$, and the first equation is $-3n^2 + 8n + 1$, $n = 2$; the next convergent is then $9/2$; then

$$\begin{array}{llllll} 5n^2 - 4n - 3, & n=1; & -2n^2+6n+5, & n=3; & 5n^2-6n-2, & n=1; \\ -3n^2+4n+5, & n=2; & n^2-8n+1, & n=8; & -3n^2+8n+1, & n=2. \end{array}$$

we arrived at the first equation, showing that the indices are repeating. Nowhere we operate other than with integral values. One should compare the procedure with the data from textbooks on algebra! Obviously for cubic roots it works in the same simple way.

The procedure used by Fowler converges always, because at each step a comparison with the required limit is made. His system, generally taken, shall not necessarily lead to a continued fraction! The fractions arise in the series $(a+nc), (b+nd)$ and $(a+(n-1)c), (b+(n-1)d)$ and these lead in the numerator of the difference to the quantity $D = ad - bc$, which is invariant at each step. If we start with arbitrarily chosen values a pair might arise, which is "divisible by a divisor of D", and only if all divisors of D are eliminated in this way, we can arrive at a "continued fraction". As an example take $x^2 = 3$, and start with $(6,1),(1,3)$. The results are then $(7,4),(1,2)$ – $(414,239),(407,235)$ – $(821,474)$, id. –$(4512,2605),(3691,2131)$ – $(8203,4736)$, id. –$(11894,6867)$, id. –$(15585,8998)$, id. –$(19276,11129)$, id. –$(22967,13260),(3691,2131)$... and here we have the divisor 17 for the first pair, leading to $(1351,780),(3691,2131)$–$(5042,2911),(3691,2131)$... and here we have two subsequent pairs of the convergents ... and the continued fraction arises.

If, for the same limit, one starts with $(6,1),(1,2)$, we have $D = 11$. If we arrive at $(a,b),(b,c)$ the second following pair is $(2a+3b, 2b+3c), (a+2b, b+2c)$. For the chosen values we shall remark that the middle values are the same, thus $a = 3c$. The linearly independent forms in b, c cannot be divisible by 11 if not the original b, c were divisible by 11. The fractions have the limit wished ... but are never a convergent of the continued fraction!!

It might be felt as unpleasant, that at each step one has again and again to compute a next convergent, before being able to have the next equation. A completely divisionsless procedure, working exclusively with integers is the following: from the defining equation we find the integral part of the root, we compute the equation having a root for this amount less, and reverse the order of the coefficients, which means: determining the equation for the reciprocal value, ...and one continues ...The method was indicated by Lagrange, but has for the solution of equations not the advantages of the well known iteration procedures, like Newton-Horner. We take the example of a cubic root. $x^3 - 2 = 0$. $x = 1$ is the positive integral value. Compute the equation for $x - 1$, and with the coefficients in reversed order it is $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$. The root gives 3. We just give now the coefficients of the next equations with their corresponding integral value of the root n.

$10,-6,-6,-1$	$n=1$	$253,-1983,-2409,-603$	$n=8$
$3,-12,-24,-10$	5	$17331,-14439,-4089,-253$	1
$55,-81,-33,-3$	1	$1450,-19026,-37554,-17331$	14
$62,30,-84,-55$	1	$293383,-282318,-41874,-1450$	1
$47,-162,-216,-62$	4	$32259,-273639,-597831,-293383$	10
$510,-744,-402,-47$	1	$1376593,-3627089,-694131,-32259$	2
$603,360,-786,-510$	1		

Having in this way already 13 indices we solve the last equation, according to the Horner-method and find $x = 2,803165743$, up to nine digits exact. We develop the continued fraction by the HP 34 c and find for the fractional part $0;1,4,12,2,3,2,1,3,4\ldots$, and thus finally the cubic root looked for has the indices:

$$1;3,1,5,1,1,8,1,14,1,10,2,1,4,12,2,3,2,1,3,4,\ldots$$

The ancient had for square and cubic roots iterative systems:

$x^2 = Dy^2$, iterate $x^2 + Dy^2$, $2xy$, and $a = x/y$ the square root;

$x^3 = Qy^3$, iterate $(x^3 + 2Qy^3)x$, $(2x^3 + Qy^3)y$. The error can be estimated by $2(\sqrt[3]{Q} - a)^3/3a^2$. For $Q = 2$ we have starting with $x = 1$, $y = 1$ immediately **5, 4**, which is the third convergent:

$x = 5$, $y = 4$ yields $(5^3 + 4^4)5$, $8(5^3 + 4^3)$ or **635, 504** which is the ninth convergent of the continued fraction.

$x = 635$, $y = 504$ gives then $(635^3 + 4 \times 504^3)635$, $1008(635^3 + 504^3)$, which yields **487771523185, 387144514512**, error $3,0 \times 10^{-20}$.

This is obtained without any computational "effort", combining the cubes of 635 and 504, and the continued finite fraction of this rational value is

$$\{1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, 2\}$$

and the correction needed is: changing the final 2 into $1, 3, 4 \ldots$ This verily shows the power of the iterative procedures for such estimations and make the theory of continued fractions "disappear".

Fowler considered also $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. It seems that he overlooked that this is the square root of $5 + 2\sqrt{6}$, and thus only an adjunction of $\sqrt{6}$ plays a role.

Easier than to calculate all interpolations Fowler used — only coming to three indices, working with numbers consisting of 8 digits — it is to shift the roots and to reverse the order of the coefficients, as shown above. Fowler used the correct defining equation: $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$, root in the integral value $n = 3$. We give the first four following equations, and the numbers n of the shift arising:

$$8x^4 - 48x^3 - 44x^2 - 12x - 1 \quad n = 6$$

$$1657x^4 - 1188x^3 - 820x^2 - 144x - 8 \quad n = 1$$

$$503x^4 - 1280x^3 - 5558x^2 - 5440x - 1657 \quad n = 5$$

$$13432x^4 - 94480x^3 - 50692x^2 - 8780x - 503 \quad n = 7.$$

Computing the root of the last equation by Horner's method up to nine decimals we found $7,545667321$, and developing the fractional part in a continued fraction we have $7, 1, 1, 4, 1, 1, 38, 43, \ldots$ and the full series determined is $3; 6, 1, 5, 7, 1, 1, 4, 1, 38, 43, \ldots$

The number asked for is of the form $A + B\sqrt{6}$, and it can be approximated by the scheme of the square root. We start with $x = 3$, $y = 1$: $9 + 5 + 2\sqrt{6}$, 6, or reduced $7 + \sqrt{6}$, 3, error $3,5 \times 10^{-3}$. Then follows:

$$(7 + \sqrt{6})^2 + (5 + 2\sqrt{6})9, 6(7 + \sqrt{6}),$$

and multiplying both numbers into $7 - \sqrt{6}$ and reducing, eliminating common factors, we arrive at the second approximation in the scheme

$$\mathbf{254 + 62\sqrt{6}, 129}, \quad \text{error } 2 \times 10^{-6}.$$

Next we have

$$(254 + 62\sqrt{6})^2 + (5 + 2\sqrt{6})129^2, 258(254 + 62\sqrt{6}),$$

and again multiplying into $127 - 31\sqrt{6}$ and eliminating common factors, amongst which a factor 43, we arrive at the third approximation in

$$\mathbf{224209 + 68197\sqrt{6}, 124356}. \quad \text{error } 1.6 \times 10^{-13}.$$

May these considerations serve as a pharmakon for those now suffering from continuafractionitis intermittens, and be a prophylactic for future epidemics.

UWThPh-1989-45

Historisches zum Weylschen Raumproblem

H. Urbantke
Institut für Theoretische Physik
Universität Wien

Zusammenfassung

Newtonsche und Einsteinsche Gravitationstheorie. Formulierungen des Weylschen Raumproblems. Cartans Beweis. Cartan, Weyl und die Darstellungstheorie halbeinfacher Liegruppen. Einige Epigonen. Abschlußbemerkungen. Literatur.

Eine persönliche Einleitung

Als Autor naturwissenschaftlicher Lehrbücher hat man nicht selten die Gelegenheit zu historischen Kommentaren. Meist schreibt man die relevante Information irgendwo ziemlich unkritisch ab. Umgekehrt verhalten sich vielfach Wissenschaftsgeschichtler und -philosophen zum „harten wissenschaftlichen Kern" eines Themas etwas unkritisch. Beides kann zu beachtlichen Pannen führen, wie ich aus Gründen der Schonung nicht näher belegen möchte. Gute Wissenschaftsgeschichtler zeichnen sich durch klares Verständnis des wissenschaftlichen Kerns *und* genaue Quellenkenntnis, verbunden mit historischem Spürsinn aus. Ich bin glücklich, einige von ihnen zu kennen.

Diesen Beitrag gestalte ich im Bewußtsein, selbst nicht zu diesem Kreis zu gehören und mir daher einige Narrenfreiheit und Unprofessionalität gestatten zu können. Ich hoffe, daß zwischen den Zeilen einiges zum Generalthema dieser Tagung steht. Immerhin dreht es sich ja um die Person Hermann Weyl, aus dessen Œuvre sich wahrscheinlich ein selbständiger Aufsatz zum Generalthema gestalten ließe.

Als ich 1981 zusammen mit Roman Sexl an einer erweiterten Neuauflage unseres Buches „Gravitation und Kosmologie" arbeitete, stieß ich aufgrund eines moderneren, aber doch auf Weyl zurückgehenden Gesichtspunktes auf das alte Weylsche Raumproblem, von dem ich nur einmal in meiner Studienzeit von Prof. H. Brauner gehört hatte (Vorlesung über Riemannsche Geometrie, Universität Wien, 1961, Kapitel „Ausblicke"). Nachdem ich auch Cartans Lösung desselben gelesen hatte, sagte mir mein „historischer Spürsinn", daß es zwischen beiden dazu eine Korrespondenz gegeben haben mußte und Weyls Arbeiten zur Darstellungstheorie der halbeinfachen Liegruppen eine Konsequenz davon sein mußten. Ich bin dem nicht nachgegangen, so daß es B.L. v.d. Waerden leicht war, mir hier die Show zu stehlen und 1985 alles sorgfältig recherchiert in seinem schönen Buch „A History of Algebra" darzustellen.

Über v.d. Waerden geht mein Beitrag nur hinsichtlich der Epigonen hinaus; jedoch sind dazu auf den verschiedenen Tagungen anläßlich Weyls 100. Geburtstags gewiß Beiträge geliefert worden, von denen mir lediglich diejenigen von A. Borel, H. Freudenthal und E. Scheibe zugänglich waren.

1 Allgemeine Relativitätstheorie

1.1 Newtonsche Gravitationstheorie in feldtheoretischer Formulierung (Gauß, Laplace, Poisson)

Im Schwerefeld wirkt auf eine „punktförmige", „passive" schwere Masse an der Stelle $\vec{x}$ zur Zeit t die Kraft $\vec{K}(\vec{x},t) = m_{\text{schwer}}\vec{F}(\vec{x},t)$, wobei die „Feldstärke" $\vec{F}$ von weiteren physikalischen Eigenschaften des Masseteilchens unabhängig ist. Sie hängt mit der (zeitabhängigen) Verteilung der „aktiven" schweren Massen im Raum, beschrieben durch die Massendichte $\rho(\vec{x},t)$, zusammen gemäß (G = Newtons Konstante)

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x},t) = -4\pi G\rho_{\text{aktiv}}(\vec{x},t)$$

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x},t) = 0.$$

Die zweite Gleichung wird durch Einführung des Gravitationspotentials $U(\vec{x},t)$ mit $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$ erfüllt, das also die Feldgleichung der Gravitation

$$\Delta U(\vec{x},t) = -4\pi G\rho_{\text{aktiv}}(\vec{x},t)$$

erfüllen muß. Hinzu kommt noch die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m_{\text{träge}}\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{K}(\vec{x},t)$$

für die Bewegung der Massen, wobei hier deren träge Masse eingeht.

Folgendes ist zu bemerken:

i) In dieser Theorie müßte nicht gelten, was tatsächlich mit hoher experimenteller Genauigkeit der Fall ist:

$$m_{\text{träge}} : m_{\text{schwer}} : m_{\text{aktiv}} \text{ sind konstante Verhältnisse,}$$

unabhängig von der inneren Konstitution der Massen.

ii) In den Operatoren div, rot, Δ steckt die euklidische Geometrie des Anschauungsraumes $\mathbf{R}^3$.

iii) Zeitliche Änderungen in der Verteilung $\rho_{\text{aktiv}}(\vec{x},t)$ wirken sich ohne Verzögerung auf U, $\vec{F}$ aus, wie weit auch Quellpunkt und Feldpunkt entfernt sein mögen; t ist Newtons absolute Zeit.

iv) Das Gravitationsfeld ist longitudinal, also durch ein Skalarfeld beschreibbar.

1.2 Einsteins Gravitationstheorie

Sie entwickelte sich aus der Forderung, obige Theorie den Erfordernissen der speziellen Relativitätstheorie anzupassen: zunächst ist iii) abzuändern – jede Wirkung breitet sich nur mit endlicher Geschwindigkeit aus, es gibt keine absolute Zeit, absolut ist nur die „Raumzeit" (Minkowskis „Welt", also der „graphische Fahrplan") mit einer durch

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^2 = \sum \eta_{ik}dx^i dx^k \qquad (i,k = 0,1,2,3 \text{ und } x^0 = ct)$$

gegebenen pseudo-euklidischen Geometrie (c = Lichtgeschwindigkeit).

Die ersten Versuche, dem Rechnung zu tragen, führten auf Theorien, die i) verletzten, wodurch i) als fundamentale weitere Forderung erkannt und von Einstein zum Äquivalenzprinzip verschärft wurde (Äquivalenz von Schwerkraft und Beschleunigung in kleinen Raumzeitbereichen). Hieraus entwickelte er dann das allgemeine Relativitätsprinzip. Dies führte zur Beschreibung des Schwerefeldes durch ein „Tensorpotential" $g_{ik}(x)$, das gleichzeitig auch die Raumzeitgeometrie gemäß

$$ds^2 = \sum g_{ik}(x)dx^i dx^k$$

beschreibt, also ihr eine pseudo-Riemannsche Struktur (mit Trägheitsindex 1) verleiht. Die Feldgleichung für das Gravitations-Tensorpotential g_{ik} – das damit transversale Anteile, verantwortlich für Gravitationswellen, enthält – muß nun aus Differentialoperatoren aufgebaut sein, die die geänderte Geometrie berücksichtigen, die ebenfalls durch g_{ik} bestimmt ist.

Auf weitere Details von Einsteins Theorie, der sog. Allgemeinen Relativitätstheorie, muß hier nicht eingegangen werden (siehe dazu (Sexl & Urbantke 1983), aber hier selbstverständlich in erster Linie Weyls Buch „Raum, Zeit, Materie", das 1988 in der 7. Auflage, von J. Ehlers mit Ergänzungen herausgegeben, vorliegt) bis auf eines: der mathematische Formalismus, der Einstein die Eingrenzung der Möglichkeiten für die neuen Feldgleichungen gestattete, war der „absolute Differentialkalkül" von Ricci, Bianchi und Levi-Civita. Er enthielt insbesondere einen mit der „Metrik" g_{ik} eindeutig verbundenen „absoluten" oder „kovarianten" Differentiationsprozeß, der rein formal entwickelt worden war. Erst 1917, also *nach* der Aufstellung von Einsteins Theorie (1915) war es Levi-Civita gelungen, diesen Differentialprozeß geometrisch zu deuten, allerdings unter Zuhilfenahme einer (lokalen) Einbettung des pseudo-Riemannraumes in einen höherdimensionalen pseudo-euklidischen Raum. In der Folge war es *Weyl*, der hierfür eine intrinsische Deutung fand und zugleich diese Differentiation axiomatisierte, verallgemeinerte und von der Metrik g_{ik} begrifflich löste (Weyl 1918). Dies bot ihm die Möglichkeit, versuchsweise auch das elektromagnetische Feld zu geometrisieren – hier liegt der Keim der modernen „Eichtheorien" der elementaren Wechselwirkungen!

2 Weyls Raumproblem

Weyl betrachtete Einsteins Prinzipien, aufgrund derer jener die Allgemeine Relativitätstheorie konstruiert hatte (Prinzip der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit, spezielles

und allgemeines Relativitätsprinzip, Äquivalenzprinzip) als 'a posteriori', weil aus der Erfahrung abstrahiert, und suchte nach 'a priori'-Gründen dafür, daß die „Geometrie der Welt" eine pseudo-Riemannsche sei. Dabei war ihm die Richtung gewiesen durch die Formulierung des sogenannten *Helmholtzschen Raumproblems*, wo es darum gegangen war, zu verstehen, warum der tatsächliche Raum euklidisch sein „muß" (damals hatte man noch an die absolute Zeit und den Anschauungsraum zu einer gegebenen Zeit gedacht), also insbesondere darum, die euklidische Geometrie innerhalb der Riemannschen auszuzeichnen aufgrund von Eigenschaften, die der freien Beweglichkeit von Maßstäben – also starrer Körper – entsprachen. Hierdurch war ein gruppentheoretischer Aspekt (Gruppe der kongruenten Bewegungen) in das Raumproblem gebracht worden, es lief auf die Auszeichnung der orthogonalen Gruppe durch gewisse „natürliche" Forderungen (Transitivitätseigenschaften auf Flaggenmannigfaltigkeiten, in heutiger Terminologie) hinaus. (Die erste vollständig mathematische Lösung war denn auch von S. Lie gegeben worden, doch auch in unserm Jahrhundert hat man sich mit Herleitungen des Resultats unter schwächeren Voraussetzungen beschäftigt; so etwa J. Tits und H. Freudenthal, der uns später begegnen wird.)

Ohne auf die Diskussion einzugehen, die Weyl zur mathematischen Formulierung „seines" Raumproblems führte, sei dieses der Kürze halber in einer modernen, aber letztlich auf Cartan – siehe (Cartan 1923) – zurückgehenden Formulierung (Klingenberg 1959) ausgesprochen: Welche Liesche Untergruppe G der speziellen linearen Gruppe $SL(n,\mathbf{R})$ hat folgende Eigenschaft: zu jeder G-Struktur auf einer n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit existiert genau eine torsionsfreie G-Konnexion? Weyl stellt sein Raumproblem in der 4. Auflage (Weyl 1921, § 18) seines Buches „Raum, Zeit, Materie", offenbar im Gefolge seiner Auseinandersetzung mit Riemanns Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" (Weyl 1919), und vermutet, daß für G nur die orthogonale Gruppe $SO(n,\mathbf{R})$ oder eine der pseudo-orthogonalen Gruppen $SO(p,q)$ mit $p+q=n$ infrage kommt, was die Riemannsche oder pseudo-Riemannsche Geometrie auszeichnet.

Der mathematische Kern des Weylschen Raumproblems läuft auf eine algebraische Aufgabe hinaus, zu deren Formulierung die folgende Bezeichnungsweise diene.

Es ei $\mathbf{V}$ ein n-dimensionaler reeller Vektorraum, $\mathbf{V}^*$ sein Dualraum und End $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^*$ die Menge seiner Endomorphismen. Die Antisymmetrisierungsoperation $\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^* \to \Lambda^2\mathbf{V}^*$ liefert auch eine surjektive Abbildung

$$(\text{End } \mathbf{V}) \otimes \mathbf{V}^* \simeq \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V}^* \to \mathbf{V} \otimes \Lambda^2\mathbf{V}^*.$$

End $\mathbf{V}$ ist eine reelle assoziative Algebra und daher bezüglich der Kommutatorbildung eine reelle Lie-Algebra. Es sei $\mathbf{L}$ eine Lie-Teilalgebra von End $\mathbf{V}$. Dann liefert die Einschränkung obiger Abbildung auf $\mathbf{L} \otimes \mathbf{V}^*$ eine Abbildung $\alpha : \mathbf{L} \otimes \mathbf{V}^* \to \mathbf{V} \otimes \Lambda^2\mathbf{V}^*$.

Die Aufgabe besteht nun darin, alle $\mathbf{L}$ zu finden, für die diese Abbildung bijektiv ist. Die Zusatzeinschränkung $G \subset SL(n,\mathbf{R})$ bedeutet hier, in $\mathbf{L}$ nur spurfreie Matrizen zuzulassen. Der Beweis, daß $\mathbf{L}$ aus allen Matrizen besteht, die bezüglich einer nichtausgearteten quadratischen Form auf $\mathbf{V}$ schiefsymmetrisch sind, gelingt ihm nach großen Mühen 1921 in einer Arbeit, die im Druck 32 Seiten einnimmt (Weyl 1922a), nach eigenen Worten durch „mathematische Seiltänzerei" anstatt durch „Versenkung in den Sinn der aufgestellten Forderungen" (a.a.O., p.120). In den folgenden zwei Jahren findet er wesentliche Vereinfachungen für den Beweis und behauptet, für $n > 2$ auch ohne die Spurfreiheit auskommen zu können.

E. Scheibe hat aber in (Deppert et al. 1988) mit Nachdruck darauf hingewiesen, daß es trotz aller Unklarheit in Weyls Text offensichtlich ist, daß Weyl von Cartan und dessen Nachfolgern Klingenberg, Freudenthal, Kobayashi-Nagano mißverstanden wurde! Die Möglichkeit eines solchen Mißverständnisses räumt Cartan mit der Ankündigung „Voici ce que l'auteur entend par là" ein. Nach Scheibes wohl authentischerer Interpretation geht es Weyl *nicht* um eine Auszeichnung der Riemanngeometrie (= „Kinematik" von Einsteins Theorie), sondern um die Auszeichnung von Weyls Erweiterung dieser Geometrie, heute als Weyl-Geometrie bezeichnet, mit deren Hilfe er auch das elektromagnetische Feld zu erfassen hoffte. Es geht demnach hier um eine gruppentheoretisch verallgemeinerte Version der Weyl-Geometrie in Analogie zu obiger Verallgemeinerung der Riemanngeometrie. Die Formulierung dieses *eigentlichen* Weylschen Raumproblems ist erschwert sowohl durch Unklarheiten seines Textes als auch durch das Auftreten von Termini, die heute eine andere Bedeutung haben (z.B. „metrischer Zusammenhang"). Mir scheint folgende Version plausibel, wobei wieder $G \subset SL(n, \mathbf{R})$ mit Liealgebra g und weiters $G' := \mathbf{R}^+ \cdot G$ mit Liealgebra $g' = \mathbf{R} \oplus g$ sei. Welche Gruppe G hat folgende Eigenschaft: zu jeder G'-Struktur auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit existiert eine torsionsfreie G'-Konnexion, die durch den $\mathbf{R}$-Anteil ihrer Konnexionsform – die ja Werte in g' hat – eindeutig bestimmt ist? Ich möchte aber hier auf Scheibes Analyse loc. cit. verweisen und bemerke nur, daß das eigentliche Weylsche Raumproblem auf dieselbe algebraische Aufgabe führt, während die Weylsche Theorie aus physikalischen Gründen aufgegeben werden mußte.

3 Cartans Beweis

Die Folgen des 1. Weltkrieges bewirken, daß Weyls Buch „Raum, Zeit, Materie" erst spät in Frankreich gelesen wird. (Die französische Übersetzung der 4. Auflage bezeichnet Weyl übrigens als so frei, daß er für sie jede Verantwortung ablehnt, wie er am Ende der 5. Auflage äußert.) Es scheint, als wäre E. Cartan erst 1922 und eben unter dem Einfluß dieses Buches dazu gekommen, seine eigenen Methoden auf Fragen der Riemannschen Geometrie anzuwenden und diese unter seinen neuen Gesichtspunkten zu verallgemeinern. Während nun Weyls Methode, seine Vermutung zu beweisen, streng auf das vorliegende Problem zugeschnitten ist und zuerst Einschränkungen an die Elementarteilerstruktur der einzelnen Matrizen von $\mathbf{L}$ herleitet, wendet Cartan sofort seine Aufmerksamkeit dem ganzen Objekt $\mathbf{L}$ zu (Cartan 1922, 1923). Zunächst verallgemeinert er das Problem, indem er nur die Surjektivität von α verlangt. Sodann schließt er, daß $\mathbf{L}$ bzw. die Komplexifizierung $\mathbf{L}^c$ bis auf einen rasch erledigten Sonderfall auf $\mathbf{V}$ irreduzibel wirken muß und daher halbeinfach ist. Nun ist er in der Lage, zunächst die von W. Killing und ihm selbst (Thèse, 1894) gefundene Klassifikation der abstrakten halbeinfachen Liealgebren und sodann die von ihm 1913–14 aufgestellte Theorie und Liste der linearen Darstellungen dieser Algebren anzuwenden. Aus der Surjektivität von α leitet er eine notwendige Bedingung für $\mathbf{L}$ her und geht damit seine Liste durch. Schließlich verlangt er die Bijektivität und erhält

Weyls Resultat.

Allerdings entgeht ihm dabei, daß er, solange von α nur Surjektivität verlangt ist, eine zu große Liste für mögliche $\mathbf{L}$ angibt, da eben nur eine notwendige – wenn auch sehr einschränkende – Bedingung ausgewertet wurde. Wir wollen dasjenige Raumproblem, das bloß surjektivem α entspricht, in dessen Formulierung also „genau eine torsionsfreie G-Konnexion" durch „eine torsionsfreie G-Konnexion" ersetzt ist, als „Cartansches Raumproblem" bezeichnen und zu beiden Raumproblemen das Adjektiv „verallgemeinert" hinzufügen, wenn die Einschränkung $G \subset SL(n, \mathbf{R})$ entfällt.

Die Lektüre von Cartans beiden Publikationen zeigt, daß er nur mit knappen Worten die philosophische Bedeutung des Raumproblems würdigt („Ce probème a une grande portée philosophique" (Cartan 1922, p. 82)) und seine Wichtigkeit eher dadurch unterstreicht, daß er vor der Lösung der algebraischen Aufgabe die differentialgeometrischen Verhältnisse nochmals sehr klar darstellt – für den heutigen Leser fast angenehmer als Weyl (wenn auch erschwert durch seine Art, Differentialformen zu verwenden). Diese „Klarheit" dürfte auch der Grund sein, weshalb sich spätere Autoren – ausgenommen (Scheibe 1957) – so bereitwillig auf Cartans Interpretation bzw. die Frage der Auszeichnung der Riemanngeometrie anstatt der Weylgeometrie stürzten; die geringere physikalische Bedeutung der letzteren mag da weniger Rolle gespielt haben. Auch A. Borels Artikel in (Chandrasekharan 1986, p. 72) bildet hier keine Ausnahme.

Ich darf hier hinzufügen, daß Cartan auch in seinen (ziemlich umfangreichen) übrigen Schriften zur Allgemeinen Relativitätstheorie kaum je philosophische Aspekte berührt.

4 Cartan und Weyl

Während offenbar, wie erwähnt, Weyls Buch (und Einsteins Theorie) Cartan dazu veranlaßte, seine Methoden (Lie-Gruppen, Pseudogruppen, Differentialsysteme, repère mobile) auf die Riemanngeometrie anzuwenden und Verallgemeinerungen besonderer Art zu entwickeln, wurde umgekehrt Weyl durch das Studium von Cartans Beweis und seiner Grundlagen zu seinen bahnbrechenden Arbeiten über die Darstellungstheorie halbeinfacher Lie-Gruppen geführt (Weyl 1925, 1926a,b,c,1927), wobei er sich „eigentlich nur wie der zufällige Treffpunkt" von Cartan und Schur vorkommt. Wie bereits erwähnt, ist das von v.d. Waerden eingehend recherchiert worden, und ich darf die Lektüre seines Buches (v.d. Waerden 1985) wärmstens empfehlen. Er übersieht aber ebenso wie H. Freudenthal in (Deppert et al. 1988), der diesen historischen Zusammenhang ebenfalls – wenn auch weniger akribisch recherchiert – schildert, was Scheibes erwähnte Kritik zum Ausdruck bringt; gleiches gilt für A. Borels Artikel (loc. cit.). Es wäre reizvoll, die von v.d. Waerden sichergestellte Korrespondenz daraufhin zu prüfen, ebenso eine mögliche Rolle der von Weyl kritisierten französischen Übersetzung!

In der Folge ist es wieder Cartan, der von den Weylschen Ideen beeinflußt wird und sich für die Topologie von Liegruppen und homogenen Räumen sowie die harmonische Analyse auf ihnen interessiert, die er wieder mit seinen eigenen Methoden weiterentwickelt, wie A. Borel (loc. cit.) näher ausführt.

Der Zufall (?) wollte es, daß gerade 1925–26 die Quantentheorie entstand und bald klar wurde, welche Rolle in ihr die Gruppentheorie spielen würde (sogenannte „Gruppenpest", im Physikerjargon). Weyl hat darauf sofort mit einem Buch reagiert (Weyl 1928) und auch erkannt, daß die Quantenmechanik eine bessere, auch heute gültige und, wie sich herausstellte, einer wesentlichen Verallgemeinerung fähige Möglichkeit bot, das elektromagnetische Feld strukturell unterzubringen (Weyl 1929) als sein erster, vorher erwähnter Geometrisierungsversuch. Dies dürfte wohl das Ende von Weyls regem Interesse am Raumproblem gewesen sein. Schon in (Weyl 1923, p. 45.) liest man übrigens: „Nachdem in das neue Haus der Wahrheit alles Wertvolle hinübergerettet ist, was das alte beherbergte, können wir von ihm aus es gleichmütig mitansehen, wenn die alte Wohnung zerbröckelt. Dieser Prozeß wird niemals stillestehen; seien wir dessen gewiß, daß auch die neue Burg den Geist nicht auf ewig beherbergen wird. Die Wahrheit ist etwas Lebendiges. Das bedeutet nicht Skepsis; an der besonderen Ausgestaltung, die Wahrheit und Recht in diesem Augenblick der menschlichen Kultur angenommen haben, müssen wir mit allem Ernste arbeiten und uns mit allem Ernste an sie binden. Aber gerade dadurch wird das Leben des Geistes diese Gestalt stetig in neue Gestalten verwandeln; die alte mag dann als eine leere Schale in den Museen aufbewahrt werden. Niemals aber wird es gelingen, die Wahrheit endgültig in die Form eines toten Seins, eines wie rationalen wohlgeordneten immer, zu begraben."

5 Einige Epigonen

Das Weylsche Raumproblem ist in den Fünfziger- und Sechzigerjahren wieder aufgegriffen worden, u.a. in (Scheibe 1957), (Laugwitz 1958), (Klingenberg 1959), (Freudenthal 1960) und (Kobayashi-Nagano 1965). Ich möchte diese Arbeiten nicht ausführlich kommentieren, sondern nur einzelne Bemerkungen machen. Scheibe (Dissertation, Göttingen 1955) ist der erste, der das Problem in die modernere Sprache der Konnexionen in Faserbündeln übersetzt; dabei bemüht er sich, dem *eigentlichen* Weylschen Raumproblem gerecht zu werden. Laugwitz bringt eine begriffliche Differenzierung, indem er ein erstes und ein zweites Weylsches Raumproblem unterscheidet – in diesem Sinn habe ich hier nur vom zweiten Raumproblem gesprochen. Klingenberg gibt ebenfalls eine moderne Formulierung des verallgemeinerten Weylschen Problems (praktisch die heutige) und beweist ein Analogon zum Weylschen Resultat für fast-komplexe Mannigfaltigkeiten, wobei ihm bereits die von Weyl und anderen erzielten Vereinfachungen der Cartanschen Darstellungstheorie zur Verfügung stehen.

H. Freudenthal, den ich bereits im Zusammenhang mit dem Helmholtzschen Raumproblem erwähnte, und der wie Laugwitz auch als Mathematikhistoriker kein Unbekannter ist, hat 1960 das verallgemeinerte Cartansche Raumproblem und damit wohl auch Laugwitz' erstes Weyl-Problem gelöst. Es gelingt ihm, die Cartansche Beweismethode durch Ausnützung von mehr aus der Surjektivität von α folgenden Bedingungen wesentlich abzukürzen (seine Arbeit umfaßt nur acht Seiten!), wobei er auch den kleinen Fehler in Cartans Arbeit bemerkt. Er vermutet sogar, daß sich seine Methode noch dahingehend verbessern ließe, daß der Beweis 'elementar' wird, also die Klassifikationstheorie überhaupt nicht mehr benötigt. Ein Fortschritt in dieser Richtung ist mir aber nicht

bekannt.

Dasselbe Problem lösen 1965 auch Kobayashi-Nagano in ähnlicher Weise, wobei ihnen anscheinend durch ein numerisches Versehen ein Fall entgeht. Soviel zu den Epigonen.

6 Abschlußbemerkungen

Das Weylsche Problem und seine Lösung sind heute weitgehend vergessen. So hat sich erst kürzlich (1988) ein Physiker bemüht, zu einer durch ein symmetrisches Tensorfeld höherer Stufe definierten G-Struktur eine torsionsfreie G-Konnexion zu finden, was ihn in ein algebraisches Dickicht führte, aus dem eben auch Weyl und Cartan nur mit großem Kraftaufwand herausgefunden hatten.

Aber auch schon 1963, als Kobayashi und Nomizu den ersten Band ihrer 'Foundation of Differential Geometry' herausbrachten (Kobayashi-Nomizu 1963), war das Problem soweit außer der allgemeinen Diskussion, daß diese Autoren dazu neben Weyl und Cartan lediglich (Klingenberg 1959) zitierten (wobei sie die wesentliche Voraussetzung $n > 2$ wieder hinzufügten). Die Entwicklungslinie Scheibe-Laugwitz-Freudenthal blieb dagegen unberücksichtigt. So mochte das Gefühl entstanden sein, daß das verallgemeinerte Weyl-Cartan-Problem noch einer Untersuchung bedürfe, und (Kobayashi-Nagano 1965) duplizierten daher das Freudenthalsche Ergebnis. Erst die 'Foundations II' (Kobayashi-Nomizu 1969) enthalten (Freudenthal 1960).

Auch die philosophische Bedeutung des Problems dürfte heute kaum jemanden rühren (die Vierdimensionalität der Raumzeit und die Signatur des metrischen Tensorfeldes werden durch seine Lösung nicht geliefert), während Cartan an Weyl noch schreiben konnte, indem er gleichzeitig seiner Bescheidenheit Ausdruck gab: „... ist die Einfachheit des Beweises nichts im Vergleich zur philosophischen Bedeutung." Heute dürfte sich die Sachlage eher umgedreht haben, für Kobayashi-Nagano (1965) etwa ist das Problem fundamental für die Theorie der G-Strukturen, nicht für die Philosophie – womit ich an das Generalthema dieser Tagung anknüpfen kann: „Mathematik – à la mode?" Ich möchte dazu aber nichts direkt sagen, sondern einfach Weyl selbst zitieren und dann schließen.

„... Während fast alle tieferen mathematischen Theorien – wie z.B. die wunderbare Theorie der algebraischen Zahlkörper – innerhalb der großen philosophischen Zusammenhänge der Erkenntnis nicht viel zu bedeuten haben und auf der anderen Seite das, was die Mathematik beisteuern kann zur Beleuchtung allgemeiner Erkenntnisprobleme, meist der Oberfläche der Mathematik entstammt, haben wir hier den seltenen Fall, daß ein für alle Wirklichkeitserkenntnis grundlegendes Problem, wie es das Raumproblem ist, zu tief eindringenden mathematischen Fragestellungen Anlaß gibt." (Weyl 1923, p. 61.)

„... Sache des Mathematikers ist es nicht, über Wirklichkeiten Gericht zu sitzen, sondern aus der Wirklichkeit entsprungene Probleme zu Ende zu denken und die dazu benötigten Hilfsmittel bereitzustellen. Und nur dadurch, daß man eine Theorie mit allem Ernst und allen Konsequenzen zu Ende denkt, wächst sie über such selbst hinaus. Dieser Prozeß vollzog sich an unserem Problem in dem divinatorischen Geiste Riemanns. ... So wollen wir denn jetzt unser Teil dazu beitragen, die Riemann-Einsteinsche Theorie über Zeit und Raum zu Ende zu denken! ..." (a.a.O., p. 45 f.)

[8] „... hatte ich die Stirn, den ... rein algebraischen Satz ... als Vermutung auszusprechen allein aufgrund seiner transienten Bedeutung für das Raumproblem.“ (Weyl 1922b, p. 221.)

„The stringent precision attainable for mathematical thought has led many authors to a mode of writing which must give the reader an impression of being shut up in a brightly illuminated cell, where every detail sticks out with the same dazzling clarity, but without relief. I prefer the open landscape under a clear sky with its depth of perspective, where the wealth of sharply defined nearby details gradually fades away towards the horizon.“ (Weyl 1939, p. viii; wenige Zeilen weiter bedauert Weyl, gezwungen, in englischer Sprache zu schreiben, “loss in vigor, ease and lucidity of expression”. Ich wage also keine Übersetzung, da sie den beklagten Verlust eher verdoppeln als wettmachen würde: allein die zweifache Bedeutung von 'relief' macht mir ein Problem!)

[9]

Literatur

Cartan, Élie (1922) „Sur un théorème fondamental de M.H. Weyl dans la théorie de l'espace métrique“. *Comptes rendus de l'Academie des Sciences (Paris) 175*: 82–85.

Cartan, Élie (1923) „Sur un théorème fondamental de M.H. Weyl“. *Journal de Mathématiques pures et appliquées 2*: 167–192.

Chandrasekharan, Komaravolu (Hrsg.) (1986) *Hermann Weyl: 1885–1985*. Centenary Lectures. Berlin: Springer Verlag.

Deppert, Wolfgang, Hübner, Kurt, Oberschelp, Arnold, Weidemann, Volker (Hrsg.) (1988) *Exakte Wissenschaften und ihre philosophische Grundlegung*. Vorträge des Internationalen Hermann Weyl-Kongresses, Kiel 1985. Bern: Peter Lang.

Freudenthal, Hans (1960) „Zu den Weyl-Cartanschen Raumproblemen“. *Archiv der Mathematik 11*: 107–115.

Klingenberg, Wilhelm (1959) „Eine Kennzeichnung der Riemannschen sowie der Hermitischen Mannigfaltigkeiten“. *Mathematische Zeitschrift 70*: 300–309.

Kobayashi, Shoshichi, and Nagano, Tadashi (1965) „On a fundamental theorem of Weyl-Cartan on G-structures“. *Journal of the Mathematical Society of Japan 17*: 84–101.

Laugwitz, Detlef (1958) „Über eine Vermutung von Hermann Weyl zum Raumproblem“. *Archiv der Mathematik 9*: 128–133.

Scheibe, Erhard (1957) „Über das Weylsche Raumproblem“. *Journal für die reine und angewandte Mathematik 197*: 162–207. (Dissertation, Göttingen 1955)

Sexl, Roman U. und Urbantke, Helmuth K. (1983) „Gravitation und Kosmologie. Eine Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie“. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage. Zürich, Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag.

v.d. Waerden, Bartel L. (1985) *A History of Algebra. From Al-Khwārizmī to Emmy Noether*. Berlin: Springer Verlag

Weyl, Hermann (1918) „Reine Infinitesimalgeometrie“. *Mathematische Zeitschrift 2*: 384–411.

Weyl, Hermann (1919) *Kommentar zu Riemanns „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“*. Berlin: J. Springer Verlag.

Weyl, Hermann (1921) *Raum, Zeit, Materie*. 4., wesentlich veränderte Auflage. Berlin: J. Springer Verlag. Davon frz. Übersetzung von G. Juvet und R. Leroy: *Temps, espace, matière*. Paris: Blanchard 1922.

Weyl, Hermann (1922a) „Die Einzigartigkeit der Pythagoräischen Maßbestimmung". *Mathematische Zeitschrift 12*: 114–146.

Weyl, Hermann (1922b) „Das Raumproblem". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 31*: 205–221.

Weyl, Hermann (1923) *Mathematische Analyse des Raumproblems.* Vorlesungen, gehalten in Barcelona und Madrid. Berlin: J. Springer Verlag.

Weyl, Hermann (1925) „Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. Teil I". *Mathematische Zeitschrift 23*: 271–309.

Weyl, Hermann (1926a,b,c) „Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen". *Mathematische Zeitschrift 24*: Teil II: 328–376, Teil III: 377-395, Nachtrag: 789–791.

Weyl, Hermann, mit Peter, F. (1927) „Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe". *Mathematische Annalen 97*: 737–755.

Weyl, Hermann (1928) *Gruppentheorie und Quantenmechanik.* Leipzig: S. Hirzel.

Weyl, Hermann (1929) „Elektron und Gravitation". *Zeitschrift für Physik 56*: 330–352.

Weyl, Hermann (1939) *The Classical Groups. Their Invariants and Representations.* Princeton: University Press.

Kurzfassung

Im Gefolge seiner Auseinandersetzung mit den Ideen der allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins, die in seinem Buch „Raum, Zeit, Materie" ihren Niederschlag fand, sowie mit Riemanns Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen", hat H. Weyl 1921 ein „Raumproblem" formuliert, mathematisiert und gelöst. E. Cartan stellte Weyls Beweis einen systematischeren zur Seite, der die Darstellungstheorie der halbeinfachen Liealgebren benützt. Weyls Auseinandersetzung mit diesem Beweis führte ihn dazu, seine berühmte Darstellungstheorie der halbeinfachen Liegruppen zu entwickeln, die ihrerseits wieder Cartans Forschungen beeinflußte. In der Zeit 1955–1965 sind noch wenigstens fünf Arbeiten zu diesem Thema erschienen, und die Entwicklung ist 1985, zum Teil anläßlich verschiedener Tagungen zum 100. Geburtstag Weyls, von mehreren Autoren resümiert und aus verschiedenen Blickwinkeln analysiert worden. Der Vortrag bringt eine Zusammenfassung.

TEILNEHMER

* **BAPTIST, PETER**
Dr., Math. Inst. der Univ. Bayreuth, Postfach 101251, D-8580 Bayreuth, BRD

BINDER, CHRISTA
Dr., Inst. für Techn. Math., Techn. Univ.Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10, A-1040 Wien, Österreich

BOOCKMANN, FRIEDERIKE
Dr., Bayer. Akad. der Wissenschaften, Kepler-Kommission, Marstellpl. 8, D-8000 München 22, BRD

* **BRUINS, EVERT M.** 65
Prof. Dr., Joh. Verhulststraat 185, NL-1075 GZ Amsterdam, Niederlande

* **ČANAK, MILOŠ** 9,39
Prof. Dr., Brzakova 4, YU-11000 Beograd, Jugoslawien

DANZER, LUDWIG
Prof. Dr., Stortsweg 9, D-46 Dortmund 50, BRD

FELLMANN, EMIL
Dr., Arnold Böcklinstr. 37, CH-4051 Basel, Schweiz

FOLKERTS, MENSO
Prof. Dr., Inst. für Gesch. der Naturwiss., Univ. München, Postfach 260102, Museumsinsel, D-8000 München 26, BRD

* **FOLTA, JAROSLAV**
Dr., Akad. der Wiss., Vysehradska 49, CS-12826 Praha 2, Tschechoslowakei

FRANK, WILHELM
Prof. Dr., Custozzag. 13/7, A-1030 Wien, Österreich

GERICKE, HELMUTH
Prof. Dr., Sonnenbergstr. 31, D-7800 Freiburg i.Br., BRD

* **GRIFFITHS, PETER L.** 14
41 Gloucester Place, London W1H 3PD, Großbritannien

* **GRONAU, DETLEF** 1
Prof. Dr., Inst. für Math., Univ. Graz, Brandhofg. 18, A-8010 Graz, Österreich

* **HILDEBRANDT, RUDOLF** 33
Dr., Turmbergstr. 20, D-7516 Karlsbad-Spielberg, BRD

HLAWKA, EDMUND
Prof. Dr., Inst. für Techn. Math., Techn. Univ. Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10, A-1040 Wien, Österreich

* HOFER, HANS 44
Dr., Serviteng. 24/22, A-1090 Wien, Österreich

KAISER, HANS
Prof. Dr., Inst. für Algebra, Techn. Univ. Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10, A-1040 Wien, Österreich

* LAUGWITZ, DETLEF 49
Prof. Dr., Fachbereich Math., Techn. Hochschule Darmstadt, Schloßgartenstr. 7, D-6100 Darmstadt, BRD

* LIBBRECHT, U.J. 57
Prof. Dr., Kath. Inv. Leuven, Oriëntalistiek, Blijde-Inkomststraat 21, B-3000 Leuven, Belgien

* NEUENSCHWANDER, ERWIN 37
Doz. Dr., Math. Inst., Univ. Zürich, Rämistr. 74, CH-8001 Zürich, Schweiz

NOVY, LUBOS
Dr., Staatsarchiv, Akad. der Wiss., Karlova 4, CS-10000 Prag, Tschechoslowakei

* PURKERT, WALTER
Prof. Dr., Sektion Math., Karl Marx-Univ., Karl Marx-Platz, DDR-7010 Leipzig, DDR

* RADBRUCH, KNUT 26
Prof. Dr., Univ. Kaiserslauten, Mathematik, Erwin Schrödinger-Straße, D-6750 Kaiserslautern, BRD

SCHMITT, PETER
Doz. Dr., Inst. für Math., Univ. Wien, Strudlhofg. 4, A-1090 Wien, Österreich

SCHNEIDER, IVO
Prof. Dr., Inst. für Gesch. der Naturwiss., Univ. München, Postfach 260102, Museumsinsel, D-8000 München 26, BRD

* TOBIES, RENATE
Doz. Dr., Karl Sudhoff-Inst., Karl Marx-Univ., Talstr. 33/II, DDR-7010 Leipzig, DDR

* TOEPELL, MICHAEL 18
Dr., Math. Inst., Univ. München, Theresienstr. 39, D-8000 München 2, BRD

* URBANTKE, HELMUTH 72
Dr., Peter Jordanstr. 94/14, A-1190 Wien, Österreich

* VOLKERT, KLAUS 55
Dr., Hochstr. 48, D-6652 Bexbach, BRD

* WEFELSCHEID, HEINRICH 62
Prof. Dr., Fachbereich 11 Mathematik, Univ. Duisburg, Postfach 101503, D-4100 Duisburg 1, BRD

* WUSSING, HANS
Prof. Dr., Karl Sudhoff-Inst., Karl Marx-Univ., Talstr. 33/II, DDR-7010 Leipzig, DDR

ZIMMERMANN, BENNO
Dipl. Math., Birkhäuser-Verlag, Ringstr. 39, CH-4106 Therwil/Basel, Schweiz

Die Österreichische Gesellschaft für Geschichte der Naturwissenschaften dankt den folgenden Institutionen und Firmen für Ihre Unterstützung, ohne die die Durchführung dieser Tagung nicht möglich gewesen wäre:

dem Bundesministerium für Wissenschaft und Forschung,
der Niederösterreichischen Landesregierung,
der Ersten Österreichischen Sparkasse,
der Siemens AG Österreich,
dem Birkhäuser-Verlag,
dem Verlag Acta humaniora,
der Wiener Städtischen Wechselseitigen Versicherungsanstalt,
der Zentralsparkasse und Commerzbank,
der Bundesländer Versicherungsanstalt,

sowie der Technischen Universität Wien, insbesondere dem Institut für Analysis, Technische Mathematik und Versicherungsmathematik, dessen Vorstand, Herr Prof. Dr. Roman Schnabl, mir ermöglichte, Arbeitszeit und sämtliche Einrichtungen des Instituts für die Organisation der Tagung zu benützen.

Christa Binder
Institut für Technische Mathematik
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8-10
A-1040 Wien, Österreich

Wien, im Oktober 1989

Gedruckt mit Unterstützung der Kulturabteilung des Amtes der Niederösterreichischen Landesregierung.

NOUVELLES MATHÉMATIQUES INTERNATIONALES

INTERNATIONALE MATHEMATISCHE NACHRICHTEN

INTERNATIONAL MATHEMATICAL NEWS

IMU CANBERRA CIRCULAR

NO. 67

JUNE 1989

S: Österreichisches Symposium Zur Geschichte Der Mathematik; V: Linz and Vienna, Austria; D: 22-28 October 1989; A: Dr Christa Binder, Institut für Mathematik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10/1141 A-1040 Vienna, Austria.

Geschichte der Mathematik

Das *II. Österreichische Symposium zur Geschichte der Mathematik* findet unter dem Motto: *Mathematik – à la mode?* vom 22. bis 28. Oktober 1989 in Neuhofen an der Ybbs (Niederösterreich) statt. Organisation: Dr. Christa Binder, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10/1141, A-1040 Wien.

(Ankündigung)

II. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik

By Christa Binder

Institut für Technische Mathematik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10/1141, A-1040 Wien, Österreich

Thema: Mathematik—à la mode?
Tendenzen und Modeerscheinungen in Forschung, Lehre und Stil
Ort: Neuhofen an der Ybbs
(Niederösterreich, zwischen Linz und Wien)
Zeit: Sonntag, 22. Oktober 1989 bis Samstag, 28. Oktober 1989
Kosten: ca. 2600 Österreichische Schilling (pro Person, Einbettzimmer mit Bad/WC)
ca. 2300 Österreichische Schilling (pro Person, Doppelzimmer mit Bad/WC)
inklusive Vollpension, Transfer, Ausflug, Tagungsband
Organisation:

Dr. Christa Binder
Institut für Technische Mathematik
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8-10/1141
A-1040 Wien, Österreich
Telefon: 0222/58801/5381

Anregungen, Vorschläge, Wünsche, Anfragen, Kommentare, Anmeldungen werden an diese Anschrift erbeten.

HISTORIA MATHEMATICA

Volume 16, Number 2, May 1989

EUROPEAN MATHEMATICAL NEWSLETTER

April 1989 and later

*22 - 28 II. ÖSTERREICHISCHES SYMPOSIUM ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK
Neuhofen a. d. Ybbs, Austria
C: Dr. Christa Binder, Inst. f. Techn. Math., Techn. Univ. Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10/1141, A-1040 Wien;

II. ÖSTERREICHISCHES SYMPOSIUM ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

NEUHOFEN AN DER YBBS, 22. BIS 28. OKTOBER 1989

MATHEMATIK – À LA MODE?

Tendenzen und Modeerscheinungen in Forschung Lehre und Stil

KURZFASSUNGEN DER VORTRÄGE, ERGÄNZUNGSBAND

VERANSTALTER: ÖSTERREICHISCHE GESELLSCHAFT FÜR GESCHICHTE DER NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEBER: CHRISTA BINDER, WIEN
Institut für Technische Mathematik
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8-10
A-1040 Wien, Österreich

INHALT

Abgesagt haben:

HILDEBRANDT, R.; HLAWKA, E.; KAISER, H.; NOVY, L.

Weitere Teilnehmer:

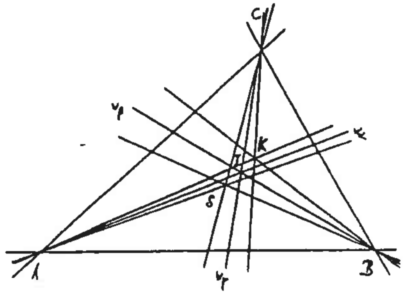
WERNER, Ernst
Mag., Grüner Weg 417, A-3512 Mautern, Österreich

SÄCKL, Herwig
Dr., Veit-Höser-Gymnasium, D-8443 Bogen, BRD

Ein Beispiel aus der Dreiecksgeometrie im 19. Jahrhundert: der Lemoine-Punkt

Peter Baptist, Bayreuth

Im Jahre 1873 hielt der Ingenieur Emile LEMOINE (1840-1912) vor der 'Association Française pour l'Avancement des Sciences' in Lyon ein Referat mit dem Titel "Sur quelques propriétés d'un point remarquable du triangle". Im Zentrum seiner Ausführungen stand der Schnittpunkt der antiparallelen Mediane.



Da eine antiparallele Mediane symmetrisch zur Mediane bezüglich der Innenwinkelhalbierenden durch denselben Eckpunkt verläuft, prägte Maurice d'OCAGNE (1862-1938) 1883 den Begriff Symmediane: symédiane als Abkürzung für symétrique de la médiane. Der Schnittpunkt der Symmediane heißt folglich Symmedianpunkt. Allgemein nennt man Ecktransversalen, die durch Spiegeln an der Innenwinkelhalbierenden ineinander übergehen, isogonal.

Die Zeit war damals reif für einen Aufschwung der Dreiecksgeometrie. Lemoines Vortrag löste eine geradezu stürmische Entwicklung aus. Die Eigenschaften dieses Transversalenschnittpunkts sowie von Geraden und Kreisen, die mit ihm in Verbindung stehen, wurden von zahlreichen Autoren untersucht (bezüglich der Ergebnisse siehe [1], [3]). Um dem Verdienst Lemoines an dieser Entwicklung ein Denkmal zu setzen, führte 1884 Jean NEUBERG (1840-1926) - bekannt als Herausgeber der Zeitschrift 'Mathesis' - den Namen Lemoine-Punkt ein, der sich vor allem in der französischsprachigen Literatur durchsetzte. Bezeichnend für die nationalen Tendenzen im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts ist die Würdigung durch Emile Vigarie im Jahr 1889:

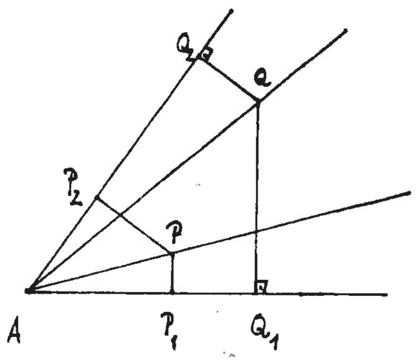
> "Lemoine doit être regardé comme le fondateur de la géométrie moderne du triangle et c'est une science toute française..."

Bereits siebzig Jahre vor Lemoines Vortrag war der nach ihm benannte Punkt bekannt. Die ersten Zeugnisse finden sich in der Zeitschrift "The Mathematical Repository", die Thomas Leybourn in den Jahren 1795 bis 1835 herausgab (vgl. [5]). In der Ausgabe des Jahres 1803 wird ein Punkt in einem Dreieck angeführt, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu den Seiten minimal ist. Ein Jahr später finden sich in dieser Zeitschrift in Verbindung mit der Lösung einer geometrischen Ortsaufgabe folgende Ergebnisse:

- Wird ein Punkt K im Dreieck ABC so gewählt, daß $\frac{\overline{KA'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{KB'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{KC'}}{\overline{AB}}$, wobei A',B',C' Lotfußpunkte auf den Seiten sind, dann gilt $\overline{KA'}^2 + \overline{KB'}^2 + \overline{KC'}^2 = \min.$
- Die Ecktransversale durch K teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten.

In beiden Beiträgen im 'Mathematical Repository' wird die Minimumeigenschaft des Punktes K erwähnt, aber nicht, daß dieser Punkt isogonal konjugiert zum Schwerpunkt ist. Ursprung des Interesses für diesen Punkt war vielleicht die Ausgleichsaufgabe: zu drei Geraden, die durch einen Punkt gehen sollten, aber in der Realität ein Dreieck aufspannen, soll derjenige Punkt gefunden werden, für den die Quadratsumme der Abstände von den drei Geraden zum Minimum wird.

Im Jahr 1806 veröffentlichte James Ivory ebenfalls im 'Mathematical Repository' ein Ergebnis bezüglich isogonaler Geraden:

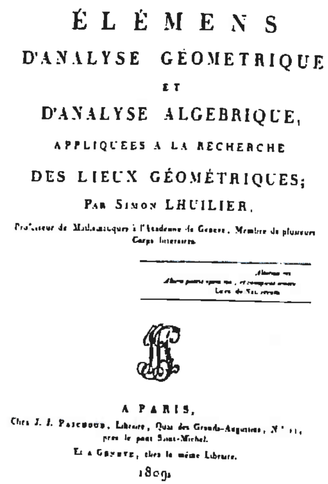


P und Q sind zwei beliebige Punkte auf zwei isogonalen Geraden des ∢BAC. Dann gilt:
$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{QQ_2}}{\overline{QQ_1}}$.

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung: Gilt für zwei Punkte P,Q im Winkelfeld des ∢BAC $\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{QQ_2}}{\overline{QQ_1}}$, dann liegen P und Q auf isogonalen Geraden.

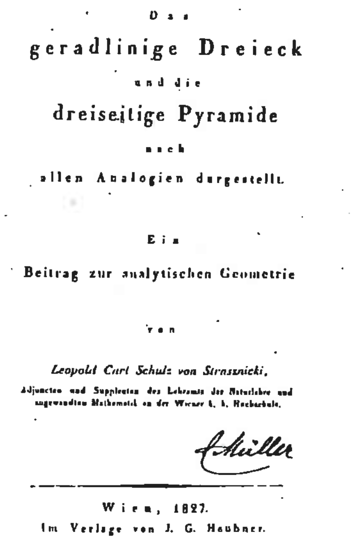
Aus dieser Umkehrung könnte man sofort auf die isogonale Konjugiertheit von Schwerpunkt S und Lemoine-Punkt K schließen (wegen $\frac{\overline{KA'}}{\overline{KB'}} = \frac{a}{b}$ und $\frac{\overline{SA^*}}{\overline{SB^*}} = \frac{b}{a}$). Diesen Zusammenhang erwähnt James Ivory allerdings nicht.

Wir wechseln den Schauplatz. 1809 erschien das Buch 'Elémens d'analyse géometrique et d'analyse algébrique' ([4]) von Simon LHUILIER (1750-1840). Hierin findet sich folgende Aufgabe: "On détermine sur le plan d'un triangle le point duquel abaissant des perpendiculaires sur ces côtés la somme de leurs carrés est la plus petite."


ÉLÉMENS
D'ANALYSE GÉOMETRIQUE
ET
D'ANALYSE ALGEBRIQUE,
APPLIQUÉES A LA RECHERCHE
DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES;
PAR SIMON LHUILIER,
A PARIS,
1809.

Lhuilier zeigt mit Hilfe der Differentialrechnung, daß der gesuchte Punkt derjenige ist, dessen Abstände zu den Seiten sich verhalten wie die entsprechenden Seiten. Für die minimale Summe gibt er den Wert $\frac{4A^2(\Delta ABC)}{a^2+b^2+c^2}$ an. Anschließend schreibt er, daß man dieses Ergebnis auf beliebige Polygone und auch auf Polyeder erweitern kann. Insbesondere befaßt er sich mit dem Minimumpunkt des Tetraeders.

Erneuter Wechsel des Schauplatzes. Mit seiner 1827 erschienenen Abhandlung "Das geradlinige Dreieck und die dreiseitige Pyramide nach allen Analogien dargestellt" ([6]) setzte sich Leopold Carl Schulz von STRASZNICKI (1803-1852) das Ziel, die Anzahl der Transversalenschnittpunkte zu vermehren. Der Untertitel der Schrift verrät die Arbeitsweise: "Ein Beitrag zur analytischen Geometrie".



Das
geradlinige Dreieck
und die
dreiseitige Pyramide
nach
allen Analogien dargestellt.

Ein
Beitrag zur analytischen Geometrie

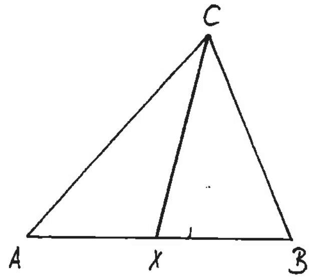
von

Leopold Carl Schulz von Strasznicki,
Adjuncten und Supplenten des Lehramts der Naturlehre und angewandten Mathematik an der Wiener k. k. Hochschule.

Wien, 1827.
Im Verlage von J. G. Heubner.

In welchem Zusammenhang behandelt nun Strasznicki den Lemoine-Punkt? Mit Hilfe der Differentialrechnung zeigt er zunächst, daß die Summe der Quadrate der Entfernungen vom Schwerpunkt zu den Eckpunkten minimal ist. Dann schreibt er: "Auf gleiche Art wollen wir nun die Coordinaten desjenigen Punktes bestimmen, welcher die Eigenschaft hat, dass die Summe der Quadrate seiner Distanzen von den drei Seiten des Dreiecks ein Minimum ist." Diesen Punkt nennt er dann "der Kürze halber den Minimumpunct".

Strasznicki ist nun der erste, der explizit auf die Verwandtschaft zwischen Schwerpunkt und Minimumpunkt hinweist. Dazu betrachtet er das Verhältnis der Sinus der Teilwinkel, in die eine Ecktransversale den zugehörigen Innenwinkel zerlegt.



Ist nun CX Ecktransversale durch den Minimumpunkt, so gilt:

$$\frac{\sin ACX}{\sin XCB} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \; .$$

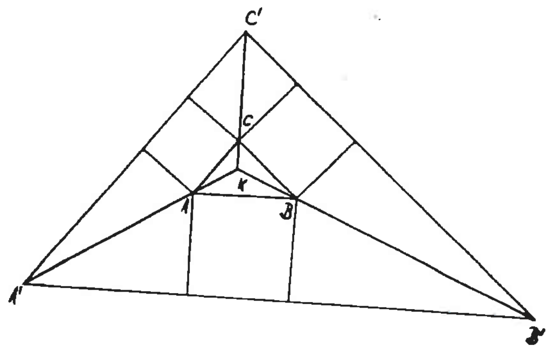
Für eine Seitenhalbierende CX erhalten wir:

$$\frac{\sin ACX}{\sin XCB} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \; .$$

Anhand dieser Ergebnisse stellt er fest: "Man kann die Analogie des Minimumpunktes und des Schwerpunktes nicht übersehen." Den letzten Schritt zum Aufdecken der Verwandtschaft vollzieht er allerdings nicht. Er erwähnt nicht, daß die entsprechenden Transversalen durch Spiegeln an der zugehörigen Innenwinkelhalbierenden ineinander übergehen.

Diese Eigenschaft erwähnt u.a. 1847 der Kasselaner Gymnasiallehrer Ernst Wilhelm GREBE (1804-1874) in [2]. Sein Konstruktionsverfahren für den Minimumpunkt ist wesentlich eleganter als das von Strasznicki.

Über den Seiten des Dreiecks ABC werden Quadrate errichtet. Die zu den Dreiecksseiten parallelen Quadratseiten werden verlängert und zum Schnitt gebracht. Es entsteht ein neues Dreieck A'B'C'. Die Ecktransversalen AA',BB',CC' schneiden sich im gemeinsamen Minimumpunkt der beiden Dreiecke.



BAPTIST

Da Strasznickis Abhandlung anscheinend nicht sehr verbreitet war, wurde der Minimumpunkt (Lemoine-Punkt) insbesondere in der deutschsprachigen Literatur des ausgehenden 19. Jahrhunderts nach Grebe benannt.

Literatur:

[1] Altshiller - Court, N.: College Geometry. New York, o.J.

[2] Grebe, E.W.: Das geradlinige Dreieck in Beziehung auf die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkte seiner Ebene auf seine Seiten fällen kann, betrachtet. Archiv der Mathematik und Physik 9, 1847, S. 250-259

[3] Johnson, R.A.: Advanced Euclidean Geometry. New York, 1929 bzw. 1960

[4] Lhuilier, S.: Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique. Paris, 1809

[5] Mackay, J.S.: Early History of the Symmedian Point. Proc. Edinburgh Mathematical Soc. 11, 1892/93, S. 92-103

[6] Strasznicki, L.C. Schulz v.: Das geradlinige Dreieck und die dreiseitige Pyramide nach allen Analogien dargestellt. Wien, 1827

FOLTA

Sehen und Abbildung

Jaroslav Folta

Sehen — als erster direkter Kontakt zwischen Mensch (Subjekt) und Welt (Objekt) — ist der erste Anlaß für die Bildung einer Vorstellung über Weltrealitäten, Grund zur Beschreibung (Darstellung) — auch als fernere subjektive Vorstellungstransformation — des Objektes und zum Erkennen der darin enthaltenen Informationen (unter anderem auch in Bildern).

Die Darstellung in Zeichnungen hat sich zur Abbildung gemäß fester Regeln entwickelt. Die Vorgeschichte und die Geschichte der Perspektive während der italienischen Renaissance ist schon ausführlich in der Literatur beschrieben worden. Auch die Fehler der alten Meister — z.B. mehrere Hauptpunkte, nur gefühlte, aber nicht konstruierte Perspektive — sind bereits analysiert.

In der darauf folgenden Entwicklung haben aber auch die besten Kenner der Gesetze der Perspektive ähnliche Mittel benützt, um z.B. in einem Bild einige Details deutlicher sichtbar zu machen. Also wurden die Fehler der Alten, sowie absichtliche Änderungen der Gesetze der Zentralperspektive bei großen Gemälden durch das subjektive Gefühl verursacht.

Unser Auge durchschaut die Realität, oder eine Abbildung dieser Realität, nicht starr und ohne Bewegung. Die Aufmerksamkeit des Künstlers, sowie des Betrachters, ist auf verschiedene Motive des Bildes gerichtet, und aus unseren Blicken bildet sich eine Vorstellung der Realität, die mit der Abbildung in zentralperspektivischer Konstruktion nicht identisch ist.

Trotzdem kann man nicht auf gewisse Gesetze der geometrischen Perspektive verzichten: Josuah Kirkby (1757) wollte die Hauptergebnisse der Tylor'schen Perspektive popularisieren und benützte dafür in seinem Buch als Titelblatt Hobarts Zeichnung, in der die meisten der elementaren Sünden der damaligen Maler verdeutlicht werden.

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, nachdem die Zentralperspektive eine neue theoretische Begründung bekommen hatte und die Aufmerksamkeit der Geometer mehr auf die Abbildungsmethoden konzentriert war, gab es auch Versuche, jene Probleme, die von den Malern schon im 16. Jahrhundert gefühlt worden waren, mit geometrischer Exaktheit zu lösen.

In einer Diskussion zwischen dem Berliner Guido Hauck (1845–1905) und dem Brünner Miloslav Pelišek (1855–1940) wurden verschiedene Methoden benützt. Hauck hat gezeigt, daß die zentralperspektivische Abbildung auf die Ebene mit einem festen Hauptpunkt bezogen ist, während die vom Maler mit den Augen beobachtete Realität, und daher auch das Bild in seiner Vorstellung faktisch einer Projektion auf eine Kugelfläche ähnlich ist. Also mußte er die Bilder der strengen Perspektive korrigieren. Hauck (1879) empfahl daher, die Zentralperspektive durch eine konforme Abbildung zu ersetzen. Um dabei Deformationen zu vermeiden, hat er gerade Strecken durch *sanft ovale Bögen* ersetzt.

Pelišek hat sich mit dem physiologischen Problem der Sehschärfe beschäftigt (1886).

Die Sehstrahlen sind im Auge nicht auf einen Punkt konzentriert, sondern bilden eine Regelfläche, die sogenannte *Kaustik*. Diese Kaustik ersetzte Pelišek durch tangentiale Hyperboloide. Diese Situation ist für ihn der Grund dafür, daß Sehschärfe nur in einem engen Blickwinkel gelten kann. In der Abbildung wirkt sich das so aus, daß, wenn das Bild nicht vom richtigen Blickpunkt aus betrachtet wird, in unserer Vorstellung ein Bild des Raumes entsteht, das verschieden ist vom Abgebildeten. Zwischen diesen beiden Räumen besteht aber eine Affinitätsverwandschaft.

Im 20. Jahrhundert sind die Künstler von den sichtbaren Dingen mehr zu den latenten Wahrheiten übergegangen (Klee 1920). Dies zeigt sich in typischer Weise für eine Gruppe schöpferischer Künstler nach dem 1. Weltkrieg und es steht gewiß in engem Zusammenhang mit ihrer skeptisch-philosophischen Weltanschauung. Die Realität war nicht mehr ein Kriterium des künstlerischen Ausdrucks.

Trotzdem erschien unter den Künstlern einer, der die scharf realistischen *Ausschnitte* zu einem *unwirklichen Ganzen* zusammengestellt hat. Es war dies Maurits Escher (1898–1972). Er hat dabei auch spezielle Abbildungs- — oder Projektions- — methoden benutzt, um damit das dynamische Prinzip des Sehens (oder besser des Durchschauens) und das Enstehen unserer Vorstellung in einem Bild einschließen zu können. Und diese Projektionsmittel sind in der zweiten Hälfte der Schaffenszeit Eschers (nach seiner Auswanderung aus Italien vor dem Faschismus) an seine philosophische Weltanschauung gebunden. Seine sehr realistische Darstellung aller Bildteile ist zu ganz absurden Verbindungen verknüpft. Der Zuschauer

kann dies erst nach genauer Betrachtung von Eschers Graphik erkennen. Escher benutzt hier: 1) ein *Prinzip der Telegraphenleitung Betrachtung*. Es ist dies eine Projektion aus einem Punkt auf der Achse des Zylinders auf die Zylinderfläche, und danach die Abwicklung der Zylinderfläche auf die Ebene. Damit konnte er zur Zeichnung ein deformiertes Netz benutzen, das dem realen Quadratnetz entspricht; 2) Vertauschung der Funktion der Fluchtpunkte (Zenit — Nadir), oder drei Fluchtpunkte, von denen jeder für einen Teil der Abbildung dieselbe Funktion (und damit auch eine eigene *Gravitation*) hat; 3) planmäßige Deformation des Quadratnetzes einer Zeichnung nach geometrischen oder mathematischen Regeln. Das Hauptziel — die realen Elemente in unwirkliche Zusammenhänge zu bringen, oder umgekehrt, das reale Ganze mit unrealen Details zu erfüllen, und damit den philosophischen Blick auf die *harmonische Disharmonie* der Welt zu betonen — ist so mit mehr intuitiven geometrischen konstruktiven Mitteln erzielt.

Escher hat zwar ausdrücklich den Einfluß der Mathematik auf seine Methoden bestritten, historisch kann man aber in seinem Leben einige indirekte Anregungen aus diesem Bereich finden. Bei seiner Suche nach realistischen Abbildungen von nichtexistierenden Situationen hat er auch unser Wissen über Projektionsmethoden bereichert.

HERMANN WEYL
an der
ETH ZÜRICH
(1913 - 1930)

Günther Frei

14. Oktober 1989

Vortrag in Neuhofen an der Ybbs

Bericht über eine gemeinsame Arbeit mit Urs Stammbach:

Hermann Weyl an der ETH Zürich (1913-1930) - in Dokumenten

1. Berufung an die ETH (1913)

Das nach dem Vorbilde der Ecole Polytechnique in Paris entstandene Eidgenössische Polytechnikum, im Jahre 1911 in Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) umbenannt, hatte seit seiner Gründung bis zum Ausbruch des ersten Weltkrieges schon eine grosse Zahl bedeutender Mathematiker nach Zürich gebracht, darunter Joseph Raabe, Elwin Bruno Christoffel, Richard Dedekind, Hermann Amandus Schwarz, Georg Frobenius, Heinrich Weber, Wilhelm Fiedler, Hermann Minkowski und Carl Friedrich Geiser.

Als im Jahre 1913 Carl Friedrich Geiser, ein Grossneffe von Jacob Steiner, in den Ruhestand trat, wurde der junge Privatdozent *Hermann Weyl* (1885-1955) aus Göttingen an die ETH berufen. Damit begann für die ETH eine Zeit äusserst fruchtbarer mathematischer Aktivität.

Weyl wurde als Sohn des Bankdirektors Ludwig Weyl am 9. November 1885 in Elmshorn (Preussen) geboren. Nach dreijährigem Elementarunterricht in seiner Vaterstadt besuchte er das Gymnasium in Altona, wo er Ostern 1904 die Reifeprüfung bestand. Darauf studierte er zunächst in Göttingen, dann zwei Semester in München und schliesslich wieder in Göttingen Mathematik, daneben Philosophie, Physik und Chemie. Im Frühjahr 1908 promovierte er mit einer von Hilbert angeregten Dissertation über singuläre Integralgleichungen und im März 1910 folgte die Habilitation in Göttingen mit einer in den *Mathematischen Annalen* veröffentlichten Arbeit über die aus linearen Differentialgleichungen entspringenden Integraldarstellungen. Im Jahre 1913 erschien Weyls Aufsehen erregendes Buch *Die Idee der Riemannschen Fläche*, in welchem Weyl diese Theorie erstmals mit strengen Beweisen dank der neuen Untersuchungen von Luitzen Brouwer zur Mengenlehre und zur Analysis situs (Topologie) und mit Hilfe der neuen Methoden der Gruppentheorie (Algebraischen Topologie) versah. Im gleichen Jahre setzte Weyls Beschäftigung mit der Theorie der Gleichverteilung modulo Eins ein, deren Ausarbeitung im Jahre 1916 in den *Mathematischen Annalen* erschien.

Zuerst wurde die Stelle Geisers Rudolf Fueter (1880-1950) angetragen. Dieser, ebenfalls Schüler von Hilbert, hatte eben erst im Frühjahr 1913 eine ordentliche Professur an der Technischen Hochschule in Karlsruhe angetreten und wollte daher zu jener Zeit keinen Ruf annehmen. Weyls Berufung an die ETH ist nicht zuletzt auch einem Gutachten von Georg Frobenius zu verdanken.
Es wirkten damals an der ETH neben Geiser die Mathematiker *Marcel Grossmann* (1878-1936), seit Herbst 1907 Professor für Darstellende Geometrie und Geometrie der Lage, *Adolf Hurwitz* (1859-1919), vom Wintersemester 1892 bis zu seinem Tode am 18. November 1919 Professor für höhere Mathematik, *Ferdinand Rudio* (1856-1929), seit Sommersemester 1881 Privatdozent und seit 1889 ordentlicher Professor für höhere Mathematik, *Arthur Hirsch* (1866-1948), seit Sommersemester 1893 Privatdozent und von Sommersemester 1903 bis zur Emeritierung im Sommer 1936 Professor für höhere Mathematik, *Jérôme Franel* (1859-1939), seit 1886 ordentlicher Professor für höhere Mathematik in französischer Sprache, *Louis Kollros* (1878- 1959), seit 1909 ordentlicher Professor für Geometrie in französischer Sprache, und ausserdem in der gleichen Abteilung *Ernst Meissner* (1883-1939), seit Sommersemester 1909 Privatdozent für reine und angewandte Mathematik und seit Sommersemester 1910 ordentlicher Professor für Technische Mechanik und *Albert Einstein* (1879-1955), seit Wintersemester 1912 Professor für Theoretische Physik. Einstein, Grossmann und Kollros hatten schon von 1896 an gemeinsam an der ETH studiert.

FREI

2. Die Zeit an der ETH (1913-1930)

Als Weyl im Jahre 1913 an die ETH kam, waren Einstein und Grossmann gerade mit der mathematischen Ausarbeitung der Allgemeinen Relativitätstheorie und Gravitationstheorie beschäftigt. Mit grossem Interesse wandte sich Weyl dieser neuen Theorie zu. Als sie 1915, kurz nachdem Einstein im Sommer 1914 die ETH verlassen hatte, zu einem gewissen Abschluss gekommen war, konnte Weyl im Sommersemester 1917, als er die durch den Wegzug Einsteins entstandene Lücke zu überbrücken hatte, erstmals in einer Vorlesung eine systematische und strenge mathematische Darstellung dieser Theorie geben. Daraus ist Weyls bekanntes Buch *Raum - Zeit - Materie* (1918) hervorgegangen.

Am 11. Mai 1915 wurde Weyl als deutscher Staatsangehöriger in den deutschen Heeresdienst eingezogen. Als gemeiner Landsturmmann, später Gefreiter, war er einem in Saarbrücken stationierten Infanterieregiment zugeteilt. Dank der Intervention des Schweizerischen Schulrates konnte auf den 3. Mai 1916 Weyls Entlassung aus dem Heeresdienst erwirkt werden. Kurz darauf erhielt Weyl einen Ruf an die Technische Hochschule in Karlsruhe als Nachfolger für den nach der Universität Zürich berufenen Fueter. Dieses Angebot lehnte Weyl jedoch ab, nachdem er als Gegenleistung eine Besserstellung an der ETH erwirkt hatte. Im Februar 1918 erging an Weyl ein neues Angebot, dieses Mal aus Breslau, an dem auch Hilbert mitbeteiligt war. Erst meldete Weyl am 5. April 1918 an Einstein, er hätte den Ruf angenommen. Im September desselben Jahres jedoch lehnte er schliesslich dieses Angebot ab, nicht zuletzt aus gesundheitlichen Gründen.

Im Februar 1920 erhielt Weyl einen ehrenvollen Ruf nach Göttingen, wo der Lehrstuhl von Felix Klein neu zu besetzen war. Zwei Monate später trat ein weiteres Angebot nach Berlin hinzu. Die Entscheidung fiel Weyl wieder schwer. Schliesslich rang er sich an einem Abend zu Beginn des Monates Juli 1920 zum Entschluss durch, die Berufung nach Göttingen anzunehmen. Als er jedoch beim Telegraphenamt ankam, kabelte er eine Absage.

Die nächste Berufung folgte schon im September desselben Jahres nach Amsterdam, wo Luitzen Brouwer als Ersatz für die Ablehnung eines an ihn ergangenen Rufes nach Berlin die Schaffung eines neuen Ordinariates für Funktionentheorie erwirkt hatte. Auch dieses Angebot lehnte Weyl ab. Dafür erhielt er in Zürich wieder verschiedene Zugeständnisse, wozu neben einer weiteren Gehaltsverbesserung auch

FREI

die Gewährung eines Urlaubes im Hochgebirge während der Monate Januar bis März für die folgenden drei Jahre, die gelegentliche Inanspruchnahme eines Assistenten und der Ausbau der Mathematischen Seminar-Bibliothek gehörten. Zu solchen Kuraufenthalten hatte ihm sein Arzt Heinrich Zangger, Direktor des Gerichtlich Medizinischen Institutes der Universität Zürich, dringend geraten.

Im Frühjahr 1922 weilte Weyl auf Einladung des Institut d'Estudis Catalans in Barcelona und anschliessend an der Universität in Madrid, wo er je einen Vortragszyklus über die *Mathematische Analyse des Raumproblems* hielt. Daraus ist dann das Buch gleichen Titels hervorgegangen (Springer, 1923).

Als im Februar 1925 Weyl aus gesundheitlichen Gründen wieder um Urlaub nachsuchen musste, führte der junge Johann von Neumann, damals Student an der Chemischen Abteilung der ETH Weyls Vorlesung über Axiomatik zu Ende. Drei Monate später erhielt Weyl eine neue Berufung, dieses Mal nach Leipzig, wo der Lehrstuhl von Gustav Herglotz wieder zu besetzen war, nachdem Herglotz einen Ruf nach Göttingen angenommen hatte. Als neue Zugeständnisse von Seiten der ETH erhielt Weyl neben einer weiteren Gehaltsverbesserung eine Erhöhung des Kredites für die Mathematische Seminar-Bibliothek, die Gewährung von finanziellen Mitteln um alle paar Jahre einen Mathematikertag abhalten, d.h. bedeutende Forscher zu Vorträgen an die ETH einzuladen zu können und die Verbesserung des Anstellungsverhältnisses des Assistenten und Titularprofessors Georg Polya. Auf diese Weise wurden später George W. Birkhoff, Erich Hecke, Gaston Julia und Emil Artin nach Zürich eingeladen.

Ende März 1926 trat für Weyl insofern eine wichtige Änderung ein, als nach dem Rücktritt des bisherigen Schulratspräsidenten *Robert Gnehm*, mit dem sich Weyl ausgezeichnet verstanden hatte, der damalige Rektor *Arthur Rohn* in das einflussreiche Amt nachrückte. Im September gleichen Jahres vertrat Weyl die Schweiz anlässlich des 6. internationalen Philosophen-Kongresses, der an der Harvard University in Cambridge (Mass.) stattfand. Dabei nahm Weyl die Gelegenheit wahr, an verschiedenen amerikanischen Universitäten Gastvorträge zu halten und erste Verbindungen zu knüpfen. Das anschliessende Wintersemester 1926/27 verbrachte Weyl auf Einladung der Universität Göttingen als Gastprofessor an der Stätte seiner einstigen Studien. Das entsprechende Urlaubsgesuch war nicht ohne gewisse Schwierigkeiten gewährt worden.

Als dann schon im Februar 1927 eine Berufung an die Columbia University in New York folgte mit der Einladung das akademische Jahr 1927/28 dort als Visiting Professor zu verbringen, um die Verhältnisse besser kennen lernen zu können, wurde die Gewährung des entsprechenden von Göttingen aus eingereichten Urlaubsgesuches mit einer Hinhaltetaktik von Seiten des Präsidenten vereitelt. Immerhin erreichte Weyl durch die damit verursachte Absage des Angebotes aus New York eine weitere Erhöhung seiner Einkünfte und des Kredites für die Seminar-Bibliothek.

Allerdings befand sich damals der Präsident Rohn in einer nicht beneidenswerten Lage, da auch der Physiker *Peter Debye* (1884-1966) aufgrund eines äusserst lukrativen Angebotes aus Leipzig hohe Forderungen stellte. Im Gegensatz zum Falle Weyl konnte aber der Weggang von Debye nicht verhindert werden, ebensowenig wie es damals der Universität Zürich gelang, die Berufung von Erwin Schrödinger nach Berlin abzuwenden. Durch die Berufung von *Wolfgang Pauli* (1900-1958) an die ETH und von Gregor Wentzel an die Universität ist aber junger und vielversprechender Ersatz geschaffen worden.

Auch im Lehrkörper der Mathematik, der zur Abteilung IX gehört, waren damals personelle Änderungen eingetreten. So wurde auf Herbst 1927 anstelle des aus gesundheitlichen Gründen vorzeitig zurückgetretenen Marcel Grossmannn *Walter Saxer* (1896-1975) berufen. An die Stelle des auf den 1. April 1928 in den Ruhestand getretenen Ferdinand Rudio trat *Georg Polya* und Jérôme Franel wurde auf den 1. Oktober durch *Ferdinand Gonseth* (1890-1975) ersetzt.

Anfang 1928 erhielt Weyl von Oswald Veblen ein neues interessantes Angebot nach Princeton als erster Thomas D. Jones Forschungs-Professor in Mathematischer Physik, vorerst für das akademische Jahr 1928/29 mit der freien Entscheidung für eine spätere Annahme dieser Stelle als feste Anstellung. Dafür wurde Weyl von der ETH für das Studienjahr 1928/29 beurlaubt. Als Stellvertreter für die Dauer des Wintersemesters 1928/29 konnte Rolf Nevanlinna aus Helsinki verpflichtet werden, nachdem Artin wegen Unabkömmlichkeit in Hamburg hatte absagen müssen.

In Princeton gefiel es dann Weyl so gut, dass er erst an ein Bleiben dachte. Schliesslich überwogen aber doch seine starken Bindungen zu Europa und zu dessen reicher Tradition, so dass er auf den 1. Oktober 1929 wieder nach Zürich zurückkehrte, allerdings nicht ohne vorher weitere Vergünstigungen ausgehandelt zu haben. Diese betrafen nebst einer weiteren Gehaltserhöhung die Schaffung einer Assistentenstelle am Mathematischen Seminar.

3. Demission von der ETH (1930)

Ein halbes Jahr später, Anfang April 1930, trat ein neues Angebot an Weyl heran, nämlich aus Göttingen, wo er schon lange zum Nachfolger von David Hilbert ausersehen worden war. Obgleich der Präsident den neuen Forderungen Weyls ein gewisses Stück entgegenkam, nahm Weyl zu Anfang Mai den sehr ehrenvollen Ruf nach Göttingen an.

Zum Nachfolger von Weyl an der ETH wurde an erster Stelle Emil Artin in Hamburg und an zweiter Stelle Rolf Nevanlinna aus Helsinki bestimmt. Beide lehnten aber ab, Artin weil ihm das Angebot aus Zürich gegenüber den Bedingungen in Hamburg als zu wenig attraktiv erschien und Nevanlinna, weil dieser Helsinki nicht verlassen wollte. So musste Ende August die Nachfolge Weyls von neuem angegangen werden. Dabei wurde an erster Stelle *Heinz Hopf* (1894-1971) genannt, damals Privatdozent in Berlin, an zweiter Stelle Johann von Neumann, zu dieser Zeit Gastdozent in Princeton. Nach den ersten losen Verbindungen des Präsidenten mit Hopf, setzte Anfang Oktober im Anschluss an einen Abschiedsbrief Weyls zwischen Weyl und Rohn ein reger Briefwechsel ein, in dem Weyl seine Besorgnis über die neue, Unheil verkündende politische Entwicklung in Deutschland nicht verbergen konnte. An den Reichstagswahlen vom 14. September 1930 errangen nämlich die Nationalsozialisten einen spektakulären Zuwachs von 12 auf 107 Sitze. In der Folge dieses Briefwechsels bot Rohn die vakante Stelle ihrem ehemaligen Inhaber noch einmal an. Nach abermaligen harten inneren Kämpfen rang sich Weyl am 18. November zu der definitiven Bestätigung seiner im Mai gefällten Entscheidung durch, obgleich dies gegen seine innere Überzeugung geschah. Damit war der Weg frei für die Berufung von Hopf an die ETH, die auf den 1. April 1931 erfolgte.

Tobies Renate
Karl-Sudhoff-Institut
Karl-Marx-Universität Leipzig

Zur Stellung der angewandten Mathematik an der Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert - allgemein und am Beispiel der Versicherungsmathematik

Klein schrieb 1904 in seinem Beitrag für die Deutsche Unterrichtsausstellung in St. Louis:
"Daß die reine Mathematik, unbeschadet ihrer selbständigen Entwicklung, in ihrem eigenen Interesse mit der angewandten Mathematik in allseitiger Beziehung gehalten werden muß, ist vielleicht noch nicht ... zur allgemeinen Überzeugung geworden; man hört in der Tat immer noch gelegentlich die entgegengesetzte Meinung vertreten, daß nämlich die moderne Entwicklung der reinen Mathematik von den Anwendungen direkt wegführe und in dieser Richtung nicht aufgehalten werden dürfe" /9, S. 264/.

Dennoch kann es wohl als eine maßgebliche Tendenz dieses Zeitraumes - zumindest im damaligen Deutschland und in Österreich - bezeichnet werden, den Anwendungen der Mathematik wieder stärkeres Gewicht im Rahmen der Mathematikergemeinschaft, aber auch innerhalb der verschiedenen Anwendungsgebiete, zu verleihen.

Insbesondere wenn letztere, d.h. vor allem technische Wissenschaften, Naturwissenschaften, Versicherungswesen und Bildungsbereiche, berücksichtigt werden, könnte man gar geneigt sein, von einer Modeerscheinung zu sprechen. Der von gesellschaftlichen Normen geprägte Maßstab für diese zeitbegrenzte ganz bewußte Betonung der mathematischen Anwendungen beruhte in erheblichem Maße auf der Ingenieurbewegung und der Unterrichtsreformbewegung dieser Jahre.

Von einer Modeerscheinung würde ich jedoch nicht sprechen, wenn die Mathematikergemeinschaft allein betrachtet wird. Hier überwog doch die Auffassung derjenigen, welche die "Ehre" der Wissenschaft vornehmlich in der Pflege der reinen Mathematik erblickten.

Das Bemühen um die Anwendungen beruhte vor allem

- auf der Erkenntnis weniger Wissenschaftler, daß die schöpferischen Potenzen der Mathematik und anderer Wissenschaften einfach ungenutzt bleiben, wenn die Beziehungen zueinander nicht beachtet werden;
- auf der Unterrichtsreformbewegung, die um die Jahrhundertwende internationalen Charakter annahm und nach anschaulicher, lebensverbundener Lehre strebte;
- und auf der Kritik an der praxisfernen Mathematikausbildung durch die Ingenieure.

Die neue Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten der Mathematik von 1898 in Preußen war unter der Vielzahl eingeleiteter Maßnahmen die wirkungsvollste. Mit Einführung einer besonderen Lehrbefähigung für angewandte Mathematik (darstellende Geometrie, technische Mechanik, Geodäsie bzw. Wahrscheinlichkeitsrechnung) wurde insbesondere den Forderungen der Ingenieure entsprochen /8/. Im Ergebnis dieser Prüfungsordnung wurden nicht nur die Lehre an den Universitäten erweitert, sondern auch Impulse für derartige Forschungen erteilt. Ausdruck dessen war u.a. das geänderte Profil der "Zeitschrift für Mathematik und Physik", die sich ab 1901 ausschließlich "angewandter Mathematik" mit einem sehr breiten Sprektrum öffnete (vgl. /23/).

Zu den geförderten Gebieten gehörte die Versicherungsmathematik, die im folgenden näher betrachtet werden soll. Dabei interessiert vor allem die Frage, wie das Gebiet an deutschen Universitäten etabliert wurde.

Erfahrungen aus den USA und Anregungen aus Österreich erwiesen sich als entscheidende Einflußgrößen. Einerseits war von Wert, daß Felix Klein bereits während seines ersten Aufenthalts in den USA 1893 den Betrieb der amerikanischen Versicherungsgesellschaft "Mutual life" sowie ein "Textbook of Actuaries" von Clintock kennen und schätzen gelernt hatte /17, S. 45/. Andererseits hatte Kleins ehemaliger Studienfreund Ludwig Kiepert (1846-1934), o. Prof. der Mathematik an der TH Hannover, seit 1893 nebenamtlich die Stelle des mathematischen Direktors einer Versicherungsgesellschaft inne, so daß auch hier ein unmittelbares Interesse an der Ausbildung von Versicherungssachverständigen bestand (vgl. /16/).

Auf Wunsch des Wiener Mathematikers Leopold Gegenbauer (1849-1903) sprach Kiepert "Über die mathematische Ausbildung von Versicherungstechnikern", als die Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte und mit ihr die Jahresversammlung der DMV 1894 in Wien stattfand /6/.

Gegenbauer hatte ähnlich wie Klein aus der Entwicklung der technischen Wissenschaften erkannt, daß enge Beziehungen zwischen Mathematik und Anwendungen gefördert werden sollten /5, S. 325 f./. Als er 1893 nach Wien berufen worden war, stand die Ausbildung von Versicherungssachverständigen zur Diskussion, erbat das zuständige österreichische Ministerium Gutachten dazu und gehörten schließlich Lehrveranstaltungen im Kurs für Versicherungstechnik zu Gegenbauers Lehrauftrage (vgl. /22, S. 7/).

Hieraus erklärt sich auch der Wunsch, das Problem im breiteren Kreise zu diskutieren. Kiepert begründete in seinem Vortrag, warum eine Ausbildung von Versicherungssachverständigen an Universitäten notwendig und sinnvoll ist /6/. Dabei ist interessant, daß es innerhalb nur eines Jahres gelang, tatsächlich ein Seminar für Versicherungswissenschaft an einer deutschen Universität einzurichten.

Es mag wohl mit dem Sättigungsgrad des Mathematiklehrerberufs und dem Rückgang mathematischer Studierender zu dieser Zeit zusammenhängen, daß Klein sofort die Initiative ergriff und die Errichtung eines solchen Seminars betrieb (vgl. /17/). Noch auf der Wiener Versammlung 1894 gewann er den Hallenser Mathematiker Albert Wangerin (1844-1933) für diesen Plan. Im Auftrage Kleins veranlaßte Wangerin seinen Kollegen, den Nationalökonomen Robert Friedberg (1851-1920), das Problem im preußischen Abgeordnetenhause zur Sprache zu bringen, dessen Mitglied dieser seit 1886 war. Der preußische Ministerialdirektor Friedrich Althoff (1839-1908) unterstützte das Unternehmen, und mit einer Besprechung von Althoff, Klein, Kiepert und dem Göttinger Universitätskurator Höpfner am 5. September 1895 wurde die neue Einrichtung besiegelt. Althoff erarbeitete

noch während dieser Besprechung Richtlinien für das Seminar, welches am 1. Oktober 1895 unter Leitung des Nationalökonomen Wilhelm Lexis (1837-1914) eröffnet wurde. Lexis verfaßte die Statuten des Seminars (vgl. Anhang Nr. 1) und bezog Felix Klein als Examinator für reine Mathematik in die Prüfungen des Seminars bewußt ein /A 1, X, Nr. 867/ (vgl. Prüfungsordnung für Versicherungsverständige, Anhang Nr. 2).

Das Seminar war unter der Leitung von Lexis sehr produktiv. Im Zeitraum von 1897 bis 1914 erwuchsen daraus 24 Dissertationen /14, S. 38 f./. Bei der Organisation der Lehre orientierte sich Lexis am Beispiel der Göttinger Mathematiker und veranstaltete mit dem Vertreter der Versicherungsmathematik, zunächst Georg Bohlmann (1869-1928), und dem Vertreter für Versicherungsrecht, dem Juristen Viktor Ehrenberg, gemeinsame Seminare /14, S. 38/.

Interessant ist der wissenschaftliche Werdegang des ersten Versicherungsmathematikers in Göttingen. Bohlmann hatte in seiner Heimatstadt Berlin bei L. Kronecker (1823-1891) und L. Fuchs (1833-1902) studiert, aber für seine Dissertation selbständig die in Berlin verpönte Liesche Gruppentheorie herangezogen (vgl. /15/). Aus diesem Grunde promovierte er schließlich in Halle und habilitierte sich 1894 in Göttingen. Nach Abschluß des Verfahrens lenkte ihn Klein sofort auf das Gebiet der Versicherungsmathematik, so daß er bereits im Sommersemester 1895 eine entsprechende Vorlesung anbot. Wenn diese auch noch keinen Hörer fand, so hatte Klein damit weitsichtig personelle Bedingungen für die Etablierung des Seminars für Versicherungswissenschaft bedacht. Es ist bemerkenswert, daß er gar auch den ersten Mathematikstudenten, Wilhelm Lorey (1873-1955), zum Besuch der versicherungsmathematischen Lehrveranstaltungen anregte /17, S. 46/ und dieser schließlich lange Zeit selbst auf diesem Gebiet lehrte.

Bohlmann vertiefte sich sehr stark in dieses Gebiet und bemühte sich um eine wissenschaftliche Begründung dafür. Als Klein gemeinsam mit dem Physiker Eduard Riecke (1845-1915) zu Ostern 1900 einen Ferienkurs für bereits in der Praxis tätige Lehrer organisierte, bezog er Bohlmann ein, obwohl die Frage im Mittelpunkt stand: "Was sind angewandte Mathematik und Physik im Sinne der neuen Prüfungsordnung ...?" Versicherungsmathematik gehörte noch nicht zu den Gebieten der Lehrbefähigung für angewandte Mathematik im Sinne dieser Prüfungsordnung von 1898. Hiermit wurde eine spätere Entscheidung vorbereitet und den Lehrern die Möglichkeit eröffnet, ein Diplom als mathematische Versicherungsverständige zu erwerben (vgl. /7, S. 23/).

Bohlmann betrachtete in vier Vorlesungen vor allem Probleme der Lebensversicherungsmathematik, wobei er besonders darauf achtete, den Anforderungen der Mathematiker nach einem "... logischen Aufbau, der auf einige wenige Prämissen gegründet ist, und in dem das, was man in Wirklichkeit beobachtet, als logische Consequenz der Axiome erscheint", zu entsprechen /2, S.120/. Er ging von fünf Hypothesen (Axiomen) aus. Dieses Axiomensystem präzisiert er zunächst in seinem von Klein angeregten Beitrag "Lebensversicherungs-Mathematik" für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften /3/ und schließlich in einem bisher weniger beachteten Vortrag auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß 1908 in Rom /4/. In den ersten Arbeiten blieb Bohlmann traditionell dabei stehen, einfach das übliche Vorgehen zu beschreiben und dies als axiomatisch zu bezeichnen (zur Bewertung dieser Arbeiten vgl. /20, S. 355/).

Eine Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung - wie sie durch Hilbert auf die Tagesordnung gesetzt war, vgl. 6. Hilbertsches Problem - war nicht das eigentliche Ziel von Bohlmann. Sein Anliegen bestand vielmehr darin, mathematische Aufgaben der Lebensversicherung konkret zu lösen. Dann verwundert es auch nicht, daß er im Jahre 1903 die akademische Laufbahn aufgab und in den Dienst der amerikanischen Lebensversicherungsanstalt "The Mutual Life Insurance Compagny" trat, welche seit November 1886 eine Filiale in Berlin besaß. Das Weiterbestehen dieser Filiale ist einem Gutachten der Göttinger Wissenschaftler Klein, Lexis und Bohlmann zu danken /A 1, VII, Bl. 1 ff., 143, 159 ff./. Die Aufforderung zu einem derartigen Gutachten hatte der preußische Innenminister an Klein gerichtet, als aufgrund eines anderen Gutachtens 1895 der Gesellschaft die Konzession entzogen werden sollte. Klein erklärte sich in einem Schreiben vom 27. Juni 1897 bereit und erwirkte die Mitarbeit

von Bohlmann und Lexis. Bohlmann, der die Hauptarbeit leistete, hatte sich wohl seitdem den Kontakt zu dieser Gesellschaft bewahrt.

Nach Bohlmanns Weggang aus Göttingen übernahm der Astronom Martin Brendel (1862-1939) die versicherungsmathematische Lehre. Etwa zum gleichen Zeitpunkt begann Klein (Herbst 1903) gemeinsam mit Carl Runge (1856-1927) und Guido Hauck (1845-1905) die Sektion "Angewandte Mathematik" des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses (1904 in Heidelberg) vorzubereiten. Dabei ist interessant, daß nach den Vorstellungen von Klein das breite Spektrum der "angewandten Mathematik" durch Vorträge widergespiegelt werden sollte, d.h. Astronomie, Geodäsie, Physik, Mechanik, Darstellende Geometrie, Numerisches und graphisches Rechnen sowie Versicherungswesen und Statistik /A 1, XXII F, Bl. 140 ff./, aber für das zuletzt genannte Gebiet schließlich kein geeigneter Vortragender gefunden wurde (vgl. /25/). Allerdings zog Klein in seinen vorbereitenden Überlegungen weder Bohlmann noch Brendel in Betracht. Er schlug Georg Friedrich Knapp (1842-1926) vor /A 1, XXIIF, Bl. 142/, einen Professor für Nationalökonomie und Statistik (vgl. auch /12/), dessen Vortrag jedoch nicht zu stande kam.

International begann eine außerordentlich starke Entwicklung von Versicherungsmathematik und Statistik - besonders geprägt durch die englischen biometrischen Arbeiten -. Die Vertreter dieses Gebietes suchten ganz bewußt Kontakt zu den Mathematikern, wie der IV. Internationale Mathematiker-Kongreß in Rom belegt. Beiträge zu Anwendungen der Mathematik insgesamt wurden in einem solchen Umfange angeboten, daß die Sektion geteilt wurde in A Meccanica, Fisica mathematica, Geodesia (24 Vorträge) und B. Applicazioni varie della Matematica (16 Vorträge) /1/. 11 Beiträge der Abteilung B waren Problemen der Versicherungsmathematik und Statistik gewidmet, wobei sich Wissenschaftler aus Italien, Frankreich, Belgien, USA und Deutschland beteiligten. Bemerkenswert ist, daß der einzige deutsche Beitrag von G. Bohlmann stammte, der sich trotz seines Ausscheidens aus der akademischen Laufbahn weiter mit theoretischen Arbeiten befaßt hatte.

Diese bisher wenig beachtete Arbeit "Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherungsmathematik" zeigt, daß Bohlmann sein System der Annahmen und Sätze weiter ausgebaut hatte. Die Anregung dazu ging von U. Broggi (geb. 1880) aus, der 1907 bei Hilbert mit der Dissertation "Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung" promoviert hatte. Bohlmann behielt im wesentlichen den im Enzyklopädieartikel eingenommenen Standpunkt bei, wonach in der Definition der Wahrscheinlichkeit das Schema der günstigen und möglichen Fälle ganz aufgegeben wird. Übereinstimmend mit Broggi vertrat er die Ansicht, daß die mathematische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch eine logische Analyse des Ereignisbegriffs ergänzt werden muß. Bei seinem Vorgehen fällt u.a. auf, daß er stärker als bisher auf logische Widerspruchsfreiheit achtete. Bei seinem Bemühen, die Besonderheiten der Sterbenswahrscheinlichkeiten gegenüber den allgemeinen Wahrscheinlichkeiten hervorzuheben, führte er aus:
"Die Aufgabe ist nun die, solche Schemen logisch widerspruchsfrei und in zweckmässiger Form aufzustellen, sodass sie die Erfahrung einerseits nicht doctrinär zu anticipieren versuchen, andererseits die aus ihr gewonnenen Resultate in übersichtlicher Weise zusammenzufassen gestatten" /4, S. 265/. Dem Axiomensystem Bohlmanns lag zweifellos die Boolsche Algebra zugrunde. Die Wahrscheinlichkeit p(A) wird als ein normiertes additives Maß betrachtet, noch nicht σ- additiv, wie etwa später bei Kolmogorov 1933. Bohlmann verwendete noch keine mengentheoretische Betrachtungsweise.

Die Tendenz einer zunehmend engeren Verbindung von Mathematik und Versicherungswesen zeigt sich international auch auf dem nächsten Mathematiker-Kongreß 1912 in Cambridge /19/. Wir beschränken uns hier aber speziell auf die weitere Entwicklung in Deutschland, insbesondere in Göttingen.

Als Brendel 1907 nach Frankfurt a.M. ging, blieb das Extraordinariat für Versicherungsmathematik zunächst unbesetzt. Im Jahre 1911 erhielt Felix Bernstein (1878-1956) diese Stelle, der trotz seiner persönlichen Zwistigkeiten mit einer Reihe von Wissenschaftlern (zu seinem Verhältnis zu Ernst Zermelo (vgl. z.

B. /18/) und seines eigenwilligen Vorgehens zum eigenen Vorteil (vgl. Anhang Nr. 4) schließlich ein eigenes Institut (Sommer 1918) und ein persönliches Ordinariat (Oktober 1921) erhielt. Ausschlaggebend dafür war das fachlich-sachliche Interesse der Göttinger Mathematiker an diesem Gebiet, die sich gegen die Mehrheit der Gesamtfakultät durchsetzen konnten (vgl. /24/).

Mit der Wiederbesetzung des Extraordinariats seit 1911 wurden zugleich maßgebliche Voraussetzungen zur Entwicklung des Gebietes geschaffen. Dazu gehörte vor allem die Aufnahme der Versicherungsmathematik als Wahlfach für die Lehrbefähigung in angewandter Mathematik im Rahmen der Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten. Diese Bestimmung galt zunächst nur für Göttingen und wurde erst 1917 auf ganz Preußen erweitert. Felix Klein gestaltete im Sommersemester 1911 gemeinsam mit Felix Bernstein ein Seminar zur Versicherungsmathematik, welches dem Ansehen dieses Gebietes diente. Daran beteiligten sich u.a. der polnische Mathematiker Stefan Mazurkiewicz (1888-1945) und Arthur Rosenthal (geb. 1887), ein Schüler Ferdinand Lindemanns (1852-1939) (vgl. Anhang Nr. 3).

Abschließend sei erwähnt, daß sich die Versicherungsmathematik zunehmend an weiteren deutschen Hochschuleinrichtungen etablierte, seit 1895 an der TH Dresden, seit 1913 in Leipzig, auch an Universitäten und Technischen Hochschulen Preußens und Bayerns. Dabei war das Ausmaß der Lehrveranstaltungen unterschiedlich; an einigen Einrichtungen gab es nur einzelne entsprechende Vorlesungen. So behandelte etwa Ladislaus von Bortkiewicz (1868-1931), Nationalökonom und Schüler von W. Lexis, in seiner Vorlesungsreihe "Einführung in die Versicherungs-Wissenschaft und Sozialversicherung" an der Berliner Universität auch zugleich die rechnerischen Methoden /13, S. 291/. Insgesamt ist es wohl berechtigt zu sagen, daß Mathematiker um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert maßgeblich beitrugen, mit der Versicherungsmathematik ein Anwendungsgebiet ihrer Wissenschaft zu fördern.

Bibliographie

/A 1/ Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek

Göttingen, Cod. Ms. Klein.

/A 2/ Universitätsarchiv Göttingen, Kuratorialakten, A I, Nr. 88a.

/1/ Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 6-11 Aprile 1908).

/2/ Bohlmann, G.: Über Versicherungsmathematik. In: /11/, S. 114-145.

/3/ Bohlmann, G.: Lebensversicherungsmathematik. In: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 1, Teil 2, Leipzig 1900 bis 1904, S. 852-917.

/4/ Bohlmann, G.: Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung. In: /1/, S. 244-278.

/5/ Gegenbauer, L.: Ein vergessener Österreicher. In: Jahresbericht der DMV, 12 (1903) S. 324-344.

/6/ Kiepert, L.: Über die mathematische Ausbildung von Versicherungstechnikern. In: Jahresbericht der DMV, 4 (1897) S. 116-181.

/7/ Klein, F.: Allgemeines über angewandte Mathematik. In: /11/, S. 15-25.

/8/ Klein, F.: Die Anforderungen der Ingenieure und die Ausbildung der mathematischen Lehramtscandidaten. In: /11/, S. 223-228.

/9/ Klein, F.: Mathematik, Physik, Astronomie, In: Die Universitäten im Deutschen Reich. Hrsg. v. W. Lexis, Berlin 1904.

/10/ Klein, F.: Wilhelm Lexis. In: Jahresbericht der DMV, 23 (1914) S. 314-317.

/11/ Klein, F.: Riecke, E. (Hrsg.): Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Leipzig und Berlin 1900.

/12/ Köhler, S.: Zur Geschichte und Organisation der Statistik bis zur Gründung der Deutschen Statistischen Gesellschaft. Diplomarbeit, Karl-Marx-Universität, Leipzig 1986 (Maschinenschrift. Manuskript, 101 S.).

/13/ Lorey, W.: Das Studium der Versicherungsmathematik. Rückblick und Ausblick. In: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 22(1922)

/14/ Lorey, W.: Wilhelm Lexis und seine Bedeutung für die Versicherungswissenschaft. In: Nordisk Statistisk Tidskrift, 4(1925) S. 31-41.

/15/ Lorey, W.: Georg Bohlmann zum Gedächtnis. In: Blätter für Versicherungsmathematik und verwandte Gebiete, 1(1928) S. 3-9.

/16/ Lorey, W.: Ludwig Kiepert. Zum Gedächtnis. In: Das Versicherungsarchiv, 5(1934) S. 211-217.

/17/ Lorey, W.: Die Bedeutung von Pierre Simon Laplace und Felix Klein für die Versicherungsmathematik. In: Blätter Deutsch. Ges. Versicherungs-Mathematik, Würzburg 1(1950) S. 39-50.

/18/ Peckhaus, V.: "Ich habe mich wohl gehütet, alle Patronen auf einmal zu verschießen". Ernst Zermelo in Göttingen (Manuskript 64 S.), Erscheint in: History and Philosophy of Logic, 11(1990).

/19/ Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge, 22-28 August 1912) Vol. II, Cambridge 1913.

/20/ Schneider, I.: Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933. Einführungen und Texte, Berlin 1989.

/21/ Schubring, G.: The Nachlass of Wilhelm Lorey. In: Historia Mathematica, 14(1987), 55-57.

/22/ Stolz, O.; Kobald, E.; Gmeiner, J. A.:Leopold Gegenbauer. In: Monatshefte für Mathematik und Physik, 15(1904) S. 3-10 und 129-136.

/23/ Tobies, R.: Zu Veränderungen im deutschen mathematischen Zeitschriftenwesen um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert. Teil I und II. In: NTM 23(1986)2, S. 19-33 und 24 (1987)1, S. 31-49.

/24/ Tobies, R.: Zur Berufungspolitik Felix Kleins. Grundsätzliche Ansichten. In: NTM 24(1987)2, S. 43-52.

/25/ Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. Leipzig 1905.

Anhang

1) Vorläufige Statuten des Königl. Seminars für Versicherungswissenschaft an der Universität Göttingen (UBG Cod Ms Klein I C 2, Bl. 108)

1. Das Königliche Seminar für Versicherungswissenschaft hat den Zweck, denjenigen, die als Mathematiker oder höhere Verwaltungsbeamte im öffentlichen oder privaten Versicherungswesen Verwendung zu finden wünschen, Gelegenheit zu einer angemessenen wissenschaftlichen Ausbildung darzubieten.

2. Zu diesem Zweck werden in dem Seminar Uebungen in den verschiedenen Zweigen der Versicherungswissenschaft, nämlich mathematische, ökonomisch-statistische und versicherungsrechtliche, veranstaltet, die sich theils entsprechenden Vorlesungen an der Universität anschliessen, theils selbstständig gehalten werden. Mit dem Seminar ist eine Fachbibliothek und ein Lesezimmer verbunden.

3. Das Seminar ist berechtigt, Prüfungen abzuhalten und den mit Erfolg Geprüften Diplome auszustellen, durch die sie sich als Versicherungsverständige der mathematischen oder der administrativen Richtung ausweisen können.

4. Die Mitglieder des Seminars theilen sich in ordentliche und ausserordentliche. Die ordentlichen Mitglieder sind verpflichtet, in jedem Semester wenigstens eine grössere Arbeit zu übernehmen. Die ausserordentlichen Mitglieder nehmen nur als Zuhörer an den Uebungen theil.

5. Als ordentliche Mitglieder können aufgenommen werden:

a) immatriculirte Studierende, die mindestens im dritten Universitätssemester stehen;

b) Personen, die zum Hören von Vorlesungen an der Universität berechtigt sind, falls sie nach dem Ermessen des Direktors des Seminars die nöthige Vorbildung besitzen.

6. Wer zu der Diplomprüfung (Nr. 3) zugelassen werden will, muss dem Seminar wenigstens ein Jahr als ordentliches Mitglied angehört haben und nachweisen, dass er folgende Vorlesungen gehört hat:

Versicherungsrechnung.
Versicherungs-Oekonomik und -Statistik.
Versicherungsrecht.
Theoretische Nationalökonomie.
Praktische Nationalökonomie.
Handels-, Wechsel- und Seerecht.

Die Prüfung umfasst für beide Kategorien von Versicherungsverständigen: Versicherungsrechnung, Versicherungs-Oekonomik und -Statistik, theoretische und praktische Nationalökonomie. Dazu kommt für die Mathematiker noch eine besondere Prüfung in der Mathematik und für die Kandidaten der administrativen Klasse eine Prüfung im Versicherungsrecht.

Das Genauere wird durch eine besondere Prüfungsordnung festgestellt.

7. Die ordentlichen und ausserordentlichen Mitglieder des Seminars haben einen Beitrag von 5 Mark für das Semester zu entrichten, auf Grund dessen ihnen das Recht der Benutzung des Lesezimmers und der Bibliothek zusteht.

8. Die äussere und finanzielle Verwaltung des Seminars liegt einem vom Minister der geistlichen Unterrichts- etc. - Angelegenheiten ernannten Direktor ob. Die Prüfungen werden unter dem Vorsitz des Direktors von einer Commission abgehalten, deren Mitglieder vom Minister aus der Zahl der Docenten, die die Seminarübungen oder die für das Seminar in Betracht kommenden Vorlesungen halten, ernannt werden.

2) Prüfungsordnung für Versicherungsverständige vom 27. Juli 1896 (UBG Cod Ms Klein I E, Bl. 46-48).

§ 1. Die Prüfung der Bewerber um das Diplom für Versicherungsverständige wird unter dem Vorsitz des Direktors des Königlichen Seminars für Versicherungswissenschaft an der Universität Göttingen von den Mitgliedern der von dem Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten zu diesem Zwecke ernannten Kommission abgehalten.

§ 2. Zur Prüfung können nur solche Bewerber zugelassen werden, welche dem Seminar für Versicherungswissenschaft mindestens zwei Semester als ordentliche Mitglieder angehört haben.

Die Gesuche sind unter Beifügung der auf Schulbildung und Universitätsstudium bezüglichen Nachweise an den Vorsitzenden der Kommission zu richten, welcher über die Zulassung entscheidet und die Prüfungstermine bestimmt.

§ 3. Die Prüfung zerfällt in eine solche für Bewerber der administrativen und für Bewerber der mathematischen Klasse.

§ 4. Die Prüfung der Bewerber der administrativen Klasse umfasst

a) eine mündliche Prüfung in folgenden Fächern:
   1) Theoretische Nationalökonomie (Dauer 25-30 Minuten),
   2) Praktische Nationalökonomie (Dauer 25-30 Minuten),
   3) Statistik und Oekonomik des Versicherungswesens (Dauer 3/4-1 Stunde),
   4) Privates und Reichsversicherungsrecht (Dauer 3/4-1 Stunde);

b) eine schriftliche Prüfung in den Elementen der Versicherungsrechnung.

Für die schriftliche Prüfung, die unter Klausur stattfindet, werden dem Bewerber vier numerische Aufgaben gestellt, wie sie in der gewöhnlichen Praxis der Lebensversicherung vorkommen. Für die Lösung derselben wird ihm ein Zeitraum von 1 1/2 Stunden gelassen und das übliche Tabellenmaterial zur Verfügung gestellt.

§ 5. Für die Bewerber der mathematischen Klasse besteht die Prüfung

a) aus einer mündlichen Prüfung in der Theoretischen und Praktischen Nationalökonomie, sowie in der Statistik und Oekonomik des Versicherungswesens, wie zu § 4a Ziffer 1-3, ferner in der höheren Mathematik (Dauer 3/4-1 Stunde); die Prüfung in letzterem Fache hat sich auf die Elemente der analytischen Geometrie, die Differential- und Integralrechnung und die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Einschluss der Methode der kleinsten Quadrate zu erstrecken;

b) aus einer gleichfalls unter Klausur und mit gleicher Zeitdauer wie zu § 4b stattfindenden schriftlichen Prüfung,

in der der Bewerber Aufgaben zu lösen oder Fragen zu beantworten hat, die sich auf schwierigere Gegenstände beziehen.

§ 6. Die Prüfung soll in der Regel auf zwei Tage vertheilt werden und sich thunlichst im einzelnen Prüfungstermine auf nicht mehr als 2 Bewerber erstrecken.

§ 7. Ueber die Leistungen des Bewerbers in der schriftlichen Prüfung sowie in den einzelnen Fächern der mündlichen Prüfung ist seitens des Fachexaminators eine Censur nach folgendem Schema zu ertheilen:

1) sehr gut,
2) gut,
3) genügend,
4) theilweise genügend,
5) ungenügend.

Die Gesammtcensur über den Ausfall der Prüfung wird nach demselben Schema mit Berücksichtigung des Gewichts der einzelnen Censuren durch Beschluss der bei der Prüfung betheiligten Mitglieder der Commission nach Stimmenmehrheit festgesetzt. Bei Stimmengleichheit entscheidet die Stimme des Vorsitzenden.

§ 8. Wenn die Gesammtcensur nicht mindestens genügend lautet, so darf das Diplom dem Bewerber nicht ertheilt werden. Er kann es jedoch nachträglich erlangen, wenn er sich nach Ablauf von mindestens sechs Monaten in denjenigen Fächern, in denen er eine geringere Einzelcensur erhalten hatte, mit genügendem Erfolge einer Wiederholungsprüfung unterzieht.

§ 9. Die Gesammtcensur und die ertheilten einzelnen Censuren sind in das Diplom aufzunehmen, sowie auch mit einer kurzen Notiz über den Verlauf der Prüfung zu den Akten zu vermerken. Die Diplome werden von allen Mitgliedern der Kommission unterzeichnet.

§ 10. Denjenigen Mitgliedern des Seminars für Versicherungswissenschaften, welche sich der Prüfung nicht unterziehen oder sie nicht bestanden haben, wird auf ihren Antrag von dem Direktor des Seminars, eventuell nach Benehmen mit den betheiligten Dozenten, ein Abgangszeugnis ausgestellt, das ein Urtheil über ihren Fleiss und die Angabe der von ihnen gehörten

Vorlesungen enthält.

§ 11. Die Gebühren, welche vor der Prüfung an die Universitätskasse zu Göttingen einzuzahlen sind, betragen für die Prüfung der einzelnen Klasse 40 Mk., für die Prüfung in beiden Klassen 48 Mk., für die Wiederholungsprüfung 20 Mk. Für das Abgangszeugnis (§ 10.) ist ausser den beim Abgange von der Universität im allgemeinen zu leistenden Gebühren eine besondere Gebühr von 5 Mk. an die Universitätskasse zu entrichten.

Berlin, den 27. Juli 1896.

Der Minister
der geistlichen, Unterrichts- u. Medizinal-Angelegenheiten.
In Vertretung:
v. Weyrauch.

3.) Vorträge im Seminar Versicherungsmathematik, Sommersemester 1911, Leitung: Felix Klein und Felix Bernstein. (Protokollband Nr. 28 der Seminare F. Kleins, handschriftlich, aufbewahrt im Mathematischen Institut der Universität Göttingen)

Heiligenpahl:	Sterbetafeltechnik und Sterbeformeln.
Brühl:	Form der Tafeln und Zähleinheit.
Zorn:	Mechanische Ausgleichsmethoden.
Post, bez. Rothe:	Invalidität und Sterblichkeit.
Burlet:	Invalidität und Lebensversicherung.
Mazurkiewicz:	Weiterentwicklung der Dispersionstheorie.
Rosenthal, A.:	Biometrik
Rosenthal, A.:	Risikotheorie im Lebensversicherungswesen.

4.) Aufzeichnungen Felix Kleins zum "Fall Bernstein" am 27. Juni 1917 (UBG Cod. Ms. Klein Va, Bl. 24, 24 v.)

" - Fall Bernstein.

Bisher: in der Sache stützen, in der Form vielfach unzufrieden, wegen Unzuverlässigkeit. (mit Runge)

Cf. Berufung.

Hereinnahme ins Lehramtsexamen

in die Göttinger Vereinigung. 1913

Bodensee

Versuch, im math. Institut Räume zu gewinnen.

Verhältnis zu K. Oldenberg[1]

Cf. Art der Unzuverlässigkeit

Berufung auf Unterredung mit Anderen.

Fortwährender Wechsel der Pläne

Winter 1916.17 Wunsch nach Zuschuss der G.(öttinger) V.(ereinigung) zu den math. stat. Arbeiten.

Hin und Her der Projekte. } meine Beteiligung.
Verhandlungen mit C. Runge }

(Verschiedene Kriegsbeanspruchungen)

Neue Entwicklung: Selbständiges math. stat. Institut.

Bernstein in Berlin mit den Goldschmidts[2]

- mit Naumann[3]

- mit Böttinger[4]

sein Bericht, der mir via Baade[5] zukam

Anfrage bei Böttinger und seine Antwort

ist Naumann sicher?

Trotzdem Vertretung meinerseits vor der Fakultät incl. des weiteren Planes eines stat. Kurses für Kriegsbeschädigte (nach Verabredung mit Runge)

Neuestes: B.(ernstein) bringt den Kurs-Plan a.(n) d.(as) Kriegsministerium und an die Presse (Wolffsches Bino).

Besuch bei Rieppel.[6]

Nun Sonntag 24. Juni:

Forderung, jetzt solle die G.(öttinger) V.(ereinigung) den Kurs bezahlen, und zwar nach Analogie mit 2000 M.

Meine Ablehnung: eine Art Erpressung.

Modifikation: nicht die G.(öttinger) V.(ereinigung) solle zahlen, sondern B.(ernstein) solle bei den Mitgliedern sammeln.

Auch hier Ablehnung meinerseits, unter Bezugnahme auf die Verschiedenartigkeit der Berichte über die Besprechung am Anhalter Bahnhof.

TOBIES

Protest von Bernstein, Besuch bei Caratheodory.[7]
Austrittserklärung.
Was nun?"

---

1 Karl Oldenberg (1864-1936) war Nachfolger von Wilhelm Lexis an der Universität Göttingen.

2 Th. Goldschmidt, A.-G. Essen, und Prof. Dr. Hans Goldschmidt, Berlin, waren Mitglieder der "Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik".

3 Otto Naumann war von 1907 bis 1918 Ministerialdirektor im preußischen Kultusministerium, verantwortlich für das Hochschulwesen. Naumann war seit 1885 Mitarbeiter Friedrich Althoffs in diesem Ministerium.

4 Henry Theodor von Böttinger (1848-1920), Chemieindustrieller, übernahm den Vorsitz der Göttinger Vereinigung seit ihrer Gründung am 28. Februar 1898.

5 W. Baade (gest. 1922) gründete 1920 am Psychologischen Institut der Universität Göttingen eine Abteilung für angewandte Psychologie.

6 Anton von Rieppel (1852-1926) war Vertreter der Brücken-Stahlindustrie und Gründungsmitglied der Göttinger Vereinigung.

7 Constantin Carathéodory (1873-1950) war als Nachfolger Felix Kleins seit 1913 o. Professor der Mathematik in Göttingen.

WUSSING

Mathematiker und Naturwissenschaftler während der Großen Französischen Revolution

Hans Wußing

Aus Anlaß des 200. Jahrestages der Großen Französischen Revolution von 1789 beabsichtigte der Vortragende einen hommage auf jene weltbewegenden Ereignisse. Nachdem in einer Abendveranstaltung ein Diapositivvortrag *Die Französische Revolution im Spiegel der Philatelie* geschichtliche Ereignisse, Politiker und Gelehrte vorgestellt worden waren, warf der Vortragende im eigentlichen Vortrag einige historiographische Fragen zu diesem Zeitraum auf. Gestützt auf neuere einschlägige Publikationen wurde u.a. die Hauptthese vertreten, daß die zeitliche Koinzidenz zwischen der Großen Französischen Revolution und der Folgezeit und der Industriellen Revolution einerseits und der durchgreifenden Umgestaltung der gesellschaftlichen Funktion von Mathematik und Naturwissenschaften bis hin zur inhaltlichen Neuorientierung andererseits nicht zufällig war, sondern verbunden war, als aktive Wechselwirkung dieser Sphären.