

IMU CANBERRA CIRCULAR

NO. 55 JULY 1986

*S: Austrian Symposium on History of Mathematics; Sp: -; V: Neuhofen an der Ybbs, Austria; D: 9 - 15 November 1986; A: Ch. Binder, Inst. für techn. Mathematik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstrasse 6-10, A-1040 Wien, Austria.

NACHRICHTEN DER ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

ÖSTERREICHISCHE MATHEMATISCHE GESELLSCHAFT EDITED BY

Nr. 141

März 1986

1. Österreichische Symposium zur Geschichte der Mathematik, 9.-15. 11. 1986 in Neuhofen an der Ybbs, Niederösterreich (bei Amstetten). Thema: Mathematik - anregend oder angeregt? Über das Wechselspiel zwischen reiner und angewandter Mathematik. Kosten: 6S 2300,- bzw. 2100,- bei Unterbringung im Einbett- bzw. Doppelzimmer bei voller Verpflegung incl. Sauna. Der Tagungsband ist inkludiert. Für Details wende man sich an Dr. Christa Binder, Institut für Technische Mathematik, TU Wien, Wiedner Hauptstraße 6-10, A-1040 Wien. Einladung

58

MEETINGS

HM 13

First Austrian Symposium on the History of Mathematics

Mathematics—Stimulating or Stimulated?

The subject of the symposium is the interplay between "pure" and "applied" mathematics in history and will be held November 9-15, 1986, Neuhofen/Ybbs, Lower Austria (between Linz and Vienna). The estimated costs are 2300/2100 Austrian Shillings (single/double room) and include food, one excursion, and congress volume.

Anyone interested in receiving details of this meeting should write to:

Dr. Christa Binder
Institut für Technische Mathematik
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstrasse 6-10
A - 1040 Wien, Österreich
Telephone: 0222-5601/5381

NOVEMBER 1986

9-15. Austrian Symposium on History of Mathematics, Neuhofen an der Ybbs, Austria. Topic: "Mathematics-stimulated or stimulating?" and "On the interaction between 'pure' and 'applied' mathematics through the ages." Organized by: Ch. Binder, Inst. für techn. Mathematik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstrasse 6-10, A-1040 Wien, Austria.

Special Meetings

Reprinted from the Notices, March 1986
© 1986 American Mathematical Society
Printed in the United States of America

HISTORIA MATHEMATICA
Volume 13, Number 1, February 1986



1. ÖSTERREICHISCHES SYMPOSIUM
ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

NEUHOFEN AN DER YBBS, 9. BIS 15. NOVEMBER 1986



1. ÖSTERREICHISCHES SYMPOSIUM
ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

NEUHOFEN AN DER YBBS, 9. BIS 15. NOVEMBER 1986

MATHEMATIK - ANREGEND ODER ANGEREGT?

Über das Wechselspiel zwischen "reiner" und "angewandter" Mathematik im Laufe der Geschichte

KURZFASSUNGEN DER VORTRÄGE

VERANSTALTER: ÖSTERREICHISCHE GESELLSCHAFT FÜR
GESCHICHTE DER NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEBER: CHRISTA BINDER, WIEN

HERRN PROF. DR. EDMUND HLAWKA ZUM 70. GEBURTSTAG GEWIDMET

Die Österreichische Gesellschaft dankt den folgenden Institutionen und Firmen für Ihre Unterstützung, ohne die die Durchführung dieses Symposiums nicht möglich gewesen wäre:

Der Technischen Universität Wien, insbesondere dem Institut für Analysis, Technische Mathematik und Versicherungsmathematik, dessen Vorstand, Herr Prof. Hlawka, mir ermöglichte, Arbeitszeit und sämtliche Einrichtungen des Instituts für die Organisation zu verwenden, und dem Institut für Algebra und Diskrete Mathematik.

Der Zentralsparkasse und Kommerzbank,
 der Ersten Österreichischen Sparkasse,
 der Creditanstalt,
 dem Verlag Hölder-Pichler-Tempsky,
 der Technischen Buchhandlung FRIC,
 der Firma PHILIPPS und
 der Niederösterreichischen Landesregierung.

Christa Binder
 Institut für Technische
 Mathematik, TU Wien
 Wiedner Hauptstr.6-10
 A-1040 Wien, Österreich

Wien, im Oktober 1986

Gedruckt mit Unterstützung der Kulturabteilung des Amtes der Niederösterreichischen Landesregierung.

P R O G R A M M

MONTAG, 10. NOV. 1986

9.15	ERÖFFNUNG	
9.30-12.30	VORTRÄGE	Seite
	<i>W. Schulze</i> : Korrekturen zum Tetraktys-Verständnis	1
	<i>E.A. Fellmann</i> : Zur Geschichte der Klothoide	13
	<i>R.H. Eddy</i> : The Kiepert Conics	21
15.30-18.30	VORTRÄGE	
	<i>M. Canak</i> : Historische Entwicklung und Anwendung der Kettenbrüche	26
	<i>Ch. Binder</i> : Wann existiert eine mittlere Bewegung? - ein zahlentheoretisches Problem	31
	<i>J. Sesiano</i> : Mittelalterliche Unterhaltungsaufgaben zwischen Wirklichkeit und Widersinnigkeit	

DIENSTAG, 11. NOV. 1986

9.30-12.30	VORTRÄGE	
	<i>W. Kaunzner</i> : Über Charakteristika in der mittelalterlichen abendländischen Mathematik	
	<i>P. Baptist</i> : Der fünfte merkwürdige Punkt - Anmerkungen zu seinem Entdecker und dessen Untersuchungen zur Dreiecksgeometrie	37
	<i>D. Laugwitz</i> : Das Beispiel Cauchy: Wechselbezüge zwischen Anwendung und Grundlegung der reellen Analysis?	45
15.30-18.30	VORTRÄGE	
	<i>K. Volkert</i> : Das Kontinuitätsprinzip in den Auseinandersetzungen um die schwingende Saite	52
	<i>T. Koetsier</i> : Über die Geschichte der Kinematik: einige allgemeine Bemerkungen sowie das Watt'sche Parallelogramm als Beispiel	58
	<i>R. Hildebrandt</i> : Goethes Hexeneinmaleins	63

MITTWOCH, 12. NOV. 1986

9.30-12.00	VORTRÄGE	
	<i>G. Frei</i> : Beispiel eines Beitrages von Leonhard Euler zur Wechselwirkung zwischen reiner und angewandter Mathematik	
	<i>G. Richenhagen</i> : Reine und angewandte Mathematik bei Carl Runge (1856-1927)	
	<i>A. Djafari Naini</i> : Entwicklung der Mathematikgeschichte in Persien	68
13.30	AUSFLUG	

DONNERSTAG, 13. NOV. 1986

	Seite
9.30-12.30 VORTRÄGE	
I. Schneider: Mutmaßliche Wurzeln einer frühen Glückspielrechnung bei den Arabern	73
W. Purkert: Zur Rolle der Mathematik bei der Entwicklung der Technikwissenschaften (Schwerpunkt 19. Jahrhundert)	
M. Otte: Die Mathematik im Verhältnis von Universität und Technischer Hochschule im 19. Jahrhundert	
15.30-18.30 VORTRÄGE	
E. Scholz: Symmetriekonzepte in den Kristallstrukturtheorien der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts und die Entstehung des geometrischen Gruppenbegriffs	77
M. Canak: Einige Richtungen in der Entstehung und in der historischen Entwicklung der klassischen Theorie der Randwertaufgaben für die analytischen und nichtanalytischen komplexen Funktionen	82
H.M. Mulder: Electrical Networks and Trees in the 19th Century	87

FREITAG, 14. NOV. 1986

9.30-12.30 VORTRÄGE	
E.M. Bruins: On some Ancient Computations Schemes for Tables and Problems	92
P.L. Griffiths: Mathematical Discoveries prior to 1750 were mainly stimulated by previous Discoveries and by calculated and observed Data particularly relating to Astronomy	99
A. Adam: Zur Geschichte der Statistik als Methodenlehre der Empirie	103
15.30-18.30 VORTRÄGE	
H. Kaiser: Josef Petzwal - Ein angewandter Mathematiker des 19. Jahrhunderts	106
17.00 A. Dick: Geboren in Ybbs - gestorben in Ybbs	119

SAMSTAG, 15. NOV. 1986

Es besteht die Möglichkeit, am Vormittag im Stadtmuseum von Ybbs/Donau eine Ausstellung über den österreichischen Mathematiker Wilhelm Wirtinger zu besichtigen.

SCHRIFTLICHER BEITRAG

I.H. Anellis: Russell's Problem with the Calculus	124
TEILNEHMERVERZEICHNIS	129

TEXTE ZUR TETRAKTYS

von

WERNER SCHULZE (Wien)

Das Wort "Tetraktys" (*tetraktýs*) begegnet in der harmonikalen Literatur immer häufiger (Haase 1966, Schwabe 1966, 1967, 1985, Jahoda 1971, van der Waerden 1979, Stössel 1982, Schulze 1983). Mancherlei Verwirrung ist als unausweichbare Folge eingetreten. Anliegen einer früheren Arbeit des Verfassers (Schulze 1983) war es zu zeigen, daß Name und Sachverhalt auseinanderklaffen, daß tetraktysche Sachverhalte früher und um ein mehrfaches öfter gegeben sind als ausdrücklich unter dem Namen "Tetraktys" reflektierte Pythagorismen als philosophische, mathematische oder musiktheoretische Lehrinhalte.

Iamblichos (De vita pyth. 82) berichtet in seiner Darstellung pythagoreisch-akusmatischer Weisheitssätze, daß diese Sprüche (*akolúsmata*) Fragen entweder der Art "Was ist" oder "Was am meisten" oder "Was soll man tun oder nicht" beantwortet hätten. Zur ersten Gruppe gehöre zum Beispiel der Satz: "Was ist das Orakel zu Delphi? Die Tetraktys; das ist auch die Harmonie, in der die Sirenen [singen]."

Das Wort Tetraktys steht noch in einem weiteren vornehmen Zusammenhang: dem pythagoreischen Schwur (entweder in seiner isolierten Überlieferung oder im Kontext des "Goldenen" Gedichts, jedoch stets in Versform). Ob der Schwur dem Gedicht entnommen oder in das Gedicht aufgenommen worden ist, sei dahingestellt. Der Zusammenhang von Delphischem Orakel, Tetraktys und Harmonie der Sirenen wird freilich, wie es scheint, in einem Prosa-Satz überliefert. Wir vermuten jedoch, daß auch hier ursprünglich ein Zweizeiler bestand, mit Tetraktys als Endwort der ersten Verszeile. (Burkert 1962, 64 versteht auch die Wortgruppe "Alles aber gleicht der Zahl", die von den antiken Autoren häufig mit dem Tetraktys-Schwur gekoppelt wurde, als Vers.) Es bedarf keines tiefen Eingriffs, um aus Iamblichos' Satz einen doppelzeiligen Vers zu bilden:

$$\tau\acute{\iota} \acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota} \tau\acute{o} \acute{\epsilon}\nu \Delta\epsilon\lambda\phi\omicron\tau\acute{\iota}\varsigma \mu\alpha\upsilon\tau\epsilon\acute{\iota}\omicron\nu; \acute{\eta} \gamma\grave{\alpha}\rho \tau\epsilon\tau\alpha\kappa\tau\acute{\upsilon}\varsigma;$$

$$\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho \acute{\alpha}\nu\epsilon\alpha\omicron\varsigma \acute{\alpha}\rho\mu\omicron\nu\acute{\iota}\alpha, \acute{\epsilon}\nu \tilde{\eta} \acute{\alpha}\acute{\iota} \Sigma\epsilon\iota\rho\eta\nu\epsilon\varsigma.$$

In freier Übersetzung:

Was aber ist das Orakel zu Delphi? Es ist die Tetraktys.

Ewig zugleich Harmonie, in der die Sirenen singen.

Greifbar ist das Wort "Tetraktys" erst im pythagoreisch geprägten frühen Neuplatonismus (Plutarch, Theon, Nikomachos, Sextos Empirikos, Athenagoras,

Iamblichos, Hierokles, Proklos), wo es in der Schwurformel des pythagoreischen Bundes und in musiktheoretischen und arithmologischen Erörterungen Verwendung findet. Die folgende Auswahl TEXTE ZUR TETRAKTYS zeigt all diese Ansatzpunkte: Hierokles (Anfang 5. Jhdt. n. Chr.) kommentiert die Schwurformel, Philipp (4. Jhdt. v. Chr.) beschreibt den tetraktyschen Sachverhalt im Geist der platonischen Akademie, Theon (Anfang 2. Jhdt. n. Chr.), neben Plutarch der kundigste Deuter der Tetraktys, listet die zahlreichen Bedeutungen des Wortes auf.

HIEROKLES VON ALEXANDREIA Über den Tetraktys-Schwur

In Aureum Pythagoreorum Carmen Commentarius XX, 11 - 21 (Köhler)

(Übersetzung: W. Schulze, basierend auf der Übertragung durch F. W. Köhler, in: Hierokles. Kommentar zum pythagoreischen Goldenen Gedicht, Stuttgart 1983)

Hierokles kommentiert Vers 46 und Halbvers 47 des Goldenen Gedichts:

ναὶ μὰ τὸν ἀμετέρα ψυχῆ παραδόντα τετρακτύν,
παγὰν ἀενάου φύσεως.

46 Wahrhaft, bei Ihm, der unserer Seele schenkte die Vierheit,

47 Quellkraft ew'ger Natur.

Für ihn [den Autor des Carmen Aureum] wird der Eid außerdem zum Dogma: Man müsse den Lehrer der Wahrheit so hoch ehren, daß man auch bei ihm schwört, falls es einmal zur Bekräftigung der Lehrsätze nötig sei, und daß man nicht nur den Satz: "Das hat er selber behauptet" mit Bezug auf ihn sagt, sondern auch, das verhalte sich so und so "bei ihm". Zugleich aber erteilt er im Zusammenhang mit den trefflichsten Verhaltensweisen theologische Belehrungen und legt dar, daß die Vierzahl (*tetrás*), die "Quelle der ewigen" Weltordnung, mit dem Demiurgen-Gott identisch sei. Weshalb dieser Gott aber eine Tetras ist, wirst du deutlich erkennen aus jenem heiligen Wort (*hierós logos*), das man Pythagoras zuschreibt, und in dem dieser Gott als "Zahl der Zahlen" gepriesen wird. Denn wenn alles Seiende durch seine immerwährenden Ratschlüsse seine Existenz hat, dann ist klar, daß auch die Zahl, die sich in jeder Gestalt (*eidós*) des Seienden findet, mit dem in jenem liegenden Ursprung verknüpft ist und daß sich die erste Zahl dort befindet (denn von dort ist sie auch hergekommen). Der von der Zahl durchmessene Raum ist aber die Dekas: Will man nämlich weiterzählen, kehrt man wieder zur Eins, Zwei und Drei zurück, zählt die zweite Dekade bis zur Auffüllung der Zahl zwanzig, genauso die dritte - daß man also dreißig sagt -, und so immer weiter, bis man zu hundert gelangt, nachdem man die zehnte Dekade durchgezählt hat. Und wiederum zählt man auf dieselbe Weise einhundertzehn und kann so ad infinitum (*iméchris*

apeíλου) fortfahren, indem man den Abstand der Dekade immer wieder durchläuft. Der Dekade Vermögen (*dýnamis*) aber ist die Tetrade: Denn bevor man beim Durchzählen die in der Dekade vorliegende Vollkommenheit erreicht, gewahrt man eine in der Tetrade vereinigte Vollkommenheit: Bei der Addition von der Zahl eins bis zur Zahl vier ergibt sich nämlich als Gesamtsumme die Dekas: eins, zwei, drei und vier ergibt zusammen die Zehnzahl. Auch ist das arithmetische Mittel zwischen eins und sieben die Vierzahl: Denn um die gleiche Zahl übertrifft sie irgendwie und wird übertroffen, da sie um die Zahl drei hinter der Zahl sieben zurückbleibt und um die Zahl drei die Zahl eins überschreitet. Die Besonderheiten der Monade und der Hebdomade sind die schönsten und besten: Denn als Ausgangspunkt jeder Zählung impliziert die Monade die Fähigkeiten aller, und die Sieben hat, gleichsam mutterlos und jungfräulich, die Wertigkeit der Eins im zweiten Rang. Sie wird nämlich weder von einer Zahl innerhalb der Dekade hervorgebracht (wie die 4 aus zweimal 2, die 6 aus zweimal 3, die 8 aus zweimal 4, die 9 aus dreimal 3 und die 10 aus zweimal 5), noch bringt sie eine der Zahlen innerhalb der Dekade hervor (wie die 2 die 4, die 3 die 6 und die 5 die 10). Da die Tetras aber in der Mitte zwischen der un erzeugten Eins und der mutterlosen Sieben liegt, hat sie die Wirkkräfte derer, die hervorbringen, und derer, die hervorgebracht werden, zugleich zusammengefaßt, insofern nämlich, als sie als einzige innerhalb der Zehn sowohl von einer Zahl hervorgebracht wird als auch eine hervorbringt. Denn die Zwei bringt, indem sie sich selbst verdoppelt, die Vierzahl hervor; und die Vierzahl, zweimal genommen, produziert die Acht. Auch findet man in der Tetrade die erste Erscheinungsform der dritten Dimension (*stereón*): Denn der Monas entspricht der Punkt, der Zwei die Linie - sie erstreckt sich von etwas zu etwas -, und mit der Drei steht die Fläche in Zusammenhang, denn die elementarste der geradlinigen Figuren ist das Dreieck. Das Dreidimensionale aber eignet der Vierzahl, denn die erste Pyramide sieht man in der Tetrade, wobei die Drei in Gestalt der dreieckigen Grundfläche untergelegt und die Eins ihr als Spitze aufgesetzt ist. Auch gibt es vier Erkenntnisformen des Seienden: Geist, Wissen, Meinung, Wahrnehmung. Denn man beurteilt alles Seiende entweder mit dem Geist, dem Wissen, der Meinung oder der Wahrnehmung. Mit einem Wort: Die Tetrade macht alles Seiende von sich abhängig: die Anzahl der Elemente, der Jahreszeiten, Altersstufen, Wohngemeinschaften, und man kann nichts anführen, was nicht auf der Tetraktys als Wurzel und Ursprung basieren würde. Die Vierzahl ist, wie wir gesagt haben, Schöpferin (*demiourgós*) und Urheberin (*aitia*) des Universums, geistig wahrnehmbarer Gott, Urheber des himmlischen und sinnlich wahrnehmbaren Gottes. "Geschenkt" aber ist dessen Erkenntnis den Pythagoreern durch Pythagoras selbst, bei dem nun auch der Verfasser dieses Gedichtes den Schwur leistet, wonach die Vervollkommnung der

Tugend uns zur Erleuchtung der Wahrheit emporführen werde. Dementsprechend könnte man also auch sagen, daß zwar das Gebot "Heilige den Eid!" zumal bei den ewig und unwandelbar bleibenden Göttern zu beachten sei, daß aber nun auf den Lehrer geschworen werde, der uns "die Tetraktys geschenkt" hat. Dieser war keiner der unsterblichen Götter, auch keiner der naturhaften Heroen, sondern er war ein Mensch, durch die Angleichung an Gott ausgezeichnet, und gegenüber seinen Anhängern wahrte er das Ebenbild Gottes. Angesichts dieser dermaßen bedeutenden Aussagen leistet man also einen Eid auf ihn, wobei man unversehens jene Ehrfurcht, welche des Pythagoras Schüler ihm entgegengebracht hatten, nun auch selbst ihm entgegenbringt, und indem man seine Würdigkeit durch die Lehrgegenstände (*mathémata*), die er vermittelt hat, nachweist. Das wichtigste aber dieser Lehrgebiete ist die Erkenntnis der demiurgischen Tetraktys (*τῆς demiουργικῆς τετρακτύος ὁμοίως*).

Kommentar:

Van der Waerden unterscheidet gelehrte und gläubige Pythagoreer beziehungsweise pythagoreische Schriften. (Diese Trennung ist zweifellos treffender als die von Kayser und anderen Autoren bevorzugte Differenz esoterisch / exoterisch.) Hierokles war keiner der großen Gelehrten aus der Geschichte des Pythagoreismus, sondern "exoterisch" berichtet er voll Begeisterung über das, woran er glaubt und wovon gesagt wird, an das zu glauben zur pythagoreischen Geisteshaltung gehöre: Das Charisma und die göttliche Herkunft des Pythagoras, die "Herrlichkeit" des tausend Jahre zuvor lebenden geistigen Ahnherrn (Pythagoras sei zwar kein unsterblicher Gott gewesen, auch kein Heroe, aber als Mensch Gott ebenbildlich). So ist es nur verständlich, daß "bei ihm" geschworen wird, daß man sich auf ihn beruft, und daß der Hinweis auf ihn zum "Beweis" eines Dogma wird ("er selbst hat es gesagt").

Die Aufzählung der Vierheiten ist ähnlich wie bei Theon Smyrnaeus (Exp. rerum math. 93-99), doch wird keine systematische Reihung von Tetraktyses gegeben, sondern die Vierzahl, die gleichbedeutend meistens *tetrás* und selten *tetraaktýs* genannt wird, zeigt sich in allem Seienden, weil sie doch vom Handwerker-Gott, dem Demiurgen, in die Welt gelegt worden war: 1 2 3 4 ist die erstgereichte und zugleich die Tetras schlechthin; ihre geometrische Sonderheit wird herausgestellt, ihr musikalischer Sinn bleibt allerdings unerwähnt. Die Potenzreihe 1 2 4 8 erfährt nur beiläufig eine kurze Würdigung - daß die 4 dieser Zahlengruppe angehört, ist ein weiteres Moment ihrer Auszeichnung - , und insgesamt werden in lockerer Weise sechs von Theons elf Tetraktyses aufgezählt.

Da 4 arithmetische Mitte zwischen 1 und 7 ist, ist die Dreierheit 1 4 7 als solche sowie jedes Glied dieser Gruppe durch den gründenden Konnex mit den beiden anderen in einen Sinnzusammenhang gestellt. Wiesehr H. dies alles in Gläubigkeit bewundert, liest man zwischen den Zeilen.

Wie schon gesagt, unterscheidet H. zwischen Tetras und Tetraktys nicht. Monas, Dyas, Trias, Tetras, ... Dekas unterliegen nicht tiefeschürfender philosophischer Erörterung, sondern sind in dem für H. typischen schlichten Verständnis zuallererst die Zahlen Eins, Zwei usw. Wenn dargetan wird, weshalb die Tetraktys in die Schwurformel integriert ist, wird dies durch die vielfältigen Bezüge der Tetras erklärt, um dann plötzlich wiederum das Wort Tetraktys ins Spiel zu bringen. Nicht auf das Wort kommt es an, sondern auf die universelle Bedeutung der Vier.

PHILIPP VON OPUS Über die Medietäten
(indirekt über den Sachverhalt der Tetraktys)

Epinomis 990 E - 991 B

(Übersetzung und Beifügungen in gerader Klammer: W. Schulze)

[1.] Wie sich eine Potenz(zahl) - und ebenso ihr reziproker Wert - stets um das Doppelte wandelt, so formt nach derselben Proportionalität (*análogia*) die gesamte Natur Gattung und Art. Als erste Verdoppelte wandelt sich die Zahl Eins zur Zwei nach einem Verhältnis (*lógos*); das Verdoppelte ist eine Quadratzahl, und wiederum verdoppelt gelangt sie ins Kubische und Körperhaft-Greifbare (*haptón*), [somit] von der Eins zur Acht fortschreitend. Wird die verdoppelte [Zahl] als Mitte aufgefaßt, ist sie größer als das niedrigere Glied und um das selbe Maß kleiner als das größere; das eine der beiden Randglieder überragt also die Mittelzahl um denselben Teil wie das andere von ihr überragt wird.

[2.] In der Mitte zwischen 6 und 12 sind das Anderthalbfache und das Vierdrittel-fache gemeinsam vorhanden; hingegeben dem seligen Reigen der Musen hat das Vermögen dieser beiden [3:2 und 4:3], in ihrer zwiefachen Mitte, den Menschen den Gebrauch von 'symphon' und 'symmetrisch' zugewiesen sowie die Freude an Rhythmus und Tonleiter (*harmonía*).

Kommentar:

Diese Stelle gehört zu den dunkelsten Formulierungen "Platons". Die Darstellung hat eine solche Knappheit, dabei aber auch Undeutlichkeit und Mißverständlichkeit, wie sie Platon nicht eigen ist. (Dazu Fritz, Kurt von: "Philippos von Opus", in: Pauly's Real-Encyclopädie der classischen Altertumswissenschaft 38, Stuttgart 1938, Sp. 2351ff, Zitat Sp. 2362: "Der hauptsächlich stilistische Grund, die *Epinomis* Platon abzusprechen, ist ihre Dunkelheit und die grammatische Schwierigkeit, Undurchsichtigkeit und manchmal selbst Inkonsistenz der Sätze.") Daß die *Epinomis* von Philipp von Opus stammt, ist - nachdem bereits in der Antike Diogenes Laertios (III, 37) und Suidas diese Ansicht vertreten hatten - heute allgemein anerkannt; die *Epinomis* ist als 13. Buch der "Gesetze" von Platons persönlichem Sekretär Philippos verfaßt, der Herausgeber (und wohl auch Korrektor) der auf Wachstafeln eingeritzten 12 Bücher "Gesetze" war. (Aus der umfangreichen Literatur zum Thema: Müller, F.: Stilistische Untersuchung der *Epinomis* des Philipp von Opus, Diss. Berlin 1928; Dönt, Eugen: Platons Spätphilosophie und die Akademie. Untersuchungen zu den platonischen Briefen, zu Platons "Ungeschriebener Lehre" und zur *Epinomis* des Philipp von Opus, Wien 1967).

Subjekt dieses Abschnitts ist nicht die Zahl, sondern offensichtlich *dýnamis* (Vermögen, Mächtigkeit, Macht, Fähigkeit), das heißt die "Dynamik" der Zahl: einmal die Befähigung der Zahl als Entwicklungs-Grund des Weltgesetzes, sodann auch umgekehrt das, was hinter der Zahl steht, was die Zahl befähigt, was ihre Dynamik allererst schafft.

Der Übersetzte Textabschnitt ist Tim. 35 A nachgebildet. Er gliedert sich, grob gesagt, in zwei Teile, deren einigendes Band der Begriff der "Mitte" darstellt. (Als Philosoph und Mathematiker war Philipp die Medietätenlehre ein besonderes Anliegen; unter seinen zahlreichen Schriften, die Suidas aufgelistet hat, befindet sich eine Abhandlung mit dem Titel "Die Medietäten".) Ausgegangen wird von der für Platon signifikanten geometrischen Reihenprogression, viergliedrig in Zusammenhang mit der Dreidimensionalität der Dingwelt, des Körperlichen,

Haptischen. Es wird die Proportionsfolge 1:2:4:8 entwickelt; jedes der beiden Mittelglieder ist geometrisches Mittel seiner Nachbarglieder. Auf den ersten Blick "unvermittelt" springt der Autor dann auf die Randzahlen 6 und 12 mit ihren beiden Mitten, dem harmonischen und arithmetischen Mittel; dabei wird die enge Verbindung von kanonischer Tetraktys (6 8 9 12) und dekadischer Tetraktys (1 2 3 4) sichtbar [eingeklammert das vom Autor nicht Gesagte]:

$$6 : |8 = 9| : 12$$

$$|1 :| 4/3 = 3/2 | : 2|$$

Ist das geometrische Mittel das grundlegende Weltgesetz, schaffen harmonisches und arithmetisches Mittel die Hinwendung zu den Muses, die den Menschen "an Rhythmus und Harmonie sich erfreuen" gelehrt haben. Das heißt aber: Die Oktavkette 1:2:4:8 ist Ausdruck der Selbigkeit (zum Terminus siehe den platonischen Timaios), Rhythmus und Klang kommen durch andere "Mittel" (im mathematischen und Übertragenen Sinn) und durch die Grundzahl 3 in die Welt. Mehr noch und ganz konkret: Die Zahlen 1, 2, 3, 4 schaffen die Rhythmik- und Tonleiterproportionen (*harmonia* ist hier musiktheoretisch als Tonleiter zu verstehen). Mit 2:1, 3:1, (4:1), 3:2, 4:3 ist alles hinsichtlich der Silbenlängenproportionen in der Versmetrik gesagt - höherzahlige Proportionen gelten als a-logos, "maß-loos" - , und alle (unglücklicherweise "pythagoreisch" genannten) Tonpositionen der diatonischen Leiter sind, auch wenn in der griechischen Antike unmittelbar nicht so gedacht wurde, mathematisch als Reihung von Quinten (3:2) oder Quartan (4:3) verstehbar (1:1, 9:8, 81:64, 4:3, 3:2, ...).

THEON VON SMYRNA Über die Tetraktys

Τὰ κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρῆσιμα εἰς τῆν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν

Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium 93 - 99 (Hiller)

(Übersetzung, Hervorhebungen und Beifügungen in gerader Klammer: W. Schulze)

Nun aber wollen wir zum Thema der übrigen Analogien und Medietäten zurückkehren; denn, wie wir sagten, ist die Analogie auch eine Medietät, aber nicht auch die Medietät eine Analogie. Daß die Analogie zugleich eine Medietät ist, möge unsere Darlegung über Analogien und Medietäten begleiten.

[1.] Da, wie gezeigt, sämtliche Proportionen der symphonischen Intervalle in der Tetraktys der Zehnzahl (*dekads*) aufgefunden werden, ist hierüber folglich zuerst zu sprechen. Denn die Zehnzahl [Subjekt] konstituiert die Tetraktys [Objekt]: 1 und 2 und 3 und 4 ist 10. In diesen Zahlen besteht die Symphonia der Quarte in der Proportion 4:3, der Quinte in der Proportion 3:2, der Oktave im Verhältnis 2:1 sowie der Doppeloktave mit 4:1; mit ihnen wird das unveränderbare Diagramm vollständig ausgefüllt. [Unter dem "unveränderbaren Diagramm" sind die Fixpositionen des zweioktavigen Tonsystems gemeint.] Diese Tetraktys fungiert in der Musik gleichsam als Synthesis, da doch in ihr sämtliche symphonische Intervalle gefunden werden. Aber nicht bloß deswegen ist sie allen Pythagoreern heilig, sondern weil sie auch die Natur des Ganzen zu sein scheint. Deshalb hatten sie [die Pythagoreer] auch den Eid

Wahrlich, bei ihm, der unserer Seele schenkte die Vierheit, Quellkraft und Wurzel ewig währenden Seins in sich bergend.

Dabei meinen sie mit dem, der schenkte, Pythagoras, weil diese Rede über die Vierheit seine (Er-)Findung zu sein scheint.

[2.] Diese zuerst bestimmte Tetraktys bringt die Summation der ersten Zahlen zu einem Abschluß. Eine zweite Tetraktys ist die aus der Einheit durch Multiplikation herauswachsende, geradzahlig und ungeradzahlig. Den Anfang beider bildet die Monas, weil diese Ursprung sowohl aller geraden, ungeraden und, wie vorher gezeigt, aller gerad-ungeraden Zahlen ist; ihre Proportion ist einfach: hintereinander drei Zahlen, gerade und ungerade. Zusammen bilden sie eine Synthese - weil doch keine Zahl weder ausschließlich gerade noch ausschließlich ungerade ist. Folglich zeigen sich nun zwei multiplikative Tetraktysen, eine gerade und eine ungerade; die gerade hat den Logos 1:2 - auch die erste der geraden Zahlen, die 2, ist selbst aus der Einheit durch Verdoppelung hervorgewachsen - , die ungerade wird vermehrt durch Verdreifachung - wie auch die erste ungerade Zahl, die 3, durch Verdreifachung aus der 1 herausgewachsen ist. Folglich ist beiden die Einheit gemeinsam, die zugleich gerade und ungerade ist. Die zweite Zahl unter den geradzahligem und verdoppelten ist die 2, unter den ungeraden und verdreifachten aber die 3; die dritte unter den geraden ist die 4, bei den ungeraden die 9, die vierte unter den geraden die 8, unter den ungeraden die 27.

$$\begin{array}{cc} & 1 \\ & 2 \quad 3 \\ & 4 \quad 9 \\ 8 & 27 \end{array}$$

In diesen Zahlen werden die vollendeteren Proportionen (*lógoi*) der Symphonien gefunden, mitinbegriffen auch der Ganzton. Die Monas vermag die Bedeutung 'Beginn', 'Ausgang' oder 'Punkt' zu haben; die zweiten Glieder, die 2 und 3, bringen die Linie zum Ausdruck, sie sind unzusammengesetzt, prim, in der Einheit bemessen und der Natur zugemessen; die dritten Glieder, 4 und 9, haben das Vermögen der viereckigen Flächen mit gleicher Seitenlänge; und die vierten Glieder, 8 und 27, bringen den allseits gleichseitigen Würfel hervor. Folglich vollzieht sich aus diesen Zahlen und aus dieser Tetraktys eine Vermehrung vom Punkt bis zur Dreidimensionalität: nach dem Punkt die Linie, nach der Linie die Fläche, nach der Fläche der Körper. Aus diesen Zahlen ließ Platon im Timaios auch die Seele bestehen. Die äußerste dieser sieben Zahlen ist gleich den anderen sechs: $1+2+3+4+8+9 = 27$.

Also gibt es diese zwei Tetraktysen, die summative und die multiplikative; sie umfassen die musikalischen, geometrischen und arithmetischen Logoi, aus denen auch die Harmonie des Gesamten besteht.

[3.] Die dritte Tetraktys ist jene, die nach derselben Proportionalität (*analogia*) die Natur jeder geometrischen Figur umfaßt. Denn was in der vorigen Tetraktys die Einheit ist, das ist in dieser der Punkt; was in jener die eindimensionalen Zahlen 2 und 3, das ist in dieser die Doppelgestalt der Linie als Kurve und Gerade, [und zwar] nach der Geradzahligkeit die Gerade, da sie von zwei Punkten begrenzt ist, nach der Ungeradzahligkeit aber die Kurve, weil diese doch von einer unbegrenzten Linie umschlossen wird; was in jener Tetraktys die Quadratzahlen 4 und 9, das ist in dieser die Doppelgestalt der Fläche als gerade oder gekrümmte; was in jener die Kubikzahlen 8 und 27 - die eine gerade-, die andere ungeradzahlig -, das ist in dieser der Körper, ebenfalls von zweifacher Wesenheit, nämlich einerseits von gekrümmter Erscheinung wie Kugel und Zylinder, andererseits geradflächig wie Würfel und Pyramide. Diese ist also die dritte Tetraktys, die jede geometrische Figur vollends beschreibt anhand von Punkt, Linie, Fläche, Körper.

[4.] Die vierte Tetraktys ist die der einfachen Körper: Feuer, Luft, Wasser, Erde, die in zahlenmäßiger Proportionalität (*analogia*) stehen. Denn was in jener die Einheit, ist in dieser das Feuer, was dort die Zweierheit, ist hier Luft; Dreierheit [entsprechend] Wasser, Viererheit Erde. Denn die Natur der Grundstoffe ist feinteilig bis grobteilig, so daß dasselbe Verhältnis (*lógos*) von Feuer zu Luft wie von 1 zu 2 besteht, zu Wasser wie 1:3, zu Erde wie 1:4, und das andere analog zueinander. [Hier irrt Theon in seinem Verständnis von Tim. 32; Platon spricht hinsichtlich der 4 Elemente nicht von 1, 2, 3, 4, sondern von der geometrischen Reihenproportionalität, also der multiplikativen Doppel-Tetraktys $8:4=2:1$ und $1:3=9:27$.]

[5.] Die fünfte Tetraktys ist die der geometrischen Formen aller Körper. Denn die Pyramide ist die Form des Feuers, der Oktaeder der Luft, der Ikosaeder des Wassers, der Würfel der Erde.

[6.] Die sechste ist die des Wachstums. Der Same ist analog der Einheit und dem Punkt, das Wachstum in der Länge ist analog der Zweierheit und Linie, das Breitenwachstum analog zur Dreierheit und Fläche, das Dickenwachstum zur Viererheit und zum Körper.

[7.] Die siebente Tetraktys ist die der Gemeinschaftsformen. Anfang und wie eine Einheit ist der Mensch, die Zwei die Familie, Drei das Dorf, Vier die Stadt. Aus diesen ist das Volk zusammengesetzt.

Diese sind die stofflichen und wahrnehmbaren Tetraktysen:

[8.] Die achte Tetraktys ist die erkenntniskritische: Geist, Vernunft, Meinung, Sinneswahrnehmung. In seinem Wesen ist der Geist wie die Einheit; die Vernunft ist wie die Zweierheit, weil sie Vernunft von etwas ist; die Meinung ist wie die Dreierheit, weil sie sich zwischen Vernunft und Unwissenheit befindet; die Sinneswahrnehmung ist wie die Viererheit, weil der Tastsinn allen Sinneswahrnehmungen gemeinsam ist und diese in der "Abtastung" [solchermaßen] vierfach wirksam werden.

[9.] Die neunte Tetraktys, aus der das Leben zusammengesetzt ist, ist Seele und Körper: Denn die Seelenteile sind der vernunftbegabte, der aufbrausende und der begehrende, und der vierte Teil ist der Körper selbst, in dem sich die Seele befindet.

[10.] Die zehnte Tetraktys ist die der Jahreszeiten, durch die alles entsteht: Frühling, Sommer, Herbst, Winter.

[11.] An elfter Stelle die Lebensperioden Kindheit, Jugend, Mannes- und Greisenalter.

Somit gibt es 11 Tetraktysen: die erste nach der Summation der Zahlen, die zweite in ihrer Multiplikation, die dritte nach der geometrischen Figur, die vierte die der einfachen Körper, die fünfte der geometrischen Körperformen, die sechste nach der Kategorie Wachstum, die siebente nach den Gemeinschafts- und die achte nach den Erkenntnisformen, die neunte die der Lebensteile, zehntens die Jahres-, elftens die Lebenszeiten. Alle tragen in sich eine Analogie: Denn was in der ersten und zweiten die Einheit, ist in der dritten der Punkt, in der vierten Feuer, in der fünften die Pyramide, in der sechsten der Same, in der siebten der Mensch, in der achten der Geist, und die übrigen analog. [Es folgt eine Aufzählung gemäß unserer Übersichtstabelle.]

Der aus diesen Tetraktysen zusammengesetzte Kosmos ist in Vollkommenheit gefügt nach der Geometrie, Harmonie und Zahl - durch die Kraft der Zahl rings- umerhellend die gesamte Natur, jede geometrische Figur, alle einfachen Körper [Grundelemente] und ihre Zusammensetzung; und schließlich, weil alles an der Zahl teilhat, hat sie selbst an nichts Anteil. Deshalb leisteten die Pythagoreer den zuvor ausgesprochenen Eid, und [fügten hinzu]:

Alles gleicht der Zahl.

Kommentar:

Grund, von der Zehnzahl und der durch sie begründeten Tetraktys 1 2 3 4 zuerst zu sprechen, ist nicht eine ihr zugesprochene prinzipielle Vorrangstellung, sondern schlicht ihre musiktheoretische Auszeichnung (Fixpositionen des zwei-oktavigen *systema teleion*). Eine andere Bedeutung hat die dekadische Tetraktys laut Theon offenbar nicht. Schreibt man die Proportionen des Viertonrahmens Ausgangston-Quarte-Quinte-Oktave als Bruchzahlen $1/1$, $4/3$, $3/2$, $2/1$ und bringt auf gemeinsamen Nenner, erhält man 6 8 9 12; trotz dieser naheliegenden

Transformation kommt bei Theon die komplette, aus 4 Gliedern bestehende Gestalt 12:9=8:6 nirgends vor; 6 8 9 12 tritt weder als geschlossene Form noch unter dem Namen 'Tetraktys' ins Bewußtsein, existiert für Theon nicht als bevorzugte Zahlengruppe. (12:9:8:6 bedeutet die Zusammensetzung der Oktave aus Quarte-Ganzton-Quarte. Theon teilt 2:1 mathematisch im Sinne des arithmetischen und, davon getrennt, des harmonischen Mittels, das ist im musiktheoretischen Sinne die Fügung der Oktave aus Quarte und Quinte (12:9:6) beziehungsweise Quinte und Quarte (12:8:6).)

Nikomachos spricht in entsprechender Weise von 6 8 9 12 als der "ersten" Tetraktys: Die Konstitution der symphonischen Intervalle ist Kennzeichen für die Reihung an erster Stelle, gleich ob von 1 2 3 4 (Theon) oder 6 8 9 12 (Nikomachos) die Rede ist.

Breiten Raum schenkt Theon den Potenztetraktyses; sie stehen im Zentrum der Erörterung, sie sind die Tetraktys im eigentlichen Sinn. Theon entwickelt die Potenztetraktyses in Lambda-Form (nicht umgekehrt: er versieht nicht die Lambda-Figur mit den Zahlen der geraden und ungeraden Potenztetraktys). Die "Henne/Ei-Frage" ist damit klar zu beantworten: Zuerst war die Tetraktys. Lambda und Tetraktys gehören freilich innig zusammen, denn es ist das Kapitel über die Tetraktys, in dem Theon die Lambdafigur bringt.

Worauf es vor allem ankommt: Die 11 Tetraktyses sind zum Verständnis Platons notwendig. Systematisch und pädagogisch aufbereitet werden sie Platon gleichsam rückgegeben, dem Verständnis Platons nutzbar gemacht. (Mit Ausnahme eines kleinen Irrtums sieht Theon die Dinge vollends richtig.) Damit wird einmal mehr unsere These bestätigt, wonach es nicht auf die Wortbildung *tetrás* oder *tetraktys* ankommt - *tetraktys* kommt bei Platon nicht vor, er sagt oft *tetraplasion* (vierfach) - , sondern auf ein bewußtes Denken aus dem Zahlenkontext der Tetraktys mit Zuschreibung weitreichender Bedeutungen derselben per analogiam, also in guter harmonikaler Manier.

Es ist nicht zuviel gesagt: Niemand vor und nach Platon, auch keiner seiner Kommentatoren, ist in seinem Denken von der Tetraktys so sehr bestimmt worden wie Platon.

Erklärende Literatur (Auswahl):

Archer-Hind, Richard D.: The Timaeus of Plato, New York 1973 (Reprint von 1888)

Dönt, Eugen: Platons Spätphilosophie und die Akademie. Untersuchungen zu den platonischen Briefen, zu Platons "Ungeschriebener Lehre" und zur Epinomis des Philipp von Opus, Wien 1967 (SB Österr. Akad. d. Wiss. 251, 3.)

Ferber, Rafael: Notizen zu Platons Höhlengleichnis, in: Freiburger Zeitschrift für Philosophie, Bd. 28, H. 3, Freiburg 1981, S. 393-433

Gadamer, H., Schadewaldt, W. (Hg): Idee und Zahl. Studien zur platonischen Philosophie, Heidelberg 1968 (Abh. Heidelb. Akad. d. Wiss., phil.-hist. Kl. 1968,2)

Gaiser, Konrad (Hg): Das Platonbild. Zehn Beiträge zum Platonverständnis, Hildesheim 1969. Darin: Solmsen, Friedrich: Platos Einfluß auf die Bildung der mathematischen Methode (1931)

Schulze, Werner: Tetraktys - ein vergessenes Wort der Philosophie, in: Wahrheit und Wirklichkeit. Festgabe für Leo Gabriel zum 80. Geburtstag, Berlin 1983, S. 125-154

Schwabe, Julius: Hans Kaysers letzte Entdeckung: Die pythagoreische Tetraktys auf Raffaels "Schule von Athen", in: Symbolon. Jb. f. Symbolforschung, Bd. 5, Basel-Stuttgart 1966, S. 92-102; ders: Arithmetische Tetraktys, Lambda und Pythagoras, in: Antaios, Bd. VIII, Nr. 5, Stuttgart 1967, S. 421-449

Analogie- und Tetraktys-Tafel nach Platon

Dualität	Metaphysik	Ideenwelt Wahrheit Unwandelbares Gerechtigkeit	Körperwelt Täuschung Wandelbares Ungerechtigkeit	Polit. 534 A Polit. 544
Fünfhelt	Staatslehre	Aristokratie Königsherrschaft	Timokratie Oligarchie Aristokratie Demokratie	Polit. 545 C - 576 B
Dreihelt	Seelen- und Körperlehre Charakterlehre	vernünftig Kopf feurig a'	zornmütig Brust Mischformen ab	Politikos 291 C eqq Tim. 69 u. 90
Vierhelt	Mathematik Geometrie Kosmologie Erkenntnistheorie Zahlen-Tetraktyses	a ² Punkt Feuer Λωορϋη 27 1 1 1 1 1	ab ² Fläche Wasser αδονς 48 4 1/4 4 9 81	Polit. 509 D, 546 B, Tim. 32 A Tim. 31 B eqq Polit. 534 A Polit. 546 B Epld. 991 A Tim. 35 B Polit. 587

Analogiesatz der 11 Tetraktisformen nach Theon von Smyrna

Num- mer	Gegenstand der Tetraktis	Glieder der Tetraktis			
		1	2	3	4
1.	Proportionen der Konsonanzen (των συμφωνων λόγος)	1 (μονάς)	2 (δυάς)	3 (τριάς)	4 (τετραάς)
2.	Proportionen der Intervalle wie Dimensionen in der Natur	1 Punkt (σημείον)	2 Linie (εὐθεΐα)	3 Fläche (επιπέδον)	4 Körper (σώμα)
3.	Geometrische Figuren (μετρήσιμα)	Punkt (σημείον)	Linie (εὐθεΐα)	Fläche (επιπέδον)	Körper (σώμα)
4.	Elemente (στοιχία)	Feuer (πῦρ)	Luft (ἀήρ)	Wasser (ὕδωρ)	Erde (γῆ)
5.	Geometrische Formen des Körperlichen	Pyramide (τρίγωνον)	Oktäeder	Ikosaeder	Würfel
6.	Schema des Wachstums	Same (σπέρμα)	Längenwachstum (μήκος)	Breitenwachstum (πλάτος)	Wachstum in der Dicke (πάχος)
7.	Gemeinschaftsformen (κοινωνία)	Einzelperson (ἀνθρώπος)	Familie, Haus (οἶκος)	Dorf (κώμη)	Stadt (πόλις)
8.	Erkenntnisvermögen (κρίσιμη, νοήσιμη)	νόος	ἐπιστήμη	δόξα	αἰσθησις
9.	Seelenteile, Begehrungsvermögen der in ebener Körper befindlichen Seele	λογιστικόν	θυμικόν	ἐπιθυμητικόν	σώμια
10.	Jahreszeiten	Frühling (εἰς)	Sommer (ἥλιος)	Herbst (μετώσηρος)	Winter (χειμῶν)
11.	Lebensalter	Kindheit (παιδιον)	Jugend (μεγέθειον)	Mannesalter (ἀνθρ)	Greisenalter (γῆρας)

ZUR GESCHICHTE DER KLOTHOÏDE (Vortrags-Kurzfassung)

von E.A.Fellmann, Basel

Herbst 1986

Herrn Prof. Hlawka zum 70. Geburtstag gewidmet.

Übersicht:

- I Jakob Bernoulli: Mechanik
- II Leonhard Euler: a) Variationsprinzipien in der Mechanik
b) Spezielle Integrationsprobleme
- III Fresnel - Cornu: Theoretische Optik (Beugung des Lichtes)
- IV Pierre Klaus: Strassenbau
- V Epilog
- VI Bibliographie ("mini")

*

I

Bekanntlich zeichnet sich die *logarithmische Spirale* durch die Eigenschaft aus, dass der Quotient aus dem Krümmungsradius r und der zugehörigen Bogenlänge s konstant ist. JAKOB BERNOULLI hat diese Eigenschaft in den frühen Neunzigerjahren des 17. Jahrhunderts in einer Reihe von Abhandlungen in den *Acta Eruditorum* ausgeschöpft. LORIA suggeriert in seinem wichtigen und schönen Kurvenbuch [1, Bd.2, 70], BERNOULLI habe im Kontext mit dieser Eigenschaft $r:s = \text{const.}$ (rein formal) versucht, eine Kurve mit der Eigenschaft

$$r \cdot s = \text{const.} \tag{1}$$

zu finden. Tatsächlich gehen derlei Untersuchungen auf den grossen Basler zurück, jedoch nicht als Folge bloss formaler Spielereien, sondern im Rahmen seiner ernsthaften Beschäftigung mit seinen Studien über die *Elastica* [*lamina elastica*], deren Substanz J.E.HOFMANN seinerzeit so grossartig knapp zusammengestellt hat [2]. Die - unter den üblichen Voraussetzungen entstehenden - "elastischen Linien" (c in Fig.1) führten

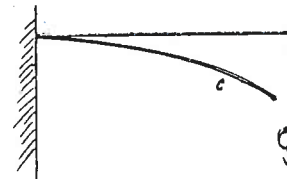


Fig. 1

auf den Integraltypus $\int x^2 dx: \sqrt{a^4 - x^4}$, welchen JAKOB BERNOULLI mittels Potenzreihenentwicklung bewältigte; die bekannten Resultate wurden mit Hilfe des *theorema aureum* gefunden.

Als Spezialfall seiner ziemlich allgemeinen Theorie der Balkenbiegung stellte sich JAKOB BERNOULLI auch das Problem, das wir füglich als "inverses Problem der lamina elastica" bezeichnen können, nämlich "eine Kurve zu finden, deren Krümmung in den einzelnen Punkten der Bogenlänge proportional ist; d.h. die (Kurve), die durch ein angehängtes Gewicht in eine Gerade gebeugt wird" ["invenire curvam, cuius curvatura in singulis punctis est proportionalis longitudini arcus; id est, quae ab appenso pondere flectitur in rectam"] [3, 1084-1086] (Hervorhebung von mir).

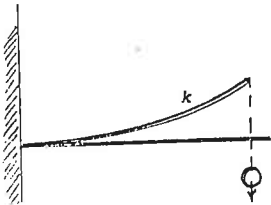


Fig. 2

Der erste Teil dieses Werkzitels koinzidiert mit der Gleichung (1), doch der unterstrichene Zusatz ordnet der Kurve mit der natürlichen Gleichung $r \cdot s = \text{const.}$ eine mechanische Eigenschaft zu. Dieser Sachverhalt, den JAKOB BERNOULLI nicht beweist, sondern sich damit begnügt, die Kurve durch eine Punktkonstruktion anzugeben, hat auch dem Herausgeber von JAKOB'S Opera, NIKLAUS I BERNOULLI, nicht eingeleuchtet,

und es ist fast sicher, dass JAKOB auch die Gestalt der gesuchten Kurve verborgen geblieben ist: die Kurve k ist tatsächlich eine Klothoide.

II

Im ersten Anhang zu seiner Methodus von 1744 [4] [5] wird dasselbe Problem unter dem Titel De curvis elasticis von L.EULER behandelt und teilweise gelöst. EULER schliesst - allerdings auf theoretisch noch breiterer Basis als JAKOB BERNOULLI - unmittelbar an dessen Problemstellung an (Fig.3):

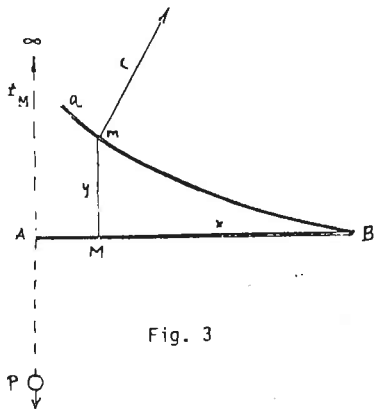


Fig. 3

- Annahmen:
 $\widehat{am} = s = AM$
 P — Gewicht zur Streckung (Biegung)
 P_s — Moment der wirkenden Kraft für den Punkt M
 r — Krümmungsradius in m [r ist wegen der Konvexität bezüglich der Axe negativ zu nehmen].

Dann gilt

$$P_s = \frac{Ek^2}{r} (= a^2),$$

wo Ek^2 eine von der Elastizität der Feder abhängige Konstante ist, und somit

$$rs = a^2. \tag{2}$$

Dies ist wieder unsere Gleichung (1). Aus (2) folgt nach einfacher Umformung und Integrieren

$$\int \frac{ds}{r} = \int \frac{s ds}{a^2} = \frac{s^2}{2a^2} \quad (= \text{Tangentenwinkel } \phi).$$

Die "Amplitude" des Bogens \widehat{am} verhält sich also wie das Quadrat dieses Bogens. Demnach sind - so fährt EULER fort - die rechtwinkligen Koordinaten dieser Kurve (2) gegeben durch

$$x = \int ds \sin \frac{s^2}{2a^2}; \quad y = \int ds \cos \frac{s^2}{2a^2}. \tag{3}$$

[Dass EULER hier die Koordinatenachsen vertauscht, soll nicht weiter stören.] Da für $s \rightarrow \infty$ stets $r \rightarrow 0$, erweisen die Gleichungen (3) den Spiralencharakter der Kurve. Ohne diese näher anzugeben oder darzustellen, geht er weiter:

Mittels der Sinus- und Cosinusreihen entwickelt EULER x und y in Potenzreihen von s , die für nicht zu grosse s stark konvergieren, sodass die kartesischen Koordinaten hinreichend genau bestimmt werden können. Doch versagen die Reihen leider für $s \rightarrow \infty$. Mittels der Substitution $s^2 = 2a^2 \phi$ folgen aus (3) nach einfacher Rechnung die Gleichungen

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{\phi}}; \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{\phi}}. \tag{4}$$

Um die bestimmten Integrale auszuwerten und entsprechende Näherungswerte von x und y für $s \rightarrow \infty$ zu erhalten, betrachtet EULER die speziellen Intervalle $\phi = k\pi$ und führt die Bestimmung auf die Integralformeln zurück:

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \sin \phi d\phi \cdot \prod_0^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi + \phi}}; \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \cos \phi d\phi \cdot \prod_0^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi + \phi}}. \tag{5}$$

So "vermeidet man zwar das Einsetzen des Unendlichen, aber dafür wird die unendliche Reihe [\dots] in die Rechnung eingeführt. Da deren Summe bisher nicht bekannt ist, macht die Lösung dieser Frage bis jetzt noch die grössten Schwierigkeiten..." [5, p.62].

35 Jahre später gab EULER selbst die Lösung dieses Problems, das er seinerzeit den Mathematikern aufgegeben hatte, vollständig [6] und rein analytisch. Ausgehend von der Gleichung (2) und einigen zweckmässigen Annahmen (Fig.4) gelangt er wieder zum Gleichungspaar (4) und gibt erstmals eine Skizze der spiralförmigen Kurve, die wir nach CESÀRO [13] Klothofide nennen. EULER verweist nun bei der Auswertung der bestimmten Integrale (4) mit unendlicher Obergrenze auf seine frühere (1744) unvollkommene Methode, die er jetzt verwirft zugunsten einer "neuen, durch glücklichen Zufall gefundenen, einzigartigen Methode", mit deren Hilfe sich beweisen lässt, dass

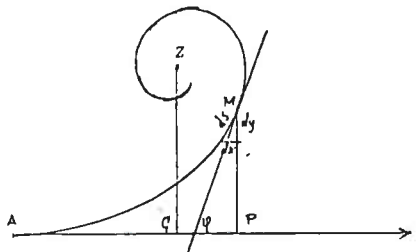


Fig. 4

streng gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \phi \, d\phi}{\sqrt{\phi}} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \phi \, d\phi}{\sqrt{\phi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (6)$$

sodass sich für (Fig.4) die Polkoordinaten (des Punktes Z)

$$\overline{\lambda C} = \overline{CZ} = c \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{\pi}$$

ergeben. Dieser "glückliche Zufall" besteht kurz in folgendem:

Mittels seiner Gammafunktion (cf. [7] und [8])

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-px} \, dx = \Gamma(n)$$

gelangt EULER nach Einführung des k.k. Zahlenpaares $p \pm qi$ mit $p = f \cos a$, $q = f \sin a$ in Verbindung mit der Formel von Moivre zum - meistens nach POISSON benannten - Formelpaar

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-px} \cos qx \, dx &= \frac{1}{f^n} \Gamma(n) \cos na \\ \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-px} \sin qx \, dx &= \frac{1}{f^n} \Gamma(n) \sin na \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

von welchem der Spezialfall $q = 1, p = 0, n = \frac{1}{2}$ sofort das Resultat (6) liefert !

Anmerkung: Ueber das zweite Integral von (7) gelangte EULER am Schluss der hier betrachteten Abhandlung zu seinem (für die Analysis so ungemein wichtigen) Resultat

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

von welchem HARDY [9] elf verschiedene Beweise diskutiert hat.

III

Im Zusammenhang mit Intensitätsbestimmungen bei der Lichtbeugung stiess FRESNEL (zur Zeit des Wienerkongresses) [10] auf die - heute nach ihm benannten - Integrale

$$\int_0^v \cos \frac{\pi v^2}{2} \, dv \quad ; \quad \int_0^v \sin \frac{\pi v^2}{2} \, dv \quad ,$$

indem sich - nach gewissen Annahmen - die Lichtintensität J in einem bestimmten Punkt des Beugungsspektrums ergibt als

$$J = k \left\{ \left[\int_{-\infty}^v \cos \frac{\pi v^2}{2} \, dv \right]^2 + \left[\int_{-\infty}^v \sin \frac{\pi v^2}{2} \, dv \right]^2 \right\} .$$

Zur Auswertung dieser bestimmten Integrale gab FRESNEL Tafeln für Werte von $0.1 < v < 5.1$ in Zehntelgradschritten auf vier Dezimalstellen, später [11] bis 5.5 und verfeinert.

A.CORNU deutete diese Resultate geometrisch und gelangte mit einem ("eulersch" anmutenden) Ansatz schliesslich zur exakten punktuellen Darstellung der Doppelspirale mit den zwei asymptotischen Punkten [12], wie sie in Fig.5 dargestellt ist. CORNU benützt die einfache Substitution $2\phi = \pi v^2$, und tatsächlich führt sie von Gleichung (3) direkt zu den Eulerschen Gleichungen (4). Fig.6 zeigt die Halbklothofide in der Originalform, die ihr EULER gegeben hat.

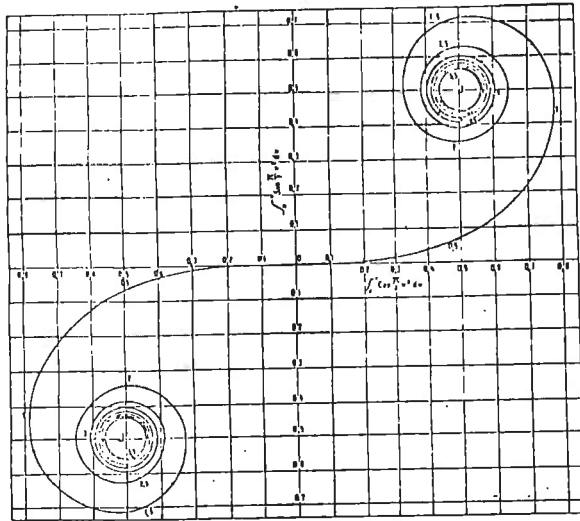


Fig. 5

Diese imposante Kurve hiess *CORNUSche Spirale*, bis sie von CESÀRO [13] in *Klothoïde* (κλωθώ, die Spinnerin [Parze]) umgetauft wurde. Erst in jüngster Zeit nennt man sie wieder *EULERSche Spirale* [14].

IV

Abgesehen von Darstellungen in einigen Lehr- und Kurvenbüchern geriet die Klothoïde bei den Mathematikern in den Hintergrund des Interesses, bis sich die Ingenieure (Strassenbau nach dem 2. Weltkrieg) ihrer annahmen. Im Strassenbau müssen nämlich Richtungsänderungen in der Linienführung durch Einschaltung von *Uebergangskurven* möglichst stetig ausgebildet werden. Als solche wurden bis in die Fünfzigerjahre vorwiegend Lemniskaten, kubische Parabeln und Kreisbogen mit doppeltem Radius des Hauptbogens verwendet, seltener Klothoïden. Die ersteren wurden der Klothoïde vorgezogen, da ihre Absteckungselemente leichter zu rechnen waren, bis 1953 die allen Anforderungen genügenden *Klothoïdentafeln* von P.KLAUS [15] vorlagen.

Die Klothoïde ist nämlich die von allen weitaus zweckmässigste - auch in theoretischer Hinsicht: Ein Autolenker erzielt auf einfachste Weise eine Richtungsänderung, indem bei konstanter linearer Geschwindigkeit das Lenkrad

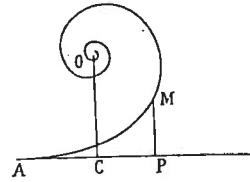


Fig. 6

mit konstanter Winkelgeschwindigkeit gedreht wird. Unter diesen Voraussetzungen ist die Krümmung direkt proportional der Länge des durchfahrenen Bogens, dieser mithin eine Klothoïde ($rs = a^2$). Die Variierung des Parameters a liefert eine *homothetische Kurvenschar* mit a als *Homothetiefaktor* und dem Ursprung als *Homothetiezentrum*.

V

Mit der logarithmischen Spirale, die bekanntlich eine Unmenge schönster Eigenschaften aufweist, kann die Klothoïde in dieser Hinsicht natürlich nicht konkurrieren, doch liegen ihre Geheimnisse auch in tieferen Schichten des mathematischen Bergwerks. Während sich das Gesetz der *spira mirabilis* unmittelbar in den natürlichen Wachstumsformen vielfältig manifestiert, erweist sich die Klothoïde jedoch als Schlüssel zu mindestens drei phänomenologisch grundverschiedenen Problemkreisen, die uns von der Natur vorgelgt werden:

1. Die Klothoïde löst das Formproblem der (idealen) *elastica inversa*.
2. Sie veranschaulicht die Verteilung der Intensitätsextrema in Beugungsspektren.
3. Sie optimiert die Dynamik und Kinematik von Fahrzeugen.

Wahrscheinlich liesse sich dieser Katalog vermehren; vielleicht würde durch weitere Erkenntnisse sogar eine *Mathematik klothoïdal bedingter Phänomene* ermöglicht. Erste Ansätze hierzu liegen in verschiedenen Arbeiten über die Klothoïde und die nächst höhere Kurvengattung der sogenannten *Pseudospiralen* von der natürlichen Gleichung $r = ks^m$ von CESÀRO, PIRONDINI, ONNEN, PUISEUX, WIELEITNER und anderen Forschern vor. Doch das überschreitet die Grenzen unserer *Miszelle*.

Diese hingegen scheint wieder einmal mehr das "Axiom der Wissenschaftsgeschichte" zu bestätigen: *Trägt ein Satz oder ein Sachverhalt den Namen eines bestimmten Forschers, so strebt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Forscher der Erstentdecker des besagten Satzes bzw. Sachverhaltes ist, gegen Null.* (Denkbare Ausnahme: LEONHARD EULER). *Ad hoc*-Beispiele:

1. Die *CORNUSche Spirale* wurde von EULER entdeckt, analysiert und skizziert.
2. Die *FRESNELSchen Integrale* stammen von EULER und wurden von diesem auch bewältigt.
3. Die *POISSON-Integrale* [Gleichungen (7), p.4] wurden von EULER eingeführt und mittels der Gammafunktion erschlossen.

* * *

- [1] G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Leipzig und Berlin, 2.A. 1910 (Bd.1), 1911 (Bd.2).
- [2] J.E. HOFMANN, *Ueber Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik*, Monographies de l'Enseignement mathématique, N° 3, Genève 1956.
- [3] JAKOB BERNOULLI, *Opera*, Genevae 1744 (2 Bde.).
- [4] L. EULER, *Methodus inveniendi lineas curvas...*, Lausannae et Genevae 1744 = *Opera omnia*, Ser.I, Vol.24, auszugsweise deutsch in [5].
- [5] JAKOB BERNOULLI & LEONH. EULER, *Abhandlungen über das Gleichgewicht und die Schwingungen der ebenen elastischen Kurven*, übersetzt, ediert und kommentiert von H.LINSENBARTH, in: *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Nr. 175, Leipzig 1910.
- [6] L. EULER, *De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum*, Petropoli 1794. [Diese Abhandlung wurde der Petersburger Akademie 1781 vorgelegt, jedoch erst in 4.Band der *Institutiones calculi integralis* gedruckt. (Eneström Nr. 675; O.I,19, 217-227)].
- [7] B. RODEWALD, *Leonhard Eulers Entdeckung der Gammafunktion. Versuch einer heuristischen Rekonstruktion*. Diplomarbeit, Darmstadt 1982.
- [8] D. LAUGWITZ, B. RODEWALD, *Euler's approach to the Gamma Function revisited*, Preprint Nr. 974, TH Darmstadt, März 1986.
- [9] *Mathematical Gazette*, vol.8 (1916), 301-303; vol.5 (1909), 98-103; vol.6 (1912), 223-224.
- [10] A. FRESNEL, *Mémoire sur la diffraction de la lumière*, Mém. Ac. Sc. Paris, 5, 1818
- [11] *Oeuvres complètes*, t.1, Paris 1866, 315-352.
- [12] A. CORNU, *Etudes sur la diffraction; méthode géométrique pour la discussion des problèmes de diffraction*, Comptes Rendus, 78, (1874), 113-117.
- [13] E. CESÀRO, *Les lignes barycentriques*, Nouv. Annales de math., t.5 (1886).
- [14] J. DENNIS LAWRENCE, *A Catalog of Special Plane Curves*, Dover Publ., New York 1972.
- [15] P. KLAUS, *Klothoidentafel - Table de clothoïde*, Zürich, ¹1953, ²1956.

THE KIEPERT CONICS

Roland H. Eddy

Memorial University of Newfoundland

St. John's, Newfoundland, Canada, A1C 5B7

1. INTRODUCTION.

Friedrich Wilhelm August Ludwig Kiepert was born in Breslau in 1846. He received his Dr. Phil. degree from the University of Berlin in 1870 under K. Weierstrass whose lectures he elaborated on and distributed in manuscript form to other universities. After teaching at Darmstadt, he moved to Hannover as professor of higher mathematics and later, in 1901, to become Dean. He continued there after his emeritus in 1921 until his death in 1934.

Kiepert's work is a good subject of study for this conference since his interests encompassed both pure and applied mathematics. His extensive work on elliptic functions emphasized both theory and applications. On the pure side, he published, in 1869 in *Nouv. Ann. Math.* (we have not as yet located this reference), results concerning a hyperbola and a parabola which now bear his name. Again, on the applied side, he pioneered the application of mathematical principles to personal insurance schemes and later extended this to industrial insurance practices. In this talk, we shall concentrate on the conics which bear his name.

2. THE HYPERBOLA

In keeping with the theme of the conference, we shall start, in an applied setting, with the following problem in statics. Suppose three equal weights are each attached to a piece of string tied together at a knot P . If the weights are then passed through three noncollinear holes A, B, C in a horizontal table top, with P above the table, the system is in equilibrium when the knot is at the Fermat point of ABC . To ensure that P is in the interior of ABC , no angle must be as great as 120° .

This point has an interesting geometric significance in that it Torricelli's solution to the following problem posed to him by Fermat. Find a point P in the plane of a given triangle ABC such that the sum $AP + BP + CP$ is minimum. Further, this point can be obtained by the following geometric construction. On the sides of the given triangle ABC as bases construct equilateral triangles $A'BC, AB'C, ABC'$ then AA', BB', CC' are concurrent at the Fermat point.

It is an immediate consequence of Ceva's theorem that concurrency still holds if the constructed triangles are similar isosceles with base angle ϕ . As ϕ varies, the locus of the point of concurrency, which we now consider as the centre of perspective of ABC and the triangle $A'B'C'$ (called Kiepert's triangle), is a rectangular hyperbola, circumscribed to ABC , with equation.

$$(1) \quad \sin(B - C)\beta\gamma + \sin(C - A)\gamma\alpha + \sin(A - B)\alpha\beta = 0,$$

where α, β, γ are the trilinear (also called triangular or normal) coordinates of P with respect to ABC . Its axes are parallel to Steiner's axes of ABC and it is the Apollonian hyperbola of the orthocenter of ABC with respect to Steiner's ellipse (see Casey [2]). This is Kiepert's hyperbola.

More recently, Bottema and van Hoorn [1] proposed the following problem. Let P be a point in the plane of a nonequilateral triangle ABC and let Π be the trilinear polar (or harmonical) of P with respect to ABC . Show that the locus of the points P such that Π is perpendicular to the Euler line of ABC , is a rectangular hyperbola passing through the vertices of ABC , through its centroid and through its orthocentre. Curiously, the solution is Kiepert's hyperbola although apparently no mention of that fact was made either by the proposers or by any of the solvers.

Another interesting aspect of this conic is seen by considering its image with respect to the isogonal transformation. In general, this transformation is defined pointwise by the relationship $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}) = (\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta)$ see Casey [2], and is well defined for all points in the plane except for those incident with the triangle of reference. For a more general treatment of this transformation see Eves and Kimberling, [3]. From equation (1), it is seen

that the hyperbola passes through the centroid $G(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma})$ and the orthocenter $H(\sec A, \sec B, \sec C)$, hence its transform is the line

$$(2) \quad \sin(B - C)\alpha + \sin(C - A)\beta + \sin(A - B)\gamma = 0,$$

which contains the circumcentre $O(\cos A, \cos B, \cos C)$ and the Lemoine (symmedian) point $K(a, b, c)$. This is the Brocard line of ABC ; it contains the Brocard diameter and is perpendicular to the line containing the centres of the circles of Apollonius (Lemoine line).

3. THE PARABOLA.

Since the triangles ABC and $A'B'C'$ are in perspective from a point, they are also in perspective from a line (Desargues' two triangle theorem). The envelope of this line, which is determined by the intersections of the corresponding sides of ABC and $A'B'C'$, is Kiepert's parabola with equation, again in trilinears,

$$(3) \quad \sqrt{(b^2 - c^2)\alpha} \pm \sqrt{(c^2 - a^2)\beta} \pm \sqrt{(a^2 - b^2)\gamma} = 0.$$

see Casey [2]. Interestingly, this inscribed conic has the Euler line of ABC as its directrix and its focus is the point whose Wallace (Simpson) line is parallel to the Euler line. In addition, it has the Lemoine line, described above, as one of its tangents.

4. CONCLUSION

It is somewhat surprising that, even though the Kiepert conics occupy important positions in the general sphere of Euclidean geometry, they seem to be relatively unknown today.

This fact is even more surprising since the concepts to which they are related, for example the Euler line, Brocard line, Lemoine line, symmedian point, are very well known. There are, no doubt, other interesting properties of these conics, known or yet to be discovered, consequently, they would seem to merit further study.

4. REFERENCES

1. O. Bottema and M. C. van Hoorn, Problem 664, Nieuw. Arch. v. Wisk., 1983, p.
2. J. Casey, A Treatise on the Analytical Geometry of the Point, Line, Circle, and Conic Sections, Longman's, Green, and Co., London, 1893, 384-386.
3. H. Eves and C. Kimberling, Problem E2990, Amer. Math. Monthly, 93, 1986, 132-133.
4. W. Gallatley, The Modern Geometry of the Triangle, Francis Hodgson, London.
5. R. A. Johnson, Advanced Euclidean Geometry (Modern Geometry), Dover, N.Y., 1969.
6. N. D. Kazarmoff, Geometric Inequalities, The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1961.
7. J. C. Poggendorff, Handwörterbuch, Verlag Chemie, G.M.B.H., Berlin, 1937.
8. O. Volk, Neue Deutsche Biographie, V. 11, Duncker & Humblot, Berlin, 1977.

HISTORISCHE ENTWICKLUNG UND ANWENDUNGEN
DER KETTENBRÜCHE

Miloš Čanak

Es ist bekannt dass die Brüche der Form

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_k}{b_k}}} \quad (1)$$

oder

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_k}{b_k} + \dots \quad (2)$$

die sog. Kettenbrüche darstellen, wobei a_i und b_i Konstanten, wie auch die reellen oder komplexen Funktionen sind. Hier sind a_i - die partiellen Zähler, b_i - die partiellen Nenner, b_0 - der freie Glied und a_i/b_i i-ter Kettenglied. Die Brüche der Form

$$\frac{b_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}, \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{p_1}{q_1}, \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{p_2}{q_2},$$

$$\dots \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_k}{b_k} = \frac{p_k}{q_k} \quad (3)$$

nennt man die gültigen Brüche für den Kettenbruch (1).

Schon 2000 Jahre befassen sich die Mathematiker mit der Theorie der Kettenbrüche. Dabei können wir parallel die historische Entwicklung der fundamentalen Kettenbruchstheorie mit den Anwendungen in anderen mathematischen Gebieten wie Algebra, Zahlentheorie, reelle und komplexe Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, numerische Analysis, Theorie der Differential- und Integralgleichungen u.s.w. und andererseits die Entwicklung der Anwendungen der Kettenbrüche in der Physik, Chemie, Mechanik und Elektrotechnik folgen. Es ist auch möglich, die historische Entwicklung verschiedener Verallgemeinerungen der Kettenbrüche betrachten. Die grösste Mathematiker des XVIII-XX Jahrhunderts wie z.B. Euler, Jacobi oder Poincare haben die Verallgemeinerungen mit einem linearen Charakter eingeführt. Andererseits ha-

ben die neuesten Verallgemeinerungen/verzweigte, integrale und areoläre Kettenbrüche/ eine nichtlineare Charakteristik. Man kann hier auch einen tiefen Zusammenhang und ein Wechselspiel zwischen reiner und angewandter Mathematik im Laufe der Geschichte sehen. Die neuen Ergebnisse in der Kettenbruchstheorie ermöglichen die Anwendung in der Mechanik und Technik und umgekehrt erweckt die Betrachtung verschiedener "verzweigten Erscheinungen" in der Natur und Wissenschaft die Einführung der neuen mathematischen Begriffe und Verallgemeinerungen.

Es besteht kein schriftliches Dokument, dass die alten Griechen den euklidischen Algorithmus zur Konstruktion verschiedener Kettenbrüche nützen. Die erste bekannte Kettenentwicklung

$$3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}} \quad (4)$$

für $\sqrt{15}$ finden wir nach R. Bombelli /1572/, /siehe [1]/. Eine ähnliche Entwicklung

$$\sqrt{18} \approx 4 + \frac{21}{18} + \frac{21}{18} + \frac{21}{18} \quad (5)$$

gab P. Cataldi /1613/, /siehe [2]/. D. Schwenter /1636/, /siehe [3]/ und Chr. Huygens /1698/, /siehe [4]/ haben die gültigen Brüche als Approximation eines Kettenbruches betrachtet. Die erste unendliche Kettenentwicklung

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{2} \quad (6)$$

finden wir bei W. Brouncker /1659/.

L. Euler /1748/, /siehe [5]/ hat systematisch eine Kettenbruchstheorie ausgebildet. Er zeigte dass sich die Kettenbrüche in der Zahlentheorie wie auch in der Analysis anwenden lassen. Seine Ergebnisse gab auch Lagrange, Gauss, Galois, Liouville u.s.v.

Die analytische Theorie hatte auch einen langen Entwicklungsweg. Euler formierte ohne Beweis die Kettenentwicklungen für einigen Integralen und Potenzreihen. Er fand auch die Lösung der RICATISchen Differentialgleichung in der Form eines Kettenbruches.

J. Lambert /1748/, /siehe [6]/ entwickelte $\ln(1+x)$, $\arctan x$ und $\lg x$ in die Kettenbrüche und erforschte die Frage der Konvergenz der Kettenbrüche nach diesen Funktionen. Lagrange fand die Entwicklung für $(1+x)^M$ und $\int_0^x dt/(1+t^n)$ und Euler auch für $\ln[(1+x)/(1-x)]$. Gauss erhielt die Kettenentwicklung für den Quotient

$$F(a, b, c, z) / F(a, b+1, c+1, z) \quad (7)$$

der hypergeometrischen Funktionen. Aber die entsprechende Konvergenzfrage erforschte L.Thomé /1887/, /siehe [7]/. Das Problem der Darstellung einer beliebigen Potenzreihe mit einem Kettenbruch untersuchten M.Stern [7], J.Meijermann [8] und G.Frobenius [9].

In dem zwanzigsten Jahrhundert entwickelte sich weiterhin die analytische Theorie der Kettenbrüche mit Anwendungen und ihre Ergebnisse gaben dabei S.Ramanujan, G.Watson, C.Preece, O.Perron, E.Van Vleck, H.Wall, H.Hamburger, J.Sholat, A.Pringsheim, S.Pincherle, O.Szasz u.s.w. Viele historischen Angaben aus dieser Problematik finden wir in [10].

In der neusten Zeit werden einige, für die Praxis sehr wichtige Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Kettenbrüche, durch die verzweigten, integralen und areolären Kettenbrüche eingeführt.

In der Monographie [11], /1974/ hat P.Bodnarčuk die Frage der Konvergenz der verzweigten Kettenbrüche erforscht und die rekurrenten Formeln für die Ausrechnung des Zählers P_m und des Nenners Q_m des m -ten gültigen Bruches P_m/Q_m ausgeführt.

Die linearen elektrotechnischen Schemas lassen sich mittels der algebraischen, linearen Gleichungen beschreiben, die sich auf Grund der KIRCHHOFFSchen Regeln ausbilden. In der Theorie der verzweigten Kettenbrüche ist bekannt, wie sich jede Komponente der Lösung eines algebraischen Systems mit Hilfe eines verzweigten Kettenbruches darstellen kann. Eine solche Darstellung gibt nicht nur die numerischen Werte der Komponenten, sondern zeigt auch auf Art und Reihenfolge der Verknüpfung der verallgemeinerten Widerstände, was die Konstruktion der elektrotechnischen Schemas ermöglicht.

Die Anwendung der Theorie der verzweigten Kettenbrüche in den elektrotechnischen Berechnungen wird in der Arbeit [12] von I.Erohov/1978/ ausführlich erforscht. Wenn die Zahl der Gleichungen zu gross ist, kann man anstatt des unendlichen Kettenbruches, seinen gültigen Bruch nehmen. Es wird gezeigt, dass ein solcher Fehler nicht zu gross ist und das entsprechende elektrotechnische Schema vereinfacht sich im grossen Teil.

Eine weitere Verallgemeinerung erhält sich, wenn man in einen verzweigten Kettenbruch die Summen mit den Integralen vertauscht. Die Frage der Konvergenz der integralen Kettenbrüche hat R.Mihaljčuk/1978/ in seiner Arbeit [13] erforscht. Auch M.Sjavavko und T. Obnovolovoi haben einige Ergebnisse zu dieser Theorie gegeben. V.

Skorobogatko /1983/ nutzte in seiner Monographie [14] die Theorie der integralen Kettenbrüche zur Lösung eines praktischen Problems der Astrophysik.

In seiner Arbeit [15] hat der Verfasser noch eine Verallgemeinerung des Begriffs des gewöhnlichen Kettenbruches durch die sog. areolären Kettenbrüche der Form

$$s(z, \bar{z}) = w_0(z) + \frac{w_1(z) \cdot \bar{z}}{|1|} + \frac{w_2(z) \cdot \bar{z}}{|1|} + \dots + \frac{w_n(z) \cdot \bar{z}}{|1|} + \dots \quad (8)$$

wobei $w_k(z)$ beliebige analytischen Funktionen sind, eingeführt. Diese Kettenbrüche ermöglichen eine neue Art der Interpolation/ α -Interpolation/ einer nichtanalytischen, komplexen Funktion $W(z, \bar{z})$.

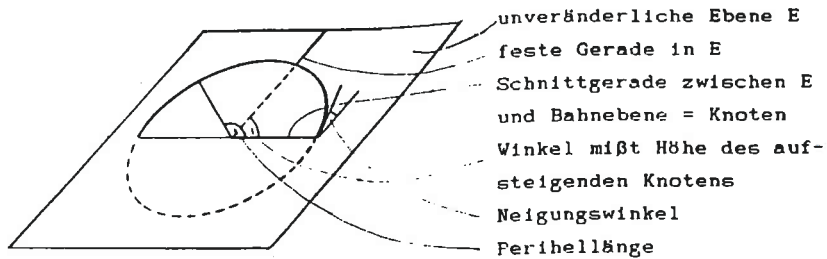
In seiner Monographie [16] zeigte I.Vekua wie sich die Theorie der verallgemeinerten analytischen Funktionen in der Theorie des momentefreien Spannungszustandes einer elastischen Schale anwenden kann. Die Spannungszustand einer elastischen Schale lässt sich mit Hilfe einer verallgemeinerten analytischen Funktion, die die Lösung eines elliptischen Systems der Differentialgleichungen von VEKUA-typus darstellt, beschreiben. Aber die Theorie der areolären Kettenbrüche und speziell die α -Interpolation ist eine günstige und effektvolle Methode in der Theorie der verallgemeinerten analytischen Funktionen. Nämlich, wenn wir auf der Mittelfläche der Schale $(n+1)$ - verschiedenen, geschlossenen Konturen auswählen, und wenn die Werte der Funktion $W(z, \bar{z})$ auf diesen Konturen gegeben sind, so können wir diese Funktion durch Anwendung der α -Interpolation mit einer rationalen Funktion in Form eines Kettenbruches (8) approximieren, der einfacher und günstiger für die numerischen Berechnungen ist. Die Rechnung ist ganz einfach bei den Rotationsschalen, denn in diesem Fall können wir für die Konturen ein System des Kreises

$\bar{z} = \frac{a_i}{z}$, / $i=0, 1 \dots n$ / auswählen und dann die $\alpha_{a_i/z}$ -Interpolation anwenden.

L I T E R A T U R

[1] Bombelli R., "L'Algebra", Venezia, 1572.
[2] Cataldi P., "Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri", Bologna, 1613.

Einfluß der anderen Planeten betrachtet und die Frage gestellt, unter welchen Bedingungen diese Elemente stabil bleiben. Genauer: Ein Planetensystem, das aus n Planeten besteht, bewege sich um einen Zentralstern (die Sonne). Die Planetenbahnen sind in erster Näherung Ellipsen, deren Elemente Störungen unterworfen sind. Wir untersuchen die folgenden Elemente: die Länge des aufsteigenden Knotens (die Schnittgerade der Bahnebene mit der unveränderlichen Ebene), die Neigung der Bahn (den Winkel zwischen der Bahnebene und der unveränderlichen Ebene), die Perihellänge (gemessen durch den Winkel zwischen der Knotenlinie und dem sonnennächsten Punkt der Bahn) und die Exzentrizität. Eine kleine Skizze möge diese Begriffe veranschaulichen



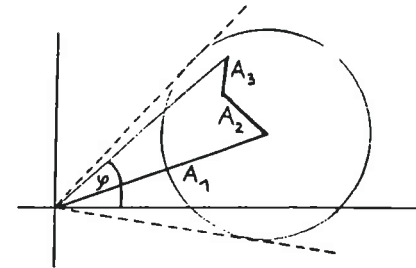
Die Differentialgleichung der Störungsfunktion liefert nun nach Entwicklung in eine Fourierreihe und Integration in erster Näherung für die gestörte Planetenbahn

$$(2) u \cos \psi(t) = A_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + A_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + \dots + A_n \cos(g_n t + \beta_n)$$

$$u \sin \psi(t) = A_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + A_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \dots + A_n \sin(g_n t + \beta_n)$$

u ist die Exzentrizität der Planetenbahn, ψ die Perihellänge, t die Zeit, A_i, g_i, β_i ($i=1, \dots, n$) sind reelle Zahlen. Eine ähnliche Beziehung gilt für die Knotenlinie und die Neigung. (Näheres über diese Ableitungen und die darin auftretenden Konstanten findet man in Charlier [5]). Die Glieder auf der rechten Seite von (2) geben die Störungen an, die die n Planeten des Systems auf die Bahngrößen eines der Planeten ausüben. Es geht nun darum, zu untersuchen, ob diese Störungen bei wachsendem t groß werden oder ob sie zwischen endlichen Grenzen bleiben, d.h. die Bahn stabil bleibt. Man sagt, es existiert eine *mittlere Bewegung*, wenn $\psi(t)$ in der

Form $\psi(t) = \alpha t + \chi$ darstellbar ist, wobei χ für alle t zwischen endlichen Grenzen bleibt. Bereits Lagrange hat gezeigt, daß in folgenden Fällen immer eine mittlere Bewegung existiert: 1) für $n=2$, 2) für $n \leq 3$, wenn ein A_i größer als die Summe der übrigen A_j ist. Diese Behauptung können wir leicht geometrisch veranschaulichen. Wir werden diese geometrische Interpretation auch bei den weiteren Untersuchungen nützlich finden. O.B.d.A. können wir annehmen, daß die A_i verschieden und der Größe nach geordnet sind. Auch die g_i können als verschieden angenommen werden. Der Kürze halber schreiben wir für $g_i t + \beta_i = \alpha_i$. Die Summanden auf der rechten Seite von (2) können als Polarkoordinaten eines Vektors mit der Länge A_i angesehen werden. Im Fall $n=3$ hat man also, wenn die Lagrangesche Bedingung erfüllt ist:



Der Summenvektor, die linke Seite von (2), liegt sicher in dem eingezeichneten Kreis, sein Richtungsvektor ist beschränkt, d.h. es existiert eine mittlere Bewegung. Hier eingezeichnet ist nur der Fall $n=3$, man sieht aber leicht, daß die gleiche Schlußweise auch für größeres n möglich ist. Auch den Fall, daß ein A_i gleich der Summe der übrigen Koeffizienten ist, kann man ähnlich behandeln.

Nun wollen wir den nicht-Lagrangeschen Fall für $n=3$ genauer betrachten. Wir folgen hier Bohl, der dies in [3] als erster untersucht hat. Zunächst zeigt er mittels einer Transformation, daß es genügt, die Gleichung

$$(3) u \cos \psi = (A + B \cos x + C \cos y) / (B \sin x + C \sin y)$$

$$(x = (g_1 - g_2)t + \beta_1 - \beta_2, y = (g_2 - g_3)t + \beta_2 - \beta_3)$$

zu betrachten. Aus den Längen A, B, C wird ein Dreieck gebildet. Die Winkel, die B und C gegenüberliegen seien w .

und w . Der Zuwachs von ψ um Vielfache von 2π hängt von der Anzahl der Überschreitungen doppeltperiodisch angeordneter Verbindungsstrecken je zweier Punkte, für die Zähler und Nenner in (3) gleichzeitig verschwinden, ab. Bohl transformiert dadurch die Frage nach dem Verhalten von ψ für wachsende t zur Frage nach dem asymptotischen Verhalten einer zahlentheoretischen Funktion, die folgendermaßen erklärt werden kann: gesucht ist die Anzahl der Gitterpunkte mit positiven ganzzahligen Koordinaten, die sich in einem schief liegenden Parallelstreifen unterhalb von $Y=t$ befinden. Die Breite des Streifens entspricht dabei der Fläche des Dreiecks A, B, C , der Anstieg der Parallelen ist

$$(g_2 - g_1) / (g_2 - g_1) = \rho.$$

Von dieser Zahl hängt das asymptotische Verhalten, und damit die Existenz der mittleren Bewegung, ab.

Bohl zeigt den folgenden Satz:

Der Ausdruck $\psi(t)$ strebt, wenn t unbeschränkt wächst, nach einer endlichen Größe, so daß stets eine charakteristische Zahl existiert. Dieselbe ist, falls ρ eine Irrationalzahl darstellt gleich

$$1/\pi (g_1 w_1 + g_2 w_2 + g_3 w_3)$$

(die Fläche des Dreiecks), falls aber ρ eine Rationalzahl darstellt, so ergibt sich ein anderer Wert (der Parallelstreifen wird gewissenmaßen periodisch). Bohl zieht aus dieser Aussage die Folgerung: Ist ρ rational, dann existiert eine mittlere Bewegung, ist ρ irrational, dann existiert keine mittlere Bewegung. Eine Entscheidung ist also im allgemeinen nicht möglich.

Felix Bernstein hat 1912 in [1] erkannt, daß die Sätze, die in den Jahren 1909/10 von Bohl, Sierpinski und Weyl - jeder von einer völlig anderen Problemstellung ausgehend - gezeigt wurden, die gleiche zahlentheoretische Aussage darstellen, nämlich die bereits anfangs erwähnte Gleichverteilung mod 1 der Zahlenfolge (αn) . Er baut auf den Ergebnissen von Bohl auf und untersucht das Problem mengentheoretisch. Dabei kommt er zu dem Schluß, daß die geometrische Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer mittleren Bewegung Null sei. (Er verwendet Kettenbrüche und Lebesguesche Maßtheorie.) An diese Behauptung von Bernstein schließt sich

nun eine Diskussion an, die noch im Jahr 1912 in den Mathematischen Annalen ausgetragen wurde. Als erster meldet sich Rohl zu Wort [4]. Er meint, daß es doch möglich sein könnte, daß bei der Entstehung des Planetensystems Verhältnisse vorlagen, die zur Folge haben, daß gewisse, mit der Bewegung des sich schließlich bildenden Systems zusammenhängende Größen Spezialwerte annehmen, d.h. daß sich die betrachteten Größen nicht notwendig wie zufällig gewählte reelle Zahlen verhalten müßten. Außerdem seien die Ausgangsgleichungen nur Näherungen. Bernstein verteidigt in [2] seine Aussage mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Argumenten.

Von Bernstein auf die astronomische Problemstellung und auf das gleichzeitige Auftreten der zahlentheoretischen Fragestellung aufmerksam gemacht, untersucht nun Hermann Weyl die Situation genauer. Er findet einen neuen, wesentlich einfacheren und verallgemeinerungsfähigen Beweis für die zahlentheoretische Aussage - das heute so genannte Weylsche Kriterium - und trägt dies im Sommer 1913 in Göttingen vor. Anlässlich seiner Berufung nach Zürich hält Weyl am 9. Mai 1914 vor der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft einen Vortrag mit dem Titel *Über eine Anwendung der Zahlentheorie auf die statistische Mechanik und die Störungstheorie* ([7]), in dem er die Theorie der Gleichverteilung (diese Bezeichnung wurde von Weyl in seiner fundamentalen Arbeit [8] eingeführt) auf verschiedene Gebiete anwendet: auf die Bewegung einer Billardkugel, auf die statistische Mechanik und eben auf die Störungstheorie. Hier gelingt es ihm, die Beschränkung auf drei Planeten, über die Bohl nicht hinausgekommen ist, fallenzulassen, da sein Satz - das schon erwähnte Weylsche Kriterium - auch in höherdimensionalen Räumen gültig ist. Als Beispiel untersucht er den Fall von 4 Planeten genauer. Dazu betrachtet er Galenkvierecke und berechnet deren Flächen. Dieses Problem hat ihn auch noch in späterer Zeit beschäftigt; so z.B. 1916, als er in [8] wieder (für die Mathematiker dieser Zeit wahrscheinlich schwer verständliche) Bemerkungen über die Invarianz dieser Flächen macht und dabei ein falsch berechnetes Integral angibt; oder

1930/39 (9) und (10)), als er dieses Integral korrigiert, dabei kurz über die Geschichte unseres Satzes spricht und weitere Aussagen über mittlere Bewegungen macht. Zurück zu 1914: In den Aussagen von Weyl finden sich einige Ungereimtheiten; er meint z.B. im Gegensatz zu Bohl und Bernstein, daß immer eine mittlere Bewegung existiere. Dies könnte auf einer unterschiedlichen Auffassung des Begriffs der mittleren Bewegung beruhen, oder auf der Eile, in der diese Arbeit niedergeschrieben wurde, oder auch auf einer ungenauen Übersetzung ins Französische (der letztgenannten Ursache widersprechen allerdings die gleichbleibenden Aussagen von Weyl aus späterer Zeit).

Abschließend noch eine Bemerkung über die praktische Anwendbarkeit der dargestellten Untersuchungen (Bohl [3], S.199):

Die Bedeutung des behandelten Problems für die Astronomie dürfte, wenigstens in seiner bisherigen Gestalt, gering sein. Man kann dasselbe jedoch auch als mathematische Frage auffassen, und es schien mir in jedem Fall geboten, die meiner Meinung nach (bisher) unkorrekte Behandlung derselben zu verbessern.

LITERATUR:

- [1] Bernstein, F.: Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem, Math. Ann. 71 (1912), S.417-439.
- [2] Bernstein, F.: Über geometrische Wahrscheinlichkeit und über das Axiom der beschränkten Arithmetisierbarkeit der Beobachtungen, Math. Ann. 72 (1912), S.585-587.
- [3] Bohl, P.: Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem, Journ. f. Math. 135 (1909), S.189-283.
- [4] Bohl, P.: Bemerkungen zur Theorie der säkularen Störungen, Math. Ann. 72 (1912), S.295-296.
- [5] Charlier, C.L.: Die Mechanik des Himmels, 2 Bände, Walter de Gruyter & Co., Berlin, Leipzig, 2.Aufl. 1927 (1. Aufl. I 1902, II 1907)
- [6] Hlawka, E. - Binder, Ch.: Über die Entwicklung der Theorie der Gleichverteilung in den Jahren 1909 bis 1916, Archive for History of Science, 1986 (in Druck).
- [7] Weyl, H.: Sur une application de la théorie des nombres à la mécanique statistique et la théorie des perturbations, L'Enseign. math. 16 (1914), S.455-467.
- [8] Weyl, H.: Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77 (1916), S.313-352.
- [9] Weyl, H.: Mean motion, Amer. J. of Math. 60 (1938), S.889-896.
- [10] Weyl, H.: Mean Motion II, Amer. J. of Math. 61 (1939), S.143-148.

DER FÜNFTE MERKWÜRDIGE PUNKT - ANMERKUNGEN ZU SEINEM ENTDECKER
UND DESSEN UNTERSUCHUNGEN ZUR DREIECKSGEOMETRIE

Peter Baptist, Bayreuth

Das 19. Jahrhundert brachte eine Fülle von neuen Ergebnissen zur Dreiecksgeometrie. Eine große Zahl wertvoller Beiträge lieferten Mathematiker im Schuldienst. Einer ihrer bekanntesten Vertreter ist Karl Wilhelm Feuerbach (1800 - 1834), dessen Satz über die Berühreigenschaften der zum Dreieck gehörenden Kreise nach H. Eves [3] wohl zu den elegantesten Ergebnissen der Dreiecksgeometrie zählt. Neben wissenschaftlichen Zeitschriften und Büchern waren in der damaligen Zeit insbesondere die Jahresberichte der Schulen wichtige Publikationsorgane. Hier finden sich viele erwähnenswerte Aufsätze von heute fast vergessenen Verfassern. Dieses Schicksal widerfuhr auch dem Namensgeber des fünften merkwürdigen Punktes^{*)}, der nach Christian Heinrich von Nagel (1803 - 1882) benannt ist.

Biographische Notizen

Großen Einfluß auf den Mathematikunterricht im Königreich Württemberg hatte der 1803 in Stuttgart geborene Christian Heinrich von Nagel. Nach dem Studium der Theologie und Mathematik, einer zu seiner Zeit nicht seltenen Kombination, war er kurze Zeit Vikar. 1827 begann er seine Schullaufbahn am Lyceum in Tübingen. Daneben promovierte er und habilitierte sich in Mathematik an der dortigen Universität. Als Privatdozent hielt er dann auch Vorlesungen zur Geometrie. Im Jahre 1830 trat er eine Mathematikerstelle am Gymnasium in Ulm an. Um Nagel in Württemberg zu halten, wurde er 1844

^{*)} Die ersten vier merkwürdigen Punkte sind die klassischen Transversalenschnittpunkte Schwerpunkt S, Umkreismittelpunkt M, Inkreismittelpunkt I und Höhen-schnittpunkt H.

in Ulm zum Schulleiter ernannt. Hohe Anerkennung erfuhren sein wissenschaftliches und schulisches Wirken, wie viele Ehrungen und Orden bezeugen.

Nach seinem 1833 erschienenen "Lehrbuch der Geometrie" wurde in Württemberg jahrelang ausschließlich unterrichtet. Man beachte, noch zu Beginn der 30er Jahre des vergangenen Jahrhunderts wurde in Württemberg Geometrie fast nur anhand der Elemente Euklids gelehrt. Erst Nagels Lehrbuch bewirkte eine Änderung. Es erlebte 16 Auflagen und wurde ins Italienische und Ungarische übersetzt.

"Nagel hat es oft ausgesprochen, daß die ganze Mathematik und besonders die Geometrie keineswegs bloß als Wissenschaft, sondern stets zugleich als eine Kunst, ein Können, behandelt werden müsse und demgemäß hat er größten Werth gelegt auf geometrische Constructions-Aufgaben" (siehe [5], S. 8).

Neben weiteren Lehrbüchern für die Schule - nicht nur zur Mathematik, sondern auch zur Physik - verfaßte Nagel zwei größere wissenschaftliche Arbeiten, eine aus der Dreiecksgeometrie ("Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreiecke gehörigen Kreise", 1836) und eine aus der Zahlentheorie ("Theorie der periodischen Dezimalbrüche", 1845).

Nagels Untersuchungen über merkwürdige Punkte und Geraden

Die Jahresschrift des Gymnasiums Ulm aus dem Jahr 1835 ist zwar als 'Einladungsschrift zu der Feier des Geburtsfestes Seiner Majestät des Königs' ausgewiesen, sie besteht aber hauptsächlich aus Nagels "Untersuchungen über die Eigenschaften der wichtigsten mit dem Dreieck in Verbindung stehenden Kreise". Diese Arbeit ist ein Teilabdruck seines im darauffolgenden Jahr erschienenen Buches "Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreiecke gehörigen Kreise".

Nagel schreibt im Vorwort, daß sich seine Abhandlung vor allem an die Schriften von A.L. Crelle ("Über einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks", 1816), von K.W. Feuerbach (Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren, 1822) und von C.F.A. Jacobi (De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis, 1825) anschließt. Im Unterschied

zu diesen Autoren, die in ihren Beweisen analytisch-trigonometrische Methoden verwenden, sind die Beweise Nagels rein synthetisch-elementargeometrischer Natur. Er vertritt die Meinung, "es zieme sich von dem wissenschaftlichen Gesichtspunkte aus, daß die reine Geometrie versuche, das, was dem Inhalte nach ihr angehöre, auch in der Form sich zum Eigenthume zu machen" (vgl. [7]).

Aus der Vielzahl der Ergebnisse von Nagel sollen hier nur diejenigen aus dem Bereich der merkwürdigen Punkte und Geraden betrachtet werden. Er zeigt u.a. die Existenz von Nagel-, Gergonne- und Mittenpunkt und von den drei äußeren Nagel-Punkten. Weiterhin befaßt er sich mit Eigenschaften dieser Punkte. Natürlich verwendet er nicht die hier aufgeführten Namen der Punkte. Auffallend ist, daß Nagel die in diesem Zusammenhang naheliegenden äußeren Gergonne-Punkte in seiner Abhandlung nicht erwähnt.

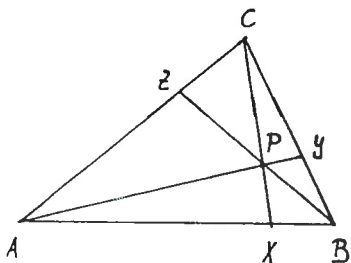
Auch zu Nagels Lebzeiten waren seine Ergebnisse über die merkwürdigen Punkte anscheinend nicht sehr verbreitet. Dies wird u.a. durch einen Aufsatz von F.J. Harnischmacher aus dem Jahr 1864 (siehe [4]) belegt, in dem dieser ca. 30 Jahre später als Nagel die Existenz des fünften merkwürdigen Punktes und einige Eigenschaften dieses Punktes nachweist.

Existenznachweis merkwürdiger Punkte

Uns interessiert hier insbesondere die Beweismethode Nagels. Für die aufgeführten Transversalschnittpunkte bietet sich die Umkehrung des Satzes von Ceva als einheitliches Beweisverfahren an. Entscheidend ist hierbei die Bestimmung der Teilverhältnisse, die jeweils durch den Schnittpunkt einer Ecktransversale mit der gegenüberliegenden Dreiecksseite festgelegt sind.

Crelle befaßt sich in seiner 1816 erschienenen Arbeit mit Anwendungen des Satzes von Ceva. Da Nagel diese Schrift in seinem Vorwort erwähnt, ist anzunehmen, daß er diesen Satz kannte. Dennoch verwendet er diese einfache Beweismethode nicht.

Er arbeitet zwar auch mit Teilverhältnissen, aber er wählt seine Strecken nicht auf den Dreiecksseiten, sondern auf den Ecktransversalen selbst.



Zwei nichtparallele Ecktransversalen AY und BZ schneiden sich in einem Punkt P. Mit Hilfe der Streckenverhältnisse $\frac{AY}{AP}$ und $\frac{BZ}{BP}$ zeigt er, daß auch CX durch P verläuft. X, Y, Z sind jeweils Berührungspunkte der entsprechenden Ankreise bzw. des Inkreises.

Dieses Vorgehen ist wesentlich aufwendiger als das Arbeiten mit dem 'Ceva', da die für den 'Ceva' benötigten Seitenabschnitte bei Nagels Vorgehen ebenfalls gebraucht werden.

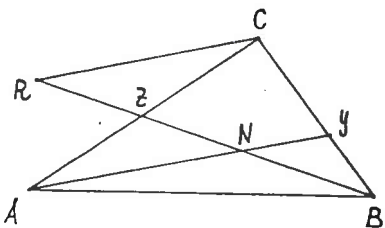
Am Beispiel des Existenznachweises für den Nagel-Punkt soll nun diese Beweismethode näher erläutert werden.

Beispiel: Die Existenz des Nagel-Punktes

Entscheidend für Nagels Beweistechnik ist das Teilverhältnis, mit dem der Nagel-Punkt N die durch einen Eckpunkt des Dreiecks und den zugehörigen 'Fußpunkt' der Nageltransversale bestimmte Strecke teilt. Ist Y der Berührungspunkt des Ankreises an die Seite [CB], d.h. also der 'Fußpunkt' der Nageltransversale, so gilt:

$$\frac{AY}{AN} = \frac{s}{a}, \text{ wobei } s := \frac{1}{2}(a+b+c). \quad (*)$$

Der Beweis von (*) erfolgt mit Hilfe ähnlicher Dreiecke. Die Nageltransversalen AY und BZ schneiden sich in N. Nagel zeichnet nun eine Parallele zu AY durch C, die die Ecktransversale BZ in R schneidet. Wir haben nun zwei Paare ähnlicher Dreiecke



$\triangle ANZ \sim \triangle CRZ$ und $\triangle BRC \sim \triangle BNY$.

Mit Hilfe der hieraus sich ergebenden Streckenverhältnisse bekommen wir

$$\frac{AN}{NY} = \frac{a}{s-a}, \text{ und daraus folgt } (*) .$$

Nagel zeigt nun mit (*) die Existenz des Transversalenschnittpunktes. Er argumentiert folgendermaßen (X, Y, Z seien die Berührungspunkte der Ankreise an AB, BC bzw. CA):

$$AY \cap BZ = (N) . \text{ Wegen } (*) \text{ gilt: } \frac{AY}{AN} = \frac{s}{a} .$$

AY und CX schneiden sich in einem Punkt K : $AY \cap CX = (K) .$

$$\text{D.h. } \frac{AY}{AK} = \frac{s}{a} .$$

Da $\frac{AY}{AN} = \frac{AY}{AK}$ ist, fällt K mit N zusammen und CX geht durch N .

Bem.: Nagel muß bei seinem Vorgehen für jeden der betrachteten Transversalenschnittpunkte ein (*) entsprechendes Teilverhältnis bestimmen. Diese Ergebnisse - Analoga des bekannten Teilverhältnisses des Schwerpunkts auf den Seitenhalbierenden sind schon für sich allein sehr interessant.

Als Beispiel sei noch der Gergonne-Punkt G angeführt.

Hier gilt (Y ist der Berührungspunkt des Inkreises an [BC]):

$$\frac{AY}{AG} = \frac{4q - s^2}{a(s-a)}, \text{ wobei } q := ab + ac + bc ,$$

bzw.

$$\frac{AY}{AG} = \frac{r_a + r_b + r_c}{r_b + r_c}, \text{ wobei mit } r_a, r_b, r_c \text{ die Ankreisradien bezeichnet werden.}$$

Kollineare Punktetripel

Neben der Existenz merkwürdiger Punkte bewies Nagel, in Analogie zu der ihm bekannten Euler-Geraden, die Kollinearität bestimmter Tripel merkwürdiger Punkte. Außer der Euler-Geraden gibt Nagel noch fünf weitere Tripel an, wobei der Schwerpunkt S jedem dieser Tripel angehört. Mit ihm kollinear sind der Nagel-Punkt N und der Inkreismittelpunkt I, der Gergonne-Punkt G und der Mittenpunkt O, jeweils ein äußerer Nagel-Punkt und der entsprechende Ankreismittelpunkt. Weiterhin zeigt Nagel, daß der Schwerpunkt S die durch die beiden anderen kollinearen merkwürdigen Punkte gebildete Strecke jeweils im Verhältnis 2:1 teilt.

Die Beweise werden nicht, wie der bei Euler, mit analytisch-trigonometrischen Mitteln geführt, sondern Nagel legt, wie bereits erwähnt, großen Wert auf die "Reinheit" der Methode. D.h. elementargeometrische Aussagen sollen mit elementargeometrischen Mitteln bewiesen werden.

Die Nachweise sowohl für die Kollinearität als auch für das Teilverhältnis erfolgen für jedes der Tripel einzeln mit gleicher Beweistechnik. Greifen wir wiederum den Nagel-Punkt exemplarisch heraus. Zu zeigen ist der

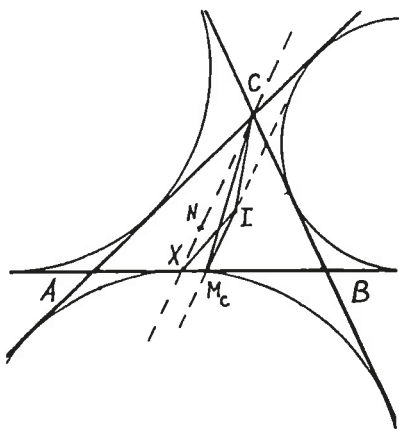
Satz: N, S, I sind kollinear und $\overline{NS} = 2 \cdot \overline{SI}$.

Als Vorbereitung zu dem Beweis dieses Satzes zeigt Nagel zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1: Die Gerade durch den Eckpunkt C eines Dreiecks und den Nagel-Punkt N ist parallel zu der Geraden durch den Inkreismittelpunkt I und dem Mittelpunkt M_c der Seite $[AB]$, d.h. $CN \parallel IM_c$.

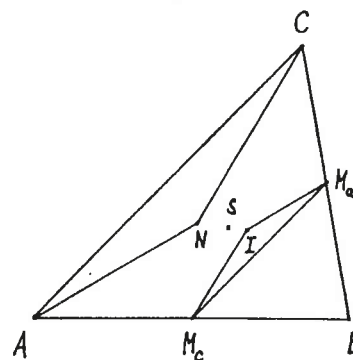
Hilfssatz 2: Es gilt: $\overline{CN} = 2 \cdot \overline{IM_c}$.

Die Beweisidee für den Hilfssatz 1 ist besonders interessant. Nagel



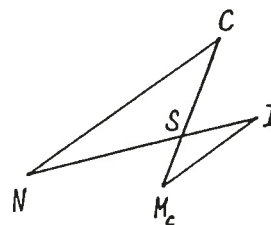
betrachtet zwei Dreiecke mit gemeinsamer Grundseite $[IM_c]$, deren dritter Eckpunkt C bzw. X (= Berührungspunkt des Ankreises an $[AB]$) jeweils auf der Geraden CN liegt. Er weist nach, daß die beiden Dreiecke $\triangle IM_c C$ und $\triangle IM_c X$ flächengleich sind. Somit müssen die Höhen auf $[IM_c]$ gleich lang sein und es gilt $CN \parallel IM_c$.

Mit Hilfssatz 1 zeigt nun Nagel, daß die Dreiecke $\triangle ACN$ und $\triangle IM_a M_c$



ähnlich sind (M_a bzw. M_c sind die Mittelpunkte der Seiten $[BC]$ bzw. $[AB]$). Aus den sich ergebenden gleichen Seitenverhältnissen und $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{M_a M_c}$ folgt Hilfssatz 2.

Wie beweist nun Nagel den obigen Satz? Er geht davon aus, daß sich die Geraden IN und CM_c in einem Punkt S schneiden und zeigt, daß S der Schwerpunkt ist.



Wegen Hilfssatz 1 gilt:

$$\triangle ISM_c \sim \triangle CSN$$

Mit Hilfssatz 2 folgt daraus

$$\overline{CS} = 2 \overline{SM_c}$$

und somit ist S Schwerpunkt. Ebenfalls aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke folgt

$$\overline{NS} : \overline{SI} = 2 : 1$$

Soweit der Einblick in Nagels Beweistechnik. Ebenso verfährt er bei den vier weiteren Tripeln. Um eine Verallgemeinerung, die sich hier anbietet, hat er sich anscheinend nicht bemüht.

Nagelsche Punktepaare (vgl. [1])

Wir wollen nun die Einzelergebnisse von Nagel zusammenfassen und definieren in Verallgemeinerung obiger Resultate:

Definition: Zwei Transversalenschnittpunkte P, P' und der Schwerpunkt S seien kollinear. Liegt S zwischen P und P' und gilt $\overline{PS} = 2 \overline{SP'}$, so heißt das Paar (P, P') *Nagelsches Punktepaar*.

Damit erhalten wir den

Satz: Gegeben sind ein Dreieck ABC und ein Nagelsches Punktepaar (P, P') . Verbinden wir denjenigen Punkt des Nagelschen Punkte-

paares, der vom Schwerpunkt doppelt so weit entfernt ist wie der andere mit einer Ecke des Dreiecks und den anderen mit der Mitte der Gegenseite, so sind die beiden Geraden parallel und die erste Verbindungsstrecke ist doppelt so lang wie die zweite.

Umgekehrt läßt sich zeigen, daß die Schnittpunkte jeweils zueinander paralleler Eck- bzw. Mittenversalen ein Nagelsches Punktepaar bilden. Wir können diesen Satz sogar etwas allgemeiner formulieren, indem wir nur von der Kopunktalität der Mittenversalen ausgehen.

Satz: Gegeben sind ein Dreieck ABC und ein beliebiger Punkt P' in der Ebene. Die Gerade g_A durch die Ecke A des Dreiecks sei parallel zu der Geraden durch P' und der Mitte der Gegenseite A'. Analog erhalten wir die Geraden g_B durch B und g_C durch C. Dann gilt:

- (1) Die drei Geraden g_A, g_B, g_C schneiden sich in einem Punkt P.
- (2) Die Punkte P, P' sind ein Nagelsches Punktepaar.

Literatur:

- [1] Baptist, P.: Über Nagelsche Punktepaare, Preprint Universität Bayreuth, 1986.
- [2] Cantor, M.: Christian Heinrich v. Nagel, Allgemeine Deutsche Biographie, Bd. 23, Leipzig, 1886.
- [3] Eves, H.: An Introduction to the History of Mathematics, Saunders, Philadelphia, 1983.
- [4] Harnischmacher, F.J.: Über einen merkwürdigen Punkt des Dreiecks, Archiv der Mathematik und Physik, 42, p. 90-94, 1864.
- [5] Krimmel, O.: Nekrolog des K. württembergischen Oberstudienraths Dr. Christian Heinrich v. Nagel, Tübingen, 1884.
- [6] Nagel, Ch.: Untersuchungen über die Eigenschaften der wichtigsten mit dem Dreieck in Verbindung stehenden Kreise, Programm des Gymnasiums Ulm, 1835.
- [7] Nagel, Ch.: Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreiecke gehörigen Kreise, Leipzig, 1836.

D. Laugwitz, Darmstadt

DAS BEISPIEL CAUCHY: WECHSELBEZÜGE ZWISCHEN ANWENDUNG UND GRUNDLEGUNG DER REELLEN ANALYSIS?

Es soll die Grundlegung der Analysis untersucht werden, wie sie in Cauchys drei großen Lehrbüchern zu finden ist, dem *Cours d'analyse* (C, 1821), dem *Résumé des leçons* (R, 1823) und den *Leçons sur le calcul différentiel* (L, 1829). Ich zitiere nach den Oeuvres Ser. II tome III (für C) und tome IV (für R und L).

1. Cauchys Motto

Ich werde Cauchys eigenes Motto ernst nehmen, welches er in den Avertissements zu R (p. 9) und L (p. 267) formuliert: '*Mon but principal a été de concilier la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon Cours d'analyse, avec la simplicité que produit la considération directe des quantités infiniment petites.*'

In der Introduction zu C (p. 10) hieß es schon: '*En parlant de la continuité des fonctions, je n'ai pu me dispenser de faire connaître les propriétés principales de quantités infiniment petites, propriétés qui servent de base au calcul infinitésimal.*'

Man muß also die unendlich kleinen Größen aus drei Gründen ernst nehmen: Sie sind grundlegend für die Analysis, sie sorgen für Einfachheit, und sie lassen sich mit der Forderung nach Strenge vereinbaren. Läßt man Cauchys eigenes Motto außer acht, so kommt man in die seit Abel 1826 viel diskutierte Schwierigkeiten schon bei den beiden ersten Lehrsätzen zur Stetigkeit und zur Reihenkonvergenz:

(A) '*Théorème I. - Si les variables x, y, z, \dots ont pour limites respectives les quantités fixes et déterminées X, Y, Z, \dots , et que la fonction $f(x, y, z, \dots)$ soit continue par rapport à chacune des variables x, y, z, \dots dans le voisinage du système des valeurs particulières $x = X, y = Y, z = Z, \dots, f(x, y, z, \dots)$ aura pour limite $f(X, Y, Z, \dots)$.*' (C, p. 47).

(B) '*Théorème I. - Lorsque les différents termes de la série (1) $[u_0 + u_1 + u_2 + \dots]$ sont des fonctions d'une même variable x , continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x .*' (C, p. 120; unverändert so noch 1833 in *Résumés analytiques*, Oeuvres (2) X, p. 56; inhaltlich unverändert mit einem instruktiven Beispiel 1853, Oeuvres (1) XII, p. 33).

2. Fünf Standpunkte

Die Einstellung der Mehrheit der Mathematiker (und Historiker) dazu ist: Die Sätze sind falsch. Das trifft zu, wenn man sie in das Begriffsschema der punktwweisen Stetigkeit und Konvergenz preßt, also von den Begriffen des Autors wesentlich abweicht. Das ist fachwissenschaftlich und historisch unzulässig.

Fachwissenschaftlich brauchbar, aber unhistorisch und Cauchys Motto beiseite lassend ist die oft wiederholte Bemerkung, daß Cauchys Sätze bei zusätzlichen Gleichmäßigkeitsannahmen richtig werden. (Das gilt nicht für einige Resultate, die als Vertauschung von Grenzübergängen interpretiert werden.) Für eine kritische Auseinandersetzung s. Spalt 1981.

Ein dritter Standpunkt (Robinson 1966) benutzt die moderne Nichtstandard-Analyse und wird damit der Infinitesimalauffassung gerecht, nicht aber in Cauchys eigenen Begriffen; damit ist auch das unhistorisch.

Viertens ist Giusti 1984 zu nennen, der versucht, wirklich in Cauchys eigenen Begriffen zu bleiben und mit Folgen arbeitet; insbesondere sind die unendlich kleinen Größen für Giusti nichts anderes als Nullfolgen. Das wird im Falle (B) befriedigend durchgeführt, läßt sich aber in komplizierteren Sachverhalten wie (A) nur unter Verletzung von Cauchys Wunsch nach Einfachheit realisieren. Letztlich versucht auch Giusti eine Elimination der unendlich kleinen Größen, entgegen Cauchys erklärtem Motto.

Meine eigene Position, die fünfte in der Liste, ist: Für Cauchy waren die unendlich kleinen Größen mathematische Gegenstände eigener Art, die er allerdings für Zwecke des Beweises oft durch Nullfolgen repräsentieren konnte, ohne sie mit diesen zu identifizieren (in L werden sie übrigens auch durch stetige $f(x)$ mit $f(0) = 0$ repräsentiert, wobei er dieses Wort ausdrücklich gebraucht). Andernfalls hätte er in seinem Motto ja von Nullfolgen gesprochen und nicht von unendlich kleinen Größen.

Man denke auch daran, daß Cauchy als Physiker bedeutend war, und daß seine Lehrbücher sich an Ingenieure wandten. Streng sollten sie sein, aber zusätzlich mußten sie für die Anwendungen brauchbar sein. Unsere historische Erfahrung zeigt, daß die Analysis für die Physiker und Ingenieure immer *Infinitesimalrechnung* geblieben ist. Jeder Analytiker weiß, daß die für die Anwendungen wichtigen Aussagen diejenigen sind, die man später mit Gleichmäßigkeitsannahmen begründete; für Cauchy folgten diese Aussagen infinitesimalanalytisch. Sollte er nicht aus seiner Erfahrung gewußt haben, daß er damit die für die Anwendungen relevanten Aussagen erhielt?

3. Cauchys Gebrauch der unendlich kleinen Größen

Allerdings gibt Cauchy keine Theorie der unendlich kleinen Größen, ebensowenig wie er eine Theorie der reellen Zahlen gibt. Ihn interessiert in beiden Fällen nur, daß man brauchbare Repräsentanten hat; für die reellen Zahlen sind das oft die Dezimalzahlen, manchmal andere konvergente Folgen, und für die unendlich kleinen Größen sind es oft Nullfolgen, manchmal Funktionen mit $f(0) = 0$.

Wie erklärt Cauchy selbst die unendlich kleinen Größen? Es sind Variable, die gegen Null konvergieren: *'On nomme quantité variable celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. - Lorsque les valeurs numériques (Absolutbeträge) d'une même variable décroissant indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donnée, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.'* (C, p. 19; anschließend übrigens eine analoge Beschreibung der unendlich großen Größen; R, p. 16; L, p. 273).

Die Überschrift der 6. Lektion von L (p. 325) ist: *'Sur les dérivées des fonctions qui représentent des quantités infiniment petites'*, und von da an findet sich öfter die Ausdrucksweise von Funktionen als Repräsentanten von unendlich kleinen Größen.

Ich überprüfe die Auffassungen an Cauchys Sätzen und Beweisen. Eine Funktion heißt stetig (in einem Intervall), wenn ein unendlich kleiner Zuwachs der Variablen stets (toujours) nur eine unendlich kleine Änderung der Funktion bewirkt.

Der Beweis zu (A) ist: Für $\alpha \approx 0$, $\beta \approx 0$ (≈ 0 meine Abkürzung für unendlich klein) gilt wegen der Stetigkeit in der zweiten bzw. ersten Variablen $f(x+\alpha, y+\beta) - f(x+\alpha, y) \approx 0$ bzw. $f(x+\alpha, y) - f(x, y) \approx 0$, und Addition ergibt $f(x+\alpha, y+\beta) - f(x, y) \approx 0$; Cauchy ersetzt x, y durch X, Y und dann $x+\alpha, y+\beta$ wieder durch x, y und ist fertig. Schreibt man das mit Folgen auf, so kommt man in einen Dschungel. Das sieht man auch deutlich am berühmten 'Gegen'-Beispiel

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad X = Y = 0.$$

Zum Beweis von (B) setzt Cauchy $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$, $r_n = u_n + u_{n+1} + \dots$ und $s = s_n + r_n$. Dann ist

$$s(x+\alpha) - s(x) = s_n(x+\alpha) - s_n(x) + r_n(x+\alpha) - r_n(x).$$

Für jeden möglichen (d.h. endlichen) Wert von n ist die erste Differenz rechts unendlich klein, wegen der Stetigkeit der s_n . Für hinreichend große n werden die beiden Werte der r_n 'insensible', wir würden sagen kleiner als ein gegebenes $\epsilon > 0$, wegen der Konvergenz. Die ganze rechte Seite ist kleiner als 3ϵ , die linke also ≈ 0 .

Auch hier will mir das Einsetzen von Folgen nicht gelingen: $r_n(x+\alpha)$ wird zu einer Doppelfolge. Hingegen gelingt das, wie Giusti auch bemerkt, bei dem Beispiel aus 1853,

$$s(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

Hier setzt Cauchy $x = \frac{1}{n}$ mit unendlich großem n . Nach seiner Infinitesimalversion des Konvergenzkriteriums (s_n konvergiert genau dann wenn $s_n \approx 0$ für alle unendlich großen n) müßte bei Konvergenz der Reihe der Rest für unendlich große Indizes ≈ 0 sein, aber es ist - gemäß seiner Integraldefinition! - für dieses x und n

$$r_n(x) \approx \int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt = 0,6244 \dots$$

Dieses Beispiel diskutiert u.a. auch Spalt 1981, 1983. Daß die Summe $s(x)$ nicht stetig ist, widerspricht Cauchys Satz (B) nicht, denn die Voraussetzung der Konvergenz der s_n überall (toujours) ist nicht erfüllt. Die Überlegung gibt noch ein Indiz dafür, daß die Variable bei Cauchy auch infinitesimale Werte annehmen darf.

Der Satz (B) ist wichtiges Hilfsmittel im Cours, z.B. beim Binomialsatz (C, pp. 141-142). Die Reihe

$$\phi(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} x^n$$

wird bei festem x zwischen -1 und $+1$ als Funktion von μ betrachtet. Sie konvergiert und genügt der Funktionalgleichung $\phi(\mu)\phi(\mu') = \phi(\mu+\mu')$. Da die Reihenglieder stetige Funktionen von μ sind, ist nach (B) auch die Summe stetig. Für rationale μ stimmt sie mit $(1+x)^\mu$ überein, also wegen der Stetigkeit auch für reelle μ .

Anschließend leitet Cauchy die Reihen für e^x und $\ln x$ her. Für $\mu = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha \approx 0$ gilt bei $|\alpha x| < 1$ (also sicher für alle endlichen reellen x)!

$$(1+\alpha x)^{1/\alpha} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} (1-\alpha) + \frac{x^3}{3!} (1-\alpha)(1-2\alpha) + \dots$$

Nun möchte Cauchy α gegen Null gehen lassen, was in späterer Terminologie wie die Vertauschung von Grenzübergängen aussieht. Aber mit (B) kann man so schließen: Für festes x ist jedes Reihenglied eine stetige Funktion der Variablen α ; die Reihe konvergiert überall (z.B. Quotiententest), also ist die Summe stetig in α , und man kann α gegen Null gehen lassen. Entsprechend folgt die Logarithmusreihe bei $|x| < 1$ für $\mu \rightarrow 0$ aus

$$\begin{aligned} x - \frac{x^2}{2} (1-\mu) + \frac{x^3}{3} (1-\mu)(1-\frac{\mu}{2}) - \dots &= \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = \frac{e^{\mu \ln(1+x)} - 1}{\mu} \\ &= \ln(1+x) + \frac{\mu}{2} [\ln(1+x)]^2 + \dots \end{aligned}$$

Wie zeigt Cauchy die Integrierbarkeit stetiger $f(x)$ ohne explizite Verwendung der Gleichmäßigkeit? Die Näherungssummen unterscheiden sich, wenn man eine gemeinsame Verfeinerung der Intervallteilungen nimmt, um

$$\pm \epsilon_0(x_1 - x_0) \pm \epsilon_1(x_2 - x_1) \pm \dots \pm \epsilon_{n-1}(x_n - x_{n-1}),$$

und das ist nach den Mittelwertregeln aus C gleich $\pm \epsilon(x - x_0)$, $\pm \epsilon$ ein Mittelwert der $\pm \epsilon_k$; für unendlich kleine Intervalle $x_k - x_{k-1}$ sind die ϵ_k wegen der Stetigkeit sämtlich unendlich klein, also, so schließt Cauchy selbstverständlich, auch ϵ . (R, p. 122 ff., bes. 125 unten).

Angezweifelt wurden auch Beweise von Sätzen über Ableitungen, wie $u_{xy} = u_{yx}$, $\frac{\partial}{\partial x} \int u(x,y) dy = \int u_x(x,y) dy$. Man darf auch hier nicht übersehen, daß Cauchys Begriffe nicht punktweise gemeint sind. Für die Definition der Ableitung $f'(x)$ (R, p. 22) wird $f(x)$ als stetig in einem ganzen Intervall vorausgesetzt, für unendlich kleines i der Differenzenquotient $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ gebildet, dann $i \rightarrow 0$ betrachtet. 'Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée pour chaque valeur particulière des x .' Zuerst ist die Funktion $f'(x)$ da, dann ihr Wert an einem speziellen $x = x_0$. Während des Grenzübergangs $i \rightarrow 0$ darf x noch variieren! (Der Vorrang der Funktion vor der Zahl zeigte sich schon bei den Reihen: Zuerst werden Funktionenreihen untersucht!)

Für $\xi - \eta \approx 0$ folgt $f'(\xi) - f'(\eta) = (f'(\xi) - \frac{f(\xi) - f(\xi)}{\eta - \xi}) + (\frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta} - f'(\eta)) \approx 0$, also sogar die Stetigkeit von $f'(x)$. Cauchy erwähnt das nicht. Es ist damit aber einzusehen, daß seine Sätze und Beweise richtig sind, wie im einzelnen ausgeführt werden kann. Einen Beleg für die hier vertretene Auffassung sehe ich mit Giusti in einem Beweis in R, p. 44-45.

Dem scheint entgegenzustehen, daß Cauchy die Stetigkeit von $f'(x)$ als eigene Voraussetzung zu formulieren pflegt; aber das tut er auch für die Stetigkeit von $f(x)$ selbst bei Existenz von $f'(x)$, obwohl jene eine unmittelbare Folge aus

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} - f'(x) \approx 0$$

ist. Es ist eine gute Praxis von Lehrbuchautoren, die Voraussetzungen nicht immer minimal zu formulieren.

4. Versuch einer Größenlehre

Es handelt sich um einen Vorschlag zur Diskussion. Cauchy stellt (z.B. C, p. 37-38) unendlich kleine (große) Größen durch gegen 0 (∞) konvergente Folgen dar, Größen in der Umgebung (voisinage) von x_0 durch $x_0 + \alpha$, α unendlich klein, und - wie mir scheint - Größen in gegebenem Intervall durch Folgen aus dem Intervall. Allgemein will ich sagen: *Größen werden durch Zahlfolgen repräsentiert*. Für Größen schreibe ich kleine griechische Buchstaben, wie Cauchy α, β, \dots oft für unendlich kleine Größen, für eine repräsentierende Folge dann jeweils a_n, b_n . Das Rechnen mit Größen ergibt sich aus dem Rechnen mit Folgen, $\alpha + \beta$ hat als repräsentierende Folge $a_n + b_n$, $f(\xi)$ hat $f(x_n)$ etc. (Ob eine Größe mehrere repräsentierende Folgen haben kann, bleibe noch offen.) Wichtig ist, wie an Beispielen in 3. zu sehen war, daß die Größen eigenständige mathematische Gegenstände sind; die Darstellung durch Folgen kann in Beweisen verwendet werden. (Ähnlich machen wir es ja mit den reellen Zahlen.)

Cauchys Redeweise 'toujours', das möge mit 'überall' oder 'stets' (in einem Intervall etwa) übersetzt werden, interpretiere ich als 'für alle Größen ξ ' (in dem Intervall), 'dans le voisinage' entsprechend durch 'für alle infinitesimal benachbarten Größen'. Im einzelnen läßt sich nachweisen, daß das mit Cauchys Gebrauch konsistent ist und zu richtigen Sätzen und Beweisen führt.

Eine befriedigende Behandlung von Folgen von Größen, wie sie z.B. bei der Diskussion des Integrals auftreten, wird mit folgender Festlegung möglich: Wenn zwei Folgen sich nur für endlich viele Indizes unterscheiden, repräsentieren sie dieselbe Größe. Die darauf gegründete Größenlehre ist seit 1958 untersucht worden (Schmieden u. Laugwitz, Math.-Z. 69; Laugwitz 1976, 1986). Die Darstellung durch Funktionen in L läßt sich analog behandeln.

5. Schlußbemerkungen

Cauchys Grundlegung der reellen Analysis war wesentlich davon beeinflusst, daß er Lehrbücher für Ingenieurstudenten schrieb. Er hielt die unendlich kleinen Größen für ein einfaches und anwendungsfreundliches Hilfsmittel. Wo möglich, ersetzte er 'finite' Zugänge durch infinitesimale; der Taylorsche Satz wird 1823 in R aus dem Restgliedintegral hergeleitet, 1829 in L aus der eigens dafür vorangestellten Theorie der Ordnungen des Infinitesimalen. Letztere war ihm in der Zwischenzeit auch in der Differentialgeometrie nützlich gewesen. Die Bedeutung des unendlich Kleinen nimmt bei Cauchy mit der Zeit eher zu, von einem Wunsch nach ihrer Elimination kann keine Rede sein.

Ob seine Grundlegung der Analysis die Anwendungen beeinflusst hat, ist fraglich; sicher ist nur, daß allgemein in der Physik und Technik, auch in der Geometrie, infinitesimales Denken und Sprechen bis ins 20. Jahrhundert hinein üblich blieb.

Cauchys sogenannte Fehler waren keine, mit einer großen Ausnahme: Er überschätzte die Fähigkeit der Mathematiker, ihn zu verstehen.

Zitierte Literatur

- Giusti, E. 1984: Gli "errori" di Cauchy e i fondamenti dell'analisi; Boll. Storia Sci. Mat. 4, 24-54.
 Laugwitz, D. 1978: Infinitesimalkalkül; 1986: Kontinuum und Zahlen.
 Robinson, A. 1966: Nonstandard-Analysis.
 Spalt, D.D. 1981: Vom Mythos der mathematischen Vernunft; 1983: in "Der Mathematikunterricht" 29/4, 60-76.
 Weitere Hinweise bei Giusti, Laugwitz 1986, Spalt 1981 und in H. Freudenthals Artikel in Gillispies Dictionary.

DAS KONTINUITÄTSPRINZIP IN DEN AUSEINANDERSETZUNGEN UM
DIE SCHWINGENDE SAITE

(Klaus Volkert, Universität zu Köln)

Vorbemerkung: Im Folgenden möchte ich einige Anmerkungen zum Kontinuitätsprinzip und zu dessen Rolle in den Auseinandersetzungen um die schwingende Saite vorstellen. Während die mathematischen und mathematik-historischen Einzelheiten im eigentlichen Vortrag geschildert werden sollen, möchte ich hier einige eher allgemeine Überlegungen skizzieren. Damit hoffe ich, die Vorbereitung auf die Diskussion zu erleichtern.

1. Zum Inhalt des Kontinuitätsprinzips:

Das Kontinuitätsprinzip (*loi de continuité*, *lex continuitas*) wird im allgemeinen Leibniz zugeschrieben. Im Jahre 1687 gab dieser folgende Formulierung des fraglichen Gesetzes:

'Wenn in der Reihe der gegebenen Größen zwei Fälle sich stetig einander nähern, so daß schließlich der eine in den anderen übergeht, so muß notwendig in der entsprechenden Reihe der abgeleiteten oder abhängigen Größen, die gesucht werden, dasselbe eintreten.'
(Übersetzung von Cassirer/Buchenau)

oder vielleicht etwas deutlicher:

'Einer geregelten Ordnung im Gegebenen entspricht eine geregelte Ordnung im Gesuchten.'
(Übersetzung von Cassirer/Buchenau)

Der moderne Leser wird hierin bereitwillig eine Formulierung des Stetigkeitsbegriffes sehen wollen (kleine Änderungen des Argumentes ziehen ebensolche der Werte nach sich; stetige Abbildungen erhalten die topologischen Struktur). Dieser Stetigkeitsbegriff spielte im 17. und 18. Jahrhundert zwar eine gewisse Rolle, dominant war jedoch ein mehr qualitativer Sinn von Stetigkeit. Eine Kurve (gelegentlich auch eine Funktion) wurde stetig (kontinuierlich) genannt, wenn sie als Ganze 'in einer Gleichung enthalten ist'.¹⁾ Um allen sprachlich bedingten Verwechslungen aus dem Wege zu gehen, möchte ich diese Eigenschaft als Monogenität bezeichnen. Ist ein Stück einer monogenen Kurve gegeben, so scheint es plausibel, daß mit ihm der Verlauf der Gesamtkurve bereits festgelegt sei: der Ausschnitt bestimmt eindeutig die zugehörige Gleichung, welche wiederum den Verlauf der Kurve im gesamten Definitionsbereich unzweideutig fixiert. Modern formuliert: monogene Funktionen sollten analytisch sein; insbesondere sollte für sie das Prinzip der eindeutigen analytischen Fortsetzbarkeit gelten.²⁾ Bezogen auf physikalische Probleme erhält das Kontinuitätsprinzip damit folgende Formulierung:

alle Lösungen physikalischer Fragen sollten in analytischen Funktionen auszudrücken sein.³⁾

Die zu jener Zeit bekannten Funktionen waren alle ausnahmslos analytisch. Untersucht man gewöhnliche Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten, so sind die Lösungen derselben wiederum analytische Funktionen. Beschränkt man sich auf physikalische Probleme mit einem Freiheitsgrad, so wird das Kontinuitätsprinzip nicht verletzt (jedenfalls solange man nur analytische Koeffizienten zuläßt!). Erst bei partiellen Differentialgleichungen - bei Problemen mit zwei oder mehr Freiheitsgraden also - ändert sich die Situation grundlegend. Ist z.B. eine Lösungsfunktion $y(x,t)$ der Gleichung $y_t = 0$ gesucht, so ergibt sich $y(x,t) = w(x)$ mit einer vollkommen beliebigen Funktion w !

Das erste Problem mit zwei echten Freiheitsgraden (d.h. solchen, die sich nicht durch Symmetriebetrachtungen reduzieren lassen wie z.B. im Problem der Bewegung im Zentralkräftefeld), das systematisch untersucht worden ist, war die schwingende Saite. Es führt auf die bekannte Wellengleichung $y_{tt} = a^2 \cdot y_{xx}$.

2. Der Status des Kontinuitätsprinzips.

Nach Leibniz ändert sich dieser je nach Anwendungsbereich:

'Es [das Kontinuitätsprinzip] ist von unbedingter Notwendigkeit in der Geometrie, bewährt sich jedoch auch in der Physik, da die höchste Weisheit, die der Quell der Dinge ist, die vollkommenste Geometrie ausübt und eine Harmonie beobachtet, an deren Schönheit nichts heranreicht. Ich bediene mich daher dieses Prinzips häufig als einer Art von Prüfstein, mit dessen Hilfe sich sogleich auf den ersten Blick, selbst ohne eindringliche Untersuchung der Tatsachen, der Irrtum und der innere Mangel an Zusammenhang bei manchen Theorien aufzeigen läßt.'
(Übersetzung von Cassirer/Buchenau)

Man kann das so interpretieren: im Bereich der Mathematik - der Vernunftwahrheiten also - ist das Kontinuitätsprinzip logisch notwendig, demnach entweder ein beweisbares Theorem oder ein unumgängliches Axiom. In den Naturwissenschaften hingegen ist sein Charakter normativ: suche solche Lösungen, die dem Kontinuitätsprinzip genügen! Resultate, die dies nicht tun, sind unvollkommen und daher verbesserungsbedürftig.⁴⁾ Dieser Zug wird in einer Standardwendung d'Alemberts, der ansonsten sicherlich jeglicher Metaphysik Leibnizscher Provenienz abhold war, 'es sei gegen die Regeln (!) des Kalküls [Lösungen, die nicht dem Kontinuitätsprinzip gehorchen] anzunehmen.'⁵⁾ sehr deutlich.

Auch Euler war anfänglich ein Anhänger des fraglichen Grundsatzes. Eine Stelle, wo dies klar hervortritt, findet sich im zweiten Band der 'Introductio':

'§518. ... Denn wenn dergleichen nicht angegeben werden sollten, so müßte man annehmen, daß die Curve in dem Punkte B plötzlich aufhöre, und dies wäre dem Gesetze der Continuität zuwider, und folglich falsch.'
(Übersetzung von Michelsen)

Die Beschäftigung mit der schwingenden Saite war es, die Euler zur Änderung seiner Position veranlaßte. Mit der Aufgabe des Kontinuitätsprinzip stand Euler lange Zeit allein unter den Mathematikern und Naturwissenschaftlern.⁶⁾

3. Auseinandersetzungen um die schwingende Saite

4. Die Rolle des Kontinuitätsprinzips

Diese beiden Punkte werden im Vortrag ausführlich dargestellt werden. Der Leser sei vorweg auf die sehr ausführliche Schilderung bei Truesdell (=EULER (2)XI,2) oder auf KLINE, 1972; 502 - 521 verwiesen.

5. Eulers Motive für die Aufgabe des Kontinuitätsprinzips

Eulers Motive sind auf zwei verschiedenen Ebenen angesiedelt:

- zum einen sind sie mathematischer Natur, indem Euler einsieht, daß partielle Differentialgleichungen sich ganz anders verhalten als gewöhnliche. An die Stelle der beliebigen Integrationskonstanten treten nämlich frei wählbare Funktionen (vgl. EULER (2)X; 444);

- zum andern sind sie naturwissenschaftlicher Art, wenn Euler erkennt, daß sich dem Kontinuitätsprinzip widersprechende Zustände in der Tat realisieren lassen.

Beides zusammengenommen, verbunden mit dem Streben nach möglichst großer Allgemeinheit, läßt Euler den entscheidenden Schritt tun:

'... it is now hard to understand that Euler's refutation of Leibniz's law was the greatest advance in scientific methodology in the entire century.'
(Truesdell in EULER (2)XI,2; 248)

Aus der Natur des Kontinuitätsprinzips als Norm folgt, daß es sich nicht mit logischen Mitteln entkräften läßt. Denn es ist ja, angewandt auf die Physik, kein ableitbares Theorem noch ein begründbares Axiom sondern eine Vorschrift oder Richtlinie, in welchem Bereich man Lösungen zu suchen habe. Hiergegen kann man nur argumentieren, indem man zeigt, daß ein solches Vorgehen unzweckmäßig ist. Dies ist dann der Fall, wenn die Klärung tatsächlich auftretender Probleme verhindert wird. Genau in diesem Sinne argumentiert Euler gegen D'Alembert: da die Ausgangslage der Saite beliebig gewählt werden kann⁷⁾, darf man nicht annehmen, daß die erzeugende Kurve⁸⁾ eine monogene sei:

'Ayant donc décrit une semblable courbe anguiforme, soit régulière, contenue dans une certaine équation, soit irrégulière, ou mécanique, son appliquée quelconque PM fournira les fonctions, dont nous avons besoin pour la solution du problème.'
(EULER (2)X; 72)

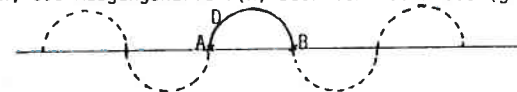
Ist $f(x)$ die Ausgangslage zwischen 0 und 1 und ist $F(x)$ die ungerade und periodische Erweiterung von f auf ganz \mathbb{R} , so wird die Lösung gegeben durch

$$y(x,t) = \frac{1}{2} F(x+at) + \frac{1}{2} F(x-at) \quad (a \text{ eine positive Konstante})$$

gleichgültig, ob F eine monogene Funktion ist oder nicht.⁹⁾ Wie aber beweist man, daß F tatsächlich keine monogene Funktion zu sein braucht? Euler hat diese Schwierigkeit erkannt und einige Lösungsversuche unternommen. Neben Bemerkungen mit eher appellhaftem Charakter ('Mais, quoiqu'il en soit, cela ne fait rien à la recherche présente, attendu qu'il est certain qu'il y a une infinité de cas, où le mouvement

d'une corde ne sauroit être déterminé par le mélange de plusieurs trochoïdes' ¹⁰⁾ (EULER (2)X; 238)) gibt es mindestens zwei Stellen, wo Euler versucht, ein Beispiel einer nicht-monogenen Anfangslage vorzuführen:

1. Angenommen, die Ausgangskurve $f(x)$ sein ein Halbkreis (gelegen zwischen 0 und 1):

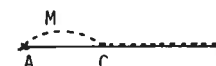


Dann sieht F wie oben angedeutet aus. An den Stellen 0 (=A) und 1 (=B) wird die natürliche Gleichung des Halbkreises nicht fortgesetzt (dann erhielte man ja den Vollkreis!). Wie sollte aber unter diesen Voraussetzungen die Gleichung von F aussehen?

'Ainsi, si la figure ADB étoit un arc de cercle, sans se soucier de la continuation naturelle du cercle, on répètera la description de ce même arc de cercle ADB à l'infini alternativement au dessus et dessous de l'axe; et la même règle a toujours lieu, de quelque nature que puisse être la figure initiale de la corde.'

37. Les différentes parties semblables de cette courbe ne sont donc liées entr'elles par aucune loi de continuité, et ce n'est que par la description, qu'elles sont jointes ensemble.'
(EULER (2)X; 249f)

2. Euler hat 1765 eine ganze Arbeit einem Fall gewidmet, von dem er mit Bestimmtheit glaubte, er führe nicht auf eine monogenen Lösung. Es geht um die Bewegung einer nur teilweise ausgelenkten Saite:



Mit Hilfe dieses Beispiels hofft Euler, seine Widersacher d'Alembert und Daniel Bernoulli endlich (der Streit dauerte mittlerweile schon fast 20 Jahre!) zu überzeugen:

'Car l'un et l'autre de ces illustres Adversaires est obligé de reconnoître que ce cas n'est renfermé dans leurs solutions du problème des cordes vibrantes; ...'
(EULER (2)X; 426)

Zu dem Problem selbst äußert sich der Verfasser folgendermaßen:

'Mais il me sera encore permis de douter, que toutes les figures possibles dont les cordes sont susceptibles, soient contenues dans l'équation rapportée, [d.i. die Fourierentwicklung] quoique le nombre de ses termes puisse être augmenté à l'infini. Entre plusieurs raisons que je pourrais alléguer pour justifier mes doutes, le cas que j'ai ici en vue, [s. oben] me semble fournir une preuve très convaincante.'

...; alors il sera sans doute très difficile, pour ne pas encore dire impossible, de déterminer les coefficients de l'équation de M. Bernoulli, en sorte qu'elle exprime cette figure mixte d'une ligne courbe quelconque AMC et d'une droite CB.'
(EULER (2)X; 430)

Etwas später heißt es dann:

'Voilà donc un cas bien incontestable, auquel la solution de M. Bernoulli est absolument inapplicable; ...'
(EULER (2)X; 431)

Die Lösung dieses Problems sollte erst rund 80 Jahre später durch Dirichlets Arbeiten über Fourierreihen (nach den wichtigen Vorarbeiten von Fourier selbst) gefunden werden: eine stetige stückweise monotone Funktion (oder eine mit beschränkter Schwankung) ist an allen Stellen in eine Fourierreihe entwickelbar und wird durch diese auch bis auf Unstetigkeitsstellen dargestellt.

7. Zusammenfassende Thesen

1. Die Auseinandersetzung um die schwingende Saite litt unter der mangelnden Klarheit über den Status des Kontinuitätsprinzip.
2. Sie machte deutlich, daß es zweckmäßig ist, zwischen Funktionen und deren Eigenschaften scharf zu trennen und letztere falls erforderlich explizit als Voraussetzungen einzuführen.
3. Eulers starkes Argument gegen Daniel Bernoulli - nämlich das Fehlen einer allgemeinen Formel zur Berechnung der Koeffizienten der Fourierreihen - wurde in der Tat erst durch Fourier entkräftet. Euler behielt insofern recht, als es Anfangslagen gibt, die nicht durch eine Fourierreihe darstellbar sind.
4. Auch d'Alemberts Position läßt sich verteidigen. Nach einer wohlwollenden Lesart hätte er nämlich bloß darauf hingewiesen, daß die Lösungsfunktionen bestimmte Voraussetzungen erfüllen müssen (z.B. zweimal partiell differenzierbar sein).
5. Dessen ungeachtet erweist sich Eulers Beitrag als der fruchtbarere. Er war der Einzige, der den prinzipiell neuen Charakter der partiellen Differentialgleichungen erkannte.
7. Die Frage 'angeregt oder anregend' ist zu einfach; in Wahrheit findet ein komplizierter Wechselwirkungsprozeß statt zwischen dem mathematisch-philosophisch Möglichen und dem physikalisch Wirklichen.

8. Anmerkungen

- 1) Eulers bekannte Formulierung aus der 'Introductio' (2. Teil, §9) lautet: 'Linea scilicet curva continua ita est comparata, ut eius natura per unam ipsius x functionem definitam exprimatur.'
In der 'Introductio' (anderswo nicht immer!) identifiziert Euler 'Funktion' mit 'analytischem Ausdruck'.
- 2) Cauchy war wohl der erste, der erkannt hat, daß selbst C^∞ -Funktionen (ganz abgesehen von den monogenen) nicht analytisch sein müssen. Sein berühmtes Beispiel aus den 'Résumés des leçons sur le calcul différentiel' lautet:
 $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ (38. Vorlesung). Daß das oben genannte Prinzip fragwürdig ist, war allerdings schon in dem Moment klar, in dem man zwei Terme kannte, deren zugehörige Graphen in einem Intervall zusammenfallen, sonst aber verschieden sind. Das hat Euler möglicherweise selbst schon an der von ihm betrachteten trigonometrischen Reihe

$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots$ erkannt. Diese gibt im Intervall von 0 bis 2π die Funktion $\frac{\pi - x}{2}$, sonst erhält man Parallelen zu dieser Strecke (EULER (1)XV; 449f). Fourier, der ein ähnliches Beispiel in der 'Théorie analytique de la chaleur' betrachtet (im §177) kommentiert dieses folgendermaßen: 'Es giebt also Functionen, die für in gewissen Intervallen gelegenen Werthe ihrer Argumente völlig mit einander zusammenfallen, während sie sonst von einander ganz verschieden sein können.' (§220; übersetzung von Weinstein).

- 3) Die berühmte Formel 'natura non facit saltus', die Leibniz geprägt hat, wird meist als mit der angegebenen Formulierung äquivalent betrachtet. Weitere interessante Zusammenhänge lassen sich zum Determinismusproblem herstellen.
- 4) Im genannten Bereich - dem der Tatsachenwahrheiten - ist eine vollkommene Erkenntnis, also eine die die Notwendigkeit des Kontinuitätsprinzip einsehen könnte, für uns endliche Menschen nicht möglich. Deshalb kann uns dieses Prinzip lediglich als erkenntnisleitendes dienen.
- 5) Wörtlich heißt es bei d'Alembert:
'[Euler a proposé.] qu'il suffit que $F(x+t)$ & $F(x-t)$ ne conservent pas toujours la même forme. A cela je répond qu'il a lui-même tacitement supposé cette identité de forme dans la démonstration qu'il a donné ... J'ajoute qu'il est contre toutes les règles de l'analyse de faire ainsi changer de forme ...'
(d'ALEMBERT, 1761; 32)
- 6) So identifiziert Lagrange 'Funktion' und 'Reihe', setzt also die Analytizität stillschweigend voraus. Erst 1811 wird er schreiben: 'Das Prinzip der Unstetigkeit von Funktionen ist heute allgemein anerkannt für die Integrale partieller Differentialgleichungen ...'
- 7) Die Auslenkung muß natürlich infinitesimal sein und die Saite darf nicht zerrissen werden.
- 8) Dieser Terminus stammt von d'Alembert ('courbe génératrice'). Gemeint ist die ungerade und periodische Erweiterung der durch die Anfangslage bestimmten Kurve über die fixierten Enden der Saite hinaus.
- 9) D'Alembert bemerkte in einem Brief an Lagrange spitzfindig, wie man wohl das gesuchte y bestimmen solle, wenn man keine Gleichung für dieses zur Verfügung habe. (LAGRANGE XIII; 24). Euler konterte durch eine geometrische Konstruktion der gesuchten Kurve, die ohne jegliche Rechnung auskommt (EULER (2)X;72f - EULER (2)X; 246f - EULER (2)X; 429f).
- 10) Der heutige Leser erkennt leicht, daß es um das Problem der Darstellbarkeit einer beliebigen (zweimal differenzierbaren) Funktion durch eine Fourierreihe geht (Trochoïde war der alte Name für Sinuskurve). Während d'Alembert immer stur forderte, man müsse sich auf den monogenen Fall beschränken, hatte Daniel Bernoulli behauptet, jede Lösung des Problems lasse sich durch eine solche Reihe darstellen. Wäre dies der Fall, so hätte man einen analytischen Ausdruck für jede Lösung! Also würde das Kontinuitätsprinzip gelten.

9. Literatur

Die Werke Eulers sind nach der Gesamtausgabe unter Angabe der Serien- und Bandnummer zitiert. Ähnliches gilt für Lagrange.

d'ALEMBERT, 1761 Opuscules mathématiques ..., tome 1 (Paris)

KLINE, 1972 Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (New York)

Die Arbeit Truesdells 'The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies' findet sich in EULER (2)XI,2.

UEBER DIE GESCHICHTE DER KINEMATIK: EINIGE ALLGEMEINE BEMERKUNGEN SOWIE
DAS WATTSCHES PARALLELOGRAMM ALS BEISPIEL.

Teunis Koetsier
Subfaculteit Wiskunde en Informatica
Vrije Universiteit
Postbus 7161
1007 MC Amsterdam
Nederland.

I. Die Entstehung der Kinematik.

1834 führte A.-M. Ampère das Wort **Kinematik** (cinématique) für eine, damals grossenteils noch zu entwickelnde Wissenschaft der Bewegung ein, in welcher die Ursachen der Bewegung ausser Acht gelassen werden¹⁾. Gegen den Hintergrund der damals aufkommenden Maschinenlehre ist es zu verstehen, dass Ampère beispielsweise an die Bewegungen dachte, die in Maschinen auftreten.

In seinem Essai drückte Ampère eine Einsicht aus, für welche die Zeit reif war. In der Maschinenlehre liess sich klar ein wichtiges geometrisches Problemgebiet unterscheiden und bald erschien R. Willis, *Principles of Mechanism, London, 1841*, das erste Buch über Getriebelehre, in dem die Ursachen der Bewegung völlig ausser Acht gelassen wurden. Das erste vergleichbare französische Buch war Ch. Laboulaye, *Traité de cinématique, Paris, 1849*. Ich nenne dieses Untersuchungsgebiet **Getriebekinetik**.

Aber auch in der theoretischen Mechanik war klar geworden, dass es fruchtbar ist, den geometrischen Teil der Bewegung selbständig zu untersuchen. Z.B. enthält Poinso's *Théorie nouvelle de la rotation des corps (1834)*²⁾ im ersten Teil ein Kapitel: "Du mouvement des corps considéré en lui-même".

Zur gleichen Zeit begann M. Chasles die Entwicklung einer Geometrie der Bewegung. Die erste Arbeit, *Mémoire de géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes*, wurde 1829 der Société Philomatique angeboten³⁾. Man könnte hier auch den jung verstorbenen E. Bobillier nennen, der in den dreissiger Jahren des vorigen Jahrhunderts eine verloren gegangene Abhandlung unter den Titel "Lois géométriques du mouvement" schrieb. Ein Auszug aus dieser Abhandlung erschien in Bobilliers *Cours de Géométrie*⁴⁾. Diese aus der theoretischen Mechanik oder aus der Geometrie stammenden Resultate wurden bald zusammen zu einem Untersuchungsgebiet, das ich **theoretische Kinematik** nenne. Auf diesem Gebiet beschäftigt man sich mit allgemeinen kinematischen Eigenschaften der Bewegung.

Zu der theoretischen Kinematik gehören auch die geometrischen Betrachtungen über Beschleunigungen, die in den vierziger Jahren von J.V. Poncelet und später von z.B. A.C. Bresse und H. Résal angestellt wurden. Das erste völlig der theoretischen Kinematik gewidmete Buch war H. Résal's *Traité de cinématique pure, Paris, 1862*.

1) A.-M. Ampère, Essai sur la philosophie des sciences, Paris, 1834, p.51

2) Erschienen in Journal de Mathématiques pures et appliquées, Tome XVI, 1851.

3) Bulletin de la Société Mathématique de France, Tome sixième, 1877-78.

4) E. Bobillier, Cours de Géométrie, Paris, 1870 (14e Auflage).

II. Die Blütezeit

In den sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts fing die Blütezeit der Kinematik an. Die "Abstract"-Zeitschrift *Fortschritte der Mathematik* widmete in der Periode 1868-1900 fast dauernd mehr als eine Prozent ihrer Seiten an das Kapitel "Kinematik". Relativ viele Mathematiker und Ingenieure waren in der Zeit an Kinematik interessiert.

Der Schwerpunkt der Untersuchungen der zuerst in Frankreich lag verschob sich in den sechziger Jahren nach Deutschland. Eine besonders wichtige Rolle spielte dort der einflussreiche Ingenieur F. Reuleaux. Anfang der sechziger Jahren entwickelte Reuleaux ein kinematisches System womit er Ordnung in der Vielheit von verschiedenen Getriebe schaffte und womit z.B. eine, ziemlich natürliche Klassifikation der Getriebe möglich wurde⁵⁾.

Mitte der siebziger Jahren wurde das System an vielen deutschen polytechnischen Schulen unterwiesen. Diese Entwicklung innerhalb der Getriebekinetik hat auch die Entwicklung der theoretischen Kinematik angeregt. Zum Beispiel hielt der Mathematiker S.H. Aronhold 1866-67 in Berlin Vorlesungen über "Kinematische Geometrie" wozu er von Reuleaux eingeladen war⁶⁾.

Ausser Reuleaux ist im Deutschland der 70er und 80er Jahren der Mathematiker L. Burmester besonders wichtig, z.B. wegen seiner Beiträge zur Anwendung der theoretischen Kinematik in der Getriebekinetik⁷⁾. Bis dahin hatten sich Getriebekinetik und theoretische Kinematik ziemlich unabhängig entwickelt. Wegen seiner Einführung graphischer Methoden für die Analyse und Synthese von Getrieben konnte man Burmester mit dem Erfinder der Graphostatik Culmann vergleichen.

Auch in Frankreich gab es in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts wichtige Entwicklungen in der Kinematik. Zu nennen sind hier die Beiträge von A. Mannheim und G. Darboux die die Arbeiten von Chasles anschliessen.

Die wichtigsten Entwicklungen in England in der Zeit beziehen sich auf aus starren Stäben zusammengestellte Gelenkwerke. Zu nennen sind die Arbeiten von J.J. Sylvester, A. Cayley, S. Roberts und A.B. Kempe.

In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts hat in Russland P.L. Chebyshev sich eingehend mit Gelenkwerken beschäftigt.

In der theoretischen Mechanik wird die auf synthetisch-geometrischen Betrachtungen gegründete Behandlung, der man z.B. bei Poinso't begegnet, im zweiten Teil des 19ten Jahrhunderts ausführlich fortgesetzt. Dabei widmen z.B. W. Schell, *Theorie der Bewegung und Kräfte, Band 1, Leipzig 1870*, J. Somoff, *Theoretische Mechanik Band 1, Kinematik, Leipzig 1878 (aus dem Russischen)* und W. Thomson and P.G. Tait, *Treatise on Natural Philosophy, London 1867* sehr viele Seiten der Kinematik.

III. Das 20ste Jahrhundert.

Am Ende des 19ten Jahrhunderts war die Blütezeit der Kinematik schon vorbei, und im Laufe des 20ten Jahrhunderts trat die folgende Lage ein. In der theoretischen Mechanik wurde die Rolle der Kinematik zu einer sekundären: die Kinematik umfasst eine Gruppe von Standardresultaten. Neue Entwicklungen gibt es kaum. Gleichzeitig mit dem Rückgang des Interesses an der Geometrie bekam auch die Kinematik unter

5) F. Reuleaux, Theoretische Kinematik: Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens, Braunschweig, 1875.

6) S.H. Aronhold, Grundzüge der kinematischen Geometrie, Verein zur Beförderung des Gewerbelebens in Preussen, 51, 1872, pp.129-155.

7) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Band I. Die ebene Bewegung, Leipzig, 1888.

Mathematikern weniger Beachtung. Interessant ist die Tatsache, dass die Kinematik in der Maschinenlehre als ein wichtiges Problemgebiet erhalten blieb, wo die im 19ten Jahrhundert oft von Mathematikern in Gang gesetzte Entwicklungen auf dem Gebiete der Getriebekinetik weitergeführt werden ⁸⁾. Dabei spielen Ingenieure die Hauptrolle.

IV. Das Wattsche Parallelogramme als Beispiel.

Die in 1784 von James Watt patentierte angenäherte Geradföhrung, das sogenannte Wattsche Parallelogramm ⁹⁾, hat im 19ten Jahrhundert in der Geschichte der Kinematik eine wichtige Rolle gespielt. Im wesentlichen besteht der Wattsche Mechanismus aus einem Dreistabgetriebe ABCD mit AB = DC (Abb. 1).

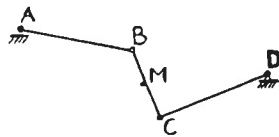


Abb. 1

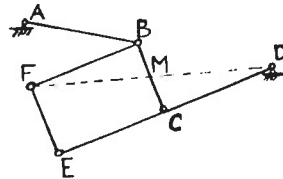


Abb. 2

Der Erfolg der Erfindung beruht darauf, dass die Mitte M des Stabes BC die damit verbundene Kolbenstange der Dampfmaschine näherungsweise geradlinig föhrt. Man bekommt das "Parallelogramm" wenn man ein Gelenkparallelogramm BCEF hinzufügt (D, M, F kollinear) um die brauchbare Strecke der Bewegung zu vergrössern. Dann (Abb. 2) föhrt F die Kolbenstange. M und F beschreiben gleichförmige Kurven. Die Wattsche Erfindung hat Mathematiker und Ingenieure zur Lösung von zwei Probleme angeregt.

Problem 1:

Gibt es ein Gelenkwerk womit eine genaue (also nicht angenäherte) geradföhrung möglich ist, und so nicht, wie bekommt man die beste angenäherte Geradföhrung?

Problem 2:

Welche Kurve wird vom Punkt M beschrieben?

Ich werde jetzt drei Beispiele geben, die zeigen wie diese Probleme die Entwicklungen beeinflusst haben.

8) Das Untersuchungsgebiet entwickelte sich im Zeitabschnitt 1930-1970 sogar exponentiell. Vgl. J. de Groot, Bibliography of Kinematics, 2 Vols, Eindhoven, 1970.

9) T. Koetsier, A contribution to the History of Kinematics - I, Watt's straight-line linkages and the early French contributions to the theory of the planar 4-bar coupler curve, Mechanism and Machine Theory 18, 1983, pp.37-42.

Beispiel 1.

Schon am Anfang der 50er Jahre war Chebyshev vom Problem 1 fasziniert. Seine erste Arbeit darüber erschien schon 1854 ¹⁰⁾. Er griff das Problem als ein Problem der Analysis im Wesen so an. Wenn ein Punkt M eines Gelenkwerkes näherungsweise eine gerade Linie beschreibt, dann ist die Abstand f(x) von M zu dieser Linie in einem gewissen (normalisierten) Intervall $-1 \leq x \leq 1$ klein. Wir können annehmen dass $f(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 + \dots + k_nx^n + k_{n+1}x^{n+1} + R(x)$. Die zentrale Frage ist dann diese: Für welches Polynom n-ter Ordnung U(x) ist

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - U(x)|$$

minimal?

Dahinter steht der Gedanke, dass man mittels einer Änderung der Dimensionen des Gelenkwerkes die Funktion F(x) auf dem Intervall mit dem Polynom verringern könnte. Ohne Beweis formuliert Chebyshev zunächst den Satz dass für das gesuchte Polynom der Ausdruck $|f(x) - U(x)|$ in $[-1, +1]$ zumindest $(n + 2)$ mal seinen Maximalwert erreicht (einschliesslich eventuell der Werte in $x = -1$ und $x = +1$) ¹¹⁾. Mittels dieses Satzes bestimmt Chebyshev z.B. im Falle dass $k_{n+1} \neq 0$ und $R(x) = 0$ das Polynom U(x). Chebyshev zeigt, dass in diesem Fall

$$U(x) = k_0 + k_2x + k_2x^2 + \dots + k_nx^n + k_{n+1}x^{n+1} - y(x)$$

ist, wobei

$$y = \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}].$$

Hier entdeckt Chebyshev die bekannten Chebyshevpolynome:

$T_0 = 1, T_1 = x, T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$; denn für $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt (abgesehen von einem Multiplikationsfaktor); dass $y = T_1, T_2, T_0, \dots$ ist.

Chebyshev hat diese Theorie auch tatsächlich beim Entwurf von Gelenkwerken angewandt. Im 20sten Jahrhundert sind die Methoden von anderen weiterentwickelt worden und sie werden in der Getriebekinetik noch immer benützt. Bekanntlich haben die Chebyshevschen Ideen unabhängig von der Kinematik in der Approximationstheorie noch immer grosse Bedeutung.

Beispiel 2.

Am Anfang der 60er Jahre fand der Franzose C.N. Peaucellier ein Gelenkwerk mit dem eine exakte Geradföhrung möglich ist. Erst als 1870 der Russe Lipkin unabhängig das gleiche Gelenkwerk erfand und Chebyshev nachdrücklich auf die Bedeutung der Erfindung wies, bekam Peaucellier Anerkennung. Chebyshev besuchte 1873 England und erregte bei Sylvester grosse Begeisterung für Geradföhrungen und andere Gelenkwerke. Die Arbeiten von Sylvester, Cayley, Roberts und Kempe auf dem Gebiet der Gelenkwerke sind fast alle direkt oder indirekt dieser Begeisterung zu verdanken ¹²⁾.

10) P.L. Chebyshev, Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, Oeuvres de Tchebycheff, Tome I, pp.109-143.

11) Woher hat Chebyshev diesen Satz? Er gibt keine Quellen, sondern schreibt nur: "comme on le sait" als ob der Satz allgemein bekannt war.

Beweise des Satzes gibt es in C. de la Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919, pp.76-78 und E. Borel, Leçons sur les fonctions variables réelles et les développements en séries de polynomes, Paris, 1905, pp.82-92.

Vgl. auch P.L. Chebyshev, Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions, Oeuvres de Tchebycheff, Tome I, pp.271-378.

12) T. Koetsier, A contribution to the History of Kinematics - II, The work of English mathematicians on linkages during the period 1869-78, Mechanism and Machine Theory 18, 1983, pp.43-48.

Beispiel 3.

Die Bestrebungen, eine genaue Geradföhrung durch möglichst wenig Gelenke zu erzielen, haben in der 70er Jahren in Deutschland L. Burmester angeregt, seine "Burmestertheorie" zu entwickeln. In dieser rein geometrischen Theorie untersuchte er Situationen die durch (vier oder mehr) Lagen einer bewegten Ebene in einer festen Ebene gebildet werden.

In seiner ersten Arbeit zu diesem Thema ¹³⁾ zeigte Burmester z.B., dass es im allgemeinen genau einen Punkt in der bewegten Ebene gibt, der für vier beliebige Lagen auf einer durch diese Lagen bedingten Geraden liegt. Man kann dann bei einem gegebenen Gelenkwerk zwei Grenzlagen einer vom Gelenkwerk bewegten Ebenen wählen und dazwischen zwei andere Lagen der Ebene. Der Punkt, der in den vier Lagen auf einer Geraden liegt, kann zur Geradföhrung benutzt werden.

Die Burmestertheorie spielt noch immer eine wichtige Rolle in der Getriebekinetik.

Die drei Beispiele zeigen klar, dass das Wattsche Parallelogramm die Entwicklung der Geometrie und der Analysis beeinflusst hat. Dabei öffnete die Getriebekinetik primär neue Möglichkeiten für die Anwendung und Weiterentwicklung mathematischer Theorien und nur sekundär führte dies zu Resultaten, die auch ausserhalb des Anwendungsgebiet eine Rolle gespielt haben. Ich glaube, dass letzteres nur im Falle der Chebyshev'schen Resultaten so ist.

13) L. Burmester, Ueber die Geradföhrung durch das Kurbelgetriebe I-Theil, Civil-Ingenieur, 22, 1876, pp.597-606 und Tafel XXX

Goethes Hexen-Einmaleins

Die Hexe (mit großer Emphase fängt an, aus dem Buche zu deklamieren):

Du mußt verstehn!
 Aus eins mach zehn,
 Und zwei laß gehn,
 Und drei mach gleich,
 So bist du reich.
 Verlier die Vier!
 Aus fünf und sechs,
 So sagt die Hex',
 Mach sieben und acht,
 So ist's vollbracht:
 Und neun ist eins,
 Und zehn ist keins.
 Das ist das Hexen-Einmaleins.

Meinen kleinen Bericht möchte ich dem unterhaltsamen Rahmenprogramm zuordnen. Ich nehme ihn so wenig ernst wie Goethe selbst dieses kleine Stück seltsamer Mathematik ernstgenommen hat. Darüber hat Helmut Kracke in dem schönen Buch berichtet, das er nach der ersten und letzten Zeile der bekannten Hexenverse benannt hat. Aber wenn schon Hexen, die ihren Namen ja vom H a g , dem Zaun, herleiten, mit Hilfe zauberischer Kräfte über Hecken und Zäune setzen, so juckt es immer wieder einmal einen der "hunderttausend Narren", sich an einer Deutung der Klapperverse zu versuchen und damit einen Zaun zu überwinden, den der Dichter gezogen hat. "Gewöhnlich glaubt der Mensch, wenn er nur Worte hört, es müsse sich dabei doch auch was denken lassen".

Mit dem richtigen Einmaleins, das wir alle als Kinder lernen mußten, haben die Verse ja nur das zu tun, daß die Zahlen von eins bis zehn in der richtigen Reihenfolge vorkommen. Dieses

Einmaleins war wohl für viele einfache Gemüter der Gipfel der Rechenkunst. Heinrich Heine hat in der "Harzreise" geschildert, wie dem Wanderer ein Schulbub seinen Katechismus zeigt, der auf der letzten Seite das Einmaleins abgedruckt enthält. Das gibt dem Spötter Anlaß, sich über den Widerspruch zwischen der Trinitätslehre und dem simplen Rechnen lustig zu machen.

Auch Mephisto spielt auf den Trinitätsgedanken an, wenn er gleich im Anschluß an die Verse der Hexe sagt: "Mein Freund, die Kunst ist alt und neu. Es war die Art zu allen Zeiten, durch drei und eins und eins und drei Irrtum statt Wahrheit zu verbreiten." Vielleicht steckt im Hexen-Einmaleins doch einiger Tiefsinn! Sicher verstand Goethe von der Mathematik mehr als das simple Einmaleins. Man liest immer wieder die bekannten abfälligen Äußerungen über Mathematik und Mathematiker. Harro Heuser, Professor an der Universität Karlsruhe, hat aber in einem überaus geistreichen und witzigen Vortrag berichtet, daß sich Goethes Zorn vor allem gegen die mathematische Vergewaltigung der Natur gerichtet hat (Newton!), daß er aber ein sehr sicheres und deutliches Urteil über die reine Mathematik hatte: "Diese Bedächtlichkeit, nur das Nächste ans Nächste zu reihen, oder vielmehr das Nächste aus dem Nächsten zu folgern, haben wir von den Mathematikern zu lernen, und selbst da, wo wir uns keiner Rechnung bedienen, müssen wir immer so zu Werke gehen, als wenn wir dem strengsten Geometer Rechenschaft zu geben schuldig wären." Er charakterisierte die geistige Freiheit und Kreativität des Mathematikers sehr schön in einem Urteil über Descartes, von dem er sagte, bei ihm äußere sich die Fazilität in mathematischen Kombinationen so, wie sie sich bei anderen 'im Spielgeist' zeige." Sind wir nicht in der Hexenküche ebenfalls in einem verrückten Spiel?

Es ist weiterhin anzunehmen, daß Goethe bei seinem Studium des Neuplatonismus auch antike Zahlenlehren und -deutungen kennengelernt hat. Ich gehe einen Schritt weiter mit der Ver-

mutung, die ich nicht belegen kann, daß ihm der Gedanke der figurierten Zahlen begegnet ist, also die auf die Pythagoreer zurückgehende Praxis, die Zahlen geometrisch zu deuten. Wir kennen noch heute vom Würfel her die Punktmengen für kleine Zahlen in bestimmter Anordnung, z. B. die Fünf als Quincunx mit ihren Symbolbedeutungen.

Immer ist dabei die Eins als fons et mater numerorum der Ursprung aller Dinge, häufig dient sie als Symbol für das göttliche Selbst.

x

"Aus eins mach zehn":
 Aus einem Punkt entwickelt sich im Sinne der Entwicklung des Vielfältigen das gleichseitige Dreieck mit zehn Punkten, das die Pythagoreer als Tetraktys kannten. Es hat bekanntlich eine hohe symbolische Bedeutung.

			x	
		x	x	
	x	x	x	x
x	x	x	x	x

"Und zwei laß gehn, Und drei mach gleich":
 Lösche die Zeile mit zwei Punkten aus und mache sie der dritten Zeile mit drei Punkten gleich.

			x	
		x	x	x
		x	x	x
x	x	x	x	x

"Verlier die Vier":
 Lösche die Zeile mit den vier Punkten weg.

			x	
		x	x	x
		x	x	x

"Aus fünf und sechs, so sagt die Hex', mach sieben und acht, so ist's vollbracht":
 Vergrößere die bisherige Anzahl der Punkte durch zwei neue, die in die rechte und linke obere Ecke zu setzen sind.

			o	x	o
		x	x	x	
	x	x	x	x	

"Und neun ist eins":

Das entstehende Gebilde ist die bekannte Kegelaufstellung mit neun Punkten, die natürlich ebenfalls aus der eins entsprungen gedacht werden kann.

x	x	x
x	x	x
x	x	x

"Und zehn ist keins":

Die alte zehn ist verschwunden. Es bleibt eine Figur übrig, die man als Trinitätsymbol empfinden kann, denn die neun ist oft als die "große drei" gedacht worden. Dieser Gedanke wird dadurch erhärtet, daß wenige Zeilen später im Text über den Trinitätsgedanken spöttische Bemerkungen fallen.

x

Es ist nicht schwer, die schwache Stelle dieser Deutung zu finden, sie liegt in der Zeile "und drei mach gleich". Ein befreundeter Germanist wies mich auf den großen Artikel über das Wort "gleich" im Grimm'schen Wörterbuch hin. Hier sieht man, in wie reicher Weise das Wörtchen "gleich" gebraucht werden kann, so daß meine Interpretation nicht unmöglich scheint.

Philipp Melanchthon, der praeceptor Germaniae, hat kurz vor seinem Tode auf einem Zettel notiert, wie er sich darauf freue, im ewigen Leben Christus selbst nach der Auflösung theologischer Probleme zu fragen. Freuen wir uns darauf, den Olympier Goethe im Elysium zu fragen, welche der hunderte von Deutungen seiner eigenen entspricht, oder ob er uns alle mit einem vernünftigen Unsinn an der Nase herumgeführt hat.

Heinrich HEINE "Die Harzreise"

"Die Kinder sahen an meinem Ranzen, daß ich ein Fremder sei, und grüßten mich recht gastfreundlich. Einer der Knaben erzählte mir, sie hätten eben Religionsunterricht gehabt, und er zeigte mir den Königl. Hannov. Katechismus, nach welchem man ihnen das Christentum abfragt. Dieses Büchlein war sehr schlecht gedruckt, und ich fürchte, die Glaubenslehren machen dadurch schon gleich einen unerfreulich löschpapierigen Eindruck auf die Gemüter der Kinder; wie es mir denn auch erschrecklich mißfiel, daß das Einmaleins, welches doch mit der heiligen Dreiheitslehre bedenklich kollidiert, im Katechismus selbst, und zwar auf dem letzten Blatte desselben, abgedruckt ist und die Kinder dadurch schon frühzeitig zu sündhaften Zweifeln verleitet werden können."

Helmut KRACKE

"Aus eins mach zehn und -zehn ist keins"

1970, rororo Nr. 6680

Harro HEUSER

"Goethe contra 'Mathe'"

Vortrag, am 23.01.1984 gehalten vor der Goethegesellschaft in Karlsruhe

Entwicklung der Mathematikgeschichte in Persien

Die historische Erforschung der Mathematikgeschichte im Iran ist noch sehr jung. Der Zeitpunkt des Beginns kann etwa mit dem 2. Jahrzehnt dieses Jahrhunderts angegeben werden. Die erste methodische Forschungsbestrebung war die Herausgabe der Zeitschrift 'Nāme Dānešwarān' (Brief der Gelehrten) unter der Leitung von Eteḏāt al-Saltāneh. In den Jahren 1918-1946 wurden sie, in fünf Bänden zusammengefaßt, herausgegeben. Sie beinhalten Mathematikgeschichte sowie die der Astronomie.

Herr Sajed Djalaladdin Tehrani gab 1928 die Jahreszeitschrift 'Gahname' (Kalender) heraus, die bis zum Jahre 1937 erschien. Tehrani befaßte sich in dieser Zeitschrift mit dem Leben persischer und islamischer Gelehrter und auf der Grundlage der Wissenschaft mit ihren mathematischen und astronomischen Werken. Sein besonderes Augenmerk jedoch galt den astronomischen Werken.

In Persien haben sich auf dem Gebiet der Mathematikgeschichte besonders folgende Personen hervorgerufen:

- Gholamhossein Mossaheb
- Abulghasem Qurbani
- Parviz Shahryari
- Ahmad Aram
- Gholamhossein Sadri Afshar
- Muhammad Taqi Daniš Pažūh

Herr Mossaheb, verstorben 1981, wurde besonders auf dem Gebiet der Zahlentheorie bekannt. Sein erstes geschichtliches Werk war 'Ġabr wa muqābala' von 'Umar Haiyām (1048-1131), das er im Jahr 1838 herausbrachte. Es beinhaltet die arabische Abschrift, die Übersetzung derselben in die persische Sprache und einige Erläuterungen dazu. Weiter ist darin eine Zusammenfassung der Geschichte der Mathematik von Beginn bis zu 'Umar Haiyām, also bis zum 12. Jh., enthalten. Außerdem veröffentlichte Mossaheb in den Jahren 1930-1935 die Zeitschrift 'Mağale rijaḏiat 'ālī wa moğaddāmātī' (Zeitschrift der Einführung und der höheren Mathematik).

Sie beinhaltet u.a. einiges über die Geschichte der Mathematik.

Weiter schrieb er eine ausführliche Einführung in die Zahlentheorie, die in fünf Büchern zusammengefaßt ist. In dieser Einführung befinden sich geschichtliche Hinweise, Aufgaben und Arbeiten der verschiedenen Zahlentheoretiker, aber auch Angaben über Leben und Werke der in diesem Buch aufgeführten Mathematiker.

Der bedeutendste persische Forscher, der sich mit der Geschichte der Mathematik auseinandersetzt, ist A.G. Qurbani. Er war Dozent an der Universität Farah Pahlawi in Teheran und lehrte 'Geschichte der Wissenschaft'. Von ihm sind bisher folgende mathematik-historischen Werke erschienen: 'Bīrūnīnāme', in dem er die Werke des Abu Raiḥān Bīrūnī (973-1048) erforscht, 'Nasawīnāme', Erforschung der mathematischen Werke des Alī b. Ahmad Nasawī (gest. etwa 1030), 'Kāšānīnāme', Erforschung von Leben und Werken des Al Kāšī (gest. etwa 1429), ebenso das Buch 'Riyāḏidānan-i Īranī az Ḥwārizmī tā Ibn-i Sīnā' (Mathematiker von Ḥwārizmī bis Ibn Sīnā). Es stellt Leben und Werke von 26 persischen Mathematikern vor, die in der Zeit vom 8. Jh. bis zum 11. Jh. wirkten. Zu ihnen gehörten u.a. al-Ḥwārizmī, Banū Mūsā, Abū Ġāfar al-Ḥāzin, Abū l-Wafā' al Būzāğānī, al-Ḥuğandī, al-Karağī, Ibn Sīnā. Das Buch erschien 1971 in Teheran. Es beinhaltet u.a. Fotokopien von Originalschriften einzelner Mathematiker und wichtige Quellenangaben über persische Bücher, ^{die} in den europäischen Katalogen noch nicht aufgenommen sind.

Außer den aufgeführten Werken schrieb A.G. Qurbani seit 1953 verschiedene Artikel über die Geschichte der Mathematik in den Zeitschriften 'Soḥan Ābadī', 'Soḥan Elmī' und 'Rahnamī Kitāb'.

Herr Shahryari hat sich besonders durch Übersetzungen vom Russischen und Französischen ins Persische einen Namen gemacht. Hauptsächlich durch ihn werden uns die neuesten Forschungsergebnisse und andere Beiträge sowjetischer Mathematiker auf dem Gebiet der Geschichte bekannt gemacht. Einige

seiner Übersetzungen sind unter folgenden Titeln erschienen: 'Die Mathematik im Osten'. Das Werk beinhaltet u.a. Beiträge der sowjetischen Historiker K.Gnedenko, I.Volodarsky, J.Berschinka, A.Juschkewitsch und B.Rosenfeld. Seit 1975 wird eine sehr interessante Vierteljahresschrift 'Ašti bā Riyādidāt' (Aussöhnung mit der Mathematik) unter seiner Leitung herausgegeben. Sie befaßt sich besonders mit der Geschichte und Entwicklung der Mathematik allgemein, aber auch mit den Lebenswegen einiger alter Mathematiker, sowohl der persischen als auch der europäischen. Die Zeitschrift setzt sich aus Beiträgen einzelner Autoren zusammen. Vielfach werden hier auch Übersetzungen aus anderen Sprachen veröffentlicht.

In den letzten 30 Jahren sind zahlreiche erwähnenswerte Übersetzungen in Persien erschienen. Einer der bekanntesten persischen Übersetzer ist Ahmad Aram, der in arabischer und englischer Sprache sowie in Geschichtswissenschaften sehr bewandert ist und dessen Bücher man wegen seiner einmaligen Übersetzung gern liest. Er übersetzte von C.A.Nallino 'Die Geschichte der islamischen Astronomie' und von G.Sarton 'Geschichte der Wissenschaft' ins Persische sowie viele Handschriften aus dem Arabischen. Vor vier Jahren hat man anlässlich seines 70. Geburtstages das Buch 'Arāmnāme', was soviel heißt wie 'Buch des Arām', herausgegeben. Es enthält Vorträge, die zu seinem Jubiläum gehalten wurden.

Ein anderer Übersetzer, von dem zahlreiche Publikationen vorliegen, ist G.H.Sadri Afshar. Ihn kennt man vor allem durch die Übersetzungen der Werke 'Introduction to the History of Science' von G.Sarton, die er 1974 begann und von denen er bisher die Bände I und II übersetzt hat. Außerdem hat er jahrelang, von 1979 bis 1983, eine Monatszeitschrift mit dem Namen 'Hodhod', was zu Deutsch 'Wiedehopf' bedeutet, herausgegeben. In dieser Zeitschrift wurde vor allem die Wissenschaftsgeschichte publiziert. Im Jahre 1971 schrieb er das Verzeichnis 'Kitabnāme 'Ulum Irān (Verzeichnis über die Wissenschaft im Iran), das vom Wissenschaftsministerium veröffentlicht wurde. Unter anderem wurden darin die persischen Handschriften aus dem Mittelalter bekannt gemacht. Im gleichen Jahr schrieb er

das Buch 'Sargozašte saz mānū wā nobādhā-i elmī wā āmūzešī dar Irān' (Geschichte der wissenschaftlichen Einrichtungen und Organisationen im Iran). In diesem Buch werden auch Hinweise auf die mathematik-geschichtlichen Aktivitäten im Iran und insbesondere zahlreiche Angaben über die entsprechende Literatur gegeben.

Eine umfangreiche Studie über die vorhandene wissenschaftliche Literatur hat Herr Dāniš-Pažuh gemacht. Er hat ein dreibändiges Buch unter dem Titel 'Fihrist-i mikrūfilmā-i Kitābhāna-i Markazī-i Dānišgah-i Teheran' (Verzeichnis der Mikrofilme in der zentralen Universitätsbibliothek Teheran) herausgegeben (Band I 1969, Band II 1974, Band III 1984). Er hat außerdem große mehrbändige Verzeichnisse der Handschriften für die verschiedenen Bibliotheken des Landes angefertigt, die Werke der verschiedenen Disziplinen enthalten.

Einige Aktivitäten in Bezug auf die Mathematikgeschichte unternimmt die 'Persische Mathematiker-Gesellschaft', gegründet 1969, die auf ihren Jahrestagungen auch Vorträge zur Mathematikgeschichte hält, die danach in einem Bericht veröffentlicht werden. Außerdem gibt die Gesellschaft zwei Zeitschriften heraus, die mathematische und geschichtliche Beiträge enthalten.

Die in Persien befindlichen Handschriften sind teilweise in Privatbesitz, überwiegend jedoch in staatlichen oder nach der Revolution verstaatlichten Bibliotheken untergebracht. Die größte Bibliothek des Landes ist die Zentrale Universitätsbibliothek in Teheran, die über Verzeichnisse der alten arabischen und persischen Handschriften verfügt. Leider existiert in diesen Verzeichnissen keine Gesamtaufstellung der Orte, an denen die jeweiligen Schriften zu finden sind. Deshalb habe ich mit Hilfe einiger Studenten ein solches angefertigt, wodurch es möglich ist zu wissen, in welcher Bibliothek und an welchem Ort die gewünschte Schrift auszuleihen ist.

Weitere wichtige Bibliotheken sind die

- Parlamentsbibliothek und die Malek-Bibliothek in Teheran sowie die
- Bibliothek Āstāne Quds Raḍawī in Mashad.

Seit 1981 besteht ein Komitee, das sich 'Komitee der Kulturrevolution' nennt. Ihm gehören u.a. der Staatspräsident,

der Ministerpräsident und der Kulturminister an sowie mehrere Vertreter jeder Disziplin. Sie erstellen z.B. die Richtlinien der verschiedenen Fächer und entscheiden darüber, welche Fächer gestrichen oder neu aufgenommen werden sollen. Dieses Komitee hat beschlossen, daß an den Universitäten, die naturwissenschaftliche Fachrichtungen eingerichtet haben, die Geschichte der jeweiligen Disziplin sowie 'Philosophie der Wissenschaften' zum Pflichtfach für angehende Lehrer und Naturwissenschaftler mit 2 Wochenstunden erhoben wurde. Seit einem Jahr ist lediglich die Mathematik-Geschichte, nicht zuletzt auf mein Drängen hin, auf 3 Wochenstunden erhöht worden. Man macht es sich mit diesen beiden Fächern nicht leicht, weshalb auch noch kein Institut der Geschichte der Naturwissenschaften entstanden ist. Die Historiker möchten diese Fächer gern bei sich haben. Manche möchten aus beiden Fachrichtungen ein extra Institut einrichten und wieder andere möchten sie gern den jeweiligen naturwissenschaftlichen Fachrichtungen sowie der Philosophie hinzufügen.

Für mich persönlich wäre es interessant, Ihre Meinung zu diesem Punkt in der nachfolgenden Diskussion zu erfahren.

Alireza Djafari Naini
Department of Mathematics
Faculty of Science
Shahid Beheshti University
Eveen. Tehran. Iran

Zusammenfassung des Referates von

Ivo Schneider

Mutmaßliche Wurzeln einer frühen Glücksspielrechnung
bei den Arabern

Die ältesten bislang bekanntgewordenen Quellen einer bewußten Behandlung von Glücksspielproblemen mit mathematischen Mitteln entstammen dem 13. und 14. Jh. Es ist dies einmal ein Abschnitt über das Würfeln mit drei Würfeln in dem aus der Mitte des 13. Jh. stammenden Epos "De vetula", die aus dem Jahr 1283 stammende Aufzählung von 13 verschiedenen Würfelspielen aus dem Spielebuch Alfons des Weisen und ein vor einigen Jahren in Florenz entdecktes Manuskript, das ziemlich genau um 1400 geschrieben wurde, und in dem ein Spezialfall des Teilungsproblems richtig gelöst wird. In den beiden Manuskripten des 13. Jh. ist arabischer Einfluß zumindest in der verwendeten Fachterminologie unverkennbar. Allerdings unterscheiden sich diese Termini nicht wesentlich von den zu dieser Zeit entweder in lateinische Übersetzungen oder bereits in die entstehenden Formen der romanischen Sprachen übernommenen arabischen Wörter. Das bedeutet, daß ein möglicher arabischer Einfluß mit größter Wahrscheinlichkeit nicht direkt vermittelt wurde, sondern über lateinische Übersetzungen arabischen Schrifttums. Eine kleinere Wahrscheinlichkeit bleibt etwa für die Behandlung des Würfelspiels mit drei Würfeln in "De vetula" dafür, daß die dort angebotene Lösung von einem arabischen Lehrer stammt. Der Autor von "De vetula" könnte im Jahrhundert der Kreuzzüge mit einem solchen arabischen Lehrer, ähnlich wie zu Beginn dieses Jahrhunderts Leonardo von Pisa, in direktem Kontakt gestanden haben. Für eine solche Möglichkeit spricht auch das unmittelbare Auftauchen dieser mathematischen Lösung in einem mittelalterlichen Epos, das sich mit dem Leben und insbesondere den Liebesproblemen eines Edelmanns dieser Zeit auseinandersetzt. Anders als in allen bekannten späteren Manuskripten, in denen Glücksspielprobleme mathematisch behandelt werden, ist hier die "literarische" Umgebung völlig unmathematisch. Hinzu kommt, daß das Problem in einer Weise gelöst wird, für die es keine bis jetzt bekannten Vorbilder gibt und im Vergleich zu der

spätere weniger vollständig sind. Das bekannteste ,
dem Bereich der Glücksspiele entnommene^{arabische} Wort ist "az-zahr".
Dieses vulgärrabische alte Wort ist die Wurzel für die heute
Zufall bedeutenden Wörter "azar", "azzardo" und "hasard" in
den romanischen Sprachen und im Englischen. Das Wort "azar"
taucht auch im Spielebuch Alfons des Weisen zur Bezeichnung
eines speziellen Würfelspiels auf. Dies allein ist als Ausweis
für eine aufgrund der schnellen und frühen Verbreitung des
Wortes wahrscheinlich sogar sehr intensive Glücksspielpraxis
bei den Muslimen völlig ausreichend. Andererseits fehlt jeder
Beleg für den Versuch arabischer Mathematiker, spezielle Glücks-
spielprobleme mit ihren Mitteln zu lösen. Bei dem großen Interes-
se der Araber für die Mathematik ist nicht auszuschließen,
daß man Probleme wie das in "De vetula" enthaltene Würfelproblem
oder das Teilungsproblem mathematisch zu behandeln versuchte.

Quellen für solche Versuche sind allerdings bis heute nicht
gefunden worden. Dafür gibt es eine Reihe von möglichen Gründen.
Diese betreffen eine in die Hunderttausende gehende Anzahl von
unbearbeiteten arabischen Manuskripten, ebenso eine nicht
schätzbare Anzahl von lateinischen Manuskripten, die entweder
Übersetzungen arabischer Manuskripte darstellen oder Kompila-
tionen, Überarbeitungen von solchen Übersetzungen. Unbearbei-
tete Manuskripte dieser Art können sich z.B. in allen großen
Handschriftensammlungen Europas befinden. Auch die bis heute
üblichen Verfahren der Katalogisierung des mittelalterlichen
Manuskriptbestandes in Spezialgebieten wie der Mathematik ver-
zichten grundsätzlich auf eine Inhaltsangabe, die eine kritische
Durchsicht jedes einzelnen Manuskripts voraussetzt. Das bedeut-
et, wie z.B. die Funde in Florenz zeigen, daß noch immer mit
Überraschungen zu rechnen ist, wenn man beginnt, bestimmte
Bestände systematisch zu erfassen. Andere Gründe betreffen das
im Zusammenhang mit dem Verbot des Genusses von Wein von
Muhammad ausgesprochene Glücksspielverbot. Es wird in diesem
Zusammenhang darauf hingewiesen, daß die in der Geschichte
des Islams häufig auftretenden Reinigungs-Kampagnen, das Vor-
handensein mathematischer Texte, die sich mit Glücksspielpro-
blemen befaßten, weitgehend ausschließen. Dieser Standpunkt
wird allerdings aufgeweicht, wenn man dieses Glücksspielverbot,
wie es in Sure, 5, 90, ausgesprochen ist, näher betrachtet.

Was Muhammad dort verbietet, ist nicht "zahr", sondern "maisir",
das dort als Teufelswerk gegeißelt wird. "Maisir" war zunächst
ein Pfeilspiel, das bei den Arabern der Dschahilija, also
der vorislamischen Zeit, weit verbreitet war. Es sind davon im
wesentlichen zwei Formen überliefert, die im Zusammenhang der
beim Schlachten mit Vieh üblichen Fleischverteilung angewandt
wurden.

Offenbar war das Würfelspiel bei den Arabern zur Zeit von
Muhammad nicht bekannt. Es scheint erst im Rahmen der nach
Muhammad einsetzenden Ausbreitung des Islams aus einem oder
mehreren der eroberten Länder Eingang gefunden zu haben. Ein
möglicher Kandidat ist z.B. Ägypten, in dem Spielwürfel schon
sehr früh benutzt wurden. Von daher ist es denkbar, daß es einige
Zeit gedauert hat, bis das von Muhammad ausgesprochene Verbot
von "maisir" als auch für das mit "zahr" bezeichnete Würfelspiel
gültig angesehen wurde. Dieser Zeitraum läßt sich natürlich
nicht näher bestimmen. Er könnte allerdings ausgereicht haben,
um auch eine mathematische Behandlung zu ermöglichen, die einen
bis heute nicht mehr rekonstruierbaren Eingang in die abendlän-
dische Literatur fand. Für die Existenz einer solchen Periode
spricht auch die Beachtung bzw. Mißachtung des Verbots von
Weingenuß. Das Verbot wurde in der Anfangszeit streng einge-
halten, aber schon unter den Omaidjaden der ersten Hälfte des
8. Jh. erreichte die Mißachtung dieses Gebotes einen Höhepunkt.
Dies gilt auch noch für die frühen Abassiden. Gerade in die-
ser Führungsschicht wurde eine Art von Mißachtung der von
Muhammad vorgeschriebenen Lebensweise deutlich, da diese offen-
bar an den Gewohnheiten vor allem der arabischen Beduinen orien-
tiert war. Im Rahmen dieser vor dem Hintergrund der Hochkulturen
etwa des alten Persischen Reiches entwickelte Herablassung
gegenüber einer für die primitiven Nomaden angepaßten Lebens-
form entstand ein Klima der Duldung von Abweichungen gegenüber
den Vorschriften des Koran. Ein solches Klima konnte sehr gut
ausgereicht haben für eine kurze Blüte einer potentiellen
Glücksspiel-Mathematik. Der Nährboden für eine solche Möglich-
keit war sicherlich später wesentlich ungünstiger geworden, als
sich z.B. im 10. Jh. die orthodoxe Auffassung von al-Bāqillāni
durchsetzte.

Wenn sich, was im Rahmen der beim derzeitigen Wissensstand möglichen Spekulationen nicht ausgeschlossen werden kann, muslimische Mathematiker überhaupt mit Glücksspielproblemen nach dem 9. Jh. beschäftigt haben, dann mußten sie jedenfalls außerhalb der Orthodoxie stehen. Dafür gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Entweder war die Unvereinbarkeit einer mathematischen Behandlung von Glücksspielen mit dem Zufallsbegriff der Orthodoxie überhaupt nicht bewußt, oder man ließ einen Gegensatz zur Orthodoxie zu. Für diese zweite Möglichkeit gibt es verschiedene Beispiele. So gab es auch für strenge Moslems mehr oder minder große Nischen, etwa als Mu'tazilit außerhalb der Orthodoxie zu stehen und sich mit den Quellen aus anderen Kulturkreisen zu beschäftigen. Diese Quellen betrafen außer den klassischen griechischen indische Schriften, die seit der Mitte des 8. Jh. übersetzt und interpretiert wurden. Unterstellt man, daß bei den Indern schon viel früher Versuche angestellt worden waren, Glücksspielprobleme mathematisch zu lösen, so waren mögliche arabische Lösungen Weitergaben oder Weiterführungen von entsprechenden indischen.

Symmetriekonzepte in den Kristallstrukturtheorien der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts und die Entstehung des geometrischen Gruppenbegriffs

E. Scholz

1. Einführung von Symmetriekonzepten in die Kristallographie

Im Jahre 1815 wurde von zwei Kristallographen im Rahmen unterschiedlicher Kristallstrukturtheorien aber nicht unabhängig voneinander auf die Bedeutung von Symmetriegerichtspunkten für die Kristallographie hingewiesen: von R.J. Haüy (Mémoire sur une loi de cristallisation, appelée loi de symétrie. Mém. Muséum d'Histoire Naturelle 1. 81-101, 206-225, 273-298, 341-352) und C.S. Weiß (Übersichtliche Darstellung der verschiedenen natürlichen Abtheilungen der Krystallsysteme. Abh. Preuß. Ak. Wiss. Berlin 1815/1818, 289-336). Haüy explizierte in dieser Arbeit ein Prinzip, das er in seinem ab den 1790er Jahren entwickelten Ansatz einer atomistischen Kristallstrukturtheorie schon seit einiger Zeit implizit verwendet hatte. Grob gesprochen handelte es sich dabei um einen Aufbau der Kristallpolyeder aus kleinen molekularen Polyedern, die nach gewissen Regeln an einen von 18 "Kernen/Grundgestalten" angelagert wurden. Diese Regeln erfüllten ein relativ zur Grundgestalt definiertes morphologisches Symmetrieprinzip. Noch ziemlich implizit wurden von Haüy auf diese Weise die Symmetriesysteme zu den Gruppen O^* , D_{2h} , D_{3h} , D_{3d} , D_{2d} , C_{2h} , C_2 , C_3 (Schoenflies-Notation), die späteren 7 holodrischen Kristallklassen, charakterisiert.

Weiß vertrat im Gegensatz zu Haüy den dynamistischen Standpunkt, d.h. er versuchte, den Kristallaufbau durch gesetzmäßig strukturierte Kräftesysteme zu erklären. Dabei dachte er an den Aufbau solcher Kräftesysteme aus (geometrisch unabhängigen) Hauptkräften, die er geometrisch durch 3 Achsen charakterisierte. Die Analyse der vorfindlichen Kristallformen führte ihn auf die Angabe von Achsensystemen, die unmittelbar und 1:1 mit 7 Symmetriesystemen (den holodrischen Kristallklassen) in Beziehung standen. Darüberhinaus verwies er auf die Möglichkeit von einfachen Kristallgestalten, die einem System zugeordnet waren aber nicht die volle Symmetrie aufwiesen, sogenannte "halbflächige" Gestalten. Implizit begann Weiß so mit einer Auflistung von Untergruppen vom Index 2 in einem holodrischen System (hemiedrische Kristallklassen).

Im Anschluß an Weiß lag es daher nahe, mögliche weitere hemiedrische oder noch weiter untergeordnete Symmetriesysteme zu suchen und die Charakterisierung der Symmetriesysteme zu verbessern, für die in der zeitgenössischen Mathematik kein verwendbares Konzept vorlag. So wurden im dynamistischen Programm der Kristallstrukturtheorie in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts in dieser Hinsicht einige entscheidende

Fortschritte gemacht: M.L. Frankenheim stellte 1826 eine vollständige Liste der kristallographischen Punktsymmetriesysteme auf (32 Kristallklassen, implizit sämtliche Untergruppen der 7 holodrischen Klassen). J.F. Hessel, der dieses Ergebnis nicht kannte, erhielt es 1830 erneut, nachdem er sämtliche endliche Punktsymmetriesysteme im euklidischen Raum bestimmt hatte (implizit also alle endlichen Untergruppen von $O(3,R)$). Er verband dies mit einem geometrisch formulierten Vektorkalkül mit rationalen Koeffizienten ("Gerenstrahlgesetz"), ähnlich wie Justus G. Grassmann, der Vater Hermann G.'s, der 1829 einen symbolisch-algebraischen Kalkül vorstellte, in dem Symmetrioperationen und vektorielle Rechnung miteinander verbunden waren ("geometrische Combinationslehre").

2. Bravais' Kristallstrukturtheorie

Obwohl des Symmetrieprinzip von Häuy im Rahmen seines atomistischen Programms zum erstenmal in die Kristallographie eingeführt worden war, wurde es in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts von den vom Dynamismus beeinflussten Forschern in wesentlich fruchtbarer Weise weiterentwickelt als von den Atomisten. Das änderte sich jedoch um die Jahrhundertmitte durch die Arbeiten Auguste Bravais' (1811 - 1863), der die atomistische Theorie unter verschiedenen Aspekten jüngeren Entwicklungen anpaßte und ihr eine neue Gestalt gab. Insbesondere nahm er einen Teil der Symmetriekonzepte aus der dynamistischen Schule auf und entwickelte sie wesentlich weiter.

In zwei Arbeiten stellte er zunächst eine geeignete mathematische Grundlage zusammen (Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique, J. d. Math. 14, (1849) 141-180; Mémoire sur les systèmes de points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace, J. Ec. Pol. 19 (1850), 1-128), auf die er dann in seiner Kristallstrukturtheorie aufbauen konnte (Etudes cristallographiques, ibid. 20, 101-278). Handelte es sich in der 1849er Arbeit um eine erneute Ableitung sämtlicher endlicher Punktsymmetriesysteme (implizit: endlicher orthogonaler Gruppen) unabhängig von Hessel, so stieß er in der zweiten Arbeit in Neuland vor. Er analysierte ebene und räumliche Punktgitter und klassifizierte sie nach Symmetriegesichtspunkten. Dabei entdeckte er zunächst, daß die maximalen endlichen Punktsymmetriesysteme räumlicher Gitter (nahezu) mit den Weißschen holodrischen Systemen übereinstimmen und sich die Gitter entsprechend in 7 ("Bravais"-) Systeme unterteilen. Darüberhinaus führte er eine feinere Unterteilung in 14 Raumgittertypen ein, die in enger Beziehung zu den Häuyischen Grundformen stehen.

Vom Symmetriegesichtspunkt her enthielt die 1850er Arbeit eine Reihe bemerkenswerter Beobachtungen:

- explizite Diskussion der Abbildung unendlicher unbeschränkter Punktmengen im Raum (Punktgitter),
- explizite Diskussion, wenn auch nur teilweise Angabe unendlicher räumlicher Symmetriesysteme (Isometriegruppen $\text{Isom}(\Gamma)$ von Punktgittern Γ),
- geometrische Charakterisierung des orthogonalen Anteils (Γ) von $\text{Isom}(\Gamma)$ ($: \text{Isom}(E^3) \rightarrow O(3,R)$) durch eines der in 1849 studierten Punktsymmetriesysteme,
- dadurch implizite Charakterisierung von 14 durch semidirekte Produktbildungen angebbaren kristallographischen Raumgruppen $\text{Isom}(\Gamma) = (\Gamma) * \Gamma'$ (Γ' Translationsgitter zum Punktgitter Γ).

Im Rahmen seiner Kristallstrukturtheorie (1851) ging Bravais davon aus, daß die Moleküle durch Atompolyeder mit endlichen Punktsymmetrien zu charakterisieren sind und stellte hypothetische Regeln für die zulässige Zuordnung von Molekül- und Gittersymmetrien in einer Kristallstruktur auf. Das Ergebnis war eine Liste, in dem implizit 71 durch semidirekte Erweiterungen charakterisierte kristallographische Raumgruppen (von 73 insgesamt vorhandenen) angedeutet waren.

3. Übertragung des Gruppenbegriffs in die Geometrie

Der Gruppenbegriff bildete sich während des zweiten Drittels des 19. Jahrhunderts wie bekannt zunächst in der algebraischen Gleichungstheorie und Zahlentheorie heraus. Natürlich gab es auch innerhalb der Geometrie Ansätze, die in impliziter Form ein Stück Gruppendenken enthielten (außer in Möbius' isoliertem Vorgriff von 1827 auf das "Erlanger Programm" insbesondere in der projektiven Geometrie, der Kinematik und - wie angedeutet - in der geometrischen Kristallographie). Eine explizite Übertragung von Gruppenterminologie und -methoden in die Geometrie erfolgte jedoch erst Ende der 1860er Jahre durch C. Jordan (1869 Mémoire sur les groupes de mouvements, Ann. di Mat. 2; Oeuvres 4 (1964), 231-302).

Jordan verwies ausdrücklich auf die Anregung der von ihm in (1869) verfolgten Fragestellung durch Bravais. Er charakterisierte eine Bewegungsgruppe als unter Komposition abgeschlossenes System von Bewegungen (implizit stets Existenz von Inversen vorausgesetzt) oder auch als System der Deckbewegungen eines verallgemeinerten Molekülsystems (auch für kontinuierliche Gruppen!). Er unterschied kontinuierliche von diskreten Gruppen, bewies die Homomorphieeigenschaft der schon von Bravais betrachteten Reduktion räumlicher Bewegungen auf ihren orthogonalen Anteil, klassifizierte die Gruppen gemäß ihrem orthogonalen Anteil in "Kategorien" und versuchte eine möglichst vollständige Herleitung der möglichen Bewegungsgruppen (Angabe durch Systeme von - ggfs. auch infinitesimalen - Erzeugenden). Dabei ging er außer der veränderten Fragestellung und Terminologie auch dadurch entscheidend über Bravais hinaus, daß er durch systematische

Verwendung von Schraubenbewegungen nicht nur semidirekte Gruppenerweiterungen von Translationsgruppen durch orthogonale Gruppen sondern auch solche mit nichttriviale Faktoren-system (implizit) ins Auge faßte.

Die endgültige Durchsetzung des Gruppenbegriffs in der Geometrie wurde ab den 1870er Jahren entscheidend durch die Arbeiten Lies und Kleins über Transformationsgruppen geprägt. Diese Arbeiten hatten einen eigenen Hintergrund in Fragestellungen der projektiven Geometrie. Doch stand in Lie/Kleins Arbeiten aus den frühen 1870ern der Aspekt von stetigen n -Parameterscharen von Transformationen viel stärker im Vordergrund als der Gruppenaspekt (System von Operationen). Das fand etwa auch in der von den beiden verwendeten Terminologie seinen Niederschlag: Sie sprachen zunächst in einer nicht einheitlichen Terminologie über "Scharen", "Zyklen" etc. von Transformationen. Bemerkenswerterweise finden sich in beider Arbeiten, in denen sie zum erstenmal zur Verwendung der Terminologie von "Transformationsgruppe" übergangen, ausdrückliche Verweise auf Jordans Mémoire von 1869 (Klein: Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie; Math. Ann. 6 (1873); GA 1 (1921), 311-343. Lie: Über eine Klasse geometrischer Transformationen (Forts.); Christiania Forh. Vid. Selsk. (1872); GA 1 (1934), 153-210). Die Jordansche Arbeit scheint daher durchaus eine katalysatorische Rolle bei der Fixierung der Ideen Lies und Kleins über Transformationsgruppen gespielt zu haben; dieser Eindruck wird durch inhaltliche Parallelen weiter gestützt.

4. Mathematisierung der Kristallographie - Theoretische Mathematik

Zum Schluß drei Beobachtungen und eine These:

(i) Die Kristallographie bildete in ihrem Symmetriestudium während der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts einen, großen Reichtum an implizit gruppentheoretischem Material heraus (7 holoedrische Kristallklassen bei Haüy und Weiß, 32 Kristallklassen bei Frankenheim, Algebraisierung von Symmetrieoperationen der holoedrischen Klassen bei J.G. Graßmann, endliche Punktsymmetriesysteme bei Hessel und Bravais, 71 Bravais'sche Raumsymmetriesysteme). Darin gewann sie einen deutlichen Vorlauf vor der zeitgenössischen Mathematik.

(ii) Dies war offenbar eine wesentliche Erfolgsbedingung für die Einführung des expliziten Gruppenbegriffs und gruppentheoretischer Methoden in die Kristallographie durch Schoenflies u.a. ab Ende der 1880er Jahre. Die Ausarbeitung der Theorie der kristallographischen Raumgruppen enthielt zunächst eine Explizierung und Aufklärung schon bestehender, weit entwickelter Ansätze im Material der Kristallstrukturtheorien, bevor sie zur Vertiefung und

Erweiterung der von den Kristallographen schon eingesetzten Strukturen Übergang. Dadurch wurde letztere erst so fruchtbar.

(iii) Darüberhinaus ging dem Einfluß der geometrischen Gruppentheorie auf die Kristallographie ab den 1870er Jahren (L. Sohncke im Anschluß an Jordan) kurz vorher ein Einfluß in umgekehrte Richtung voraus. Bravais' Theorie wurde zum Auslöser für Jordans Übertragung des Gruppenbegriffs in die Geometrie und trug dadurch zur Herausbildung der geometrischen Gruppentheorie bei. Insofern haben wir in der Mathematisierung der Symmetriekonzepte der Kristallographie im 19. Jahrhundert einen sehr schönen Fall einer dialogischen Interaktion zwischen theoretischer (autonomer) Mathematik und einer mathematisierenden Einzelwissenschaft vor uns, der gar nicht der Figur einer gewissermaßen a posteriori "Anwendung" vorher ausgearbeiteter reiner Strukturkonzepte entspricht.

Möglicherweise ist dies sogar bis zu einem gewissen Grade typisch für fruchtbare Anwendungsbeziehungen der Mathematik. Das ließe sich dann in die nur dem ersten Anschein nach paradox klingende These fassen:

Fruchtbare Anwendungen der Mathematik enthalten mehr als bloße Anwendung.

EINIGE RICHTUNGEN IN DER ENTSTEHUNG UND IN DER HISTORISCHEN ENTWICKLUNG DER KLASSISCHEN THEORIE DER RANDWERTAUFGABEN FÜR DIE ANALYTISCHEN FUNKTIONEN

Miloš Čanak

In der Theorie der Randwertaufgaben für die analytischen Funktionen der komplexen Veränderliche spielen die folgenden Randwertaufgaben von Riemann und Hilbert eine zentrale Rolle.

Problem R: Es sei eine einfache, glatte, geschlossene Kontur L gegeben, die die komplexe Ebene auf das äusserliche Gebiet D^- und das innerliche Gebiet D^+ teilt. Es seien weiterhin $G(t)$ und $g(t)$, $t \in L$, die gegebenen Funktionen die auf L der Bedingung von Hölder

$$|G(t_2) - G(t_1)| < A |t_2 - t_1|^\lambda \quad (1)$$

genügen, wobei A und λ positive Zahlen sind und $0 < \lambda \leq 1$. Man soll zwei Funktionen $F^+(z)$ und $F^-(z)$ bestimmen, die analytisch respektiv in D^+ und D^- sind und die auf L der Randbedingung

$$F^+(t) = G(t) F^-(t) + g(t) \quad (2)$$

genügen.

Problem H: Es sei eine einfache, glatte, geschlossene Kontur L und die reellen Funktionen $a(s)$, $b(s)$ und $c(s)$ des Bogens s der Kontur L gegeben. Man soll die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ bestimmen, die in D^+ analytisch ist und die auf L der Randbedingung

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s) \quad (3)$$

genügt.

Die Grundmethode für das Auflösen des Problems (2) ist die Theorie des Integrals vom CAUCHYSchen Typus. Die ersten Erforscher die diese Problematik untersuchten waren J. Plemelj [1], [2] und J. Sobocki [3]. Sie haben die Eigenschaften des Integrals vom CAUCHYSchen Typus auf der Integrationskontur erforscht und die fundamentalen Formeln/PLEMELJ-SOHOCKISCHE Formeln/ ausgeführt, die das Auflösen der Randwertaufgabe R ermöglichen. Wichtige Ergebnisse zu dieser Theorie gaben auch A. Harnac [4] und N. Muskhelišvili [5].

Die Randwertaufgabe (2) finden wir zum ersten Mal in der Arbeit [6] von Riemann. Die erste Lösung des homogenen Problems (2) $/g(t) = 0/$ gab Hilbert [7] durch Konstruktion einer FREDHOLMSchen Integralgleichung deren Lösung gleichzeitig die Lösung der Randwertaufgabe darstellt. Auch E. Picard [8] reduzierte die Randwertaufgabe

von Riemann auf eine Integralgleichung und nutzte dabei das Integral vom CAUCHYSchen Typus. Plemelj [1] zeigte, dass sich die Lösung des RIEMANNschen Problems mittels eines Integrals vom CAUCHYSchen Typus ausdrücken lässt. Bei Auflösen einer singulären Integralgleichung mit dem CAUCHYSchen Kern löste Carleman [9] unterwegs auch die nicht-homogene Randwertaufgabe von Riemann mit konstanten Koeffizienten in einem speziellen Fall. Die erste vollständige Lösung des Problems (2) fand F. Gahov/1936/, siehe [10].

Weitere Erforschungen entwickelten sich im Sinne verschiedener Verallgemeinerungen des Problems (2). Wir können folgende Verallgemeinerungen betrachten:

I/ Die Verallgemeinerungen können im Bezug auf die Koeffizienten $G(t)$ und $g(t)$ sein. Anstatt der HOLDERSchen Bedingung können sie einer anderen Bedingung genügen.

II/ Das Problem R lässt sich für die mehrfach zusammenhängenden Gebieten untersuchen.

III/ Die Randbedingung kann neben der unbekanntenen Funktionen auch die Ableitungen oder die integralen Glieder enthalten.

IV/ Die Kontur L muss nicht immer glatt sein. Sie kann auch Winkelpunkte, Rückkehrpunkte, Endpunkte und andere Singularitäten enthalten.

V/ Die Kontur L muss nicht geschlossen sein.

VI/ Man kann ein System von n -Randwertaufgaben mit $2n$ -unbekannten Funktionen auflösen.

VII/ Die Randbedingung (2) lässt sich verallgemeinern.

VIII/ Man kann den mehrdimensionalen Fall untersuchen.

IX/ Es ist möglich auch die nichtlineare Randwertaufgabe betrachten.

X/ Randwertaufgabe R können wir für verschiedene Klassen der nichtanalytischen Funktionen auflösen.

Die erste Lösung des RIEMANNschen Problems mit unstetigen Koeffizienten $G(t)$ und $g(t)$ gaben Hilbert und Plemelj. L. Čibrikova fand die Lösung des verallgemeinerten RIEMANNschen Problems mit unstetigen Koeffizienten.

B. Ilvedelidze [12] generalisierte das Problem R für die mehrfach zusammenhängenden Gebieten.

Man kann auf verschiedene Art und Weise das Problem R im Sinne III/ verallgemeinern. J. Krikunov [13] hat das folgende Problem

$$\sum_{k=0}^n \left[a_k(t) \frac{d^k F^+(t)}{dt^k} + \int_L A_k(t, \tau) \frac{d^k F^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] - \sum_{k=0}^n \left[b_k(t) \frac{d^k F^-(t)}{dt^k} + \int_L B_k(t, \tau) \frac{d^k F^-(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] = f(t), \quad (4)$$

untersucht, wobei $a_k(t), b_k(t)$ - gegebene, stetige Funktionen sind und $A_k(t, \tau), B_k(t, \tau)$ - FREDHOLMsche Kerne darstellen.

Um die Verallgemeinerungen der Randwertaufgabe R im Sinne IV/ zu erforschen, muss man zuerst die entsprechenden PLEMELJ-SOHOCKI-schen Formeln für die Winkel- und Rückkehrpunkte ausführen. Solche Formeln finden wir in der Monographie [14] von N. Mushelišvili.

F. Gahov [15] hat das Problem R im Falle wenn die Kontur L aus n-glatte, einfachen Kurven besteht/wenn L keine geschlossene Kontur ist/ untersucht. Er gab auch die Lösung für das Problem R mit n Randbedingungen und mit 2n unbekannt Funktionen/s. [16]/.

Die Verallgemeinerungen im Sinne VII/ haben eine grosse theoretische und praktische Bedeutung, und viele russischen und anderen Erforscher gaben ihre Ergebnisse zu dieser Theorie. Eine wichtigste Rolle spielen hier die folgenden Randwertaufgaben von Haseman und Carleman:

Problem Hs: Es sei eine glatte, einfache, geschlossene Kontur L gegeben. Es seien $G(t)$ und $g(t), t \in L/$ die gegebenen Funktionen die der Bedingung von Hölder (1) genügen. Man soll zwei Funktionen $F^+(z)$ und $F^-(z)$ bestimmen, die analytisch respektiv in D^+ und D^- sind und die auf L der Randbedingung

$$F^+(\alpha(t)) = G(t)F^-(t) + g(t) \quad (5)$$

genügen, wobei $\alpha(t)$ einen Homöomorphismus der Kurve L auf L darstellt.

Problem C: Man soll die Funktion $F(z)$ bestimmen, die analytisch in D^+ ist und die auf L der Randbedingung

$$F(\alpha(t)) = G(t)F(t) + g(t) \quad (6)$$

genügt. Dabei ist $\alpha(t)$ ein Homöomorphismus der Kurve L auf L, der der Bedingung von Carleman $\alpha(\alpha(t)) = t$ genügt.

Die ersten Erforschungen des Problems Hs finden wir in der Dissertation [17] von C. Haseman. Das erste vollständige Auflösen dieses Problems gab D. Kveselava [18] mittels der Methode der Integralgleichungen.

Das Problem der Form (6) definierte zum ersten Mal T. Carleman /1931/, /siehe [19]/. Die vollständige Lösung dieser Randwertaufgabe gab D. Kveselava [20].

Der mehrdimensionale Fall wurde relativ spät von L. Sozanov /1973/, /siehe [21]/ gelöst.

In seiner Arbeit [22] hat A. Susea die folgende nichtlineare Randwertaufgabe von RIEMANNtypus $[F^+(t)]^{a(t)} = G(t)[F^-(t)]^{b(t)}$ (7) erforscht, wobei $a(t)$ und $b(t)$ die Randwerte einiger bestimmten analytischen Funktionen darstellen. Dieses Problem hat F. Gahov im allgemeinen Fall gelöst. M. Čanak [23] hat, durch Zurückführung auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen, eine Klasse der Lösungen des Problems (7) gefunden.

Alle diesen Verallgemeinerungen lassen sich auch auf die Randwertaufgaben von Hilbert, Haseman und Carleman anwenden. Eine grosse Zahl der historischen Angaben gibt es in der Monographie [24].

Die Verallgemeinerungen im Sinne X/, d.h. die Randwertaufgaben für die nichtanalytischen Funktionen können wir hier wegen ihrer Ausführlichkeit nicht überlegen. Es ist zuerst notwendig, die Theorie der nichtanalytischen Funktionen und ihre Historie erkennen/s. [25]/.

L I T E R A T U R

- [1] Plemelj J., "Ein Ergänzungssatz ...", Monatsch. Math. und Phys. XIX, 1908, 205-210.
- [2] Plemelj J., "Riemann-sche Funktionenschar", Ibid., 211-215.
- [3] Sochocki J., "Ob oppredelenih integralah i funkcijah upotrebljajemih pri razloženi v radi", S. Peterburg, 1873.
- [4] Harnac A., "Beitrage zur Theorie des Cauchy-schen Integrals", Ber. Sächsisch. Ges. Wiss. Math. phys. K., Bd 37, 1885, 379-398.
- [5] Mushelišvili N., "Priloženie integrala tipa Cauchy k odnomu klasu singularnih integralnih uravnenii", AN Gruz. SSR, t. X, 1941, 1-43.
- [6] Riemann B., "Sočinenija", Moskva, Gostehizdat, 1948.
- [7] Hilbert D., "Über eine Anwendung der Integralgleichungen", Verh. des III Internat. Mathematiker Kongresses, Heidelberg, 1904.
- [8] Picard E., "Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles", Paris, 1927.
- [9] Carleman T., "Sur la resolution de certaines équations integrales"

electromotoric forces in the system². The two laws give rise to two systems of linear equations, one associated with the closed figures (circuits) in the mesh, the other with the crossing-points (vertices). Kirchhoff developed a method to obtain n independent equations, where n is the number of wires. Besides some physical arguments and elementary matrix theory, he evolved a number of ideas and propositions that are purely graphical. Thus he produced a critical set of circuits, from which all other circuits can be obtained by a composition procedure. Further he settled an exchange property for such critical sets of circuits. Essential for these results was the use of what we now call a spanning tree of the network. His proofs were not always complete. But apart from these minor gaps, Kirchhoff had already deduced a fundamental result that eventually formed one of the basic ideas for matroid theory to be developed by H. Whitney in 1935.

Kirchhoff himself did not return to the subject, neither did other physicists in the nineteenth century. Except for his two laws, the above results were not incorporated in physical textbooks. Finally early twentieth-century physicists reconsidered the topic.

3. The polyhedral formula

In the 1750's Euler obtained the polyhedral formula, relating the number of vertices, the number of edges, and the number of faces of a polyhedron³. His proof was not flawless, and he did not realize that he had to specify for which polyhedra the formula holds. About a century later, K.G.C. von Staudt was the first to formulate correct hypotheses that have to be fulfilled by polyhedra so that they satisfy Euler's formula⁴. The proof was given in the concise style so characteristic for von Staudt's writings. It involved the idea of a spanning tree for the vertex-edge skeleton of a polyhedron.

Euler's formula was the starting-point for J.B. Listing for a long paper entitled *Der Census räumlicher Complexe*⁵. He introduced the idea of a 'complex' built up from simpler pieces such as vertices, edges and faces. In the main theorem he determined the 'census' of a complex, a relation between the

number of vertices, of edges, of faces, and of subcomplexes, and some other parameters. This involved among other things circuits of edges. A special type of complexes are the linear complexes consisting of vertices and edges only. They played a particular role in Listing's paper, for by carefully contracting higher dimensional pieces to points and lines, Listing was able to get from a complex a linear complex that reflects the spatial structure of the original complex. In studying these linear complexes 'trees' occurred, and some of Kirchhoff's results were 'rediscovered'.

In later years this polyhedral mathematics was one of the main sources for the genesis of algebraic topology culminating in the work of H. Poincaré, and others (as O. Veblen). Herein Kirchhoff's results were incorporated.

4. Assemblages of lines

In 1869 M.-E.-C. Jordan published a paper entitled *Sur les assemblages de lignes*⁶. Here he considered assemblages of lines in 3-space consisting of points and lines, where each line joins two points. For these lines, only the ends matter and not their spatial structure. So Jordan's objects are (in modern terms) graphs embedded in 3-space. Two assemblages can be 'pareil' (i.e. alike or similar), which amounts to being isomorphic as graphs. Jordan stated the general problem of determining the 'connected' non-similar assemblages with m lines. He gave a method for those assemblages in which connectivity can be destroyed by cutting one line. These are precisely the trees (embedded in 3-space). His method consisted of specifying (in various ways) certain central points, by which (non-)similarity can be more easily determined, and recursive procedures will be available.

5. Trees, enumeration and chemistry

Arthur Cayley, one of the most prolific mathematicians in history as it is, is also the one who has published the most in graph theory in the last century. All of these papers were exclusively on trees. In 1857 appeared *On the theory of the analytical forms called trees*⁷. This paper is the first in

history that contains graphs in the modern abstract sense without any spatial connotation. Cayley was motivated by work of J.J. Sylvester on the transformation of differentials⁹. The problem of evaluating the successive application of differential operators inspired Cayley to consider rooted trees associated with such expressions of differential operators. The paper itself is then solely concerned with the enumeration of rooted trees with n edges. The subject of Cayley's enquiries was always enumeration, either of rooted or of unrooted trees, of special types of trees such as those representing the molecule structure of chemical isomers⁹. Usually he exploited generating functions and computed the values for small n . His first paper mentioned above, as well as his papers on chemical trees were inspired by Sylvester^{9,10}, as was his use of central vertices in trees. Sylvester was the one who coined the word *graph* in a paper¹¹ and in a letter to the editor of *Nature*¹². He envisaged in his visionary mind a great future for the use of graphs in chemistry as well as in the theory of invariants.

6. Concluding remarks

Above we have singled out four sources for the genesis of graph theory: electrical networks, the theory of polyhedra, assemblages of lines, and Cayley's trees and chemistry. Cayley was the first to recognize trees as distinct mathematical objects interesting in their own right. This was shared by Jordan's assemblages of lines (which were still embedded in 3-space). On the other hand, some ten years before Cayley's first paper on trees, Kirchhoff had already obtained some fundamental results in the context of electrical networks. Finally the ambassadorial work of Sylvester should not be underrated. In the last decade of the nineteenth century in the wake of Sylvester's propagation of graph theory, fundamental work was done related to the map-colouring problem, by which the theory of linear graphs gained momentum. In contemporary terminology the above sources are still reflected. When we address the question whether mathematics is inciting or incited, the theme of this conference, then we will not get an unambiguous answer. The case of trees and graphs shares this

feature.

Notes

1. G.R. Kirchhoff, *Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige*, Ann. Phys. Chem. 64 (1845) 497-514.
2. G.R. Kirchhoff, *Ueber die Auflösung der Gleichungen, welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geföhrt wird*, Ann. Phys. Chem. 72 (1847) 497-508.
3. L. Euler, *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum solidi hedris planis inclusa sunt praedita*, Novi. Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol. 4 (1752-53) 140-160.
4. G.K.C. von Staudt, *Geometrie der Lage*, Bauer u. Raspe, Nürnberg, 1847.
5. J.B. Listing, *Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedren*, Abh. K. Ges. Wiss. Göttingen Math. Cl. 10 (1861-62) 97-182, also separately as a book, Göttingen, 1862.
6. C. Jordan, *Sur les assemblages de lignes*, J. Reine Angew. Math. 70 (1869) 185-190.
7. A. Cayley, *On the theory of the analytical forms called trees*, Phil. Mag. (4) 13 (1857) 172-176.
8. J.J. Sylvester, *On the differential transformation and the reversion of serieses*, Proc. Royal Soc. 7 (1856) 219-223.
9. A. Cayley, *On the mathematicak theory of isomers*, Phil. Mag. (4) 47 (1874) 444-446.
10. J.J. Sylvester, *On recent discoveries in mechanical concersion of motion*, Proc. Royal Inst. 7 (1873-75) 179-198.
11. J.J. Sylvester, *On an application of the new atomic theory to the grahical representation of the invariants and covariants of binary quantics, - with three appendices*, Amer. J. Math. 1 4 (1878) 64-125.
12. J.J. Sylvester, *Chemistry and algebra*, Nature 17.432 (Febr. 7, 1878) 284.

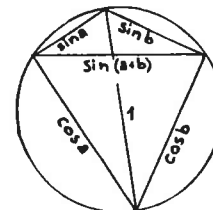
ON SOME ANCIENT COMPUTATION SCHEMES FOR TABLES AND PROBLEMS

Evert M. Bruins

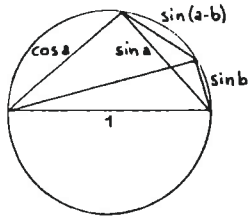
Many interpretations given for mathematical procedures turn out not to be consistent with preserved documents. The main reason for that is: too great influence of the knowledge of later periods, as e.g. concluding from $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ that ancient Greeks must have known that $(-b)^2 = +b^2$, whereas the school texts from "Babylon" show explained $a-(b-c) = (a-b)+c$ and $a(c-d) = ac - ad$ sufficient for all deductions needed. For division tables of multiples of a divisor were composed ... and unfortunately called "multiplication tables" whereas the multiples were calculated by simple additions. Tables of squares also were computed by "recurrence", purely additively either by $(a+\frac{1}{2})^2 = a^2 + a + \frac{1}{4}$, adding $\frac{1}{4}$ to the sum of the numbers in the foregoing line a , a^2 or "adding odd numbers" by $(a+1)^2 = a^2 + (2a+1)$. As results of computation often correspond to a "best approximation" from continued fractions again and again the continued fraction is "reanimated" for ancient mathematics. Thus recently by Knorr and Fowler. Carelessly, as long ago proposed, Aristarchos' fraction $7921:4050 > 88:45$ is considered as the fifth convergent of $1/1, 2/1, 43/22, 45/23, 88/45, 133/68, 354/181$ and $7921:4050 > 7920:4050 = 88:45$ (cancelling a factor 90!) is "overlooked". For square roots the tradition from the Tell Harmal texts to Archimed's lower and upper bounds for $d^2 = N$ follow from $(d-a)(d-b) = d^2 - (a+b)d + ab \neq 0$ to the approximation of \sqrt{N} by $d \sim \frac{N+ab}{a+b}$, lower bound if a, b are at the opposite sides of d , otherwise upper bound with $a=b$ "Heron's" formula $(N+a^2)/2a$. One should not forget that Greeks operated with rationals $a=(x_1, y_1)$, $b=(x_2, y_2)$ and thus with $(x_1x_2 + Ny_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ combining a, b . If - as already at Tell Harmal - one wishes to have an idea on the accuracy on checks $(x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - N(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 - Ny_1^2)(x_2^2 - Ny_2^2)$. A relation for halving trapezia, called after Diophantos, is attested for the II-nd millenium B.C. in $(ax+by)^2 + (bx-ay)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$, of the same type. The lowest value possible is then in absolute value 1. For $N=3$ e.g. $(1,1)^2 - 3 \cdot 1^2 = -2$; $(2,1)^2 - 3 \cdot 1^2 = 1$, $(1,1)(2,1) = (5,3)$; $(5,3)(5,3) = (26,15)$; $(5,3)(26,15) = (265,153) < \sqrt{3} < (26,15)(26,15) = (1351,780)$, Archimed's value!

For $N=a^2+p$ a first approximation $(a,1)$ leads by recursion to $(a,1)(a,1) = (2a^2+p, 2a)$ and again $(a,1)(2a^2+p, 2a) = (4a^3+3ap, 4a^2+p)$. The check yields respectively $N-a^2=p$; $(2a^2+p)^2 - (a^2+p)(2a)^2 = p^2$, $(4a^3+3ap)^2 - (a^2+p)(4a^2+p)^2 = (-p)^3$ and these formulas serve to immediately providing "best continued fraction" solutions for $N=a^2+p$, $p=1, -1, 2, -2, 4, -4$. The first not of this form is $19=4^2+3!$ The recursion formula holds true for any N , also for $N=p/q$ and leads to $(qx_1x_2 + py_1y_2)^2 - pq(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (qx_1^2 - py_1^2)(qx_2^2 - py_2^2)$ from the approximation $(qx_1x_2 + py_1y_2, q(x_1y_2 + x_2y_1))$. The "best possible" value is obtained for $|qx_1^2 - py_1^2| = 1$. We have $|x^2 - py^2/q| \geq 1/q$ and the value $1/q$ is reached for $x_1^2 - py_1^2 = 1$, $y_1 = qy$, thus leading automatically to $\sqrt{p/q} = (\sqrt{pq})/q$. All these simple facts were overlooked by Fowler when, 1980 he published an exceedingly long paper in Truesdell's "Archive" computing continued fractions for $\sqrt{p/q}$ and thus only adding "worse approximations" to the immediately known "best ones" from \sqrt{pq} .

Another big error was made by G.J.Toomer treating the "table of chords" of Ptolemy and looking for a relation with the Indian tables of chords. In Centaurus 1973 he completely missed the point with the Indian tables ... and tried to adapt Ptolemy's table suggesting a "possible" choice for the number of units of the radius at $21600/2\pi$, rounding it off at 3438 coming in the region of the Indian "Radius". Also here we have, however, a recursion. Ptolemy - one should not forget that - applies the "chords" subtended by an angle with its vertex on the perimeter of the circle and thus - "sine-theorem" - the chord = $2R \sin x$, and x happens to be one half of the angle at the centre. We have clearly $2R=120^\circ$, it means R a sexagesimal (higher) unit. Leaving out the factor $2R$, treating the diameter as a unit one has two formulas for the chord subtending the sum and the difference of two given arcs: the generally called "theorem of Ptolemy" provides



$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$; we don't need negative arc but have too $\sin a \cos b = \sin(a-b) + \sin b \cos a$ and from these two relations $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \cos b \sin a$! This provides the recurrence.



If b is the interval of the table the recurrence for $t_n = \sin(nb)$ is $t_{n+1} = Mt_n - t_{n-1}$, $M = 2\cos b$. We have $t_0 = 0$, $t_1 = \sin b$, $t_2 = 2\cos b \sin b$, $t_3 = 4\cos^2 b \sin b - \sin b = 3\sin b - 4\sin^3 b$ and the recurrence is in fact applying the modern formula, at the n -th step,

$$\sin nb = \sin b \left\{ M^{n-1} - \binom{n-2}{1} M^{n-3} + \binom{n-3}{5} M^{n-5} - \dots \right\}.$$

If b becomes small then M is nearly 2, and the computation can proceed "with small, easily computed, "correction"

$$t_{n+1} = 2t_n - t_{n-1} - 4\sin^2 \frac{b}{2} t_n.$$

There is nothing of a linear interpolation as formerly suggested by O. Neugebauer and recently repeated by Toomer. There is also no Indian scheme ... but there is some common basis: the Indians computed $\text{Sin}x = R\text{sin}x$ and used correspondingly

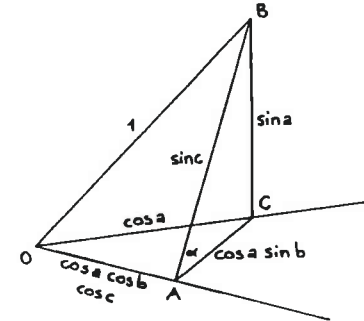
$$\text{Sin}(n+1)x - 2\text{Sin}nx = -\text{Sin}x / \text{Sin}x.$$

The right hand side is independent of R , the left hand side is, thus only for a specific value of R the formula might be exact. It is! The relation, easily deduced, is $4R \text{Sin}^2 \frac{x}{2} \text{sin}x = 1$. The value for $x = 3^\circ 45'$ is then $R\text{sin}x = 233,52735\dots$, $R = 3570,58386$. The Indian tables, due to a "numerical trap" - the Indians used $a = 225,223,214,\dots$ or $3448 < R < 4000$. Toomer obtained his R using Ptolemy's value of $\pi = 3;8.30 = 3,141\dots$ and obviously forgets that this value of π is obtained from the inscribed 360-gon using chord 1 = 1;2.50. Thus Toomer used Ptolemy's value as "2Rsinx" with $R = 60$ in $1;2.50 \times 3 = 3;8.30$. All his tedious computations have no sense, neither his trials to find a scheme for the "sequence" in which Hipparchus computed eventually his table of chords. [We remark that in the recurrency the quality $4\text{sin}^2 \frac{x}{2}$ is for $x = 3^\circ 45'$, $4,2 \times 10^{-3}$ and for $x = 0^\circ 1'$ only $1,9 \times 10^{-5}$. Ptolemy interpolates to find his chord 1 linearly. The exact relation is $3x = 1^\circ 34' 15'' + 4x$, of which the "first - $x_1 = 0$ - approximation" for x yields $0^\circ 31' 25''$!] recently,
 As a third item, again and again repeated, emphasised by Sabra, Pingree and others, we indicate "the important development of spherical trigonometry by Islamic scientists". There is nothing of the sort. The "lapsus" of Islamic scientists was that they

started to work "on the sphere itself" instead as Ptolemy using the "euclidean trihedral" from which, if one wishes to make visible the three angles only one method is possible, which than constructs the "polar triangle", so difficult to discover from the "Islam". Ptolemy gave the fundamental reduction of Menelaos-theorem on the sphere - using the trihedral - and showing, that in the "plane length" one has to see "chords of corresponding arcs". He derived then the relations in the orthogonal trihedral! Having at disposal the "orthogonal triangle"-relation, one can - just as in plane geometry - decompose any general triangle into two orthogonal ones and compute any element wished from three given data.

Indeed, taking the orthogonal along OC trihedral, taking $OB = 1$, and naming sides and angles according to the known conventions, we see projecting in two ways OB on OA (once via OC) the formula

1. $\text{csc} = \text{cosa} \text{cos}b$ and then
 2. $\text{sin}\alpha = \text{sina} / \text{sinc}$
 3. $\text{cos}\alpha = \frac{\text{cosa} \text{sin}b}{\text{sinc}} = \text{cosa} \text{sin}\beta$
- or also $\text{cos}\alpha = \frac{\text{csc} \text{sin}b}{\text{cos}b \text{sinc}} = \frac{\text{tgb}}{\text{tgc}}$
4. $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sina}}{\text{cosa} \text{sin}b} = \frac{\text{tga}}{\text{sin}b}$



and finally combining

$$5. \text{tg}\alpha \text{tg}\beta = \frac{1}{\text{cosa} \text{cos}b} = \frac{1}{\text{csc}}$$

If amongst the three data of a general triangle there are one or two angles, one finds always a pair "side and adjacent angle", say α, β . Then one computes the elements from the orthogonal triangle built by the altitude from C , and the third datum provides a second for the remaining triangle, next to the altitude h . No problem at all! Remain the cases that a, b, c or α, β, γ are given, of which the last - solved by polar triangles! - is renowned as the most difficult. Both are simple, and solved along the same pattern.

I. The altitude splits the side c into two parts p, q with either $p+q=c$ or $p-q=c$. Then $\cos a = \cosh \cos p$, $\cos b = \cosh \cos q$, thus $\cos a \cos q = \cos b \cos p$. Inserting $q=c-p$ yields $\cos a (\cos c \cos p + \sin c \sin p) = \cos b \cos p$, $\operatorname{tg} p \cos a \sin c = \cos b - \cos a \cos c (= \sin a \sin c \cos \beta)$

II. The altitude splits the angle γ into two parts P, Q and one has $\cos \alpha = \sin P \cosh$, $\cos \beta = \sin Q \cosh$ thus $\cos \alpha \sin Q = \cos \beta \sin P$ and with $\gamma = P+Q$ immediately $\cos \alpha \sin \beta \cot P = \cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma$, from which P, Q etc. whereas $\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma = \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta$

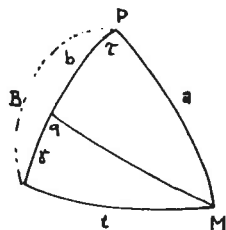
We show the determination of the giba, using only one division and sine-functions. PX is the meridian of the place X , PM that of Mecca, the angle XPM is then the difference in longitude.

Known are $\varphi = \varphi_0 - a$, resp. $\varphi_M = \varphi_0 - b$ the latitudes of X and M . Then we have $\gamma = B - b$ and

$$\cot \gamma = \frac{\sin \gamma}{\sin \tau} = \frac{\sin B \cos b - \cos B \sin b}{\operatorname{tg} \tau \sin B} = \frac{\cos b \cos \tau - \cot B \sin b \cos \tau}{\sin \tau} = \frac{\sin \gamma \cos \tau - \operatorname{tg} \varphi_M \cos \varphi}{\sin \tau}$$

Here with $\operatorname{tg} \varphi_M = \sin \omega$ $\varphi_M = 21^\circ 40'$, $\omega = 23^\circ 24'$

$$\cot \gamma = \frac{\sin(\gamma + \tau) + \sin(\gamma - \tau) - \sin(\gamma + \omega) + \sin(\gamma - \omega)}{2 \sin \tau}$$



Examples and Conclusions.

1. The above given relations provide the solution of $x^2 - Ny^2 = 1$ immediately for $N \leq 51$, except $N = 19, 22, 31, 41, 43, 46$.
2. Checking the advantages of the $\alpha\rho\sigma\zeta$ compared to the "continued fraction" up to $N=200$ we had as the most complicated case - of which there are very few! - $N=181$, for which the continued fraction for \sqrt{N} is $\{13; 2, 4, 1, 8, 6, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 6, 8, 1, 4, 2, 26, \dots\}$; its 22nd convergent yielding $1111225770^2 - 181 \times 82596761^2 = -1$. The $\alpha\rho\sigma\zeta$ works as follows: $181 = 13^2 + 12 = 14^2 - 15$, thus $(27, 2)$ yields $27^2 - 181 \times 2^2 = 5$; then $(14, 1) (27, 2) = (740, 55) = (148, 11) - 4$ -th convergent - $148^2 - 181 \times 11^2 = 3$; next $(13, 1) (148, 11) = (3915, 291) =$

$(1305, 97) - 5$ -th convergent - $1305^2 - 181 \times 97^2 = -4$, and $(1305^3 + 3 \times 1305) / 2 = 1111225770$, $97(1305^2 + 1) / 2 = 82596761$ - the 22-nd convergent, but without the continued fraction. Finally by "squaring" the smallest solution: $2469645423824185801^2 - 181 \times 183567298683461940^2 = 1$.

3. The recursion $t_{n+1} = Mt_n - t_{n-1}$ for the sine function - "shift, subtract" - leads to a series of polynomials, beginning with $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = M,$

M	1	1	1	1	1	1	1	...	
$M^2 - 1$									
$M^3 - 2M$		1	2	3	4	5	6	7	
$M^4 - 3M^2 + 1$		↗	1	3	6	10	15	21	28
$M^5 - 4M^3 + 3M$			↗	1	4	10	20	35	56
$M^6 - 5M^4 + 6M^2 - 1$				↗	1	5	15	35	70
$M^7 - 6M^5 + 10M^3 - 4M$					↗	1	6	21	56
						↗	1	7	...

from which the coefficients, in columns, evidently, are the arithmetical series of higher order, in diagonals "Pascal's triangle".

4. Ptolemy leaves out in his famous trisection of the values of chord $1 \frac{1}{2}$ his results for chord 12 , chord 6 , chord 3 , and merely states chord $1 \frac{1}{2} = 1.34.14$, chord $3/4 = 0.47.8$ from which he concludes $2/3$ chord $3/2 < 1.2.50 < \text{chord } 1 < 1.2.50.(40)$, $> 4/3$ chord $3/4$, thus chord $1 = 1.2.50$. If one computes, with a few square roots, the very values chord $3/4 = 0.47.7.24.47$, chord $3/2 = 1.34.14.42.19$ one has in fact $4/3$ chord $3/4 = 1.2.49.53.3$; $2/3$ chord $3/2 = 1.2.49.48.12$.

This shows that $1.2.50$ is outside the interval indicated by Ptolemy and that Ptolemy's conclusion is wrong! His decision to take chord $1 = 1.2.50$ corresponds to $\sin 30' = 0.008726852$, whereas the more precise value is 0.008726536 ; the error is $3,17 \times 10^{-6}$, and this is too great to base the table of chords on! The problem that the "60th" the parts of the degrees do hardly ever correspond to the values following from the interpolation in the table of chords given Almagest II, 11 and contains the strange fact, that the

"increasing" for 1' at 180° is 0'.0.0 for 9/30 " is simply - and only - explainable by the fact that the wrong conclusion in I,10 indicated above - corresponds to Ptolemy's knowing better values, having at his disposal a better table. We computed using the "sum-formula", which Ptolemy says to have used - and the recursion which he could have, had he used a more - slightly more - precise value for chord 1/2, the recursion system starting with $2 \cos 15' = M = 1,99998096411$ and $\sin 15' = 0,004363309$, which differs at the 120-th step in the ninth decimal. The beginning reads:

15'	0.004363426	0.31.25.0.0	31.25	0.31.24.56.50	0.004363309
30'	0.008726769	1.2.49.57.51	1.2.50	1.2.49.51.40	0.008726536
45'	0.013090946	1.34.14.57.23	1.34.15	1.34.14.42.19	0.0130909596
1.0	0.017452073	2.5.39.30.20	2.5.40	2.5.39.26.22	0.017452406
1.15	0.021815460	2.37.4.16.56	2.37.4	2.37.4.1.45	0.021814005
1.30	0.026177640	3.0.20.44.30	3.0.20	3.0.20.26.30	0.026176948
1.45	0.030539770	3.39.52.59.0	3.39.52	3.39.52.30.13	0.030538513
2.0	0.034900430	4.11.16.54.8	4.11.16	4.11.16.34.57	0.034909497
2.15	0.039260065	4.42.70.71.37	4.42.40	4.42.40.14.25	0.039259076
2.30	0.043620003	5.14.4.4.44	5.14.4	5.14.3.34.31	0.043619307
2.45	0.047979411	5.45.27.6.19	5.45.27	5.45.26.33.5	0.047970129
3.0	0.052337350	6.16.49.44.14	6.16.49	6.16.49.7.14.0	0.052331906
	"sum-formula"		Ptolemy		recursion

The deviations from Ptolemy's "stated procedure" do already occur at 1°45'. The fact that up till now, the most recent works as G.J.Toomer, 1984, included do not remark Ptolemy's wrong conclusion makes all previous treatments of the table of chords, Almagest I,10 unwarranted and basically wrong. Ptolemy made the table Almagest I,11 rounding off values from a more precise table, his entries being the middle column in what is given above.

Mathematical Discoveries prior to 1750 were mainly stimulated by previous Discoveries and by calculated and observed Data particularly relating to Astronomy. by P L Griffiths

Summary

Greek mathematicians prior to Euclid were nearly all also interested in Astronomy. Theorems in Euclid's 'Elements' stimulating later discoveries include book 1 proposition 47, book 3 proposition 20, book 6 definition 1 and book 6 proposition 3 used by Archimedes to obtain the lengths of the sides of a regular circumscribed polygon to obtain a value for $\pi < 3\frac{1}{7}$ but $> 3\frac{10}{71}$.

Ptolemy applies Euclid book 3 proposition 20 for the cyclic quadrilateral theorem which assisted in the construction of the first definitely known table of chords (in the Almagest book 1 chapter eleven).

Apart from some developments in China, there were virtually no improvements to Ptolemy's mathematics until 1425 in Southern India and 1603 in Europe. There were also no significant improvements to Ptolemy's astronomy until Copernicus in 1514. Kepler's fallacious area law has created considerable trouble for later mathematicians and astronomers in the form of wasted effort and misunderstanding generally. However, Kepler's first law about planetary orbits being elliptical, and his third law the distance law have been very important in the development of astronomy.

Most of the important works of the Greek mathematicians were translated from the Greek into Arabic in approximately 900 AD at Bagdad and were then translated from Arabic into Latin in Spain in approximately 1190 AD. The invention of printing increased

the circulation of the works of the Greek mathematicians after 1483.

$$\frac{\Delta \tan a}{\Delta a} = 1 + \tan^2 a,$$

long division by algebra, the techniques of integral calculus, the infinite series for anotangents, chords, coschords, sines and cosines were known to the astronomer Madhara of Sangamagrama by 1425 in Southern India, but had to be rediscovered in Britain later in the 1600s.

The discovery of logarithm by John Napier arose from tables of sines, the sine sum formula $\sin\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$ and from the present value tables in Simon Stevin's work 'Tables of Interest', but e and $\frac{1}{e}$ were not evaluated until 1714 by Roger Cotes.

Antonio de Sarasa by 1649 discovered that the area under a rectangular hyperbola up to a certain point measures the logarithm of the distance along the x axis. This formed the basis of the discovery by Nicholas Mercator in 1668 of the log series,

$$\log(1+x) = \int \frac{1}{1+x} \Delta x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$

This was also based on the integral calculus technique rediscovered by John Wallis in his 'Arithmetica Infinitorim' (1655) which also contained the method of construction of

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \dots}$$

Isaac Newton's mathematical discoveries include the application of integral calculus to find an expression for the area up to a particular point under the quadrant of a circle. An expression for the arcsine series can then be obtained. Newton applies the reversion of series technique which he discovered so as to obtain the sine series from the arcsine series, and so as to obtain the antilog (later known as the e) series from Mercator's log series.

Newton adjusted the antilog series so that it could include observed data particularly relating to the path of a comet.

By 1705 Edmund Halley had obtained algebraic expressions for compound interest, sinking fund, present value of a sum and present value of an annuity.

By 1714 Roger Cotes had discovered the formula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

obtained by mixing together some of the infinite series discovered or rediscovered by Isaac Newton.

Abraham de Moivre's mathematical discoveries include in 1697 a technique for raising a polynomial to any power whether integer or fractional.

In 1707 De Moivre converted Newton's multiangle formula and Leibniz's subdivision angle formula from chords into sines. In a letter to Johann Bernoulli dated 6th July 1708, De Moivre arrived at the multiangle formula for tangents based on James Gregory's arctan series.

In 1725 De Moivre arrived at the technique for computing life annuities from the data in Halley's mortality tables and from Halley's present value of an annuity formula. In 1738 De Moivre also computed the present value of a sum to be received on the death of a certain individual whose age is known.

By 1730 De Moivre had constructed the formula showing the connection between factorials and powers known as Stirling's formula. De Moivre also discovered the relationship between the logarithm of a number and the summation of the reciprocals of successive integers up to that number. The relationship is a difference later known as Euler's constant.

The formula $(1 - \frac{1}{n})^n$ appears for the first time in De Moivre's Miscellanea Analytica (1730) as an expression for

antilog (-1) . In arriving at these formulae, De Moivre made use of Jacques Bennoulli's formula for the summation of successive integers each raised to the same power.

By 1733, De Moivre had arrived at the formula for the normal curve derived from the binomial series; and he also applied calculated data techniques for arriving at the area under the normal curve up to certain units of standard deviation.

In his 'Introduction in Analysin Infinitorum' (1748) Euler arrived at expressions for the values of the summation of the reciprocals of the squares of successive integers each raised to the same power e.g. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots = \frac{\pi^2}{6}$ apparently by applying

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \left[1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} \dots \right]$$

$$= x \left[1 + \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{x}{3\pi}\right)^2 \right] \dots$$

At this point I must come to an end, because mathematical discoveries after 1750 are too difficult for me.

August 1986

Zur Geschichte der Statistik
als Methodenlehre der Empirie.

Josef Hain, ursprünglich Lehrer der Mathematik und später Ministerialsekretär der k.k. Direktion der administrativen Statistik in Wien, hat im Frühjahr 1852 den ersten Band seines "Handbuches der Statistik des österreichischen Kaiserstaates" herausgegeben. Im Vorwort des Handbuches schreibt Hain:

"Durch die trefflichen Werke von Quetelet, ..., Dr. Christian Bernoulli, ... usw. hat die Statistik die ihr lange Zeit hindurch gänzlich abgesprochene Selbständigkeit erlangt und ist in die Reihe der mathematischen Erfahrungswissenschaften eingetreten ... Nur in der Trennung der Statistik von der Staatenkunde liegt das Heil für die Statistik als Wissenschaft." Etwa hundert Seiten dieses Werkes sind einer "mathematischen Statistik" gewidmet.

Die Statistik wurde - was kaum bekannt ist - als Lehre von den Staatsmerkwürdigkeiten zum Beginn des 16. Jahrhunderts von Konrad Celtis (1459 - 1508) an der ersten deutschen Humanistenhochschule (1502) in Wien gelesen.

Mit Johannes Krafft von Gmunden (1380/85 - 1442), dem Begründer der I. Wiener mathematischen Schule und Zierde der Wiener Universität (so der "Humanistenpapst" Pius II.), begann die Verbesserung der Himmelsstatistiken und die Instrumentalisierung der einschlägigen Datenverarbeitung. Das Instrumentum solemne (1429) war eine planare Nachbildung der geozentrischen Planetenbewegungen mit Epizyklen (Volvellengerät).

Nikolaus Krebs von Kues (1401 - 1464), der mit Georg Aunpeck von Peuerbach (1423 - 1461), dem Vater der deutschen Astronomie und ersten bodenständigen Humanisten (der Wiener Universität) in enger Verbindung stand, war so, wie später Nikolaus Kopernikus (Scholar der Krakauer astronomischen Schule, die kurzfristig als Sachwalter und Bindeglied zwischen der I. und II. Wiener mathematischen Schule fungierte), mit dem Gedankengut der I. Wiener mathematischen Schule vertraut.

Der Cusaner hat bereits den Übergang vom prädikativen Substanzdenken der Antike und Scholastik zum funktionellen Strukturdenken der Moderne vollzogen und mit seiner Schrift "De staticis experimentis" (1450) die Statistik als Methodenlehre der Empirie begründet. Als Instrument der Datenverarbeitung verwendet er die Waage (gewogener Mittelwert?), kannte das Prinzip der großen Zahl (Ausgleich von statistischen Schwankungen) und das statistische Prüfen von Hypothesen.

Die statistische Methodik des Cusaners wurde durch John Dee (1527 - 1608) in England mit dem Programm einer "experimental science" (Archemaster) und dem Hinweis auf Nikolaus von Kues (Mortlakener Bibliothekskatalog, 1583) eingeführt und 1570 im Vorwort des John Dee zur ersten englischen Euklid-Übersetzung (Henry Billingsley) ausführlich vorgestellt.

Demzufolge wäre das Wiegenfest der deutschen Schule der Statistik (als Methodenlehre der Empirie beziehungsweise Lehre von den Massenerscheinungen und Wiederholungsvorgängen) mit dem Jahr 1450 und die Entstehung der angelsächsischen Schule der Statistik mit 1570 zu datieren.

Die "Neue Wissenschaft" des Galileo Galilei (1564 - 1642) hat somit bis jetzt unerkannte Quellen.

Die berühmte Maßdoktrin des Galilei, die sich auf die spirituelle Metrologie (Lehre von den Maßen und Gewichten) der Weisheit Salomons (Kapitel 11, Vers 21) stützt, die vom Kirchenvater Augustinus (345 - 430) in das abendländisch-christliche Denken eingebracht wurde, in der Trinitätssymbolik des um 1200 geborenen Albertus Magnus (Zahl=Gott Vater, Maß=Gottes Sohn, Gewicht=Heiliger Geist) ihre Personifizierung fand und in den scholastischen "Calculaciones" (Kalkulationswissenschaft, Physik des 14. Jahrhunderts, ein Rechnen ohne Messen, zum Beispiel das "Maß der Sünde" des Wilhelm von Ockham, um 1284 - 1349) wirksam war, ist ziemlich eindeutig auf Nikolaus von Kues zurückzuführen, wobei, wie so oft, der typische Renaissancewissenschaftler Galilei seine Quellen verschwiegen und als eigene Geistesleistung ausgab.

Johannes Kepler (1571 - 1630), der den Cusaner schätzte, hat die tychonischen Himmelsstatistiken für die Prüfung von Hypothesen der Planetenbewegungen herangezogen. Auch er hat sich mit seiner Getriebelehre (z.B.

ventillose Zahnradpumpe, Planetariengeräte) und Rechentechnik am Bau der ersten digitalen Rechenmaschine auf Räderbasis (1623) beteiligt, wie aus einem Brief von Wilhelm Schickard (der unter anderem mit seinem "hebräischen Rad" auch eine Grammatikmaschine baute) hervorgeht.

Somit hat Kepler die deutsche Tradition weitergeführt, indem seit Johannes von Gmunden (1429) die Statistik und maschinelle Datenverarbeitung immer Hand in Hand gegangen sind (zum Beispiel: 1890 die erste programmierte Hollerithmaschine, System Otto Schöffler, und die Organisation der "Statistischen Fabrik" durch Heinrich Rauchberg in Wien, oder 1948 - 1951 die Entwicklung der computergestützten Simulationstechnik am Institut für Statistik der Universität Wien durch die "Arbeitsgruppe für experimentelle Statistik").

Das Institut für Statistik und Informatik der Universität Wien hat diese Tradition über mehr als ein halbes Jahrtausend gepflegt.

Die Leistungen des Polyhistor Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) auf dem Gebiete der Datenverarbeitung sind bisher noch zu wenig gewürdigt. Bemerkenswert ist, daß er in dem ersten Bericht über seine binäre Arithmetik auch ein (räderloses) Binär-Rechengerät beschreibt, das allerdings nie gebaut wurde.

Nicht zu vergessen wäre der Humanist Johannes Reuchlin (1455 - 1522), der am Hofe des Kaisers Friedrich III. zu Linz (1492/93) in die jüdische Esoterik eingeweiht wurde und durch die Wiederbelebung der christlichen Kabbalistik jene Impulse gab, die viele Wissenschaftler der Barockzeit zur Beschäftigung mit "Zahlensprachen" anregte (als Vorläufer der Programmiersprachen. Hier wäre auch der Mühlviertler Bröselwebstuhl, etwa um 1680, zu erwähnen, der schon lange vor der Lochkartenprogrammierung über eine Laufbandprogrammierung zum Weben vierzigschäftiger Muster verfügte.).

Die sakralen Wurzeln der Formalwissenschaften (seit der Nummerngeometrie der Chou, China, ca. 11. Jahrh. v. Chr.) werden meines Erachtens von der Mathematik-Historiographie zu wenig beachtet. Im Lichte der Neuroanthropologie und Humanentwicklungsforschung und vor allem in der Diskussion um das Wesen der "Künstlichen Intelligenz" würde dieser thematische Aspekt wertvolle Erkenntnisse beisteuern.

JOSEF PETZVAL - EIN ANGEWANDTER MATHEMATIKER DES 19. JAHRHUNDERTS

H.K. Kaiser, Technische Universität Wien *)

In mathematischer Hinsicht ist das achtzehnte Jahrhundert vor allem durch den Ausbau der Analysis und deren Anwendung auf die verschiedensten Wissenszweige, besonders die Mechanik, gekennzeichnet. Der enorme Aufschwung der Mathematik ging an Österreich - genauer: an den habsburgischen Erblanden - beinahe spurlos vorbei. Während anderswo bedeutende Fortschritte in der mathematischen Forschung erzielt wurden, fand in Österreich die wissenschaftliche Forschung auf dem Gebiet der Mathematik praktisch nicht statt. Die Gründe hierfür liegen in erster Linie im Darniederliegen der höheren Schulen, die wir am Beispiel der Universität kurz skizzieren wollen.

In der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts war die Universität Wien fast zur Gänze in der Hand der Jesuiten. Diese sahen die Aufgabe der Universität in der bloßen Weitergabe des tradierten Wissens, nicht aber in der selbständigen Forschung. Dadurch war die wissenschaftliche Bedeutung der Universität Wien sehr gering. In einem Bericht der Hofkanzlei aus dem Jahr 1749 lesen wir:

"Zur Mathesis, Experimentalphysik, Chemie und Botanik fehlt es an aller Anleitung. Dafür sind nicht einmal Lokale und Instrumente vorhanden."

So entschied sich Maria Theresia zu einer Universitätsreform, deren Durchführung sie in die Hände ihres Beraters Gerhard van Swieten (1700 - 1773) legte. 1752 wurde durch die *"Vorschrift wegen künftiger Einrichtung der humanistischen und philosophischen Studien"* dem Studenten die Absolvierung eines zweijährigen Lehrganges an der philosophischen Fakultät vorgeschrieben, bevor dieser an einer der "oberen" Fakultäten studieren durfte. Dieser Kurs war mit wöchentlich 20 Stunden Vorlesungen veranschlagt. Die Mathematik wurde nur im ersten Jahr unterrichtet, die höhere Mathematik und Astronomie wurden nur als Freifach angeboten. Unter Maria Theresia wurde die Universität voll verstaatlicht. An die Spitze der Fakultät traten Studiendirektoren, die die staatliche Überwachung auszuführen hatten. Die Ernennung der Professoren war der Kaiserin vorbehalten, die Steuerfreiheit

*) Herrn Prof. Hlawka, in Verehrung, zum 70. Geburtstag gewidmet.

der Universität wurde abgeschafft und die Jurisdiktion der Universität stark eingeschränkt. Der Staat übernahm die Verwaltung und Kassaführung, eine 1760 eingerichtete Studienhofkommission besorgte die oberste Aufsicht über alle Studienangelegenheiten in den österreichischen Erblanden.

Das Leben an der Universität stand vollkommen unter staatlicher Kontrolle. So sah zum Beispiel die Studienordnung der philosophischen Fakultät in Graz vor, daß die Namen alle *auditorum* auf eine Tafel geschrieben werden mußten, die in den Hörsälen aufgestellt wurde. Jeder Student hatte seine Anwesenheit an dieser Tafel durch Unterschrift nachzuweisen. Der Vorgang wurde durch einen *"vertrauten Aufseher"* überwacht. Weiters wurde vorgeschrieben, daß die Professoren von den Abwesenden sogleich die Ursache für deren Fernbleiben zu ergründen und *"die Nachlässigen monatlich zur weiteren Veranlassung einzureichen"* hätten.¹⁾ Die Vortragenden hatten sich streng an vorgeschriebene Lehrbücher zu halten, eine Änderung der Vorlesungsunterlagen konnte nur mit Genehmigung der staatlichen Behörden erfolgen. Begründet wurde diese Maßnahme damit, daß dadurch das Mitschreiben entfallt und deshalb die Effizienz von Lehre und Lernen gesteigert würde. Natürlich wurden damit die Lehrinhalte durch den Staat gesteuert. Diese orientierten sich ganz an den Bedürfnissen des Staates und einem reinen Nützlichkeitsdenken. So gab Josef II. folgende Weisung:²⁾

"Den jungen Leuten muß nichts gelehrt werden, was sie nachher entweder sehr seltsam oder gar nicht zum Besten des Staates gebrauchen können, da die Studien in Universitäten wesentlich für die Bildung der Staatsbeamten dienen, nicht aber bloß zu Erziehung Gelehrter."

Der österreichische Universitätsprofessor war also ein weisungsgebundener Beamter. Die Forschung war bestenfalls ein geduldetes Privatvergnügen. Josef II. bemerkte:⁴⁾

"Eine gesittete, sittsame und ordentliche Jugend ist nothwendiger als eine gelehrte."

Zwar gab es bis 1848 immer wieder Ansätze einer Reform, die aber keine wesentlichen Änderungen brachte. 1819 wurde sogar der Besuch ausländischer Universitäten für Österreicher verboten, was zu einer gänzlichen Abkoppelung der österreichischen Wissen-

schaftsentwicklung von der internationalen Szene führte.

Trotz dieser wissenschaftsfeindlichen Atmosphäre wirkte an der Universität Wien ab 1837 ein bedeutender Mathematiker, nämlich Josef Petzval. Petzval war von Beginn seiner Tätigkeit in Wien an wissenschaftlich aktiv. Zur vollen Entfaltung konnten seine Aktivitäten aber erst ab 1848 kommen, als zunächst als Folge der Revolution der Unterrichtsminister Franz Freiherr von Sommaruga am 30. März 1848 die Lern- und Lehrfreiheit propagierte. 1849 begann Leo Graf Thun seine Universitätsreform, die in der Angleichung an die deutschen Hochschulen gipfelte. Die Universität wurde in vier gleichwertige Fakultäten gegliedert, an deren Spitze frei gewählte Dekane standen. Die Studiendirektoren wurden abgeschafft und die Leitung der Universität einem Universitätskonsistorium übertragen. Die zwei philosophischen Jahrgänge wurden als 7. und 8. Klasse des bis dahin sechsjährigen Gymnasiums abgetrennt und der philosophischen Fakultät, an der die Mathematik weiterhin beheimatet war, ausdrücklich die Mehrung des Wissens - also die Forschung - aufgetragen. Durch alle diese Maßnahmen kam es dann in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts zu einem Aufblühen der Mathematik an der Universität Wien.

Die folgenden Ausführungen wollen wir der Beschreibung des Lebensweges und der wissenschaftlichen Leistung von Josef Petzval widmen, der es verstanden hat, trotz widriger äußerer Umstände bedeutende Beiträge zur Mathematik und deren Anwendungen zu liefern.

Josef Max Petzval⁵⁾ wurde am 6.1.1807 in Szepes-Béla, einem Ort in der deutschen Sprachinsel der Zips (heute in der CSSR), als Sohn eines Volksschullehrers geboren. Nach dem Besuch der Volksschule in Késmark verbrachte er die drei ersten Klassen des Gymnasiums in Podolin (Pudlein), die zweiten drei Klassen in Lócse. Die Unterrichtssprache am damaligen Gymnasium war Latein. Es gab nur einen Klassenlehrer, der alle Gegenstände unterrichtete. Der Unterricht verlief ziemlich eintönig. Petzval schreibt selbst darüber:⁶⁾

"Zu Beginn des Unterrichts eine halbe Stunde Beten, darnach Ausbesserung der abgelieferten Arbeiten, weiters, körperliche Züchtigung jener Schüler, welche schlechte Aufgaben geliefert

hatten, Diktieren von neuen Aufgaben und zum Schluss ein Halbstündiges Dankgebet!"

In allen Fächern bis auf Mathematik war Petzval ein guter Schüler. Wegen seiner Schwäche aus Mathematik war sogar ein Abgang aus der Schule und der Beginn einer Schuhmacherlehre geplant. Da fand Petzval in der Bibliothek seines Vaters das Buch "Analytische Abhandlungen über die Elemente der Mathematik" von Mathias Hauser. Petzval arbeitete das Werk in den Ferien ohne fremde Hilfe durch und wurde, als er probeweise wieder in die Schule geschickt wurde, zum Klassenbesten im Fach Mathematik. Zur Vorbereitung seines Universitätsstudiums ging Petzval für zwei Jahre an das Lyzeum nach Kaschau. Seinen Lebensunterhalt verdiente er sich, indem er Privatstunden gab und sich als Hauslehrer verdingte. 1826 belegte Petzval den Ingenieurkurs an der - damals deutschen - Universität Budapest. 1828 wurde ihm das Ingenieurdiplom verliehen, auf das er Zeit seines Lebens sehr stolz war. Neben seinen Studien betrieb er eifrig seine Hobbys, nämlich Reiten, Turnen, Ringen und Fechten. Petzval galt als einer der elegantesten und geschicktesten Säbelfechter von Budapest und später von Wien. 1828 trat er als praktischer Ingenieur (Wasserbau) in den Dienst der Stadt Budapest, wo er sieben Jahre verblieb. Über seine bauamtliche Tätigkeit wird folgende Begebenheit geschildert:⁷⁾

"Als im Jahre 1830 die Donau ungewöhnlich gestiegen war und auch für Budapest die Gefahr einer Überschwemmung brachte, traf Petzval, wie dies in seiner energischen Natur lag, sofort und ohne viel zu fragen selbständige Maßregeln und ordnete die verschiedenen Vorkehrungen zur Bekämpfung der Gefahr an, die nicht ohne Erfolg geblieben waren. Dafür hatte er dann an Stelle eines Dankes für die "Überschreitung seiner Kompetenz" und die dadurch verursachten Kosten von seinem Vorgesetzten - eine Rüge einzustecken."

Übrigens hat Petzval später (1860) Wien einen Plan für die Wienflußregulierung entworfen, die eine teilweise Einwölbung und eine zweigeleisige Uferbahn vorsah. Die Annahme des Vorschlages wurde zwar hintertrieben, die ausgeführte Regulierung deckt sich jedoch weitgehend mit Petzvals Vorschlag.⁸⁾

Neben seinem Beruf beschäftigte sich Petzval weiterhin mit mathematischen Studien an der Universität. Besonders widmete er sich den Werken von Cauchy und Poisson. Schließlich promovierte er 1832 an der Universität Budapest. Im selben Jahr begann er dort seine Lehrtätigkeit in den Fächern Mathematik, Mechanik und praktische Geometrie. Diese Aktivitäten führten schließlich zur Ernennung zum ordentlichen Professor für höhere Mathematik an der Universität Budapest im Jahr 1835.

Als 1836 die Stelle eines ordentlichen Professors für höhere Mathematik an der Universität Wien ausgeschrieben wurde, beteiligte sich auch Petzval am Konkurrenzverfahren und wurde 1837 nach Wien berufen.⁹⁾ An dieser Universität wirkte er bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1877.

Petzval war eine sehr streitbare und eigenwillige Persönlichkeit. Seine Eigenarten brachten ihm vor allem in späteren Jahren den Ruf eines Sonderlings ein. Als ständigen Sommerwohnsitz bezog er eine Wohnung im ehemaligen Kamaldulenser-Kloster auf dem Kahlenberg. Von dort aus ritt er täglich auf seinem arabischen Rappen in die Stadt. Auch das Fechten pflegte er nach wie vor. Er gab sogar, als 1848 wegen der politischen Wirren die höheren Schulen geschlossen waren, den Mitgliedern der akademischen Legion in den Räumlichkeiten der Technischen Hochschule Fechtunterricht. Er war überzeugt, daß ein gesunder Geist nur in einem gesunden Körper beheimatet sein könne. So unternahm er zum Ausgleich für seine wissenschaftliche Tätigkeit nicht nur ausgedehnte Wanderungen, sondern er beschäftigte sich auch mit Vorliebe durch Holzhacken.

Petzval war ein beliebter Lehrer. Sein Vortrag soll sehr klar und lebendig gewesen sein. Über die Anwesenheitskontrolle zu Beginn der Vorlesungsstunden setzte er sich hinweg - er hielt sie für unwürdig. Über die Zustände, die er an der Wiener Universität vorfand, äußerte er sich kritisch:¹⁰⁾

Unter der drückenden Herrschaft des bösen Geistes der Mitgeherie mit der Wissenschaft litten bei uns und leiden auch noch jetzt alle wissenschaftlichen Bestrebungen und besonders die produktiven. Das war das höchste Lob, welches man einem

österreichischen Universitätsprofessor erteilen konnte, er sei mit der Wissenschaft mitgegangen. Es gab nur eine verdienstliche Arbeit, die er unternehmen konnte: ein Lehrbuch zu schreiben. Eigene Forschungen waren ein bloß geduldetes Privatvergnügen und zogen dem Forscher höchstens von Seiten der Behörden einen Verweis zu, wenn er dabei einmal seine amtlichen Gutachten über alle möglichen Dinge zwischen Himmel und Erde etwas nachlässiger betrieb. Unser Erziehungssystem ist eine mit der Mitgeherie im innigsten Einklang stehende Stallfütterung, sie erzeugt sehr viel zahmes Vieh und einiges wilde, das seine Selbständigkeit allen Hindernissen zum Trotz hartnäckig bewahrt ... und so auch trotzdem jene wenigen selbständigen Denker liefert, die der österreichische Gelehrtenstand aufzuweisen hat."

Bis zur Studienreform hielt Petzval Vorlesungen über Mathematik und Mechanik nach den Lehrbüchern "Anleitung zur höheren Mathematik" (Littrow) und "Traité de Méchanique" (Poisson). Danach umfasste seine Lehrtätigkeit in erster Linie die analytische Mechanik und verschiedene Aspekte der Theorie der Differentialgleichungen, aber auch Arithmetik und Algebra, Analysis und ihre Anwendungen in der Akustik, sowie mathematische Optik. In den letzten Jahren vor seiner Emeritierung kamen noch Vorlesungen über Sonnenfinsternisse und vor allem über Musiktheorie hinzu.

Seine Ansichten über Mathematik, die sicherlich auch Inhalt und Stil seiner Vorlesungen bestimmten, drückte er in einem Vortrag (1857) auf folgende Weise aus:¹¹⁾

"Man soll die Mathematik nicht als Zweck, sondern nur als Mittel zu einem höheren Zweck betrachten, welcher ist das Studium der Natur. Daher sollte man nur jene Differentialgleichungen studieren, denen man bei den Problemen der Physik und Mechanik begegnet; denn von der Untersuchung derjenigen, die gar kein anderes Verdienst haben, als daß sie sich integrieren lassen, steht nie ein erheblicher Nutzen zu erwarten ... Ich möchte fort und fort der Jugend zurufen: Haltet Euch an das Studium der Natur, dem einzig und allein eine würdige Mathematik der Zukunft entkeimen kann, auf daß sie euch in eurer wissenschaftlichen Laufbahn immer leite

an ihrer Hand, bis sie euch an ihr Herz nimmt."

Petzval war ein ausgezeichnete Redner, der mit großer Schlagfertigkeit ausgestattet war. Wissenschaftliche Auseinandersetzungen führte er mit äußerster Härte, mit seiner scharfen Zunge schuf er sich viele Feinde. Mit beißender Ironie (oft ist man versucht zu sagen: mit Gehässigkeit) machte er sich gelegentlich über seine Umgebung lustig. So soll er über einen Kollegen folgenden Spruch in Umlauf gesetzt haben: "Was der Rauchfangkehrer unter Mohren, ist der N.N. unter Professoren"⁴¹⁾. Auch gegenüber der Obrigkeit bewahrte er sich sein unabhängiges Denken. So erscheint er als Verfasser eines Minderheitsvotums in Sachen "Habilitation von Privatdozenten", in dem er gegen einen Gesetzesentwurf aus dem Jahr 1850 auftritt.⁴²⁾

Auch Petzvals wissenschaftliches Werk ist durch Fehden gekennzeichnet. Zunächst wollen wir kurz seine Leistungen auf dem Gebiet der Optik anführen.

Im Jahr 1838 stellte Daguerre in Paris die ersten brauchbaren Photographien auf Jodsilberschichten her. Der Wiener Physiker Andreas von Ettingshausen wurde nach Paris geschickt, um die Erfindung zu studieren. Nach seiner Rückkehr versuchte Ettingshausen, seine Kollegen für die Probleme der Photographie zu interessieren. Das größte Problem der damaligen Zeit waren die langen Belichtungszeiten (etwa eine halbe Stunde), die Porträtaufnahmen nahezu verunmöglichten. Petzval rückte diesem Problem zu Leibe, indem er sich an die Konstruktion lichtstärkerer Objektive machte, wobei er versuchte, die Aufnahmeoptik möglichst frei von Fehlern zu machen. Auf Grund der Berechnungen Petzvals stellte der Wiener Optiker Voigtländer eine aplanatische, sehr lichtstarke vierlinsige Kombination her, das sogenannte Petzvalsche Porträt-Doppelobjektiv⁴⁴⁾, das bei voller Öffnung deutliche und gleichmäßig helle Bilder lieferte. Mit der gleichfalls in Wien von den Gebrüdern Natterer entwickelten lichtempfindlicheren Jodchlorplatte waren nun kurze Belichtungszeiten möglich, wodurch nun problemlos Porträtaufnahmen durchgeführt werden konnten. Petzval hatte mit seiner mathematischen Konstruktion des Objektivs einen neuen Weg gewiesen, der das langwierige und kostspielige Experimentieren ablöste. Übrigens wurden 1841

die ersten Momentaufnahmen vom damaligen Bibliothekar der Technischen Hochschule in Wien, A. Martin, durchgeführt⁴⁵⁾. Der neue von Voigtländer produzierte Photoapparat fand rasche Verbreitung und machte den Optiker Voigtländer reich. Petzval, der anfangs die kommerzielle Bedeutung seiner Leistung nicht erkannt hatte, wurde mit einem bescheidenen Geldbetrag abgespeist. So war der Streit mit Voigtländer vorprogrammiert, der dann auch mit voller Heftigkeit entbrannte⁴⁶⁾. Versuche Petzvals, mit anderen Wiener Optikern zusammenzuarbeiten, brachten keine finanziellen Erfolge. 1843 berechnete Petzval einen Feldstecher (der sich in England großer Beliebtheit erfreute), später (1857) kamen noch das sogenannte Petzvalsche Orthoskop für Landschaftsaufnahmen und Reproduktionen von Karten und Urkunden, sowie Nebelscheinwerfer, Scheinwerfer für die Belagerung der Festungen etc. hinzu. Petzval wollte seine Untersuchungen über Optik in einem großangelegten Manuskript publizieren. Dieses wurde allerdings bei einem Einbruch in seiner Wohnung vernichtet. Petzval konnte sich zu einer neuerlichen Niederschrift nicht entschließen.

Die Beschäftigung mit den Anwendungen der Mathematik entsprach ganz Petzvals Überzeugung. So schrieb er einmal:

"Der Gelehrte hat nicht nur Untersuchungen anzustellen und Gebilde hervorzubringen, die zu einer Erweiterung der Wissenschaft führen, sondern auch solche, die zur Steigerung der Erwerbsfähigkeit der Bevölkerung und zur Verschönerung des sozialen Lebens beitragen."

Es ist daher nicht verwunderlich, daß Petzvals zweite hervorragende wissenschaftliche Leistung auf einem Gebiet erfolgte, das ebenfalls der anwendungsorientierten Mathematik zuzuzählen ist. Er publizierte 1853 bis 1859 nämlich ein zweibändiges Werk "Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten". In der Einleitung des ersten Bandes schreibt er:⁴⁷⁾

"Gegenwärtiges Werk hat zum Zweck; nicht diese Wissenschaft, insofern, als sie den Wissenschaftsforschern zugänglich geworden, zu erschöpfen, als vielmehr dasjenige, was der Verfasser selbst gefunden hat, in so viel möglich gerundeter Form

mitzutheilen ... Der hier besprochene Gegenstand fing schon vor 18 Jahren an die Aufmerksamkeit des Verfassers zu erregen <also 1833> und die erste Frucht der eingeleiteten Forschungen war eine Integrationsmethode für Differentialgleichungen mit Coefficienten von der Form $a+bx$ mittels bestimmter Integrale, welche jedoch in vielen Fällen die nötige Anzahl particulärer, Genüge leistender Werthe nicht lieferte..."

Auch diese wissenschaftliche Leistung ist von einer gewissen Tragik umgeben. Das monumentale Werk, hauptsächlich in der Zeit der wissenschaftlichen Isolation Österreichs geschrieben, ignorierte die Literatur seiner Zeit. Obwohl das Buch gediegen geschrieben ist und viel Neues enthält, veraltete das Werk rasch und machte auf die Fachwelt nicht den von Petzval erhofften Eindruck. Petzval hat - wahrscheinlich unabhängig von seinen Vorgängern - die Idee der Laplacetransformation wiederentdeckt und in seinem Buch zu einem vielseitig brauchbaren Instrument zur Lösung von Differentialgleichungen ausgebaut. Bald kam es um die Verwendung der Laplacetransformation zu einem heftigen Prioritätsstreit. Petzval war mit Simon Spitzer, einem seiner Schüler, verfeindet. Als Grund für diese Feindschaft gibt Spitzer¹⁸⁾ in einem Buch aus dem Jahre 1878 an, daß Petzval Spitzers Bewerbung um eine Professur an der Technischen Hochschule mit den Worten hintertrieben habe: "Herr Spitzer ist kein Mathematiker, sondern nur ein Rechner." Jedenfalls bezichtigte Spitzer 1857 Petzval des Plagiats, woraus sich ein heftiger Streit entwickelte, in dem beide Seiten vor persönlichen Angriffen nicht zurückschreckten. Sogar die lokale Wiener Presse¹⁹⁾ berichtete über die Auseinandersetzung. Spitzer zeigte in der Auseinandersetzung nur mangelhafte Literaturkenntnisse, und gab Laplace die Priorität, obwohl sie eigentlich Euler gebührte (worauf übrigens auch A. Weiler bereits 1856 hingewiesen hatte). Jedenfalls wurden die Polemiken rund um Petzvals Buch bekannter als das Werk selbst und die Fachwelt nahm ohne Überprüfung der Urheberschaft die Bezeichnung "Laplacetransformation" an.²⁰⁾

Noch eine weitere Auseinandersetzung trübte das wissenschaftliche Leben Petzvals. Als Christian Doppler das nach ihm benannte Prinzip publizierte, trat Petzval vehement gegen die Richtigkeit

und die Herleitung des Prinzips auf. Petzval setzte dem Dopplerschen Prinzip das "Gesetz von der Erhaltung der Schwingungsdauer" entgegen. Hatte Petzval auch von der Sache her unrecht, so sind seine Angriffe auf die unexakte Herleitung des Prinzips in Dopplers Arbeit berechtigt.

In seinen späteren Jahren beschäftigte sich Petzval intensiv mit Musiktheorie.²¹⁾ Er entwickelte ein eigenes 31-stufiges Tonsystem, für das er sogar ein eigenes Instrument baute. Unter seinen übrigen Arbeiten sind vor allem die posthumen Publikationen "Theorie der Störungen der Stützlinien"²²⁾ und "Aus den Vorlesungen Josef Petzvals über Ballistik"²³⁾ zu erwähnen.

Nach seiner Emeritierung lebte Petzval sehr zurückgezogen. Leo Königsberger, der damals mehrere Jahre als Professor für Mathematik an der Universität Wien gewirkt hat, bekam ihn nie zu Gesicht. In späten Jahren ging Petzval noch eine Ehe ein, die aber schon nach wenigen Jahren mit dem Tod seiner Gattin endete.

Petzval war von 1849 an wirkliches Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Wien, ab 1873 korrespondierendes Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, und 1877 wurde ihm der Titel Hofrat verliehen. Bereits 1850 wurde er für seine Verdienste um die Photographie Ritter des Franz-Josef-Ordens. Am 17.9.1891 starb Josef Petzval in Wien.

Im November 1901 wurde seine Büste im Arkadenhof der Universität Wien aufgestellt, durch die Bemühungen der Photographischen Gesellschaft (Petzval war Ehrenmitglied dieser Gesellschaft) erhielt er ein Ehrengrab.

Sieht man die Bücher über Geschichte der Mathematik an, so findet man den Namen Petzval nur selten, jedenfalls nicht so oft wie man dies auf Grund seiner hervorragenden Leistungen erwarten müsste. Die Gründe hierfür sind vielfältig. Wesentlichen Anteil daran hat sicherlich die wissenschaftliche Isolation Österreichs in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, wodurch einerseits Petzval die Kenntnisse der neuesten wissenschaftlichen Resultate und die davon ausgehenden Ideen nicht vollständig kannte, und andererseits Petzvals Erkenntnisse relativ spät ins Ausland gelangten und daher bei ihrem Bekanntwerden zum Teil

schon überholt waren. Ein weiterer Faktor waren sicherlich Petzvals Streitigkeiten, in denen einige seiner Leistungen herabgemindert wurden. Und schließlich spielte die Petzval eigene Überheblichkeit und Überschätzung der eigenen Bedeutung, wie man aus den folgenden Ausführungen von Leopold Gegenbauer entnehmen kann, eine Rolle:

"Aus meiner eigenen Erinnerung weiß ich beispielsweise, daß ihm die Reden, welche er bei der 32. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, die im Jahr 1856 in Wien stattfand, gehalten hat - in denen er u.a. den oft citierten Ausspruch getan hat, "er habe drei Wissenschaften beinahe von der Grund-feste bis an den Gipfel ausgebildet" (Theorie der Differential-gleichungen, Dioptrik und Akustik) - sowie die offenbar ab-sichtlich unrichtigen Mitteilungen über die Ergebnisse seiner nicht publizierten Untersuchungen, die er damals in Vorträgen und gesprächsweise seinen Berliner Fachkollegen Kummer und Weierstraß gegenüber machte, von dem ersten niemals vergeben wurden, obwohl sich mein unvergeßlicher Lehrer Weierstraß in seiner bekannten milden, selbst die geringste Leistung aner-kennenden und jedermann aufmunternden Weise wiederholt bemühte, ihm von Petzval eine günstige Meinung beizubringen. Kummer brach derartige Erörterungen stets mit der Bemerkung ab: "Was er uns in Wien vorredete, zeigt, daß er ein ganz dummer Kerl ist", worauf Weierstraß zu erwidern pflegte: "Dumm ist er nicht, er hat nur uns für dumm gehalten." "

Dennoch bleibt der Wert seiner wissenschaftlichen Leistungen, und es wäre sehr zu wünschen, daß sich Österreich in Zukunft ver-stärkt der großen Gelehrten aus seiner Vergangenheit bewußt würde. Vielleicht wäre die 180. Wiederkehr von Petzvals Geburtstag im kommenden Jahr eine passende Gelegenheit dazu!

Anmerkungen

1. Siehe F.Paulsen: Geschichte des gelehrten Unterrichts. 2. Band. Leipzig (1919), S 109.
2. ibid. S 110, Anm.1.
3. ibid. S 111.
4. Siehe H.Engelbrecht: Schulwesen und Volksbildung im 18. Jahr-hundert" in: J.Gründler (Hrsg.): Österreich zur Zeit Kaiser Joseph II., Wien 1980.S 227.
5. Zur Biographie Josef Petzvals siehe: L.Erményi: Dr. Josef Petzvals Leben und Verdienste. Wilhelm Knapp, Halle a.S. 1903; H.Peppenauer: Geschichte des Studienfaches Mathematik an der Universität Wien von 1848 - 1900. Diss. der Phil.Fak. der Univ.Wien 1953; M.v.Rohr: Zur Erinnerung an Josef Max Petzval. Zeitschrift für Instrumentenkunde 27, 1 - 6 (1907). K.H. Schwarz: Josef Petzval in: Österreichs Naturforscher I, 37 - 43, Wien 1935.
6. Siehe: A.v.Obermayer: Zum 100. Gebrurtstage von Josef Petzval, Wien 1907, S 5.
7. Siehe L.Erményi, Dr. Josef Petzvals Leben und Verdienste. S 9.
8. Siehe A.v.Obermayer: Zum 100. Geburtstag von Josef Petzval S 6.
9. Siehe W.Wirtinger: Wie Petzval nach Wien kam. Wien 1905.
10. Siehe L.Gegenbauer: Ein vergessener Österreicher. Jahresbe-richt der DMV 12 (1903), S 329.
11. ibid. S 333.
12. Siehe A.v.Obermayer: Zum 100. Geburtstag von Josef Petzval. S 27.
13. Siehe J. Petzval: Ministerialverordnung und der neue Entwurf von 1850. Wien 1850.
14. Siehe A.v.Obermayer: Zum 100. Geburtstag von Josef Petzval. S 8 . Ein solches Objektiv ist im Technischen Museum in Wien ausgestellt.
15. Siehe M.v.Rohr: Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs. Berlin, 1899.
16. Siehe F.Voigtländer: Akademiker Professor Dr. Josef Petzval in Wien. Braunschweig 1859.
17. Siehe J.Petzval: Integration der linearen Differentialgleich-ungen mit constanten und veränderlichen Coeffizienten. 1. Band, Wien 1853. S. I und V.
18. Siehe S.Spitzer: Vorlesungen über lineare Differentialglei-chungen. Wien 1878. Anhang.
19. Siehe "österreichische Zeitung" vom 9.10.,16.10. und 4.12.1857,sowie "Die Presse" vom 18.10.,1.11.,5.12.,11.12. und 19.12.1857.

20. Siehe M.Deakin: A scandal in Vienna, Proc. of the 1st Australian Conference on the History of Mathematics, 32 - 40 (1980).
M.Deakin: Euler's version of the Laplace-Transform. Am. Math. Monthly 87, 264 - 269(1980).
21. Siehe: L.Erményi: Petzval's Theorie der Tonsysteme. Zeitschrift für Math. u. Physik 51, 1 - 122 (1904).
22. Siehe J.Petzval: Theorie der Störungen und Stützlinien. Zeitschrift für Math. und Physik 50, 288 - 333 und 345 - 421 (1904).
23. Siehe A.v.Obermayer: Aus den Vorlesungen Josef Petzvals über Ballistik. Zeitschrift für Math. und Physik 56, 282 - 313(1908).

Hans Kaiser – Wilfried Nöbauer
Technische Universität Wien

Geschichte der Mathematik

ISBN 3-209-00498-6 / öS 298,-

„Es ist zu hoffen, daß das Buch zu einer besseren Integration der Mathematik in das System der Allgemeinbildung beitragen und zu einem besseren Verständnis der vielfachen Zusammenhänge zwischen Mathematik, Geschichte und Kultur führen wird.“

W. Nöbauer

Inhaltsverzeichnis:

Die Entwicklung der Mathematik von den Anfängen bis zur Gegenwart – Problemgeschichte einiger mathematischer Teilgebiete – Lebensdaten und Arbeitsgebiete einiger bedeutender Mathematiker – Register – Zeitafel.



Verlag Hölder-Pichler-Tempsky

1096 Wien, Frankgasse 4, Postfach 127, Tel. 0222/43 89 93-0

IN YBBS GEBOREN – IN YBBS GESTORBEN

Es werden Streiflichter auf das Leben des österreichischen Mathematikers WILHELM WIRTINGER (1865 - 1945) geworfen.

Die Einleitung bringt den Text einer von der Stadt Ybbs im Jahr 1958 gewidmeten Gedenktafel.

Hofrat, Universitätsprofessor Dr. Wilhelm Wirtinger, geboren am 19.7.1865 in Ybbs, gestorben am 16.1.1945 in Ybbs, Mathematiker von Weltruf, Lehrer an den Universitäten Innsbruck und Wien, Ehrendoktor von Innsbruck, Hamburg und Oslo, wirkliches Mitglied der Akademie der Wissenschaften Wien, korrespondierendes Mitglied der Akademie Berlin, Göttingen und München, sowie der Päpstlichen Akademie Rom, Ehrenbürger der Stadt Ybbs.

Auf weitere Ehrungen wird hingewiesen. Einer Aufzählung der wenigen Publikationen über Wirtingers Leben und Wirken (1) folgt ein kurzer Bericht über das Ergebnis einer im Juli 1986 durchgeführten Literatur-Recherche, die von den Begriffen Wirtinger-Kalkül, Wirtingersche Ungleichung, Wirtingersche Thetas ausging und den Zeitraum von 1972 bis 1985 umfaßte (2). Dabei fanden sich noch andere mit dem Namen Wirtinger verbundene Bezeichnungen hauptsächlich in der amerikanischen Literatur, aber auch in russischen, japanischen, italienischen, tschechischen, polnischen, chinesischen und anderen Zeitschriften. Es wird auf den von Wirtinger bereits vor dem Bekanntwerden der Theorie der Integralgleichungen geschaffenen Ausdruck "Bandenspektrum" (3) aufmerksam gemacht, der später im Gebiete der Eigenwerte allgemein üblich und anonym überall eingebürgert wurde. – Als sehr wertvolle Quelle diente eine durch die Österreichische Akademie der Wissenschaften veranlaßte Autobiographie vom Juni 1939. Diese wurde für die Streiflichter wiederholt herangezogen und stellenweise wörtlich wiedergegeben. Die Einleitung schließt mit einem Zitat Johann Radons, des berühmtesten Wirtinger-Schülers, in welchem er die Hoffnung ausdrückt,

"daß es einmal möglich sein wird, Wirtingers Andenken durch eine würdige Ausgabe seiner gesammelten Abhandlungen zu ehren. Das wäre ein monumentum aere perennius, des großen Mannes würdig und eine Ehrenpflicht seines Vaterlandes." (4)

Als erster Zugang zur Persönlichkeit Wilhelm Wirtingers werden drei Themenkreise behandelt.

Für Herrn Prof. Hlawka, zu seinem 70. Geburtstag.

Die Vorfahren. Ahnen mit dem Namen Wirtinger können bis 1716 als Riemer (5) nachgewiesen werden; sie kamen aus dem Marchfeld und siedelten sich im Weinviertel, etwa 40 km von Wien entfernt, an (6). Alle übrigen Vorfahren väterlicherseits, Männer wie Frauen, entstammen denselben Gegenden und scheinen dem Bauernstand, vielleicht auch dem Winzerstand angehört zu haben. Der Riemermeister Georg Wirtinger (1789 - 1855) ließ mindestens zwei Söhnen eine höhere Schulbildung zuteil werden. Der eine wurde der V a t e r des Mathematikers. Johann Ev. Wirtinger (1826 - 1909) hatte an der Wiener Universität Medizin studiert und wirkte ab 1864 in Ybbs an der Donau als Hausarzt, später als Primararzt an einem von der Stadt Wien errichteten und erhaltenen Versorgungshaus (7). Er war in seinem Beruf auch forschend und publizistisch tätig; dem Sohn Wilhelm, seinem einzigen Kind, brachte er wohlwollendes Verständnis entgegen. Dies war umso wichtiger, als der Knabe seit seinem achten Lebensjahr infolge einer Scharlach-Diphtherie stark hörbehindert war. - Die Vorfahren mütterlicherseits kamen aus entfernteren Ländern der Habsburger Monarchie und führten größtenteils slawische Namen. Hervorgehoben werden der Großvater Augustin Powolny (1815 - 1892) und die Großmutter Rosalia Schlechta (1817 - 1879). Des Großvaters technisches Interesse und seine Fähigkeiten traten beim Enkel verstärkt hervor, da sich auch in der Familie seiner Großmutter ähnliche Qualitäten vererbten. Ein militärischer Büchsenmacher konnte gewiß mathematische Begabung weitergeben. Über die M u t t e r selbst schreibt Wilhelm Wirtinger nur wenig. Sein ältester Enkel aber berichtet in Gesprächen einiges über "die Dame" Beate Wirtinger, geborene Powolny (1841 - 1895), was ihm seine Mutter, Wirtingers Tochter Melly (1894 - 1977), erzählt hat.

Die Schulzeit relativ ausführlich zu behandeln, mag manchem Historiker unnötig erscheinen. Indes ist darauf hinzuweisen, daß einerseits dieser Abschnitt im allgemeinen für den späteren Lebenslauf eines Menschen bedeutungsvoll sein kann, und daß andererseits gerade bei Wirtinger in dieser Zeit nicht nur seine Liebe und Begabung zur Mathematik sich zeigen, sondern auch sehr markante Charaktereigenschaften nachweisbar werden, Charakterzüge, die auch den Greis noch zieren, die ihm aber auch sein ganzes Leben anhaften. - Die neun Jahre seiner Gymnasialzeit verbringt Willy an drei Gymnasien: Seitenstetten, Melk, und St. Pölten (8). Die Gründe für den zweimaligen Schulwechsel sind in den autobiographischen Aufzeichnungen aus 1939 offen dargelegt. Archivalien aus

Seitenstetten und Erinnerungen lebender Persönlichkeiten bezeugen nicht nur die Richtigkeit aller Angaben "des größten Mathematikers Europas", sondern auch dessen unerschütterliche Treue. Ja, selbst Eigensinn und Widerspruchsgeist sind dokumentiert und tauchen in persönlichen Erinnerungen wieder auf. Wilhelm Wirtinger selbst schildert detailliert seine frühzeitige Beschäftigung mit der mathematischen Literatur, die weit über das Ungewohnte hinausging. Die Stiftsbibliothek in Melk stand ihm - völlig ordnungswidrig - offen, überdies konnte er von seinem Taschengeld auch Büchereinkäufe tätigen. Dies zeugt für Verständnis im Elternhaus und im Konvikt. In den letzten Schuljahren gibt es keinerlei schulische Schwierigkeiten, die Jahreszeugnisse werden immer besser, und das Reifezeugnis enthält die besten Benotungen der ganzen Gymnasialzeit. - Aus Studien im Archiv der Österreichischen Akademie der Wissenschaften ergibt sich eine weitere Besonderheit; über sie scheint Wirtinger sich nie geäußert zu haben: als "stud. gymn." der siebenten Klasse reicht er bei der kaiserlichen Akademie eine Arbeit zur Veröffentlichung ein (9). Der Wortlaut des ablehnenden Gutachtens von Emil Weyr vom 8. Juni 1883 ist erhalten. Über den Verbleib des Manuskripts, das dem jungen Autor ordnungsgemäß retourniert wurde, ist bisher nichts bekannt.

Die Zäsur der Jahre 1909 bis 1919 oder das "unfruchtbare Jahrzehnt" im Œuvre Wilhelm Wirtingers wird von Radon in seinem Nachruf erwähnt und begründet. Hornich übergeht in seinen beiden Gedenkartikeln diese Lücke in den Publikationen seines verehrten Lehrers; auch Carathéodory und Furtwängler schweigen zu diesem Zeitraum. Wirtinger selbst geht in seiner Autobiographie aus dem Jahre 1939 in der ihm eigenen aufrichtigen Art kurz auf diesen bemerkenswerten Abschnitt seines Lebens ein; er gibt mehrere Ursachen an, die nun, beinahe acht Jahrzehnte nach ihrem ersten Auftreten und fast fünfzig Jahre nach ihrem Bekenntnis, genauer untersucht und erläutert werden. Es sind drei Bereiche zu unterscheiden: Persönliche Schwierigkeiten mit den für die E n - z y k l o p ä d i e übernommenen Verpflichtungen; sie lassen sich einerseits durch Wirtingers spezifische Begabung zur mathematischen Forschung, andererseits durch seine geringe Neigung zur Kompilation erklären. Zwei stark ausgeprägte Charakterzüge mögen dabei eine Rolle gespielt haben, Starrsinn und Mut zum Aufgeben. Eine tiefer gehende Untersuchung, insbesondere aufgrund von Korrespondenzen mit F. Klein, R. Fricke, A. Krazer und anderen Mathematikern des

Wilhelminischen Deutschen Reiches, steht noch aus. Eine zweite Ursache für die Stagnation der schöpferischen Tätigkeit sind die harten Schicksalschläge, die das Ehepaar Wirtinger 1912 und 1915 zu erleiden hatte. Dazu liefern österreichische Archive und ein Grab auf dem Gersthofer Friedhof in Wien ausreichende Unterlagen. Schließlich wirkte sich die materielle Not der Jahre des Ersten Weltkrieges, mehr aber noch die politische Situation jener Zeit negativ aus. Nicht nur Wilhelm Wirtinger litt unter dem Eindruck großer, folgenschwerer Umwälzungen an Depressionen. - Es könnte noch eine weitere Ursache gegeben haben; die Stichhaltigkeit dieser Vermutung wäre zu untersuchen. Auf der Naturforscherversammlung in Salzburg, im September 1909, hatte Wirtinger einen Vortrag zum Thema "Die konforme Abbildung durch Abelsche Integrale" gehalten. Noch 30 Jahre später hält er es trotz aller Bescheidenheit und Großzügigkeit für erwähnenswert, daß dieser Vortrag nie veröffentlicht wurde. Es scheint nicht durch seine Schuld so gekommen zu sein. Wer weiß es? Wie Wirtinger schließlich doch aus seiner geistigen Notlage herausgefunden hat, darüber gibt er selbst - wieder in der Autobiographie - Andeutungen. Dort heißt es: "Im Jahre 1919 schrieb ich über Aufforderung des Verlages der 'Naturwissenschaften' als Beitrag zu dem Heft, welches dem siebzigsten Geburtstag von Klein gewidmet war, den Artikel 'Klein und die Mathematik der letzten fünfzig Jahre' (10). Die damaligen Zustände wirkten natürlich auf Stimmung und Darstellung stark ein und es bedurfte einer solchen Aufgabe, um den Blick und die Hoffnung auf Besserung nicht zu verlieren." Etwa um dieselbe Zeit hatte Wilhelm Wirtinger bei einem seiner jährlichen Besuche in Seitenstetten bei Gregor dem Großen ein Wort gelesen, von dem er sehr beeindruckt wurde, weil es ganz auf seine Situation paßte. Es bleibt offen, ob er durch dieses Wort zum Nachdenken angeregt wurde, oder ob er nur seine mühsam errungene eigene Haltung zur veränderten Lage bestätigt sah.

Anmerkungen

- (1) Hornich, Hans, (1906 - 1979), In memoriam Wilhelm Wirtinger, in: Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien, 1. Jg., Nr. 2, Dezember 1947, 5 f
Hornich, Hans, Wilhelm Wirtinger, in: Monatshefte für Mathematik 52, 1948, 1 - 12

Radon, Johann (1887 - 1956), Nachruf auf Wilhelm Wirtinger, in: Almanach 95, 1945, Wien 1947 (Österreichische Akademie der Wissenschaften), 336 - 346

Furtwängler, Philipp, Wilhelm Wirtinger zum 70. Geburtstag, in: Forschungen und Fortschritte 11, 1935, 279 f

Anonym, Adresse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften an Wilhelm Wirtinger, Wien, zum 50jährigen Doktorjubiläum am 23. Dezember 1937, in: Forschungen und Fortschritte 14, 1938, 36

Carathéodory, Constantin, in: Jahrbuch 1944 - 48 der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 256 - 258

Radon, Johann, Wilhelm Wirtinger, der größte Mathematiker Österreichs, in: Österreichische Naturforscher, Ärzte und Techniker, hsgg. im Auftrag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften in Wien von Fritz Knoll, Wien 1957, 24 - 26

((Hlawka, Edmund)) Ausführlicher Begleittext zu Porträt VI/63, in: Die Wiener Universität im Bild 1365 - 1965, Wien 1965 (Notring)

- (2) Österreichisches Forschungszentrum Seibersdorf Ges. m. b. H.
 (3) In: Beitrag zu Riemanns Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme, Math. Ann. 48, 1897, 365 - 389
 (4) In: Österreichische Naturforscher, Ärzte und Techniker, Seite 26
 (5) Riemer: Berufsbezeichnung für Riemenmacher
 (6) Marchfeld: Ebene zwischen dem Weinviertler Hügelland, der Donau und der March
 Weinviertel: Landesteil Niederösterreichs nördlich der Donau und östlich des Manhartsberges
 (7) Heute: Psychiatrisches Krankenhaus der Stadt Wien
 (8) Zwei Jahre (zwei Klassen) in Seitenstetten, NÖ., im Gymnasium und im Konvikt (Internat) des Benediktinerordens; vier Jahre (drei Klassen) in Melk, NÖ., wo Wilhelm Wirtinger zuerst im Konvikt, dann in Privatfamilien untergebracht war; drei Jahre (drei Klassen) im Obergymnasium des Landes Niederösterreich in St. Pölten
 (9) "Über die drei algebraischen Flächen umschriebene Regelfläche"
 (10) Die Naturwissenschaften 7, 1919, 287 f

A. Dick

Dr. Irving H. Anellis
Philosophia Mathematica
 110 McDonald Drive, #8-B
 Ames, IA 50010-3470 U.S.A.

Beginning in 1896, after working on his Essay on the Foundations of Geometry, Russell for two years pursued an interest in the physics of solid mechanics, with special attention to the geometric foundations of Newtonian dynamics and the motions of rigid bodies. Russell's goal was to establish in physics the same kind of certainty that had traditionally been associated with geometry. Russell visited the Cavendish Laboratory and studied there the work of James Clerk Maxwell on gas kinematics and electrodynamics. Recollecting these studies and the search for epistemological certainty in physics, Russell wrote to P. E. B. Jourdain that "what is philosophically interesting in the principles of dynamics belongs to problems of logic and arithmetic." [1] This is not to say, however, that Russell had originally shared Hilbert's goal of axiomatizing physics; rather, Russell was interested in the philosophical foundations of physics.

Russell recorded his thoughts on philosophy of mathematics and philosophy of physics in a notebook entitled Various Notes in Mathematical Philosophy. [2] In these writings, Russell attempted to discover how continuous motions of rigid bodies could be accounted for in discontinuous space. Russell was particularly troubled by the phenomenon of action-at-a-distance. As Russell noted in the "Note on matter and motion" [3], the concept of action-at-a-distance leads to an antinomy if one assumes that space is absolute. If space is absolute, then it is a continuum and matter must have extension, and can transfer its motion to other matter only through direct contact. Hence, there can be no action-at-a-distance. If, however, space is not absolute, but relative, then a related antinomy occurs.

For Russell, space is relational; it is composed of discrete geometric points or Boscovician puncta, and is therefore discontinuous. Geometry describes spatial relations or, as Russell said [4], "compares different parts of space." Geometry is impossible without motion. [5] But on this relational view of space, no spatial relation is measurable, since there are no absolute parameters of measurement. Moreover, if space is composed of discrete points and is hence discontinuous, we can have action-at-a-distance, but motion must be discontinuous, there can be no continuous motion. Thus, the new antinomy for which Russell must account is the phenomenon of continuous motion in discontinuous space.

An even deeper problem for Russell was the need to provide a computational tool for description of motion. Neither Newton nor Leibniz were ever completely satisfied with the intellectual foundations which they provided for the infinitesimal calculus. Yet the calculus showed itself, despite its lack of rigorous foundation, to be an admirable tool for computing velocities and accelerations of matter in motion. Newton, for example, gave three separate accounts of the calculus: his "infinite littleness" is the same as Leibniz's infinitesimal; he also provided the explanation in terms of fluxions, an in terms of "prime and ultimate ratios" or differentials. This philosophical insecurity of the concept of the differential was explored by George Berkeley. [6] Behind Berkeley's express concern about infinitesimals as the "ghosts of departed quantities" were the serious problems of treating the differential increment Δx now as zero, now as nonzero, and the question of the existence of limits and one-sided limits, for example in the case of $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$.

These same concerns arose for Russell. If we treat infinitesimals as very small, but not zero, that is, as "unassignably small," then, said Russell [7], there can be no infinitesimals, since "we cannot assign a quantity smaller than any assignable quantity." But infinitesimals must exist, and must be understood as very small numbers, close to zero, but not zero, if differentiation is to be possible, and if differentiation is to give a sum and the ratio of these sums is to give a determinate differential coefficient. For, "unless we can assign [such an unassignably small quantity], we must remain ignorant of it." [7] Thus, for Russell, the "difficulty in the calculus" is that "while professedly dealing with continua, it is applicable only by supposing them discrete," so that "whenever the calculus is used, we have the inevitable contradiction of an indivisible element in a manifold which, ex hypothesi, is divisible ad infinitum." [8]

What, precisely, is this contradiction? Why must we suppose that continua are discrete? Russell writes [7] that

in differentiation, we have to compare two connected continuous variables, whose increments, when small and finite, have a ratio which is very nearly some finite number, and differs less and less from this number as the increments decrease. ... The increments and their ratio... must be expressed as numbers, not as continuous quantities; for the problem is the reduction of continua to number.... Hence the changes in the increments, so far as they can be dealt with, are discrete; we suppose the increments to change continuously, it is true, but we can only arrest and observe the change when it arrives at some number.

Russell concludes that "the calculus can only have logical validity if it

is equivalent to the method of indivisibles, i.e. if it abandons the notion of continua." [7] Thus, "infinitesimal calculus [is] is really only possible where we have indivisibles and finite differences." [4] Thus, the problem arises of how to discuss continuous motion if the mathematical apparatus for doing so depends upon discontinuous numbers, numbers which are discrete and indivisible, and if the motion must occur in relational, hence discontinuous space.

Speaking of continua and the Δ -method of finding the derivative of a function, Russell explains [9] that "either our increments, in the last stage, in which the limit is supposed to be reached, are still finite, or they are absolute zero. In the first case, we have still the method of indivisibles; in the second, the limit becomes unmeaning.... The ratio of two absolute zeros [is] such a limit [as] will give no result whatever." Russell is saying that the meaningfulness of limits of (certain) functions is completely dependent upon the existence of an infinitely divisible number continuum. The problem arises for Russell because, for him, all numbers are discrete and indivisible. He recognizes (during this period of his intellectual life) the existence only of the strictly positive integers. There is, he says, no number continuum, and he recognizes neither infinitely large nor infinitely small numbers. Not only are there for Russell neither infinite nor infinitesimal numbers; but there are neither real numbers nor infinitesimals to account for those very small numbers close to zero which allows us to obtain a numerical ratio $\Delta y/\Delta x$ for a derivative dy/dx . Russell says [9] of the number continuum that "there are parts, i.e. differentiations." He goes on to say, however, that "this leads to the notion of the smallest possible differentiation, and this to the mathematical zero, i.e. to a zero quantum, which yet is a quantum and a quantum of precisely the same kind as the other quanta of the continuum," namely the strictly positive integers. Thus, the problem is that "in the differential calculus, dx is of the same kind as x , and is a quantum, but yet $=0$. This," he says, "is nonsense," explaining that "the only way to give sense to dx is to suppose it small but finite, and thus abandon continuity."

Most of the problems with the calculus which Russell pointed out were rooted in rejection of the real continuum, then. More exactly, Russell rejected both Cantorian set theory, with its construction of the real continuum, and Cantorian transfinitism, as a result of which rejection the Cauchy-Weierstrass theory of limits must be faulty insofar as it is founded on the real numbers. [10] Russell alluded to some of the problems which he

saw with the calculus in his review of Arthur Hannequin's Essai Critique sur l'Hypothèse des Atomes dans la Science Contemporaine [8] and Louis Couturat's De l'Infini Mathématique [11], as these related to his rejection of Cantorian set theory. In the paper "On some difficulties of continuous quantity" [7], in the Various Notes [2], and in "On the relations of number and quantity" [12], Russell undertook to present a unified and concentrated effort to make explicit and explain the problems which he perceived in both the Leibnizian and Newtonian infinitesimal analysis, and in the number-theoretic foundations of what he was later to learn constituted the Cauchy-Weierstrass real analysis (Russell did not learn of the existence of Weierstrass' work until late in 1896). In none of these works, unfortunately, did Russell undertake to present a unified or systematic treatment of his own number theory. [13]

Notes and References

- [1] I. Grattan-Guinness, Dear Russell - Dear Jourdain (London, Duckworth, and New York, Columbia University Press, 1977), Letter to Jourdain: 15 April, 1910; p. 132.
- [2] B. Russell, Various Notes in Mathematical Philosophy, unpublished MS, 1896-1898.
- [3] B. Russell, "Note on matter and motion," note VI of [2]; published version in B. Russell, My Philosophical Development (New York, Simon and Schuster, 1959), 48-49.
- [4] B. Russell, "Some definitions of matter," note III of [2]; published in part in Russell, My Philosophical Development, 45-47.
- [5] B. Russell, "Note on transition from geometry to dynamics," note I of [2]; incomplete published version in Russell, My Philosophical Development, 44-45 (quotation, p. 45).
- [6] G. Berkeley, "The Analyst" (1734), in D. E. Smith (ed.), A Source Book in Mathematics (New York, Dover Publ., 1959), 627-634, and D. J. Struik (ed.) A Source Book in Mathematics, 1200-1800 (Princeton, Princeton University Press, 1986), 333-338. Quotation from p. 633 and p. 338 respectively.
- [7] B. Russell, "On some difficulties of continuous quantity," unpublished MS, 1896.
- [8] B. Russell, "Review of Arthur Hannequin, Essai Critique sur l'Hypothèse des Atomes dans la Science Contemporaine," Mind 5 (1896), 410-417. Quotations from pp. 411, 413.
- [9] B. Russell, "Note on continua," note V of [2].
- [10] See I. H. Anellis, "Russell's earliest reactions to Cantorian set theory, 1896-1900," Contemporary Mathematics 31 (1984), 1-11, and I. H. Anellis, "Russell's earliest interpretation of Cantorian set theory, 1896-1900," Philosophia Mathematica (forthcoming).
- [11] B. Russell, "Review of Louis Couturat, De l'Infini Mathématique,"

Mind 6 (1897), 112-119.

[12] B. Russell, "On the relations of number and quantity," Mind 6 (1897), 326-341.

[13] From the scattered discussions of number theory in Russell's papers, published and unpublished, of this period I. H. Anellis attempts to present a coherent, unified and systematic exposition and history of Russell's views in "Bertrand Russell's theory of numbers, 1896-1898," Epistemologia (forthcoming).

Acknowledgements

Thanks to Nick Griffin for assistance in locating an elusive quotation from one of Russell's unpublished papers. Thanks to Nick Griffin and other personnel of the Bertrand Russell Editorial Project and the Bertrand Russell Archives at McMaster University (Hamilton, Ontario, Canada) for assistance over the years.

DR. IRVING H. ANELLIS
ASSISTANT EDITOR
PHILOSOPHIA MATHEMATICA

Bedauerlicherweise wurden beim Teilnehmerverzeichnis zwei Seiten vertauscht.

NOVEMBER 86

9 - 15
EUROPEAN MATHEMATICAL NEWSLETTER
April 1986 and later

MATHEMATIK-ANREGEND ODER ANGERECGT? UBER DAS
WECHSELSPIEL ZWISCHEN "REINER" UND "ANGEWANDTER"
MATHEMATIK IM LAUFE DER GESCHICHTE
Neuhofen an der Ybbs, Austria
Ch. Binder, Inst. für techn. Mathematik, TU,
Wiedner Hauptstr. 6-10, A-1040 Wien

FRIC Technische
Fachbuchhandlung

1040 Wien,
Wiedner Hauptstraße 13
Tel. (0222) 65 64 52

Bücher Fachzeitschriften

aus allen
Gebieten der Technik

Mathematik

Physik

Chemie

Bauwesen

Maschinenbau

Elektrotechnik

Elektronik

Datenverarbeitung

Programmierung

Hardware – Software

Fachwörterbücher

Im Zentrum der TU

T E I L N E H M E R

GERICKE, HELMUTH		
Prof.Dr., Sonnenbergstr. 31, D-7800 Freiburg i.Br., BRD		
* GRIFFITHS, PETER L.	99	
41 Gloucester Place, London W1H 3PD, GB		
* HILDEBRANDT, RUDOLF	63	
Prof., Turmbergstr 20, D-7516 Karlsbad-Spielberg, BRD		
HLAWKA, EDMUND		
Prof.Dr., Institut für Analysis, Technische Mathematik und Versicherungsmathematik der Technischen Universität Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10, A-1040 Wien, Österreich		
* KAISER, HANS	106	
Prof.Dr., Institut für Algebra und Diskrete Mathematik der Technischen Universität Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10, A-1040 Wien, Österreich		
* KAUNZNER, WOLFGANG		
Prof.Dr., Zollerstr.9, D-8400 Regensburg, BRD		
* KOETSIER, TEUNIS	58	
Subfaculteit Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit, Postbus 7161, NL-1007 MC Amsterdam, Niederlande		
* LAUGWITZ, DETLEF	45	
Prof.Dr., Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule Darmstadt, Schloßgartenstr. 7, D-6100 Darmstadt, BRD		
MALLE, GÜNTHER		
Doz.Dr., Institut für Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften, Universitätsstr. 65-67, A-9022 Klagenfurt, Österreich		
* MULDER, HENRY MARTYN	87	
Vakgroep A.V., fac. W&N, Vrije Universiteit, Postbus 7161, NL-1007 MC Amsterdam, Niederlande		
* OTTE, MICHAEL		
Prof.Dr., Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Postfach 8640, D-4800 Bielefeld, BRD		
* PURKERT, WALTER		
Doz.Dr., Karl Sudhoff-Institut, Karl Marx-Universität, talstr. 33/II, DDR-7022 Leipzig, DDR		
* ADAM, ADOLF	103	
Prof.Dr., Rechenmeister, Institut für Systemwissenschaften, Johannes-Kepler-Universität, A-4040 Linz, Österreich		
ANELLIS, IRVING H.	124	
Dr., Assistant Editor Philosophia Mathematica, 110 McDonald Drive, #8-B, Ames, IA 50010-3470 USA		
* BAPTIST, PETER	37	
Dr., Mathematisches Institut der Universität Bayreuth, Postfach 3008, D-8580 Bayreuth, BRD		
* BINDER, CHRISTA	31	
Dr., Institut für Analysis, Technische Mathematik und Versicherungsmathematik der Technischen Universität Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10, A-1040 Wien, Österreich		
BOCKSTAELE, PAUL		
Prof.Dr., Graetboslaan 9, B-3031 Oud-Heverlee, Belgien		
* BRUINS, EVERT M.	92	
Prof.Dr., Joh. Verhulststraat 185, NL-1075 GZ Amsterdam, Niederlande		
* CANAK, MILOS	26,82	
Prof.Dr., 11000 Beograd, Brzakova 4, Jugoslawien		
* DICK, AUGUSTE	119	
Hofrat, Dr., Marxerg.18, A-1030 Wien, Österreich		
* DJAFARI NAINI, ALIREZA	68	
Dr., Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Beheshti University, Eveen. Tehran, Iran		
* EDDY, ROLAND H.	21	
Prof., Memorial University of Newfoundland, Department of Mathematics and Statistics, St. John's, Newfoundland, Canada A1C 5S7		
* FELLMANN, EMIL A.	13	
Dr., Arnold Böcklinstr.37, CH-4051 Basel, Schweiz		
FOLKERTS, MENS0		
Prof.Dr., Meggendorferstr. 66, D-8000 München 50, BRD		
* FREI, GÜNTHER		
Prof.Dr., Tränkebachstr. 38, CH-8712 Stäfa, Schweiz		

- * RICHENHAGEN, G.
Dr., Universität Gesamthochschule Paderborn, FB 17
Mathematik/Informatik, Warburgerstr. 100, D-4790
Paderborn, BRD
- SCHMITT, PETER
Dr., Adolf Gstöttnerg. 6/37, A-1200 Wien, Österreich
- * SCHNEIDER, IVO 73
Prof.Dr., Institut für Geschichte der Naturwissen-
schaften der Universität München, Deutsches Museum,
D-8000 München 26, BRD
- SCHÖNBECK, JÜRGEN
Dr., Pädagogische Hochschule, Fachbereich III, Mathe-
matik, Im Neuenheimer Feld 561, D-6900 Heidelberg,
BRD
- * SCHOLZ, ERHARD 77
Dr., Bergische Universität, Gesamthochschule Wupper-
tal, Fachbereich 7, Mathematik, Gaußstr. 20, D-5600
Wuppertal 1, BRD
- * SCHULZE, WERNER 1
Dr., Hans Kayser-Institut für Harmonikale Grundlagen-
forschung, Hochschule für Musik und Darstellende
Kunst, Seilerstätte 15, A-1010 Wien, Österreich
- * SESIANO, JACQUES
Dr., Département de Mathématiques, Ecole Polytechni-
que Fédérale de Lausanne, CH-1015 Lausanne, Schweiz
- * VOLKERT, KLAUS 52
Nordstr. 12, D.6670 St. Ingbert, BRD
- WUSSING, HANS
Prof.Dr., Karl Sudhoff-Institut, Karl Marx-Universi-
tät, Talstr. 33/II, DDR-7022 Leipzig, DDR
- ZIMMERMANN, BENNO
Dr., Birkhäuser-Verlag, Basel, Efingerstr. 9, CH-4057
Basel, Schweiz

ÜBER CHARAKTERISTIKA IN DER MITTELALTERLICHEN ABENDLÄNDISCHEN MATHEMATIK (verkürzte Fassung)

Wolfgang Kaunzner

Herrn Prof. Dr. Edmund Hlawka, Wien, in Verehrung zum 70. Geburtstag gewidmet

Die alltäglichen Bedürfnisse der Menschen erforderten auch nach der Axiomatisierung der Geometrie andere Voraussetzungen, als man sie von dort her hätte entnehmen können. Die der Geometrie zugrunde liegende Denkweise wurde zum Vorbild für eine Reihe von Wissenschaften, so daß die deduktive Schlußweise durch zwei Jahrtausende hindurch das Feld beherrschte. Die Geometrie wurde so zu der Disziplin, an deren Fundierung sich andere Wissensgebiete "more geometrico" orientierten.

In der Arithmetik lagen die Verhältnisse anders. Bis ins 15. Jh. hinein fehlte ein brauchbares Handwerkszeug, mit welchem man die arithmetischen Operationen leicht und übersichtlich hätte durchführen können. Erst seit damals sind die indisch-arabischen Ziffern mit dem dezimalen Stellenwertsystem und verständliche Operationszeichen allmählich Allgemeingut der Gebildeten, die hiermit umzugehen und weiterzuarbeiten vermochten. An Grundlagen waren aber nur die natürlichen und rationalen Zahlen mit der Null allgemein anerkannt, nicht die negativen und irrational-algebraischen, unbekannt die irrational-transzendenten oder gar die einfach-komplexen. Erst als der reelle bzw. der algebraisch abgeschlossene Körper der einfach-komplexen Zahlen vorlagen, konnte in Arithmetik und Algebra äquivalent ein logisch fundiertes System aufgebaut werden, ebenso einwandfrei begründet wie die Euklidische Geometrie. Der Weg, den die Mathematik in Arithmetik und Algebra einschlug, lief also völlig anders als der in der Geometrie. Aus einzelnen Erkenntnissen heraus ging man im Zahlenbereich induktiv vor, ohne den Begriff Induktion gekannt, formuliert oder als Prinzip hervorgehoben zu haben. Die Berührstellen zwischen beiden wurden die Beispielgruppen, wo Geometrie algebraisch behandelt bzw. algebraische Sätze geometrisch verifiziert wurden.

Mit der Christianisierung der vordem heidnischen europäischen Stämme wurde ihnen auch vieles aus den Errungenschaften der römischen Zivilisation zuteil. Die Unterteilung der römischen Maße etwa wird für die Verbreitung der Grundrechenarten eine erhebliche Rolle gespielt haben, so daß einige Begriffe aus Arithmetik und Geometrie Allgemeingut wurden.

Zur Zeit Gerberts (940? - 1003) basierte die westliche Mathematik auf dem schmalen Fundus, der von den Römern stammte. Er machte die neuen indisch-arabischen Ziffern als erster im Abendland bekannt, er bemühte sich um eine methodische Darstellung der Geometrie.

Obwohl nach einem Wort der Bibel Gott alles nach Maß, Zahl und Gewicht geordnet hat, trat die geistesbildende Kraft der Mathematik erst später auf als die der Sprache. Generell ist jedoch zu sehen, wie Zählen, Rechnen und Sprache ineinander übergriffen, wie Arithmetik und Musik, Sprache und Geometrie, Geometrie und Kunst, Malerei, Perspektive, Städtebau, Städtebau und wirtschaftliche Entwicklung, wirtschaftliche Entwicklung und Bildungswesen, Bildungswesen und Mathematik im Laufe der Zeit einander immer wieder beeinflussen, bedingten und ergänzten, ohne daß man von vorneherein dem ganzen

INHALTSVERZEICHNIS

Table with 2 columns: Author/Topic and Page. Includes entries for W. Kaunzner, G. Faei, W. Pankratz, M. Otte, and K. Reich.

PROGRAMMÄNDERUNG

Die Vorträge von A. Adam und D. Langwitz mußten kurzfristig halber entfallen.

WEIßER ERNST EINHÄUSER

NEUENSCHWANDER, ERWIN Doz. Dr., Mathematisches Institut der Universität Zürich, Rämistr. 74, CH-8001 Zürich, Schweiz

REICH, KARIN Prof. Dr., Ehrenhalde 33, D-7000 Stuttgart 1, BRD

SPALT, DETLEV Prof. Dr., Fachbereich Mathematik, Fachdidaktik, Technische Hochschule Darmstadt, Schlossgartenstr. 7, D-6100 Darmstadt, BRD

einen immanenten Zusammenhang hätte beimessen können.

Eine bedeutsame Entscheidung liegt darin, daß ab dem 15. Jh., verstärkt im 16. Jh., in den einzelnen europäischen Landessprachen ediert wurde. Gerade den Autoren mathematischer Werke gebührt hier hohe Anerkennung, weil sie sich sowohl um ihre Muttersprache verdient, als auch den ungewohnten fachlichen Lehrstoff einem größeren Kreis als bisher zugänglich machten. An der Wiener Universität wurde 1502 das Collegium poetarum et mathematicorum gegründet. Hinzu kommt, daß diese Männer oft eine der wichtigen Brücken bei der Übernahme des antiken Wissens an den Westen darstellten.

In der mathematischen Literatur sind deutsch verfaßte Texte schon aus dem beginnenden 15. Jh. vorhanden, die freilich größtenteils vorerst als Übersetzungen aus dem Lateinischen erkennbar sind. Diese frühen Zeugnisse sind Zeugen dafür, daß man damals, vor der hiesigen Erfindung des Buchdrucks, Arithmetik und Geometrie schon zum bestehenden Wissensgut zählen darf, wenn auch nur einem verschwindend kleinen Teil der Menschen verständlich. - Aber, wieviele Menschen beschäftigten sich etwa heute mit Geometrie!

Das Abakusrechnen entbehrte einer schulmäßigen Methode, gewann spätestens im 10. Jh. in den der arabischen Herrschaft nicht unterworfenen Ländern Europas - neben dem Fingerrechnen - vorerst einzig Geltung, breitete sich aus von Kloster zu Kloster als Teil der Gelehrtenwissenschaft, und wurde um 1200 überall geübt. Um diese Zeit wurde das Rechnen mit den indisch-arabischen Zahlzeichen durch den Einfluß Leonardos von Pisa (1180 ? - 1250 ?) wesentlich gefördert. Aber es dauerte noch drei Jahrhunderte, bis sein Werk voll wirksam wurde; obwohl Algorithmus eine Verformung des Namens Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780 ? - 850 ?) bedeutet, wurde bei Vergessen der Person das Wort schließlich zur Bezeichnung des Rechnens mit indisch-arabischen Ziffern. Im 15./16. Jh. tritt das Kolumnen- und Abakusrechnen des Boetius (480 ? - 524) und Gerbert in abgewandelter Form auf als Linienrechnen; man konnte hierbei wieder von einem Abakus sprechen. Leonardo hatte sein Werk Liber abacci genannt; folglich ist nicht verwunderlich, daß man eine Anleitung zum Linienrechnen als Algorithmus linealis bezeichnete. So bestand im frühen 16. Jh. - die gedruckten Bücher bezeugen dies - Linien- und Ziffernrechnen gleicherweise nebeneinander unter dem gemeinsam kennzeichnenden Namen Algorithmus. Ein Unterschied tritt deutlich zutage: beim Linienrechnen wirken die Regeln schwerfällig, während der Rechenvorgang meist einfach abläuft. Die Faustregeln der Arithmetik- und Algebraispiele sind meist knapp, aber die Aufgabe läuft kompliziert ab.

Im Mittelalter liegt der Übergang von einer anschaulich orientierten Arithmetik hin zu einer solchen, die auf allgemeine Rechenregeln ausgerichtet ist, dann zur Entwicklung der symbolischen Formelsprache. Eine der wesentlichen Denkstrukturen ist hierbei die Proportion. Nikolaus von Cues (1401 - 1464) knüpfte mit ausdrücklichem Bezug auf die pythagoreische Zahlenlehre das wissenschaftliche Forschen an das Auffinden von Proportionen: "Die Forschung versucht, das Ungewisse in ein Verhältnis zum Gewissen zu setzen, wobei der Erkenntniswert wesentlich vom Sicherheitsgrad des Ausgangsbereichs bestimmt wird". Der Anschauung zugängliche Fakten, etwa Stückgut einer Ware zu zugehörigem Preis, wurden so vom einfachen Rechenmeister in starre Faustregeln gebracht; eine Unmenge von Beispielen in den Rechenbüchern bestätigt dies; der theoretisch gebildete Mathematiker abstrahierte und versuchte zu induktiven Ansätzen zu gelangen, die sich dann rückwirkend wieder

in einer großen Anzahl von Formeln für den Rechenmeister niederschlugen. Der Naturphilosoph mit mathematischer Bildung - etwa Cusanus - holte sich die Definitionen, die er für nötig und sinnvoll erachtete und baute mit ihnen bereits großangelegte Gedankengebäude.

Der Streit um die Berechtigung der Null schien eher entschieden zu sein als der um die Eins. Die Null erhielt im Stellenwertsystem ihren Platz als "unbedeutliche Figur", aber die Einheit war noch nicht Zahl: "Unitas est principium numeri et non est numerus". Nachdem die neuen Zahlen im Stellenwert von rechts nach links wuchsen, wie es der arabischen Schrift zukommt, wurde dies auch von einzelnen Autoren angesprochen, so von Luca Pacioli (1445 bis 1514): "a modo deli arabi".

Bei großen Zahlen ließ sich die Kennzeichnung durch Über- oder Untersetzen von Punkten oder von Buchstaben a, b, c erleichtern. Die Namensgebung für große Stellenwerte bereitete Schwierigkeiten, ob lateinisch oder anderssprachig, etwa "tausenttausenttausent" für eine Milliarde, und es dauerte noch lange, bis "Million" sich durchsetzte, wie vielleicht schon um 1250 in Italien gebräuchlich und von Piero Borghi (15. Jh.) empfohlen. Die Folge davon war, daß in der 1. Hälfte des 16. Jh. der Umgang mit großen Zahlen zu einem richtigen Sprachgewirr führte. Das was wir Ziffern nennen hieß damals: figurae, characteres, elementa, notae, literae; unter "Ziffer" verstand man ursprünglich nur die Null.

Auch in der Arithmetik waren erst grobe Vorarbeiten zu verrichten. Die Muslime hatten in den eigentlichen mathematischen Texten bis zum 13. Jh. hin ihre Zahlen nicht verziffert, sondern in Worten ausgeschrieben. Die westeuropäischen Algorithmiker hatten zudem erst den Kampf mit den Abacisten bestehen müssen, ehe sie ihn ab dem 13. Jh. allmählich gewannen. Hiermit war nur die Methode entschieden, nämlich ob Schreibrtafel, Pergament, Papier einerseits, oder ob Rechenbrett, Rechentisch andererseits. Die Entscheidung um die Form des Dargestellten war noch offen, weil die römischen Ziffern das Feld beherrschten, ehe sie im 15. Jh. schließlich von den indisch-arabischen Zahlzeichen, zumindest in Fachkreisen, verdrängt wurden. In der abendländischen Arithmetik läßt sich also ein ähnlich langsam fortschreitender Entwicklungsprozeß feststellen wie in der Arithmetik der Griechen; nur daß hier in Westeuropa eine gewisse Kontinuität gesichert schien, vielleicht mit begünstigt durch die Klosterregeln vor allem der Benediktiner, die für Weitergabe und Vermehrung der vorhandenen Texte Sorge trugen, wenn auch manchmal nur durch bloßes unverstandenes Abschreiben. Dies konnte freilich nicht den durch Palimpsestierung verlorengegangenen Teil arithmetischer und algebraischer Wissensgüter ersetzen.

Die einzelnen Disziplinen der Mathematik wurden bereits in praktische und theoretische unterteilt, etwa die Arithmetik, die aus der mittelalterlichen theoretischen Betrachtung heraus verstärkt in die praktische Anwendungsmöglichkeit einbezogen wurde. Hier lagen die Verhältnisse komplizierter als in der Geometrie. In Arithmetik gab es keine Axiomatik im heutigen Sinn, denn man hatte der Einheit - wohl in Anlehnung an die Geometrie - zu lange das Recht verweigert, auch Zahl zu sein; die Einheit war Ursprung der Zahlen; entsprechend dem Punkt, der keine Ausdehnung besitzt, wohl aber die Voraussetzung für die Linie bildet. Trotzdem findet man die Eins unter den absoluten Zahlen - Gegensatz ist Zahlenverhältnisse -, eine Ungereimtheit, an der sich die pythagoreischen Mathematiker seit der Antike auch nicht gestoßen haben. Folglich

blühten die verschiedensten Deutungsmöglichkeiten, nachvollziehbar im abendländischen Mittelalter. Bedeutung erlangte vorerst nur die Arithmetik mit ihrer Anwendungsmöglichkeit im Kaufmännischen und auf einfache Fragen des täglichen Lebens, nicht hingegen die Lehre von den algebraischen Gleichungen, ob Gleichungssysteme oder Gleichungen höheren Grades; hier handelte es sich anfangs größtenteils um Fragestellungen, die in der Tradition der Muslime standen oder eher mit Rätselraten vergleichbar wären.

Auch in der Mathematik scheint man, um ihre Schwierigkeiten zu rechtfertigen, auf ihre Geschichte Bezug genommen zu haben. So sagt Boetius mit Hinweis auf Pythagoras (580 ? bis 500 ?), daß in Philosophie keiner nach vorne kommt, der nicht den Weg des Quadriviums gegangen ist. Treu dieser Ansicht, werden die Lehrenden den Lernenden auch diese These durch das Mittelalter hindurch vermittelt haben. Adam Ries (1492 - 1559) berichtet, daß Plato (427 - 347 ?) gefragt wurde, wodurch der Mensch das Tier übertreffe: Er kann rechnen und versteht die Zahlen. So wurde die Arithmetik zur edelsten der Heptas, wobei schließlich der Nutzen der Mathematik im 16. Jh. auch für die allgemeine Bildung erkannt und hervorgehoben wurde, am deutlichsten wohl durch Philipp Melanchthon (1497 - 1565).

Die frühen westlichen Algorithmen - entstanden im Anschluß an das Lehrbuch al-Khwarizmi - sind rein theoretische Zusammenstellungen, denen kein Bezug zur Praxis unterlegt wurde. Die Aufgaben in den Darstellungen vor dem 15. Jh. muten uns oft wirklichkeitsfremd an, so wie sie aus dem Fundus der Überlieferung übernommen wurden. Erst im 15. Jh. findet man solche Fragestellungen, die auch dem hiesigen täglichen Leben entnommen sein könnten, so daß nicht mehr nur eine Art Übung oder Spielerei dahinter erblickt werden muß. In der Algebra steckte wahrscheinlich die Scheu vor dem Neuen, was vielleicht mit darin begründet lag, daß man ihr außer mit Bezug auf die Geometrie kaum wesentliche Berechtigung erteilen wollte.

Durch Jahrhunderte hindurch wurden die gleichen arithmetischen Algorithmen weitergegeben, wohl oft ohne jede persönliche Anteilnahme kopiert. Vom Inhalt her waren sie - etwa der "Algorithmus vulgaris" - durch die 250 Jahre bis zu den ersten gedruckten Rechenbüchern hin unverändert, in der Form hatte sich freilich vieles gewandelt: die römischen Zahlzeichen waren immer ansprechenderen indisch-arabischen gewichen, Pergament war vom Papier abgelöst, die Schrift selbst meist auch eleganter geworden - bis der Buchdruck für eine gewisse Vereinheitlichung sorgte. Der Grundstock blieben die sechs Grundrechenarten und einfache arithmetische und geometrische Reihen.

Mit der Entdeckung ferner Länder wurde auch in die Entwicklung der Mathematik außerhalb Italiens wesentlich eingegriffen, freilich vorwiegend in den praktischen Ablauf des Rechnens, kaum in die wissenschaftliche Ausbildung. Der Handel nahm zu, der Verkehr wuchs, der Buchdruck konnte relativ viele Menschen ansprechen. Außer einigen Wissenschaftlern waren es größtenteils kaufmännische Kreise, die in der 1. Hälfte des 16. Jh. die neue Rechenkunst heimisch werden ließen: eine Sammlung von Vorschriften, aufgebaut auf dem Verständnis in die Grundrechenarten, abgestimmt auf den zunftmäßigen Umgang.

Aber noch fehlte die Volksschule; vor allem Martin Luther (1483 bis 1546) erhob dies neben Melanchthon zu einer Forderung der

Reformation, so daß in der 2. Hälfte des 16. Jh. schon Schulordnungen auftraten.

Im Zeitalter des Buchdrucks wurde der Umgang mit den Grundrechenarten einem viel größeren Kreis zugänglich als bisher. Das Einmaleins bis fünf setzte man beim Interessierten wohl voraus. Beim Einmaleins bis zehn kamen allerlei Rechenvorteile vor, etwa bei Johannes Widmann (geb. um 1460) und in Christoff Rudolff's (1500 ? - 1545 ?) "Coß":

$$a \cdot b = (10 - a)(10 - b) + 10(a + b - 10) \quad \text{mit } 5 < a; b < 10$$

$$a \cdot b = 10a - a(10 - b)$$

Bei Multiplikation und Division entwickelten sich vielerlei Verfahren, die auch irgendwelche Vereinfachungen in sich bargen, bis sich schließlich später je eine einzige Methode durchsetzte. Als hilfreich bot sich bei einzelnen Rechnungen an, die bereits verbrauchten Ziffern durchzustreichen; dies war vielleicht eine Reminiszenz daran, daß bei den Indern und Muslimen auf den Rechentafeln die in Sand geschriebenen Ziffern gelöscht wurden, wenn man sie nicht mehr benötigte. Man zögerte auch nicht, die Augenscheinlichkeit eines Rechenganges oder eines Rechengesetzes mit passenden Namen zu belegen, etwa die "divisio in galeyn", ein Weg, der zu einem segelähnlichen Bild des Divisionsvorgangs führte; die Abneigungen oder Schwierigkeiten hob man freilich erst recht deutlich hervor: "Unum et unum duo, duo et duo quatuor, odiosa mihi cantio erat" oder "Dura cosa e la partita" (Die Division ist schwer) wurden zu Redensarten des 15. Jh. Die Terminologie selbst basierte auch noch nicht auf eindeutigen Grundlagen; so heißt ein irgendwie in einer Rechnung erhaltenes Ergebnis "productum".

Das Vertrauen in diese "producta" scheint nicht zu groß gewesen zu sein, denn man findet laufend Proben, und zwar wird empfohlen

- 1) Wiederholung
- 2) Gegenrechnung
- 3) Probe mit einer Hilfszahl.

Beim Quadratwurzelziehen gelangte man zu Dezimalbrüchen, auch wenn man hiervon nicht Gebrauch machte, weil man Nulldupeln an den Radikanden anhängte und anschließend die entsprechende Potenz von 10 in den Nenner des auftretenden Bruches setzte; am meisten wurde die Dezimalbruchmethode durch Georg Peurbach (1423 - 1461) und Johannes Regiomontanus (1436 - 1476) gefördert, der die prinzipielle Dezimalteilung in seinen goniometrischen Tafeln unterbrachte; als Radius seines Bezugskreises wählte er vorerst 6 000 000, später 10 000 000. Hier überall wurde freilich nicht ausdrücklich ausgesprochen, das Gesetz des Stellenwertes über die Einerstelle nach rechts hin auszudehnen, denn die Winkelfunktionen etwa wurden als Strecken gedeutet, sie erschienen somit ganzzahlig. Rudolff kehrte zum Anhängen von Nulldupeln an den Radikanden zurück; es ging ja in der Arithmetik auch noch darum, in der Bruchrechnung das Sexagesimalsystem zu überwinden, ehe schließlich Simon Stevin (1548 - 1620) seine dezimale Schreibweise einbrachte, etwa $3 \text{ } \circledast \text{ } 5 \text{ } \circledast \text{ } 2 \text{ } \circledast \text{ } \text{für } 3,52$.

Praktische Beispiele zur 3. Wurzel wurden durch Anhängen von Nulltripeln an den Radikanden ausgeführt.

Generell zeigt sich, daß beim Wurzelziehen Näherungsformeln entwickelt wurden, die in der praktischen Mathematik auch heute noch Platz finden.

Deutlich erkennt man den Unterschied zwischen arithmetischer und algebraischer Denk- und Beweismethode einerseits und der deduktiven geometrischen. In der Zahlenlehre besaß man noch keine Axiomatik, folglich wurde versucht, zu induzieren. Es dauerte ja auch sehr lange, bis von Blaise Pascal (1623 bis 1662) die unvollständige Induktion zum Prinzip erhoben wurde. Sie scheint eine lange Vorgeschichte zu haben, die sich in der Arithmetik im Schluß von n auf $n+1$ nachvollziehen läßt. Markante Beispiele hierfür waren die Schemen Widmanns, zwischen benachbarte Kubikzahlen zwei geometrische Mittel zu legen, oder der Versuch Peter Apians (1495 - 1552), ohne weitere Erklärung bis zur achten Wurzel einer natürlichen Zahl aufzusteigen, oder die binomische Entwicklung Michael Stifels (1487 ? - 1567), um eine beliebig hohe Wurzel zu finden. Justus Bürgi (1552 - 1632) wandte eine analoge Methode an, um in Kreistellungsgleichungen die zugehörigen Koeffizienten zu erhalten. In der arithmetischen und algebraischen Praxis der frühen Rechenbücher äußerte sich der Weg zum Schluß von n auf $n+1$ in einer großen Anzahl von Regeln, nach denen - für uns heute oft schwer zu verstehen, für damals wohl nicht minder leicht - vorzugehen ist nach einer einmal aufgezeigten Methode. Ein "Thu ihm also" wurde dem Rechengang nun vorangestellt, wie er etwa bei Widmann und anderen frühen Autoren gemäß der einzelnen Regelvorschrift durchzuführen ist. In bunter Folge erhielten nun die Beispiele, die teils auf arithmetischer, teils auf algebraischer Grundlage, teils auf der Proportion basieren, phantasievolle Namen: "regula bona", "regel vom hasen" usw.

Die Autoren fühlten selbst, daß mit dieser Unzahl von Regeln nicht gut zu arbeiten ist und lobten die goldene Regel, den Dreisatz - also die Proportion -, der gleichsam wie ein Hammer in einer Schmiede zur Herstellung viel schönerer Dinge herangezogen werden kann, als er es selbst ist.

In Italien fand nach Leonardo die Mathematik insofern dauernde Pflege, als italienische Städte ihre Mathematiker hatten und italienische Kaufleute sich ihrer bedienten; aber weiterentwickelt wurde Leonardos Werk vorerst fast nicht. In Italien wurde nämlich bis zum 15. Jh. die Algebra größtenteils auch noch so behandelt, daß sie bis auf wenige derzeit bekannte Ausnahmen mit der von Leonardo überkommenen größtenteils in Form und Inhalt übereinstimmte; in der 1. Hälfte des 16. Jh. änderte sich mit der kubischen Gleichung der Inhalt der Algebra in Italien wesentlich. Zur nämlichen Zeit, im 15. u. 16. Jh., war im deutschsprachigen Raum der Inhalt der Algebra wesentlich gleich dem der überkommenen muslimischen und italienischen, aber die Form war neu.

"Wohl nirgends mehr als in der Mathematik ist der geistige Gehalt so innig verknüpft mit der Form, unter welcher er sich darbietet, so daß eine Vervollkommnung der letzteren sehr gut auch eine solche der ersteren zur Folge haben kann". Dies zeigte sich in Arithmetik, in noch stärkerem Maß in Algebra.

Die algebraische Gleichungslehre al-Khwarizmis hatte im 12. Jh. über Spanien und wahrscheinlich auch Sizilien den Weg in den Westen gefunden. Die ältesten vorhandenen Texte entstammen wohl dem 13. Jh. Bis zur Mitte des 15. Jh. liegen nur wenige bekannte Zeugnisse vor. Auch in der Algebra al-Khwarizmis sieht man, daß sich vorerst der Inhalt nicht änderte, sondern Wert gelegt wurde auf Veränderung der Form. Vordringlich ist, daß offenbar in Italien vor 1320 für unser x , x^2 und die Konstante Symbole geschaffen wurden, nämlich c , r , d ; die nachfolgende Lücke bis

etwa 1450 dürfte sich noch durch weitere Funde in italienischen Bibliotheken zumindest teilweise schließen lassen, die Arbeiten von Frau Franci und Frau Toti Rigatelli zeigen dies. In der Renaissance, beginnend mit Johannes Regiomontan, wandte man algebraische Methoden verstärkt auf geometrische Fragestellungen an, und dies dürfte die Beschäftigung mit Algebra stark gefördert haben. Regiomontan arbeitete 1456 bereits in moderner algebraischer Schreibart: unsere Ziffernformen, Ligaturen für Plus- und Minuszeichen, Symbole für x und x^2 , als Gleichheitszeichen ein langer waagerechter Strich.

Verschiedene Charakteristika der mittelalterlichen abendländischen Mathematik zogen sich in ihrer Entwicklung demnach über Jahrhunderte hin, etwa der Weg zur Dezimalbruchschreibweise; andere traten anscheinend in einem einzigen Zug zutage, so die unvermuteten Zeichen d , r , c für die Konstante, x und x^2 . In den arithmetischen Algorithmen des Abendlandes erschienen als erstes die Zahlen römisch verziffert, dann indisch-arabisch, schließlich setzten sich in praktischen Anwendungen aus dem Algorithmenrechnen und aus der Kaufmannspraxis heraus der Bruchstrich und die Zeichen $+$ und $-$ durch.

Während in den Handschriften aus dem 15. Jh. eher eine Einsicht in das Wesen oder die Gründe der Entwicklungen in der Mathematik erkennbar wurde, ging dies in den gedruckten Darstellungen des 15. u. 16. Jh. größtenteils verloren; hier wurde mehr abgerichtet als unterrichtet, gemäß dem vorangestellten "Thu ihm also". So traten auch Rechenanleitungen auf, die zwischen arithmetischer und algebraischer Behandlung liegen, etwa die regula falsi als einfacher bzw. doppelter falscher Ansatz, oder die regula virginum, wo durch Probieren die damals ganzzahlig vorausgesetzten Lösungssysteme einer unbestimmten Gleichung 1. Grades zu finden waren. Die Proportion blieb das Bindeglied zwischen Arithmetik und Algebra. Dem Geist des elementaren Rechnens der Zeit entsprechend, war auch Algebra vorerst nicht eine Rechenkunde, die verbunden gewesen wäre mit Einsicht in die Durchführung und Entstehung der Operationen, sondern eine Rechenkunst.

Regiomontan erwähnte, daß ihm die ars rei et census - vocant arabice algebra - vertraut sei und er bewies dies auch zur Genüge bei der Lösung vieler Beispiele bis zum Grad zwei, bzw. bei Gleichungssystemen, die man heute mit drei Unbekannten löst; eine Aufgabe, die wir als $5x^4 + 3x^3 + 8x^2 = 260x + 5$ schreiben würden, kommentierte er "quanta sit ipsa res, nondum habeo compertum", ein von Giovanni Bianchini (gest. 1466) aufgeworfenes Zinseszinsbeispiel, das auf eine Gleichung 6. Grades führen würde, bezeichnete er als "Labyrinthus maximus". Fridericus Gerhart (gest. 1464/65) aus Regensburg, von dem wir das älteste Stück deutsch geschriebener Algebra aus dem Jahr 1461 besitzen, hat sich bezüglich seiner Einstellung und seinem Kenntnisstand anscheinend nicht geäußert, während Widmann sagt, daß die Regeln der Algebra "dem gemeynen volck tzu schwer verdrossen vnd vn-begreyfflich seyn". Die damals übliche Geheimniskrämerei mag dazu beigetragen haben, daß bis zu Heinrich Schreyber (vor 1496 - 1525) kein algebraisches Lehrbuch erschien. Rudolff gesteht ein, daß es Beispiele gibt, "die seynen 8 regeln [zur Gleichungslehre] zu hoch seyn", obwohl gerade er sich sehr um die Symbolisierung der Algebra verdient machte, nachdem bislang vieles nach seinen Worten "nit durch charakter", also ohne Symbolik, ausgedrückt worden war. Auf der letzten Seite seiner "Coß" stellte er einen Würfel der Kante $3 + \sqrt{2}$ auf einen Sockel, um gleichsam auf die kommenden Probleme der Algebra

hinzuweisen.

Um die Wende zum 16. Jh. lagen aus heutiger Sicht schon mehrere umfassende Handschriften algebraischen Inhalts vor, aus denen man die bisher zusammenhängenden Darstellungen der symbolischen Algebra, der Coß, entnehmen konnte. Dem damaligen Mathematiker stand freilich, wenn überhaupt, jeweils nur je eines dieser Werke zur Verfügung: die Schriften von Regiomontan, Fridericus Gerhart, Johannes Widmann, sowie die Überlieferte Algebra al-Khwarizmi in der Übersetzung durch Robert von Chester (um 1150) und Gerhard von Cremona (1114 - 1187).

Der Umgang mit algebraischen Gleichungen rückte aus ganz anderer Sicht als früher den Blick wieder auf die Irrationalitäten. Leonardo von Pisa hatte irrationale Fragen aufgeworfen, erkannte numeros surdos als Zahlen an und rechnete mit ihnen, auch italienische Mathematiker der folgenden Zeit. Regiomontan löste symbolische quadratische Gleichungen doppeldeutig. Fridericus lehnte irrationale Zahlen hingegen vor allem in Kaufmannsrechnungen bewußt ab, etwa: "Nemo enim vendet tibi aliquid pro radice de decem, cum ea non sit numerus. ... Surdus numerus non est numerus. Nam numerus est, quem unitas mensurat". Zur Zeit Widmanns wurde die Lehre von den Irrationalitäten sowohl in Form eines "Algorithmus de surdis" gelehrt, wo man sich über Bezeichnung in der Wurzelschreibweise und über die Berechnungen der irrationalen Residuen und Rezielen Gedanken machte, als auch in der Interpretation der Lösungen der quadratischen Gleichung. Stifel erlangte großes Verdienst um die Unterscheidung der einzelnen irrationalen Größen, "an veri sint numeri an ficti" und gesteht "wie die größt macht der Cosz sey gelegen an allerley extrahiren der wurtzeln", obwohl er auch sagt: "Et est satis miranda res, calculationem fieri praecisam, in iis quae praecisam quantitatem in seipsis non habent"; zudem stößt er beim Berechnen von höheren Wurzeln aus entsprechend konstruierten Polynomen in die binomische Entwicklung vor.

In der frühen Neuzeit begegnet einem öfters die Kluft zwischen der anschaulich orientierten Mathematik einerseits und den formalen symbolischen Konstruktionen andererseits, und zwar geometrische Darstellung von Potenzen mit einem Exponenten größer als drei, sowie der negativen und vereinzelt der imaginären Zahlen. Die formale Betrachtung - man brauchte auch Potenzen für Gleichungen vierten und höheren Grades - drängte so in zunehmendem Maß über den anschaulichen Ausgangsbereich hinaus. Solche Überlegungen förderten die Potenzrechnung, die ab 1480 als eigene Disziplin innerhalb der Algebra betrieben wurde, sie förderten auch die Zuordnung der Glieder arithmetischer und geometrischer Folgen, so daß von hier aus die Rechnung mit Logarithmen in greifbare Nähe rückte.

Deutliche Spuren einer Anwendung der Algebra (Coß) auf die Geometrie zeichnen sich - wie gesagt - bei Regiomontan ab, bei Widmann finden sich Andeutungen im 3. Teil seines Rechenbuches von 1489, aber "so eifrig wie um die gleiche Zeit Pacioli in Italien hat sich in Deutschland um die gleiche Zeit Niemand um die Verwerthung der Algebra für Geometrie angenommen"; er löste 100 geometrische Beispiele algebraisch. Bei Adam Ries und Christoff Rudolff begegnet nicht ein einziges Beispiel dieser Art, und Rudolff läßt wissen: "exempln von zal suchen und kauffmans hendln", darin liegt die Bedeutung der Algebra; Stifel behandelte einige geometrische Beispiele, u. a. aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises die Größe der Seiten eingeschriebener regelmäßiger Vielecke zu finden.

Noch war die algebraische Gleichungslehre nicht so weit Allgemeint, daß die Lösung der quadratischen Gleichung bei Rudolff und Stifel etwa zur Verifizierung nicht der geometrischen Demonstration bedurft hätte. Unbeschränkt ließen Regiomontan und Stifel in quadratischen Gleichungen auch negative Koeffizienten zu und der Fundamentalsatz der Algebra deutet sich bei Stifel mit den Worten an: "... plures [radices] autem duabus nulla aequatio habebit". Ob es nur ein Druck- oder Schreib- oder Rechenfehler war? Jedenfalls bringt Stifel mit $x^2 = 8x - 38$ eine Aufgabe, die keine reellen Lösungen hätte; das heißt, Rafael Bombelli (16. Jh.) stünde nicht allein.

Die intensive Beschäftigung Stifels mit der algebraischen Gleichungslehre bedingte - in Verbindung mit der etwa ein halbes Jahrhundert alten Potenzlehre, wie man sie vorwiegend in Leipzig geübt hatte, - auch bei ihm die Gegenüberstellung der Glieder arithmetischer und geometrischer Folgen; die übergeschriebenen "Exponentes signorum, in multiplicatione adde, in diuisione subtrahere, tunc fit exponens signi fiendi". Seine Gleichungen 3. und 4. Grades führte er vorerst so ein, daß seine Beispiele durch geschicktes Ergänzen auf einen vereinfachten Ausdruck gebracht werden können. Justus Bürgi wandte eine Bezeichnungsweise an, die mit seinen Benennungen "characteristici" oder "exponentes" für die oben stehenden, etwa
 VI V IV III II I 0
 $8x^{12} - 9x^{10} + 10x^8 - 7x^6 - 4x^4 + 10x^3 + 3x^2 + 7x - 4$ sowohl den funktionellen Zusammenhang andeutet, als auch sehr zur Übersichtlichkeit beiträgt.

Gleichungen mit mehreren Unbekannten wurden von den frühen Cossisten nicht behandelt, wenigstens kennt man außer bei Regiomontan keine Aufzeichnungen. In der Wiener Handschrift 5277, die um 1520 in Ingolstadt war, befindet sich ein Beispiel, wo 1 Zentner Blei für 1^{oo} Gulden, 1 Zentner Zinn um 1ⁿ Gulden im Preis angesetzt wird.

Rudolff umging eine zweite Unbekannte dadurch, daß er x und $a - x$ wählte. Erst Stifel führte mehrere Unbekannte ein; neben 1 z wählte er 1A, 1B, Somit liegt Stifels Hauptverdienst darin, daß er die bisherigen Einzelregeln für die quadratische Gleichung auf eine einzige zurückführte, "famosissima illa regula, reducta ad simplicitatem suam germanam", daß er die irrationalen Größen behandelt und gewürdigt hat, daß er die Coß ausführlich auf die Geometrie anwandte und schließlich auf die Bedeutung von Geronimo Cardano (1501 - 1576) für die kubische Gleichung hinwies.

Mit Stifel verschob sich der Schwerpunkt des mathematischen Interesses im deutschsprachigen Raum infolge des starken theologischen Einflusses während seiner Zeit noch einmal verstärkt hin zu mystischen Spekulationen, wie man sie ausgeprägt zwar innerhalb der mittelalterlichen Arithmetik, in keiner Weise aber in der Coß findet. In der Coß gab es keine Mystifizierung - ihr lag nicht die Einheit, die Nichtzahl zugrunde, sondern dragma, unser x^0 . In einer neuen Betrachtungsweise wandte man sich den Eigenschaften der Zahlen zu, der Bildungsweise und den Gesetzen der Polygonal- und Pyramidalzahlen, den figurierten Zahlen usw. Der Übergang zur Mathematik des Barock läßt in den betreffenden Werken ebenfalls eine starke Neigung nicht nur zur Verdeutlichung eines mathematischen Inhalts, sondern auch zur Mystik der Zahlen erkennen. Dies kommt schon im Titel einzelner Werke zum Ausdruck, so "Mysterium cosmographicum" von Johannes Kepler (1571 - 1630), oder

"Arithmetica philosophica" von Peter Rothe (gest. 1617). Obwohl etliche algebraische Probleme sehr weit bzw. bis an den Rand des Beweises geführt wurden (Fundamentalsatz der Algebra; Näherungsverfahren), rückte die Beschäftigung mit algebraischen Gleichungen höheren Grades auf fast zwei Jahrhunderte in den Hintergrund.

Die Algebra fand eine ihrer damaligen Grenzen darin, daß die negativen und gar die einfach-komplexen Zahlen noch nicht voll eingebürgert waren, ferner gab es erst eine allmähliche Anwendung auf Physik und Technik. Hier lag einer der komplizierten Übergänge im Bemühen, einwandfrei mit Einheiten umzugehen; die Regel der tri bildete wohl noch lange unbewußt die Grundlage. Dies erhellt schon aus der Menge von Lehrbüchern, die sich nur hiermit befaßten.

In der Geometrie läßt sich die Trennung in die streng Euklidische Form feststellen und in den praktischen Teil, der sowohl exakte Formeln verwendet, als auch mit brauchbaren Näherungsformeln arbeitet, die freilich einer Kontrolle der Einheiten bisweilen nicht standhalten.

Die Geometrie war die wesentliche Stütze der anderen Wissenschaften; sie allein besaß Beweiskraft, ihre Näherungsformeln lieferten zumindest brauchbare Resultate. So ist es verständlich, daß - in welchem Auftrag auch immer - seit dem 9. Jh. eine beachtliche Anzahl von lateinischen Geometrien, meist Teile des Euklid (365 ? bis 300 ?), hergestellt wurde, von denen auch relativ viele überlebten.

Frühe datierte Geometrien sind z. B. die deutsche "Geometria culmensis" vom Anfang des 15. Jh., wo hauptsächlich Flächen berechnet werden, und der lateinische "Commensurator" Regiomontans, der aus Lehrsätzen und Aufgaben über Drei- und Vielecke sowie Oberflächen- und Inhaltsberechnungen verschiedener Körper besteht. Im 16. Jh. erlebte die Landvermessung große Fortschritte. Johann Richter (Praetorius) (1537 - 1616), Nürnberg, erfand den Meßtisch. Das Handwerk drängte mit kunstreich gefertigten Geräten immer stärker in die Meßtechnik hinein, und dies führte zu einer Blüte der Feinmechanik. Die Normierung der Längeneinheiten war demgegenüber noch sehr willkürlich, etwa bei Jakob Kübel (1470 - 1533): 16 Männer, so wie sie der Reihe nach aus der Kirche kommen, stellen sich mit je einem ihrer Schuhe hintereinander, dies ergibt eine Meßrute zu 16 Schuh.

Um das Jahr 1600 lag ein Einschnitt in der Entwicklung und Verwendung technischer Hilfsmittel für die Methoden der Landvermessung und der Astronomie. In der Linienmechanik war man so weit vorangekommen, daß fast gleichzeitig das Himmels- und das Erdfernrohr gebaut wurden, zudem besaß man bald die Linsenformeln und brauchbare mathematische Berechnungsmöglichkeiten für die weitere Anwendung. Dies kam der verkehrstechnisch und militärisch begründeten Notwendigkeit entgegen, genauere Karten herzustellen; diese verlangten ihrerseits wiederum genauere Vermessungsmöglichkeiten. Hierdurch wurden Feinmechanik und Optik nochmals gefördert.

Winkelquadrant und Fernrohr auf der einen Seite, Prosthaphairese und Logarithmenrechnen auf der anderen sind zwei Charakteristika, die an der Wende vom 16. zum 17. Jh. die naturwissenschaftliche Grundlage der Welt von damals erkennen halfen. Das Fernrohr rückte solche Entfernungen, die unfaßbar groß erschienen waren, in den Kreis der vom Menschen zu bewältigenden Überlegungen - Olaf Römer (1644 - 1710) bestimmte 1676 die Lichtgeschwindigkeit -; die prosthaphairetischen Formeln und die Logarithmen brachten

zusammen mit den Dezimalbrüchen die Möglichkeit, bis zu jeder verlangten Genauigkeit vorzugehen, und zwar im mittlerweile vertrauten Zehnerbereich, der den sexagesimalen abgelöst hatte. Die Eins - die Nichtzahl -, war hierdurch wiederum in den Mittelpunkt des Interesses gerückt. Im folgenden Zeitabschnitt, im Barock, wurde dies evident in der modernen Fundierung der Infinitesimalmathematik. Das Kontinuum der Scholastik, ein überkommener uralter philosophischer Begriff, war nicht bis dorthin durchgedrungen, daß man versucht hätte, ihn mathematisch zu erfassen; das Kontinuum - das lückenlos Zusammenhängende - blieb eine ontologische Aussage, die in der Philosophie ihre Begründung, ihren Anfang und ihr Ende gefunden hatte. So waren die Einheit und das Unendliche durch das ganze Mittelalter hindurch außermathematisch geblieben. Das Wort "unendlich", der Begriff "unendlich" fanden sich immer wieder, allerdings im Sinne des normalen Sprachgebrauchs. Reihen mit unendlich vielen Gliedern wurden addiert, Rechenverfahren warteten auf ihre Verallgemeinerung; Nikolaus von Cues widmete sich dem Problem des Unendlichen und dem uralten Streit über das Stetige und Diskrete. Beim Bestimmen der geometrischen Mittel benachbarter Kubikzahlen spricht Widmann von einem Schema, welches "durch und durch unendlich" sei. Die "Latitudines formarum" des Nikolaus Oresme (1323 ? - 1382) basierten zweifelsfrei auf Gedanken, die man infinitesimal fassen könnte - selbst die Liebe zu Gott ließ sich bei ihm grafisch darstellen -, aber keine Andeutung an ein später so genanntes Tangentenproblem oder auf die Bestimmung des jeweiligen Flächeninhalts gab diesen wertvollsten Dingen ein volles mathematisches Gewand. Hier lag noch eine Kluft von drei bis vier Jahrhunderten geistiger Umformungen, die erst einmal die symbolhaften Deutungen des mittelalterlichen Menschen - ein Segen für einzelne Wissensbereiche und für die Kunst des 14. und 15. Jh., ein Hemmschuh für die praktische Anwendbarkeit -, beiseite wischten. Zwei typische Merkmale sind etwa die dogmatische Wirksamkeit der aristotelischen Physik bis kurz vor 1600, als die praktische Mechanik der Werkzeugbauer und Architekten schon etliches ad absurdum geführt hatte, ferner der schrittweise Auf- und Ausbau einer symbolischen Arithmetik und Algebra; diese brachten einen sehr großen Fortschritt, was die einzelnen Operationszeichen anlangt, etwa +, -, Bruchstrich und Zeichen für Potenzen der algebraischen Unbekannten; aber gerade bei den letzten blieb die Entwicklung gute 150 Jahre lang stehen, bis solche Kürzel erstanden und verwendet wurden, die nicht auf dem Bezug zur Sprache oder zur Geometrie aufbauten, also res, census, cubus, census de censu usw., sondern auf der arithmetischen Voraussetzung, nämlich der Proportion.

Ein weiteres Charakteristikum der mittelalterlichen Mathematik ist, daß Begriffe immer noch vage formuliert wurden, etwa Geodäsie = Feldmeßkunst, Feldmeßkunst = Geometrie; der Praktiker wandte Sätze aus der Euklidischen Geometrie und der praktischen Feldmeßkunst an, für den Theoretiker gab es nur die Euklidische Geometrie; zwischen beiden stand der Verfasser geometrischer Abhandlungen oder Lehrbücher, um Geometrie verständlich und anwendbar zu machen

Auch praktische neue Anforderungen konnten hier nicht plötzlich den Umbruch herbeiführen, sie konnten ihn aber beschleunigen. Die Landvermessung im Großen bediente sich immer noch der herkömmlichen Methode, etwa die 1554 durch Herzog Albrecht V. in Auftrag gegebene Aufnahme Bayerns durch Philipp Apian (1531 - 1589). Längen maß man zu Fuß, zu Roß, mit dem Wagen mittels der Corda, dem Meßseil, oder mittels Meßketten aus Eisen oder Kupfer, Richtungen mit dem Kompaß, Höhen direkt mit der Meßkette bzw. aus ähnlichen.

Dreiecken im Schattenwurf bzw. mittels zweier verschieden langer Stäbe, die man in Flucht mit einer Turmspitze brachte. Im 15. und 16. Jh. konnte sich die "Aufmessung und Abbildung der Erdoberfläche" - Hauptaufgabe der Geodäsie - somit nur auf kleine Gebiete beziehen, "soweit es die Erfordernisse der Praxis erforderlich machten und der Stand des Instrumentariums eine Realisierung erlaubte"; d. h. durch das Altertum und Mittelalter hindurch blieb die Art der geometrischen und feldmesserischen Fragestellungen prinzipiell unverändert.

So liegt zwischen 1400 und 1650 ein erster neuzeitlicher Abschnitt in der Geodäsie, ehe sie wissenschaftlich, das heißt mathematisch fundiert wurde. Seit dem 15./16. Jh. scheint es manchmal so, als ob man den tatsächlichen Bedürfnissen gegenüber einen Schritt voraus war; vor allem in nationalen Würdigungen wurde dies als Pioniergeist bezeichnet. Die Entwicklung der Großraumvermessung und damit der Geodäsie zur exakten Wissenschaft ist vorwiegend durch ihre Mathematisierung gekennzeichnet. Zwei Aufgaben standen nun an: 1) Landesaufnahme und Herstellung von Karten; 2) Gradbogenmessung als Mittel, um die Figur der Erde zu bestimmen. Durch die astronomischen Untersuchungen von Regiomontan, Nikolaus Copernicus (1473 - 1543) und Johannes Kepler war das praktische Rechnen in den Vordergrund getreten: Trigonometrie, Prosthaphaese, Dezimalbrüche, Logarithmen. Im Jahre 1617 veröffentlichte Willebrord Snellius (1580 - 1626) ein Triangulationsprinzip, das bis heute seine Gültigkeit hat. Bei den Messungen versuchte man allmählich solche Einheiten zu normieren, die als Naturmaß ableitbar sind; die Meterkonvention fand erst 1875 in Paris statt. Schon Kepler kam bei Bestimmung der Größe der Erdfigur darauf zu sprechen, daß bei einem gemessenen Grad am Himmel Fehler im Bereich von Minuten auftreten, die man nicht vernachlässigen dürfe. Aus einer Abweichung von acht Bogenminuten gelangte er zur Ellipsenbahn des Mars. So deutete sich aus der Geometrie und der Astronomie heraus ein frühes Objekt für eine Fehlerrechnung an.

Literaturangaben:

Bialas Volker, Praxis Geometrica, Zur Geschichte der Geodäsie am Beginn der Neuzeit, Deutsche geodätische Kommission bei der Bay. Akad. d. Wiss., Reihe E, Heft 11, München 1970

Breidert Wolfgang, Rhythmomachie und Globusspiel, Bemerkungen zu zwei mittelalterlichen Lehrspielen, in: Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft 10, Mainz 1973

Breidert Wolfgang, Die figurierten Zahlen beim Ulmer Rechenmeister Johannes Benz, in: Mathemata, Festschrift für Helmuth Gericke, Stuttgart 1985

Cantor Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band I, ²Leipzig 1907

Folkerts Menso, Regiomontanus als Vermittler algebraischen Wissens, in: Mathemata, Festschrift für Helmuth Gericke, Stuttgart 1985

Franci Raffaella und Laura Toti Rigatelli, Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli, Janus LXXII, 1985

Hofmann Joseph Ehrenfried, Geschichte der Mathematik I, Sammlung Göschen, Band 226/226a, ²Berlin 1963

Juschekewitsch Adolph Pavel, Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Leipzig 1964

Köbel Jakob, Von ursprung der Teilung, maß und Messung deß Ertrichs, Oppenheim 1522

Libri Guillaume, Histoire des sciences mathématiques en Italie, Band II, Paris 1838

List Martha und Volker Bialas, Die Coss von Jost Bürgi in der Redaktion von Johannes Kepler, Bay. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Klasse, Abhandlungen, Neue Folge, Heft 154, München 1973

Rudolf Christoff, Behend vnd Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeincklich die Coss genennt werden, Straßburg 1525

Schreyber Heinrich, Ayn new kunstlich Buech, Nürnberg 1521

Stevin Simon, De Thiende, Übersetzt und erläutert von Helmuth Gericke und Kurt Vogel, Frankfurt/Main 1965

Stifel Michael, Arithmetica integra, Nürnberg 1544

Toti Rigatelli Laura s. Franci

Treutlein Peter, Das Rechnen im 16. Jahrhundert, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 1, Leipzig 1877

Treutlein Peter, Die deutsche Coss, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 2, Leipzig 1879

Tropfke Johannes, Geschichte der Elementarmathematik, Band 1, Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel-Karin Reich-Helmuth Gericke, ⁴Berlin/New York 1980

Vogel Kurt, Der Donaauraum, die Wiege mathematischer Studien in Deutschland, Neue Münchner Beiträge zur Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften, Naturw.Reihe, Band 3, München 1973

Vogel Kurt, Wie wurden al-Hwarizmis mathematische Schriften in Deutschland bekannt?, Sudhoffs Archiv, Band 68, Heft 2, 1984

Vogel Kurt, Gerbert von Aurillac als Mathematiker, in: Acta historica Leopoldina, Nr. 16, 1985

Widmann Johannes, Behende vnd hubsche Rechnung auff allen kauffmanschafft, Leipzig 1489

Handschriften:

Lyell 52, Bodleian Library Oxford, früher Admont 612

Vat. lat. 4606, Vatikanische Bibliothek

Plimpton 188, Columbia University, New York

Cent 5 app 56^c, Stadtbibliothek Nürnberg

Vind. 5291, Österreichische Nationalbibliothek Wien

Clm 14908, Bayerische Staatsbibliothek München

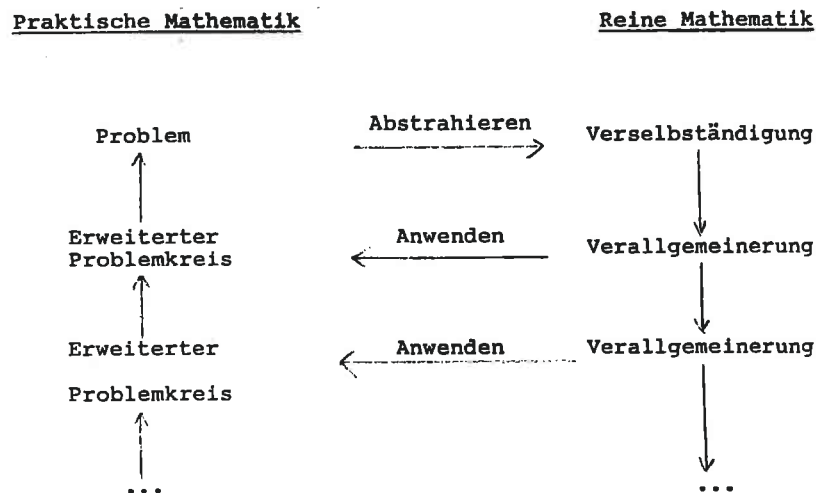
C80, Sächsische Landesbibliothek Dresden

1470, Universitätsbibliothek Leipzig

G.Frei

1. Allgemeines Schema der Wechselwirkung

Die Wechselwirkung zwischen angewandter (praktischer) und reiner Mathematik folgt fast immer dem folgenden Schema:



Ausgangspunkt ist ein Problem der praktischen Mathematik, das durch Abstrahieren zu einem rein mathematischen Problem wird. Die Problemstellung wird innerhalb der Mathematik verallgemeinert. Kann sie gelöst werden, so wird dadurch eine ganze Klasse von praktischen Problemen, der auch das ursprüngliche Problem angehört, einer Lösung zugeführt.

Als Beispiel betrachten wir ein klassisches Problem der Zahlentheorie.

2. Beispiel (Vorspiel)

Im Bereich der Praktischen Mathematik stellt sich in der antiken Feldmessungstheorie das Problem, alle rechtwinkligen Dreiecke zu bestimmen. Dieses geometrische Problem führt auf das arithmetische Problem, alle Lösungen von

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

d.h., alle pythagoräischen Tripel zu bestimmen. Diesen ersten Abstraktionsschritt führte Diophant (325-409) aus. In Aufgabe V9 (und V10) seiner Arithmetica stellt er die Aufgabe, die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a \quad \text{mit} \quad a = 2d + 1$$

zu lösen für $x, y \in \mathbb{Q}$ (mit den Nebenbedingungen $x^2 > d, y^2 > d$).

Das ursprünglich praktische geometrische Problem wird so auf ein abstraktes algebraisches Problem geführt. Diophant gibt noch keine Lösungskriterien. Einen zweiten Abstraktionsschritt führt Bachet (1621) in seinem Kommentar zu Diophant aus durch Rückführen des Problems auf die Primteiler p von a mittels der schon Diophant bekannten Identität

$$(x^2+y^2)(z^2+t^2) = (xz+yt)^2 + (xt-yz)^2.$$

Von dort übernimmt Fermat (ab 1636 bis 1640) das Problem, die Aufgabe

$$x^2 + y^2 = p \quad \text{mit} \quad p = \text{Primzahl}$$

zu lösen für $x, y \in \mathbb{Z}$.

Somit wird das Problem auf ein arithmetisches zurückgeführt.

Fermat (1638-1640) findet in einem dritten Abstraktionsschritt Lösungskriterien mittels Kongruenzen:

$$(1) \quad a \equiv 3 \pmod{4} \rightarrow x^2 + y^2 = a \text{ ist nicht lösbar}$$

(Brief an Mersenne 1638).

$$(2) \quad x^2 + y^2 = a, (x,y) = 1, p|a, p = \text{prim}, \text{ also}$$

$$p|x^2 + y^2 \rightarrow p \not\equiv 3 \pmod{4}$$

(Brief an Roberval 1640).

$$(3) \quad x^2 + y^2 = p \quad \text{lösbar mit } x, y \in \mathbb{Z} \\ \text{für eine Primzahl } p \neq 2$$

$$\Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$$

(Brief an Mersenne, 25.12.1640).

Bemerkungen:

(1) Der Hypothenusenfall $a = c^2$ hat bei Fermat immer noch eine spezielle Bedeutung.

Fermat stellt auch schon das

(2) Problem der Anzahl der (primitiven) Darstellungen von $x^2 + y^2 = a$

und das

(3) Problem der Existenz eines Algorithmus zum Bestimmen von $x, y \in \mathbb{Z}$.

Weiter gibt Fermat einen

(4) Primzahltest mit Hilfe der Darstellung

$$x^2 - y^2 = a$$

(1654, 1659), und in einem vierten Abstraktionsschritt weitet Fermat seine

(5) Untersuchungen aus auf die allgemeineren Formen:

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 \\ x^2 + 2y^2 \\ x^2 + 3y^2 \\ x^2 + 5y^2 \end{aligned}$$

Drei weitere bedeutenden Abstraktionsschritte unternimmt dann

Euler (1750-1778) mit

<5> der Umkehrung des Problems,

<6> der Ausdehnung auf die Form $ax^2 + by^2 = p$.

Er gelangt so zu den

<7> numeri idonei, die ihm Primzahlteste liefern.

Von dort findet das Problem seine Formulierung in

Gauss' (1801) Geschlechtertheorie quadratischer Formen, was weiter zu

Kummers Theorie der Kreiskörper, und später zu

Takagi's Klassenkörpertheorie führt.

Innerhalb der praktischen Mathematik findet dann Eulers Primzahltest in der neueren Kodierungstheorie eine überraschende Anwendung.

3. Hauptthema: Die geeigneten Zahlen von L. Euler

In einem Brief an Mersenne (25.12.1640) formulierte Fermat den

Satz 1: $p = \text{Primzahl}, p \neq 2$.

- (1) $p = x^2 + y^2$ ist lösbar mit $x, y \in \mathbb{N} \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$
- (2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ ist eindeutig
- (3) $(x, y) = 1$.

Beweis: Euler 1750, 1768, 1758

<5> Euler bemerkte 1758 die Umkehrung.

Satz 2: $n \in \mathbb{N}$, n ungerade, $n > 1$.

Ist $n = x^2 + y^2$ mit $x, y \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ einzig lösbar und überdies $(x, y) = 1 \Leftrightarrow n$ ist Primzahl.

Anwendung: Daraus ergibt sich ein Primzahlkriterium für Zahlen n mit $n \equiv 1 \pmod{4}$, nämlich: enthält

$(n - x^2 | x \in \mathbb{Z}, 0 < x < \sqrt{\frac{n}{2}})$ ein einziges Quadrat y^2 und ist dazu $(x, y) = 1$, so ist n Primzahl.

Beispiel: $n = 89$

$s = (88, 85, 80, 73, 64, 53)$, also $x = 5, y = 8$
 $\bullet 89$ ist Primzahl.

Beispiel von Euler 1769:

$$n \equiv 77 \pmod{480}$$

<6> Eine Erweiterung des Primzahltestes auf Zahlen $n \equiv 3 \pmod{4}$ erhält Euler mittels der Formen $x^2 + by^2$, $b \in \mathbb{N}$:

Euler (1761 und 1774) fand dazu die folgenden Sätze.

Satz 3: (a) $p = \text{Primzahl}, p \neq 2$.

- (1) $p = x^2 + 2y^2$ ist lösbar mit $x, y \in \mathbb{N} \Leftrightarrow p \equiv 1, 3 \pmod{8}$
- (2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ ist eindeutig
- (3) $(x, y) = (x, 2y) = 1$

(b) $n \in \mathbb{N}$, n ungerade, $n > 1$.

Ist $n = x^2 + 2y^2$ mit $x, y \in \mathbb{N}_0$ einzig darstellbar und überdies $(x, y) = (x, 2y) = 1 \Leftrightarrow n$ ist Primzahl.

Beweis: Euler (1761, 1774) bis auf (a) (1) \Leftarrow .

Dieser Teil wurde von Lagrange 1775 bewiesen.

Satz 4: (a) $p = \text{Primzahl}, p \neq 2, 3$.

- (1) $p = x^2 + 3y^2$ ist lösbar mit $x, y \in \mathbb{N} \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{3}$
- (2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ ist eindeutig

$$(3) \quad (x, y) = (x, 3y) = 1$$

(b) $n \in \mathbb{N}$, n ungerade, $n > 1$.

Ist $n = x^2 + 3y^2$ mit $x, y \in \mathbb{N}_0$ einzig

darstellbar und überdies $(x, 3y) = 1$

\bullet n ist Primzahl.

Beweis: Euler 1763 Teil (a)
Lagrange 1775 Teil (b).

Anwendung: Man erhält somit Primzahlkriterien für Zahlen mit $n \neq 23 \pmod{24}$.

Es stellt sich jetzt die Frage, ob es Primzahlkriterien für jede Form $x^2 + my^2$ mit $m \in \mathbb{N}$ gibt.

Euler (1778) fand dazu, dass $m = 11$ kein Primzahlkriterium liefert, denn $n = 15 = 2^2 + 11 \cdot 1^2 = x^2 + 11 \cdot y^2$ ist einzig darstellbar mit $(x, y) = (2, 1)$ und überdies $(2, 1) = 1$, aber $n = 15$ ist nicht prim.

Somit wird Euler auf den folgenden neuen Begriff geführt:

<7> liefert $m \in \mathbb{N}$ für die Form $x^2 + my^2$ ein Primzahlkriterium, so heisst m geeignet (idoneus, convenable).

Genauer:

Definition 5: $m \in \mathbb{N}$ heisst geeignet (idoneus, convenable), falls folgendes gilt:

$$n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ ungerade}, \quad n > 1.$$

Ist $n = x^2 + my^2$ mit $x, y \in \mathbb{N}_0$ einzig darstellbar und überdies $(x, my) = 1$ \bullet n ist Primzahl.

Euler fand dann (1778) den

Satz 6: Die folgenden 65 Zahlen sind geeignet:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	13	15	16	18	21	22	24	25	28
30	33	37	40	42	45	48	57	58	60
70	72	78	85	88	93	102	105	112	120
130	133	165	168	177	190	210	232	240	253
273	280	312	330	345	357	385	408	462	520
760	840	1320	1365	1848					

Bemerkungen

- (1) Euler benützt dazu ein Kriterium, dessen Beweis lückenhaft ist. Dass das Eulersche Kriterium notwendig ist, zeigte Grube 1874.
- (2) Chowla (1934): Die Anzahl der geeigneten Zahlen ist endlich.
- (3) Chowla (1954), Grosswald (1963), Weinberger (1973): Eulers Tafel ist vollständig bis auf höchstens eine weitere geeignete Zahl.

Anwendungen

Euler 1778:

- (1) Bestimmung aller Primzahlen p der Form

$$p = 1 + 232y^2 \quad \text{mit} \quad 1 \leq y \leq 300, \quad y \in \mathbb{N}$$

- (2) $a = 10'003 = 100^2 + 3 \cdot 1^2 = 16^2 + 3 \cdot 57^2$ ist nicht Primzahl; in der Tat ist $a = 7 \cdot 1429$.

Seite 22 am Anschlag

$$b = 100'003 = 10 \cdot 100^2 + 3 \cdot 1^2 \text{ und}$$

$$c = 1'000'003 = 1000^2 + 3 \cdot 1^2 \text{ sind Primzahlen.}$$

(3) Bestimmung aller Primzahlen p der Form

$$p = 197^2 + 1848y^2 \text{ mit } 1 \leq y \leq 100, y \in \mathbb{N}.$$

Für $y = 100$ erhielt Euler die grösste damals bekannte Primzahl

$$p = 197^2 + 1848 \cdot 100^2 = 18'518'809$$

neben der ebenfalls von Euler stammenden Mersennschen Primzahl

$$p = 2^{31} + 1 = 2'147'483'649.$$

20.1.1987/aqu.

Zur Rolle der Mathematik bei der Entwicklung der Technikwissenschaften (W. Purkert, Leipzig)

In der Antike gab es keine Anwendung mathematisch formulierter naturwissenschaftlicher Gesetzmäßigkeiten auf die Bemessung und Gestaltung von Bauwerken des Hoch- und Tiefbaus, von Schiffen, Maschinen oder Mechanismen. Trotzdem haben Geometrie und Arithmetik als immanenter Bestandteil des empirischen technischen Wissens sehr wohl eine wichtige praktische Rolle gespielt. Die Anwendung geometrischer Formen und Proportionen, ausgedrückt durch eine Skizze oder Zeichnung, und die Angabe quantitativer Verhältnisse waren ein notwendiges Element der geistigen Vorwegnahme des zu schaffenden technischen Gebildes und schließlich auch der tatsächlichen Baudurchführung (VITRUV gibt dafür schöne Beispiele). Berechnungsvorschriften wurden mitunter auch als Fazit empirischer Erfahrungen und teilweise gezielter Versuche angegeben, wie beispielsweise HERONS Formel für die Dimensionierung des Kalibers bei den steinwerfenden Geschützen.

Im Mittelalter hat sich die Situation im Verhältnis von Mathematik und Technik nicht grundlegend geändert. Auch hier gibt es noch keine ingenieurmäßigen Berechnungen unter Benutzung mathematisch formulierter Naturgesetze. So sind z.B. die gotischen Kathedralen empirisch gebaut und keinesfalls statisch berechnet worden. Auch für das Mittelalter kann man aus den Sachzeugen schließen, daß Geometrie und Arithmetik in ähnlicher Weise benutzt worden sein müssen wie in der Antike, aber auch hier gibt es kaum schriftliche Zeugnisse.

Etwa ab dem 15. Jahrhundert implizieren die frühbürgerlichen Verhältnisse zunächst in Italien, etwas später in Süddeutschland, den Niederlanden, England und Frankreich, neue Tendenzen in den Beziehungen von wissenschaftlich-theoretischem Denken und Produktionspraxis, die zur Herausbildung der klassischen Naturwissenschaften in Europa führten. Dieser neue Wissenschaftstyp ist gekennzeichnet durch die Verbindung von Mathematik und Naturerkenntnis und durch die Synthese von praktischen Erkenntnissen und Erfahrungen mit dem theoretischen Denken der Gelehrten. Etwa ab Mitte des 15. Jahrhunderts werden auch nach und nach die Voraussetzungen für die Herausbildung der Technikwissenschaften ^{geschaffen}. Am Beginn dieser Entwicklung stand die "wissenschaftlich-literarische Entdeckung der Produktion" etwa durch L.B. ALBERTI, F. MARTINI,

V. BIRINGUCCIO und G. AGRICOLA. In deren Kompendien der Produktionserfahrungen war die Verbindung zum theoretischen Denken noch lose; Mathematik spielte i.a. eine untergeordnete Rolle. Z.B. geht ALBERTI in den Anwendungen der Mathematik auf das Bauwesen kaum über VITRUV hinaus. Auch bei Männern wie N. TARTAGLIA und LEONARDO DA VINCI, die eine ausgezeichnete mathematische Bildung besaßen, beobachtet man eine bemerkenswerte Kluft zwischen der Wertschätzung der Mathematik als wichtiger Grundlage für den Ingenieur und den tatsächlichen Anwendungen mathematischer Methoden innerhalb des technischen Schaffens. Der programmatischen Absicht, Mathematik anzuwenden, stand entgegen, daß die Voraussetzungen weder in der Mathematik noch in der Mechanik gegeben waren. In der Mechanik waren insbesondere die Grundbegriffe noch nicht hinreichend klar herausgearbeitet, in der Mathematik fehlte es an einer Methode, dynamische Prozesse zu modellieren.

In der folgenden Periode der wissenschaftlichen Revolution wurden jene fehlenden Voraussetzungen geschaffen. Die entstehende klassische Naturwissenschaft war eine Art "Einheitswissenschaft", die in ihren Gegenstandsbereich sowohl natürliche als auch technische Objekte einbezog. Im Rahmen dieser Einheitswissenschaft finden wir erstmals auf der mathematischen Formulierung von Naturgesetzen beruhende ingenieurmäßige Berechnungen. Ein herausragendes Beispiel für solche Art Anwendung der Mathematik ist die Berechnung und die darauf beruhende Konstruktion von Entwässerungsmühlen durch S. STEVIN. Während STEVIN noch Gelehrter und praktisch tätiger Ingenieur in einer Person war, waren diejenigen Forscher, die in der Periode der wissenschaftlichen Revolution herausragende Ansätze von Anwendungen der Mathematik auf technische Gegenstände und Probleme hervorbrachten, wie G. GALILEI, CH. HUYGENS, R. HOOKE, I. NEWTON, G.W. LEIBNIZ, Gelehrte, die zwar noch eng mit technischem Schaffen verbunden, doch schon mehr als Theoretiker gelten müssen. Die Praxis der Technik bewegte sich im 17. Jahrhundert bezüglich der Geräte, Maschinen und Materialien noch ganz auf dem Niveau der vorangehenden Zeit. Die genannten Gelehrten waren mit ihren theoretisch-mathematischen Untersuchungen der Ingenieurpraxis oft um viele Jahrzehnte voraus. In der Regel profitierte die Mathematik zunächst viel mehr davon als die Technik; ein Beispiel hierfür sind HUYGENS' Bemühungen um die Konstruktion einer Uhr mit tautochronem Pendel.

Die großen Mathematiker und Naturwissenschaftler des 18. Jahrhun-

derts waren ebenfalls an Anwendungen ihrer Wissenschaft stark interessiert. Den Typ des reinen Mathematikers gab es im 18. Jahrhundert noch nicht. Man versuchte, außer den natürlichen Objekten auch Objekte der Technik für die Anwendungen der Mathematik zu erschließen. Von besonderer Bedeutung in dieser Richtung ist das Schaffen von L. EULER, aus dessen Beiträgen zur Festigkeitslehre, Kreiselltheorie, Turbinentheorie, Schiffsmechanik, Ballistik und zur Theorie einzelner Maschinen später technikwissenschaftliches Wissen in bedeutendem Umfange abgehoben worden ist. Auch die Verfasser der großen mathematischen Kompendien, wie z.B. W.J.G. KARSTEN, bezogen in breitem Maße technische Gegenstände in ihre Betrachtungen ein. Der praktische Erfolg der Bemühungen der Mathematiker des 18. Jahrhunderts um die Bewältigung technischer Probleme ist aus den verschiedensten Gründen nicht allzu groß gewesen. Dessen ungeachtet gab es zunehmend Stimmen auch aus der Praxis, die eine wissenschaftliche Durchdringung des technischen Schaffens forderten. Von besonderer Bedeutung in dieser Richtung waren die Bestrebungen der Vertreter der beiden französischen Ingenieurcorps (BELIDOR, COULOMB, PERRONET, GAUTHEY). BELIDOR z.B. war der erste, der die Infinitesimalrechnung auf ein ingenieurtechnisches Problem anwandte.

Während in England die Industrielle Revolution - von der Wissenschaft noch relativ wenig beeinflusst - bereits eine bedeutende Maschinenproduktion hervorgebracht hatte, waren Frankreich und insbesondere Deutschland zurückgeblieben und suchten nach Wegen, den Anschluß rasch zu gewinnen. Als aussichtsreichster Weg wurde die wissenschaftliche Durchdringung der Produktion und überhaupt des gesamten technischen Schaffens angesehen. Bildungspolitik wurde zu einem wichtigen Bestandteil der Gewerbepolitik. Ausdruck dessen war die Gründung von polytechnischen Schulen. Es gehörte zu den Gründungsprinzipien dieser Schulen, daß die Mathematik als eine für den Ingenieur grundlegende Disziplin zu gelten habe und ihr demgemäß entsprechend Raum zu widmen sei. Eine Analyse der technikwissenschaftlichen Literatur aus der Anfangszeit der Polytechnika zeigt jedoch, daß die hohe Wertschätzung der Mathematik mehr auf einer Erwartung denn auf realer praktischer Wirksamkeit beruhte. Es gab nur ein Gebiet, auf dem die Mathematik sofort und durchgreifend wirksam wurde: die darstellende Geometrie.

Was die mathematische Lehre an den polytechnischen Schulen betrifft, so war trotz ihres beträchtlichen Umfanges ihr Niveau bis

zur Mitte des 19. Jahrhunderts noch vergleichsweise niedrig (eine Ausnahme ist die Ecole Polytechnique in Paris). Die Mathematiker an diesen Schulen waren im wesentlichen nur Lehrer. Mathematische Forschung im eigentlichen Sinne des Wortes wurde kaum betrieben (mit Ausnahme von Paris).

In Deutschland änderte sich die Situation um die Mitte des vorigen Jahrhunderts grundlegend. Zu dieser Zeit war die industrielle Entwicklung und die Entfaltung des Kapitalismus der freien Konkurrenz in vollem Gange. Im Bauwesen z.B. stellten der Einsatz neuer Werkstoffe und prinzipiell neue Bauaufgaben (Eisenbrückenbau für die Eisenbahn) den Technikwissenschaften neue Probleme. Im Maschinenbau wurden gestiegene Anforderungen an die Leistung, Baugröße, Geschwindigkeit, Sicherheit und Mannigfaltigkeit der Maschinen, aber auch ökonomische Fragen nach niedrigem Preis und hohem Effekt als Herausforderungen an die Ingenieurwissenschaften verstanden. Für die Mathematik an den Polytechnika war es von großer Bedeutung, daß um die Mitte des Jahrhunderts eine Richtung im Maschinenwesen einsetzte, die ein wissenschaftliches Maschinenwesen auf theoretischer, vor allem mathematischer Grundlage anstrebte. Die bedeutendsten Exponenten dieser Richtung waren F. REDTENBACHER, F. REULEAUX, F. GRASHOF und G. ZEUNER. Das Hauptziel dieser Technikwissenschaftler war es, das Erfinden und Konstruieren deduktiv zu gestalten. Typische Beispiele solcher theoretischer Konzeptionen sind die analytische Maschinentheorie von REDTENBACHER und die Kinematik von REULEAUX. Für diese theoretischen Konzeptionen war die Mathematik nicht nur Rechenhilfsmittel, sondern auch methodisches Vorbild. Deshalb legten Redtenbacher, Reuleaux, Grashof und andere führende Technikwissenschaftler auf eine wirklich wissenschaftliche Mathematikausbildung an den polytechnischen Schulen größten Wert. In den "Prinzipien der Organisation der polytechnischen Schulen" von 1865, die den Standpunkt des Vereins Deutscher Ingenieure zur Entwicklung der Polytechnika fixierten, wurde der Mathematik ein hoher Stellenwert zugemessen. Es kennzeichne den Hochschulrang der polytechnischen Schulen - so hieß es darin - wenn hier neben den technischen Fächern Mathematik und Naturwissenschaften in einer den Universitäten nicht nachstehenden Ausdehnung gelehrt werde. Es war eine Folge dieser Politik, daß von den Universitäten eine beträchtliche Anzahl hervorragender Mathematiker und Naturwissenschaftler an die Technischen Hochschulen berufen wurde. Das Niveau der Lehrkräfte für Mathematik konnte - etwa ver-

glichen mit der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts - wesentlich angehoben werden. An den Technischen Hochschulen gab es unter den Mathematikprofessoren in zunehmendem Maße bedeutende Forscher. Diese Entwicklung hatte allerdings auch eine Kehrseite. Die Anforderungen, die die Praxis, insbesondere die Industrie, in den letzten Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts an die Technischen Wissenschaften und an die Ausbildung der Ingenieure stellte, kollidierten in zunehmendem Maße mit einer vorzugsweise theoretischen, an der Universität ausgerichteten Ausbildung an den Technischen Hochschulen. Es setzte ein heftiger Methodenstreit innerhalb der Technischen Wissenschaften ein. Im Rahmen dieses Streites geriet die Mathematik zunehmend in das Kreuzfeuer der Kritik. Es bildete sich eine - von Zeitgenossen bereits so bezeichnete - antimathematische Bewegung heraus. Diese Bewegung unter Führung des Rektors der TH Berlin-Charlottenburg, A. RIEDLER, forderte in programmatischen Erklärungen eine Reduzierung der "Hilfswissenschaft" Mathematik und den Einsatz von Ingenieuren als Lehrkräfte für Mathematik an den TH. Die Mathematiker reagierten mit einer Gegenerklärung, in der sie die Bedeutung der Mathematik als wesentliche Grundlage des Ingenieurstudiums hervorhoben. Die besonders in den Jahren 1895-1900 heftig geführten Kontroversen wurden nach und nach durch Bemühungen beider Seiten abgemildert und galten um 1920 als überwunden. Von mathematischer Seite erwarb sich besonders F. KLEIN durch vielfältige Initiativen zur Förderung der angewandten Mathematik große Verdienste bei der Überwindung der aufgebrochenen Widersprüche. Von technischer Seite wurde eine Reihe mathematischer Methoden (partielle Differentialgleichungen, direkte Methoden der Variationsrechnung, Eigenwertberechnungen, Vektorrechnung, lineare Algebra, komplexe Zahlen) in größerem Umfange zur Lösung ingenieurwissenschaftlicher Fragen herangezogen. Die Herausbildung wissenschaftsintensiver Industrien (Elektrotechnik, Luftfahrt) tat ein Übriges.

Ausführliche Literaturangaben in:

Purkert, W.; Hensel, S.: Zur Rolle der Mathematik bei der Entwicklung der Technikwissenschaften. Teil 1. Dresdener Beiträge zur Geschichte der Technikwissenschaften. Heft 11 (1985), S.3-53. Teil 2: im Druck, ebenda Heft 13.

ZUM VERHÄLTNISS VON MATHEMATIK UND TECHNIK IM 19. JAHRHUNDERT IN DEUTSCHLAND (Teil 1)*

M. Otte

*

Man kann die Auseinandersetzungen zwischen Mathematik und Technikwissenschaften zu Ende des vorigen Jahrhunderts als eine Art "Stellvertreterkrieg" betrachten, als eine Auseinandersetzung allerdings von für beide Seiten substantieller Bedeutung. Für beide bestand das Problem in der Veränderung ihres jeweiligen Selbstverständnisses und ihrer Methodologie. Dieses Problem wurde objektiv durch die Rolle der Technik im Industrialisierungsprozeß am deutlichsten und zugespitztesten gestellt, wurde den Beteiligten aber nur an Hand bestimmter Begleiterscheinungen bewußt. Daher jener Stellvertreterkrieg, der seiner objektiven Bedeutung nach eigentlich keiner war und innerhalb dessen die Technikwissenschaften eher soziale und erst nachgeordnet methodologische Veränderungen erfuhren, während es für die Mathematik umgekehrt aussah.

In der historischen Problematik der Entwicklung einer neuen Methodologie der Wissenschaften hatten Mathematik und Technik eine gemeinsame und gleichzeitig komplementäre Rolle. Für die Mathematik bestand das Problem darin, daß sie einerseits radikal technisiert worden ist und dabei gleichzeitig eine neue Flexibilität und Offenheit für externe Einflüsse und mögliche neue Anwendungen gewinnen mußte. Für das Verständnis einer derartigen widersprüchlichen Situation hätte eigentlich der tatsächliche konkret-historische Prozeß der Technisierung die Grundlage abgeben können.

* Dieser Teil, der vor allem die "Protagonisten" und die "Argumente" der Auseinandersetzungen einführt, ist das Manuskript eines auf dem 1. Oesterreichischen Symposium zur Geschichte der Mathematik (09.-15.11.1986) in Neuhofen a.d. Ybbs gehaltenen Vortrages. Jeder Kommentar zu dieser vorläufigen Fassung ist willkommen.

Was unterscheidet beispielsweise den Menschen in seiner Entwicklung vom Tier? "Die Frage beantwortet sich, ... durch die genauere Angabe dessen, was alles zur Außenwelt gerechnet werden kann. Gewöhnlich versteht man darunter lediglich die den Menschen umgebenden, von Natur vorhandenen Dinge. Prangt denn aber nicht neben dieser natürlichen Welt und sie überragend eine andere, nämlich der Inbegriff der aus Hirn und Hand des Menschen hervorgegangenen technischen Vorrichtungen, ... Und diese Außenwelt ist es, worin der Mensch sich eine Fortsetzung seiner selbst nach außen erschaffen hat, ohne welche für ihn weder das Verständnis und die Benutzung der Natur, noch der Aufschluß über sein eigenes Wesen denkbar sein würde". So beginnt eine "ausführliche Besprechung"⁽⁹⁾ der "Theoretischen Kinematik" von F. Reuleaux (1829-1905). Die Maschine ist in dieser von Reuleaux selbst geteilten Sicht der Mechanismus, durch den "das menschliche Wesen sich selbst gegenständlich geworden ist". So progressiv die dabei zugrunde gelegte Anwendung des Entwicklungsgedankens auf die Technik ist, so szientistisch ist sie gleichzeitig. Für den Szientismus aber bleibt die Wissenschaft selbst unhinterfragt und fremd, und damit bleiben auch Reflexion und Operation, Wissen und Tätigkeit, oder Theorie und Praxis fremd gegeneinander, wird ihre Komplementarität nicht wirklich gedacht. Bei Reuleaux wird die Maschine ein für allemal erklärt, um "die dem populären Feldgeschrei 'Teilung der Arbeit' folgende, alles Maß überschreitende Teilung des Wissens auf die Grenzen zu beschränken, innerhalb deren es möglich bleibt, die geteilten Gebiete unter Leitung des Entwicklungsgedankens, in welchem die Stärke der heutigen Wissenschaft liege, immer wieder zusammenzufassen und auf höhere Einheiten zurückzuführen".

Um hier nur eine Bemerkung zur Problematik der Maschine anzuknüpfen. Eine funktionale Betrachtung der Maschine, wie sie in der Theorie, z.B. der Kinematik, der Logik oder der politischen Ökonomie gegeben ist, muß natürlicherweise von den Details der physikalischen Konstruktion abstrahieren. Sie konzentriert sich auf die Voraussetzung, daß durch die Maschine gewisse Funktionen erfüllt sind. Eine derartige Betrachtung verlangt jedoch die detaillierte Kenntnis der Eingangs- und Ausgangsgrößen des maschinellen Prozesses in den Kategorien der entsprechenden Betrachtungsweise mathematischer oder ökonomischer oder naturwissenschaftlich-experimenteller Art. Für den Positivismus des 19. Jahrhunderts ist generell die

Funktion in diesem Sinn das eigentliche Objekt.

Eine ingenieurmäßige praktisch-konstruktive Realisierung der Maschine auf der anderen Seite kennt nur die empirischen Gegebenheiten der Konstruktion und kennt weder die Funktion, d.h. das Input-Output-Verhalten genau noch verfügt sie über eine verallgemeinerte Theorie der vorhandenen Struktur. Sie hat gewissermaßen das Objekt, ohne es genau zu kennen.

Diese Situation entspricht aber eigentlich ebenfalls den Gegebenheiten einer modernen, axiomatisierten Theorie. Man könnte also sagen, die Situation in Wissenschaft und Technik ist die nämliche, charakterisiert lediglich durch eine Unterschiedlichkeit der Gegenstände. Aber diese Betrachtungsweise hätte ihre Voraussetzungen. Man würde beispielsweise zu der Tatsache geführt, daß die Kategorie der "Tätigkeit" zu einer grundlegenden Kategorie wird, die den Begriff des "Bewußtseins" oder der "Natur" als Erklärungsgrundlage ablöst. Aus der Perspektive der Tätigkeit relativieren sich die klassischen Dichotomien, etwa der Gegensatz von Objekt und Begriff oder von Methode und Theorie oder von Funktion und Struktur.

Entsprechend der klassischen Logik stehen Begriffe oder Ideen zu Objekten in einer Beziehung der Generalisierung. Generalisieren wird als grundlegende Aktivität des Denkens angesehen. Demgegenüber beschreibt Cassirer⁽¹⁾ in seiner Rekonstruktion der Entwicklung von Mathematik und Naturwissenschaft während des 19. Jahrhunderts die Herausbildung einer neuen Logik der Relationen, die den Begriff nicht mehr als Verallgemeinerung, sondern als Formel oder Funktion faßt, welche die Rekonstruktion des Einzelnen aus dem Allgemeinen erlaubt und somit den einzelnen Gegenstand als Anwendungsfall der Theorie sieht. Durkheim⁽²⁾ beschreibt, historisch etwa gleichzeitig, die Rolle des Begriffs bei der Unterordnung des Veränderlichen unter das Beständige, des Individuellen unter das Soziale. Das heißt, er sieht die Notwendigkeit einer neuen, nämlich gesellschaftsbezogenen Interpretation des Begriffs, "denn das Allgemeine enthält, ... nicht mehr als das Einzelne. Wenn es sich aber um kollektive Vorstellungen handelt, dann fügen sie dem, was uns unsere persönliche Erfahrung lehren kann, all das hinzu, was die Gemeinschaft an Weisheit und Wissen im Laufe der Jahrhunderte gesammelt hat. ... Begrifflich denken heißt nicht einfach gemeinsame Merkmale einer bestimmten Anzahl von Objekten zu isolieren und zusammenzufassen; es heißt, das Veränderliche dem Beständigen

unterzuordnen, das Individuelle dem Sozialen". Nur auf diese Weise kann für ihn auch der Gegensatz von Materie oder Inhalt einerseits und logischer Vernunft andererseits überbrückt gedacht werden.

W. Rathenau (1867-1922) schließlich erblickt in seinem ebenfalls 1912 erschienenen Werk "Zur Kritik der Zeit" in Funktionsbegriff und funktionalem Denken neue "wirksame, der Mechanisierung angepasste Methoden und Formen des Denkens ..., die früheren Zeiten unbekannt, heute von jedermann mühelos gehandhabt werden". Die im Vollzuge von Arbeitsteilung und Spezialisierung sich entwickelnde Intellektualisierung macht den Menschen zu "Maschinenführer und Maschine zugleich". "Selbst die scheinbar trennende Sonderung des Berufes muß zur Homogenität führen. Denn eine reichliche Ansammlung in letzter Linie ähnlicher Vorkommnisse erzeugt übereinstimmende Geistesdispositionen; die Anwendung gleichartiger Denk- und Arbeitsformen wirkt entscheidender als die Ungleichartigkeit der Anwendungs- und Arbeitsgebiete; ..." ⁽³⁾

Die Tätigkeit als Erklärungsgrundlage der historischen Entwicklung zu nehmen, würde bedeuten, nach "Umkehrungen" der dargestellten Sachverhalte zu suchen. Sind die Gegenstände der Erkenntnis als Konstrukte anzusehen, wie das Cassirer Darstellung ergibt, so wäre umgekehrt nach einem Standpunkt zu fragen, der es erlaube, die Konstruktionen als Gegenstände aufzufassen. In der Technik wird insbesondere deutlich, daß die Grundlage unseres Erkennens nicht die Natur als solche allein, sondern gerade die Veränderungen der Natur durch den Menschen sind. Technische Konstruktionen sind nicht einfach Anwendungen theoretisch begründeter Erfindungen oder praktischer Einfälle, sondern entwickeln sich in der Dynamik gesellschaftlich-ökonomischer, wissenschaftlich-technischer und kultureller Kontexte. A. Riedler (1850-1936), ein wichtiger Vertreter der damaligen Technik und Gegner Felix Kleins (1849-1925) in der Auseinandersetzung um das Verhältnis von Technischer Hochschule und Universität, schildert dieses "Werden der Großwirtschaft" während der achtziger und neunziger Jahre des 19. Jahrhunderts am Beispiel des Wirkens von Emil Rathenau (1838-1915), dem Begründer der AEG. "Mit der Gründung der AEG begann die Fabrikation in großem Maßstabe, die schließlich die ganze Elektrotechnik und verwandte Gebiete umfaßte. Im Laufe von drei Jahrzehnten wurden mehrere hundert neue Fabrikationszweige aufgenommen und erfolgreich

ausgestaltet und Großindustrien geschaffen, die es vorher nicht gab. ... Der Zusammenhang dieser ausgedehnten und vielseitigen Fabrikation führte zu der Auffassung: Rathenaus Werk und Ziel war eigentlich die Produktion der Produktion! Er war der Erfinder von Industrien und hat den industriellen Aufbau von Fabrikationen und Unternehmungen erdacht und durchgeführt, wie andere Maschinen erfinden und ausführen". ⁽⁴⁾

Damit ergibt sich die Frage nach einer zweiten "Umkehrung". So wie Durkheim und Rathenau den Prozeß der gesellschaftlichen Arbeitsteilung in seiner Wirkung auf das Subjekt darstellen, so wäre umgekehrt zu fragen, läßt sich der Prozeß der gesellschaftlichen Arbeitsteilung und Spezialisierung aus der Perspektive des Subjekts sehen.

In der Technikwissenschaft hat, wie gesagt, F. Reuleaux (1829-1905) konsequent versucht, die Maschine selbst zum Gegenstand zu nehmen. "In Deutschland", schreibt er in seiner Theoretischen Kinematik, "wird die theoretische Maschinenlehre heute meist richtig an- und aufgefaßt, indem man in ihr die Maschine selbst als Aufgabe und Ausgangspunkt nimmt. Die Franzosen dagegen wissen noch immer nicht loszukommen von der Anschauung, daß die Maschinen nur als Paradigmen der angewandten Mechanik erscheinen, so als Beispiele nur nebenher, wobei nicht klar wird, warum man nicht alle übrigen Anwendungen der Mechanik gleich mit behandelt". Reuleaux vollzieht eine Intellektualisierung der Natur analog zu dem von Cassirer beschriebenen Übergang zum funktionalen Denken. Er reduziert die Maschine dabei auf ein System von "kinetischen Elementenpaaren", die jeweils aus "Haltung und Treibung" nach dem Muster "Zapfen-Lager" bestehen. Auf diese Weise möchte er eine Axiomatik aufbauen und kritisiert, daß statt dessen in der Regel "wie mit einem Sprunge mitten in den Stoff hineingesetzt, auf dem übersprungenen Gebiete aber, welches offenbar das axiomatische ist, ein dichter Schleier belassen" wird.

A. Riedler, Nachfolger und Kritiker Reuleaux', versucht in Ansätzen vor allem die Umkehrung des zweiten Punktes zu leisten, ausgehend von einer Kritik, die derjenigen W. Rathenaus gleicht. "Unsere Zeit bringt gewaltige ungeahnte Veränderungen, eine neue Wirtschaftspolitik und auch neue Wirtschaftsbegriffe. Soll das neue Leben nicht der toten Form, einem aussichtslosen

Staatssozialismus verfallen und in einer wirtschaftlichen Zukunftskaserne enden, so werden die Staatsleiter ganz andere Kräfte benötigen als bisher. Der Staat bedarf Kräfte, die nicht zum bloßen Verwalten, zum Erledigen, sondern zum Erschauen der Wirklichkeit erzogen sind, zum Schaffen und zum richtigen Wirtschaften. ... Die Technik und ein starkes Wirtschaftsleben sind Angelegenheiten aller geworden.⁽⁵⁾ Riedler beklagt den Mangel an Kooperation und die Zersplitterung überall. "Physik, Chemie und Technik gehen getrennte Wege, die Technik ist den Theoretikern unbekannt, während gerade in den Grenzgebieten, wo die verschiedenen Grundrichtungen zusammenfließen, die aussichtsreiche Zukunft liegt. ... Die Praktiker gehen mit den Versuchen nicht weit genug, die Theoretiker kennen die Ziele der Auswertung nicht". Diese Zersplitterung rührt daher, daß nicht erkannt wird, daß "das Wissen selbst eine Tochter der Anwendung (ist), nicht umgekehrt".⁽⁶⁾ Gerade dies scheint einen Gegensatz zwischen Mathematik und Technikerbewegung bzw. zwischen Klein und Riedler auszumachen, wie auch in Riedlers Kritik an Reuleaux. Wirklichkeit, Tätigkeit, Organisation und Arbeit sind zentrale Begriffe der Riedler'schen "Philosophie der Technik". In diesem Zusammenhang steht auch die von Riedler immer wieder betonte Bedeutung der Arbeitsteilung. "Die hohe Vollkommenheit der modernen technischen Betriebe, alle technische Tätigkeit, überhaupt alle Zivilisation beruht auf der Arbeitsteilung, und diese bedeutet Teilung des Wirkungsbereiches und der Verantwortung".⁽⁷⁾

Durch diese beiden Probleme - das Problem des Verhältnisses von Gegenstand und Mittel und das Problem gesellschaftlicher Arbeitsteilung und Spezialisierung auch in den Wissenschaften - ist der Raum abgesteckt innerhalb dessen die Auseinandersetzung zwischen Mathematik und Technik um die Jahrhundertwende betrachtet werden kann. Anders gesagt, betrachten wir die Wissenschaften unter dem Gesichtspunkt ihrer zunehmenden Methodologisierung, so können wir sagen, daß die prinzipiellen Ursachen einer derartigen Methodologisierung einmal in der Vermitteltheit des Gegenstandsbezugs des menschlichen Erkenntnissubjekts liegen, in seiner "Unfähigkeit", die Realität "unmittelbar" geistig zu fixieren und zweitens in der Tatsache, daß auch der wissenschaftliche Erkenntnisprozeß den Gesetzen der gesellschaftlichen Arbeitsteilung und Koordination unterliegt.

Als ein Unterschied zwischen technischer und wissenschaftlicher Tätigkeit wird immer wieder die Tatsache betont, daß die technische Tätigkeit in erster Linie synthetisch ist, in der konstruktiven Synthese vorhandenen Wissens und gegebener Erfahrung besteht, während in der Wissenschaft die analytische Tätigkeit die Hauptrolle spielt. Und wo die Wissenschaft synthetisch wird, bezieht sich die Synthese auf ganz andere, nicht empirische Gegenstände, und es ergibt sich in der Regel ein Konflikt mit der Technik, weil die direkte Übertragung wissenschaftliche Synthesen zu einem szientistischen Anspruch führt.

In der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts sind auch für die Technik zunehmend die Erfordernisse der Verallgemeinerung von Erfahrungen aufgetreten. Das hat in der Regel zu einer stärkeren Orientierung an einer bestimmten Auffassung der Mathematik und der Naturwissenschaften geführt (beispielsweise bei F. Grashoff (1826-1893), dem Mitbegründer und langjährigen Direktor des Vereins Deutscher Ingenieure). Reuleaux andererseits versucht seine eigenständige Begründung der Technikwissenschaft durch eine nach dem Vorbild der Chemie oder der Mathematik konzipierte "kinematische Zeichensprache" zu unterstützen, die vor allem analytisch klassifizierend wirksam gewesen ist, obwohl Reuleaux auch die technische Konstruktion durch einen synthetischen Gebrauch derselben begründen wollte. Dazu fehlten jedoch nicht nur die operativen Möglichkeiten dieser Sprache, sondern der Gegenstand der Technikwissenschaft ließ sich auch nicht in dieser Weise theoretisch eingrenzen. Die beiden oben genannten Aspekte in der Betrachtung der Maschine ließen sich in Reuleaux' szientistischer Konzeption nicht miteinander ins Verhältnis setzen. Reuleaux glaubte, daß bei der Darstellung der Maschinen mit Hilfe dieser Zeichensprache "sich aus der theoretisch-strengen, abstrakten Analysierung zugleich eine unmittelbar anwendbare, allgemeine analytische Darstellung der einzelnen Maschinen" entwickelt.⁽⁸⁾ Ein wesentlicher Punkt im weiteren wird die Unterschiedlichkeit in den Mathematikauffassungen sein, wie sie sich in den genannten Positionen der Technikwissenschaft ausdrückt.

Die den Wissenschaften vergleichbare widersprüchliche Situation der Technik hat insbesondere zu dem Vorschlag der "Unterscheidung einer konstruktiven und einer experimentellen, analytischen Richtung" in der Ingenieurausbildung geführt.⁽⁹⁾ Dies entsprach durchaus der Unterscheidung von theoretischer und technischer Physik oder

den verschiedenen Mathematikauffassungen. Der Schwerpunkt der Schwierigkeiten zwischen der Mathematik und dem Ingenieurwesen lag also woanders. Die Ansprüche der Technik an die Mathematik selbst waren widersprüchlich. Einerseits wurden bestimmte Wissensbestände, wie sie in Formelsammlungen u.ä. niederzulegen sind, benötigt. Andererseits sollte die Mathematik beitragen zur Bildung eines Ingenieurs. Hier schwebte Riedler der Ingenieur als konstruktiv-synthetisierend Tätiger vor, der durch gerade die Teile der Mathematik in seiner Entwicklung gefördert wird, die innerhalb der Mathematik selbst unter den Bedingungen der Arbeitsteilung und Spezialisierung obsolet geworden sind, nämlich die sogenannte synthetische Geometrie der Lage. "An der Hochschule", schreibt Riedler, "wird Geometrie in mathematischer Auffassung gelehrt, analytische Geometrie, die zur Entwicklung des Vorstellungsvermögens nichts beiträgt, aber viel besser vom Geometer gelehrt würde, der nur nach Bedarf die Beziehungen zwischen Raumgebilden und analytischer Rechnung herzustellen hätte. Nur die darstellende und neuere Geometrie könnte die Entwicklung fördern, findet aber keinen Nährboden vor ...".⁽¹⁰⁾ Andererseits ist aus dieser "neueren Geometrie" in Deutschland die Methodologie der modernen Axiomatik in der Mathematik herausgewachsen. Aus der Einheit einer begrifflichen "Anschauung" haben sich eine standardisierte Technisierung der Verfahren und eine zunehmende Abstraktion der Gegenstandsbestimmung herausgebildet. Beides zusammen begründet die Methodologisierung der Wissenschaften, die hier einen wesentlichen Bezugspunkt der Analyse markiert. Weitgehend führt allerdings die Entwicklung zu einer bloßen Methodisierung, die dann gewissermaßen ihr "Gegenteil", nämlich das Bedürfnis nach einer unmittelbar aufgefaßten subjektiven Anschauung hervorruft.⁽¹¹⁾

Das Humboldt'sche Prinzip der "Einheit von Forschung und Lehre" implizierte die Einheit von Wissen und Meta-Wissen, insofern der wissenschaftliche Begriff nur angeeignet und angewendet werden kann, sofern gleichzeitig der Begriff selbst, sein theoretischer Charakter, sein kategorialer Status zum Gegenstand des Lernens wird. Dieses Humboldt'sche Ideal im Sinne einer gesellschaftlichen "Praxis der Theorie" zu verallgemeinern, verlangt, daß die Konstruktionen der Reflexion und Analyse zugänglich werden und daß gleichzeitig die Reflexionen konstruktiv werden. Im Prinzip haben viele der Zeichensysteme, die seit Leibniz zur Darstellung

geometrischer oder kinematischer Verhältnisse ersonnen wurden, etwas derartiges angestrebt. In der Mathematik deutet die Herausbildung der Methodologie des axiomatischen Standpunktes dieses an (auch wenn, wie gesagt, in Deutschland anders als in England oder Italien, die moderne Axiomatik nicht in erster Linie mit den Kalkülsprachen verbunden gewesen ist).

In der industrialisierten Technik wird das eigentliche Problem deutlicher. Die selbstbezügliche Verbindung von Reflexion und Konstruktion oder von Gegenstand und Mittel ist auf den verschiedenen Ebenen der organisierten Tätigkeit neu und in unterschiedlicher Weise zu bewerkstelligen. In das methodologische Selbstverständnis der Wissenschaften ist dieses Problemverständnis erst mit dem Computer wirklich eingedrungen. Erst damit wurden Modularität, Einfachheit, Modell, Algorithmus usw. zu Kategorien, die nicht von vornherein der Totalität der begrifflichen Reflexion kompromißhaft untergeordnet werden.

Im Prinzip hat wohl Reuleaux bereits im Ansatz den Gedanken gehabt, daß durch die Formalisierung des Wissens die soziale Arbeitsteilung in ein dynamisches System der Teilung in schöpferische und nicht schöpferische Tätigkeit übergeht. Er hat aber dies unhistorisch, als schlagartige wissenschaftliche Bewußtheit gedacht, eben szientistisch und ohne gedanklich von den tatsächlichen Mitteln und der tatsächlichen Tätigkeit in der gesellschaftlichen Arbeitsteilung auszugehen. W. Rathenau, und mit ihm Riedler, sieht diesen Gedanken in seiner negativen Schärfe und sucht nach einer von der tatsächlichen Gegenständlichkeit der Problemsituation beherrschten okkasionellen Rationalität als Gegengewicht zum analytischen funktionalen Denken. F. Klein (1849-1925), Riedlers "Kontrahent" auf mathematischer Seite in den Auseinandersetzungen zu Ende des 19. Jahrhunderts, hatte ein ähnliches Empfinden zur Situation, aber er nimmt dabei die Psychologie als Grundlage und nicht die Tatsache der gesellschaftlichen Arbeitsteilung. Daher haben die "reine Mathematik" und der Funktionsbegriff als "Kernstück" derselben für ihn die ausschlaggebende Bedeutung. Möglicherweise liegt das Problem darin, daß zunehmend die Technik (neben anderen Wissenschaften, die sich mit den evolutionären und historischen Aspekten in Natur und Gesellschaft auseinandersetzen) die grundlegenden Bedingungen der methodologischen Konzepte und Denkmodelle lieferte und nicht mehr Mathematik und Sprachwissenschaft.

Karin Reich

Wie die Vektorrechnung in die Differentialgeometrie Eingang gefunden hat.

Zusammenfassung

Moderne Lehrbücher der Differentialgeometrie verwenden in ihren Darstellungen selbstverständlich die vektorielle Schreibweise und die Grundlagen der Vektorrechnung. In älteren Lehrbüchern aber ist dies nicht so. Ein Grund hierfür ist, daß die Differentialgeometrie älter ist als die Vektorrechnung.

Die Differentialgeometrie ist so alt wie die Differential- und Integralrechnung; schon bei Newton und Leibniz sind die ersten Anfänge im Rahmen von Kurvendiskussionen und Tangentenproblemen zu entdecken. Ein eigenes Fachgebiet ist die Differentialgeometrie, meiner Meinung nach, mit Euler geworden, der der Kurventheorie noch die Flächentheorie hinzufügen konnte (Flächenkrümmung 1767, Abwicklung von Flächen zwischen 1766 und 1775). Eine neue Richtung in der Differentialgeometrie ging von C.F.Gauß aus, der gedanklich (aber nicht analytisch) den Flächenbegriff von der Einbettung im Raum befreite und damit die Grundlagen für Riemanns n -dimensionalen Mannigfaltigkeitsbegriff legte.

Die Vektorrechnung ist als eigene mathematische Disziplin wesentlich jüngeren Datums. Ihre Anfänge schufen H.Graßmann (1844 und 1862) und W.R.Hamilton mit seiner Quaternionentheorie (Lehrbuch 1853). Die 3-dimensionalen Vektoren sind aus Hamiltons Quaternionen hervorgegangen, sie sind ein Werk von J.C.Maxwell, O.Heaviside und J.W.Gibbs (1884). Eine hervorragende Rolle bei der Entwicklung der Vektorrechnung spielte dabei die Entwicklung der Elektrodynamik. Die Differentialrechnung leistete keine Forschungsbeiträge zum weiteren Ausbau der Vektorrechnung, es war auch nicht eines ihrer Ziele, speziell die Vektorrechnung zu fördern. Es ist viel eher zu erwarten, daß sich die Differentialgeometrie eines Tages mehr aus didaktischen Überlegungen heraus der Vektorrechnung bedienen würde. Aus diesem Grunde sollen im folgenden die Lehrbücher untersucht werden, die dafür bevorzugt in Frage kommen. Und in der Tat ist die vektorielle Schreibweise nicht nur kürzer, sondern auch übersichtlicher und eleganter.

- (00) Vgl. E. Kapp: Grundlinien einer Philosophie der Technik, Braunschweig 1877, Kap. 10.
F. Reuleaux (1829-1905), Professor des Maschinenbaues in Zürich, seit 1868 Direktor der Berliner Gewerbeakademie und Gründungsrektor der TH Berlin, hat seine "Theoretische Kinematik" 1875 publiziert (Verlag Vieweg Braunschweig). Zu Beginn der Gründerzeit war Reuleaux ein sehr anerkannter Fachmann, dessen Wort in den verschiedenen technischen und wirtschaftlichen Angelegenheiten Gewicht hatte. Sein kinematisches System wurde allerdings von Anfang an kontrovers aufgenommen. Auf den Weltausstellungen in Paris 1867, wie in 1873 und Philadelphia 1876 war er als Jurymitglied tätig, und es waren insbesondere seine "Briefe aus Philadelphia" (als Reprint 1983 im Physikverlag Weinheim erneut erschienen), die die größte Kritik hervorgerufen haben. Er hatte darin die deutschen Weltausstellungs-Beiträge als "billig und schlecht" bezeichnet.
- (01) E. Cassirer: Substanzbegriff und Funktionsbegriff, Berlin 1910.
- (02) E. Durkheim: Les Formes elementaires de la Vie religieuse, Paris 1912, Schlußkapitel.
- (03) W. Rathenau: Zur Kritik der Zeit, Berlin 1912. (Neuabdruck in der Walter Rathenau Gesamtausgabe, herausgegeben von H.D. Hellige und E. Schulin, Bd. 2, München und Heidelberg 1977, S. 59.)
- (04) A. Riedler: Emil Rathenau und das Werden der Großwirtschaft, Berlin 1916, S. 124/126. Zu Riedler, der in der Technikerbewegung zum Ende des 19. Jahrhunderts eine bedeutsame und führende Rolle gespielt hat, noch die folgenden Angaben: Geboren 1850 in Graz, 1871-1875 Assistent an der TH Brunn bzw. TH Wien; 1875-1880 Maschinenkonstrukteur in Wien; 1880-1888 Professor an der TH Aachen; seit 1888 bis zu einer Emeritierung 1921 Professor an der TH Charlottenburg; gestorben 1936 in Wien.
- (05) A. Riedler: a.a.O. S. 228.
- (06) A. Riedler: Die Ziele der Technischen Hochschulen, Zeitschr.d.VDI 40(1896) S. 301-309, hier S. 305.
- (07) A. Riedler: Das Maschinzeichnen, 2. neu bearb. Aufl. Berlin 1919, S. 10.
Eine andere Äußerung Riedlers dazu ist die folgende: "Der Kampf ums Dasein besteht in unserer Zeit, wie er immer bestanden hat. Nur ist er ein organisierter Kampf geworden, der auf der Arbeitsteilung beruht und mit vollkommeneren Waffen, mit Werkzeugen und Maschinen, geführt wird" (A. Riedler: Unsere Hochschulen und die Anforderungen des 20. Jahrhunderts, Berlin 1898, S. 50).
- (08) Vgl. dazu auch O. Mayr: Symbolsprachen für mechanische Systeme im 19. Jahrhundert, Technikgeschichte 35(1968), S. 223-240.
- (09) So- der Vorschlag des Klein-Schülers und Professors an der Technischen Hochschule München, W. v.Dyck (1856-1934) in einer Interpretation der Aachener Beschlüsse des Vereins Deutscher Ingenieure von 1895, Zeitschr.d.VDI 1898, Nr. 46, S. 1276.
- (10) A. Riedler: Zur Frage der Ingenieurerziehung, Berlin 1895, S. 21.
- (11) Derartige Äußerungen finden sich auch allenthalben in den Schriften von Felix Klein; Vgl. beispielsweise seinen Vortrag "Über Arithmetisierung ..."

Das älteste Lehrbuch zur Differentialgeometrie sind vielleicht Cauchys 1826 in Paris erschienene "Lecons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie". Gauß hat kein Lehrbuch verfaßt. Es folgen Lehrbücher der Kurventheorie z.B. von Lamé, Schell und P.Serret und Darstellungen der Differentialgeometrie innerhalb von Lehrbüchern zur Differential- und Integralrechnung, z.B. von Bertrand und J.A.Serret; eine Zusammenfassung der Erkenntnisse gibt z.B. K.Peterson in einem 1868 erschienenen Werk "Über Kurven und Flächen". Jetzt wäre allmählich die Zeit für die Einführung der Vektorrechnung in die Lehrbücher der Differentialgeometrie gekommen, doch fehlt eine solche z.B. in L.Aousts "Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque" (1868), R.von Lilienthals "Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme" (1886) und J.Knoblauchs "Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen" (1888).

Große Berühmtheit erlangte das Lehrbuch "Lezioni di geometria differenziale" von Luigi Bianchi (1856-1928), das erstmals lithographiert 1886 in Rom erschien. Es kam 1899 in deutscher Übersetzung von Max Lukat unter dem Titel "Vorlesungen über Differentialgeometrie" heraus. Diesem Lehrbuch ist die Verbreitung der kurzen Bezeichnungswiese "Differentialgeometrie" zu verdanken. Bianchis Lehrbuch erschien 1902/09 in 2.Aufl. in italienischer Sprache, 1910 in 2.Aufl. in deutscher Sprache, und 1922/23 in 3.Aufl. in italienischer Sprache. Aber, Bianchis Lehrbuch ist ein klassisches Lehrbuch, das ohne die Vektorrechnung auskommt. Auch ohne Heranziehung der Vektorrechnung verfaßte G.Darboux (1842-1917) seine ebenfalls ungemein erfolgreichen Lehrbücher "Lecons sur la théorie générale des surfaces" (1.Aufl.1887-96, 2.Aufl.1914/15) und "Lecons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes" (1.Aufl.1897, 2.Aufl.1910). Bianchi und Darboux beherrschen quasi den Lehrbuchmarkt. Daran ändert G.Scheffers' "Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie", das 1900/02 in 1.Aufl. und 1910 in 2.Aufl. erschienen ist, nur wenig. Aber auch hier vermißt man die vektorielle Darstellung. Dabei gibt es in der Tat Versuche, die Vektorrechnung in die Differentialgeometrie einzuführen, so von H.Graßmann junior (1886-1889), von H.Fehr 1899 und 1907 und von P.Molenbroek 1893. Aber

all diesen Versuchen, die, wenn man so sagen will, von Außen-seitern unternommen wurden, war kein Erfolg beschieden. Der Erfolg blieb Wilhelm Blaschke vorbehalten, der 1885 in Graz geboren, 1908 bei Wirtinger an der TH in Wien promoviert hatte. In eben diesem Jahr 1908 besuchte Blaschke den Internationalen Mathematikerkongress in Rom, wo die Problematik der Vektorrechnung ein besonders wichtiges Thema war. Im Winter 1909/10 befand sich Blaschke in Pisa, wo er an der dortigen Universität L.Bianchi kennen und schätzen lernte. Blaschke folgte 1919 einem Ruf nach Hamburg, wo er bis zu seinem Lebensende blieb.

In der Zwischenzeit war Einsteins "Allgemeine Relativitätstheorie" 1916 erschienen, was für die Differentialgeometrie eine un-gemeine Aufwertung bedeutete. Die weitere Entwicklung der Differentialgeometrie wurde von der Relativitätstheorie entscheidend beeinflußt. So waren es Lehrbücher zur Relativitätstheorie, die zuerst eine Darstellung mit Hilfe der Vektor- und Tensorrechnung vorstellten (z.B.H.Weyl: Raum, Zeit, Materie, 1918).

Blaschkes 1921 erschienenes Lehrbuch "Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie" schaffte den Durchbruch. Ohne darüber im Vorwort ein Wort zu verlieren, wird hier eine Darstellung mit Hilfe der Vektor- und Tensorrechnung vorgestellt.

Blaschkes Lehrbuch war sehr erfolgreich, es erlebte 4 Auflagen 1921, 1924, 1930 und 1945. Eine gekürzte und thematische etwas veränderte Ausgabe erschien 1950 (2.Aufl. gemeinsam mit H.Reichardt 1960).

In der Folgezeit wurde es allgemein üblich, für die Differentialgeometrie den Vektorkalkül zu verwenden, z.B. in A.Duscheks und W.Mayers 1930 erschienenen "Lehrbuch der Differentialgeometrie" oder in L.Bieberbachs Darstellung von 1932.

So hat also die Vektorrechnung nur dank des Katalysators Relativitätstheorie Eingang in die Differentialgeometrie gefunden. Vom heutigen Standpunkt aus mutet das etwas grotesk an, da die Differentialgeometrie schon seit Riemann, Christoffel und Lipschitz mit Tensoren umging. Aber die Tensoren sind eine andere Geschichte, die eben ganz wo anders herkamen als die Vektoren. Diese Tatsache spiegeln auch heutige Differentialgeometriebücher wieder, in denen normalerweise die Vektoren durch Größen und die Tensoren durch ihre Komponenten wiedergegeben werden.