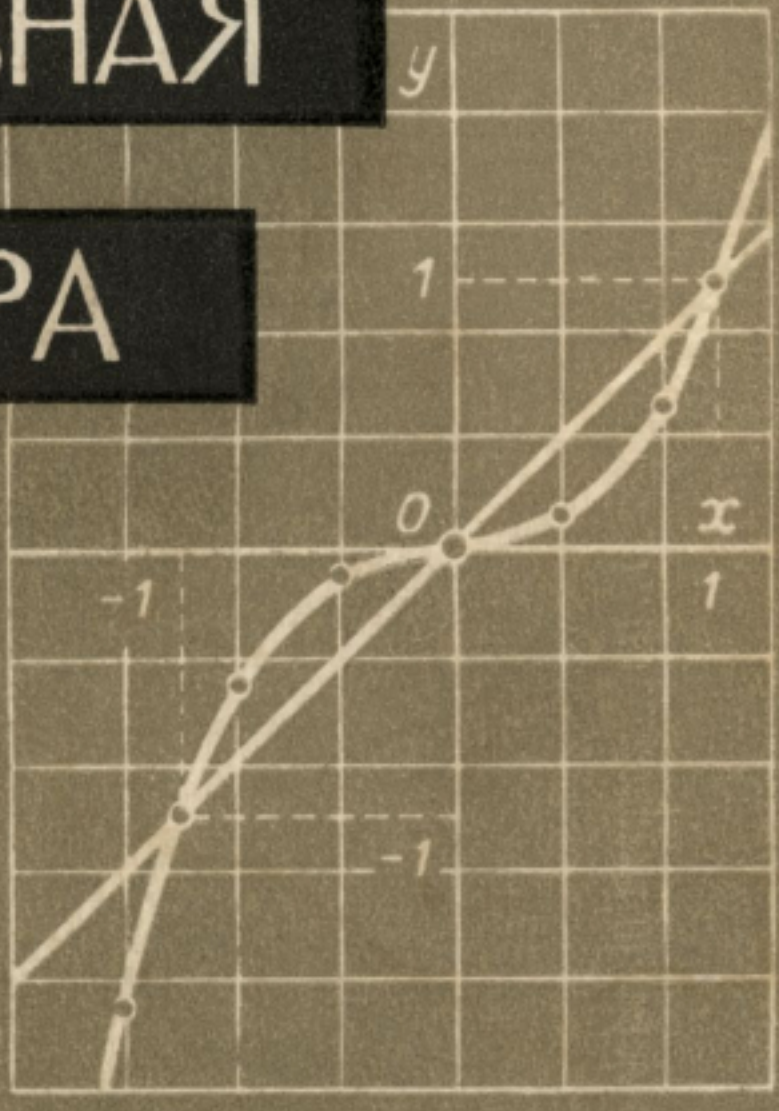
В.Л. ГОНЧАРОВ

НАЧАЛЬНАЯ АЛГЕБРА





ВАСИЛИЙ ЛЕОНИДОВИЧ ГОНЧАРОВ
(1896—1955 гг.)

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
Институт методов обучения

Педагогическая библиотека учителя

В. Л. ГОНЧАРОВ

НАЧАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

Издание второе

Издательство
Академии педагогических наук РСФСР
Москва 1960

Печатается по решению Ученого совета
Института методов обучения АПН РСФСР

Под редакцией
И. Н. ШЕВЧЕНКО

ОТ РЕДАКТОРА

Василий Леонидович Гончаров (1896—1955), член-корреспондент Академии педагогических наук, профессор, крупный ученый — математик и методист.

В течение ряда лет, начиная с 1919 г., Василий Леонидович вел большую преподавательскую работу в университетах, педагогических институтах, технических высших учебных заведениях.

С момента организации Академии педагогических наук РСФСР (1944) он руководил кабинетом (позднее сектором) методики преподавания математики, где вел научно-исследовательскую работу.

В. Л. Гончаровым опубликованы труды, относящиеся к теории приближений функций, теории интерполирования, теории функций комплексного переменного и другим разделам математики.

В. Л. Гончаров является одним из первых больших советских ученых, работавших в области методики преподавания математики. Он — автор и составитель многих методических работ для преподавателей средней школы («Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика в средних классах школы», «Вычислительные и графические упражнения с функциональным содержанием в старших классах школы», «Математика как учебный предмет» и др.).

Василий Леонидович известен так же как переводчик и редактор математической литературы (собрания сочинений Б. Римана, книги Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика» и др.), как участник издания «Энциклопедии элементарной математики».

Предлагаемый вниманию учителей математики курс алгебры В. Л. Гончарова обладает многими интересны-

ми и весьма ценными особенностями. Автор книги — крупный педагог и знаток детской психологии. В книге содержится множество тонких и полезных замечаний, обращенных к читателю и помещенных как раз в тех местах, где есть опасность, что излагаемый материал будет понят превратно. Помимо этого, книга снабжена еще специальными «Методическими указаниями».

При чтении книги бросается в глаза живость изложения. Иллюстрации, примеры, упражнения, задачи подобраны так, что пробуждают интерес даже у того ученика, который не особенно склонен заниматься математикой.

Замысел автора состоял, по его выражению, в том, чтобы его книга служила первой, подготовительной ступенью к изучению математического анализа. Идя к этой цели, автор стремится пронизать свой курс функциональным содержанием. Эта же линия находит свое выражение и в том, что автор широко пользуется при изложении алгебры различными геометрическими интерпретациями.

Все это делает книгу проф. В. Л. Гончарова весьма полезной для школы, особенно в период ее перестройки.

И. Н. Шевченко

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга представляет собой пособие для учителей математики средней школы по алгебре. Институт методов обучения АПН РСФСР, в котором была задумана и выполнена книга, издавал ее уже в качестве макета, по которому проводилась экспериментальная работа в ряде школ. Результаты проверки убедили автора в том, что предлагаемая им система обучения обеспечивает сознательные и прочные навыки учащихся, имеющие основное значение для дальнейшего изучения математики и опирающихся на математику дисциплин, нужных в практической деятельности. Поэтому автор и решил ознакомить с этой системой возможно более широкий круг учителей.

При первом взгляде на страницы книги может возникнуть впечатление, будто здесь предлагается обучать математическому анализу или аналитической геометрии. Но такое впечатление совершенно ошибочно.

Мы хотим, чтобы в процессе преподавания учащимся по разным поводам и в различных формах много раз и даже, можно сказать, на каждом шагу задавался один и тот же элементарный вопрос: «найдите числовое значение данного алгебраического выражения при таких-то значениях входящих букв», или (короче) «подставьте в формулу такие-то значения». В настоящее время этот вопрос не принадлежит к числу особенно излюбленных или настойчиво рекомендуемых. Он незаслуженно забыт. Не удивительно, что учащиеся встречают его пожиманием плеч («нас этому не учили»); лишь в самых редких случаях они прибегают, может быть, к тому, чтобы поставить его самим себе мысленно, по собственной инициативе. Ученые-специалисты по

алгебре считают этот вопрос «неалгебраическим»; у них есть свои причины избегать его, и мы не собираемся их оспаривать.

Однако необходимо проникнуться сознанием того, что учебный, школьный предмет, именуемый «алгеброй», отнюдь не есть первая, подготовительная ступень к изучению современной алгебры в собственном смысле слова, как научной дисциплины, а есть (вместе с другими школьными математическими предметами) первая, подготовительная ступень к изучению математического анализа, издавна и поныне являющегося действенным орудием в руках физика, инженера, техника, исследователя и практика в любой области точного знания.

Сущность математического анализа заключается в применении особого метода (так называемого метода «бесконечно малых»). Конечно, в VI—VII классах не может быть речи о преподавании анализа. Но операция подстановки числовых значений — первый шаг, направленный в сторону анализа, — обязательно должна быть прочно воспринята вслед за введением буквенных обозначений, т. е. в шестом классе. При этом вовсе не важно для данного учащегося, будет он или не будет впоследствии изучать анализ: если операция числовой подстановки не вошла в повседневный обиход с самого же начала и учащийся не мыслит, следовательно, алгебраическое выражение как «функцию входящих букв», то изучение самой алгебры остается бесплодным, не ведет ни к каким ее применениям, сводится к выполнению преобразований над буквенными выражениями по заранее выученным правилам или к решению задач, лишенных практического смысла.

Больше того, операция числовой подстановки должна быть оправданной и целеустремленной, овладение ею — достаточно надежным и свободным (беглым). Ее неоднократное выполнение (в сравнительно простых примерах) — и только это — дает учащемуся возможность делать (быть может, и не вполне логически обоснованные) заключения о том, «как изменяются» — увеличиваются или уменьшаются — значения данного выражения при изменении значений входящей в него (пусть лишь одной) буквы. Это — задача начальной алгебры для VI—VII классов. Ею, правда, можно и отчасти необхо-

димо заниматься еще и в VIII классе, но в IX и X классах приступать к ней впервые уже поздно: там имеются свои, не менее важные, задачи. Та же самая задача продолжает оставаться одной из основных и в курсе анализа; но здесь решительно совершенствуется метод, расширяется запас рассматриваемых функций (математических выражений), растет число независимых переменных (входящих букв), явно ставятся и решаются задачи логического обоснования, отчеканиваются понятия и т. д.

Сравнивать величины (например, числовые значения букв или буквенных выражений), узнавать, которая из них больше, которая меньше, располагать их в том или ином порядке, в порядке возрастания или в порядке убывания, — естественная потребность и право того, кто прибегает к числам как к средству счета и измерения. Каждый располагает наблюдениями, свидетельствующими о том, что представления «больше» и «меньше» возникают в раннем детском возрасте. В процессе обучения они уточняются и укрепляются в курсе арифметики (роль диаграмм в V—VI классах). Но в курсе алгебры неизбежны уже знаки и простейшие свойства неравенств. Знаки неравенств — своеобразная запись количественных отношений.

Если сравнению подлежат несколько однородных величин, то, выбрав масштаб, мы изображаем их отрезками соответствующей длины и условливаемся откладывать отрезки в одном и том же направлении по одной и той же прямой от одного и того же «начала». О «концах» отрезков так же, как и о самих отрезках, можно сказать, что они изображают наши величины (или, если угодно, значения одной величины). Избранная прямая, геометрическое место точек, изображающих всевозможные величины (в том числе и отрицательные), есть «числовая ось», универсальный эталон измерения, линейная протяженность. В историческом плане осознание того, что для изображения величин произвольной физической размерности допустимо пользоваться линейной протяженностью, было в высшей степени замечательным и прогрессивным для математики событием.

Итак, найден способ изображать в виде точек на числовой оси значения одной и той же величины.

Но как изобразить наблюдаемые или возможные пары значений двух величин?

Простейший и единственно интересующий нас способ заключается в том, чтобы, взяв две различные числовые оси (по одной на каждую величину) и совместив их начала, поставить их во взаимно-перпендикулярное положение; затем условиться, что при изображении пары значений двух величин две точки на разных осях заменяются одной точкой, проекциями которой на оси они являются. Теперь каждая точка плоскости изображает пару значений величин; некоторое же геометрическое место точек в плоскости «изображает» («представляет» или «характеризует») зависимость между нашими величинами (также «переменными», «буквами»).

Какова роль указанного выше условия? Это — основной принцип аналитической геометрии; однако в аналитической геометрии положение точки определяется парой чисел, и геометрические задачи решаются средствами алгебры; здесь же (в элементарной алгебре и в анализе) пара чисел изображается точкой плоскости, а зависимость между величинами — некоторым геометрическим местом точек.

Цель всех описанных построений — достижение наглядности, той степени наглядности, которая позволяет увидеть всю картину сразу.

В плане обучения возможный путь к пониманию изложенного идет не иначе, как от конкретных примеров. Учащемуся достаточно самостоятельно проделать несколько упражнений из главы II предлагаемой книги, чтобы понять идею. Далее она получает некоторое развитие в направлении аналитической геометрии. Так, например, выясняется * при изучении прямой пропорциональности, что таковая «изображается» прямой линией, проходящей через начало координат, а при изучении обратной пропорциональности, что таковая «изображается» некоторой кривой линией, название которой (гипербола) можно сообщить учащимся **.

---

* Но не «доказывается»: это может быть сделано только в курсе геометрии с привлечением теории подобия.

** Не имеется в виду, однако, сообщать определение гиперболы.

Подчеркиваем еще раз, что в нашем пособии ни в какой мере не предлагается обучать аналитической геометрии. Действительно, здесь нет задач геометрического содержания, которые требовалось бы решать с помощью координатного метода*; нет употребления каких бы то ни было формул аналитической геометрии.

Следует также отметить, что в нашем пособии для VI класса дано лишь некоторое представление о графиках (см. § 11, две последние строчки объяснительного текста перед упражнением 33); понятие о графике как о геометрическом месте точек дается в VII классе.

Сообщение учащимся VI—VII классов тех или иных сведений из аналитической геометрии, не содержащихся в книге**, оказалось бы идущим вразрез с намерениями автора.

Заметим еще по поводу геометрических представлений, что нами не предусмотрено делать их объектом изучения, а ожидается, что они станут средством осмысливания рассматриваемых математических фактов.

Посмотрим теперь, что требуется от преподавателя, которому пришлось бы работать в классе по данной книге.

Необходимыми предпосылками для этой работы являются:

1) понимание замысла системы преподавания;

2) методическая подготовка преподавателя, соответствующая этой системе.

Естественно, что в дальнейшем мы остановимся преимущественно на вопросе о подготовке. Замысел может стать ясным читателю, который бегло познакомится с книгой и просмотрит вступительную статью к «Методическим указаниям»***; но сделать это — не значит приобрести методическую подготовку.

---

* Такие задачи были бы возможны, но мы предпочли бы отнести их к курсу элементарной геометрии, располагающему достаточным запасом времени.

** Мы не решились сделать предложение, касающееся упрощения кое-какой терминологии («оси», «абсцисса», «ордината» и пр.).

*** В. Л. Гончаров, Методические указания для преподавателей к материалу по алгебре (VI класс.), М., изд-во АПН РСФСР, 1954.

Речь идет о совокупности хотя очень простых, но довольно разнообразных профессиональных навыков, которыми с известной степенью совершенства должен обладать преподаватель, намеревающийся в классе при участии учащихся рассматривать вопросы с функциональным содержанием.

Вот некоторые примеры.

При посещении урока, посвященного сложению положительных и отрицательных чисел, обнаруживается, что каждый из пяти-шести учеников, вызванных к доске, стирает с доски все и снова чертит «числовую прямую» с масштабными пометками: здесь нужен некоторый уровень графической точности; однако учащиеся делают это наспех, небрежно, приходят в итоге к разного рода несообразностям. Если это имеет место, то учебное время растрачивается впустую по вине преподавателя, не освоившего техники ведения урока.

В другом классе иные учащиеся, как показывают контрольные работы, долгое время не могут освоить числовой прямой. Анализ показывает, что преподаватель избегает дробных координат; непосредственной же причиной неусвоения является то, что учащиеся с числами (целыми) сопоставляют не точки, а «клеточки» (т. е. отрезки). Учитель же не замечает, в чем дело *.

Учителю, желающему овладеть необходимыми навыками, мы даем совет: познакомившись с общим содержанием книги и вводными общими частями методических указаний, приступить к ее самостоятельному изучению, обдумывать параграф за параграфом объяснительный текст и тщательно проделывать упражнение за упражнением, прорабатывая вместе с тем и методический комментарий. Постарайтесь поставить себя в положение ученика: его глазами прочесть каждый абзац, его руками проделать каждое упражнение. Еще лучше, если вы выполните эту предварительную работу совместно с сыном, дочерью, знакомым мальчиком или девочкой. Нет сомнения, что автор не во всем сумеет убедить читате-

---

* Многочисленные примеры разнообразных промахов приведены в статье «Анализ контрольных работ, проведенных при проверке учебника алгебры (VI класса)», напечатанной в «Известиях АПН РСФСР», 1951 г., выпуск 56, стр. 187—252; см. в этом же выпуске «Известий» обзорную статью В. Л. Гончарова «Итоги проверки опытного учебника алгебры для VI класса», стр. 155—186.

ля — по многим вопросам, возможно главным, останутся разногласия. Но после такого рода подготовки система преподавания будет понята, замысел будет схвачен, и можно будет приступить к дальнейшей работе.

Для тех читателей, которые по ознакомлении с книгой пожелают использовать ее в практике преподавания частично, ниже приводится примерный перечень важнейших методических предложений, сделанных в данном пособии. Конечно, не все предложения в одинаковой степени связаны с основным замыслом книги и лишь немногие из них оригинальны; излишне говорить, что принципиальное значение их не равноценно.

1. Начинать алгебру не «от текстовой задачи», а «от формулы».

2. Наряду с формулами, выведенными из условия задачи, пользоваться также и эмпирическими формулами (описательного или нормативного характера).

3. Широко применять табличную запись; в частности, запись в виде «двойных» таблиц (таблиц «с двумя входами»).

4. Завести в классе доску, разлинованную по квадратам.

5. Пользоваться клетчатой бумагой при классной и домашней работе.

6. В часы, предназначенные для арифметики, уделить время для составления диаграмм (столбчатых, прямоугольных, секторных) и организации соответствующей домашней работы. Это можно сделать за счет решения алгебраических задач арифметическими методами.

7. Пользоваться «алгебраическим» определением прямой и обратной пропорциональности (см. § 9 и 10).

8. При изучении пропорциональности пользоваться табличками (см. примеры 73—77 и 80—84).

9. Задачи на пропорциональное деление решать алгебраически, принимая в качестве неизвестного коэффициент пропорциональности.

10. Пользоваться постоянно (при каждом удобном случае) оборотами речи: «подставить» числовое значение вместо буквы; такая-то величина при таких-то обстоятельствах «возрастает», «убывает», также «достигает наибольшего или наименьшего значения».

11. Наряду с построением отдельных (заданных) точек графиков строить подобным же образом «движе-

ния» точки по уравнениям на прямой и на плоскости (см. примеры 174, 175 и 245).

12. Уделить место «повторению арифметики в буквенной форме» (гл. III).

13. Поставить на видное место формальные законы арифметических действий (из коих иные ныне даже не упоминаются).

14. Уравнения начинать как можно раньше.

15. Начинать уравнения раньше повторения арифметики в буквенной форме, прибегая к ним в связи с отношением между прямыми и обратными действиями.

16. Ввести уже в арифметике «числовой луч».

17. Изучение отрицательных чисел начинать при помощи числовой прямой и вести далее в теснейшем соприкосновении с нею.

18. Считать «расстояние» основным понятием, доступным детскому возрасту; с помощью «расстояния» определять «абсолютное значение» числа.

19. При изучении действий с положительными и отрицательными числами в качестве вспомогательного средства ввести в употребление подвижную (двойную) линейку, подобную логарифмической, но с равноотстоящими пометками.

20. Уделить место неравенствам в VI классе, притом в связи с числовой прямой.

21. С помощью числовой прямой добиться отчетливого понимания того, что любое значение величины, отличное от целого числа, может быть приближенно (с заранее назначенной точностью) представлено десятичной дробью.

22. Добиться раннего овладения правилами округления чисел.

23. Уделить исключительное внимание действиям с нулем и единицей, взывая при этом и к логике и к здравому смыслу.

24. Мотивируя правило знаков при умножении, пользоваться уравнением прямой линии, проходящей через начало координат (см. пример 243).

25. Сообщить учащимся правильные, обоснованные и прочные знания по поводу равенства нулю произведения и дроби.

26. Добиться от всех учащихся понимания того, что буква не всегда обозначает целое положительное число,

что не всегда также являются целыми положительными числами числитель и знаменатель дроби.

27. Обратить особенное внимание на усвоение всеми учащимися оборотов речи «на столько-то больше», «во столько-то раз больше». Каковы бы ни были значения букв a, b и т. д., понимать утверждение «a на m больше, чем b» как равносильное равенству «$a - b = m$», а утверждение «a в m раз больше, чем b» — как равносильное равенству «$\frac{a}{b} = m$».

28. Понятие об уравнении вводить вне связи с текстовыми задачами.

29. В процессе преподавания не избегать уравнений, имеющих несколько корней или не имеющих корней, — даже на первом году обучения алгебре.

30. Отказаться от «теории равносильности уравнений» в начальном курсе алгебры.

31. При решении уравнений изредка прибегать к «методу проб» — в качестве индукции и в целях развития функционального образа мыслей.

32. При решении уравнений уже начиная с VI класса в основном пользоваться свойствами равенств. «Перенесение из одной части в другую» применять только после длительной тренировки.

33. Различать не два, а четыре свойства равенств (по числу арифметических действий).

34. Прекратить рассмотрение дробных уравнений с так называемыми «паразитными» корнями.

35. В качестве неизвестных в уравнениях вводить различные буквы алфавита.

36. В начальном курсе отказаться от заучивания правил действий со степенями. Возведение в степень (целую положительную) рассматривать как сокращенное обозначение повторного умножения.

37. Наряду с числовыми подстановками рассматривать также и буквенные; использовать их для вывода тождеств из законов арифметических действий.

38. Основные формулы умножения, как и законы действий, подвергать заучиванию в буквенной форме, требуя по мере надобности словесного чтения буквенных записей.

39. Независимо от курса геометрии дать в курсе алгебры (в связи с формулами для квадрата суммы и

разности) вывод теоремы Пифагора с применениями к числовым примерам.

40. Применять «выделение квадрата из трехчлена второй степени», в частности при разложении его на множители.

41. Прекратить разложение на множители трехчлена второй степени «методом группировки».

42. Текстовую задачу в алгебре рассматривать не как «практическое приложение» теории уравнений, а как полезное учебно-вспомогательное средство.

43. Практиковать к р а т к о е объяснение при составлении уравнения к текстовой задаче с выделением силлогистического момента.

44. В качестве знака деления пользоваться преимущественно горизонтальной чертой; записи вроде $\frac{3}{4}x$ или $\frac{3x}{4}$ считать равнозначащими и при употреблении не делать между ними различия.

45. Вместо «сомножители» говорить «множители». Вместо «формулы сокращенного умножения» говорить «основные формулы умножения».

46. Не пользоваться терминами «рациональные числа», также «действительные», или «вещественные», числа. Имея в виду все точки числовой прямой, говорить «все точки» или «все числа». Точку на оси времени называть «момент», отрезок на оси времени называть «промежуток времени».

Читатель, выбрав те пункты из приведенного перечня, с которыми он согласен, сможет попытаться провести их в жизнь, пользуясь при этом пособием как сжатой методической разработкой. Дальнейшее развитие этой разработки без нарушения общего духа системы, с нашей точки зрения, вполне желательно.

«Частично», т. е. в выборочном порядке, таким образом в классе могут быть пройдены отдельные главы или параграфы; могут быть взяты из пособия также те или иные задачи, в частности из «Общих повторительных упражнений» (стр. 328).

В случае недостатка времени преподаватель может примеры и параграфы, отмеченные звездочкой (*), опускать и откладывать на время повторения.

Глава I

БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Употребление букв. Составление формул

Когда хотят назвать какое-нибудь число, то произносят его наименование или записывают его цифрами, например 2 (два).

Когда хотят сказать о числе, не указывая, о каком именно, то обозначают его буквой. Так делают по разным причинам: например, потому, что упоминаемое число неизвестно, или потому, что безразлично, чему именно оно равняется.

При решении задач приходится встречаться с различными величинами, определяемыми условиями задачи. Каждая величина может иметь то или иное числовое значение, т. е. выражаться тем или иным числом. Очень часто, обозначив величину буквой, в случае надобности вместо буквы подставляют числа.

Предположим, например, что величина, которую мы рассматриваем, есть число уроков в классе: обозначим эту величину буквой a. Если сегодня было, допустим, пять уроков, то a равно 5; если завтра будет четыре урока, то можно будет написать: $a = 4$; в воскресенье совсем нет уроков, и потому $a = 0$.

Различные величины, чтобы избежать смешения, обозначают различными буквами.

Так, можно обозначить число классных уроков через a, а число часов домашних занятий через b.

Если захотим узнать, сколько было всего часов учебных занятий (и классных и домашних), то придется написать $a + b$.

С числами, которые обозначены буквами, обращаются, как со всякими числами: их можно сравнивать по величине, а также складывать, вычитать, умножать и делить. Нередко числа и буквы встречаются одновременно.

Знаки действий с буквами — те же, что и с числами. Нужно только обратить внимание на две особенности.

1) В качестве знака умножения принята точка, а не косой крест; но ради краткости точка большею частью вовсе опускается.

2) Двоеточие как знак деления малоупотребительно: результат деления обыкновенно записывается в виде дроби.

Таким образом, сумма, разность, произведение и частное (отношение) величин, обозначенных буквами a и b, записываются следующим образом:

$$a+b,\ a-b,\ a\cdot b \text{ или } ab,\ \frac{a}{b} \text{ (реже } a:b).$$

Необходимо ясно понимать, что если, например, величине a придается значение 5, а величине b — значение 3 (т. е. $a=5$, $b=3$), то сумма $a+b$ имеет уже не иное значение, как $5+3$, так что $a+b=8$; точно так же в этом случае $a-b=2$, $ab=15$, $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$.

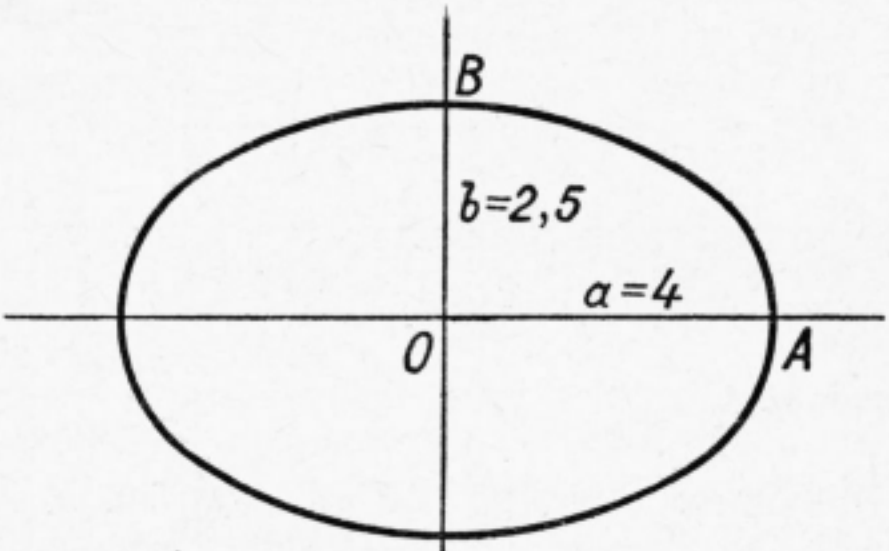
Записи, составленные из математических знаков, чисел, букв и знаков действий, а также знаков равенств или неравенств, носят название формул.

Вот какие формулы пишут студенты, которые учатся в университете (черт. 1).

Формулы, которые составлены из чисел, букв и знаков действий и не содержат знаков равенства или неравенства, называются также алгебраическими (буквенными) выражениями. Вот примеры алгебраических выражений:

$$x+y+z,\ 3a+5,\ \frac{p}{rs},\ \frac{u-v}{u+v}.$$

Если в данном выражении совсем нет букв, а есть только числа и знаки действий, то его называют также



$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \approx 0{,}61$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= a\left\{2\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4\ldots\ldots 2n}\,\varepsilon^{2n}\int_0^{2\pi}\cos^{2n} t\,dt\right\}$$

$$= 2\pi a\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 \frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1}\right\}$$

$$= 2\pi a\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{2^{4n}\cdot(n!)^4}\,\frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1}\right\}$$

$$= 2\pi a\left\{1-\frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 - \ldots\right\}$$

$$\approx 2\cdot 3{,}14\times 4\left\{1-\frac{1}{4}\cdot 0{,}37 - \frac{3}{64}\cdot 0{,}14 - \ldots\right\} = \ldots$$

Черт. 1

арифметическим (числовым); таковы выражения:

$$\frac{1+2+3}{3},\ 7\cdot 11\cdot 13,\ \frac{0{,}27}{1{,}19-1{,}12}.$$

Арифметика учит обращаться с числами, алгебра — с буквами и формулами.

Упражнение 1.

1. Карандаш стоит 25 коп., а перо 5 коп. Напишите числовое выражение, обозначающее стоимость 7 карандашей и 6 перьев.

Напишите буквенное выражение, обозначающее стоимость m карандашей и n перьев.

Обозначьте через z стоимость m карандашей и n перьев и напишите формулу, выражающую z через m и n.

По этой формуле посредством подстановок вычислите стоимость:

1) 7 карандашей и 6 перьев,
2) 3 карандашей и 10 перьев,
3) 10 карандашей и 3 перьев.

2. Куплено 15 карандашей и 4 пера. Сколько придется заплатить за покупку, если карандаш стоит p коп., а перо q коп.?

Обозначая через z стоимость этой покупки, составьте формулу для z. По этой формуле подсчитайте, какова будет стоимость покупки, если:

1) карандаш стоит 25 коп., а перо 5 коп.,
2) карандаш стоит 32 коп., а перо 3 коп.,
3) карандаш стоит 15 коп., а перо 4 коп.

3. Карандаш стоит p коп., а перо q коп.

Напишите формулу для z, где z — стоимость m карандашей и n перьев. Вычислите по этой формуле стоимость покупки при следующих данных:

1) $m=15,\ n=4,\ p=15,\ q=4;$

2) $m=8,\ n=10,\ p=20,\ q=3.$

Скажите условия тех арифметических задач, которые вы только что решили.

Упражнение 2.

4. Я продвигаюсь со скоростью 12 *км* в час верхом и со скоростью 5 *км* в час пешком. Какой путь я сделаю, если проеду верхом h часов и затем пройду k часов?

Обозначая через s весь сделанный путь (в километрах), выразите s через h и k. По полученной формуле посредством числовых подстановок вычислите длину пути, сделанного после:

1) трех часов верховой езды и двух часов ходьбы, 2) восьми часов верховой езды и семи часов ходьбы.

5. Я буду ехать верхом 3 часа и затем идти 2 часа. Какой путь я сделаю при условии, что скорость езды равна u *км* в час, а скорость ходьбы — v *км* в час? Обозначив через s сделанный путь, напишите формулу для s. Вычислите по этой формуле значение s при данных: 1) $u = 12$, $v = 5$; 2) $u = 15$, $v = 4$; 3) $u = 20$, $v = 6$.

6. Напишите формулу для сделанного пути s после h часов верховой езды и k часов ходьбы, если известна скорость езды — u *км* в час и скорость ходьбы — v *км* в час. Вычислите по этой формуле длину пути s при данных

1) $h=3$, $k=2$, $u=12$, $v=5$;

2) $h=5$, $k=3$, $u=9$, $v=4$.

Скажите условия арифметических задач, которые вы только что решили.

Упражнение 3.

7. На заводе за работу столяр получает по x руб., слесарь по y руб. в день.

Сколько получат a столяров за r дней и b слесарей за s дней?

В полученной формуле сделайте подстановку:

$$a=20,\ b=7,\ x=30,\ y=35,\ r=20,\ s=12$$

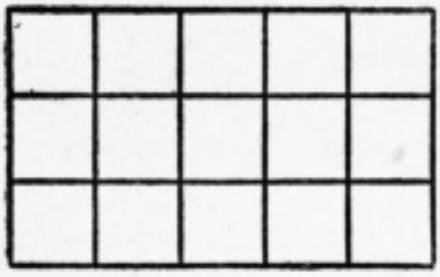
и скажите условие решенной таким образом задачи.

Упражнение 4.

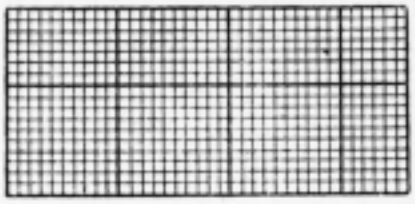
8. Площадь прямоугольника с основанием 5 *м* и высотой 3 *м* равна 15 *кв. м* (черт. 2).

Каков масштаб чертежа?

Какова площадь прямоугольника с основанием 13 *м* и высотой 9 *м*? С основанием *b* *м* и высотой *h* *м*? Напишите формулу, выражающую площадь *S* прямоугольника через *b* и *h*.



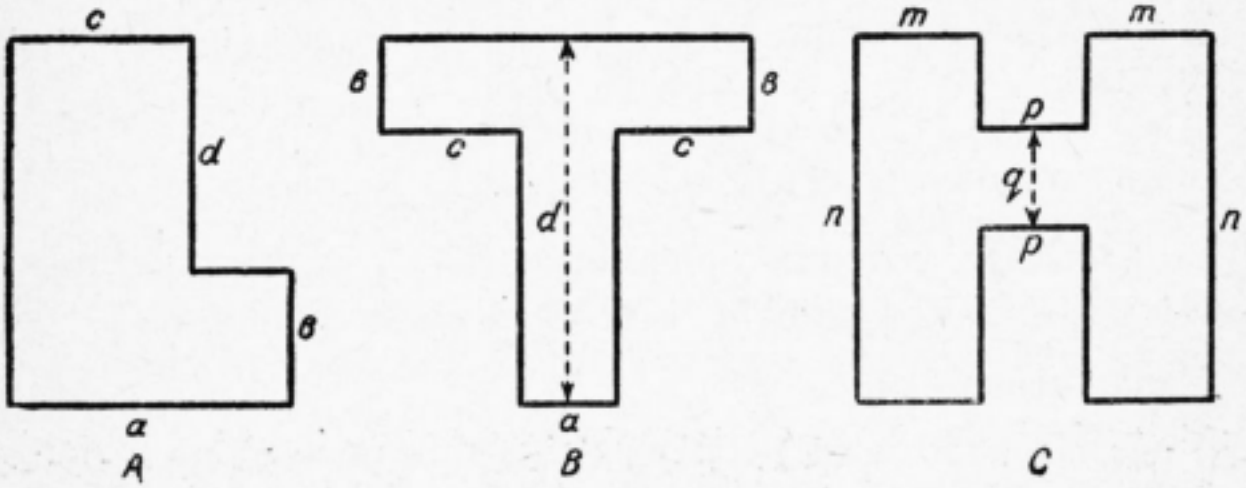
Черт. 2



Черт. 3

На черт. 3 изображен прямоугольник с основанием 3,6 *см* и высотой 1,7 *см*. Вычислите его площадь по формуле и проверьте, подсчитывая на чертеже квадратные миллиметры.

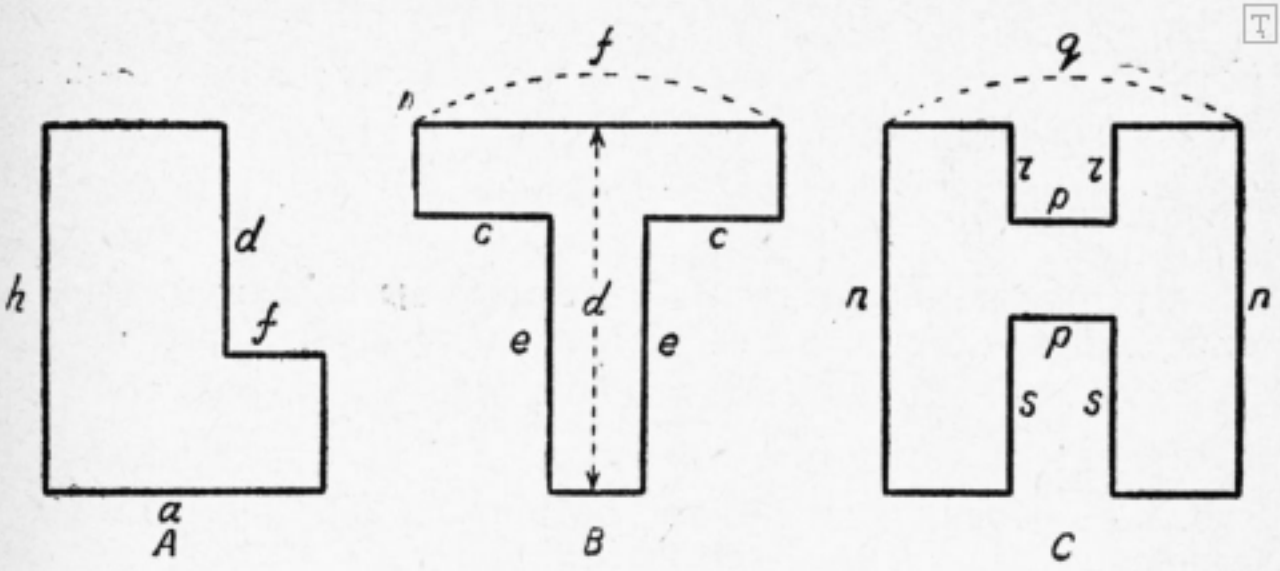
Установите с помощью измерительной линейки, каков масштаб этого чертежа.



Черт. 4

9. Рассмотрите фигуры *A*, *B*, *C*, изображенные на черт. 4. Принимая во внимание указанные буквами размеры (в миллиметрах), напишите формулы площадей. Измерьте отрезки, обозначенные буквами, и путем подстановки в формулы найдите числовые значения площадей.

10. Принимая во внимание указанные буквами размеры отрезков, напишите формулы площадей фигур,



Черт. 5

изображенных на черт 5. Измерьте отрезки, обозначенные буквами, и путем подстановки числовых значений в формулы определите числовые значения площадей.

§ 2. Подстановка числовых значений в формулу и составление таблиц по формуле

Математическая формула, выражающая какую-нибудь величину через другие данные величины, указывает, какие действия и в каком порядке нужно выполнить над данными величинами для того, чтобы получить величину, которая нас интересует. Если имеется формула, достаточно заменить содержащиеся в ней буквы их числовыми значениями и произвести над ними арифметические действия, чтобы иметь значение нашей величины..

Формула не занимает много места; она легко запоминается; в сжатом виде она содержит решение множества задач, различных по числовым данным, но сходных по содержанию.

При составлении (или, как говорят, при выводе) формулы решающему ту или иную задачу необходимо понимать и уметь объяснить, по какой причине или с какой целью выполняется каждое отдельное действие, указанное формулой. Не всякую формулу легко вывести. Вывод некоторых формул более или менее затруднителен.

Гораздо легче пользоваться уже готовой формулой.

Вот примеры формул (которые мы не будет выводить). Результаты вычислений, по ним произведенных, следует считать приблизительными.

Упражнение 5.

11. Зная номер ботинок, которые вы носите, можно определить номер валенок по следующей формуле:

$$B = \frac{2}{3} A + 1,$$

где A — обозначает номер ботинок, а B — номер валенок.

Вычислите по этой формуле размер валенок, если номер ботинок равен 22, 25, 28, 32, 34, 35, 36*.

12. Нормальное число H часов ежедневного сна в возрасте до 18 лет, по мнению врачей, дается формулой

$$H = 8 + \frac{18 - T}{2},$$

где T — возраст в годах. После 18 лет достаточно всем спать по 8 часов в сутки.

Определите по формуле, сколько часов следует спать ежедневно: 1) новорожденному ребенку, 2) 4-летнему ребенку, 3) 12-летнему ребенку, 4) каждому из ваших братьев и сестер.

В следующих упражнениях при вычислении значения какой-нибудь величины по заданной формуле вам придется выполнять ряд числовых подстановок. Вы будете располагать результаты в виде таблицы.

Если такая таблица составлена очень внимательно и аккуратно, то ей можно доверять и ею удобно пользоваться.

Формулы с одной буквой. Таблица составляется из двух рядов чисел: один ряд содержит числовые значения буквы, подставляемые в формулу, другой — те значения рассматриваемой величины, которые получаются по формуле. Располагают эти ряды чисел по строкам (горизонталям) или по столбцам (вертикалям) — смотря как удобнее. При составлении таблицы букве, входящей в формулу, дают равноотстоя-

---

* Округляйте до целых чисел.

щие значения — таким образом, чтобы каждое следующее значение было больше предыдущего на одно и то же число (шаг таблицы). Если при вычислении получаются дробные значения величины, то, записывая в таблицу, их обыкновенно округляют в десятичных дробях.

Упражнение 6.

13. Пользуясь формулами для определения номера валенок $B = \frac{2}{3}A + 1$, составим следующую таблицу:

A	32	33	34
B	22		

Продолжите ее вперед (до $A = 42$) и назад (до $A = 22$).

14. Составьте таблицу для нормального числа часов ежедневного сна в зависимости от возраста, пользуясь формулой:

$$H = 8 + \frac{18 - T}{2}.$$

Положите $T = 0; 1; 2; \ldots; 18$.

15. По формуле

$$y = \frac{10}{x}$$

составьте таблицу значений величины y, давая x целые значения от 1 до 10 и округляя значения y до сотых долей.

Формулы с двумя буквами. Если формула содержит две буквы, то таблица имеет более сложный вид. Равноотстоящие значения одной из букв выписывают в исходном столбце (вертикали), равноотстоящие значения другой буквы — в исходной строке (горизонтали); значения, получаемые в результате вычисления, помещают в надлежащих местах внутри таблицы. Таким образом получается таблица с двойным входом.

Вам прекрасно известен простейший пример таблицы с двойным входом: это — обыкновенная таблица умножения. Она составлена по формуле:

$$z = xy.$$

Начало таблицы имеет вид:

x \ y	1	2	3	..
1	1	2	3	...
2	2	4	6	...
3	3	6	9	...
...	...	...	...	...

Упражнение 7.

16. Составьте таблицу умножения с двойным входом по той же формуле $z = xy$, давая буквам x и y значения: 1) $x = 3, 5, 7, 9$; $y = 10, 20, 30$; 2) $x = 300, 400, 500$; $y = 2, 3, 4, 5$; 3) $x = 4, 6, 8, 10$; $y = 10, 15, 20, 25, 30$.

17. Составьте таблицу сложения с двойным входом по формуле $z = x + y$, давая буквам x и y целые значения в пределах первого десятка.

18. Пароход за t часов прошел по реке s *км*. С какой скоростью он двигался?

Положите: $t = 2, 3, 4, 5$; $s = 12, 18, 24, 30$.

Сколько задач вы решили?

Запишите их решения в форме двойной таблицы.

§ 3. Словесное чтение формул и запись их под диктовку

Из арифметики известно, что означают слова «сумма», «разность», «произведение» и т. п. Скажем кратко относительно употребления подобного рода наименований в алгебре. В алгебре обыкновенно не различают «множимое» и «множитель»: перемножаемые числа или выражения называют «сомножителями» или (гораздо чаще) просто «множителями». Вместо «частное, получаемое при делении одного числа на другое», говорят короче: «отношение одного числа к другому». Вместо «частное, получаемое при делении единицы на данное число», говорят: «число, обратное данному»*.

* Говорят также «величина, обратная данной» — если речь идет о буквенном выражении.

Упражнение 8.

19. Напишите числа (величины), обратные следующим:

$$2,\ 10,\ \frac{3}{4},\ 1\frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{7},\ x,\ 3y,\ x+y,\ uv,$$

$$\frac{5}{7},\ \frac{a}{7},\ \frac{5}{b},\ \frac{a}{b},\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{a-b},\ \frac{3p}{q},\ \frac{r}{55},\ 0{,}3\,u.$$

20. Составьте число, обратное данному числу a; затем составьте число, обратное полученному числу.

Скобки в алгебре употребляются так же, как и в арифметике: они определяют порядок действий в том смысле, что сначала надлежит выполнить действие, указанное внутри скобок.

При отсутствии скобок умножение выполняют раньше сложения и вычитания. Например, в формуле $a + bc$ подразумевается, что сначала нужно умножить b на c, затем полученное произведение прибавить к a. Напротив, если требуется сначала к a прибавить b, а затем полученную сумму умножить на c, то придется формуле придать вид $(a + b)c$.

По поводу употребления скобок при делении говорить незачем, так как деление в алгебре большей частью обозначается посредством горизонтальной черты, причем сама черта играет роль скобки. Таким образом, запись $a + \frac{b}{c}$ означает, что сначала нужно b разделить на c, затем полученное частное прибавить к a; если же требуется сначала к a прибавить b, затем полученную сумму разделить на c, то пишут также без скобок $\frac{a+b}{c}$

Упражнение 9.

21. Формула $n(n + 1)$ обозначает, что сначала нужно к числу n прибавить единицу, а затем на то, что получится, умножить число n. На вопрос: «Что здесь написано?» — следует ответить: «Здесь написано произведение числа n на сумму числа n и единицы».

Подобным же образом объясните своими словами, в каком порядке следует выполнять действия в следующих формулах и ответьте на вопрос: что здесь написано?

1) $(a+b)+c$, 2) $a+b+c$, 3) $a+(b+c)$, 4) $(ab)c$,

5) abc, 6) $a(bc)$, 7) $a+b-c$, 8) $(a+b)-c$,

9) $a+(b-c)$, 10) $\frac{ab}{c}$, 11) $a\cdot\frac{b}{c}$, 12) $a-b+c$,

13) $(a-b)+c$, 14) $a-(b+c)$, 15) $\frac{a}{b}\cdot c$, 16) $\frac{a}{bc}$,

17) $a-b-c$, 18) $(a-b)-c$, 19) $a-(b-c)$, 20) $\frac{a}{b}:c$,

21) $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$, 22) $a:\frac{b}{c}$, 23) $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$, 24) $\frac{ac}{b}$.

Вычислите значения выражений 1) — 24), полагая в них:

$$a=10,\ b=5,\ c=2.$$

Упражнение 10.

22. Объясните, что здесь написано:

1) $2x$, 2) $3y$, 3) $2x+3y$, 4) $2x-3y$, 5) $2x\cdot 3y$,

6) $\frac{2x}{3y}$, 7) $mn+p$, 8) $m(n+p)$, 9) $\frac{m}{n}+p$,

10) $\frac{m}{n+p}$, 11) $ab+cd$, 12) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, 13) $(a+b)(c+d)$,

14) $ab-cd$, 15) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$, 16) $\frac{a+b}{c+d}$, 17) $\frac{a-b}{c-d}$,

18) $\frac{ab}{cd}$, 19) $(ab)(cd)$, 20) $(a-b)(c-d)$.

Положите в примерах 1) — 6): $x=6,\ y=1$.

» » 7) — 10): $m=60,\ n=2,\ p=3$,

» 11) — 20): $a=30,\ b=10,\ c=6,\ d=3$.

Упражнение 11.

23. Запишите в виде формул то, что выражено словами:

1) произведение суммы чисел a и b на их разность,

2) отношение суммы чисел a и b к их разности,

3) сумма произведения и отношения чисел a и b,

4) разность произведения и отношения чисел a и b.

Вычислите значения полученных в примерах 1) —4) выражений при $a = 12$, $b = 4$.

24. 1) Напишите сумму и разность чисел, обратных величинам p и q.

2) Напишите сумму и разность чисел, обратных величинам m и $m + 1$.

§ 4. Уравнения

Упражнение 12.

25. Постарайтесь д о г а д а т ь с я, при каком числовом значении буквы x будет верно каждое из следующих равенств:

1) $x + 8 = 15$, 2) $5 + x = 20$, 3) $x - 13 = 7$,

4) $12 - x = 1$, 5) $x \cdot 3 = 24$, 6) $2x = 5$,

7) $\frac{x}{3} = 24$, 8) $\frac{12}{x} = 2$.

26. В первом из примеров пункта 25 вопрос можно поставить следующим образом:

«К какому числу нужно прибавить 8, чтобы получилось 15?»

Или:

«Нужно найти число, сумма которого с числом 8 равна 15».

Поставьте подобным же образом вопросы, относящиеся к примерам 2) —8).

27. Рассмотрите равенство

$$5x - 2 = 4x + 3.$$

Попробуйте подобрать такое числовое значение x, при котором это равенство оказывается верным. Попробуйте сформулировать вопрос словами: «Нужно найти число, обладающее таким свойством:...»

Равенство между двумя числами (или числовыми выражениями) может быть или верным, или неверным. В е р н о* оно в том случае, если левая и правая его

---

* Вместо «равенство верно» говорят также «равенство справедливо» или «имеет место».

части представляют собою одно и то же число; неверно, если числа различны. Так, равенства

$$1+2=3, \quad 5\cdot 7=35$$

являются верными; равенства же

$$2\cdot 2=5, \quad \frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2+4}{3+5}$$

неверны. Неверные равенства свидетельствуют о сделанной ошибке.

Предположим теперь, что некоторое равенство содержит в какой-нибудь из двух частей или в обеих частях только одну букву, значение которой не указано. Такое равенство может быть верным при одном числовом значении буквы и неверным — при другом. Если мы ставим своей задачей узнать, при каких значениях входящей буквы равенство оказывается верным, то мы называем равенство уравнением. Сама буква в этом случае называется неизвестная (буква) или просто неизвестное. О таких числовых значениях неизвестного, при которых равенство становится верным, говорят, что они удовлетворяют уравнению; каждое такое значение называется корнем уравнения (также решением уравнения). Так например, уравнение $x+8=15$ имеет корень 7; уравнение $2x=5$ имеет корень $2\frac{1}{2}$; уравнение $\frac{4}{x}=7$ имеет корень $\frac{4}{7}$; уравнение $3x=2x$ имеет корень 0.

Упражнение 13.

28. Постарайтесь найти корни следующих уравнений:

1) $3x=x+6$, 2) $3x=x+7$, 3) $\frac{x+1}{2}=5$, 4) $2(x+1)=5$,

5) $\frac{4}{x}=7$, 6) $x+\frac{16}{x}=8$, 7) $x+\frac{16}{x}=10$,

8) $x+\frac{16}{x}=4$, 9) $3x=2x$, 10) $\frac{1}{x}=0$.

29. Дано равенство:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}.$$

Верно ли оно при значениях:

$$x = 1;\ 2;\ 3;\ 10;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{5}?$$

Возьмите сами какое угодно значение x и посмотрите, что получится.

Не всякое уравнение имеет корень. Например, не имеет корня уравнение $\frac{1}{x} = 0$: на какое бы число — целое или дробное — мы ни стали делить единицу согласно правилам арифметики, непременно получится число, отличное от нуля. Не имеет также корня уравнение $x + \frac{16}{x} = 4$. В самом деле, если подставим вместо x число, большее, чем 4, то уже одно первое слагаемое в левой части будет больше, чем правая часть; если подставим число, меньшее, чем 4, то уже одно второе слагаемое будет больше правой части; не удовлетворяет уравнению и само число 4.

Но в иных случаях уравнение может иметь и больше одного корня. Так, уравнение $x + \frac{16}{x} = 10$ имеет корень 2 и имеет корень 8. Уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$ имеет бесчисленное множество корней: именно вы сами сможете убедиться посредством подстановки, что любое число, отличное от нуля, удовлетворяет этому уравнению.

Решить уравнение — значит найти все его корни (или убедиться в их отсутствии).

Найти корень уравнения посредством угадывания не всегда легко. Кроме того, решить уравнение, т. е. найти все его корни, посредством угадывания даже невозможно, если не знать заранее, имеются ли корни и сколько их.

Таким образом, очень важно установить правила для решения уравнений.

§ 5. Решение уравнений применением свойств арифметических действий

Установление правил для решения уравнений — одна из важнейших задач алгебры.

Некоторые из этих правил чрезвычайно просты. Например, при решении уравнения $x + 8 = 15$ можно основываться на правиле, известном из арифметики: зная сумму и одно из двух слагаемых, для нахождения другого слагаемого достаточно из суммы отнять известное слагаемое. Таким образом, неизвестное равно разности суммы 15 и слагаемого 8:

$$x = 15 - 8,$$

и, следовательно, уравнение имеет единственное решение:

$$x = 7.$$

Трудно ошибиться в выборе нужного правила, если поставить перед собой задачу в форме вопроса: к какому числу нужно прибавить 8, чтобы получить 15? Ясно, что из 15 надо вычесть 8.

Рассмотрим еще уравнение $\frac{12}{x} = 2$.

Поставим перед собой вопрос: на какое число нужно разделить 12, чтобы получилось 2? Очевидно, что для определения этого числа придется 12 разделить на 2: делитель равен делимому, деленному на частное (так как один из двух множителей равен произведению, деленному на другой множитель). Получается: $x = 6$.

Иногда при решении уравнения бывает необходимо рассуждения подобного рода проделать несколько раз. Вот примеры.

Пример 1. $13x + 17 = 100$.

Спросим себя: к какому числу нужно прибавить 17, чтобы получить 100? По сумме и второму слагаемому первое слагаемое узнается посредством вычитания: в данном случае оно равно 100—17, т. е. 83.
Итак,

$$13x = 83.$$

Какое число нужно умножить на 13, чтобы получить 83? По произведению и множителю множимое узнается посредством деления: в данном случае неизвестное множимое равно $\frac{83}{13}$, т. е. $6\frac{5}{13}$.

Итак,

$$x = 6\frac{5}{13}.$$

Проверка:

$$13 \cdot 6\frac{5}{13} + 17 = 100.$$

Пример 2. $10\left(\frac{5x+1}{2} - 3\right) = 275.$

Какое число нужно умножить на 10, чтобы получить 275? Чтобы узнать множимое, придется произве-

дение 275 разделить на множитель 10. Отсюда следует, что

$$\frac{5x+1}{2} - 3 = 27{,}5.$$

Из какого числа нужно вычесть 3, чтобы получить 27,5? Для нахождения уменьшаемого нужно к разности 27,5 прибавить вычитаемое 3. Значит,

$$\frac{5x+1}{2} = 30{,}5.$$

Какое число нужно разделить на 2, чтобы получить 30,5? Для нахождения делимого нужно частное 30,5 умножить на делитель 2. Поэтому

$$5x + 1 = 61.$$

К какому числу нужно прибавить 1, чтобы получить 61? Очевидно, придется из суммы 61 вычесть слагаемое 1, и тогда получим:

$$5x = 60.$$

Наконец, какое число нужно умножить на 5, чтобы получить 60? Ответ ясен: нам придется 60 разделить на 5, что дает нам

$$x = 12.$$

Проверка:

$$10 \cdot \left(\frac{5 \cdot 12 + 1}{2} - 3 \right) = 275.$$

30. Решите еще раз уравнения 2) —7) из пункта 25, однако не путем угадывания, а с помощью использования правил, известных из арифметики.

Упражнение 14.

31. По образцам, приведенным выше, решите уравнения и проверьте:

1) $7x - 11 = 10$, 2) $\frac{x+5}{3} = 14$, 3) $2(10 - x) = 1$,

4) $5(7 + x) = 35$, 5) $\frac{0{,}2}{x+1} = \frac{1}{10}$, 6) $\frac{1}{1{,}2 - x} = 20$,

7) $4\left(\frac{2x+3}{5} + 1\right) = 16$, 8) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}{0{,}7} = 1$.

32. Решите следующие уравнения, в которых неизвестные обозначены различными буквами, и проверьте:

1) $9m = 12$, 2) $11 - s = 7$, 3) $\frac{u}{8} = \frac{1}{2}$, 4) $\frac{10}{n} = 1{,}25$,

5) $\frac{t + 0{,}8}{100} = 3$, 6) $\frac{3}{1 + A} = 2$, 7) $1 - \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$, 8) $\frac{1}{N + 1} = 0{,}99$.

Только самые простые уравнения решаются неспосредственно по правилам арифметики. В дальнейшем постепенно будут указаны более усовершенствованные приемы решения некоторых, часто встречающихся, уравнений; приемы решения других, реже встречающихся, уравнений, иногда настолько сложны, что не рассматриваются в средней школе.

§ 6. Решение задач при помощи уравнений

Мы будем решать сначала только самые простые задачи, т. е. такие, которые легко решить арифметически, не прибегая к алгебре.

Задача. Я получил 15 руб. и положил деньги в карман. После этого в кармане стало 40 руб. Сколько рублей было в кармане раньше?

Чтобы решить эту простую задачу алгебраическим путем, нужно прежде всего составить уравнение. Будем рассуждать. Сначала у меня в кармане было какое-то, нам неизвестное, число рублей. Обозначим его буквой x. В условии задачи сказано, что я получил 15 руб.; эти деньги прибавились к тем деньгам, которые были раньше, и стало $x + 15$ руб. С другой стороны, в условии сказано также, что потом в кармане у меня стало 40 руб. Таким образом, $x + 15$ и 40 представляют одно и то же число; отсюда получается равенство

$$x + 15 = 40.$$

Так как в него входит неизвестная величина x, которую мы хотим определить, то мы составили, следовательно, уравнение из условия нашей задачи.

Остается решить уравнение: в данном случае достаточно воспользоваться правилами арифметики.

Можно порекомендовать при составлении уравнения говорить (или писать) по возможности короче.

Так, при решении приведенной выше задачи достаточно сказать (или написать) следующее:

Сначала у меня в кармане было x руб.
Получил я 15 »
После этого стало у меня $x + 15$ »
Но по условию у меня стало 40 »

Итак,

$$x + 15 = 40.$$

Отсюда вытекает:

$$x = 40 - 15,$$

т. е.

$$x = 25.$$

В этой задаче мы пришли к двум различным выражениям для одной и той же величины; соединяя эти выражения знаком равенства, мы получили уравнение задачи. Подобным же образом составляются уравнения и в других случаях.

Упражнение 15.

33. По предыдущему образцу составьте уравнения для следующих задач и решите их согласно правилам арифметики.

1) У меня 17 руб. Сколько рублей мне нужно получить, чтобы иметь 30 руб.?

2) Во время прогулки мне пришлось истратить 25 руб. Сколько рублей у меня было до прогулки, если после прогулки осталось 13 руб.?

3) Утром у меня было 28 руб. Вечером осталось 15 руб. Сколько рублей было истрачено в течение дня?

4) Сколько рублей зарабатываю я в день, если за 5 дней мой заработок составил 135 руб.?

5) Сколько дней продолжалась моя работа, если ежедневно я зарабатывал по 20 руб., а общий заработок составил 320 руб.?

6) Мы уже прошли 25 *км*, но это только третья часть всего пути. Какова длина всего пути?

7) 300 яблок разделено поровну между всеми учениками класса. Сколько учеников в классе, если каждый получил по 12 яблок?

Упражнение 16.

34. Пользуясь формулой $B = \frac{2}{3}A + 1$ (см. пункт 11), установите: какому размеру валенок соответствуют ботинки размером 26, 28, 29, 32, 35, 36, 38.

35. Пользуясь формулой $H = 8 + \frac{18 - T}{2}$ (см. пункт 12), установите: в каком возрасте ребенку достаточно спать 10 часов в сутки? 12 часов? 9 часов в сутки?



Черт. 6

36. Ломаная линия, изображенная на чертеже 6, имеет длину L (в сантиметрах). Выразите L через p и q.

Пусть $L = 30$. Чему равняется p, если q равно 5? Чему равняется q, если p равно 1,5 *м*?

37. В неделе $5a$ дней. Чему равно a? В телеге $7m$ колес. Чему равно m?

38. Я задумал число. Умножил его на 7, затем прибавил 100, разделил на 2, вычел 30, умножил на 3 и получил 60. Какое число я задумал?

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

Упражнение 17.

39. Запишите в виде формулы то, что выражено словами:

1) сумма числа z и числа 3; 2) утроенное число z; 3) разность чисел P и p; 4) отношение тех же чисел; 5) произведение чисел a, b и 8; 6) отношение чисел 5 и x; 7) отношение удвоенного числа L к числу M; 8) разность между произведением чисел r и s и половиной числа t.

40. То же по отношению к следующему:

1) утроенная сумма чисел u и v; 2) удвоенная разность между числом x и удвоенным числом y; 3) произведение суммы чисел S и T на число u; 4) произведение чисел N, $N + 1$ и $N + 2$; 5) отношение произведения чисел a и b к произведению $a + 1$ и $b + 1$.

Упражнение 18.

На каждый из следующих вопросов дайте ответ в виде буквенной формулы; подставьте указанные в скобках числовые значения и подсчитайте. Если нужно, произведите округления.

41. 1) У Коли a руб., у Миши b руб. Они сложили свои деньги и поделили поровну. Сколько оказалось у каждого? ($a = 13$, $b = 16$).

2) У Николая было a руб., у Михаила b руб., у Сергея c руб. Они сложили деньги и пожелали разделить поровну. Сколько оказалось у каждого? ($a = 250$, $b = 100$, $c = 150$).

42. 1) У одного из братьев a руб., у другого b руб. Для постройки дома первый дает половину своих денег, второй — одну треть. Сколько всего денег выделено для постройки дома? ($a = 13\,000$, $b = 18\,000$).

2) У одного из братьев a руб., у другого b руб., у третьего c руб. Первый дает для хозяйственных закупок пятую часть своих денег, второй — половину, третий—десятую часть. Сколько всего собрано денег? ($a = 250$, $b = 100$, $c = 150$).

43. 1) Я прошел n *км*. С какой скоростью я шел, если переход продолжался 4 часа, 5 часов, 6 часов? ($n = 25$).

2) Я прошел 100 *км*. С какой скоростью я шел, если переход продолжался t часов? ($t = 20$; 25; 32).

3) Я прошел n *км*. Сколько часов продолжался переход, если шел я со скоростью 4, 5, 6 *км* в час? ($n = 25$).

4) Я прошел 100 *км*. Сколько часов продолжался переход, если я шел со скоростью v *км* в час ($v = 4, 5, 6$).

44. 1) Я прошел n *км* за t часов. Какова была скорость ходьбы? Положите:

1) $n = 15{,}6$; $t = 3$; 2) $n = 14$; $t = 3\frac{1}{2}$; 3) $n = \frac{3}{4}$; $t = \frac{1}{3}$.

Я прошел n *км* со скоростью v *км* в час. Сколько времени я находился в пути? Положите:

1) $n = 12$, $v = 5$; 2) $n = 25\frac{1}{2}$, $v = 4\frac{1}{4}$; 3) $n = 4\frac{1}{3}$, $v = 6\frac{1}{2}$

45. 1) Я шел сначала лесом a километров, потом полем b километров. Какова была скорость ходьбы, если я находился в пути m часов?

$$\left(a = \frac{1}{4},\quad b = 1\frac{1}{2},\quad m = \frac{1}{3}\right).$$

2) Я шел сначала лесом a часов, потом полем b часов. Какова была скорость ходьбы, если всего пройдено n *км*?

$$\left(a = \frac{1}{4},\quad b = 1\frac{1}{2},\quad n = 8\right).$$

3) Я прошел сначала лесом a *км*, затем полем b *км*. Сколько часов я находился в пути, если я хожу со скоростью v *км* в час?

$$\left(a = \frac{1}{4},\quad b = 1\frac{1}{2},\quad v = 5\frac{1}{4}\right).$$

4) Я шел сначала лесом a *км*, затем полем b *км*. Какова была скорость ходьбы, если до полудня я шел c часов, а после полудня d часов

$$\left(a = \frac{1}{4},\quad b = 1\frac{1}{2},\quad c = \frac{1}{12},\quad d = \frac{1}{4}\right).$$

5) Я прошел сначала лесом a *км*, затем полем b *км*. Сколько часов я находился в пути, если лесом я шел со скоростью u *км* в час, а полем—со скоростью v *км* в час?

$$\left(a = \frac{1}{4},\quad b = 10\frac{1}{2},\quad u = 3\frac{1}{2},\quad v = 6\right).$$

46. Скорость парохода u *км* в час. Скорость течения реки равна v *км* в час. Во сколько часов пароход пройдет d *км*: 1) в стоячей воде, 2) по течению реки, 3) против течения реки? Во сколько часов то же расстояние проплывет щепка, брошенная в воду? ($d = 120$, $u = 8$, $v = 2$).

Упражнение 19.

В Англии и Америке в настоящее время еще продолжают пользоваться термометрами Фаренгейта.

При одной и той же температуре воздуха показания термометров Цельсия и Фаренгейта различны. Пусть буква F обозначает число градусов по шкале Фаренгейта, а C — число градусов по шкале Цельсия. Тогда, зная F, можно вычислить C по формуле

$$C = \frac{5(F - 32)}{9}.$$

Предположим, что термометр Фаренгейта показывает 77°. Посмотрим, сколько градусов это составит по шкале Цельсия. Полагая в формуле $F = 77$, получаем

$$C = \frac{5 \cdot (77 - 32)}{9} = 25°.$$

Таким же образом, положив $F = 50$, будем иметь:

$$C = \frac{5 \cdot (50 - 32)}{9} = 10°.$$

47. Составьте таблицу перевода температур шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия.

Возьмите значения F между 40 и 140 градусами; шаг таблицы возьмите равным 10 градусам; округлите в десятых долях градуса.

48. Сколько градусов Фаренгейта составляет 100° Цельсия? 20° Цельсия? 0° Цельсия?

Упражнение 20.

Управление одной железной дороги исчисляет тариф (плату за проезд) для расстояний между 100 и 200 *км* по формуле:

$$P = 0{,}054d + 2{,}15,$$

где d обозначает расстояние в километрах, P — стоимость билета в рублях.

49. Составьте таблицу платы за проезд на указанное расстояние.

Возьмите шаг таблицы равным 10 *км*, округляйте плату в десятках копеек. Начало таблицы имеет вид:

d	100	110	120...
P	7,6	8,1	8,6...

На какое расстояние можно уехать, взяв железнодорожный билет стоимостью в 10 руб.?

Упражнение 21.

50. Один фут * равен 0,3 метра. Сколько метров содержит отрезок, равный f футам? Сколько футов содержит отрезок, равный m метрам?

Один и тот же отрезок содержит m метров или f футов; выразите m через f.

Составьте таблицу для перевода длин отрезков, выраженных в футах, в длины, выраженные в метрах.

Ограничьтесь значениями f от 1 до 30.

Упражнение 22.

51. Составьте таблицу деления с двойным входом по формуле $z = \frac{x}{y}$, давая буквам x и y целые значения в пределах первого десятка и округляя значения z в сотых. Начало таблицы имеет вид:

x \ y	1	2	3	4
1	$1 = 1{,}00$	$\frac{1}{2} = 0{,}50$	$\frac{1}{3} \approx 0{,}33$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$
2	$2 = 2{,}00$	$1 = 1{,}00$	$\frac{2}{3} \approx 0{,}67$	$\frac{1}{2} = 0{,}50$
3	$3 = 3{,}00$	$\frac{3}{2} = 1{,}50$	$1 = 1{,}00$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Упражнение 23.

52. Решите письменно, без объяснений, следующие уравнения и сделайте проверку:

1) $\dfrac{\frac{3x-8}{2}+5}{10} = 1$; 2) $\dfrac{1+3(2+x)}{4} = 4$; 3) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = 2$.

53. Попробуйте (посредством угадывания) найти два корня уравнения

$$3x + \frac{8}{x} = 10.$$

---

* Фут — мера длины, употребляемая в различных странах. «Фут» по-английски значит «нога» (ступня).

Глава II

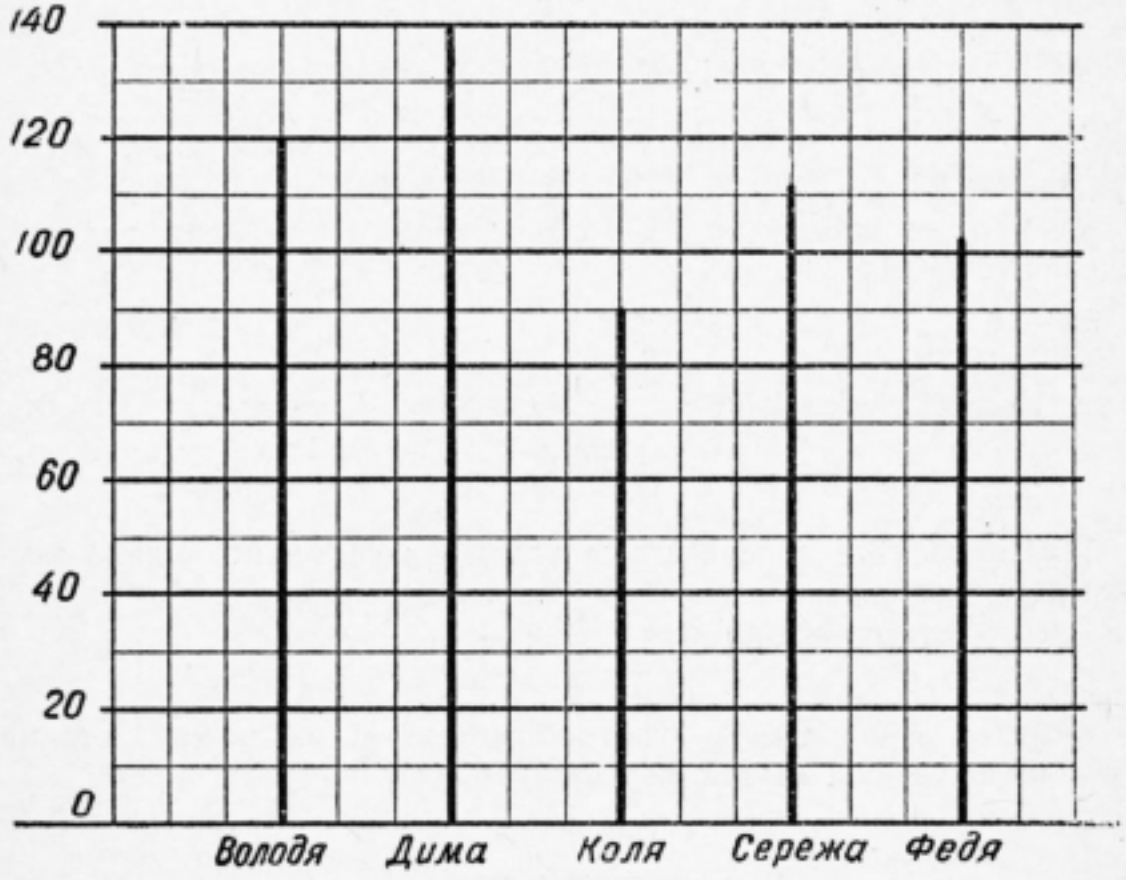
ПРОСТЕЙШИЕ ГРАФИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

§ 7. Сравнение величин и изображение их отрезками

Если хотят сравнить два числа, то или вычитают одно из другого, или делят одно на другое.

Так, слова «60 больше, чем 20, на 40» (или «20 меньше, чем 60, на 40») означают, что разность чисел 60 и 20 равна 40.

Слова же «60 больше, чем 20, в 3 раза» (или «20 меньше, чем 60, в 3 раза») означают, что частное от деления числа 60 на 20 равно 3.



Черт. 7

Упражнение 24.

54. На чертеже 7 показан рост нескольких мальчиков.

Так, например, Володя имеет рост 120 *см*, а Дима — 140 *см*. Дима больше, чем Володя, на 20 *см* и вместе с тем больше, чем Володя, в $1\frac{1}{6}$ раза.

Прочитайте по чертежу, каков рост Коли, Сережи, Феди, сравните их между собою.

55. Измерен рост 4 девочек, и оказалось, что:

Рост	Маши	равен	135	*см*
»	Лены	«	112	»
»	Ани	«	94	»
»	Зины	«	165	»

Изобразите рост этих девочек на клетчатой бумаге в виде вертикальных отрезков, отстоящих один от другого на равных расстояниях. Слева отметьте масштаб: 5 клеток = 50 *см*.

Расположив имена девочек в порядке увеличения роста, подсчитайте, на сколько сантиметров и во сколько раз каждая следующая выше предыдущей?

56. Ниже приводятся (с округлением) высоты известных горных вершин. Изобразите их на листе клетчатой бумаги в виде вертикальных отрезков. Расположите вершины в порядке убывания высот. Слева укажите масштаб: 2 клетки = 1000 *м*.

Эльбрус (в главном Кавказском хребте)	5 600 *м*
Казбек (там же)	5 000 »
Арарат (Армения)	5 200 »
Чатырдаг (Крым)	1 500 »
Эверест (Гималаи)	8 900 »

Можно ли на этом самом чертеже, сохраняя масштаб, показать:

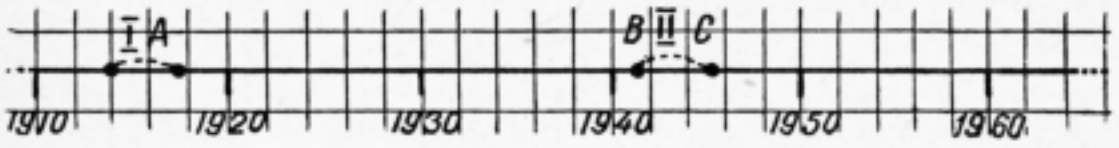
1) высоту Эйфелевой башни (300 *м*)? 2) наибольшую высоту подъема стратостата «СССР» (22 000 *м*)?

57. Изобразите на листе клетчатой бумаги в виде горизонтальных отрезков длины следующих рек в порядке убывания. Масштаб укажите снизу: 5 клеток = = 1000 *км*.

Волга	3 800 *км*	Ян-цзы-цзян —	5 500 *км*
Днепр	2 300 »	Нил	6 500 »
Лена	4 600 »		

В этом самом масштабе каким образом можно изобразить 1) расстояние от Москвы до Казани (700 *км*)? 2) расстояние от Земли до Луны (около 360 000 *км*)?

58. На черт. 8 по горизонтальной оси отсчитывается время. Даты относятся к черточкам, направленным вниз и обозначающим начало каждого года.



Черт. 8

Точки обозначают следующие события:

A — Великая Октябрьская социалистическая революция,
B — начало Великой Отечественной войны,
C — взятие Берлина Советской Армией.

Отмечены дугами I и II промежутки («отрезки») времени:

I — период первой мировой войны,
II — период второй мировой войны.

Укажите на таком же чертеже:

1) время вашего рождения (поставьте точку *M* с черточкой вверх),

2) время вашего поступления в школу (то же — точка *N*),

3) сегодняшний день (точка *P*),

4) промежуток времени вашей жизни от рождения до настоящего момента (отметьте дугой),

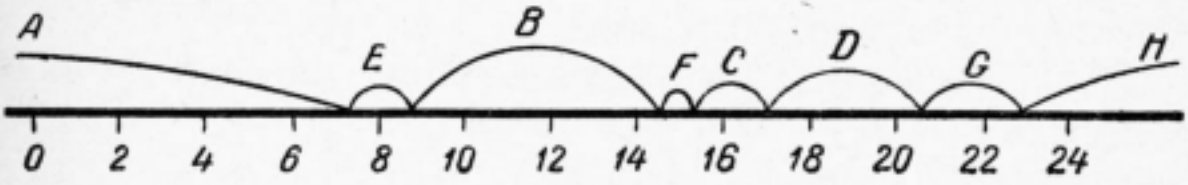
5) промежуток времени вашего обучения в школе от поступления до окончания в будущем.

59. На черт. 9 показано, каково было распределение времени у Миши на протяжении вчерашнего дня (считая от 0 часов до 24 часов). Именно:

1) он спал до 7 ч. 30 м. (*A*),

2) был в школе с 8 ч. 30 м. до 14 ч. 30 м. (*B*),

3) готовил уроки с 15 ч. до 17 ч. (*C*),



Черт. 9

4) гулял во дворе с 17 ч. до 20 ч. 30 м. (*D*),

5) часть времени ушла на одевание, умывание, завтрак (*E*), обед (*F*), ужин и отход ко сну (*G*),

6) заснул в 22 ч. 30 м. (*H*).

Завтра вечером таким образом подведите итог вашему собственному дню.

Упражнение 25.

1) У Петра 60 книг. Определите, сколько книг у Ивана, если известно, что у него: 1) на 15 книг больше, 2) на 10 меньше, 3) в три раза больше, 4) в два раза меньше?

2) У Петра a книг. Определите, сколько книг у Ивана, если известно, что у него: 1) на m книг больше, 2) на m книг меньше, 3) в два, в три, в десять, в k раз больше, 4) в два, в три, в десять, в k раз меньше.

61. 1) У Петра 60 книг, у Ивана 180. На сколько книг у Ивана больше, чем у Петра? Во сколько раз у Ивана больше?

2) У Петра 60 книг, у Ивана 15. На сколько книг у Ивана меньше, чем у Петра? Во сколько раз меньше?

3) У Петра a книг; у Ивана больше, а именно b книг. На сколько книг у Ивана больше, чем у Петра? Во сколько раз больше?

4) У Петра a книг, у Ивана меньше, а именно b книг. На сколько книг у Ивана меньше, чем у Петра? Во сколько раз меньше?

62. 1) Сыну x лет. Сколько лет отцу, если он в три раза старше сына? На 25 лет старше?

2) Отцу y лет. Сколько лет сыну, если он в четыре раза моложе? На 30 лет моложе?

63. Младшему брату n лет, среднему вдвое больше, старшему вчетверо больше. Сколько лет будет каждому из них через год? через m лет? Сколько было им лет два года назад? m лет назад?

64. В прошлом году урожай яблок составил p тонн, в нынешнем q тонн. Во сколько раз увеличился урожай? Положите: 1) $p=3$, $q=4{,}5$; 2) $p=2\frac{1}{4}$, $q=2\frac{2}{5}$, 3) $p=1{,}8$, $q=1{,}2$.

65. 1) Четыре в 3 p раз больше, чем два. Чему равно p?

2) четыре на $\frac{q}{3}$ больше, чем два. Чему равно q?

§ 8. Отношение чисел

Отношением числа m к числу n называется частное $\frac{m}{n}$, происходящее от деления m на n.

Очевидно, отношение m к n показывает, во сколько раз m больше, чем n.

Отношение записывают в виде обыкновенной дроби, с горизонтальной чертой, или в виде десятичной дроби, с округлением, если нужно. Но иногда записывают также и в виде частного двух целых чисел, пользуясь при этом двоеточием как знаком деления: в последнем случае естественно, чтобы числа были взаимно простыми.

Например, если у Сергея $m=1200$ рублей, а у Федора $n=1000$ рублей, то отношение $\frac{m}{n}$ «суммы денег у Сергея» к «сумме денег у Федора» равно $\frac{6}{5}$; или 1,2; или еще говорят, что названные суммы «относятся как 6 к 5», и пишут «6 : 5».

Напротив, отношение $\frac{n}{m}$ «суммы денег у Федора» к «сумме денег у Сергея» равно $\frac{5}{6}$, или (приблизитель-

но) 0,83; или можно сказать, что эти суммы «относятся как 5 к 6» (5 : 6).

Легко понять, что отношение m к n и отношение n к m представляют собою числа, взаимно обратные: в самом деле,

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1.$$

Упражнение 26.

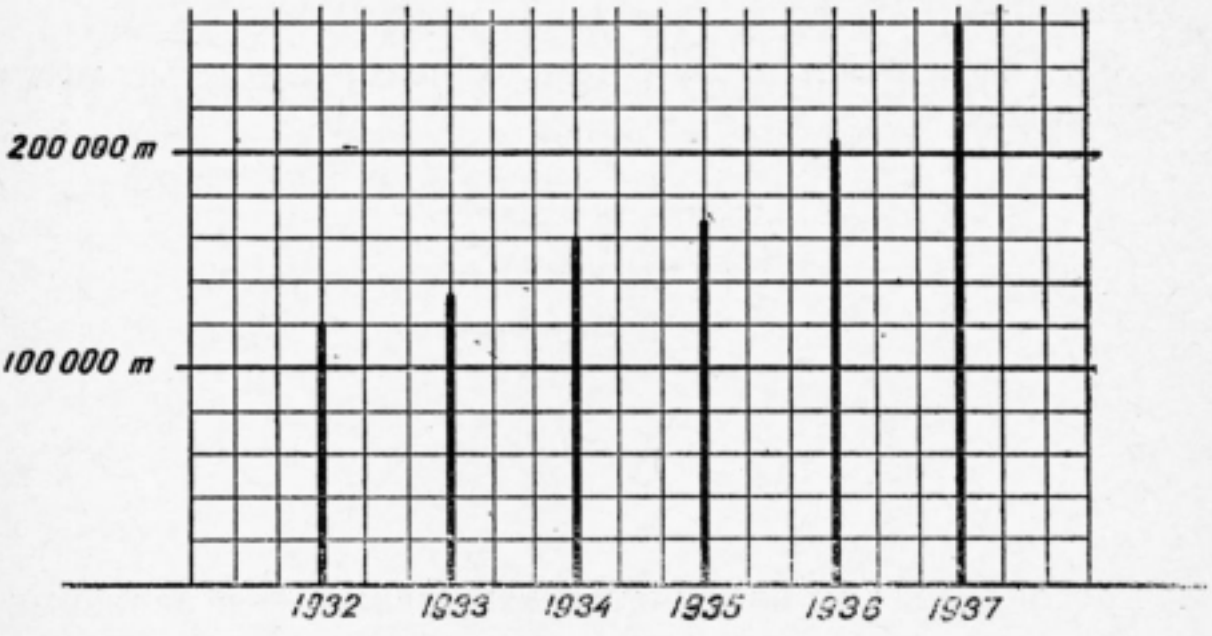
66. Зная высоту (в метрах) гор: Эверест ($Э$ — 8 900), Арарат ($А$ — 5 200) и Чатырдаг ($Ч$ —1 500), определите отношение этих высот и запишите в виде таблицы.

числ. \ знам.	$Э$	$А$	$Ч$
$Э$			
$А$			
$Ч$			

Округляйте в сотых.

Какими отрезками нужно изобразить высоты Эвереста и Арарата, если высота Чатырдага изображена отрезком в 3 клетки?

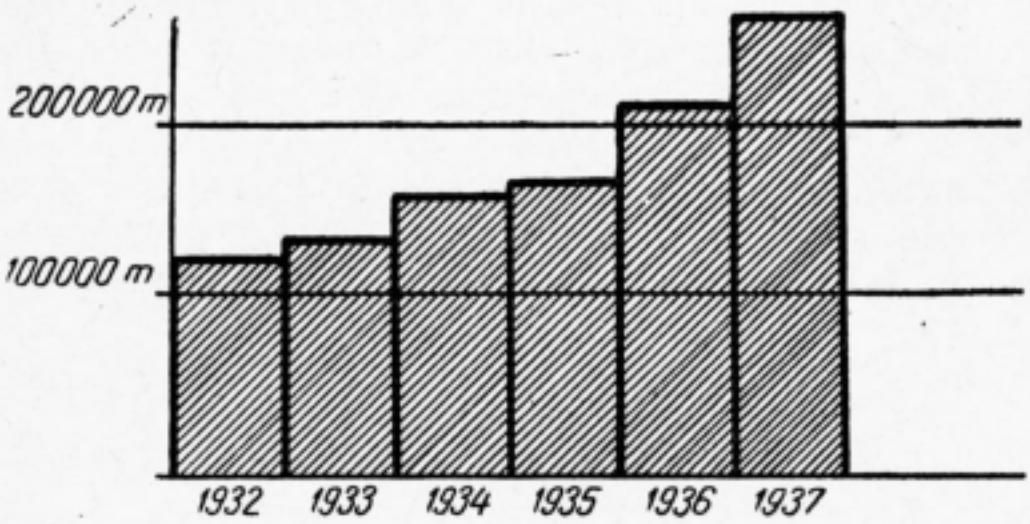
67. Продукция доменной печи за 1932—1937 гг. характеризуется «столбчатым» графиком, изображенным



Черт. 10

на чертеже 10. Найти отношение продукции каждого года к продукции 1932 г.; выразить в процентах.

Вместо «столбчатого» графика нередко пользуются «ступенчатым» (черт. 11).



Черт. 11

68. Согласно пятилетнему плану на 1951—1955 гг рост добычи угля в шахте определялся таблицей:

	1951	1952	1953	1954	1955
в тыс. тонн	320	352	387	428	456

Найдите отношения добычи угля за каждый год к соответствующей добыче за 1951 г.; выразите в процентах. Сделайте «столбчатый» или «ступенчатый» график.

§ 9. Прямая пропорциональность

Упражнение 27.

69. Сыну x лет, отцу y лет. Заполните пустые места в табличке

x	y	$\frac{y}{x}$
4	24	
5		
6		
7		

и проследите, как изменяется отношение $\frac{y}{x}$ в зависимости от возраста сына.

70. Сторона квадрата равна x *см*, его площадь y *см*^{2}. Заполните пустые места в табличке

x	y	$\frac{y}{x}$
4		
5		
6		
7		

и проследите, как изменяется отношение $\frac{y}{x}$ в зависимости от увеличения стороны квадрата.

71. Каждый год измеряют рост Лиды (в день ее рождения). Пусть x — возраст Лиды (в годах), y — ее рост (в сантиметрах). Получилась табличка

x	y	$\frac{y}{x}$
4	102	
5	108	
6	115	
7	121	

Проследите, как изменяется отношение $\frac{y}{x}$.

72. Килограмм хлеба стоит 3 рубля. Пусть куплено x *кг* хлеба и заплачено y рублей. Заполните пустые места в табличке

x	y	$\frac{y}{x}$
4		
5		
6		
7		

и сделайте вывод по поводу отношения $\frac{y}{x}$.

Определение. ***Две величины x и y называются пропорциональными (или „прямо пропорциональными“), если при всех их возможных изменениях их отношение*** $\frac{y}{x}$ ***остается равным одному и тому же числу.***

Обозначая это число через m, мы должны, следовательно, иметь равенство

$$\frac{y}{x} = m.$$

Но, по правилам арифметики, этому равенству можно придать также вид

$$y = mx.$$

Итак, можно сказать иначе: ***две величины x и y называются пропорциональными („прямо пропорциональными“), если величина y выражается через величину x по формуле вида y=mx.***

Число m называется коэффициентом пропорциональности.

Возраст сына и возраст отца не пропорциональны; также сторона квадрата и его площадь; также возраст и рост ребенка. Но вес купленного хлеба и его стоимость пропорциональны; коэффициентом пропорциональности служит цена килограмма хлеба.

Упражнение 28.

73. Известно, что величины x и y пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности равен 6. Напишите формулу, выражающую y через x. Заполните пустые места в таблице

x	y
2	
7	
11	
29	

74. Тот же вопрос — для пяти следующих таблиц, причем в каждом случае указан свой коэффициент пропорциональности:

$m = 2$

x	y
2	
7	
11	
29	

$m = 3$

x	y
2	
7	
11	
29	

$m = \frac{1}{2}$

x	y
2	
7	
11	
29	

$m = 6$

x	y
4	
10	
12	
15	

$m = 1,34$

x	y
2,17	*
3,42	
5,14	
1,19	

75. Такие же вопросы — для следующих таблиц:

$m = 3$

x	y
	6
	12
	15
	17

$m = 5$

x	y
2	
3	
	30
1,5	
	15

$m = 2$

x	y
0,82	
	1,76
	3,24
5,12	
	5,12

$m = 0,17$

x	y
7	
9	
10	
13	

$m = 2,47$

x	y
4,12	*
5,03	
	10,42
*	14,11

76. Известно, что величины x и y пропорциональны между собой. Заполните пустые места в таблицах

x	y
10	5
14	
18	
7	
6	

x	y
5	15
1	
	12
10	
11	

x	y
2	
	7
5	
8	40

77. Укажите, в каких таблицах из числа следующих пропорциональность имеет место, и, если она имеет место, назовите коэффициент пропорциональности:

x	y
5	30
6	36
10	60
2	12
4	24

x	y
9	6
12	8
18	12

x	y
2	6
14	49
6	21
8	28
12	42

x	y
3	5
0	0
15	25
0,6	1

x	y
10	4
15	6
25	10
35	15
105	35

Очень важно заметить такие свойства прямой пропорциональности:

1. Если коэффициент пропорциональности m неизвестен, но зато известны некоторое значение одной

* Округляйте до сотых.

из величин и *соответствующее ему* значение другой величины, то коэффициент пропорциональности определяется посредством деления.

Например, если известно, что величины x и y пропорциональны между собой и что при $x = 5$ мы имеем $y = 15$, то из соотношения $y = mx$ получается $15 = m \cdot 5$, так что $m = 3$.

2. Если величины x и y пропорциональны между собой, то *при увеличении одной величины в несколько раз другая увеличивается во столько же раз.*

В самом деле, раз отношение $\frac{y}{x}$ остается неизменным, то при увеличении знаменателя в несколько раз во столько же раз должен увеличиться и числитель.

Обратно, *если при увеличении одной величины в несколько раз другая увеличивается во столько же раз, то эти величины пропорциональны между собой.*

Действительно, раз величины x и y увеличиваются одновременно в одно и то же число раз, то их отношение $\frac{y}{x}$ остается при этом неизменным.

Упражнение 29.

78. В магазине продается белый хлеб. Первый покупатель купил 2 *кг*, второй заплатил 7 руб., третий купил 5 *кг*, четвертый купил 8 *кг* и заплатил 40 руб. Сколько заплатил первый и третий покупатели? Сколько хлеба купил второй?

79. Участок земли имеет форму прямоугольного треугольника, катеты которого равны 30 *м* и 50 *м*. При составлении плана на клетчатой бумаге меньший катет изображен отрезком длиной в x клеточек, больший — отрезком длиной в y клеточек. Какова зависимость между x и y? Напишите формулу, подставьте частные значения по своему выбору.

§ 10. Обратная пропорциональность

Предположим, что мне дано 30 руб. на покупку хлеба. Хлеб может стоить больше или меньше, например, в зависимости от сорта. Если 1 *кг* хлеба стоит 3 руб., то я смогу купить 10 *кг;* если стоит 5 руб., то я смогу купить 6 *кг*; если 1 руб., то куплю 30 *кг*. Во всех случаях

произведение цены одного килограмма хлеба на число купленных килограммов будет одно и то же, именно — будет равно 30. Можно написать равенства:

$$3 \cdot 10 = 5 \cdot 6 = 1 \cdot 30 \text{ и т. д.}$$

Определение. ***Две величины x и y называются обратно пропорциональными, если при всех их возможных изменениях произведение xy остается равным одному и тому же числу.***

Обозначая это число через m, мы должны, следовательно, иметь равенство

$$xy = m.$$

Но по правилам арифметики этому равенству можно придать также вид

$$y = \frac{m}{x}.$$

Итак, можно сказать иначе: ***две величины x и y называются обратно пропорциональными, если величина y выражается через величину x по формуле вида*** $y = \frac{m}{x}$.

Число m тоже называется коэффициентом пропорциональности (обратной).

Примером обратно пропорциональных величин служит цена килограмма хлеба и число купленных килограммов при заранее заданной стоимости покупки. Коэффициент пропорциональности как раз и равняется этой стоимости.

Упражнение 30.

80. Известно, что величина y обратно пропорциональна величине x, причем коэффициент пропорциональности m равен 6. Заполните пустые места в таблице

x	y
2	
3	
4	
5	
12	

81. Тот же вопрос относительно следующих таблиц, причем для каждой таблицы указан свой коэффициент пропорциональности.

$m = 100$

x	y
2	
5	
25	
50	
100	

$m = 36$

x	y
8	
9	
10	
12	
16	

$m = \frac{1}{2}$

x	y
10	
20	
50	
150	

$m = 12$

x	y
2	
3	
4	
5	
6	

$m = 1{,}34$

x	y
2,17	*
3,42	
5,14	
1,19	

82. Такой же вопрос относительно следующих таблиц:

$m = 100$

x	y
	2
	5
25	
	50
100	

$m = 36$

x	y
8	
	9
10	
	12
16	

$m = 2$

x	y
0,82	
	1,76
	3,24
5,12	
	5,12

$m = 18$

x	y
2	
	9
3	
	4
6	

83. Известно, что величины x и y обратно пропорциональны. Заполните пустые места в таблицах:

x	y
10	5
2	
25	
20	

x	y
5	16
1	
	20
10	
	40

x	y
2	
	112
10	
8	7
	14

84. Укажите, в каких таблицах из числа следующих обнаруживается обратная пропорциональность, и если обнаруживается, то каков коэффициент пропорциональности:

x	y
5	30
6	25
10	15
2	75
3	50

x	y
9	6
18	3
12	4

x	y
6	21
4	36
8	18
12	12
48	3

* Округляйте до сотых.

Заметим по поводу обратной пропорциональности следующее:

1. Если коэффициент пропорциональности не задан, но зато известны два соответствующих друг другу значения самих величин, то коэффициент может быть определен посредством умножения.

Например, если известно, что величины x и y обратно пропорциональны и что значению $x = 8$ соответствует значение $y = 7$, то отсюда следует: $m = 8 \cdot 7 = 56$.

2. Если величины x и y обратно пропорциональны, то *при увеличении одной величины в несколько раз другая уменьшается во столько же раз.*

Действительно, раз произведение xy остается неизменным, то при увеличении одного из множителей в несколько раз другой должен уменьшиться во столько же раз.

Обратно, если *при увеличении одной величины в несколько раз другая уменьшается во столько же раз, то эти величины обратно пропорциональны между собой.*

В самом деле, раз величина x увеличивается в несколько раз, а величина y при этом уменьшается во столько же раз, то их произведение xy остается неизменным.

Упражнение 31.

85. Белый хлеб продается по 4 руб. за *кг*, пряники — по 8 руб., сладкая коврижка — по 10 руб. На имеющиеся у меня деньги я мог бы купить 7 *кг* пряников или 20 *кг* черного хлеба. Сколько я мог бы купить белого хлеба? Сладкой коврижки? По какой цене продается черный хлеб?

86. У туриста в сумке 27 стограммовых плиток шоколада. На сколько дней ему хватит этого запаса, если он будет ежедневно расходовать по 200, 180, 90, 60, 45 *г*? По скольку граммов он может расходовать ежедневно, чтобы запаса хватило на 36, 12, 24, 25, 50 дней?

Назовите величины в этой задаче, являющиеся обратно пропорциональными. Напишите соотношение между ними в виде формулы.

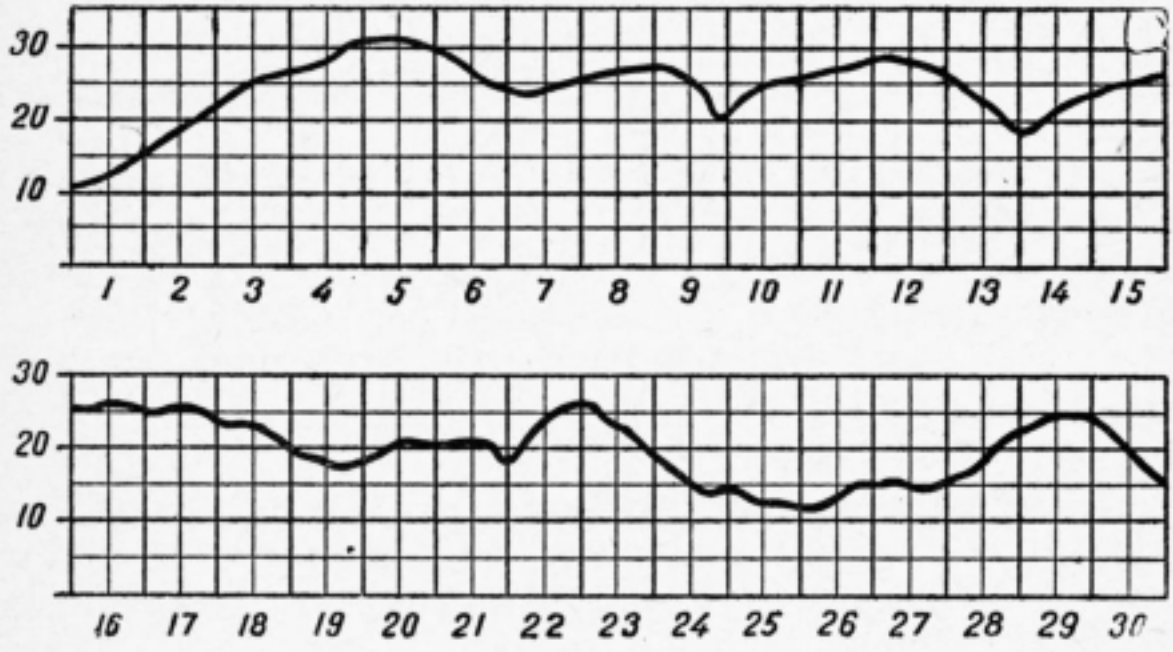
Каков коэффициент пропорциональности?

§ 11. Графическое представление зависимости между величинами

Упражнение 32.

87. На черт. 12 изображено изменение температуры воздуха за время от 1 до 30 июня 1945 г. (в Москве). По горизонтали откладывается время, по вертикали — температура.

Глядя на график, скажите: какая температура воздуха была среди дня 11/VI? Утром 19/VI? Вечером 22/VI? Была ли за этот период времени достигнута температура 30° и когда именно? Дайте описание того, как изменялась (возрастала или убывала) температура за все это время; когда температура была наибольшей и когда — наименьшей?



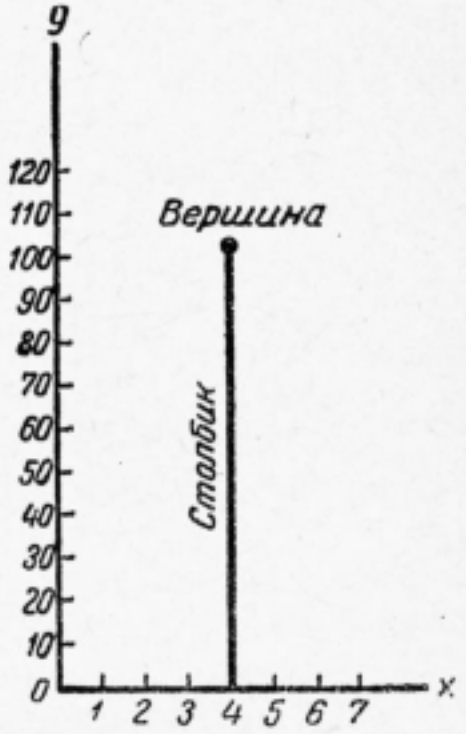
Черт. 12

88. Изобразим на клетчатой бумаге изменение роста Лиды по годам, используя данные вопроса 71. Возьмем масштаб: 1 клетка = 1 год по горизонтали и 1 клетка = 10 *см* по вертикали. «Столбик» на черт. 13 показывает, что в день, когда Лиде исполнилось 4 года, ее рост равнялся 102 *см*. Поставьте таким же образом «столбики», соответствующие 5, 6 и 7 годам. Соедините вершины столбиков плавной линией.

89. Отец на 20 лет старше сына (см. пункт 69). Изобразите на клетчатой бумаге, как изменяется воз-

раст отца при изменении возраста сына от 4 до 7 лет. Откладывайте возраст сына по горизонтали, а возраст отца изображайте вертикальными столбиками. Соедините вершины плавной линией.

Масштаб: 1 клетка = 1 год, по обоим направлениям.



Черт. 13

90. Изобразите на клетчатой бумаге, как изменяется площадь квадрата при изменении его стороны от 4 *см* до 7 *см* (см. пункт 70). Действуйте так же, как в предыдущем упражнении.

Масштаб: 1 клетка = 1 *см* по горизонтали, 1 клетка = 10 $см^2$ по вертикали.

91. Считая, что килограмм хлеба стоит 3 рубля, изобразите изменение стоимости покупки хлеба в зависимости от числа купленных килограммов (см. пункт 72).

Масштаб: 1 клетка = 1 *кг* по горизонтали, 1 клетка = 1 рубль по вертикали.

Предположим, что буквами x и y обозначены две какие-то величины, связанные между собою такой зависимостью, что каждому значению величины x соответствует некоторое значение величины y.

Наглядную и выразительную картину этой зависимости можно дать с помощью следующего графического изображения (представления).

На горизонтальной прямой (оси) вправо от некоторой точки O откладывается ряд отрезков, изображающих в надлежащем масштабе различные числовые значения x; затем, также в надлежащем масштабе, в конце каждого отложенного отрезка строится вертикальный отрезок («столбик»), изображающий полученное по формуле значение y.

По расположению точек, являющихся вершинами столбиков, судят о том, какова зависимость между величинами x и y.

Иногда вершины столбиков соединяют плавной линией — прямой или кривой (график зависимости между x и y).

Упражнение 33.

92. Как изменяется расстояние d, пройденное пароходом за t часов, если скорость равна 8 *км* в час?

Положите $t = 1, 2, 3, ..., 10$; дайте графическое изображение.

Масштаб: 1 час = 2 клетки; 10 *км* = 1 клетка.

93. Как зависит скорость парохода v от продолжительности рейса T между двумя городами, расположенными на расстоянии $d = 200$ *км*? Положите $T = 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24$ часов; дайте графическое изображение. Масштаб: 1 час = 2 клетки, 1 *км* в час = 1 клетка.

Если две рассматриваемые величины прямо пропорциональны, то график зависимости между ними — прямая линия, проходящая через начальную точку O (см. пункты 91, 92).

Если две величины обратно пропорциональны, то их график — некоторая кривая линия — гипербола (см. пункт 93).

Зависимости между величинами и их графики могут быть очень разнообразными.

§ 12. Пропорциональное деление. Прямоугольные и секторные диаграммы

Упражнение 34.

94. 1) Написать числа, пропорциональные числам 2, 3, 5, 8, 13, если коэффициент пропорциональности равен 2.

2) Написать числа, пропорциональные числам 3, 7, 10, принимая в качестве коэффициента пропорциональности число $\frac{1}{5}$.

3) Выбрав коэффициент пропорциональности равным $\frac{3}{4}$, написать числа, пропорциональные числам 120, 72, 432, 840.

4) Обозначив коэффициент пропорциональности через m, написать числа, пропорциональные числам 2, 3, 5.

5) Написать сумму чисел, пропорциональных числам 3, 7, 20, если в качестве коэффициента пропорциональности взято число m.

6) Подберите коэффициент пропорциональности таким образом, чтобы сумма чисел, пропорциональных числам 1, 4, 7, равнялась 240. Каково каждое из этих чисел? Проверьте.

7) Найдите числа, пропорциональные числам 3, 7, 20 и обладающие тем свойством, что их сумма равна 150. Проверьте.

8) Три числа в сумме дают 70 и притом пропорциональны числам 2, 3 и 5. Каковы эти числа? Проверьте.

9) Разделите число 800 на три части, пропорциональные числам 3, 7, 10.

Задача. Разделить число 25 на части пропорционально числам 2, 3, 5 (или в отношении 2:3:5).

Это значит: найти три числа, пропорциональные числам 2, 3, 5 и в сумме составляющие 25.

Решение. Обозначая коэффициент пропорциональности буквой m, можно записать три искомых числа в виде $2m$, $3m$ и $5m$. Их сумма тогда равна:

$$2m + 3m + 5m = 10m.$$

Но по условию задачи эта сумма должна равняться 25. Итак: $10m = 25$.

Решая это уравнение относительно m, получим:

$$m = \frac{5}{2}.$$

В таком случае искомые числа будут $2 \cdot \frac{5}{2}$; $3 \cdot \frac{5}{2}$ и $5 \cdot \frac{5}{2}$, т. е. 5; $7\frac{1}{2}$ и $12\frac{1}{2}$.

Проверка:

$$5 + 7\frac{1}{2} + 12\frac{1}{2} = 25.$$

Задачи, в которых требуется разделить данное число на несколько частей (две, три или больше) пропорционально данным числам, называются задачами на пропорциональное деление.

При решении задач на пропорциональное деление удобнее всего в качестве неизвестного брать коэффициент пропорциональности.

Упражнение 35.

95. Разделить число 18 пропорционально числам 2, 3, 5.

96. Разделить число 99 пропорционально числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

97. Разделить число 100: 1) в отношении: 2 : 3 : 6, 2) в отношении: $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$.

98. Гаврила, Кузьма и Семен решили закупить огурцы совместно. Для этой цели Гаврила дал 100 руб., Кузьма 300 руб. и Семен 400 руб. Закупили всего 1200 *кг*. Сколько огурцов придется на долю каждого из участников покупки?

Объясните, почему 1 200 надо разделить пропорционально числам 100, 300, 400.

99. Угол в 360° разделите пропорционально числам 19, 8, 27, 43 и 3. Постройте с помощью транспортира полученные углы вокруг общей вершины.

Чтобы изобразить распределение целого на части, различающиеся теми или иными признаками, нередко представляют целое в виде прямоугольника, разделяя его прямыми, параллельными одной из сторон, пропорционально заданным размерам частей.

Так строятся прямоугольные диаграммы.

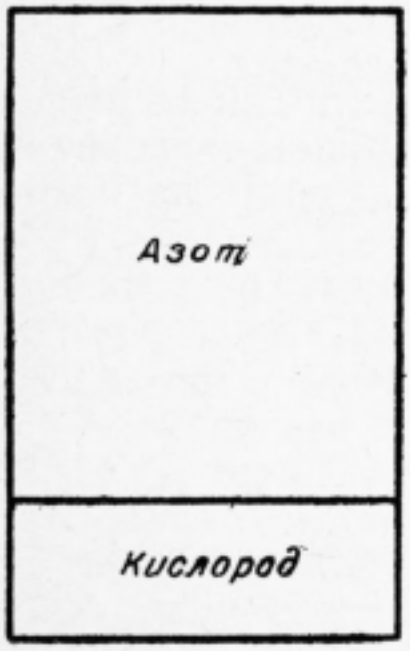
Иногда подобным же образом целое представляют в виде круга, разделяя его радиусами таким образом, чтобы были пропорциональны размерам частей центральные углы и, следовательно, площади секторов.

Так строятся секторные диаграммы.

Упражнение 36.

100. Состав воздуха (атмосферы) указан в виде прямоугольной диаграммы на черт. 14. Измерьте циркулем или клетчатой бумагой отрезки высоты прямоугольника и сосчитайте, сколько в атмосфере содержится азота и сколько кислорода (в процентах).

На черт. 15 изображена секторная диаграмма того же распределения.



Черт. 14



Черт. 15

101. По расписанию в неделю полагается 8 уроков русского языка (с литературой), 7 уроков математики, 4 урока английского языка, по 3 урока ботаники и географии, по 2 — истории, физики и физкультуры и 1 урок черчения. Составьте прямоугольную и секторную диаграммы распределения учебного времени между предметами.

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

Упражнение 37.

102. На горизонтальной оси откладывается время от нашей эры до 2000 г. (масштаб: 2 клетки = 100 лет). Отметьте точками, со штрихами вверх, следующие даты:

A — Великую Октябрьскую социалистическую революцию (1917 г.).
B — Поход Руси на Константинополь (860 г.).
C — Освобождение русского народа от татарского ига (1480 г.).
D — Падение Римской империи (476 г.).
E — Образование Казанского ханства (1437 г.).
F — Отечественная война 1812 года.

Отметьте дугами отрезки, обозначающие следующие периоды времени:

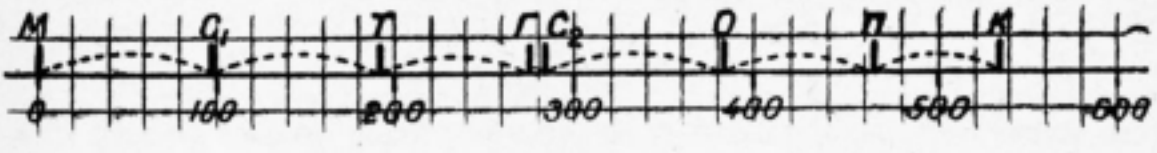
I — эпоху крестовых походов (1096—1270 гг.).
II — эпоху татарского ига на Руси (1237—1480 гг.).
III — период Ливонской войны (1558—1583 гг.).

103. В следующей таблице указаны важнейшие железнодорожные станции на пути Москва — Ленинград и их расстояние от Москвы (в километрах):

Москва	—	Малая Вишера	488
Клин	90	Чудово	532
Калинин	160	Тосно	597
Вышний Волочек	285	Ленинград	650
Бологое	380		

Отметьте точками станции на горизонтальной прямой (оси). Масштаб: 5 клеток = 100 км.

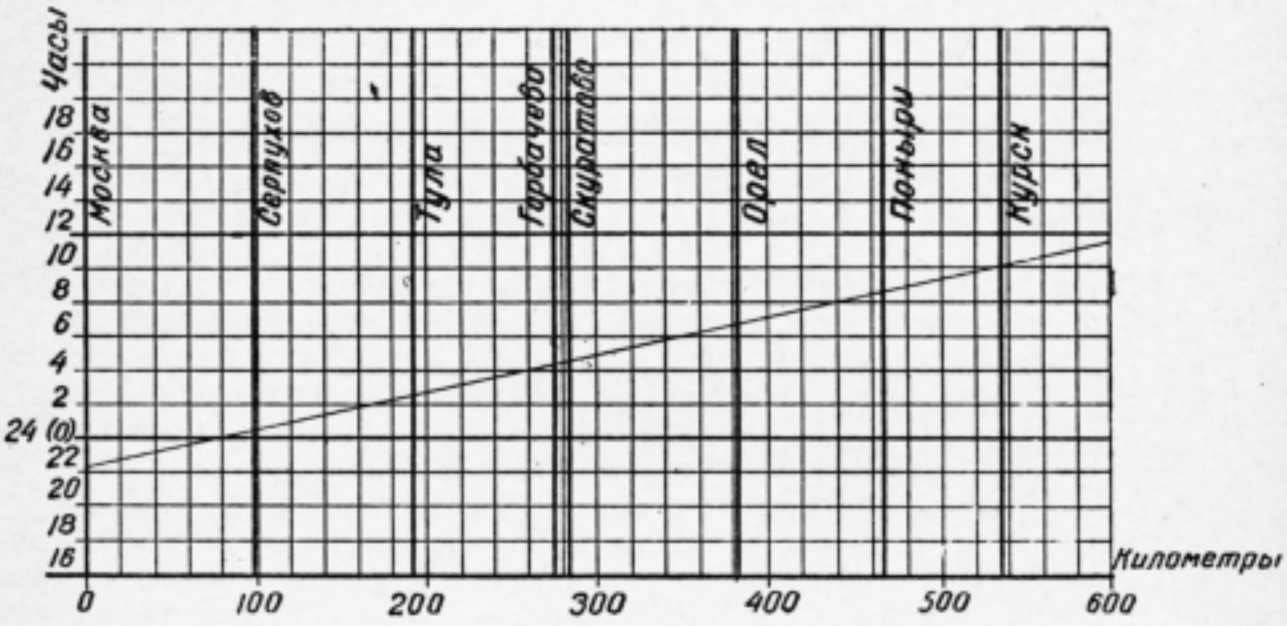
104. В том же самом масштабе на черт. 16 показаны важнейшие станции на пути Москва — Курск. Определите на глаз расстояние каждой станции от Москвы и расстояния между соседними станциями; составьте таблицу расстояний.



Черт. 16

105. На чертеже 17 дано графическое расписание движения поезда от Москвы до Курска. Установите, с какой скоростью движется поезд.

Составьте таким же образом графическое расписание для пути Москва — Ленинград, считая, что поезд выходит из Москвы в 12 ч. ночи и приходит в Ленинград в 12 ч. дня. Используйте данные пункта 103.



Черт. 17

Упражнение 38.

106. Иван и Петр поделили между собой 25 руб.; Иван получил x руб., Петр y руб. Выразите y через x. Вычислите y при $x = 0{,}5;\ 10;\ 15;\ 20;\ 25$.

Дайте графическое изображение.

107. До 18 лет подросток T лет от роду должен спать по

$$H = 8 + \frac{18 - T}{2}$$

часов в сутки (см. пункт 12).

Изобразите это правило графически, используя значение $T = 0,\ 2,\ 4,\ 6\ldots$ Масштаб по горизонтали: 1 клетка = 1 год; по вертикали: 1 клетка = 1 час.

108. Для мальчика, имеющего номер ботинок A, нужны валенки размера $B = \frac{2}{3}A + 1$ (см. пункт 11). Изобразите это правило графически, используя значение $A = 21,\ 21,\ 22,\ldots$ Масштаб по горизонтали: 4 клетки = 1 номер; по вертикали: 1 клетка = 1 номер.

109. Перевод температур из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия выполняется по формуле:

$$C = \frac{5(F - 32)}{9}$$

(см. пункт 48). Изобразите графически зависимость между F и C, используя значения $F = 32,\ 50,\ 68,\ 86,\ 104,\ 140$. Масштаб: 1 клетка = 5° (по горизонтали и по вертикали).

Определите по чертежу, каково C при $F = 80$, $F = 100$. Проверьте по формуле.

Определите по чертежу, каково F при $C = 8$, $C = 30$. Попробуйте проверить по формуле.

110. Плата P (в рублях) за проезд по железной дороге на расстояние d от 100 до 200 *км* рассчитывается по формуле:

$$P = 0{,}054d + 2{,}15$$

(см. пункт 49). Воспользовавшись значениями $d = 100, 120, 140, 160, 180, 200$, постройте график железнодорожного тарифа в масштабе: 2 клетки = 10 *км* (по горизонтали), 1 клетка = 1 руб. (по вертикали).

Определите по формуле плату за проезд на расстояние 127 *км* (округляйте в десятках копеек). Проверьте по чертежу.

111. Нормальный рост грудного ребенка h (в сантиметрах) в зависимости от возраста t (в месяцах) определяется по формуле:

$$h = 50 + \frac{40t}{10 + t}.$$

Составьте табличку значений h при $t = 0, 2, 4 \ldots 10$; округляйте в сантиметрах. Наметьте график. Масштаб: 2 клетки = 1 мес. (по горизонтали), 2 клетки = 10 *см* (по вертикали).

Определите по графику рост 7-месячного ребенка; проверьте по формуле.

Определите по графику, когда младенец должен достигнуть роста в 65 *см*.

112. Подобным же образом рассмотрите нормальный вес грудного ребенка p (в килограммах). В зависимости от возраста t (в месяцах) он дается приближенно формулой:

$$p = 3 + \frac{15t}{16 + t}.$$

Упражнение 39.

113. В каждом из следующих примеров установите, увеличивается или уменьшается вторая величина (из двух упомянутых) при увеличении первой? Является ли пропорциональностью зависимость между двумя величинами и если да, то какой именно — прямой или обратной? Что в таком случае представляет собой коэффициент пропорциональности?

1) Поезд, двигаясь без остановки с постоянной скоростью, за t часов прошел s *км*.

2) С утра до обеда путник шел со скоростью v *км* в час, и всего прошел D *км*.

3) Двигаясь на автомобиле со скоростью u *км* в час, можно покрыть расстояние между Москвой и Ленинградом за t часов.

4) Работая T дней, маляр может заработать N руб.

5) Получая ежедневно по n руб., маляр за месяц получил N руб.

6) Чтобы заработать 1 000 руб., маляру, получающему по n руб. в день, нужно работать T дней.

7) Отцу x лет, а сыну y лет.

8) Глиняная фигурка имеет объем V, вес P.

9) Вес p одного литра жидкости зависит от ее плотности d.

10) Объем V килограммовой гири зависит от плотности d материала, из которого она изготовлена.

11) За время моей жизни рост h все время изменялся вместе с моим возрастом t.

12) За время моей жизни мой вес p все время изменялся вместе с моим возрастом t.

13) Сторона квадрата равна a, его площадь равна S.

14) Прямоугольник, площадь которого задана, имеет основание b и высоту h.

Упражнение 40.

114. Правильно ли следующее рассуждение и если неправильно, то почему: «Втроем мы прошли 18 *км*, значит, вдесятером пройдем 60 *км*?»

Правильно ли такое рассуждение: «Десять рабочих построят дом за пять дней; но если собрать 2000 рабочих, то постройка будет закончена в какие-нибудь полчаса?»

115. В классе 42 ученика. За письменную работу выставлено 8 пятерок, 7 четверок, 19 троек и 5 двоек (трое не писали). Характеризуйте успеваемость в процентах. Постройте прямоугольную диаграмму распределения отметок. Возьмите высоту, равную 10 *см*.

116. Площадь СССР составляет около 22 млн. *кв. км*. Из них занимают:

Тундра	около 3,0;	Степи	3,4
Тайга	10,9;	Пустыни	2,0
Леса смешанные	1,5;	Субтропическая зона	1,2

Составьте прямоугольную и секторную диаграммы.

117. Бюджет времени у Миши таков:

Сон	9 часов
Одевание, умывание и принятие пищи	1,5 »
Школа	6 »
Прогулка	3 »
Приготовление уроков	2 »
Прочее	2,5 »

Составьте прямоугольную и секторную диаграммы.

Глава II

СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ. РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА

§ 13. Сложение

Из арифметики известно, что *сумма двух слагаемых не изменяется при их перестановке*: например, $3 + 4 = 4 + 3$.

В случае целых слагаемых это следует из того, что безразлично, в каком порядке считать кружочки (черт. 18): начиная с первой строки, получим 3+4; начиная со второй, получим 4+3. В случае дробей с одинаковыми знаменателями, по правилу сложения дробей, сумма — также дробь с тем же знаменателем, остается сложить в числителе целые числа; например:

$$\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \frac{3}{7}.$$

Если же знаменатели разные, то по тому же правилу нужно предварительно привести дроби к общему знаменателю.

Таким образом, наше утверждение верно при каких угодно слагаемых.

В буквенной форме оно записывается так:

I. $$a + b = b + a.$$

Это равенство верно при всех значениях букв a и b.

Оно называется **переместительным законом сложения.**

Из арифметики же известно следующее: *чтобы к некоторому числу прибавить сумму двух других чисел, достаточно прибавить сначала первое слагаемое, потом второе.* Например:

$$3 + (5 + 6) = (3 + 5) + 6.$$

Объясним это, в случае целых чисел, тоже с помощью кружочков (черт. 19).

Можно считать кружочки двумя различными способами: сосчитать сначала, сколько кружочков в двух строчках (сначала в первой, потом во второй), и затем присчитать те кружочки, которые в третьей строке; получим $(3+5)+6$; или сосчитать сначала, сколько кружочков в последних двух строчках (сначала во второй,



Черт. 18



Черт. 19

потом в третьей), и после этого то, что получилось, присчитать к кружочкам первой строчки; получим $3 + (5 + 6)$. Очевидно, результат будет один и тот же.

Если данные числа дробные, с одним и тем же знаменателем, то, действуя по правилам сложения дробей, нужно совершать те же действия с числителями, сохраняя общий знаменатель; например:

$$\frac{3}{7}+\left(\frac{5}{7}+\frac{6}{7}\right)=\left(\frac{3}{7}+\frac{5}{7}\right)+\frac{6}{7}.$$

Если же знаменатели разные, то можно прежде всего привести дроби к общему знаменателю.

Итак, наше утверждение верно при каких угодно слагаемых.

Запишем в буквенной форме и запомним:

II. $$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

И это равенство тоже верно при всех значениях букв a, b и c.

Оно называется **сочетательным законом сложения**.

Из переместительного и сочетательного законов сложения вытекает (следует) такой вывод: *сумма трех (или большего числа) слагаемых не изменяется при каких угодно перестановках или группировках слагаемых.*

В частности, во всякой сумме можно любое число рядом стоящих членов заключить в скобки или можно скобок не ставить совсем. Например:

$$a+(b+(c+d))=(a+b)+(c+d)=((a+b)+c)+d=$$
$$=a+b+c+d.$$

Упражнение 41.

118. Сосчитайте, сколькими способами можно переставить между собой три слагаемых в сумме $a + b + c$? Есть ли разница между $(a + b) + c$ и $a + b + c$?

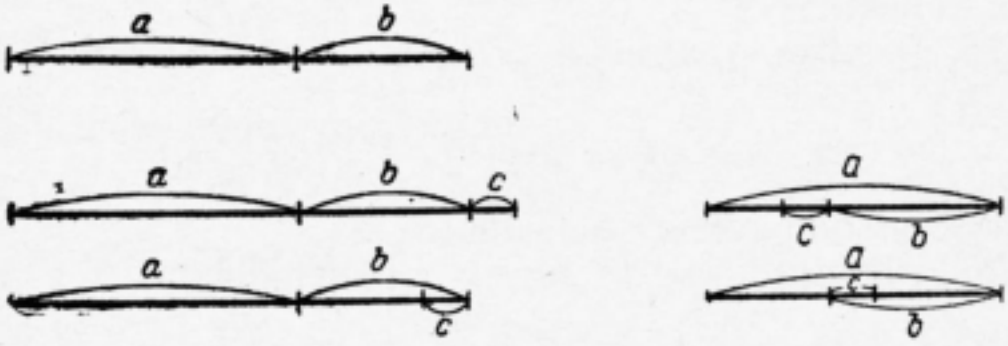
119. Как удобнее всего сделать сложение:

$$2 + 97 + 48 + 3?$$

Как сосчитать число дней в году по месяцам:

$$31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + \\ + 31 + 30 + 31?$$

120. Даны два отрезка, длины которых равны a и b. Проверьте геометрически, с помощью циркуля и линейки. что $a + b = b + a$.



Черт. 20

121. Даны три отрезка, длины которых равны a, b и c. Проверьте геометрически, с помощью циркуля и линейки, что $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Число нуль обладает замечательным свойством: при прибавлении нуля к какому угодно числу (или какого угодно числа к нулю) это число не изменяется. Итак, $\mathbf{a + 0 = 0 + a = a}$.

Упражнение 42.

122. 1) У меня было пять перьев и мне «дали еще нуль перьев»; сколько тогда их стало? У меня «было нуль перьев», да мне еще дали три пера; сколько их стало?

2) Если конечная точка отрезка приближается к начальной и, наконец, совпадает с нею, что станет с длиной отрезка?

123. Объясните, почему равенства I и II остаются верными при замене одной из букв нулем?

Может ли сумма двух чисел равняться нулю?

§ 14. Вычитание

Упражнение 43.

124. Какое действие нужно сделать над числами 79 и 18, чтобы *решить уравнение*

$$x + 18 = 79?$$

Объясните, что мы хотим узнать, когда решаем это уравнение. Напишите, чему равно x, обозначая действие, но не выполняя его. После того, как значение x найдено, какое действие нужно сделать, чтобы *проверить* правильность решения?

125. Решите таким же образом, с проверкой, уравнения:

$$1)\ x + 98 = 201,\ \ 2)\ x + 50 = 50.$$

Оба ли они имеют решения?

126. Разные ли решения имеют уравнения

$$x + 18 = 79 \text{ и } 18 + x = 79$$

или одинаковые? Почему так?

Когда говорят, что «вычитание есть действие, обратное сложению», то подразумевают, что посредством вычитания решается задача: по сумме и одному из слагаемых найти другое слагаемое. Другими словами, вычесть число a из числа b означает решить уравнение

$$a + x = b \text{ (или } x + a = b).$$

Решение уравнения существует, если только a не превышает b; оно имеет вид

$$x = b - a.$$

Из арифметики известны следующие правила, которые мы теперь запишем в буквенной (алгебраической) форме.

Чтобы к некоторому числу прибавить разность, достаточно к нему сначала прибавить уменьшаемое, затем из полученного результата вычесть вычитаемое:

II′. $$a + (b - c) = a + b - c.$$

Чтобы из некоторого числа вычесть сумму двух слагаемых, достаточно вычесть из него сначала первое слагаемое, потом второе:

II″. $$a-(b+c)=a-b-c.$$

Чтобы из некоторого числа вычесть разность, достаточно сначала из него вычесть уменьшаемое, затем к полученному результату прибавить вычитаемое:

II‴. $$a-(b-c)=a-b+c.$$

Упражнение 44.

127. 1) Проверьте справедливость равенств: II, II′, II″ и II‴ при значениях: $a=7$, $b=4$, $c=1$.

2) На черт. 20 даны отрезки, длины которых выражаются числами $a=7$, $b=4$, $c=1$. Объясните с помощью чертежей, почему справедливы те же самые равенства II, II′, II″ и II‴.

128. Решите относительно буквы x по правилам арифметики следующие уравнения:

1) $x+b=c$, 2) $a+x=c$, 3) $x-b=c$, 4) $a-x=c$.

Сделайте проверку.

Мы знаем, что

$$\mathbf{a+0=a.}$$

Отсюда следуют равенства **(свойства нуля)**

$$\mathbf{a-a=0}$$

и

$$\mathbf{a-0=a.}$$

Упражнение 45.

129. 1) У меня было 10 перьев. Я «потерял нуль перьев»; сколько осталось?

2) У меня было 10 перьев. Я потерял 10 перьев; сколько осталось?

130. Можно ли из нуля вычесть какое-нибудь число? Какое именно? Что получится?

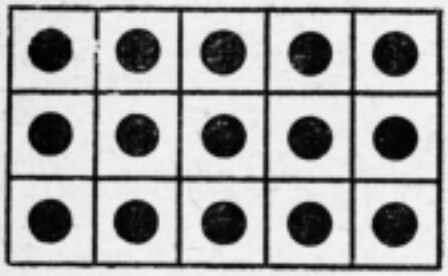
131. Возможно ли равенство

$$a-b=b-a?$$

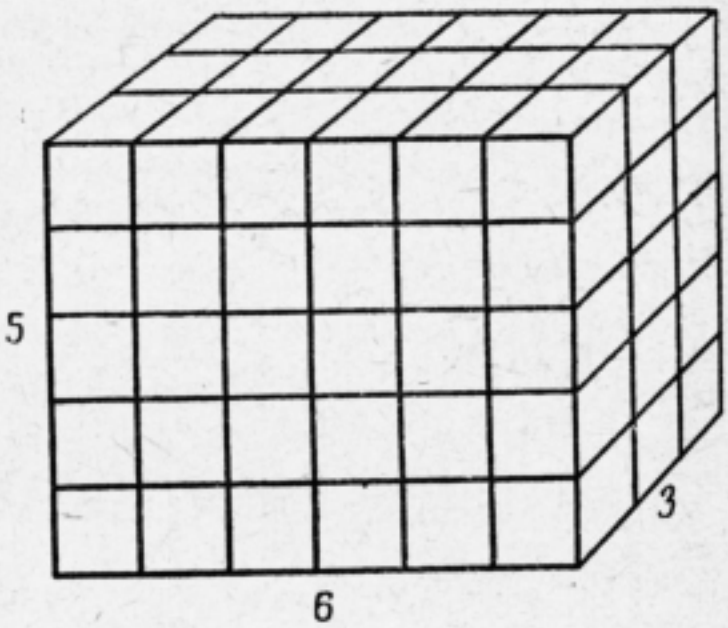
Когда именно оно возможно?

§ 15. Умножение

Как известно из арифметики, *произведение двух множителей не изменяется при их перестановке:* например, $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$. В случае целых множителей это видно из того, что *безразлично*, как считать кружочки



Черт. 21



Черт. 22

(см. черт. 21): по строкам или по столбцам таблички. Что это верно также для каких угодно дробей, следует из правила умножения дробей:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$$

В буквенной форме запись предыдущего утверждения имеет вид:

III. $$ab = ba.$$

Это — **переместительный закон умножения**, справедливый при всевозможных значениях a и b.

Из арифметики же известно: *чтобы умножить некоторое число на произведение двух чисел, достаточно умножить это число сначала на первый множитель, потом на второй.*

Например:

$$3 \cdot (5 \cdot 6) = (3 \cdot 5) \cdot 6.$$

На черт. 22 показано, как нужно сложить 90 кубиков для того, чтобы справедливость последнего равенства для случая целых чисел стала очевидной.

В случае дробных множителей утверждение следует из правила умножения дробей, например,

$$\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{13}\right)=\frac{3\cdot5\cdot6}{7\cdot2\cdot13}=\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{6}{13}.$$

В буквенной записи мы получаем:

IV. $$a(bc)=(ab)c.$$

Это — **сочетательный закон умножения.**

Из этих двух законов вытекает такое следствие: *произведение трех или большего числа множителей не изменяется при какой угодно перестановке или группировке этих множителей* *.

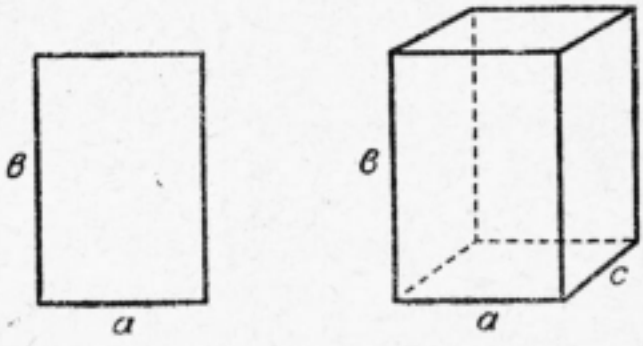
В частности, во всяком произведении можно как угодно поставить скобки или не ставить их совсем. Например:

$$a(b(cd))=(ab)(cd)=(abc)d=abcd.$$

Упражнение 46.

132. Как удобнее сделать в уме умножения:
1) $4\cdot37\cdot25\cdot3$, 2) $2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot3\cdot2\cdot5\cdot5\cdot3\cdot2$?

133. 1) Даны два отрезка, длины которых равны a и b; объясните с помощью прямоугольника, изображенного на черт. 23 (слева), почему произведение ab равно произведению ba?



Черт. 23

2) Даны три отрезка, длины которых равны a, b и c. Какая пространственная фигура наглядно показывает, что $a(bc)=(ab)c$ для произвольных чисел a, b и c, целых или дробных? (см. черт. 23, справа).

Упражнение 47.

134. Каждое пирожное стоит m руб. За p пирожных заплачено n руб. Напишите формулу, связывающую m, n и p; разъясните ее смысл при числовом значении

---

* Обыкновенно буквенные множители пишут в алфавитном порядке.

$m = 1$ и при числовом значении $p = 1$. Разъясните также ее смысл при числовом значении $m = 0$ и при числовом значении $p = 0$.

135. Площадь S прямоугольника равна произведению основания a на высоту b.

Разъясните смысл равенства $S = ab$ при числовом значении $a = 1$ и при числовом значении $b = 1$. Объясните, что станет с площадью, если основание a станет уменьшаться и, наконец, обратится в нуль; то же относительно высоты b.

136. Как можно проще написать вместо $a \cdot 1$ или $1 \cdot a$? Вместо $a \cdot 0$ или $0 \cdot a$? Объясните, почему каждое из равенств III и IV остается верным, если одна из букв a или b: 1) принимает значение 1; 2) принимает значение 0.

137. Напишите формулу для объема V прямоугольной призмы с ребрами a, b и c. Что станет с объемом V, если длина одного из ребер станет уменьшаться и, наконец, обратится в нуль?

Если хотя бы один из множителей произведения равен нулю, то и само произведение равно нулю.

Это необходимо запомнить.

Итак:

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0.$$

Очень важно также знать, что ***при умножении какого угодно числа на единицу (или единицы на какое угодно число) это число не изменяется:***

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Упражнение 48.

138. В течение января посетитель столовой ежедневно платил за обед по 7 руб. и за завтрак по 4 руб. Сколько денег он истратил на питание в течение всего месяца?

Решите эту задачу, не выполняя вычислений, арифметическим способом: 1) в три действия, 2) в два действия. Сравните результаты.

139. 1) Вычислите площади прямоугольников $ABNM$ и $MNCD$ (см. черт. 24) и напишите, что их сумма равна площади прямоугольника $ABCD$.

При этом положите:

$$BN = a,\ NC = b,\ AB = MN = DC = c.$$

2) Вычислите площади прямоугольников $ABCD$ и $ABNM$ (см. тот же чертеж) и напишите, что их разность равна площади $MNCD$.

При этом положите:

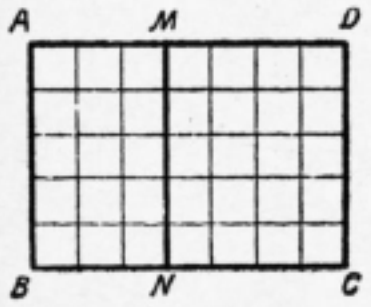
$$BC = a,\ BN = b,\ AB = MN = DC = c.$$

При каких угодно значениях a, b и c имеют место равенства:

V. $\boldsymbol{(a + b)\,c = ac + bc}$, или $\boldsymbol{c\,(a + b) = ac + bc}$.

Справедливы также и равенства:

VI. $\boldsymbol{(a - b)\,c = ac - bc}$, или $\boldsymbol{c\,(a - b) = ac - b\,c}$,



Черт. 24

лишь бы число b не превышало числа a.

Равенства V и VI выражают **распределительный закон умножения относительно сложения и вычитания**.

1) *Чтобы умножить на некоторое число сумму двух чисел, достаточно умножить на него каждое из слагаемых и произведения сложить.*

2) *Чтобы умножить на некоторое число разность двух чисел, достаточно умножить на него уменьшаемое и вычитаемое. и второе произведение вычесть из первого.*

Упражнение 49.

140. Проверьте справедливость законов V и VI, полагая: 1) $a = 9$, $b = 5$, $c = 8$; 2) принимая за a, b, c взятые наугад двузначные числа; 3) полагая $a = \frac{3}{7}$, $b = \frac{2}{5}$, $c = \frac{4}{3}$.

141. При каких значениях x имеют место равенства:

1) $3(x + 5) = 3x + 15$, 2) $(3 + 5)\,x = 3x + 5x$?

§ 16. Деление

Упражнение 50.

142. Какое действие надо выполнить над числами 42 и 8, чтобы *решить уравнение*

$$8x = 42?$$

Скажите, какое число мы хотим определить, решая это уравнение? Напишите, чему равно x, обозначая действие (двумя способами), но не выполняя его. После того как значение x найдено, какое действие нужно произвести, чтобы *проверить* правильность решения?

143. Решите таким же образом, с проверкой, уравнения:

1) $7x = 5$, 2) $3x = 3$, 3) $10x = 0$, 4) $0 \cdot x = 2$, 5) $0 \cdot x = 0$.

Все ли они имеют решения?

144. Разные ли решения имеют уравнения

$$7x = 5 \text{ и } x \cdot 7 = 5$$

или одинаковые? Почему?

145. Проверьте правильность равенства:

$$\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$$

при

$$1)\ b = 10,\ a = 3,\ 2)\ b = \frac{3}{4},\ a = \frac{5}{7}.$$

Когда говорят, что деление есть действие, обратное умножению, то подразумевают, что посредством деления решается задача: по произведению и одному из двух множителей найти другой множитель. Другими словами, разделить число b на число a означает решить уравнение:

$$ax = b \text{ (или } xa = b).$$

Решение существует, если только a отлично от нуля, оно записывается следующим образом:

$$x = \frac{b}{a} \text{ (реже } x = b : a).$$

Проверку делают посредством подстановки найденного значения x в заданное уравнение с применением прямого действия — умножения. Таким образом:

$$a \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot a = b.$$

Как известно из арифметики, для того чтобы разделить число на некоторую дробь, достаточно умножить на число, ей обратное. Иначе говоря, достаточно разделить на числитель и умножить на знаменатель. Например:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5}.$$

Это правило, очевидно, годится и для того случая, когда нужно разделить на целое число, так как целое число всегда можно представить в виде дроби.

Запомните твердо равенство:

$$\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}.$$

Чтобы разделить на некоторое число, отличное от нуля, достаточно умножить на число, ему обратное.

Посмотрим, что можно сказать о делении числа b на число a, если делитель a равен нулю.

Возможны два случая.

Если b не равно нулю, то уравнение

$$0 \cdot x = b$$

не имеет решений; в самом деле, всякое число, будучи умножено на нуль, дает нуль, и, значит, произведение не может равняться числу, отличному от нуля. Иными словами, *разделить на нуль число, отличное от нуля, невозможно.*

С другой стороны, если b равно нулю, то наше уравнение принимает вид:

$$0 \cdot x = 0.$$

Так как всякое число, будучи умножено на нуль, дает нуль, то любое значение x удовлетворяет уравнению. Иными словами, *деление нуля на нуль приводит к совершенно неопределенному результату.*

По указанным причинам в математике, производя деление на буквенное выражение, обязательно предполагают, что это выражение имеет значение, отличное от нуля.

Упражнение 51.

146. Понимая деление как действие, обратное умножению, объясните, почему справедливы равенства:

$$1)\ \frac{a}{1} = a,$$

а также (при значении a, отличном от нуля)

$$2)\ \frac{a}{a} = 1 \quad \text{и} \quad 3)\ \frac{0}{a} = 0.$$

147. Решите уравнения:

$$1)\ 1 \cdot x = 5, \quad 2)\ 5x = 5, \quad 3)\ 100x = 100,$$

$$4)\ \frac{x}{2} = 5, \quad 5)\ \frac{x}{1} = 5, \quad 6)\ \frac{x}{5} = 5.$$

148. Объясните на примерах, почему верно следующее утверждение: всякое число можно представить в виде дроби, у которой знаменатель равен любому данному числу, отличному от нуля.

149. Решите уравнения:

$$1)\ \frac{x}{5} = 10, \quad 2)\ \frac{x}{10} = 5, \quad 3)\ \frac{x}{3} = 2,$$

$$4)\ \frac{x}{3} = 1, \quad 5)\ \frac{x}{3} = 0, \quad 6)\ \frac{x}{10} = 0.$$

150. Вопрос: Объясните, почему верно следующее утверждение: дробь $\frac{b}{a}$ (где a и b — какие угодно числа, но a не равно нулю) в том и только в том случае равна нулю, если числитель b равен нулю.

Ответ: Через $\frac{b}{a}$ обозначается решение уравнения $ax = b$. Если множитель x равен нулю, то произведение ax равно нулю и, значит, b равно нулю. Если b равно нулю, то произведение ax также равно нулю и, значит, хотя

бы один из множителей a или x равен нулю; но по условию a отлично от нуля, и потому x равен нулю.

151. Ссылаясь на правила арифметики, объясните, при каких значениях букв и почему верны равенства:

$$\text{IV}'.\ a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c};\quad \text{IV}''.\ \frac{ac}{b}=\frac{a}{b}\cdot c;\quad \text{IV}'''.\ a:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\cdot c.$$

152. Решить относительно буквы x по правилам арифметики следующие уравнения:

$$1)\ x\cdot b=c,\ 2)\ a\cdot x=c,\ 3)\ \frac{x}{b}=c,\ 4)\ \frac{a}{x}=c.$$

При каких угодно значениях a, b и c (лишь бы c было отлично от нуля) справедливы равенства:

VII. $$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

VIII. $$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}.$$

Это — **распределительные законы деления (относительно сложения и вычитания)**.

Упражнение 52.

153. Проверьте справедливость формул VII и VIII: 1) при значениях $a=207$, $b=123$, $c=30$; 2) при взятых произвольно значениях a, b и c; 3) при значениях $a=\frac{3}{7}$, $b=\frac{2}{5}$, $c=\frac{4}{3}$.

154. Сформулируйте словами законы VII и VIII.

155. Ежедневно завтракая и обедая в столовой, посетитель заплатил в течение апреля 207 руб. за обеды и 123 руб. за завтраки. Сколько стоит ему ежедневное питание в столовой? Решите эту задачу арифметическим способом: 1) в три действия, 2) в два действия. Сравните результаты.

156. При каких значениях входящих букв справедливы формулы:

$$1)\ \frac{x+y}{2}=\frac{x}{2}+\frac{y}{2},\quad 2)\ \frac{3+5}{n}=\frac{3}{n}+\frac{5}{n}$$

и на каком основании?

157. Справедливы ли равенства:

$$1)\ \frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c},\quad 2)\ \frac{a}{b-c}=\frac{a}{b}-\frac{a}{c}\ ?$$

Проверьте подстановкой: $a=1$, $b=3$, $c=2$.

§ 17. Все действия

Сложение и вычитание называются действиями первой ступени, умножение и деление — действиями второй ступени.

Сложение и умножение считаются прямыми действиями, вычитание и деление — обратными действиями.

Таким образом, классификация действий дается в следующей табличке:

Действия		
	1-й ступени	2-й ступени
Обратное	Сложение Вычитание	Умножение Деление

В порядке обзора ниже приводятся некоторые равенства, содержащие действия с числами 0 и 1. В них буква a может иметь совершенно произвольные значения; впрочем, в равенствах, отмеченных восклицательным знаком, значение a должно быть отлично от нуля:

$$a+0=0+a=a,$$

$$a-0=a,\ a-a=0,$$

$$a\cdot 0=0\cdot a=0,\qquad a\cdot 1=1\cdot a=a,$$

$$\frac{0}{a}=0(!),\qquad \frac{a}{1}=a,\ \frac{a}{a}=1(!).$$

Делить на нуль нельзя.

§ 18. Равенства и неравенства

Каждое число можно записать самыми разнообразными способами. Например:

$$756=700+50+6=\frac{2\,268}{3}\ \text{и т. п.}$$

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{2}{4} = 1:2 \text{ и т. п.}$$

С другой стороны, два арифметических выражения могут быть соединены знаком равенства, раз они представляют одно и то же число.

Если два числа не равны, то из них всегда одно меньше, другое больше. Именно из двух целых чисел меньше то, которое раньше встречается в натуральном ряде 1, 2, 3,...; например, 3 меньше, чем 5, и это записывается следующим образом:

$$3 < 5 \text{ или } 5 > 3.$$

Чтобы судить о том, которая из двух неравных между собой дробей меньше, чем другая, достаточно привести их к общему знаменателю и сравнить числители. Например, $\frac{2}{5} < \frac{3}{7}$, так как $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$, а $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$.

Таким образом, каковы бы ни были два данных числа a и b (или арифметических выражения), непременно имеет место один, и только один, из трех возможных случаев:

1) или $a = b$ и тогда $b = a$,
2) » $a < b$ » $b > a$,
3) « $a > b$ » $b < a$.

Если хотят записать, что число a не равно числу b, то пользуются знаком $\neq$ или $\lneqq$:

$$a \neq b, \; a \lneqq b.$$

Упражнение 53.

158. Среди следующих выражений выделите такие, которые представляют одно и то же число, и соедините знаками равенства:

1) $\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$, 2) $1+2+3+4$, 3) $11-10$, 4) $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$,

5) $\frac{2}{6}$, 6) $1:\frac{1}{10}$, 7) $3\cdot\frac{1}{3}$, 8) $\dfrac{1}{1+1+1}$

9) $(4-3)(2-1)$.

159. Вместо звездочек между написанными ниже числами или арифметическими выражениями поставьте знаки $=$, $<$ или $>$.

$5 * 15$; $13 * 10$; $1 * 0$; $1 * \frac{2}{2}$; $\frac{5}{8} * \frac{14}{23}$; $\frac{8}{3} * 2{,}67$;

$1{,}1 * \frac{11}{10}$; $\frac{11}{37} * \frac{33}{111}$; $1{,}05 * \frac{21}{20}$; $5 * 7$; $\frac{1}{5} * \frac{1}{7}$.

160. Числа, содержащиеся в каждой из ниже выписанных строк, расположите в порядке возрастания, соединяя знаками $<$ или $=$:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$;

2) $1, 2, 3, 4, 5, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$;

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$;

4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$;

5) $\frac{4}{17}$; 0,23; 0,24; 0,25;

6) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} * 2$;

7) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} * 3$.

161. В левом кармане a руб., в правом b руб. Если из левого кармана в правый переложить 10 руб., то в правом станет больше. Если из левого в правый переложить 3 руб., то будет поровну. Запишите это в виде формулы.

Предположим теперь, что заданы две буквы или два буквенных выражения. Связать их между собой одним из трех знаков $=$, $<$, $>$ представляет более трудную задачу и именно по той причине, что выбор знака большей частью зависит от числовых значений букв. Так, если рядом стоят выражения:

$$a + b \text{ и } ab,$$

то при $a = 2$, $b = 3$ мы получаем $a + b < ab$,

» $a = 2$, $b = 2$ » » $a + b = ab$,

» $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ » » $a + b > ab$.

Может случиться так, что два буквенных выражения оказываются равными при всех значениях входящих букв. Такие выражения называются тождественно равными, или тождественными; равенство таких выражений носит название тождества*.

Вот примеры тождеств:

$$1)\ 3(x+2)=3x+6,\quad 2)\ x-x=0,\quad 3)\ 5=5.$$

Упражнение 54.

162. В каждом из следующих примеров установите: можно ли подобрать такие значения букв, чтобы левая часть оказалась а) меньше правой, в) равна правой, с) больше правой?

$$1)\ 2x*6,\quad 2)\ 2x*3y,\quad 3)\ x*\frac{1}{x},$$

$$4)\ x+y*x-y,\quad 5)\ x-y*0,\quad 6)\ x+\ y\ \ y+x,$$

$$7)\ (2x)\cdot 3*2\cdot(x\cdot 3),\quad 8)\ 2(x+3)*2x+6.$$

Если левая часть тождественно равна правой, то объясните — почему (ссылаясь на законы арифметических действий).

§ 19. Основные свойства равенств и неравенств

I. *Всякая величина равна самой себе:* всегда верно равенство

$$a=a.$$

II. *Можно переставить между собой левую и правую части равенства.* Другими словами: *если верно, что*

$$a=b,$$

то верно также, что

$$b=a.$$

III. *Две величины, порознь равные третьей, равны между собою.* Другими словами: если верно, что $a=b$, и верно, что $b=c$, то верно также, что $a=c$.

---

* Тождествами считаются также верные арифметические равенства (не содержащие ни одной буквы).

Упражнение 55.

163. Объясните третье свойство равенств на примере:
a — число моих братьев,
b — число уроков в понедельник,
c — число этажей в моем доме.

164. Известно, что $a = c$, $c = e$, $b = f$. Можно ли, основываясь на этом, утверждать, что: 1) $a = e$, 2) $e = c$, 3) $f = b$, 4) $d = d$, 5) $a = d$?

Основные свойства неравенств лишь отчасти напоминают основные свойства равенств.

I′. *Никакая величина не может быть ни больше, ни меньше себя самой.* Итак, *неравенства*

$$a < a \text{ и } a > a$$

всегда неверны.

II′. *Можно переставить между собою левую и правую части неравенства, изменяя при этом направление знака неравенства. Иначе: если верно, что* $a < b$, *то верно также, что* $b > a$; *и если верно, что* $a > b$, *то верно, что* $b < a$.

III′. *Если верны неравенства* $a < b$ *и* $b < c$, *то верно и неравенство* $a < c$. *Если верны неравенства* $a > b$ *и* $b > c$, *то верно и неравенство* $a > c$.

Упражнение 56.

165. Объясните третье свойство неравенств на примере: a — рост Алексея, b — рост Бориса, c — рост Василия.

Выразите словами это свойство (не употребляя буквенных обозначений).

166. Решите сами, можно ли в следующих примерах заменить звездочку одним из знаков $=$, $<$ или $>$:

1) Если верно, что $a < b$ и $b = c$, то верно, что $a * c$,
2) » » » $a > b$ » $b = c$, » » » $a * c$,
3) » » » $a = b$ » $b > c$, » » » $a * c$,
4) » » » $a = b$ » $b < c$, » » » $a * c$,
5) » » » $a < b$ » $b > c$, »нельзя ничего утверждать
6) » » » $a > b$ » $b < c$, » » » »

167. В следующих примерах установите посредством вычислений, каким знаком ($=$, $<$ или $>$) нужно за-

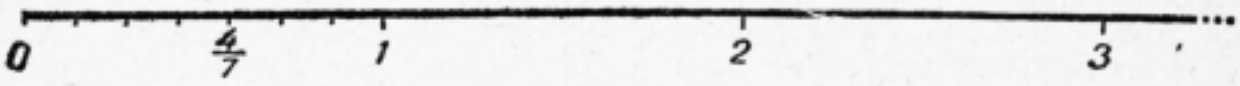
менить звездочку в первом и втором столбцах; в третьем же столбце сделайте это, если возможно, без вычислений.

$\frac{2}{5} * \frac{7}{17}$	$\frac{7}{17} * \frac{3}{7}$	$\frac{2}{5} * \frac{3}{7}$
$0{,}3 * \frac{4}{11}$	$0{,}3 * \frac{3}{10}$	$\frac{4}{11} * \frac{3}{10}$
$0{,}193 * 0{,}07$	$0{,}2 * 0{,}193$	$0{,}07 * 0{,}2$
$2a * \frac{3}{2}a$	$2a * \frac{2}{3}a$	$\frac{3}{2}a * \frac{2}{3}a$
$\frac{2}{5} * \frac{7}{17}$	$\frac{2}{5} * \frac{3}{7}$	$\frac{7}{17} * \frac{3}{7}$

§ 20. Числовой луч

Очень удобно изображать всевозможные, целые и дробные, числа в виде точек, расположенных на одном и том же луче (полупрямой).

Пусть O — вершина луча, и сам луч направлен вправо (см. черт. 25). Приняв некоторый отрезок за



Черт. 25

единицу длины, отложим его по лучу вправо от вершины O один, два, три и т. д. раза; полученные точки будут представлять числа 1, 2, 3 и т. д. Числу нуль соответствует сама вершина O («начало»). Таким образом точками на луче изображены все целые числа.

Чтобы отметить на луче данную дробь, например $\frac{4}{7}$, разделим единицу длины на семь равных частей и таких частей отложим от вершины четыре. Так поступим и со всякой другой дробью. Таким образом на луче изображаются все дробные числа.

Вместо того, чтобы говорить «точка, соответствующая числу $\frac{4}{7}$», говорят просто «точка $\frac{4}{7}$» и т. п. Число, которое изображается данной точкой, называется ее координатой.

Из произведенного построения видно, что точка 3 находится на расстоянии 3 единиц от начала O, точка $\frac{4}{7}$ — на расстоянии $\frac{4}{7}$ единицы от O и т. д. Вообще любая отмеченная точка a находится на расстоянии a единиц от начала O.

Отсюда следует:

1) Если $a=b$, то точки a и b совпадают. Например, совпадают точки $\frac{2}{5}$ и $\frac{4}{10}$.

Если $a < b$, то точка a расположена левее точки b. Если $a > b$, то точка a расположена правее точки b.

Чтобы определить *расстояние между двумя точками* a и b на луче, достаточно составить *разность между большим и меньшим из чисел* a и b. Если $a = b$, то точки совпадают, и расстояние между ними считается тогда равным нулю.

Числовой луч, точки которого изображают значения величины x, мы ради краткости условимся называть «лучом Ox».

При построении точек на числовом луче существенную роль играет выбор масштаба. Для того чтобы задать масштаб, достаточно указать, какой отрезок принят за единицу длины. Если используется клетчатая бумага, то можно установить, например, что одна клетка принята за 5 единиц или что в качестве единицы принят отрезок длиной в 10 клеток и т. п.

Упражнение 57.

168. Найдите расстояния между точками:

1) 3 и 8, 2) 5 и 2, 3) 0 и 10, 4) 5,2 и 4,9,

5) $\frac{3}{4}$ и $\frac{12}{17}$, 6) $\frac{6}{111}$ и $\frac{2}{37}$.

169. Объясните с помощью чертежа, как найти расстояние между точками a и b, различая три случая:

1) $a > b$, 2) $a < b$, 3) $a = b$.

170. Какие точки находятся на расстоянии 2 от точки 5? На расстоянии 0,03 от точки 0,5? На расстоянии d от точки a?

171. Истолкуйте геометрически свойства неравенств.

172. Приняв масштаб: 1 = 1 клетке, отметьте на луче точки 0, 2, 4, 6, 8, 10.

Приняв масштаб: 1 = 2 клеткам, отметьте точки 0, 1, 2, $\frac{3}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$.

Приняв масштаб: 1 = 10 клеткам, отметьте точки 0; 1; 2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,47; 1,52.

Приняв масштаб: 10 = 1 клетке, отметьте точки 0, 20, 40, 60, 100, 30, 15, 54.

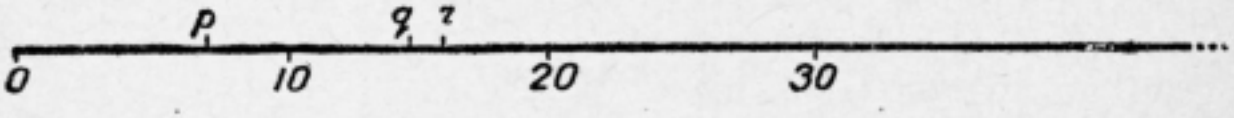
173. Глядя на черт. 26, напишите, чему равно p? q? r? После этого вычислите числовые значения выражений:

1) $a = p + q$, 2) $b = \frac{p+q}{2}$, 3) $c = \frac{q+r}{2}$, 4) $d = q - p$,

5) $e = r - q$, 6) $f = r - p$, 7) $g = 3p$, 8) $h = 2q$,

9) $i = 2q - 3p$, 10) $j = p + q - r$

и отметьте точки a, b,..., j на числовом луче. Как можно было бы построить все эти точки без вычислений (с помощью циркуля)?



Черт. 26

174. Движение точки M по лучу Ox, направленному вправо, задается формулой:

$$x = 5 + 2t,$$

где t — время, отсчитываемое от некоторого начального момента (в секундах), x — координата точки M. Где будет находиться точка в моменты времени t = = 1; 2; 3; 4; 5; $1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0,4; 0,2; 0; 3,1?

Составьте табличку связанных между собой значений t и x. На числовом луче отметьте черточками, направленными вниз, точки с целыми координатами; затем отметьте черточками, направленными вверх, положения точки M в перечисленные выше моменты времени, причем около каждой такой черточки ставьте соответствующее значение t. Возьмите масштаб: 1 = 1 клетке.

175. Сделайте то же самое в предположении, что точка M движется по лучу Oy, направленному вверх, и что движение задается формулой:

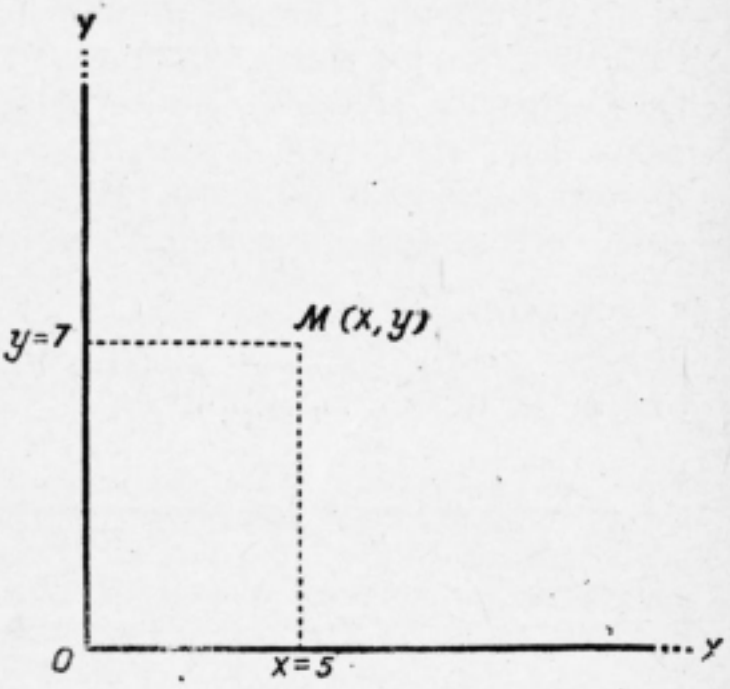
$$y = 3 + 4t,$$

при прежнем масштабе.

§ 21. Координатный угол

Часто бывает нужно изображать графически не числа, а пары чисел. В таких случаях можно было бы взять два луча и первое число изображать в виде точки на одном луче, а второе — на другом. Но обыкновенно поступают иначе.

Пусть требуется изобразить пару чисел $(x=5, y=7)$. Тогда расположим лучи Ox и Oy так, чтобы начало O у них было одно и то же, и притом луч Ox был бы направлен вправо, а луч Oy — вверх; на обоих лучах выбирают масштабы *.



Черт. 27

Отметив на луче Ox точку $x = 5$, а на луче Oy — точку $y = 7$, проведем через отмеченные точки прямые, параллельные лучам Ox и Oy, и возьмем их точку пересечения M (см. черт. 27); эта точка и будет изображать пару чисел (5, 7). Ради краткости говорят просто «точка M (5, 7)», или даже «точка (5, 7)». Первое число $x = 5$ называется абсциссой точки M, второе число $y = 7$ — ее ординатой; совместно рассматриваемые абсцисса и ордината точки M называются ее координатами.

Таким образом, каждой паре чисел (x, y) соответствует некоторая точка в прямом угле xOy; этот угол иначе называется координатным углом **.

---

* Чаще всего берут одинаковые масштабы на обоих лучах, но иногда удобнее брать различные.

** При обозначении координатного угла букву O ставят на первом месте: например, «координатный угол Oxy» (а не «xOy»).

Обратно, если дана некоторая точка M в нашем угле, то для определения ее координат x и y достаточно из нее опустить перпендикуляры на лучи Ox и Oy и измерить расстояния оснований перпендикуляров от точки O.

Если абсцисса x равна нулю, то точка M лежит на луче Oy, и обратно.

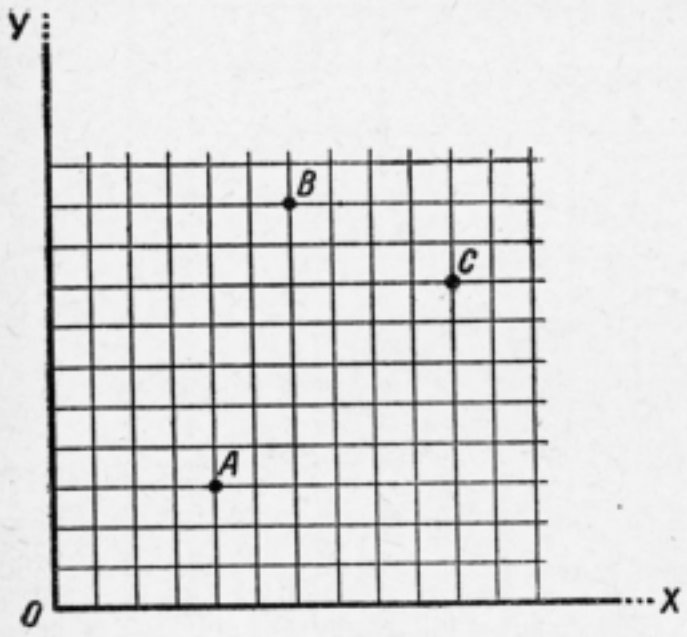
Если ордината y равна нулю, то точка M лежит на луче Ox, и обратно.

Точка (0, 0) есть как раз общая вершина лучей Ox и Oy, иначе — начало O.

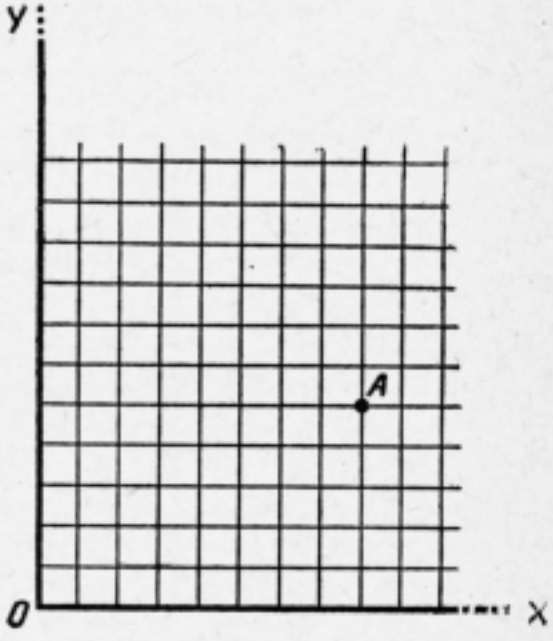
Для удобства отсчетов покрывают координатный угол рядом равностоящих, вертикальных и горизонтальных прямых (координатная сетка).

Упражнение 58.

176. На черт. 28 точка A имеет, как непосредственно видно, координаты (4, 3). Напишите таким же образом координаты точек B и C.



Черт. 28



Черт. 29

177. Точка с координатами (8, 5) обозначена на черт. 29 буквой A. Найдите на этом чертеже точки (2, 6), (10, 12), (5, 0), (0, 7).

178. Движение точки M в координатном угле Oxy задается формулами

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 + 4t, \end{cases}$$

где t — время (в секундах), отсчитываемое от некоторого начального момента, x и y — координаты точки M. Масштаб: 1 = 1 клетке. Где будет находиться точка M в моменты времени:

$$t = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 1\frac{1}{2};\ 2\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0{,}4;\ 0{,}2;\ 0;\ 3{,}1?$$

Составьте табличку значений x и y, затем отметьте на чертеже положения точки M в указанные моменты времени, причем около отмеченных точек поставьте значения t.

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

Упражнение 59.

179. Решить каждое из уравнений:

$$a + b = c,\ a - b = c,\ ab = c,\ \frac{a}{b} = c$$

1) относительно буквы a, 2) относительно буквы b. Сделать проверку.

180. Найти числовые значения следующих выражений:

1) $2 + 3k$ при $k = 0$,

2) $\dfrac{10 + v}{10 - v}$ при $v = 0$,

3) $(4 + h)(3 + 2h)(2 + 3h)(1 + 4h)$ при $h = 0$,

4) $(1 + p)(1 + 2p) - \dfrac{1}{1 + p}$ при $p = 0$,

5) $1 + \dfrac{s - 1}{3}$ при $s = 1$,

6) $\dfrac{2(1 + t)}{(2 - t)(3 + t)}$ при $t = 1$,

7) $\dfrac{(x - 1)(x - 3)}{x - 2}$ при $x = 3$,

8) $\left(\dfrac{u + 1}{u} - \dfrac{u}{u + 1}\right)(2u - 1)$ при $u = \dfrac{1}{2}$.

Упражнение 60.

181. Замените звездочки знаками равенства или неравенства в следующих утверждениях:

1) Если $x = \dfrac{1}{2}$, то $2x + 3 * 6 - x$,

2) Если $x = 1$, то $2x + 3 * 6 - x$,

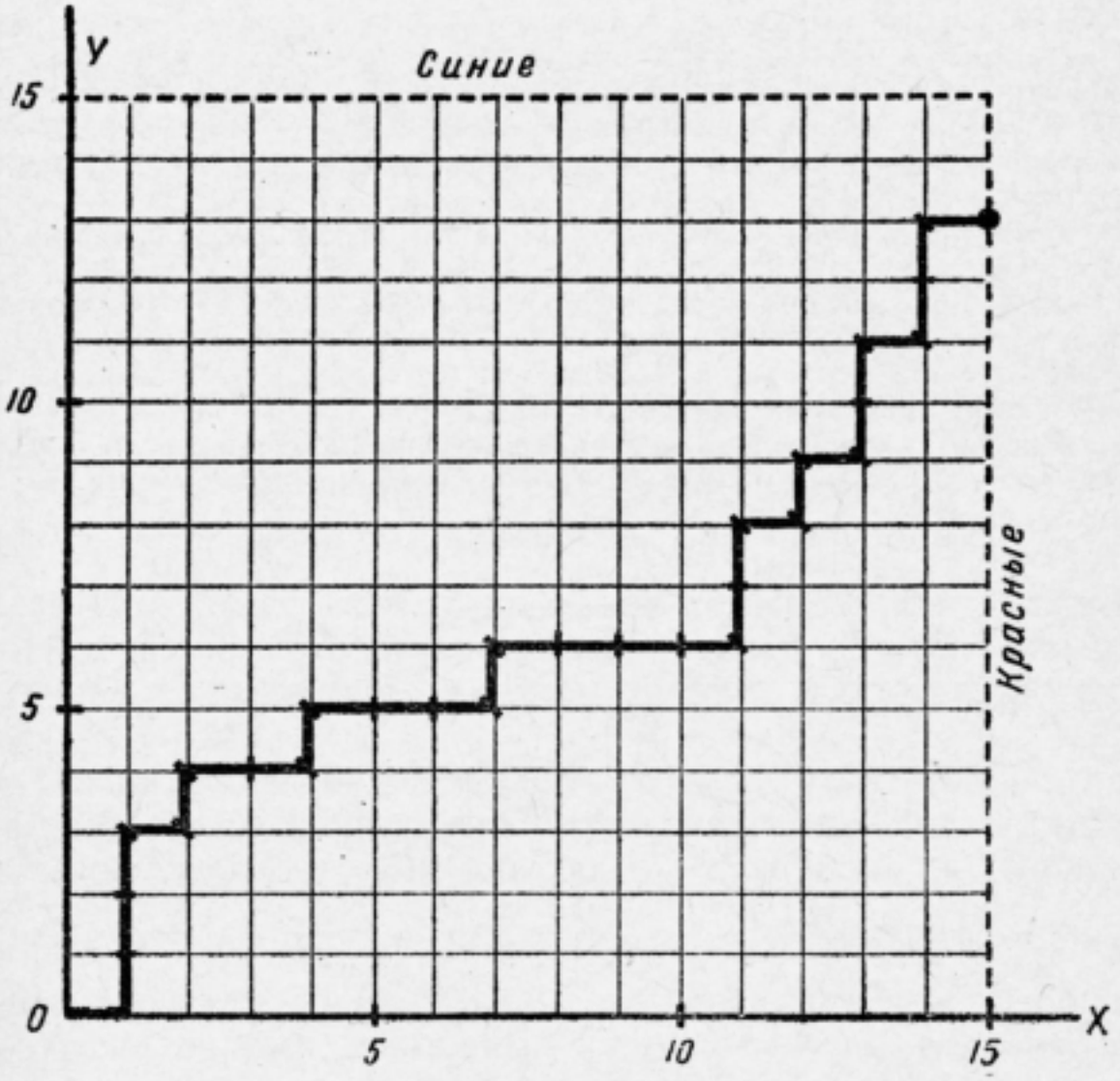
3) Если $x = \dfrac{3}{2}$, то $2x + 3 * 6 - x$.

182. Вместо каждой из букв подставьте какое-нибудь число, чтобы данные неравенства удовлетворялись:

$$1)\ n > 1000,\quad 2)\ h < 1,\quad 3)\ \begin{cases} x > 5 \\ x < 6, \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} y > 0{,}05 \\ y < 0{,}06, \end{cases}\quad 5)\ \begin{cases} z > \dfrac{4}{9} \\ z < \dfrac{5}{9}, \end{cases}\quad 6)\ \begin{cases} u < \dfrac{3}{7} \\ u > \dfrac{7}{17}. \end{cases}$$

183. Прямоугольный стол имеет ширину p *см* и длину q *см*. При этом упятеренная длина меньше усемеренной ширины, но утроенная длина больше учетверенной ширины. Запишите это в виде неравенств. Подберите числа p и q, удовлетворяющие этим неравенствам.



Черт. 30

184. В следующих утверждениях замените звездочки знаками равенства или неравенства:

1) Если $x < y$, $y = z$, $z < u$, то $x * u$.

2) Если $z < y$, $x > y$, $u = z$, то $x * u$.

3) Если $p < q$, $t > s$, $r > q$, $s > r$, то $t * p$.

185. Дано: $A < B$, $A > C$, $B > D$, $B < E$, $C < D$. Что больше: A или E? B или C? C или E? D или E? Что больше: A или D?

Упражнение 61.

186. Какая точка числового луча находится на одинаковых расстояниях от точек 7 и 11? 2,4 и 2,8? 1 и 1,01? a и b?

187. На прямой даны точки 15 и 25. Как найти точку O (начало, вершину луча)? Установите, каков масштаб.

188. Возьмите в координатном угле масштаб: 1 = 2 клетки и, пользуясь циркулем, посчитайте, сколько точек с целыми координатами находится внутри окружности с центром в точке (5,5) и радиусом 2,5? радиусом 1,5? радиусом 3,5?

189. Судья записал ход игры в волейбол между «красными» и «синими» в виде ломаной линии. После каждого удара мяча он проводит черту длиной в одну клетку, причем черта — горизонтальная, если удар «взят» красными, и вертикальная, — если удар «взят» синими. В начале игры, при счете 0 : 0, судья ставит карандаш в точку O.

Буквы x и y на черт. 30 указывают расположение координатного угла.

Дайте по чертежу описание состоявшейся игры. Чем она закончилась? Из скольких ударов состояла? Кто может объяснить: что обозначают на чертеже в зависимости от правил игры вертикальный и горизонтальный пунктиры?

Назовите координаты острия карандаша у судьи после 5 ударов, после 10 ударов, после 15 ударов, в конце игры?

Глава IV

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

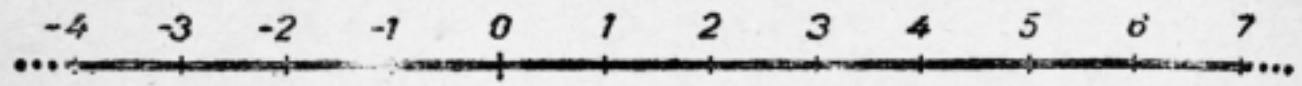
§ 22. Числовая прямая (ось)

Представим себе, что на числовом луче (черт. 31) с началом O вправо, как обычно, отмечены точки 1, 2, 3 и т. д., соответствующие числам натурального ряда. Продолжим наш луч в противоположную сторону — влево — таким образом, чтобы получилась прямая линия. От начала O отложим в л е в о расстояния 1, 2, 3 и т. д. и отметим полученные точки значками (-1), (-2), (-3) и т. д.

Таким же образом, в случае надобности, будем поступать и с дробными числами: отложив, например, отрезок длины $\frac{2}{3}$ влево от точки O, мы получим точку (конец отрезка), около которой можно поставить значок $\left(-\frac{2}{3}\right)$. Вообще, каково бы ни было число x, откладывая расстояние x влево от точки O, мы получим точку, около которой поставим значок $(-x)$. Вместо «точка со значком $(-x)$» будем просто говорить «точка $(-x)$».

Точка $(-x)$ симметрична точке x относительно начала O. Само начало симметрично самому себе: таким образом, точка (-0) совпадает с точкой 0. Значки (-1), (-2), (-3),..., $\left(-\frac{2}{3}\right)$,... и им подобные можно рассматривать как числа. Те числа, которые изображаются точками, лежащими в п р а в о от O, называются п о л о ж и т е л ь н ы м и; новые числа (с которыми мы теперь впервые знакомимся), изображаемые точками,

лежащими левее O, называются отрицательными. Особняком стоит число 0 (нуль): оно не считается ни положительным, ни отрицательным.



Черт. 31

Прямая, на которой отмечены точки, соответствующие всевозможным, положительным и отрицательным, числам, называется числовой осью. Числовая ось состоит из положительной полуоси (луча) и отрицательной полуоси (луча), обе полуоси имеют общую вершину — начало O.

Если две точки симметричны относительно начала O, то соответствующие им числа (их координаты) называют числами взаимно противоположными. Так, число (—3) противоположно числу 3, число 3— противоположно числу (—3).

Чтобы подчеркнуть, что положительные числа изображаются точками, лежащими вправо от начала O, можно было бы при положительных числах ставить знаки +; например, (+3) означало бы то же, что и 3. Но ради краткости этого обыкновенно не делают.

Расстояние точки от начала O называется абсолютным значением числа, соответствующего этой точке. Можно еще иначе сказать, что абсолютное значение числа, отличного от нуля, есть длина отрезка, образованного началом O и точкой, изображающей число. Таким образом, абсолютное значение положительного числа (или нуля) не отличается от самого числа; абсолютное же значение отрицательного числа есть число, противоположное данному.

Абсолютное значение числа, очевидно, никогда не может быть отрицательным; оно равно нулю лишь в том единственном случае, если само число равно нулю.

Упражнение 62.

190. Укажите на числовой оси точки

6; 2; (— 3); (— 5); 0,1; (— 1); $\frac{9}{2}$; $\left(-\frac{4}{3}\right)$; (— 0,3).

Назовите числа, противоположные перечисленным выше; укажите соответствующие точки на числовой оси.

191. Напишите, чему равно абсолютное значение каждого из чисел в пункте 190.

192. Сколько существует чисел, имеющих абсолютное значение 1, абсолютное значение 3, абсолютное значение 0,1, абсолютное значение 0? Укажите их на числовой оси.

В дальнейшем, пользуясь в алгебре буквами, мы будем нередко давать им также и отрицательные значения.

Между двумя различными положительными числами a и b, как мы видели, может быть поставлен знак $<$ или $>$, смотря по тому, расположена ли точка a на числовом луче левее или правее, чем точка b. Это же правило распространяется (по определению) и на всю числовую ось — в применении к положительным числам, отрицательным числам и нулю.

Отсюда вытекает следующее:

Всякое отрицательное число меньше всякого положительного.

Всякое положительное число больше нуля, всякое отрицательное — меньше нуля. И обратно: если число больше нуля, то оно положительно; если меньше нуля, то отрицательно.

Из двух положительных чисел больше то, у которого больше абсолютное значение. Из двух отрицательных чисел больше то, у которого абсолютное значение меньше.

Например, число (-5) меньше, чем число (-3):

$$(-5) < (-3).$$

Каковы бы ни были рассматриваемые числа (положительные, отрицательные или нуль), всегда справедливы утверждения:

1) если $a < b$, то $b > a$,

2) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Ссылаясь на числовую прямую, объясните сами, почему это так.

Упражнение 63.

193. Даны числа:
(—7), 241, (—30), 60, (—37), 50, 69, (—23), 2, 38, 0, (—42).

Расположите их в порядке возрастания, соединяя знаками неравенств. Расположите их абсолютные значения в порядке возрастания, соединяя знаками неравенств.

194. Москва основана в 1147 г. Римская империя прекратила существование в 476 г. Александр Македонский предпринял поход в Индию в 320 г. до нашей эры. Падение Трои совершилось за 1200 лет до нашей эры.

Отметьте все названные даты на числовой оси, принимая масштаб: 1 клетка = 100 лет.

195. Утром термометр показывал 1° тепла, днем 5° мороза. Увеличилась или уменьшилась температура к середине дня?

К утру следующего дня наступила оттепель, и термометр стал показывать 2° тепла. Увеличилась или уменьшилась температура за ночь?

Покажите изменения температуры на числовой прямой.

196. Джакарта (Ява) расположена на 7° южной широты, Веллингтон (Новая Зеландия) — на 41° южной широты, Каир — на 30° северной широты, Ленинград — на 60° северной широты, Мельбурн — на 37° южной широты, Москва — на 56° северной широты, Мурманск — на 79° северной широты, Рио-де-Жанейро (Бразилия) — на 23° южной широты, Сингапур — на 2° северной широты, Сталинабад — на 38° северной широты, Тбилиси — на 42° северной широты.

Изобразите все эти города в виде точек одного и того же отрезка числовой прямой между Южным и Северным полюсом («развернутый меридиан»).

Масштаб: 1 клетка = 10°.

То же с масштабом: 2 клетки = 10°.

Составьте перечень всех этих городов в порядке их близости к экватору. Найдите все эти пункты на карте.

Нередко различным величинам можно приписывать отрицательные значения. Это бывает в тех случаях, когда величины допускают истолкование «в противо-

положном смысле». Так, представим себе, что точки A и B лежат на горизонтальной прямой: если сказано, что точка B находится на (—10) единиц вправо от точки A, то следует понимать, что она находится на 10 единиц влево от нее. Если говорят, что такое-то лицо имеет (—300) рублей, то нужно понимать, что у него имеется 300 руб. долгу; и т. п.

Упражнение 64.

197. Дополните недостающие слова в следующих предложениях:

Сказано:	Это значит:
На числовой оси точка 8 лежит на (—10) единиц правее точки 18.	На числовой оси точка 8 лежит на 10 единиц ... точки 18.
Температура поднялась на (—6°).	Температура ... на 6°.
После дождя уровень воды в реке стал на (—12) *см* ниже обычного уровня.	После дожля уровень воды в реке стал на 12 *см* ...
Этот дядя на (—25) лет моложе этого племянника.	Этот дядя на 25 лет ... этого племянника.
Воздухоплавание станет средством передвижения лет через (—50).	Воздухоплавание ... средством передвижения лет 50 ...
Ты у меня взял в долг (—50) руб.	... взял в долг 50 руб.
Сегодняшние поступления в кассу составили (—120) руб.	Сегодня касса ... 120 руб.

198. Сказано: Я опоздал на урок на 10 минут. Поезд пришел на 2 минуты раньше расписания. Коля обогнал Сережу на $1\frac{1}{2}$ метра.

Как можно сказать иначе, пользуясь отрицательными числами?

Придумайте сами примеры в этом же роде.

Примечание. Следует, однако, заметить, что указанное истолкование отрицательных значений величин возможно далеко не всегда. Например, нельзя понять, что значит фраза: «На заборе сидит (—5) ворон». Существует ряд величин, которым никогда не приписывают отрицательных значений. Таковы:

расстояние (между точками), длина (отрезка), площадь (фигуры), объем (тела), плотность (вещества) и т. п.

§ 23. Сложение положительных и отрицательных чисел

С отрицательными числами можно производить те же арифметические действия, что и с положительными. Рассмотрим эти действия начиная со сложения.

На числовой прямой ясно видно, что значит «к 5 прибавить 3». Мы сначала находим точку 5; затем от нее вправо откладываем отрезок, равный 3, и после этого сразу видим, что получилась точка 8:

$$5 + 3 = 8.$$

Вообще, чтобы к некоторому числу a прибавить положительное число b, приходится на числовой оси от рассматриваемой точки a вправо отложить отрезок длины b, и тогда полученная точка указывает, какова сумма $a + b$.

Посмотрим теперь, что значит «к данному числу прибавить отрицательное число», например, к 5 прибавить (—3). Тогда на числовой прямой от точки 5 откладывают отрезок длины 3 влево. Получается результат:

$$5 + (-3) = 2.$$

Вообще, чтобы к некоторому числу a прибавить отрицательное число $(-b)$, на числовой оси от рассматриваемой точки a откладывают отрезок длины b влево: тогда конец отрезка укажет, какова сумма $a + (-b)$.

Что касается нуля, то его прибавление ничего не изменяет: не надо идти ни вправо ни влево.

Упражнение 65.

199. Глядя на числовую прямую, ответьте, чему равны следующие суммы:

1) $7 + 2$,
2) $7 + 5$,
3) $7 + (-3)$,
4) $7 + (-6)$,
5) $7 + 0$,
6) $(-2) + 5$,
7) $(-2) + 3$,
8) $(-2) + 2$,
9) $(-2) + (-8)$,
10) $(-2) + 0$,
11) $0 + 4$,
12) $0 + 9$,
13) $0 + (-1)$,
14) $0 - (-5)$,
15) $0 + 0$,
16) $(-3) + 8$,
17) $(-5) + 5$,
18) $9 + (-2)$.

19) $6+(-4)$, 20) $(-1)+(-4)$, 21) $2+(-10)$,
22) $(-3)+(-5)$, 23) $(-8)+(-1)$, 24) $9+4$,
25) $9+(-4)$, 26) $(-9)+4$, 27) $(-9)+(-4)$,

28) $3+5+1$, 32) $(-3)+(-5)+1$,
29) $3+5+(-1)$, 33) $(-3)+5+(-1)$,
30) $3+(-5)+1$, 34) $3+(-5)+(-1)$,
31) $(-3)+5+1$, 35) $(-3)+(-5)+(-1)$.

200. Глядя на числовую прямую, проверьте справедливость равенств:

$7+2=2+7$, $(-8)+3=3+(-8)$,
$0+5=5+0$, $(-4)+(-3)=(-3)+(-4)$,
$(-2)+5=5+(-2)$, $0+(-2)=(-2)+0$.

Проверьте справедливость равенства

$$a+b=b+a$$

1) при следующих значениях букв:

$$a=15,\ b=11;\ a=15,\ b=(-11);$$
$$a=(-15),\ b=11;\ a=(-15),\ b=(-11);$$

2) при произвольно взятых значениях букв.

201. Таким же образом проверьте справедливость равенств:

$$(5+7)+2=5+(7+2),$$
$$(6+1)+(-3)=6+(1+(-3)),$$
$$(8+(-5)+0=8+((-5)+0),$$
$$((-4)+3)+5=(-4)+(3+5),$$
$$((-2)+5)+(-3)=(-2)+(+5(-3)),$$
$$((-1)+(-7))+(-2)=(-1)+((-7)+(-2)).$$

Проверьте справедливость равенства

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

1) при следующих значениях букв:

$$a=17,\ b=(-12),\ c=(-9);$$
$$a=(-17),\ b=(-12),\ c=9;$$
$$a=(-17),\ b=12,\ c=(-9),$$

2) при произвольно выбранных значениях букв.

Из рассмотрения примеров, с привлечением числовой оси, получается следующее **правило сложения.**

При сложении двух чисел *с одинаковыми* знаками их *абсолютные значения складываются и сохраняется общий знак.* При сложении двух чисел с *разными* знаками *из большего абсолютного значения следует вычесть меньшее абсолютное значение и взять тот знак, который стоит при числе с большим абсолютным значением.*

Заслуживает особенного внимания тот случай, когда два слагаемых взаимно противоположны, т. е. имеют одинаковые абсолютные значения, но разные знаки; в этом случае сумма оказывается равной нулю: например,

$$3 + (-3) = 0.$$

Итак: сложение каких угодно чисел (положительных, отрицательных, нуля) подчинено законам переместительному $a + b = b + a$ и сочетательному $a + (b + c) = (a + b) + c$. Эти законы позволяют при сложении нескольких чисел переставлять между собою слагаемые и объединять их в какие угодно группы. Таким образом часто удается облегчить запись и выполнение действий.

Весьма употребителен следующий способ группировки: собирают вместе все положительные слагаемые и вместе все отрицательные слагаемые; затем остается из одной суммы вычесть другую и при результате поставить надлежащий знак.

Упражнение 66.

202. Выполните сложения дважды: сначала в указанном порядке, затем группируя слагаемые по усмотрению:

1) $50 + (-2) + 12$; 3) $7+5+(-13)+(-2)+8+(-5)$;
2) $1000 + 14 + (-4)$; 4) $3 + (-5) + 9 + 1 + (-3) + 5$:

5) $3{,}7 + 2{,}8 + (-0{,}8) + (-0{,}6) + 0{,}3 + 1{,}6$;

6) $\left(-\frac{3}{4}\right) + 1\frac{2}{5} + 2\frac{5}{6} + \left(-1\frac{5}{6}\right) + \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right)$.

203. Вычислите суммы, сначала складывая в указанном порядке, затем соединяя вместе положительные слагаемые и вместе отрицательные:

1) $695 + (-943) + 216 + 124 + (-511) + (-76)$,

2) $24{,}05 + 13{,}74 + (-81{,}15) + 19{,}46 + (-0{,}08) + + (-7{,}24) + 1{,}20,$

3) $3\frac{1}{4} + \left(-2\frac{1}{2}\right) + 4\frac{2}{3} + \left(-1\frac{5}{6}\right) + \left(-2\frac{1}{4}\right) + + \left(-3\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right).$

Упражнение 67.

204. Точка M двигалась по числовой оси следующим образом. В начальный момент она совпадала с точкой 8; в течение первой секунды передвинулась вправо на 5 единиц; затем в течение второй секунды передвинулась вправо еще на 2 единицы; в течение третьей секунды передвинулась влево на 3 единицы; в течение четвертой секунды передвинулась снова вправо на 7 единиц; а в течение пятой секунды передвижения ее были таковы, что она осталась на том же месте; наконец, в течение шестой секунды она сдвинулась влево сразу на 25 единиц.

Какие числа нужно с л о ж и т ь, чтобы узнать, где оказалась движущаяся точка в конце шестой секунды? Сделайте это двумя способами: 1) последовательно вычисляя положения точки в конце первой, второй и т. д. секунды, 2) пользуясь группировкой слагаемых.

205. Показания термометра отмечаются раз в сутки, в 8 час. утра. Первого марта термометр показал 1° мороза; 2 марта температура была на 2° ниже, чем накануне; к утру 4 марта потеплело на 3°; к утру 5 марта на 1°; затем произошло резкое похолодание, и за следующие сутки температура упала на 11°. Что показывал термометр утром 6 марта? Вычислите это посредством о д н и х с л о ж е н и й двумя способами.

206. Станем отмечать на числовой оси, сколько у меня денег. Я получил 300 руб., истратил 80 руб., снова получил 50 руб., истратил 25 руб., истратил 35 руб., истратил 60 руб., истратил 90 руб., получил 100 руб., истратил 120 руб. Сколько денег у меня теперь (вычислите двумя способами)?

207. Мне теперь $a = 15$ лет. Сколько лет мне будет через m лет? Подставьте следующие числовые значения, разъясняя смысл утверждения:

1) $m = 6$, 2) $m = 1$, 3) $m = (-3)$,

4) $m = (-10)$, 5) $m = 0$, 6) $m = \left(-\frac{1}{2}\right)$.

208. Отцу $n = 37$ лет, а дядя на h лет старше. Сколько лет дяде? Подставьте значения:

1) $h = 5$, 2) $h = (-2)$, 3) $h = (-10)$, 4) $h = 4\frac{1}{2}$.

§ 24. Вычитание положительных и отрицательных чисел

Попробуем решить уравнение

$$13 + x = 7.$$

Нам нужно найти такое число x, чтобы, прибавив его к числу 13, получить число 7. Среди положительных чисел такого числа, очевидно, нет: положительных корней уравнение не имеет. Но среди отрицательных чисел можно найти число, удовлетворяющее уравнению. Именно, можно положить x, равным (-6). В самом деле, мы видим, что $13 + (-6) = 7$. Итак, найден отрицательный корень данного уравнения.

Чтобы сделать решение уравнения более наглядным, достаточно себя спросить: на сколько единиц от точки 13 нужно по числовой оси передвинуться влево, чтобы прийти в точку 7?

Упражнение 68.

209. Решите следующие уравнения, прибегая к числовой оси. Делайте каждый раз проверку.

1) $8 + x = 15$, 7) $3 + x = 2\frac{1}{2}$, 12) $(-8) + x = 13$,

2) $8 + x = 5$, 8) $3 + x = \frac{1}{2}$, 13) $(-3) + x = (-1)$,

3) $8 + x = 1$, 9) $3 + x = 0$, 14) $(-1) + x = (-3)$,

4) $8 + x = 8$, 10) $3 + x = (-3)$, 15) $5 + x = 3$,

5) $8 + x = (-1)$, 11) $3 + x = \left(-1\frac{1}{2}\right)$, 16) $5 + x = 5$.

6) $8 + x = (-8)$,

210. Объясните с помощью числовой оси: как решить уравнение $x + 2 = 5$? уравнение $2 + x = 5$?

Сделайте то же для уравнения $5+x=2$ и уравнения $x+5=2$.

Решая уравнение $8+x=15$, мы ставим перед собой вопрос: какое число нужно прибавить к 8, чтобы получить 15? Такая задача решается посредством действия, обратного сложению, т. е. посредством вычитания.

Мы получаем:

$$x=15-8.$$

Рассмотрим теперь буквенное уравнение:

$$a+x=b.$$

При решении этого уравнения мы ставим перед собой вопрос: какое число x нужно прибавить к a, чтобы получить b? Геометрически это значит: на сколько единиц нужно передвинуться по оси вправо из точки a, чтобы попасть в точку b? Ответ — положительный или отрицательный — можно дать всегда, прибегая, если нужно, к числовой оси.

Каковы бы ни были числа a и b (положительные, отрицательные или нуль), уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение. Это решение называется разностью чисел b и a и обозначается:

$$x=b-a.$$

Положим, например, что $a=13$, $b=7$. Так как уравнение $x+13=7$ имеет решение (-6), то, значит, разность чисел 7 и 13 равна (-6):

$$7-13=(-6).$$

Вместо уравнения $a+x=b$ можно было бы рассматривать уравнение $x+a=b$. Их корни одинаковы, так как $x+a$ означает то же, что и $a+x$.

Упражнение 69.

211. Напишите, чему равны следующие разности:

1) $15-8$; 6) $1-8$; 11) $\frac{1}{2}-1$; 16) $2-5$;

2) $7-5$; 7) $8-8$; 12) $0-1$; 17) $1-13$;

3) $3-5$; 8) $(-1)-8$; 13) $(-3)-1$; 18) $13-(-8)$;

4) $5-5$; 9) $(-8)-5$; 14) $\left(-1\frac{1}{2}\right)-1$; 19) $(-3)-(-1)$;

5) $5-8$; 10) $2\frac{1}{2}-1$; 15) $5-2$; 20) $(-1)-(-8)$.

212. Решите такие задачи:

1) у Ивана 200 руб.; у Петра денег нет, да еще долгу 300 руб. На сколько у Ивана больше денег, чем у Петра? На сколько у Петра меньше денег, чем у Ивана?

2) Москва (у Москворецкого моста) расположена на высоте 118 *м* над уровнем океана; уровень Каспийского моря на 26 *м* ниже уровня океана. На сколько метров Москва выше, чем уровень Каспийского моря? На сколько уровень Каспийского моря ниже, чем Москва?

3) Вчера было 8° мороза, сегодня 3° тепла. На сколько градусов упала температура? На сколько она поднялась?

213. Матери $p = 30$ лет, а тетя на q лет моложе. Сколько лет тете?

Подставьте:

$$1)\ q = 7, \qquad 2)\ q = 1\frac{1}{2}, \qquad 3)\ q = (-3).$$

Легко указать удобное правило вычитания: *Чтобы вычесть некоторое число, достаточно прибавить число, ему противоположное.*

Пусть, например, требуется из 15 вычесть 8. Чтобы выполнить это действие, мы должны решить уравнение $x + 8 = 15$, т. е. узнать из какой точки оси нужно передвинуться вправо на 8 единиц, чтобы прийти в точку 15. Но мы получим интересующую нас точку, если из точки 15 передвинемся на 8 единиц влево (в обратном направлении), а это как раз означает, что к 15 мы прибавим (—8). Итак,

$$15 - 8 = 15 + (-8).$$

И точно так же

$$15 - (-8) = 15 + 8.$$

В общем виде указанное правило записывается следующим образом:

$$a - b = a + (-b),\ a - (-b) = a + b.$$

Мы видим, что *вычитание всегда может быть заменено сложением.*

Например:

$$18 + (-7) - (-4) - 10 = 18 + (-7) + 4 + (-10).$$

Упражнение 70.

214. Запишите в виде сумм следующие выражения, не производя никаких арифметических действий:

1) $10-2+8-5$ 2) $1-(-0{,}1)$, 3) $0-7+\frac{1}{4}-\left(-\frac{2}{7}\right)$,

4) $m-n+(-p)-(-q)$, 5) $(-3)-(-a)-1+b+5-c$.

На практике, производя вычисления, поступают иначе: сразу устраняют скобки и «двойные» знаки перед буквами или числами.

Прежними формулами пользуются при этом в виде:

$$a+(-b)=a-b,\ a-(-b)=a+b.$$

Например:

$$18+(-7)-(-4)-10=18-7+4-10.$$

Упражнение 71.

215. Выполнить указанные сложения и вычитания, освобождаясь сразу от «двойных» знаков:

1) $13+(-8)$,
2) $13-(-8)$,
3) $10+(-8)$,
4) $10-(-8)$,
5) $5+6+(-2)$,
6) $6+5+(-2)$,
7) $6+(-2)+5$,
8) $(-2)+5+6$,
9) $(-2)+(-5)$,
10) $5-(-2)$,
11) $(-5)-(-2)$,
12) $10-(-2)+5$,
13) $10+(-2)-5$,
14) $1-(-8)+13$,
15) $(-2)-6$,
16) $(-2)+6$,
17) $6-(-2)$,
18) $6+(-2)$,
19) $73+(-18)-30+14-(-19)$,
20) $91-109-(-35)+(-13)-5$.

216. Найти числовое значение выражения

$$s=u+v-w$$

при значениях:

1) $u=7$, $v=5$, $w=10$,
2) $u=7$, $v=5$, $w=(-10)$,
3) $u=7$, $v=(-5)$, $w=10$,
4) $u=7$, $v=(-5)$, $w=(-10)$,
5) $u=(-7)$, $v=5$, $w=10$,
6) $u=(-7)$, $v=5$, $w=(-10)$,
7) $u=(-7)$, $v=(-5)$, $w=10$,
8) $u=(-7)$, $v=(-5)$, $w=(-10)$.

217. В следующих примерах, освободившись от скобок и «двойных» знаков, сгруппировать вместе положительные члены и вместе отрицательные; затем выполнять действия:

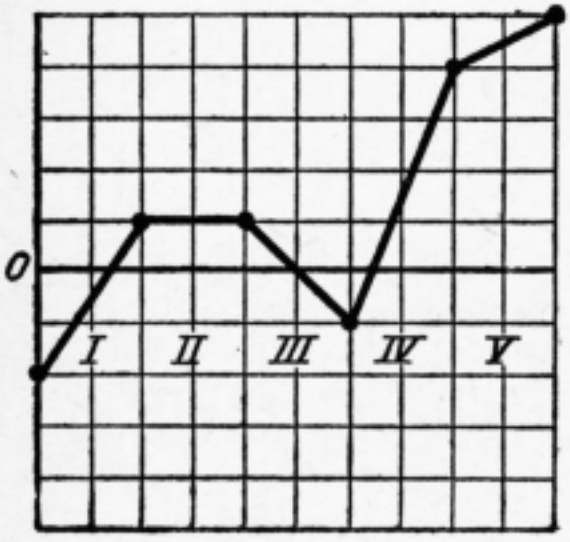
1) $17 + (-21) - (50) + 43 - (-37) + (-11)$,

2) $(-315) - (-429) + 128 - (-143) + (-67) - 79$,

3) $10{,}25 + (-1{,}03) - (-8{,}63) + 1{,}47 - (-5{,}12)$.

Упражнение 72.

218. На черт. 32 заданы графически результаты наблюдений за температурой воздуха. Наблюдения производились раз в сутки, в 12 часов ночи, на протяжении 5 дней.



Черт. 32

Запишите, на сколько градусов поднялась температура в течение первых, вторых, . . . , пятых суток; сложите полученные числа и сумму проверьте по чертежу.

Прибавляя или вычитая нуль, мы не изменяем числа. Поэтому можно свободно опускать члены, равные нулю. В частности, нуль опускают в выражениях вида $0-a$. Пишут $-a$, и это обозначает $0-a$:

$$-a = 0 - a.$$

Числовое значение выражения $-a$ противоположно числовому значению a. При этом само a может быть каким угодно (положительным или отрицательным) числом. Например, выражение $-(-3)$ обозначает $0-(-3)$, т. е. 3; это—число, противоположное числу (-3).

Необходимо усвоить, что выражение a необязательно положительно и выражение $(-a)$ необязательно отрицательно. В самом деле, если мы дадим букве a отрицательное значение, то будем иметь, наоборот:

$$a < 0, \quad (-a) > 0.$$

Отметим еще, что всегда (при всех значениях a)

$$a + (-a) = 0.$$

§ 25. Умножение положительных и отрицательных чисел

Правило. ***1) При умножении двух чисел с одинаковыми знаками (т. е. двух положительных чисел или двух отрицательных) достаточно перемножить их абсолютные значения.***

2) При умножении двух чисел с разными знаками (т. е. одного положительного и одного отрицательного) нужно перемножить их абсолютные значения и затем перед полученным произведением поставить знак минус.

Таким образом: если оба множителя—положительные, то и произведение их, получаемое по известным правилам арифметики, оказывается положительным. Если один из множителей отрицательный, то произведение их отрицательное. Если оба множителя отрицательные, то произведение снова положительное.

Например:

$$3 \cdot 5 = 15,$$
$$(-3) \cdot 5 = (-15),$$
$$3 \cdot (-5) = (-15),$$
$$(-3) \cdot (-5) = 15.$$

В частности, умножить данное число на (—1) значит заменить его числом противоположным, например:

$$(-1) \cdot 3 = (-3),$$
$$(-1) \cdot (-3) = 3;$$

и вообще, при любом a,

$$(-1) \cdot a = (-a).$$

Что касается случая, когда один из множителей равен нулю (или равны нулю оба), то в этом случае произведение также равно нулю.

Упражнение 73.

219. Сделайте умножения:

1) $30 \cdot 40$; 4) $(-20) \cdot 70$; 7) $(-16) \cdot (-10)$;
2) $35 \cdot \frac{2}{7}$; 5) $17 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$; 8) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{125}{16}$;
3) $0{,}4 \cdot 1{,}8$; 6) $(-0{,}3) \cdot (-0{,}9)$; 9) $0{,}07 \cdot 12{,}03$;
10) $1000 \cdot (-0{,}3)$;
11) $(-192) \cdot (-0{,}01)$;
12) $(-1{,}01) \cdot 0{,}027$.

220. 1) На горизонтальной оси Ox отметьте точки: $x = 2$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, (-2), $\left(-\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{3}\right)$, 0 (масштаб: 1 = 1 клетке).

Затем постройте ось OX тоже горизонтальную, помещая ее начало под началом оси Ox (на расстоянии 1 клетки); по формуле

$$X = 6x$$

вычислите значения X, соответствующие взятым значениям x, и отметьте их на оси OX.

Соедините прямолинейными отрезками отвечающие друг другу точки; проследите за расположением чертежа.

2) Сделайте то же самое с формулой

$$X = (-6)x.$$

221. Движение точки M по оси Ox задано формулой

$$x = vt,$$

где t — время, отсчитываемое от некоторого начального момента, v — скорость движения, x — координата точки.

Положив $v = 6$, укажите положения точки M в моменты времени

$$t = 2;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{5}{3}.$$

Затем укажите положения точки M в моменты времени

$$t = 0;\ (-2);\ \left(-\frac{1}{3}\right);\ \left(-\frac{2}{3}\right);\ \left(-\frac{5}{3}\right).$$

В какую сторону движется точка M? Каков смысл того, что t принимает положительные значения, отрицательные значения?

Положив теперь $v = -6$, укажите положения точки M в различные, ранее названные, моменты времени. В какую сторону движется на этот раз точка M?

Что значит «положительная скорость», «отрицательная скорость»?

Упражнение 74.

222. Объясните, почему равенства

$$(-1) \cdot a = (-a)$$
$$(-1) \cdot (-a) = a$$

справедливы при $a > 0$, при $a < 0$, при $a = 0$.

223. Что больше: a или $(-a)$?

224. При всех значениях a и b, положительных, отрицательных или нулевых,

$$ab = ba.$$

Объясните, как это следует из правила умножения.

225. Проверьте, что

$$(-3) \cdot ((-4) \cdot (-5)) = ((-3) \cdot (-4)) \cdot (-5).$$

Вообще, при всех значениях a, b и c справедливо равенство

$$a(bc) = (ab)c.$$

Дайте объяснения.

226. Сделайте умножения:

1) $(-5) \cdot (-2) \cdot 6$,

2) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$,

3) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$,

4) $2 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{4}$,

5) $(-1) \cdot \frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot 12$,

6) $2 \cdot (-4) \cdot 1{,}5 \cdot (-1{,}5)$.

227. Проверьте справедливость равенства $(a+b)c = ac+bc$ (распределительный закон умножения) при следующих значениях букв:

1) $a=8,\ b=5,\ c=3$;
2) $a=8,\ b=5,\ c=(-3)$;
3) $a=8,\ b=(-5),\ c=3$;
4) $a=8,\ b=(-5),\ c=(-3)$;
5) $a=(-8),\ b=5,\ c=3$;
6) $a=(-8),\ b=5,\ c=(-3)$;
7) $a=(-8),\ b=(-5),\ c=3$;
8) $a=(-8),\ b=(-5),\ c=(-3)$.

Проверьте его справедливость при значениях букв, вами произвольно выбранных.

Законы умножения, переместительный, сочетательный и распределительный, справедливы не только в том случае, если множители положительные, но и в том случае, если они какие угодно (положительные, отрицательные, равные нулю).

Предположим, что числа a и b — положительные. Тогда четыре формулы

$$a \cdot b = ab; \qquad a \cdot (-b) = (-ab);$$
$$(-a) \cdot b = (-ab); \qquad (-a) \cdot (-b) = ab$$

полностью охватывают правило умножения положительных и отрицательных чисел. Но эти формулы справедливы также и при каких угодно (положительных, отрицательных или равных нулю) значениях букв a и b.

Рассмотрим, например, последнюю формулу $(-a) \cdot (-b) = ab$. Положим в ней $a=(-3)$, $b=(-5)$; тогда $(-a)=3$, $(-b)=5$. По правилам умножения левая часть $(-a) \cdot (-b)$ равна $3 \cdot 5$, т. е. 15; правая часть ab равна $(-3) \cdot (-5)$, т. е. тоже 15.

Вот другое рассуждение: мы видели, что $(-a) = (-1) \cdot a$, $(-b) = (-1) \cdot b$; в таком случае

$$(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot b = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot b = ab$$

Произведение нескольких чисел, отличных от нуля, положительно или отрицательно, смотря по тому, является ли число отрицательных множителей четным или нечетным.

Теорема. **Если произведение двух чисел равно нулю, то непременно хотя бы одно из чисел равно нулю.** Короче: если $ab = 0$, то или $a = 0$ или $b = 0$.

Доказательство. Посмотрим, в самом деле, может ли случиться так, что ни одно из данных чисел a и b не равно нулю, а произведение ab равно нулю?

Допустим, что ни множитель a, ни множитель b не равны нулю. Тогда каждое из этих чисел или положительное или отрицательное. Возможны только четыре различных случая:

Случай 1. $a > 0$, $b > 0$. Случай 3. $a > 0$, $b < 0$.

Случай 2. $a < 0$, $b > 0$. Случай 4. $a < 0$, $b < 0$.

Но согласно правилу знаков в случаях 1 и 4 произведение ab должно быть положительным, а в случаях 2 и 3 — отрицательным и, следовательно, ни в одном из случаев оно не равно нулю.

Необходимо твердо запомнить следующее: *произведение двух множителей в том, и только в том, случае равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю.*

То же самое справедливо и в случае произведения нескольких множителей.

Упражнение 75.

228. Со школьного вечера домой принесены конфеты (все одного сорта). Пусть n — число конфет, m — стоимость каждой конфеты, p — стоимость всех конфет. Тогда

$$p = mn.$$

Если $p = 0$, то или $m = 0$, или $n = 0$. Объясните, почему.

Возможны ли случаи:

1) $m = 0$, $p \neq 0$? 2) $n = 0$, $p \neq 0$? 3) $m \neq 0$, $n \neq 0$, $p = 0$?

229. Решите уравнение:

$$(x - 2)(x - 3) = 0.$$

Объясните ход решения и сделайте проверку.

230. Решите уравнения:

1) $x + 1 = 0$, 2) $x(x + 1) = 0$, 3) $3(x - 5) = 0$.

Объясните и проверьте.

231. Придумайте сами уравнение, у которого будет а) два корня: 4 и 7, б) два корня: 3 и —5.

232. Решите уравнение:

$$(x-2)(x-3)(x+1)x=0.$$

Объясните и сделайте проверку.

233. Придумайте сами уравнение, у которого будет три корня: 4, (—1) и $\frac{1}{2}$.

§ 26. Деление положительных и отрицательных чисел

Деление есть действие, обратное умножению. Разделить b на a значит решить уравнение

$$ax=b.$$

Мы умеем решать это уравнение и записываем решение в виде

$$x=\frac{b}{a}$$

при условии, что делимое (числитель) b — положительное число (или нуль), а делитель (знаменатель) a — положительное число (но не нуль).

Решим теперь уравнение $ax=b$, предполагая, что делимое b и делитель a могут иметь какие угодно знаки. Пусть, например, абсолютное значение числа a равно 2, а абсолютное значение числа b равно 10. Возможны только четыре случая:

1) $a=(+2)$, $b=(+10)$. Тогда

$\frac{(+10)}{(+2)}=(+5)$, так как $(+2)\cdot(+5)=(+10)$.

2) $a=(-2)$, $b=(-10)$. Тогда

$\frac{(-10)}{(-2)}=(+5)$, так как $(-2)\cdot(+5)=(-10)$.

3) $a=(+2)$, $b=(-10)$. Тогда

$\frac{(-10)}{(+2)}=(-5)$, так как $(+2)\cdot(-5)=(-10)$.

4) $a=(-2)$, $b=(+10)$. Тогда

$\frac{(+10)}{(-2)}=(-5)$, так как $(-2)\cdot(-5)=(+10)$.

Отсюда следует:

Если делимое (числитель дроби) и делитель (знаменатель дроби) отличны от нуля, то для нахождения частного (значения самой дроби) достаточно разделить абсолютное значение делимого на абсолютное значение делителя; что касается знака частного, то он — положительный или отрицательный, смотря по тому, одинаковы или различны знаки делимого и делителя.

Далее:

Если делимое (числитель дроби) равно нулю, а делитель (знаменатель дроби) отличен от нуля, то частное (дробь) равно нулю.

В самом деле, раз произведение ax равно нулю, то должен равняться нулю один из множителей: но множитель a отличен от нуля; значит $x = 0$.

Обратно: *если частное (дробь) равно нулю, а делитель (знаменатель дроби) отличен от нуля, то делимое (числитель) равно нулю.*

Действительно, раз множитель x равен нулю, то произведение ax также равно нулю (§ 25).

Остается заметить, что деление на нуль невозможно — по тем же соображениям, которые были изложены раньше (§ 16).

Каждое не только положительное, но и отрицательное число a имеет обратное число $\frac{1}{a}$; только число нуль не имеет обратного.

Упражнение 76.

234. Выполните действия:

1) $40 : 8$,
2) $(-40) : 8$,
3) $40 : (-8)$,
4) $(-40) : (-8)$,
5) $\frac{36}{24}$,
6) $\frac{(-36)}{24}$,
7) $\frac{36}{(-24)}$,
8) $\frac{(-36)}{(-24)}$,
9) $\left(-\frac{1}{10}\right) : \left(-\frac{1}{100}\right)$,
10) $0{,}28 : (-0{,}4)$,
11) $\frac{(-1{,}44)}{0{,}84}$,
12) $\left(-1\frac{3}{4}\right) : \left(-2\frac{1}{3}\right)$.

235. Напишите числа (величины), обратные по отношению к следующим:

(-3), $\left(-\frac{1}{7}\right)$, $\frac{2}{5}$, $\left(-\frac{2}{5}\right)$, $\frac{5}{2}$, $\left(-\frac{5}{2}\right)$, (-7), $\frac{1}{3}$.

236. Может ли какое-нибудь число быть обратным по отношению к самому себе? (Таких чисел два.)

237. Мы видели (гл. III, § 16), что при положительных значениях a «разделить на a» значит умножить на величину, обратную a:

$$\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}.$$

Проверьте на примерах, что это утверждение правильно и при отрицательных значениях a.

238. Решите уравнения:

$$1)\ \frac{x-1}{x+2} = 0,\quad 2)\ \frac{x+2}{x+5} = 0,\quad 3)\ \frac{2x\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x+1} = 0,$$

$$4)\ \frac{1}{x} = 0,\quad 5)\ x = \frac{1}{x},\quad 6)\ \frac{x}{x+1} = 1.$$

239. Движение точки M по оси Ox задано формулой

$$x = vt.$$

Считая скорость v равной 6, установите, когда точка M будет занимать положения

$$x = 1,\ 10,\ 100,\ (-2),\ (-20),\ \left(-\frac{1}{3}\right).$$

Ответьте на те же вопросы, считая v равным (-6).

Какова должна быть в данной формуле скорость v, чтобы в момент $t=3$ точка M занимала положение $x=(-5)$?

§ 27. Все действия с положительными и отрицательными числами

Рассмотрим здесь вопрос о выполнимости четырех арифметических действий.

Выполнимо ли сложение? Другими словами, если задано два числа a и b, то всегда ли можно по известным математическим правилам составить их сумму?

В арифметике дается утвердительный ответ на этот вопрос при условии, что слагаемые a и b положительны. В алгебре (§ 23) указывается правило сложения каких угодно чисел (положительных, отрицательных, равных нулю).

Итак, сложение всегда выполнимо.

Перейдем к вычитанию. Верно ли, что всякое число b можно вычесть из всякого числа a?

Арифметика указывает, как вычесть меньшее число из большего; но с помощью правил арифметики нельзя вычесть большее число из меньшего. В курсе арифметики вычитание поэтому не всегда выполнимо. Иначе обстоит дело в алгебре. После введения отрицательных чисел устанавливается, что вычитание сводится к сложению: $a - b = a + (-b)$ (§24). Чтобы вычесть b из a, достаточно к a прибавить число, противоположное b. Так как у всякого числа имеется ему противоположное, то в алгебре (после введения отрицательных чисел) вычитание становится всегда выполнимым.

Об умножении можно сказать то же, что о сложении: в алгебре исчерпывающим образом указываются (§ 25) правила умножения любого числа на любое. Значит, и умножение всегда выполнимо.

Обратимся, наконец, к делению. Покуда учащийся (скажем, начальной школы) знает только целые числа, он не всегда может выполнить деление. Например, 8 «не делится» на 3 Но после введения дробных чисел становится возможным деление любого положительного числа (целого или дробного) на любое положительное: $8 : 3 = \frac{8}{3}$. После введения отрицательных чисел возникает вопрос: всегда ли можно любое число (положительное, отрицательное или равное нулю) разделить на любое (такое же)? Правила деления непроизвольны: они с неизбежностью вытекают из правил умножения, по отношению к которому деление является обратным действием. Оказывается (§ 26), что деление всегда выполнимо — с одним исключением: именно, даже после введения отрицательных чисел остается невозможным деление на нуль (см. § 16).

Подведем итоги: все четыре арифметических действия всегда выполнимы, кроме деления на нуль. Другими словами: каковы бы ни были числа a и b (положительные, отрицательные, равные нулю), во всех случаях можно вычислить значения выражений

$$a + b,\ a - b,\ ab,\ \frac{a}{b},$$

за единственным исключением: выражение $\frac{a}{b}$ не имеет никакого числового значения, если b равно нулю. В этом последнем случае говорят также, что выражение $\frac{a}{b}$ «не имеет смысла», или «теряет смысл», или не «существует».

Если встречаются более сложные выражения, требующие выполнения деления, то необходимо подразумевать, что входящие буквы имеют лишь такие значения, при которых делители не обращаются в нуль.

Рассмотрим, например, выражение

$$\frac{1}{x - 2}.$$

Его числовое значение может быть вычислено при любом значении x, кроме значения $x = 2$. При этом же значении знаменатель (делитель) обращается в нуль, и выражение «не имеет смысла».

Упражнение 77.

240. При каких значениях входящих букв не могут быть выполнены действия, указанные в следующих выражениях?

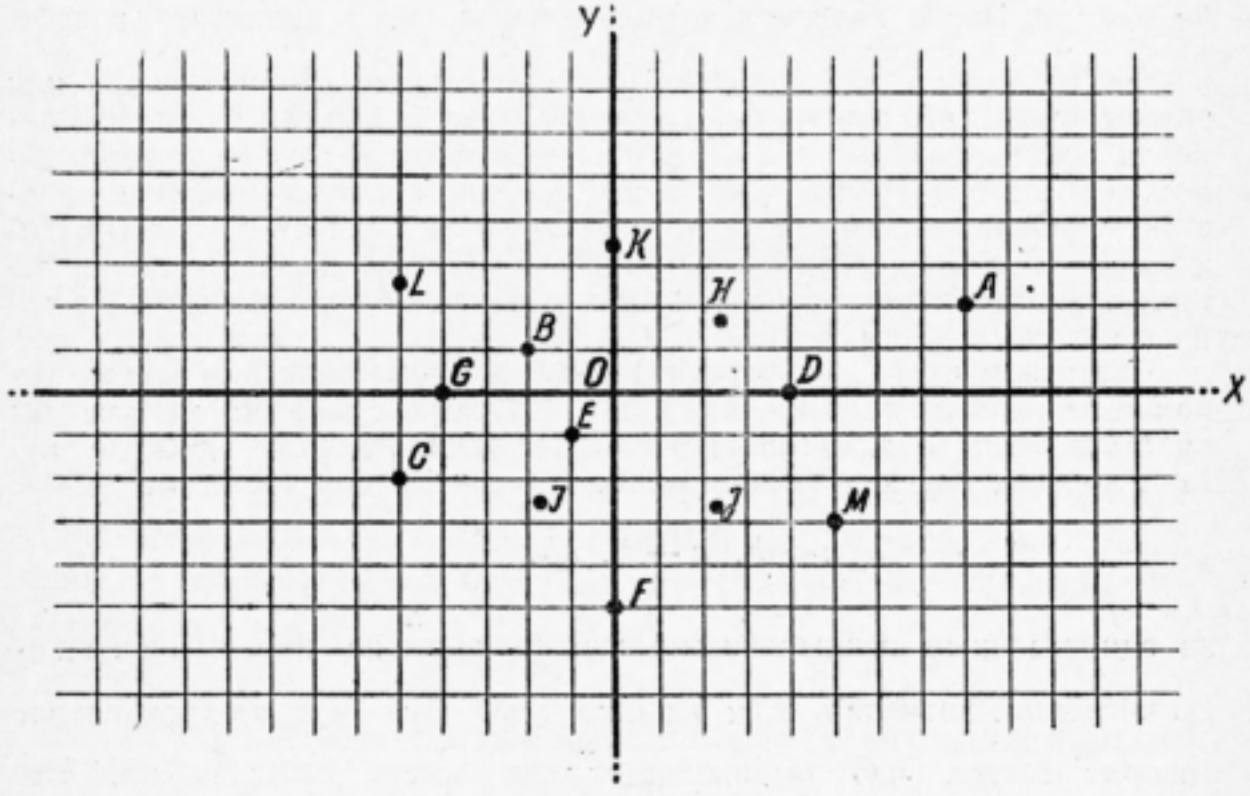
1) $\frac{t}{1-t}$, 2) $\frac{a+1}{a-1}+\frac{a+2}{a-2}$, 3) $\frac{(z+1)(z+2)}{(z-1)(z-2)}$,

4) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, 5) $\frac{ab}{pq}$, 6) $\frac{r-s}{p-q}$, 7) $\frac{1}{n(n+1)}$, 8) $\frac{1}{x}-\frac{3}{2x-5}$.

§ 28. Координатная плоскость

Мы видели (гл. III, § 21), что пары положительных чисел (x, y) изображаются точками, расположенными внутри прямого угла Oxy.

Станем теперь давать буквам x и y не только положительные, но вообще какие угодно значения



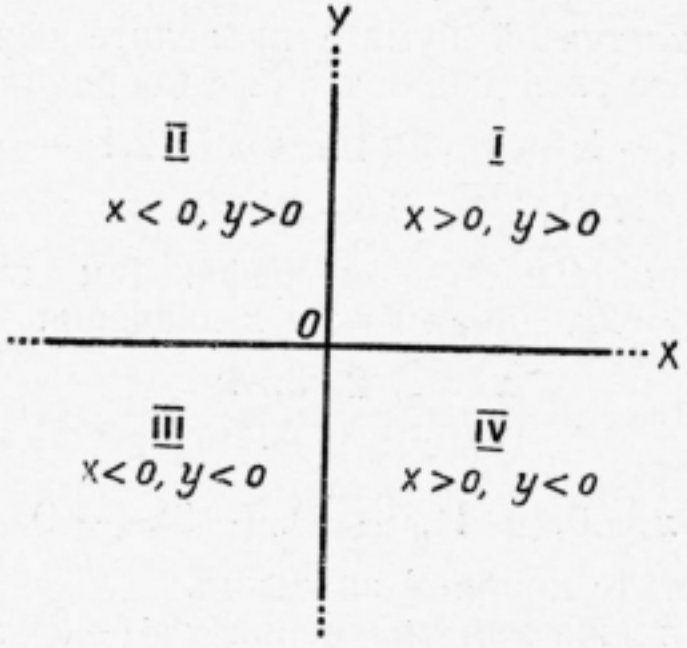
Черт. 33

(положительные, отрицательные и нуль) и посмотрим, как тогда можно будет изображать пары чисел (x, y).

Пусть на клетчатой бумаге (черт. 33) проведены две прямые: числовая ось Ox—горизонтальная, и числовая ось Oy—вертикальная. На оси Ox положительные значения буквы x изображаются точками, расположенными вправо от начала O, отрицательные значения — точками, расположенными влево; на числовой оси Oy

точно так же значения буквы y, смотря по знаку, отмечаются вверх или вниз. *Пара чисел (x, y) изображается точкой M, лежащей на пересечении прямых, вертикальной и горизонтальной, проходящих через отмеченные точки.*

Числа x и y называются координатами точки M: первое число x (откладываемое по горизонтальной оси Ox) называется абсциссой точки M, а второе число y (откладываемое по вертикальной оси Oy) — ординатой точки M. Чтобы назвать точку, координаты ее часто



Черт. 34

пишут в надлежащем порядке в скобках после названия точки: например, A (5, 3).

Мы имеем теперь возможность давать абсциссе x и ординате y какие угодно — как положительные, так и отрицательные — значения. Оси Ox и Oy делят плоскость на четыре прямых угла: основной угол, расположенный вправо и вверх от начала O; дальше, в порядке вращения вокруг начала O против часовой стрелки, идут второй, третий и четвертый углы (черт. 34).

По знакам координат x и y точки M легко узнать, в каком из четырех углов она находится, именно:

если $x > 0$, $y > 0$, то M находится в первом угле (I);
» $x < 0$, $y > 0$, » » » во втором » (II);
» $x < 0$, $y < 0$, » » » в третьем » (III);
» $x > 0$, $y < 0$, » » » в четвертом » (IV).

Если абсцисса x равна нулю, то точка M расположена на оси Oy; если равна нулю ордината y, то точка M — на оси Ox.

Упражнение 78.

241. Считая одну клеточку за единицу, мы видим, что точка M на черт. 33 имеет абсциссу $x = 5$ и ординату $y = -3$. Выпишите таким же образом координаты точек A, B, ... Если нужно, округляйте на глаз в десятых.

242. На клетчатой бумаге проведите оси Ox и Oy. Затем отметьте следующие точки с координатами:

$A(-3; 1)$, $B(-1; -4)$, $C(2{,}7; 0)$, $D(2{,}1; -5)$, $E(0; 0{,}8)$

$F(1{,}9; 4)$, $G(-3; -3{,}8)$.

243. Постройте по точкам график (см. гл. II, § 11) уравнения $y = 2x$, давая букве x значения

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4;$$

затем

$$x = 0, (-1),\ (-2),\ (-3),\ (-4);$$

или какие хотите дробные значения.

Сделайте то же для уравнения $y = (-2)\ x$.

Внимательно следите за соблюдением правила знаков.

Что получится?

244. В уравнении

$$y = \frac{1}{x}$$

давайте букве x не только положительные, но и отрицательные значения. Что станет с графиком? Значение $x = 0$ подставить нельзя: что это значит геометрически? Масштаб: $1 = 6$ клеткам.

Оказывается, что график уравнения состоит из двух отдельных «ветвей», одна из них расположена в угле (I), другая — в угле (III).

245. Формулы

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$$

определяют движение точки M (x, y) в координатной плоскости (см. § 20, 174). Укажите положение точки M в моменты времени:

$t = 0$ (начало отсчета),

$t = 1, 2, 3$ (через 1, 2, 3 секунды после начала отсчета),

$t = -1, -2, -3$ (за 1, 2, 3 секунды до начала отсчета).

По какой кривой движется точка M? В какой момент она пересекла ось Ox, ось Oy?

246. Другой пример такого же рода:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 2t. \end{cases}$$

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

Упражнение 79.

247. Что означает неравенство $a < b$? неравенство $a > b$? Всегда ли $a + b > a$, всегда ли $a - b < a$?

248. Перечислите правила действий над какими угодно числами (положительными, отрицательными или равными нулю).

249. В чем заключаются переместительный и сочетательный законы сложения и умножения?

250. Что такое число, «противоположное данному», «обратное данному»?

251. Объясните, каким образом вычитание сводится к сложению, деление — к умножению?

252. Назовите известные вам свойства нуля и единицы.

253. 1) Что можно сказать о двух множителях, если их произведение равно нулю?

2) Что можно сказать о двух слагаемых, если их сумма равна нулю?

Упражнение 80.

254. Вычислить числовое значение выражения

$$\frac{ab + c}{d - ef}$$

при $a = 0{,}2$; $b = -7$; $c = -1$; $d = 1{,}4$; $e = -0{,}5$; $f = -0{,}4$.

255. Чему равны выражения

$$x + y,\ x - y,\ xy,\ \frac{x}{y}$$

при $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{2}$?

256. Найти значения выражения

$$\frac{x-y}{x+y}$$

при 1) $x=-1$, $y=-1$; 2) $x=-1$, $y=-2$; 3) $x=-2$; $y=-1$; 4) $x=-2$, $y=-3$.

257. Даны равенства

$$u=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x} \quad \text{и} \quad v=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-x}.$$

Вычислить значения u и v при $x=2, 3, 4, 5, 6$. Записать в табличной форме. Возрастают или убывают величины u и v при возрастании x?

Упражнение 81.

258. В течение пятидневной болезни больному измерялась температура, как полагается, три раза в сутки (утром, днем, вечером). По изменениям температуры, данным в табличке,

	Изменения температуры				
	сутки				
	I	II	III	IV	V
С утра до середины дня	+0,4	−0,1	+0,6	−1,0	−0,5
С середины дня до вечера	+0,5	+0,2	+0,4	+0,1	+0,1
С вечера до следующего утра	−0,6	−0,3	−0,5	−0,2	−1,5

построить график изменения температуры, приняв во внимание, что утром шестого дня температура была 36,3°.

259. Постройте графики уравнений:

$$1)\ y=2-\frac{x}{5}, \quad 2)\ y=\frac{x}{10}-1.$$

Глядя на чертеж, скажите: при каких значениях x мы будем иметь $y=0$? $y>0$? $y<0$?

260. Постройте график уравнения

$$C=\frac{5(F-32)}{9},$$

откладывая вправо значения F, вверх — значения C. При этом давайте букве F значения, большие и меньшие, чем 32.
Масштаб: 2 клетки = 10°.

Глядя на полученный график зависимости температур по шкале Фаренгейта и по шкале Цельсия и пользуясь данной формулой, скажите:

1) какая температура по Цельсию соответствует температурам 50°, 95°, 32°, 5°, 20°, 0°, −50°, −30° по Фаренгейту?

2) какая температура по Фаренгейту соответствует температурам 0°, 100°, 50°, 15°, −25° по Цельсию?

Глава V

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (I)

§ 29. Коэффициент и показатель степени. Одночлены и многочлены

Пусть требуется сложить несколько слагаемых, среди которых могут быть и одинаковые; например,

$$a,\ b,\ a,\ a \text{ и } b.$$

Мы напишем сумму:

$$a + b + a + a + b.$$

Пользуясь законами сложения, переместительным и сочетательным, можно внести в эту запись порядок:

$$a + b + a + a + b = (a + a + a) + (b + b).$$

Повторить число a три раза слагаемым — значит то же, что умножить его на 3; поэтому

$$a + a + a = 3a.$$

Таким же образом

$$b + b = 2b.$$

Итак, при любых значениях a и b можно нашу сумму записать более кратко:

$$a + b + a + a + b = 3a + 2b.$$

Упражнение 82.

261. Проверьте, что $a + b + a + a + b = 3a + 2b$, подставляя числовые значения:

1) $a = -1$, $b = 4$; 2) $a = 0$, $b = 1$; 3) $a = 5$, $b = 7$.

262. Напишите короче суммы чисел:

1) $p+p+q+p+p$,

2) $m+n+m+m+n+m+n+m$, 3) $y+x+y$,

4) $F+G+G+H+H+H$, 5) $A+A+A+B+C+C$,

6) $s+s+s+s$.

Пусть требуется перемножить несколько чисел, среди которых не обязательно все — различные; например,

$$a,\ b,\ a,\ a \text{ и } b.$$

Мы напишем произведение

$$a \cdot b \cdot a \cdot a \cdot b \text{ или } abaab.$$

Пользуясь законами умножения, переместительным и сочетательным, можно дальше следующим образом упорядочить эту запись

$$abaab = (aaa)(bb).$$

Ради сокращения приняты обозначения:

$$aaa = a^3,$$

$$bb = b^2.$$

Вообще, если одно и то же число (или какое угодно выражение) нужно взять множителем несколько раз, то пишут его только один раз, а сколько раз оно повторяется множителем, обозначают маленькой цифрой, стоящей правее и выше числа (или выражения).

Таким образом, в нашем примере получается запись:

$$a \cdot b \cdot a \cdot a \cdot b = a^3b^2.$$

Например, подставляя значения $a=2$, $b=3$, получим:

$$a^3b^2 = 2^3 \cdot 3^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) = 8 \cdot 9 = 72.$$

Упражнение 83.

263. Вычислите числовое значение выражения a^3b^2 при значениях: 1) $a=-1$, $b=4$, 2) $a=0$, $b=1$, 3) $a=5$, $b=-7$.

264. Напишите короче произведения чисел:

1) $p \cdot p \cdot q \cdot p \cdot p$, 2) $m \cdot n \cdot m \cdot m \cdot n \cdot m \cdot n \cdot m$, 3) $y \cdot x \cdot y$,

4) $F \cdot G \cdot G \cdot H \cdot H \cdot H$, 5) $A \cdot A \cdot A \cdot B \cdot B \cdot C$, 6) $s \cdot s \cdot s \cdot s$.

Если требуется перемножить несколько величин, из которых одни могут быть выражены числами, другие — буквами, то обыкновенно сначала пишут произведение числовых множителей, затем буквенные множители в алфавитном порядке. Например, если нужно перемножить b, 3, c, a, 4 и $\frac{1}{2}$, то получается произведение:

$$b \cdot 3 \cdot c \cdot a \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c = 6abc.$$

Каждое выражение, представляющее собою произведение числового множителя и одного или нескольких буквенных множителей, называется одночленом. Числовой множитель в одночлене называется коэффициентом.

Так, в одночлене $6abc$ коэффициент равен 6; выражение же abc называют иногда буквенной частью одночлена.

Коэффициент может быть целым или дробным, положительным или отрицательным.

Если нужно некоторую величину умножить на дробь, достаточно умножить ее на числитель дроби и разделить на ее знаменатель. Поэтому, скажем, $\frac{2a}{3}$ означает то же, что и $\frac{2}{3}a$: выражение $\frac{2a}{3}$ можно считать одночленом, имеющим коэффициент $\frac{2}{3}$. Точно так же одно и то же означают записи

$$\frac{3}{4}x \text{ и } \frac{3x}{4} \text{ или еще } 0{,}75\,x,$$

и одинаково употребительны.

Если коэффициент не выписан (как, например, в одночлене a^3b^2), то его, очевидно, следует считать равным единице.

Значок, указывающий, сколько раз то или иное число (или выражение) должно быть взято множителем, называется «показателем степени» при этом числе (или выражении). Например, в одночлене a^3b^2 показатель при a равен 3, показатель при b равен 2. Показатель степени при каком-нибудь выражении — целое положительное число.

Если показатель не выписан (например, при s в выражении $10\,r^2s$), то его, очевидно, нужно считать равным единице.

Упражнение 84.

265. Перемножьте величины:

1) d, 3, a;

2) 2, h, 5;

3) s, $\frac{1}{10}$, t, 3;

4) n, p, 7, m, $\frac{1}{21}$;

5) a, (-1), a, (-1), a;

6) $\left(-\frac{1}{2}\right)$, c, 3, c, (-2);

7) x, y, y, y, $\frac{3}{4}$, x;

8) 3, P, (-2), Q, Q, (-1).

Несколько (не менее двух) одночленов, соединенных между собою знаками + или —, образуют выражение, называемое многочленом. Сами одночлены, из которых образован многочлен, короче называются членами этого многочлена. Смотря по числу членов, различают двучлены, трехчлены и т. д. Если в многочлене есть члены, не содержащие буквенных множителей, то такие члены называются свободными.

Так, выражение $3a+2b$ есть многочлен (двучлен), членами которого являются $3a$ и $2b$. Выражение $2r+s+7$ — тоже многочлен (трехчлен), членами которого являются $2r$, s и 7; из них последний — свободный член.

Мы знаем (§ 24), что вычитание может быть всегда заменено сложением. Поэтому, если несколько выражений соединены между собою знаками + или —, то полученный результат называется алгебраической суммой и может быть записан также в виде обыкновенной (арифметической) суммы. Например:

$$a+b-c+d-e=a+b+(-c)+d+(-e).$$

Итак, можно сказать кратко: *многочлен есть алгебраическая сумма одночленов.*

Знаки минус (если такие есть) обыкновенно относят к коэффициентам: так, вместо

$$5x-7y-8$$

можно было бы написать

$$5x + (-7)y + (-8).$$

Таким образом, следует считать, что в трехчлене $5x-7y-8$ коэффициенты при x и при y суть 5 и (-7), а свободный член равен (-8).

Упражнение 85.

266. Назовите отдельные члены следующих многочленов, указывая также коэффициенты в каждом члене:
1) $2r + 3s + 15$, 2) $3m - 2n + \frac{1}{2}p$, 3) $3ab + \frac{2}{3}dh$,
4) $\frac{x}{5} - \frac{y}{3}$, 5) $2a - a$, 6) $4p + q$,
7) $0{,}37xy - 0{,}13u + 1{,}2$.

Имеются ли в этих многочленах свободные члены?

267. Яблоко стоит m руб., груша n руб., дыня p руб. Напишите, сколько нужно заплатить: 1) за 30 яблок, 10 груш и 5 дынь, 2) за 8 груш и 3 дыни, 3) за 100 яблок и одну дыню, 4) за 5 дынь. Среди написанных выражений выделите одночлены, двучлены, трехчлены и укажите коэффициенты в каждом члене.

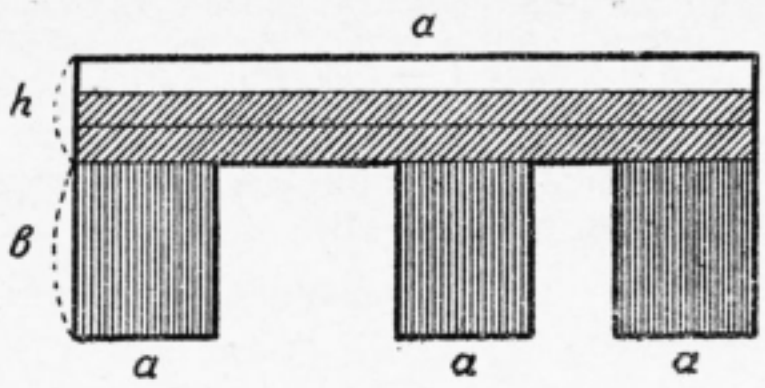
268. Одна из стен дома имеет основание A и высоту H. В ней имеется дверь с основанием a и высотой h и три окна с основанием b и высотой k каждое. Напишите формулу для площади стены. Сколько в ней членов? Каковы коэффициенты?

269. Составьте произведение чисел a, b, c, 2, 3 и 5. Составьте сумму тех же чисел. Скажите, что получилось: одночлен или многочлен? Укажите отдельные члены, коэффициенты в них.

270. Принимая во внимание размеры, указанные на черт. 35, напишите, чему равна: 1) вся площадь, заштрихованная прямо, 2) вся площадь, заштрихованная косо, 3) вся площадь, заштрихованная прямо и косо.

Укажите многочлены, одночлены, коэффициенты.

271. Найдите числовые значения выражений:
1) $m + 2n + 3p$, 2) $m + n^3 + p^3$, 3) mn^2p^3, 4) $m \cdot 2n \cdot 3p$ при $m = 5$, $n = 2$, $p = 3$.



Черт. 35

272. 1) Следующие выражения напишите, пользуясь только знаком сложения:

$$5a,\ 2a+3b,\ p+2q+3r.$$

2) Следующие выражения напишите, не пользуясь показателем степени:

$$a^5,\ a^3b^2,\ a^3+b^2,\ p^3q^2r,\ \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ \frac{2xy^3}{3z^4}.$$

§ 30. Возведение в степень

Повторное умножение одного и того же числа самого на себя называется возведением в степень.

Пусть n — целое положительное число. Тогда выражение a^n обозначает произведение n множителей, из которых каждый равен a; оно носит название n-й степени a и читается «a в степени n». Само a при этом называется основанием степени, тогда как n (как мы уже видели) — показателем степени.

Как мы знаем, вторая степень числа

$$a^2, \text{ т. е. } aa,$$

называется также квадратом числа a (читается «a-квадрат»). Это объясняется тем, что формула $S=a^2$ дает площадь квадрата со стороной a.

Точно так же третья степень числа a

$$a^3, \text{ т. е. } aaa,$$

называется иначе к у б о м числа a (читается «a-куб»). Это объясняется тем, что формула $V = a^3$ дает объем куба со стороной a.

Упражнение 86.

273. В книгохранилище 50 полок, на каждой полке по 50 книг, в каждой книге по 50 страниц, на каждой странице по 50 строк, в каждой строке по 50 букв. Сколько во всех книгах напечатанных букв?

274. Составьте таблицу квадратов целых чисел от 1 до 20 и выучите ее на память.

Составьте таблицу кубов целых чисел от 1 до 10 и выучите ее на память.

275. Что больше: 4^2 или 2^4? 9^3 или 3^9? 10^2 или 2^{10}? 10^3 или 3^{10}?

З а п о м н и т е, чему равно 2^{10}.

276. Возможно ли при $x>0$ неравенство $x^2<x$?

Когда именно оно имеет место?

277. Результат разложения числа 2 520 на простые множители можно записать в виде:

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Подобным же образом разложите на простые множители числа:

$$800,\ 3\,628\,800,\ 86\,400\,000.$$

278. Какие целые числа могут быть записаны в форме

$$4{,}5 \cdot 10^9?\quad 2{,}7 \cdot 10^{19}?\quad 10^{24}?$$

Можете ли их прочесть?

279. Будет ли положительным или отрицательным квадрат отрицательного числа? Куб? Любая заданная его степень?

Упражнение 87.

280. Даны одночлены:

$$u = 2x,\ v = x^2.$$

Каков коэффициент и каков показатель при каждом из них?

Найдите числовые значения u и v, получающиеся при подстановках:

$$x = 5;\quad 10;\quad 100;\quad 1;\quad \frac{1}{2};\quad 0{,}1;\quad -5.$$

Ведите запись в табличной форме.

281. Сделайте то же с одночленами

$$u = 3x,\ v = x^3.$$

282. Вычислите значения одночлена $10x^3y^2$ при заданных значениях x и y и результаты поместите в двойной таблице

x \ y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
3			
4			
5			

283. Вычислите значение одночленов

$$u = x^2,\ v = x^3,\ w = x^4,\ t = x^5$$

при следующих значениях x:

$$x = 7,\ \frac{1}{3},\ -1,\ -2.$$

Ведите записи в табличной форме.

284. Объясните с помощью чертежа: почему квадрат со стороной $\frac{2}{3}$ имеет площадь $\frac{4}{9}$? Почему квадрат со стороной $\frac{3}{2}$ имеет площадь $\frac{9}{4}$?

§ 31. Умножение одночленов

Пусть нужно умножить $3x^2y$ на $7x^3y^2$. С помощью переместительного и сочетательного законов умножения мы получим:

$$3x^2y \cdot 7x^3y^2 = (3 \cdot x \cdot x \cdot y) \cdot (7 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y) =$$
$$= (3 \cdot 7) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) \cdot (y \cdot y \cdot y) = 21x^5y^3.$$

Упражнение 88.

285. Выполните указанные умножения:

1) $2ab^2 \cdot 5ab$, 4) $(-3xy) \cdot (-8x)$, 7) $\frac{1}{5} PQ \cdot 2P \cdot 10Q$,

2) $0{,}3t^2 \cdot 6t$, 5) $4F \cdot \frac{1}{2} F^2$, 8) $\left(-\frac{2}{3} A\right) \cdot 6a \cdot (-A)$,

3) $7d^4 \cdot 2d^3$, 6) $z \cdot z^2 \cdot z^3$, 9) $1{,}2x \cdot 3x^2 \cdot (-0{,}2x)$

Пусть нужно возвести в квадрат одночлен $3x^2y$. Мы напишем:

$$(3x^2y)^2 = 3x^2y \cdot 3x^2y = (3 \cdot 3) \cdot (x^2 \cdot x^2) \cdot (y \cdot y) = 9x^4x^2.$$

Упражнение 89.

286. Выполните указанные возведения в степень:

1) $(a^3)^2$, 4) $\left(\frac{z}{2}\right)^2$, 7) $(MN^2)^3$,

2) $(5m)^2$, 5) $(-5z)^3$, 8) $(2Pxy)^3$,

3) $(-10u^2v)^2$, 6) $\left(\frac{5z}{2}\right)^3$, 9) $(3A^3B^4)^2$.

§ 32. Сложение и вычитание одночленов

Пусть нужно сложить одночлены $5c$ и $2c$. Мы получим:

$$5c + 2c = (c + c + c + c + c) + (c + c) =$$
$$= c + c + c + c + c + c + c = 7c.$$

Если слагаемые одинаковы или одночлены отличаются только своими коэффициентами (или не отличаются совсем), то сумму одночленов можно также написать в виде одночлена с той же буквенной частью и коэффициентом, равным сумме коэффициентов данных одночленов; например:

$$5c + 2c = 7c; \quad \frac{5c}{3} + \frac{2c}{3} = \frac{7c}{3}.$$

Это правило следует из распределительного закона умножения: действительно, достаточно в тождестве V (см. стр. 69)

$$(a + b)\,c = ac + bc$$

переставить левую и правую части и потом положить $a = 5$, $b = 2$, чтобы получить равенство

$$5c + 2c = 7c.$$

Упражнение 90.

287. Зубные щетки стоят по 3 р. 55 коп. Две подруги зашли в магазин: Лиза купила 7 щеток, Надя — 3 щетки. Как проще всего определить истраченную ими сумму денег?

Каким законом следует воспользоваться, если требуется определить числовое значение выражения $7a+3a$ при $a=3{,}55$?

288. Чему равняются суммы: $2x+3x+x$; $5y+y+4y$?

Сложите:

1) 3, 4 и 5; 2) m, $3m$ и $5m$; 3) a и $7a$;

4) b и $3b$; 5) $2c$, c и $5c$; 6) $5d$ и $5d$.

289. Чему равняются суммы:

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}x,\quad \frac{3}{4}y+\frac{y}{2},\quad \frac{z}{2}+\frac{z}{3}+\frac{z}{4}?$$

Сложите:

1) $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{4}$; 2) $2p$ и $\frac{p}{3}$; 3) S, $\frac{1}{2}S$ и $\frac{1}{10}S$;

4) $x+\frac{y}{2}$ и $\frac{y}{2}+z$.

290. Напишите в виде одночленов следующие суммы:

1) $4t+3t$, 2) $2u+u$, 3) $6c+5c+c$,

4) $\frac{z}{6}+\frac{5z}{6}$, 5) $\frac{n}{2}+\frac{n}{3}$, 6) $x+\frac{3}{2}x+2x$,

7) $\frac{2m}{3}+\frac{5m}{6}+\frac{m}{4}$, 8) $\frac{p}{4}+\frac{p}{5}+\frac{p}{6}$.

291. Отметьте на числовой оси точку $c=2$. Отметьте также точки $2c$, $5c$ и $7c$ и проверьте, ясно ли равенство $5c+2c=7c$ геометрически.

Сделайте то же, положив $c=3$; затем, положив $c=-1$.

292. Решите уравнения:

1) $4x+5x=27$, 4) $t+7t=12$, 7) $\frac{z}{3}+\frac{z}{7}=5$.

2) $x+2x+5x=32$, 5) $t+0{,}1t=33$,

3) $x+\frac{x}{2}=9$, 6) $t+t+2t+5t=18$,

293. Ученик написал во второй день вдвое больше страниц, чем в первый, а всего 24 страницы. Сколько он написал в первый и сколько во второй день?

294. Между тремя сыновьями отец хочет разделить 1000 руб. таким образом, чтобы средний получил вдвое, а младший — втрое больше, чем старший. Сколько денег получит старший?

295. Дед старше внука в 7 раз, а вместе им 100 лет. Сколько лет внуку?

Подобно сложению делается и вычитание. Например:

$$5c - 2c = 3c.$$

В самом деле, мы можем пользоваться прежним правилом, относя знак минус к коэффициенту; другими словами, под «суммой» понимая «алгебраическую сумму»:

$$5c - 2c = 5c + (-2)c = (5 + (-2))c = 3c.$$

Упражнение 91.

296. Вычтите:

1) $6x$ из $11x$, 2) $8a$ из $3a$, 3) $(-5t)$ из $4t$,

4) $(-3z)$ из $(-2z)$.

297. Сделайте вычитания:

1) $7a - 3a$, 2) $5m - 2\frac{1}{2}m$, 3) $\frac{T}{4} - \frac{T}{10}$, 4) $A - (-A)$.

298. Выполните указанные действия:

1) $4x + 5x - 8x$, 2) $x + x + 2x + 5x - 3x$,

3) $D - 4D + 2D$.

299. Решите уравнения:

1) $7x - 3x = 16$, 4) $3v - 2v + v = 7$,

2) $2t - \frac{1}{2}t = 15$, 5) $u - \frac{u}{2} + \frac{u}{3} = 5$.

3) $\frac{w}{10} - \frac{w}{24} = 1$,

300. Автомашина проехала вперед по дороге во второй день вчетверо больше, чем в первый, в третий — в обратном направлении — вдвое больше, чем в первый, в четвертый — снова в прямом направлении — в 5 раз

больше, чем в первый и, наконец, в пятый — в обратном направлении: 0,4 пути, сделанного в первый день. К концу пятого дня она оказалась на расстоянии 380 *км* от начального пункта. Какое расстояние машина прошла в первый день, за весь путь?

При решении пользуйтесь числовой осью.

Члены алгебраической суммы называются подобными, если они имеют одинаковые буквенные части и различаются, следовательно, разве только коэффициентами.

Мы уже умеем складывать и вычитать одночлены, которые подобны между собою. Для того, чтобы сложить несколько каких угодно одночленов, достаточно собрать вместе (на основе переместительного и сочетательного законов сложения) все члены, подобные между собой, и затем (на основе распределительного закона) соединить их в один член. Например:

$$p - 2p + 3q + 4q + 5p - 6q =$$
$$= (p - 2p + 5p) + (3q + 4q - 6q) = 4p + q.$$

Такого рода упрощение алгебраической суммы называется *приведением подобных членов.*

Упражнение 92.

301. В следующих суммах выделите подобные члены; сделайте приведение подобных членов, группируя их надлежащим образом, с помощью скобок:

1) $3a + 2b + 4a$,
2) $3a + 2b + 4b$,
3) $3a + 2b + 5a + 7b$,
4) $3a + 2b - 5a - 7b$,
5) $5x + 2 + 6x$,
6) $5x + 2 + 6$,
7) $5x + 2 + 7x + 5$,
8) $5x + 2 - 7x - 5$.

302. Упростите следующие выражения, выполняя приведение подобных членов:

1) $2x + y + 5z + 3x + 5y + 4z + 2y + 6z + z$,
2) $x + y - z + x - y - z - x + y + z$,
3) $x - 3y + 5 + 2x - y - 3 + 2y - 1$,
4) $a + b + c + d + c + b + a$,
5) $a + b + c + d + a + b + c + a + b + a$,

6) $u - \frac{v}{4} + \frac{u}{2} - \frac{v}{3} + \frac{u}{3} - \frac{v}{2} + \frac{u}{4} - v$,

7) $p + \frac{2}{3}q - \frac{r}{4} + \frac{1}{2}q - \frac{3}{4}p + r$,

8) $t + 3t^2 + 2t - t^2 + 1$,

9) $3mn + 2np - mn + mp - 3np$,

10) $a^3 - 1 + 2a - 5a + 4 + a^2$,

11) $uv + u^2 - 3v^2 + 5uv - u^2 + 5v^2$,

12) $xyz + 5y^2 + 2x - 2xz + \frac{x}{2}$.

§ 33. Сложение и вычитание многочленов

Чтобы прибавить многочлен, достаточно прибавить каждый его член в отдельности.

Чтобы вычесть многочлен, достаточно вычесть каждый его член в отдельности.

Так, например:

$$(5a + 2b) + (3a + 7b) = (5a + 2b) + 3a + 7b =$$
$$= \underline{5a + 2b + 3a + 7b} = (5a + 3a) + (2b + 7b) =$$
$$= 8a + 9b.$$

$$(5a + 2b) - (3a + 7b) = (5a + 2b) - 3a - 7b =$$
$$= \underline{5a + 2b - 3a - 7b} = (5a - 3a) + (2b - 7b) =$$
$$= 2a - 5b.$$

И точно так же:

$$(5a + 2b) + (3a - 7b) =$$
$$= (5a + 2b) + (3a + (-7)b) = (5a + 2b) + 3a + (-7)b =$$
$$= 5a + 2b + 3a - 7b = (5a + 3a) + (2b - 7b) =$$
$$= 8a - 5b,$$

$$(5a + 2b) - (3a - 7b) =$$
$$= (5a + 2b) - (3a + (-7)b) = (5a + 2b) - 3a - (-7)b =$$
$$= \underline{5a + 2b - 3a + 7b} = (5a - 3a) + (2b + 7b) =$$
$$= 2a + 9b.$$

Прежде чем выполнить сложение или вычитание данных многочленов, мы должны заключить их в скобки; выполняя же эти действия, мы скобки устраняем, или, как говорят, «раскрываем».

Из приведенных примеров видно*, что правило сложения или вычитания многочленов можно сформулировать как «правило раскрытия скобок».

Раскрывая скобки, нужно перед каждым членом: сохранять прежний знак, если перед скобками стоит плюс (+); менять знак на противоположный, если перед скобками стоит минус (—).

Упражнение 93.

303. К многочлену $8x - 6y + 5$ прибавьте многочлен $3x + 2y - 4$; вычтите из него тот же многочлен. Ведите подробную запись, как в приведенных выше образцах.

304. Раскройте скобки в следующих выражениях и сделайте приведение подобных членов:

1) $(x + 2y) + (2y + z)$, 2) $\left(2n + \frac{1}{2}\right) + \left(n - \frac{3}{2}\right)$,

3) $(u - v + 3w) + (2u + 5v - w)$, 4) $(x + 2y) - (2y + z)$,

5) $\left(2n + \frac{1}{2}\right) - \left(n - \frac{3}{2}\right)$, 6) $(u - v + 3w) - (2u + 5v - w)$

305. Карандаш стоит p коп., резинка q коп., перо r коп. Иван купил 5 карандашей, 2 резинки и 3 пера; Павел купил 10 карандашей и одну резинку; Александр — 3 карандаша и 4 пера. Сколько денег уплатил каждый из них? Все вместе?

306. Упростите выражения (раскройте скобки и сделайте приведение подобных членов):

1) $(3p + 4q) + (2p + 5q)$, 3) $(p + q) + q$,

2) $(p + q) + p$, 4) $(a + b + c) + (a + b) + a$,

5) $n + (n + 2) + (n + 4) + (n + 6)$,

6) $(2x + y + 1) + (5x + 3y + 2) + (x + 4y + 5)$,

7) $(3p + 4q) - (-2p + 5d)$,

8) $(p, -q) - p$,

9) $(p - q) + q$,

10) $(a - b + c) - (a - b) - a$,

11) $n - (n - 2) + (n - 4) - (-n + 6)$,

12) $(2x + y - 1) - (5x - 3y + 2) + (-x + 4y - 5)$.

---

* Обратите внимание на то, что подчеркнуто.

307. Сложите:

1) $2a+3b$ и $a+b$, 2) a и b, 3) x и 1.

308. Выполните действия:

1) $(x^2+1)+(x+1)$,

2) $(y^2+1)-(y+1)$,

3) $(x^2+xy+y^2)-(x^2-xy+y^2)$,

4) $(a+2)+(a^2-1)-(a^2+1)$,

5) $(m^2-3m)-(m-3)-(m^2-4m)$,

6) $(uv-u-v)-(u^2-v)+(u-2uv)+(u^2+uv)$.

§ 34. Умножение многочлена на одночлен

Чтобы умножить алгебраическую сумму нескольких членов на некоторый множитель, достаточно на этот множитель умножить каждый из членов и результаты сложить. Это следует непосредственно из распределительного закона.

Примеры.

1) $(2a+5b+c)=3\cdot 2a+3\cdot 5b+3\cdot c=6a+15b+3c$.

2) $3(2a-5b+c)=3(2a+(-5)b+c)=$

$=3\cdot 2a+3\cdot(-5)b+3\cdot c=6a-15b+3c$,

3) $4a^2c(2a+5b+c)=4a^2c\cdot 2a+4a^2c\cdot 5b+4a^2c\cdot c=$

$=8a^3c+20a^2bc+4a^2c^2$.

Если нужно умножить многочлен на некоторый множитель, то приходится заключать многочлен в скобки; после же умножения скобки исчезают. Поэтому, вместо того чтобы сказать: «умножим многочлен на одночлен», говорят короче: «раскроем скобки».

Упражнение 94а.

309. Раскрыть скобки в следующих выражениях:

1) $5(x+2)$, 4) $10(n^2+n+1)$, 7) $2x^2(x^3-1)$,

2) $7(2t-5)$, 5) $x(x+2)$, 8) $10n(n^2+n+1)$,

3) $2(x^3-1)$, 6) $t^2(2t-5)$, 9) $\frac{1}{2}(m^3-2m+4)$,

10) $\frac{3}{4}(A^2-6A-8)$, 11) $(-3)(1-u)$, (12) $\frac{m}{2}(m^2-2m+4)$,

13) $\frac{3}{4}A(A^2-6A-8)$,

14) $(-3u^2)(1-u)$.

310. Упростите выражения (раскройте скобки и сделайте приведение подобных членов):

1) $2(3x+y)+y$,

2) $3(2x+5y)+(x+2y)$,

3) $(A-B)+(A+B)$,

4) $2(t+1)+3(t-1)$,

5) $a(b+1)+b(a+1)$,

6) $m(m-1)+m(m+1)$,

7) $x+\frac{1}{2}(x+y)+y$,

8) $n+n(n-2)+n$,

9) $p^2+p(q-1)+q(p-1)+q^2$,

10) $0{,}7(a+2b)+0{,}3(a+12b)$,

11) $\frac{1}{2}(U-V)+\frac{1}{2}(U+V)$,

12) $\frac{1}{4}(H+K)+\frac{3}{4}(H-K)$,

13) $\frac{1}{2}(n-1)+2n+\frac{1}{2}(n+1)$,

14) $x^2(1-x)+x^2(1+x)$,

15) $a(1+a+a^2)-2a^2$.

311. Упростите выражения:

1) $(A+B)-(A-B)$,

2) $\frac{1}{2}(U-V)-\frac{1}{2}(U-V)$,

3) $3(t-1)-2(t+1)$,

4) $a(b+1)-b(a+1)$,

5) $3(2x+5y)-5(x+2y)$,

6) $m(m+1)-m(m-1)$,

7) $x-\frac{1}{2}(x+y)+y$,

8) $\frac{3}{4}(H-K)-\frac{1}{4}(H+K)$,

9) $x^2(1+x)-x^2(1-x)$,

10) $(1+a+a^2)-(1-a+a^2)$,

11) $(a+3b)-2(a+b)+(3a+b)$,

12) $(a+3b)-4(a+b)+(3a+b)$,

13) $\frac{x^2+xy+y^2}{2}+\frac{x^2-xy+y^2}{2}$,

14) $3(t-1)-2(t-2)+(t-3)$,

15) $5u-2(u-v)-3(u+v)$.

Равенства, получающиеся в результате выполнения простейших действий над одночленами и многочленами (сложение, вычитание, умножение), являются тождествами, так как справедливы при каких угодно значениях входящих букв.

§ 35. Буквенные подстановки

Упражнение 94б.

312. Что станет с выражением $x + 3$, если положить в нем

1) $x = 3$, 2) $x = -3$, 3) $x = 2a$, 4) $x = 4t + 5$?

Что станет при тех же подстановках с выражениями

$$a)\ 10 - x,\ b)\ 5x,\ c)\ \frac{6}{x}?$$

313. Что станет с выражением $y = \frac{1+x}{x}$, если положить в нем:

1) $x = -2$, 2) $x = \frac{1}{3}$, 3) $x = -1$,

4) $x = 2a$, 5) $x = 4t + 5$, 6) $x = z^2$?

314. Что станет с каждым из выражений

1) $u = 2x + 3$, 2) $v = 4 - 5x$, 3) $w = 1 - x$,

4) $t = x(1 - x)$,

если заменить x через $1 - y$?

315. Что станет с выражениями

$$x = 2t,\ y = 3t^2,\ z = \frac{1}{t},$$

если в них заменить t через $2t$?

316. Что станет с выражениями

$$x^2,\ x^3,\ \frac{1}{x},\ x + 2x^3,\ x^2 - x^4,\ 1 + x + x^2,$$

если в них заменить x через $(-x)$?

317. Что станет с выражениями

$$(a + b)c \text{ и } ac + bc,$$

если в них 1) заменить b через $(-b)$, 2) заменить c через $\frac{1}{c}$, 3) заменить одновременно b через $(-b)$ и c через $\frac{1}{c}$?

Предположим, что у нас имеется тождество, содержащее некоторую букву. Если вместо этой буквы подставить в обоих частях тождества одно и то же алгебраическое выражение, содержащее новые буквы или ту же букву, то получим опять тождество. Тот же результат получится, если тождество содержит несколько букв и мы вместо каждой буквы подставим свое данное выражение.

Пример 1.

Сделав в тождестве $(a+b)c = ac + bc$ замены, выражающиеся равенствами

$$a = m^2,\ b = 2np,\ c = mn^2p,$$

получим тождество

$$(m^2 + 2np)\,mn^2p = m^3n^2p + 2mn^3p^2.$$

Пример 2.

Заменяя в тождестве $a + b = b + a$ буквы a и b выражениями $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, получаем тождество

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}.$$

Предыдущее замечание делает излишним запоминание четырех различных распределительных законов (см. гл. III, § 15, формулы V — VI, и § 16, формулы VII — VIII):

$$(a+b)c = ac + bc \tag{1}$$

$$(a-b)c = ac - bc \tag{2}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \tag{3}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \tag{4}$$

Достаточно, в самом деле, запомнить формулу (1): формула (2) из нее получается посредством замены b на $(-b)$, формула (3) посредством замены c

на $\frac{1}{c}$, формула (4) посредством одновременной замены b на $(-b)$ и c на $\frac{1}{c}$.

Из того же распределительного закона (I) следуют также формулы, выражающие правила сложения или вычитания суммы и разности (см. гл. III, § 13, 14):

$$+(a+b)=a+b \tag{5}$$

$$+(a-b)=a-b \tag{6}$$

$$-(a+b)=-a-b \tag{7}$$

$$-(a-b)=-a+b \tag{8}$$

Именно, тождества (5) и (6) получаются из тождеств (1) и (2) посредством замены c через $(+1)$; тождества (7) и (8) — из них же посредством замены c через (-1).

Упражнение 95.

318. В тождестве

$$(a+b)c=ac+bc$$

положите:

$$a=3m^2n,\ b=-5pq,\ c=2mp^2.$$

Какое получится тождество?

Раскройте скобки в выражении $(3m^2n-5pq)\cdot 2mp^2$ и сравните.

319. В тождестве $(a+b)c=ac+bc$ замените c через d, затем b через $b+c$; наконец, раскройте скобки справа. Какое получится тождество?

Как получить тождество

$$(a+b+c+d)e=ae+be+ce+de?$$

320. Дано:

$$A=a+b+2c,\ B=7a+c,\ C=3b+5c.$$

Вычислите $A+B+C$.

321. Дано:

$$P=a+b+7,\ Q=c+d+5,\ R=c+f+3.$$

Вычислите, чему равняется

$$S=P+Q+R.$$

322. Дано:

$$P = t + 7,\ Q = t - 5,\ R = 3 - t.$$

Вычислите:

$$S = P + Q + R,\ L = -P + Q + R,\ M = P - Q + R$$

и $N = P + Q - R$.

Проверьте, что

$$L + M + N = S.$$

323. Вычислите, чему равны выражения $A + B$ и $A - B$, если

$$A = 7x + 3y + 2,\ B = 2x + 5y - 2.$$

Проверьте, что

$$(A + B) + (A - B) = 2A,\ (A + B) - (A - B) = 2B.$$

324. Дано:

$$A = abc^2,\ B = a^7c,\ C = b^3c^5.$$

Вычислите

$$F = BC,\ G = CA,\ H = AB \text{ и } P = ABC$$

и проверьте, что

$$FGH = P^2.$$

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

Упражнение 96.

325. Вычислите значения данных выражений при указанных значениях букв:

1) $5xy^2z^3$ при $x = -7,\ y = -3,\ z = -1$;

2) $\dfrac{m^3n}{p}$ при $m = -2,\ n = 5,\ p = -0{,}1$;

3) $\left(\dfrac{2}{a}\right)^3$ при $a = -\dfrac{1}{2}$ и при $a = 2$;

4) $(1 + u^2)^{10}$ при $u = 0$ и при $u = 1$;

5) $\dfrac{t}{1+t} - \dfrac{1}{1+t^2}$ при $t = 0$ и при $t = 1$;

6) $\dfrac{1 + s + s^2}{1 - s + s^2}(1 - s^2)^2$ при $s = 0$ и при $s = 1$.

Упражнение 97.

326. Упростите следующие выражения:

1) $5a - (2a + a)$, 2) $5a - (2a + b)$, 3) $5a - (2a - a)$,

4) $5a - (2a - b)$, 5) $5a - (c - 2a)$, 6) $(m + n) + (m - n)$,

7) $(m + n) - (m - n)$, 8) $(2x + 3y + 8) - (x - y + 3)$.

327. Выполнить действия:

1) $(a^2 + 3ab + 5b^2) + (2a^2 + 4ab - b^2)$,
2) $(3x + 5y - 2z + 1) + (2x - y + z - 8) + (x + 4y + 10)$,
3) $(2m^2n - 3mp + q + pq) + (-m^2n + 3pq) + (5mp - 7q)$,
4) $(3u + 5v + 6w) - (u + 2v - 5w)$,
5) $(a^2 + bc - 5a + 4c) + (ab - 2bc + c) - (a^2 + 3bc + 2a + b)$,
6) $(x^3 - 2x^2 + 0{,}6x + 1{,}5) - (2x^3 + 0{,}8x - 2{,}3) - (-5x^3 + x^2 - 1{,}5x)$.

328. Выполнить умножение одночленов:

1) $2a \cdot 3b$, 2) $x^2 \cdot 5x$, 3) $3px \cdot \frac{5}{6} qy$, 4) $a^3b \cdot ab^3$,

5) $\frac{1}{2} mn \cdot 12np$, 6) $s \cdot 2s \cdot 3s$, 7) $1{,}2p \cdot 0{,}5q \cdot 0{,}2r$,

8) $6u^4 \cdot \frac{1}{6} u^3$, 9) $(-2f) \cdot (-5g)$, 10) $\frac{x}{4} \cdot 3y \cdot (-x) \cdot (-2y)$,

11) $\frac{3}{4} a^2bc \cdot \frac{1}{5} ab^4 \cdot \frac{2}{3} bc^3$,

12) $\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3} \cdot \frac{z}{5} \cdot (-xy) \cdot 60yz \cdot \left(-\frac{1}{2} xyz\right)$,

13) $(5x)^2$, 14) $\left(\frac{z}{3}\right)^3$, 15) $\left(-\frac{1}{7} t\right)^3$, 16) $\left(\frac{3}{4} uv\right)^2$,

17) $(0{,}2mn^2)^2$, 18) $\left(\frac{ab}{2}\right)^3$, 19) $\left(-\frac{2}{7} a^3xy^2\right)^2$,

20) $3 \cdot 2x^4 \cdot \left(\frac{y}{5}\right)^2$.

329. Выполнить указанные умножения:

1) $(x + yz) \cdot 10t$, 2) $\left(3n - \frac{v}{2}\right) w$, 3) $(3m + 4m^2) \cdot 5m$,

4) $(2ab - 3) \cdot \frac{1}{6} ac$, 5) $(1 + p + qr) \cdot pqr$, 6) $(x - 2y + 4z) \cdot \left(-\frac{1}{2} xy\right)$,

7) $\left(5abx^2 - 7bcxy + \frac{3}{4} c^2y^2\right) \cdot \frac{2}{3} ax^2$, 8) $(2 + ab^2) \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} b$,

9) $\frac{3}{4} (a + 2b - 4c) \cdot 2a$, 10) $12xy \cdot (x^2 - y^2) \cdot \frac{3}{4} y^2$,

11) $18\left(\frac{p}{2} + \frac{q}{3} + \frac{r}{4}\right) \cdot \frac{pqr}{10}$, 12) $\frac{5}{16} a^2b \cdot (2a - b + c) \cdot \frac{4}{3} c^3$.

Упражнение 98.

330. Напишите произведения данных множителей:

1) $3x$, $5y$ и $6z$, 2) $\frac{1}{2} bc$, $3ac$ и $4ab$, 3) mnp и $3p$.

Напишите суммы данных слагаемых:

1) $3+x$, $5+y$ и $6+z$,

2) $\frac{1}{2}+b+c$, $3+a+c$ и $4+a+b$,

3) $m+n+p$, $2+n+p$ и $3+p$.

331. Как легче всего вычислить значение выражения

$$7a+3b+2a+5b+c+a+2b+9c$$

при $a=5{,}3$; $b=4{,}1$; $c=0{,}6$? Какими законами действия нужно воспользоваться, чтобы написать это выражение в возможно более простом виде?

332. Вычислите значения следующих выражений при $p=1{,}25$ и $q=0{,}75$:

1) $p+3q+3p+q+2p$,

2) $\frac{p}{5}+\frac{q}{3}+\frac{p}{2}-\frac{2}{3}q+\frac{p}{10}$,

3) $0{,}3p-1{,}4q+0{,}2q+0{,}5p+0{,}2p$

333. Вычислите значения алгебраической суммы

$$0{,}72r+1{,}36r-2{,}17r+1{,}85r-1{,}76r$$

при $r=1{,}25$ и при $r=3{,}75$.

334. Дана алгебраическая сумма

$$r+4r-2r+5r-0{,}4r.$$

Изобразите на клетчатой бумаге каждый член суммы, а также и результат суммирования в виде отрезков, направленных вправо или влево, смотря по знаку (+ или —). Направления отрезков обозначьте стрелочками. Возьмите масштаб: $r=2{,}5$ клетки. Сделайте проверку циркулем.

335. Из трех выражений

$$u=x+x^2,\ v=\frac{1}{2}x^3,\ w=2^x,$$

которое принимает самое большое и которое — самое маленькое значение при $x=5$?

336. Значения

$$y=2x^3-11x^2+2x+15$$

при $x=1$, 3, 5, 6 соответственно обозначены через A, B, C и D. Расположите числа A, B, C, D в порядке возрастания. Поставьте вместо звездочек знаки равенства или неравенства в соотношениях

$$A * B,\ B * C,\ C * D.$$

337. Проверьте непосредственными подстановками каких угодно значений, всегда ли имеет место неравенство

$$x<x^2+1.$$

338. Проверьте подстановками, всегда ли имеет место неравенство

$$x < \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

(обратите внимание на значение $x = 1$).

339. Проверьте, что неравенство

$$x < 0{,}3(x^2 + 1)$$

верно при $x = 0$, а также при $x = 4$ и $x = 5$ и т. д., но не верно при $x = 1$ и при $x = 2$.

Попробуйте найти два корня уравнения

$$x = 0{,}3(x^2 + 1).$$

340. При каком из значений $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ выражение

$$y = (10 - 3x)^2$$

принимает: 1) самое маленькое, 2) самое большое значение?

Глава VI

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

§ 36 Тренировка

Упражнение 99.

341. Уравнение

$$3x + 5 = 41$$

можно решить, узнавая, сначала, чему равняется $3x$:

$$3x = 36,$$

и затем, чему равняется x:

$$x = 12.$$

Проверка дает:

$$3 \cdot 12 + 5 = 41.$$

Решите подобным же образом следующие уравнения, всякий раз делая проверку:

1) $7x + 8 = 71$, 5) $3x + 5 = 14$, 9) $\frac{x}{3} - 2 = 1$,

2) $4x + 11 = 27$, 6) $5x + 3 = 18$, 10) $7 - 2x = 5$,

3) $5x - 6 = 34$, 7) $2x - 7 = 10$, 11) $10 - 3x = 1$,

4) $12x - 13 = 133$, 8) $\frac{x}{2} + 10 = 17$, 12) $11 - \frac{x}{4} = 8$.

342. Решите по этому же образцу (устно) следующие уравнения. Обязательно делайте проверку.

1) $2x + 5 = 10$, 5) $2x - 5 = 10$,

2) $2(x + 5) = 10$, 6) $2(x - 5) = 10$,

3) $5x + 2 = 10$, 7) $5x - 2 = 10$,

4) $5(x + 2) = 10$, 8) $5(x - 2) = 10$,

9) $2-5x=10$, 11) $5-2x=10$,

10) $5(2-x)=10$, 12) $2(5-x)=10$,

13) $\frac{x}{2}+5=10$, 19) $\frac{x}{5}-2=10$, 25) $\frac{2}{x}+5=10$,

14) $\frac{x+5}{2}=10$, 20) $\frac{x-2}{5}=10$, 26) $\frac{5}{x}+2=10$,

15) $\frac{x}{5}+2=10$, 21) $2-\frac{x}{5}=10$, 27) $\frac{2}{x}-5=10$,

16) $\frac{x+2}{5}=10$, 22) $\frac{2-x}{5}=10$, 28) $\frac{5}{x}-2=10$,

17) $\frac{x}{2}-5=10$, 23) $5-\frac{x}{2}=10$, 29) $2-\frac{5}{x}=10$

18) $\frac{x-5}{2}=10$, 24) $\frac{5-x}{2}=10$, 30) $5-\frac{2}{x}=10$.

Упражнение 100.

343. Чтобы решить более сложное уравнение

$$x+1+5x-7+2x+3-10x+2+x+4+3x-1=8,$$

достаточно упростить его левую часть, собирая вместе подобные члены:

$$(x+5x+2x-10x+x+3x)+$$
$$+(1-7+3+2+4-1)=8.$$

Отсюда, после приведения подобных членов, следует:

$$2x+2=8$$

и, значит,

$$2x=6,\ x=3.$$

Пользуясь этим указанием, решите следующие уравнения:

1) $3x+10-2x=16$, 4) $1+x-5+7x=20$,

2) $5x+8-6x=5$, 5) $x+(x+1)+(x+2)=15$,

3) $2x+1+5x+6=10$, 6) $(x-2)+x+(x+3)=25$,

7) $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11$,

8) $2x+\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}x+1\right)=1\frac{1}{2}$,

9) $x+(5x-1)+(2-5x)=10$,

10) $3(x+2)+5(x-1)=81$.

11) $\frac{x+1}{5}+\frac{2x-1}{3}=12$,

12) $2x+\frac{5-3x}{2}=6$,

13) $5(x-3)-3(x-5)=20$,

14) $4(2x-1)-7(12-x)=-58$,

15) $3(100+x)+5(100-2x)=100$,

16) $0{,}2(3x+4)+0{,}3(3x+5)+0{,}4(3x+7)=5{,}1$.

17) $2(5x+1)-(2x-1)-(7x+3)=0$,

18) $\frac{2x+3}{5}-\frac{3x+2}{2}-\frac{1-5x}{10}=-1{,}1$.

Упражнение 101.

344. 1) Сумма двух последовательных целых чисел равна 3. Какие это числа?

2) Сумма трех последовательных целых чисел равна 36. Какие это числа?

3) Написано подряд четыре числа, причем каждое следующее на единицу больше предыдущего. Их сумма равна 34. Какие это числа?

4) Написано подряд четыре числа, причем каждое следующее на единицу больше предыдущего. Их сумма равна 32. Какие это числа?

5) Написано подряд десять чисел, причем каждое следующее на единицу больше предыдущего. Их сумма равна 25. Какие это числа?

345. Мальчик сказал: «Возраст моего отца на 2 года больше, чем мой утроенный возраст; возраст моего деда на 3 года больше, чем удвоенный возраст моего отца. А всем троим вместе нам 99 лет. Сколько лет мальчику?».

§ 37. Дальнейшие свойства равенств

Мы уже видели, что равенства могут быть связаны между собой так, что *если* верно одно, то непременно верно и другое, другими словами, второе равенство *следует* или *вытекает* из первого, или, еще иначе, первое *влечет* за собой второе. Так, например, если верно, что $a=b$, то верно, что $b=a$. Или: если верны

сразу оба равенства $a = b$ и $b = c$, то верно и равенство $a = c$ (см. гл. III, § 19).

Сюда же относятся следующие важные свойства равенств:

I. Если $a = b$, то $a + m = b + m$.

II. » $a = b$, то $a - m = b - m$.

III. » $a = b$, то $am = bm$.

IV. » $a = b$ и притом $m \neq 0$, то $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$.

Более подробно свойство I означает следующее: предположим, что a, b и m — какие угодно числа, буквы или буквенные выражения. Если только верно равенство $a = b$, то верно также и равенство $a + m = b + m$.

В самом деле: ведь равенство $a = b$ говорит о том, что буквы a и b обозначают одно и то же число (записанное, может быть, различными способами); в таком случае, каково бы ни было число, обозначенное буквой m, суммы $a + m$ и $b + m$, несомненно, обозначают также одно и то же число.

Представим себе содержание свойства I наглядно. Пусть два брата, Иван и Петр, одного и того же роста, и пусть a обозначает рост Ивана, а b — рост Петра; предположим дальше, что за год каждый из братьев вырос на одно и то же число сантиметров, которое обозначим буквой m; тогда по прошествии года Иван и Петр по-прежнему будут одного и того же роста.

Вот другой пример. На весах с чашками уравновешены (без гирь) два камня, например, булыжник и кирпич, причем через a пусть обозначен вес булыжника, а через b — вес кирпича; если на каждую из чашек положим по гире одного и того же наименования (m *кг*), то равновесие не нарушится.

Продумайте и объясните по этому образцу свойства II, III и IV; приведите также подходящие примеры.

По поводу свойства II следует заметить, что оно только по форме отличается от свойства I, так как «вычесть m» означает то же, что «прибавить $(-m)$».

Точно так же свойство IV только по форме отличается от свойства III, так как «разделить на m» при условии $m \neq 0$ означает то же, что «умножить на $\frac{1}{m}$».

Оговорка «$\neq 0$» в формулировке свойства IV необходима по той причине, что разделить на нуль, как нам известно (§ 16), нельзя.

Напротив, в формулировке свойства (III) делать оговорку излишне, так как равенство $am = bm$ справедливо и при $m = 0$ (обе части обращаются в нуль, см. § 15). Следует, однако, заметить, что если $m = 0$, то равенство $am = bm$ справедливо и при $a \neq b$.

Свойства равенств I—IV легко сформулировать словесно:

Равенство не нарушится, если:

(I) *к обеим его частям мы прибавим одно и то же число,*

или (II) *от обеих его частей отнимем одно и то же число,*

или (III) *обе его части умножим на одно и то же число,*

или (IV) *обе его части разделим на одно и то же число, отличное от нуля.*

§ 38. Основной прием решения уравнений (применение свойств равенств)

Пример 1. $13x + 17 = 100$.

Предположим, что корень x нашего уравнения существует.

При подстановке этого корня написанное выше равенство является верным. Воспользуемся свойством II (здесь $a = 13x + 17$, $b = 100$, $m = 17$): раз верно равенство $13x + 17 = 100$, то верно и равенство

$$(13x + 17) - 17 = 100 - 17,$$

т. е.

$$13x = 83.$$

Теперь применим свойство IV (здесь $a = 13x$, $b = 83$, $m = 13$): раз верно равенство $13x = 83$, то верно и равенство

$$\frac{13x}{13} = \frac{83}{13}, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{83}{13},$$

или

$$x = 6\frac{5}{13}.$$

Подведем итоги. Мы допустили, что корень x существует и пришли к заключению, что $x = 6\frac{5}{13}$.

Остается проверить, справедливо ли было наше допущение. Это можно сделать посредством подстановки.

Проверка «сходится»:

$$13 \cdot 6\frac{5}{13} + 17 = 100.$$

Итак, $x = 6\frac{5}{13}$ есть единственный корень уравнения.

Очень важно при решении многочисленных примеров говорить и писать покороче, например, следующим образом:

Дано уравнение:

$$13x + 17 = 100.$$

Отнимем от обеих частей по 17 (II):

$$13x = 83.$$

Разделим обе части на 13 (IV):

$$x = \frac{83}{13}, \text{ или } x = 6\frac{5}{13}.$$

Проверка:

$$13 \cdot 6\frac{5}{13} + 17 = 100.$$

Пример 2.

$$10\left(\frac{5x+1}{2} - 3\right) = 275.$$

Решение. Разделим на 10 (IV):

$$\frac{5x+1}{2} - 3 = 27{,}5.$$

Прибавим по 3 (I):

$$\frac{5x+1}{2} = 30{,}5.$$

Умножим на 2 (III):

$$5x + 1 = 61.$$

Вычтем по 1 (II):

$$5x = 60.$$

Разделим на 5 (IV):

$$x = 12.$$

Проверка:

$$10\left(\frac{5\cdot 12+1}{2}-3\right)=275.$$

Пример 3.

$$4-\frac{5}{1-2x}=9.$$

Решение. Отнимем по 4 (II):

$$-\frac{5}{1-2x}=5.$$

Разделим на 5 (IV):

$$-\frac{1}{1-2x}=1.$$

Умножим на $1-2x$ (III):

$$-1=1-2x.$$

Прибавим по $2x$ (I):

$$2x-1=1.$$

Еще прибавим по 1 (I):

$$2x=2.$$

Разделим на 2 (IV):

$$x=1.$$

Проверка:

$$4-\frac{5}{1-2\cdot 1}=9.$$

Упражнение 102.

346. Проделайте снова все примеры из упражнения 99, пользуясь свойствами равенств и заканчивая проверкой.

Решая уравнение прежним способом («с применением свойств арифметических действий») или новым способом («с применением свойств равенств»), нам приходилось выполнять одни и те же вычисления: только «объяснения» были различны.

В дальнейшем вы убедитесь, что решать уравнение новым способом гораздо легче.

Пример 4.

$$3x=x+6.$$

Решение. Отнимем по x (II):

$$2x=6.$$

Разделим на 2 (IV):

$$x = 3.$$

Проверка:

$$3 \cdot 3 = 3 + 6.$$

Пример 5.

$$5x - 2 = 4x + 3.$$

Решение. Прибавим по 2 (I):

$$5x = 4x + 5.$$

Отнимем по $4x$ (II):

$$x = 5.$$

Проверка:

$$5 \cdot 5 - 2 = 4 \cdot 5 + 3.$$

Пример 6.

$$\frac{x}{8} + \frac{1}{6} = \frac{x}{4}.$$

Решение. Умножим на 24 (III):

$$3x + 4 = 6x.$$

Отнимем по $3x$ (II):

$$4 = 3x,$$

или (§ 24, свойство 2)

$$3x = 4.$$

Разделим на 3 (IV):

$$x = \frac{4}{3}.$$

Проверка:

$$\frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{8} + \frac{1}{6} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{4}.$$

Упражнение 103.

347. По этим образцам решите уравнения:

1) $x + 2 = 5 - x$,

2) $3x = 5x - 12$,

3) $10x - 1 = x + 1$,

4) $7 + 3x = 8 - 2x$,

5) $\frac{x}{12} + \frac{1}{3} = \frac{x}{4}$,

6) $\frac{2x - 1}{8} = 3x$,

7) $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{3}$,

8) $\frac{1-x}{x} = 10$,

9) $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{3}{10}x + 2$,

10) $\frac{1}{x} - 3 = \frac{1}{3x}$,

11) $x = 2x$,

12) $1 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2x}$,

13) $4(5x - 1) = 13x + 3$,

14) $2(10 - x) = 7(x - 1)$,

15) $\frac{3x+2}{4} = x - 1$,

16) $\frac{2x-3}{5} = \frac{x+8}{3}$,

17) $4(x - 1) + 7(x + 1) = x + 10$,

18) $\frac{3x+2}{4} - \frac{17}{20} = \frac{x+1}{5}$.

Упражнение 104.

348. Решите уравнения относительно входящей буквы и проверьте:

1) $x = 1 + \frac{2}{5}x$,

2) $3y + 10 = 5y + 4$,

3) $\frac{z}{2} = \frac{z}{5} + 6$,

4) $1 + 0{,}1t = 2{,}6t$,

5) $25v = v + 2{,}5$,

6) $w = \frac{1 + 3(w+2)}{4}$,

7) $1 - 0{,}04F = 0{,}5 + 0{,}06F$,

8) $\frac{u}{u-4} = 3$,

9) $\frac{g-4}{g} + 1 = 0$,

10) $p(p + 1) = 3 + p^2$,

11) $q + 2 = \frac{1 + q + q^2}{q}$,

12) $\frac{H}{10} = 10 + H$,

13) $\frac{K}{10} = 10K$,

14) $\frac{r+2}{3} = r - \frac{r-1}{2}$,

15) $\frac{5}{s} = \frac{3}{s} + 1$,

16) $\frac{2}{m} + 5 = 3$,

17) $\frac{n^3 + n + 1}{n^2 + 3} = n$,

18) $0{,}2c = \frac{1 + c^2}{1 + 5c}$,

19) $\frac{b^3 + b^2 + 2}{b^2 + b + 1} = b$,

20) $T + 2T + 3T + 4T = 0$,

21) $S + \frac{S}{2} + \frac{S}{3} = 0$.

Вернемся к теории решения уравнений.

Прибавляя к обеим частям равенства

$$a - m = b$$

по m (свойство I), мы получаем:

$$a = b + m.$$

Вычитая из обеих частей равенства

$$a + m = b$$

по m (свойство II), мы получаем:

$$a = b - m.$$

Так как указанные операции приходится выполнять чрезвычайно часто, то в дальнейшем мы можем избавить себя от труда всякий раз ссылаться на свойства равенств I и II; достаточно заметить, что выполняется следующее правило:

Допустим, что какая-нибудь из частей данного равенства представляет собой алгебраическую сумму двух или большего числа членов. Тогда *можно перенести один из этих членов (или несколько, или даже все) в другую часть равенства, с изменением знака на противоположный.*

Слово «можно» означает: вновь получаемое равенство есть следствие данного, т. е., если верно данное равенство, то верно и вновь полученное.

Постепенно вырабатывается привычка, в случае, если нужно перенести несколько членов, переносить их не последовательно (один за другим), а одновременно. Например, желая в равенстве

$$x - y + 3b + z - 4a + 2y = c - 2z + y + 10 - 4x$$

все члены, содержащие буквы x, y, z, «собрать» в левой части, а прочие члены — в правой части, мы напишем сразу:

$$5x + 3z = 4a - 3b + c + 10.$$

В заключение приведем общий план решения уравнения, которому большей частью удобно бывает следовать.

При решении уравнения:

1) *прежде всего освобождаются от дробей;*

2) *затем производят упрощения: раскрывают скобки и делают приведение подобных членов.*

Если в результате упрощений останутся лишь члены, содержащие неизвестную букву в первой степени, и члены, ее вовсе не содержащие, то дальше,

3) *члены, содержащие неизвестную букву, переносят в левую часть уравнения, а остальные члены, не содержащие этой буквы, — в правую;*

4) *устанавливают, какой множитель стоит при неизвестной букве в левой части.*

Если окажется, что упомянутый множитель отличен от нуля, то

5) *останется лишь разделить на него обе части уравнения.*

И, наконец, как мы видели, нужно делать *проверку.*

Упражнение 105.

349. Решите уравнения:

1) $2(x-2)+3(2x-1)=7(1-x)-5(x-4)$;

2) $4(x^2+2x-5)-3(x^2-x+3)=x^2+4x-5$;

3) $(2x-3)x=(x^2+4)-(5x-x^2)$;

4) $(t+0{,}5)-(3t-1{,}2)=2t+1{,}7$;

5) $25(3-u)=(10+u)-20(15-2u)$;

6) $1+(3-R)(2-R)=R^2$;

7) $\frac{1}{4}z-\frac{1}{5}(z+1)=\frac{1}{5}z-\frac{1}{4}(z+1)$;

8) $\frac{L+1}{2}-\frac{L+2}{3}=\frac{L+3}{4}-\frac{L+4}{5}$.

§ 39. Решение задач посредством уравнений

Пример 1.

Я задумал число. Отнял от него 28, остаток разделил на 3, потом прибавил 120 и полученную сумму умножил на 20. Получился результат 10 000. Какое число я задумал?

Составление уравнения

Допустим, что я задумал число x. Отнял от него 28, получил $x-28$. Разделив этот остаток на 3, получил $\frac{x-28}{3}$. Прибавив 120, получил $\frac{x-28}{3}+120$. Умножив

на 20, получил $20\left(\frac{x-28}{3}+120\right)$. Но в условии задачи сказано, что я получил результат 10 000. Итак, можно написать уравнение:

$$20\left(\frac{x-28}{3}+120\right)=10\,000.$$

Решение уравнения

Разделим на 20 (IV):

$$\frac{x-28}{3}+120=500.$$

Вычтем 120 (II):

$$\frac{x-28}{3}=380.$$

Умножим на 3 (III):

$$x-28=1\,140.$$

Прибавим 28 (I):

$$x=1168.$$

Проверка по уравнению

$$20\cdot\left(\frac{1168-28}{3}+128\right)=10\,000.$$

Проверка по условию задачи

Я задумал число 1 168. Отняв 28, получил 1 140. Разделив на 3, получил 380. Прибавив 120, получил 500. Умножив на 20, получил в результате 10 000.

Упражнение 106.

Составьте уравнения к следующим задачам и решите их. Делайте проверку по уравнению и проверку по условию задачи.

350. Я задумал число. Прибавил к нему 28, умножил на 3, отнял 120, разделил на 20 и получил 9. Какое число я задумал?

351. Борис втрое старше Андрея, Василий на 5 лет старше Бориса, Григорий вдвое моложе Василия, Дмитрий на 1 год моложе Григория, а сегодня ему исполнилось 3 года. Сколько лет Андрею?

352. В пяти пакетах лежат яблоки. Вместе в первом и во втором пакетах 12 яблок, вместе в третьем

и четвертом — 39 яблок, в третьем вдвое меньше, чем во втором, в пятом — в 7 раз меньше, чем в четвертом. Сколько яблок в первом пакете, если в пятом их 5?

Пример 2.

Велосипедист едет из одного города в другой со скоростью 10 *км* в час. Если бы он ехал со скоростью 12 *км* в час, то приехал бы на 4 часа раньше. Каково расстояние между городами?

Составление уравнения

Пусть расстояние между городами равно x *км*. При скорости 10 *км* в час на весь переезд потребуется $\frac{x}{10}$ часов, при скорости 12 *км* в час потребуется $\frac{x}{12}$ часов. По условию задачи второе число на 4 меньше, чем первое. Итак,

$$\frac{x}{10} - \frac{x}{12} = 4.$$

Решение уравнения

Умножим на 60 (III):

$$6x - 5x = 240.$$

Делаем приведение подобных членов:

$$x = 240.$$

Проверка по уравнению

$$\frac{240}{10} - \frac{240}{12} = 4.$$

Проверка по условию задачи

Расстояние в 240 *км* со скоростью 10 *км* в час можно проехать за 24 часа, со скоростью 12 *км* в час — за 20 часов. Разность как раз равна 4.

Упражнение 107.

Составьте уравнения к следующим задачам и решите их. Сделайте проверку.

353. Я умножил задуманное число на 12 и на 17, причем во втором случае получил произведение, боль-

шее, чем в первом случае, на 35. Какое число я задумал?

354. Прибавив к задуманному числу 416, я тем самым увеличил его втрое. Какое число я задумал?

355. Умножив задуманное число на 7, я тем самым уменьшил его на 18. Какое число я задумал?

356. В классе два отделения. В первом отделении на 3 ученика больше, чем во втором, а всего в классе 65 человек. Сколько учеников в первом отделении?

357. В двух шкафах расставлено 438 книг. В большом шкафу на 102 книги больше, чем в меньшем. Сколько книг в меньшем шкафу?

358. Распродана партия апельсинов в 1000 штук, двух сортов; общая выручка составила 2523 руб. Апельсины первого сорта продавались по 2 руб. 60 коп., апельсины второго сорта — по 2 руб. 25 коп. за штуку. Сколько было продано апельсинов первого сорта?

359. Огород имеет форму прямоугольника. Его площадь равна 300 $м^2$, ширина 16 *м*. На сколько длина больше ширины?

360. Фасад дома имеет площадь в 700 $м^2$. На сколько метров высота дома больше основания, если основание равно 28 *м*?

361. Проезд в метро стоит 50 коп., в трамвае 30 коп., в автобусе 45 коп. Сколько Иван Иванович сделал поездок в метро, если в трамвае он ездил вдвое меньше, чем в метро, в автобусе — втрое меньше, чем в метро, а всего истратил 24 руб.?

362. Тихон на 10 лет моложе Харитона, Федор вдвое моложе Тихона и 15 лет назад был втрое моложе Харитона. Сколько лет Харитону?

363. Путевка в дом отдыха стоит 900 руб., причем для членов профсоюза стоимость ее снижается до 600 руб. Всего продано путевок на общую сумму 29 100 руб. Сколько было членов профсоюза среди 40 отдыхающих?

364. Шнурок длиной в 110 *см* разрезан на 5 частей таким образом, что вторая часть на 2 *см* больше, третья — на 2 *см* меньше, четвертая — в 2 раза больше, пятая — в 2 раза меньше, чем первая. Какова длина первой части?

§ 40. Уравнения, имеющие вид пропорции

Уравнения, в частности, нередко имеют вид «пропорции», т. е. и левая и правая части уравнения представляют собою отношения некоторых выражений. Из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ в результате умножения обеих ее частей на bd немедленно следует равенство:

$$ad = bc.$$

Это — «основное свойство пропорции»: *в пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.*

Решая, например, уравнение

$$\frac{2x-3}{5} = \frac{x+8}{3},$$

не стоит подробно объяснять, что станет с уравнением, если (по свойству III) сначала умножим обе части на 5, потом на 3 или сразу на 15; достаточно сказать кратко: «по основному свойству пропорции» мы получаем:

$$3(2x-3) = 5(x+8).$$

Упражнение 108.

365. Решите уравнения:

1) $\frac{x+2}{3x} = \frac{5}{12}$;

2) $\frac{3x-5}{2} = \frac{4x-1}{-3}$;

3) $\frac{6}{x} = \frac{7}{10-x}$;

4) $\frac{E}{1+E^2} = \frac{1}{2+E}$;

5) $\frac{2l}{1+l+4l^2} = \frac{1}{1+2l}$;

6) $\frac{a}{a^2+1} = \frac{1}{a+4}$;

Упражнение 109.

Решите задачи:

366. В правом кармане на 60 руб. больше, чем в левом; отношение же суммы в левом кармане к сумме в правом кармане равно 2 : 7. Сколько денег в левом кармане?

367. Числитель дроби на 36 меньше, чем знаменатель. Каков знаменатель, если по сокращении дробь оказывается равной $\frac{5}{9}$?

368. 1) Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{2}{5}$, чтобы получить дробь $\frac{3}{7}$?

2) Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{2}{5}$, чтобы получить дробь $\frac{5}{14}$?

369. Я задумал число. Прибавил к нему 28, потом умножил на 3, вычел 120, разделил на 20 и получил в 8 раз меньше, чем задумал. Какое число я задумал?

370. При движении парохода вниз по течению реки его скорость равна 10 *км* в час. Во время движения этого парохода против течения был сброшен спасательный круг; после этого, когда пароход успел пройти 7 *км*, круг оказался от него на расстоянии 20 *км*. Какова собственная скорость парохода?

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

Упражнение 110.

371. Решите уравнения:

1) $2(5n+14)-3(2n+11)=n+100$,

2) $T(T^2-1)-2(T^2-3T+1)=T(T^2+4)-2(T^2-4)$,

3) $\frac{3y^3-3y^2+4y-5}{4y^3-4y^2+3y-2}=\frac{3}{4}$.

372. Решите уравнения (сначала подумайте, будет ли удобно следовать общему плану):

1) $3(3u-5)+10=20-7(3u-5)$,

2) $2\left(\frac{h}{h+1}-1\right)+3\left(\frac{h}{h+1}+1\right)=7\frac{h}{h+1}$,

3) $3(2z-3)+5(2z-3)+7(2z-3)=0$.

Упражнение 111.

373. В квартире с общим электросчетчиком живут Андреев, Петров и Сидоров. У Андреева 5 «точек» (лампочек), у Петрова 2, у Сидорова 4. Прислан счет на 109 руб. Сколько должен уплатить Андреев?

374. Колхозник получил аванс за себя и за своего сына 831 руб. Как оплачивается трудодень, если этот колхозник выработал 17 трудодней, а его сын 15?

375. За день экскурсанты сделали 26 *км*, причем шли 5 часов до обеда и 2 часа после обеда. С какой скоростью шли экскурсанты до обеда, если известно, что после обеда каждый час они проходили на 1 *км* меньше?

376. Пассажирский поезд вышел со станции через t часов после товарного и нагнал его еще через 3 часа. Чему равно t, если товарный поезд делает 25 *км* в час, а пассажирский 40 *км*?

377. Окружность заднего колеса экипажа равна 125 *см*. Какова длина окружности переднего колеса, если известно, что на протяжении километра переднее колесо сделало на 200 оборотов больше, чем заднее?

378. В пяти вазах разложены яблоки. В первой и во второй вместе 12 яблок, в третьей и четвертой вместе 39 яблок, в третьей вдвое меньше, чем во второй, в пятой — в 7 раз меньше, чем в четвертой. Сколько яблок в первой вазе, если во всех вазах их 56?

379. За сколько часов сделал некоторый путь велосипедист, если известно, что пешеходу, двигающемуся втрое медленнее, для той же цели понадобилось на 3 часа больше?

380. Дед старше внука в 50 раз, а разница в их возрасте 50 лет. Сколько лет внуку?

Упражнение 112.

381. Решите задачи:

1) Иван и Петр зарабатывают одинаково. Иван работал 5 часов и после того израсходовал 2 руб. Петр работал 4 часа и затем получил еще 3 руб. После этого у обоих оказалось одно и то же количество денег. Сколько рублей зарабатывает каждый из них за час?

2) Иван идет со скоростью 5 *км* в час, Петр — со скоростью 4 *км* в час. В начале пути они вышли из одного места в одно и то же время и пошли по одной дороге. В конце пути оба остановились одновременно, но Иван оставил мост через реку в 2 *км* позади, тогда как Петр не дошел до этого моста еще 3 *км*. Сколько часов продолжалось путешествие?

3) Иван и Петр работали одно и то же число часов, но Иван зарабатывал каждый час по 5 руб, а Петр по 4 руб. По окончании работы Иван израсходовал 2 руб., а Петр получил еще 3 руб., и после этого у них оказалось одно и то же количество денег. Сколько часов работал каждый из них?

4) Иван и Петр шли с одинаковой скоростью. Они вышли из одного места в одно и то же время и пошли по одной и той же дороге. Но Петр остановился отдохнуть через 5 часов ходьбы, пройдя 2 *км* после моста, тогда как Иван остановился через 4 часа ходьбы, не дойдя до этого моста еще 3 *км*. С какой скоростью шли Иван и Петр?

Упражнение 113.

382. По данным чертежа 36*a* установите, как зависит периметр P и площадь S фигуры (a) от отрезка x.

Установите, при каком значении x площадь S равна 30.

383. По данным чертежа 36*b* установите, как зависит периметр P и площадь S фигуры (b) от отрезка x.

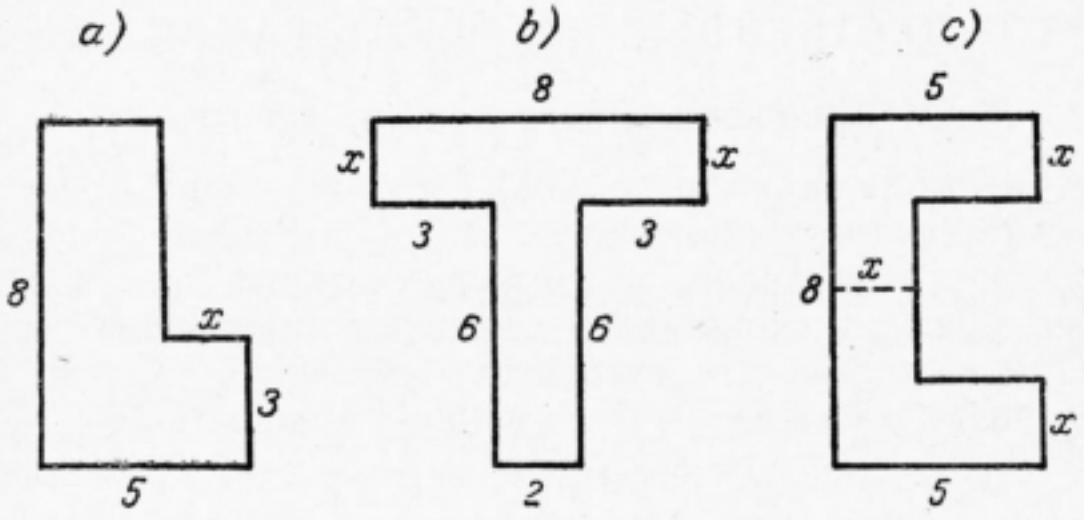
Установите, при каком значении x площадь S равна 28.

384. По данным чертежа 36*c* установите, как зависит периметр P и площадь S фигуры (c) от отрезка x.

Заполните пустые места в табличках.

x	P
0	
2	
4	30

x	S
0	
1	
3	28



Черт. 36

Глава VI

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (II)

§ 41. Умножение многочлена на многочлен

При умножении многочлена на многочлен также получается многочлен. Этот результат следует из распределительного закона, на который при выполнении действия приходится ссылаться несколько раз.

Предположим, что требуется умножить двучлен $a+b$ на двучлен $c+d$. Заменяя в тождестве

$$(a+b)c = ac + bc$$

c через $c+d$, мы получаем тождество

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d).$$

Дальше остается раскрыть скобки в правой части, и мы получаем окончательно:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Это тождество мы запишем также в следующей форме:

$$(a+b)(c+d) = \begin{cases} ac + ad + \\ + bc + bd \end{cases} \qquad (1)$$

Умножим теперь двучлен $a+b$ на трехчлен $c+d+e$. Заменяя в тождестве (1) d через $d+e$, мы придем к новому тождеству:

$$(a+b)(c+d+e) = \begin{cases} ac + a(d+e) + \\ + cb + b(d+e); \end{cases}$$

раскрывая скобки справа, получим окончательно:

$$(a+b)(c+d+e) = \begin{cases} ac + ad + ae + \\ + bc + bd + be \end{cases} \qquad (2)$$

Посмотрим дальше, как умножить трехчлен $a+b+c$ на трехчлен $d+e+f$. По формуле (2) мы получаем *:

$$(a+b)(d+e+f)=\begin{cases} ad+ae+af+ \\ +bd+be+bf \end{cases}$$

Заменяя теперь b через $b+c$, будем иметь:

$$(a+b+c)(d+e+f)=\begin{cases} ad+ & ae+ & af+ \\ +(b+c)d & +(b+c)e & +(b+c)f \end{cases}$$

и остается раскрыть скобки справа. Результат можно записать в следующей форме:

$$(a+b+c)(d+e+f)=\begin{cases} ad+ae+af+ \\ +bd+be+bf+ \\ +cd+ce+cf \end{cases} \quad (3)$$

Тождества (1), (2) и (3) соответствуют лишь частным случаям умножения многочлена на многочлен; тем не менее они позволяют подметить общее правило, по которому следует выполнять это действие. Вместе с тем предыдущие рассуждения показывают, как шаг за шагом это правило может быть доказано для любого числа членов в каждом из перемножаемых многочленов.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, достаточно умножить каждый член многочлена-множимого на каждый член многочлена-множителя и затем составить сумму полученных одночленов.

Кроме того, необходимо сделать *приведение подобных членов,* если таковые окажутся.

Упражнение 114.

385. Формуле (1) легко дать наглядное геометрическое истолкование. Нарисуйте прямоугольник со сторонами $a+b$ и $c+d$. Его площадь равна $(a+b)(c+d)$. Сообразите, какие две прямые нужно провести, чтобы этот прямоугольник разбился на четыре прямоугольника с площадями ac, bc, ad и bd.

386. Дайте геометрическое истолкование формул (2) и (3) (как в предыдущем пункте).

---

* В самом деле, чтобы получить последнее равенство, достаточно в формуле (2) заменить e через f, d через e и c через d.

387. В тождестве

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$

положите: $a=2x$, $b=3y$, $c=u$, $d=5v$.
Что получится?

Положите таким же образом $a=2u$, $b=v$, $c=u$, $d=-3v$.

Упражнение 115.

388. Выполните указанные ниже умножения (раскройте скобки):

1) $(2x+3y)(u+5v)$,
2) $(p+2)(3p-1)$,
3) $(x+y)(x+2y)$,
4) $(n+1)(n+2)$,
5) $(x-3)(x-5)$,
6) $(a^2+1)(a+1)$,
7) $(t-1)(t-8)$,
8) $(1-u)(3-2u)$,
9) $(2a+5)(b-2)$,
10) $(1+x)(1+y^2)$,
11) $(ab+1)(cd-1)$,
12) $(a^2+b^2)(r-s)$,
13) $(x^2+m)(x^2+n)$,
14) $(3x+1)(x+3)$,
15) $(-1+v)(v+v^2)$,
16) $(pq+1)(p-q)$,
17) $(s^2+1)(s^2-4)$,
18) $(a^2+b^2)(a^2-2b^2)$,
19) $(20+5)(30+7)$,
20) $\left(3+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{4}\right)$,
21) $(a+b)^2$,
22) $(a-b)^2$,
23) $(a+b)(a-b)$,
24) $(-a+b)(-a-b)$,
25) $(x+y+z)(u+v)$,
26) $(x+y+z)(x+y)$,
27) $(x+y+z)(x-2y)$,
28) $(a+b)(a+b+c)$,
29) $(5a+2b)(a-2b+4c)$,
30) $(x+3y-2)(x-y)$,
31) $(x-y+3)(x-1)$,
32) $(1+a+ab)(2-a)$,
33) $(x^2+y^2+1)(x^2-1)$,
34) $(a^2+ab+b^2)(a-b)$,
35) $(a^2-ab+b^2)(a+b)$,
36) $(a+2b-3c)(p+q-r)$,
37) $(a-2b+3c)(a+b-c)$,
38) $(a-3y-5)(x-y+2)$,
39) $(200+40+3)(100+20+7)$,
40) $(x-1)(x-2)(x-3)$,
41) $(n+1)(n+3)(n+5)$,
42) $(a+x)(b+y)(c+z)$,
43) $(a+b)^3$,
44) $(a-b)^3$.

Упражнение 116.

389. Выполните умножения:

1) $(3ax^2 + 7by^2)(4b^2x + 5a^2y)$, 2) $(x^2 - 4xy + y^2)(x^3 + y^3)$,

3) $(a + 2b)(m + 3n - 2p + 5q)$, 4) $(2uv^3 - w^3)(u^2 + 3vw)$,

5) $(a^2bc^3 + def^2)(b + ad + c^2ef)$,

6) $\left(6ab^3d + 5cd^2 - \frac{3}{4}a^2b\right)\left(2ac - \frac{1}{3}bd\right)$.

390. Решите уравнения и сделайте проверку:

1) $(x - 3)(x - 5) = (x - 1)(x - 6)$, 2) $u^2 = (u - 2)(u - 5)$,

3) $\frac{t+1}{t+5} = \frac{t+2}{t+7}$, 4) $n(n + 1) = n^2 - n + 4$,

5) $z + 1 = \frac{z^2 + z + 2}{z + 2}$,

6) $(2s + 3)(s + 1) - (2s + 5)(s - 1) = 0$.

Упражнение 117.

Решите следующие задачи.

391. Какое целое положительное число я задумал, если известно, что произведение двух ему предшествующих на 600 меньше, чем произведение двух за ним следующих?

392. Нарисовано три квадрата разной величины: меньший P, средний Q и большой R. Какова сторона квадрата Q, если сторона квадрата P на 1 *см* меньше, а сторона квадрата R на 1 *см* больше, чем сторона квадрата Q, и если притом площадь квадрата R на 10 $см^2$ больше, чем площадь квадрата P?

§ 42. Квадрат суммы и разности

Часто приходится некоторый двучлен (сумму или разность) умножать сам на себя — возводить в квадрат.

Проверьте сами правильность следующих умножений; подробно объясните каждый шаг.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = \begin{cases} a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \end{cases} = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = \begin{cases} a^2 - ab \\ \quad - ab + b^2 \end{cases} = a^2 - 2ab + b^2$$

Запишем, прочтем словами и постараемся запомнить полученные формулы:

I $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **(«квадрат суммы»)**

II $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **(«квадрат разности»)**

Квадрат суммы двух слагаемых равен квадрату первого слагаемого, плюс удвоенное произведение первого слагаемого на второе, плюс квадрат второго слагаемого.

Квадрат разности двух слагаемых равен квадрату уменьшаемого, минус удвоенное произведение уменьшаемого на вычитаемое, плюс квадрат вычитаемого.

Формулы I и II представляют собою тождества: они справедливы при всевозможных значениях букв a и b; остаются справедливыми также при подстановке вместо a и b каких угодно буквенных выражений.

Положим, например, $a = 5p^2q$, $b = 3r$. Получится:

$$(5p^2q + 3r)^2 = (5p^2q)^2 + 2\,(5p^2q) \cdot (3r) + (3r)^2 =$$
$$= 25p^4q^2 + 30p^2qr + 9r^2.$$

Обратите внимание, что, заменяя в формуле I b через $(-b)$, мы получаем формулу II:

$$(a + (-b))^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2,$$

т. е.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Упражнение 118.

393. Положите в формулах I и II $a = 7$, $b = 3$ и проверьте. Возьмите сами какие хотите значения букв a и b и проверьте.

394. Объясните с помощью чертежа, как из квадрата со стороной a, другого квадрата со стороной b и двух одинаковых прямоугольников со сторонами a и b можно сложить квадрат? Как велика будет его сторона?

395. В каждом из следующих выражений раскройте скобки:

1) $(u+v)^2$, 2) $(u-v)^2$, 3) $(-u+v)^2$, 4) $(-u-v)^2$,

5) $(m+1)^2$, 6) $(2n+1)^2$, 7) $(3x+2y)^2$, 8) $(3x-2y)^2$,

9) $(p^2+1)^2$, 10) $\left(1+\frac{s}{3}\right)^2$, 11) $(rs-t^2)^2$,

12) $(t^2+t)^2$, 13) $(5k-l)^2$, 14) $(abc+1)^2$,

15) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2$, 16) $\left(-g+\frac{1}{4}h\right)^2$, 17) $(2mx^3+3ny^2)^2$,

18) $\left(abc^2-\frac{t}{10}\right)^2$, 19) $(2uv^2-w^3)^2$, 20) $(a^2bc^3+def^2)^2$.

396. Желая в уме возвести в квадрат число 103, в формуле II положим $a=100$, $b=3$ и получим:

$$103^2=(100+3)^2=100^2+2\cdot 100\cdot 3+3^2=$$
$$=10\,000+600+9=10\,609.$$

Подобным же образом вычислите в уме, чему равняется:

1) 31^2, 2) 29^2, 3) 52^2, 4) 48^2, 5) $2{,}05^2$, 6) $1{,}95^2$.

397. В формуле I замените b через $b+c$, затем раскройте скобки справа. Что получится?

Замените точно так же b через $b-c$.

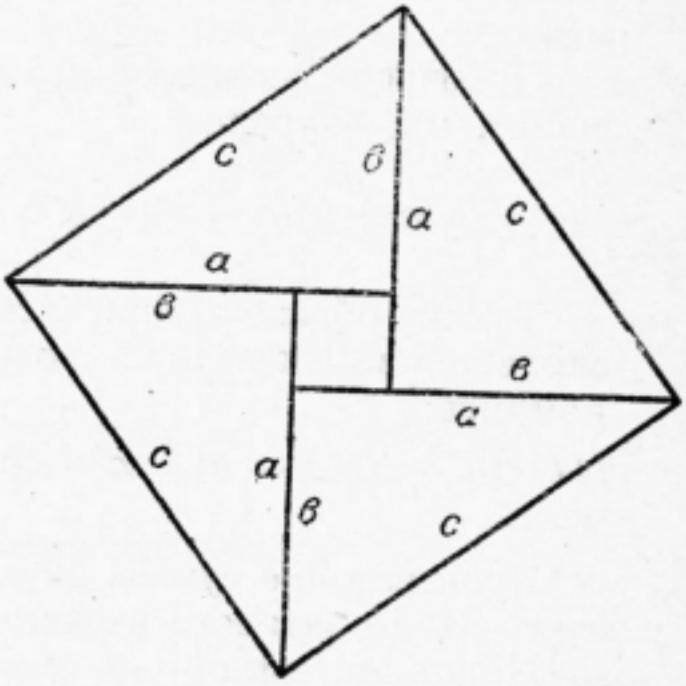
398. Напишите, что больше: $(a-b)^2$ или $(b-a)^2$?

Напишите, что больше: $(a+b)^2$ или a^2+b^2? Рассмотрите отдельно случаи: 1) $a>0$, $b>0$; 2) $a<0$, $b<0$; 3) $a>0$, $b<0$ или $a<0$, $b>0$; 4) $b=0$ или $a=0$.

Упражнение 119.

399. Представьте себе, что четыре произвольных, но равных между собою прямоугольных треугольника с катетами a и b $(a>b)$ и гипотенузой c сложены так, как показано на черт. 37.

Какую фигуру образуют гипотенузы треугольников? Какая фигура образовалась внутри?



Черт. 37

Напишем, что сумма площадей маленького квадрата и четырех треугольников равна площади большого квадрата:

$$(a-b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2.$$

Объясните, какие тождественные преобразования нужно выполнить в левой части, чтобы прийти к теореме Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Теорема Пифагора читается (кратко):

Во всяком прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

400. Начертите на клетчатой бумаге прямоугольные треугольники с катетами:

1) $a = 4$, $b = 3$; 2) $a = 12$, $b = 5$; 3) $a = 10$, $b = 7$;

4) $a = 10$, $b = 10$; 5) $a = 6$, $b = 8$; 6) $a = 20$, $b = 10$.

Измерьте (с помощью циркуля) длину гипотенузы и проверьте вычислением, достаточно ли точно выполняется равенство Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$.

§ 43. Произведение суммы на разность

Очень важно также уметь без потери времени умножить сумму двух чисел или выражений на их же разность.

Производя умножение $a + b$ на $a - b$ обычным способом, мы получаем:

$$(a+b)(a-b) = \begin{cases} a^2 + ab \\ \quad -ab - b^2 \end{cases} = a^2 - b^2.$$

Таким образом, при всех значениях букв a и b справедлива формула, которую тоже необходимо запомнить:

III $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ **(«произведение суммы на разность»)**

Произведение суммы двух чисел (величин) на их разность равно разности их квадратов.

Положим, например, $a = 5p^2q$, $b = 3r$. Будем иметь:

$$(5p^2q + 3r)(5p^2q - 3r) = (5p^2q)^2 - (3r)^2 = 25p^4 \cdot q^2 - 9r^2,$$

Упражнение 120.

401. Что станет с формулой III, если заменить b через $(-b)$, a через $(-a)$?

402. Положите в формуле III $a = 7$, $b = 3$ и проверьте. Возьмите какие хотите значения букв a и b и проверьте.

403. Выполните по формуле III следующие умножения:

1) $(m + 1)(m - 1)$,
2) $(2n + 3)(2n - 3)$,
3) $(p^2 + 1)(p^2 - 1)$,
4) $(1 + q)(1 - q)$,
5) $\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$,
6) $(ab + c)(ab - c)$,
7) $(5 - 2x)(5 + 2x)$,
8) $(2 + t)(t - 2)$,
9) $(x + 5a)(5a - x)$,
10) $(p - q^2)(q^2 + p)$,
11) $(x^2 + x)(x^2 - x)$,
12) $(N + 10)(N - 10)$,
13) $(2mx^3 + 3ny^2)(2mx^3 - 3ny^2)$,
14) $\left(abc^2 + \frac{t}{4}\right)\left(abc^2 - \frac{t}{4}\right)$.

404. Обратите внимание на следующее интересное обстоятельство. Если взять какое угодно число из натурального ряда и составить произведение двух чисел, с ним соседних (большего и меньшего), то произведение всегда оказывается на единицу меньше, чем квадрат выбранного числа. Например, если выбрано 7, то получим: $8 \cdot 6 = 7^2 - 1$.

Чем же это объясняется?

405. Желая умножить в уме 103 на 97, положим в формуле III $a = 100$, $b = 3$, и формула III нам даст:

$$103 \cdot 97 = (100 + 3)(100 - 3) = 100^2 - 3^2 = 10\,000 - 9 = 9991.$$

Таким же образом сделайте в уме умножения:

1) $10\frac{1}{2} \cdot 9\frac{1}{2}$; 2) $20{,}2 \cdot 19{,}8$; 3) $310 \cdot 290$; 4) $16 \cdot 24$;

5) $4{,}01 \cdot 3{,}99$.

§ 44. Куб суммы и разности

Пользуясь формулами I и II («квадрат суммы и разности», легко получить формулы для «куба суммы и разности».

Именно:

$$(a+b)^3=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$$
$$=\begin{cases}a^3+2a^2b+ab^2\\ \quad +a^2b+2ab^2+b^3\end{cases}=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$$
$$=\begin{cases}a^3-2a^2b+ab^2\\ \quad -a^2b+2ab^2-b^3\end{cases}=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

В окончательном виде формулы таковы:

IV $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (**«куб суммы»**)

V $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (**«куб разности»**)

Куб суммы двух слагаемых равен сумме: 1) куба первого слагаемого, 2) утроенного произведения квадрата первого слагаемого на второе слагаемое, 3) утроенного произведения первого слагаемого на квадрат второго слагаемого и 4) куба второго слагаемого.

Куб разности равен сумме: 1) куба уменьшаемого, 2) взятого с обратным знаком утроенного произведения квадрата уменьшаемого на вычитаемое, 3) утроенного произведения уменьшаемого на квадрат вычитаемого и 4) взятого с обратным знаком куба вычитаемого.

Для облегчения запоминания важно заметить, что в обеих формулах IV и V сумма показателей во всех членах равна 3, причем показатели при a от члена к члену убывают, а показатели при b возрастают; запомнить же коэффициенты

1, 3, 3, 1

не представляет труда.

Формула V получается из форумлы IV посредством замены b на $(-b)$, что влечет за собой чередование знаков начиная с плюса.

Пример. При $a=5p^2q$, $b=3r$ мы получаем

$$(5p^2q+3r)^3=(5p^2q)^3+3\cdot(5p^2q)^2\cdot(3r)+3\cdot(5p^2q)\cdot(3r)^2+$$
$$+(3r)^3=125p^6q^3+225p^4q^2r+135p^2qr^2+27r^3,$$

и точно так же

$$(5p^2q - 3r)^3 = (5p^2q)^3 - 3 \cdot (5p^2q)^2 \cdot (3r) + 3 \cdot (5p^2q) \cdot (3r)^2 - (3r)^3 = 125p^6q^3 - 225p^4q^2r + 135p^2qr^2 - 27r^3.$$

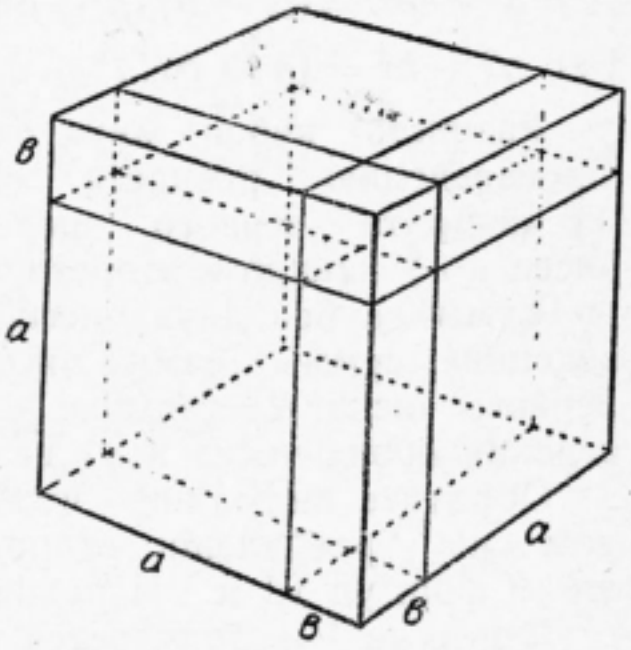
Упражнение 121.

406. Положите в формулах IV и V $a = 7$, $b = 3$ и проверьте. Возьмите какие угодно значения букв и проверьте.

407. На черт. 38 изображен куб со стороной $a + b (a > b)$, складывающийся из 8 отдельных частей: самая большая из них имеет объем a^3, самая маленькая — объем b^3, из 6 остальных частей три имеют объемы a^2b и еще три — объемы ab^2.

Дайте описание каждой из 8 частей куба и объясните их взаимное расположение.

Такой разборный куб иллюстрирует формулу IV («куб суммы»).



Черт. 38

408. В каждом из следующих выражений раскройте скобки:

1) $(u + v)^3$, 2) $(u - v)^3$, 3) $(-u + v)^3$, 4) $(-u - v)^3$,
5) $(m + 1)^3$, 6) $(2n + 1)^3$, 7) $(3x + 2y)^3$,
8) $(3x - 2y)^3$, 9) $(ac - b^2)^3$, 10) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^3$.

409. Чтобы возвести в куб число 102, достаточно в формуле IV положить $a = 100$, $b = 2$, и тогда получим:

$$102^3 = (100 + 2)^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 2 + 3 \cdot 100 \cdot 2^2 + 2^3 = 1\,000\,000 + 60\,000 + 1\,200 + 8 = 1\,061\,208.$$

Возведите в куб таким же образом числа 205 и 1,95.

§ 45. Разность и сумма кубов

Нетрудно проверить правильность следующих умножений:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=\left\{\begin{array}{l}a^3+a^2b+ab^2-\\ \quad -a^2b-ab^2-b^3\end{array}\right\}=a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=\left\{\begin{array}{l}a^2-a^2b+ab^2+\\ \quad +a^2b-ab^2+b^3\end{array}\right\}=a^3+b^3$$

Отсюда следуют формулы:

VI $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (*«разность кубов»*)

VII $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ (*«сумма кубов»*);

Разность кубов двух чисел (выражений) равна произведению разности самих чисел на сумму: 1) квадрата первого числа, 2) произведения обоих чисел и 3) квадрата второго числа.

Сумма кубов двух чисел (выражений) равна произведению суммы самих чисел на сумму: 1) квадрата первого числа, 2) взятого с обратным знаком произведения обоих чисел и 3) квадрата второго числа.

Обратите внимание, что сумма показателей в каждом из трех членов второго произведения в правой части формул VI и VII равна 2.

Формула VII получается из формулы VI после замены b на $(-b)$.

Пример. Полагая $a=5p^2q$, $b=3r$, получим:

$$125p^6q^3-27r^3=(5p^2q-3r)(25p^4q^2+15p^2qr+9r^2),$$

$$125p^6q^3+27r^3=(5p^2q+3r)(25p^4q^2-15p^2qr+9r^2).$$

Упражнение 122.

410. Положите в формулах VI и VII $a=7$, $b=3$ и проверьте. Подставьте какие угодно значения и проверьте.

411. Если требуется умножить $2m-3n$ на $4m^2+6mn+9n^2$, то можно сразу написать, что произведение равно $8m^3-27n^3$. В самом деле, нетрудно заметить, что произведение $(2m-3n)(4m^2+6mn+9n^2)$ получается после подстановки в правой части формулы VI $a=2m$, $b=3n$; но тогда в левой части формулы мы имеем a^3-b^3, т. е. $8m^3-27n^3$.

Таким же образом

$$(2m+3n)(4m^2-6mn+9n^2)=8m^3+27n^3.$$

По этому образцу сделайте умножения:

1) $(1-p)(1+p+p^2)$, 3) $(au-bv)(a^2u^2+abuv+b^2v^2)$,

2) $(1+p)(1-p+p^2)$, 4) $(au+bv)(a^2u^2-abuv+b^2v^2)$.

§ 46. Деление на одночлен

Пусть нужно разделить одночлен $12x^4y^3$ на одночлен $3xy^2$. Мы получаем, пользуясь сокращениями дробей:

$$12x^4y^3 : 3xy^2 = \frac{12x^4y^3}{3xy^2} = \frac{12\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y}{3\cdot x\cdot y\cdot y} =$$

$$= 4x\cdot x\cdot x\cdot y = 4x^3y.$$

В результате может в иных случаях получиться и дробь. Например:

$$12xy^3 : 18x^2y = \frac{12xy^3}{18x^2y} = \frac{12\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y}{18\cdot x\cdot x\cdot y} = \frac{2y^2}{3x}.$$

Упражнение 123.

412. Выполнить указанные деления:

1) $15ab^3 : 3ab$, 4) $0{,}72p^2q : 0{,}84pq^2$, 7) $(-12Tx^3) : 3T^2x$,

2) $8c^2d^2 : 4cd^2$, 5) $\frac{1}{3}t : \frac{1}{4}s$, 8) $5a^2 : 125a^4$,

3) $10t^3 : 15t$, 6) $\frac{u}{3} : \frac{v}{4}$, 9) $(-6xyz) : (-2xz)$.

Пусть теперь требуется разделить многочлен на одночлен: например, $6x^4y^3+9x^3y^4$ на $3xy^2$.

Согласно распределительному закону деления (§ 16) имеет место тождество

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c};$$

полагая $a=6x^4y^3$, $b=9x^3y^4$, $c=3xy^2$, мы сейчас же получим

$$\frac{6x^4y^3+9x^3y^4}{3xy^2}=\frac{6x^4y^3}{3xy^2}+\frac{9x^3y^4}{3xy^2}=2x^3y+3x^2y^2.$$

Вот другой пример: нужно разделить $8a^2c-6abc+c^2$ на $2ac$. Мы будем иметь:

$$\frac{8a^2c-6abc+c^2}{2ac}=\frac{8a^2c}{2ac}-\frac{6abc}{2ac}+\frac{c^2}{2ac}=4a-3b+\frac{c}{2a}.$$

Здесь выполнить деление «нацело» не удается.

Упражнение 124.

413. Разделите таким же образом:

1) $8x^3 - 20x^2 + x$ на $4x$,
2) $x^5 + 5x^3y^4 - 6x^2z^3$ на x^2,
3) $2t^7 - 5t^6 + 8t^4 - 6t^2$ на $2t^3$.

§ 47. Разложение многочлена на множители

Если в курсе арифметики мы встречаемся с произведением нескольких числовых множителей, то по большей части, не медля, производим умножение:

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105.$$

Но нередко в арифметике же, напротив, бывает нужно представить данное число в виде произведения множителей; так, мы пишем, например:

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Точно так же в алгебре не всегда целесообразно перемножать данные выражения, а иногда требуется представить данное буквенное выражение в виде произведения множителей.

Сделать это не представляет труда в случае одночлена; так, например,

$$12a^2bc^3 = 12 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c.$$

Займемся теперь многочленами. В общем случае разложение многочлена на множители может представить затруднения; мы ограничимся указанием простейших приемов.

I. Самый простой прием разложения многочлена на множители заключается в вынесении за скобки одночлена, являющегося произведением числовых и буквенных множителей, входящих во все члены данного многочлена. Это преобразование — обратное умножению многочлена на одночлен, и тоже непосредственно вытекает из распределительного закона умножения (см. § 15); надо лишь переставить левую и правую части:

$$ac + bc = (a + b)\,c.$$

Если нужно, скажем, разложить на множители двучлен $6m^3np^2 - 10mp^3q$, то мы получим *:

$$6m^3np^2 - 10mp^3q = 2mp^2\,(3m^2n - 5pq).$$

---

* Обыкновенно выносят общие множители не вправо от скобок (как в записи распределительного закона), а влево.

Здесь мы имеем: $c = 2mp^2$, $a = 3m^2n$, $b = -5pq$.

При вынесении одночлена за скобки надо, очевидно, на него делить данное выражение.

Упражнение 125.

414. В следующих примерах вынесите за скобки (налево) общие числовые и буквенные множители:

1) $6p + 4q$, 2) $3ab - 5bc$, 3) $3x + 12x^2$,

4) $6at + 15bt - 10ct$, 5) $8pqx - 16pqy + 80pqz$,

6) $y^6 + y^4 + y^2$, 7) $a^2bd^2 + 2a^2b^2d$,

8) $14m^3p^2 - 6m^3pq - 8m^3pr + 2m^3p$.

415. Чтобы в скобках не было дробей, выносят за скобки также общий знаменатель дробных коэффициентов, например:

$$\frac{3}{2}a^2 + \frac{5}{7}ax = \frac{a}{14}(21a + 10x).$$

Сделайте то же самое с выражениями:

1) $2mp - \frac{1}{3}np$, 2) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4}$,

3) $\frac{1}{3}a^2bc + \frac{3}{4}ab^2c + \frac{5}{6}abc^2$.

416. Сделайте в уме следующие вычисления:

1) $83^2 + 83 \cdot 17$, 2) $83 \cdot 17 + 17^2$, 3) $43 \cdot 52 - 8 \cdot 52 + 5 \cdot 52$.

II. Более общий прием разложения заключается в группировке членов, выполняемой с таким расчетом, чтобы по вынесении за скобки одночленных множителей в каждой группе в скобках оставался в разных группах один и тот же многочлен, который и выносится вслед за тем, в свою очередь, за скобки. Так мы получаем, например, разложение:

$$2am + 3an + 2bm + 3bn - 2cm - 3cn =$$
$$= (2am + 2bm - 2cm) + (3an + 3bn - 3cn) =$$
$$= 2m(a + b - c) + 3n(a + b - c) = (2m + 3n)(a + b - c).$$

Иногда возможность разложения усматривается непосредственно:

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5).$$

Упражнение 126.

417. Разложить на множители:

1) $hk + lm + km + kl$, 3) $ax^2 + x - a - a^2x$,

2) $ab + 2c - ac - 2b$, 4) $100aA + 10(aB + bA) + bB$,

5) $2ux + uy - 2vx - vy + 6wx + 3wy$,

6) $bx^3 + a^2c - a^2bx - cx^2$,

7) $n^2 + 3n + 2$,

8) $m^2 - 12m + 35$,

9) $x^2 - 3x - 4$,

10) $x^2 + 7xy + 12y^2$,

11) $z^4 + 7z^2 + 6$,

12) $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 - x + y$.

III. Довольно часто при разложении многочлена на множители удается воспользоваться основными формулами умножения I — VII. Например:

$$x^2y^2 - 9 = (xy + 3)(xy - 3),$$

$$a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) =$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2 = (a + 1)^2(a - 1)^2.$$

Упражнение 127.

418. Представьте каждое из следующих выражений в виде произведения суммы на разность:

1) $m^2 - n^2$,

2) $16a^2 - 25b^2$,

3) $36x^2 - \frac{1}{4}y^2$,

4) $p^2q^2 - \frac{1}{25}$,

5) $1 - r^2$,

6) $a^2x^4 - 100$,

7) $(x + 2)^2 - 36$,

8) $(x - 3)^2 - 4$,

9) $(1 + a)^2 - 1$,

10) $(2x + 2y)^2 - (x - 2y)^2$,

11) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$,

12) $(m + n + 1)^2 - (n - 1)^2$.

419. Можете ли вы следующие трехчлены представить в виде квадрата двучлена и как именно?

1) $r^2 - 2rs + s^2$, 2) $x^2 + 4xy + y^2$, 3) $a^4 + 2a^2 + 1$,

4) $\frac{x^2}{4} - x + 1$, 5) $u^2 + uv + v^2$, 6) $4z^2 + 4z + 1$,

7) $100m^2 + 20mn + n^2$, 8) $100m^2 + 30mn + 9n^2$,

9) $25x^2 - 70x + 49$, 10) $1 - 10x + 16x^2$.

420. Можно ли следующие выражения представить в виде куба суммы или разности?

1) $x^3 + 6x^3y + 12xy^3 + 8y^3$, 3) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y$

2) $x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + 8y^3$, 4) $x^3 - 6x^2y - 12xy^2 + 8y^3$

421. Разложить на множители многочлены:

1) $a^4 - b^4$, 4) $t^4 - 8t^2 + 16$,

2) $a^6 + b^6$, 5) $u^6 - 2u^3v^3 + v^6$,

3) $x^6 - 1$, 6) $z^4 - 12z^2 + 36$.

§ 48. Выделение квадрата из трехчлена

Следующий прием преобразования («выделение квадрата») в некоторых случаях приводит к разложению на множители; вместе с тем он представляет и самостоятельный интерес.

Пример 1.

Дано выражение $x^2 + 6x + 15$. Оно не составляет «квадрата суммы», но если бы третий член был не 15, а 9, то мы имели бы квадрат суммы. Исходя из этого соображения, в данном трехчлене $x^2 + 6x + 15$ можно «выделить квадрат» следующим образом:

$$x^2 + 6x + 15 = (x^2 + 6x + 9) + 6 = (x + 3)^2 + 6.$$

Пример 2.

Дано выражение $x^2 + 6x + 5$. Оно не составляет «квадрата суммы», но если бы третий член был не 5, а 9, то мы имели бы квадрат суммы $(x + 3)^2$. Исходя из этого, «выделяем квадрат»:

$$x^2 + 6x + 5 = (x^2 + 6x + 9) - 4 = (x + 3)^2 - 4.$$

Но в этом примере можно произвести и разложение на множители, так как мы получили «разность квадратов»:

$$(x + 3)^2 - 4 = (x + 3)^2 - 2^2 =$$

$$= ((x + 3) + 2)((x + 3) - 2) = (x + 5)(x + 1).$$

Итак, мы получаем:

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1).$$

О возможности такого разложения можно было бы догадаться и сразу!

Упражнение 128.

422. В следующих выражениях допишите недостающий член таким образом, чтобы получился «квадрат суммы» или «квадрат разности»:

1) $u^2 + ? + v^2$,
2) $u^2 + uv + ?$,
3) $? + uv + v^2$,
4) $100m^2 + ? + 9n^2$,
5) $100m^2 + 80mn + ?$,
6) $? + 30mn + 9n^2$,
7) $1 - ? + 16x^2$,
8) $1 - 10x + ?$,
9) $? - 10x + 16x^2$.

423. Выделите квадрат из следующих трехчленов и затем, если будет возможно, произведите разложение на множители:

1) $a^2 + 10x + 31$,
2) $x^2 + 8x + 19$,
3) $x^2 + 8x + 15$,
4) $x^2 + 5x + 8$,
5) $x^2 + 10x + 9$,
6) $x^2 - 12x + 35$,
7) $x^2 - 72x + 896$,
8) $x^2 + 2x + 4$,
9) $x^3 + x + 1$,
10) $x^2 - x + 3$,
11) $x^2 + 4x$,
12) $x^2 - x$,
13) $4x^2 + 8x + 3$,
14) $4x^2 - 4x - 15$,
15) $4x^2 + 12x + 9$,
16) $4x^2 + 12x + 11$,
17) $9t^2 - 12t + 1$,
18) $z^2 - 3z + 1$,
19) $a^2 - 4a + 18$,
20) $a^2 - 4ab + 18b^2$,
21) $z^2 - 3z + 2$,
22) $a^2 - 4ab + 3b^2$,
23) $t^2 + 10t + 25$,
24) $25x^2 + 100xy + 4y^2$.

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

Упражнение 129.

424. Умножить и разделить:

1) $20\,mn$ на $5\,n$, 2) $20\,mn$ на $10\,m$, 3) $20\,mn$ на $\left(-\frac{1}{2}m\right)$,

4) $20\,mn$ на $\left(-\frac{4}{3}n\right)$, 5) $8x^3$ на $4x$, 6) z^6 на $2z$,

7) $72xy^2z^4$ на $30y^2z^3$, 8) $12t^2$ на $\left(-\frac{2}{3}t^2\right)$.

425. Произвести умножения (раскрыть скобки):

1) $(a+2b)(a-b)(a-3b)$, 2) $(a+2b)(a-2b)(a-3b)$,
3) $(x+y)(2x+5y)(x-y)$, 4) $(a+b)(a-b)^2$, 5) $(a+b)^2(a-b)^2$,
6) $(a-b)(a^2+b^2)(a+b)$, 7) $(a-b)(b-a)$, 8) $(t+2)(t+3)(t+5)$
9) $(u-1)(u-4)(u-5)$, 10) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$,
11) $(a+b+c)(a+b-c)$, 12) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.

426. Произвести умножения (раскрыть скобки):

1) $(a+b)^4$, 2) $(a+b)^5$, 3) $(a-b)^4$, 4) $(a-b)^5$,
5) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$, 6) $(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$.

Что получится с каждой из полученных формул 1) — 4) при замене b на $(-b)$?

Упражнение 130.

427. Выполнить действия, производя затем, если возможно, разложение на множители (тем или иным способом):

1) $(a+b)^2+(a-b)^2$, 5) $(x+y)(xy-1)+(x-y)(xy+1)$,
2) $(a+b)^2-(a+b)^2$, 6) $(x+y)(xy-1)-(x-y)(xy+1)$,
3) $(a+b)^3+(a-b)^3$, 7) $(a^2+b^2)(x^2+y^3)-(ax+by)^2$,
4) $(a+b)^3-(a-b)^3$, 8) $(pr+qs)^2+(ps-qr)^2$,
9) $p(p+q)-q(p+q)$,
10) $u^2(u+1)-u(u+1)+(u+1)$,
11) $(p^3+q^2)(p^2+q^3)-(p^3-q^2)(p^2-q^3)$,
12) $(7x+5y)^2-(7x-5y)^2$,
13) $(7x+5y)^2+(7x-5y)^2$,
14) $(m^2+n^2)-(mp-2mn+np)$,
15) $(a+1)^2-2(a+1)(b+1)+(b+1)^2$,
16) $(2a-3b)(5a+b)-(a-3b)(a+2b)+b^2$,
17) $(3m+n)(3n-m)+(2m-n)^2$,
18) $ax(x+y)-ay(x-y)$,
19) $(x+3y)^2-2x(x+3y)$,
20) $(p-3q)(p+3q)-2q(p-5q)$.

428. Разложить на множители:

1) $a^2x^5-a^5x^2$,
2) $z^5+z^3+z^2+1$,
3) $(x^2+y^2+1)^2-4x^2$,
4) $(1+u^2)^3-(1+u^6)$,
5) $(v+1)^3-3(v+1)^2+3(v+1)-1$,
6) $12a^2x^3y-3b^2xy^3$,
7) $x^3-6x^2y^2+12xy^4-8y^6$,
8) $27a^6z^3-8y^3$,
9) $0{,}25p^2-5pq+25q^2$,
10) $x^4+0{,}8x^3y+0{,}16x^2y^2$,

11) $x^4 + 0,8x^2y + 0,16y^2$,
12) $3x^3 + x^2$,
13) $9a^2b^4 - a^2b^2$,
14) $0,1my^2 + 0,1m$,
15) $8z^3 + t^6$,
16) $a^4 - b^4$.

Упражнение 131.

429. Дан квадрат со стороной = 1.

Если сторону квадрата увеличить в m раз, то 1) во сколько раз и 2) на сколько увеличится его площадь?

Если сторону квадрата увеличить на h, то 1) на сколько и 2) во сколько раз увеличится его площадь?

Положите $m = 1,1$; 1,2; 1,3; составьте таблички.

Положите $h = 0,1$; 0,2; 0,3; составьте таблички.

При подсчетах используйте, по мере надобности, основные формулы умножения.

430. Такая же задача с заменой квадрата — кубом, площади — объемом.

Глава VIII

РАСПОЛОЖЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

§ 49. Многочлены с одной буквой

Мы знаем (§ 32), что члены алгебраической суммы можно как угодно переставлять между собою: на основании переместительного закона сложения числовое значение суммы при этом не изменяется.

Все же для соблюдения порядка при записи многочленов обыкновенно соблюдают определенные правила, касающиеся расположения отдельных членов.

Если многочлен содержит только одну букву, то члены его могут быть той или иной степени — в зависимости от того, каков показатель степени, стоящий при букве. Так, в многочлене

$$4x^2 - 2x^3 + \frac{x}{4} + 7x^5 - 8 + x^2 - x^5$$

член $4x^2$ второй степени, член $(-2x^3)$ третьей степени, член $\frac{x}{4}$ первой степени, член $7x^5$ пятой степени, член x^2 второй степени, член $(-x^5)$ снова пятой. Если член не содержит буквы вовсе, то говорят, что этот член «нулевой» степени; такие члены чаще называют также свободными (подразумевают: свободными от буквы). В нашем примере имеется один свободный член (-8).

Предположим, что уже выполнено приведение подобных членов (т. е. членов одной и той же степени); тогда степени оставшихся членов непременно различны между собою. Наивысшую из степеней членов называют также степенью многочлена; член наивысшей степени ради краткости называют старшим.

Многочлены первой степени называют также линейными.

При записи многочлена, зависящего от одной буквы, руководствуются следующим правилом: после приведения подобных членов располагают члены или в порядке убывания степеней, или в порядке их возрастания.

Таким образом получаются многочлены, расположенные по убывающим степеням буквы или по возрастающим ее степеням. В том и в другом случае более кратко говорят о расположенных многочленах.

Например, приведенный выше многочлен — пятой степени: будучи расположен по убывающим степеням буквы x, принимает вид:

$$6x^5 - 2x^3 + 5x^2 + \frac{x}{4} - 8.$$

Располагая его же по возрастающим степеням буквы x, мы получим:

$$-8 + \frac{x}{4} + 5x^2 - 2x^3 + 6x^5.$$

В этом многочлене коэффициенты при степенях 5, 3, 2, 1, 0 соответственно равны 6, (—2), 5, $^1/_4$, (—8). На вопрос, каков коэффициент при степени 4, нужно ответить: он равен нулю.

Примечание. Следует обратить внимание на то обстоятельство, что после приведения подобных членов в иных случаях может остаться только один член или даже не остаться ни одного. Ради общности, чтобы избежать оговорок, и в этих случаях называют то, что получится (одночлен или нуль), «многочленом».

Упражнение 132.

431. В следующих многочленах сделайте приведение подобных членов, одновременно располагая многочлен по убывающим степеням буквы. Расположите его же по возрастающим степеням буквы. Назовите степень многочлена; назовите коэффициенты при различных степенях буквы.

1) $x^2 + 5 + x^3 + 2x + 3x^2 + x^3$,

2) $2x + x^2 - 5 - 4x + 1 + 2x^2$,

3) $1 + y + y^2 + y^3 - y - y^2 - y^3 + y^2 + y^3 - y^3$,

4) $\frac{T}{2}-\frac{T^3}{3}+\frac{1}{6}-\frac{T}{4}+\frac{T^2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{T}{4}$,

5) $3z^4-2z^6-4+7z^6-1-5z^2+5-5z^6+$
$+3z^2-3z^2+2z^2$.

432. В следующих примерах назовите (устно): а) степень многочлена, b) старший член, c) свободный член.

1) $2t^2-7t+t^6-12+t+10-t^3$,

2) $m^4-3m^2+7m^5-9m^5+6-m+2m^5-1+10m$,

3) $3p-p^2+p^3-5+2p^3+2-3p^3+4+3p^2-4p$.

В дальнейшем мы будем располагать многочлены по убывающим степеням входящей буквы.

Такие действия, как сложение и вычитание данных многочленов, расположенных по степеням одной и той же буквы, а также умножение расположенного многочлена на некоторое число, совершаются по общим правилам.

Упражнение 133.

433. Выполнить указанные действия:

1) $(3a^3+7a^2+a+5)+(5a^3+2a^2+5a+1)$,

2) $(5K+8)+(K+3)+(10K-2)+(4K-9)$,

3) $\left(\frac{x^2}{2}+1\right)+\left(2x-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)$,

4) $(u^2-u+1)+(-2u^2+3u)+(1{,}3u^2-0{,}3u+0{,}1)$,

5) $(2x^2+8x^4+3x^3-2x^2+x-5)-(x^5-2x^4+x^3-$
$-5x^2+x+7)$,

6) $(t^2+8t-5)+(t^2-5t+1)-(t^2-3t-4)$,

7) $2(7x+3)+5(3x+1)+(x+1)$,

8) $5(b^2-8b)-2(2b^2-15b-3)$,

9) $(x^5-1)-2(x^5-2x)+3(x^5-3x^2)-4(x^5-4x^3)+$
$+5(x^5-5x^4)$,

10) $(s^2+8s-1)+4(s^2-2s+1)-3(-s^2+s+1)$,

11) $0{,}3(1{,}2M-2{,}5)+1{,}4(-2M+0{,}5)$,

12) $(z-3z^2+5z)+(2+7z-z^2+1)-(6z-1+$
$+7z-4z^2)$.

434. Даны многочлены:

$P=4x^3+5x^2-7x-3$ и $Q=2x^3-5x^2+10x-8$.

Вычислить:

1) $P+Q$, 2) $P-Q$, 3) $3P+2Q$, 4) $2P+3Q$,

5) $P-\frac{1}{2}Q$.

435. Даны многочлены:

$$A=3t+2,\quad B=2t-3,\quad C=t+1.$$

Вычислить:

1) $A+B+C$, 2) $A+B-C$, 3) $A-B+C$,

4) $-A+B+C$, 5) $2A+5B+7C$.

Иногда при сложении и вычитании расположенных многочленов бывает удобно пользоваться систематической записью: писать «столбиком», заботясь о том, чтобы подобные члены стояли друг под другом. В таком случае, если какого-нибудь члена не хватает, следует оставлять место пустым.

Пусть, например, даны многочлены:

$$P=5x^2+2x+7,\quad Q=3x^2-4,\quad P=4x-3.$$

Тогда возможна следующая запись сложения:

$$\begin{array}{r} P=5x^2+2x+7 \\ Q=3x^2\qquad -4 \\ R=\qquad 4x-3 \\ \hline P+Q+R=8x^2+6x \end{array}.$$

Подобным же образом, чтобы вычислить разность $P-Q$, напишем:

$$\begin{array}{r} P=5x^2+2x+7 \\ Q=3x^2\qquad -4 \\ \hline P-Q=2x^2+2x+11 \end{array}.$$

Такая же запись не в меньшей степени удобна в том случае, если, например, требуется вычислить $3P+5Q-2R$:

$$\begin{array}{r|r} P=5x^2+2x+7 & 3 \\ Q=3x^2\qquad -4 & 5 \\ R=\qquad 4x-3 & -2 \\ \hline 3P+5Q-2R=30x^2-2x+7 & \end{array}.$$

Можно рекомендовать множители 3, 5, — 2 выписывать по вертикали за чертой и коэффициенты при степенях подсчитывать в уме:

$$5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 30, \quad 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = -2,$$
$$7 \cdot 3 + (-4) \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) = 7.$$

Упражнение 134.

Дано:

$$A = x^3 - 2x^2 + x - 5, \quad B = 3x^3 + 4x^2 - 7x + 1,$$
$$C = 2x^3 + x^2 + 4.$$

436. Пользуясь указанным расположением записи, вычислить:

$$1)\ A + B + C, \quad 2)\ 6A + 5B + 2C.$$

437. Таким же образом вычислить:

$$1)\ A - B, \quad 2)\ B - C, \quad 3)\ C - A$$

и проверить, что $(A - B) + (B - C) + (C - A) = 0$.

438. Вычислить также:

$$1)\ -A + B + C, \quad 2)\ A - B + C, \quad 3)\ A + B - C$$

и проверить, что

$$(-A + B + C) + (A - B + C) + (A + B - C) = A + B + C.$$

Умножение расположенных многочленов выполняется, конечно, по тому же правилу, что и умножение каких угодно многочленов (§ 41): надо каждый член многочлена-множимого умножить на каждый член многочлена-множителя и полученные одночлены сложить; разумеется, необходимо следить за порядком членов в произведении.

Упражнение 135.

439. Выполните умножения (раскройте скобки):

1) $(5x + 3)(2x + 7)$,
2) $(x^2 + 4x + 5)(3x + 2)$,
3) $(x^2 + 7x + 4)(x^2 + 3x + 2)$,
4) $(y^2 - 5y + 1)(4y - 3)$,
5) $(t^2 + 1)(t - 1)$,
6) $(2a - 5)(a + 1)(3a + 2)$,
7) $(-n^2 + 1)(-n^2 - 3)$,
8) $(q - 1)(q^2 + q + 1)$,

9) $(Q^2-1)(Q^4+Q^2+1)$,

10) $(r+1)(r+2)(r-1)$,

11) $(s^2-s+1)(s-2)(s+1)$,

12) $(N-4)(N-2)N(N+2)(N+4)$.

Применение систематической записи при умножении расположенных многочленов в более сложных случаях часто бывает существеннее, чем при сложении или вычитании. Например, при умножении многочлена $P = x^2+7x+4$ на многочлен $Q = x^2+3x+2$ можно писать «столбиком» сначала произведения многочлена-множимого на член 2, затем на член $3x$ и, наконец, на член x^2, потом складывать:

$$\begin{array}{rl} P = & x^2+7x+4 \\ Q = & x^2+3x+2 \\ \hline & 2x^2+14x+8 \\ & 3x^3+21x^2+12x \\ & x^4+7x^3+4x^2 \\ \hline PQ = & x^4+10x^3+27x^2+26x+8 \end{array}$$

Упражнение 136.

440. Пользуясь указанной записью, вычислите произведение многочлена P на многочлен Q, если:

1) $P = 2x^2+5x+8$, $Q = 3x+7$,

2) $P = x^2-3x+2$, $Q = x^2-1$,

3) $P = x^4-5x^2+x-3$, $Q = x^2-2x-5$.

441. Вычислите, пользуясь той же записью, квадраты P^2, Q^2 и R^2 многочленов:

$$P = a^2+3a+5, \quad Q = 3b^2-7, \quad R = c^4-c^2+c.$$

442. Вычислите таким же образом кубы S^3 и T^3 многочленов:

$$S = s^2+3s+10, \quad T = 5t-2.$$

Из предыдущего видно, что *всякое целое алгебраическое выражение, содержащее только одну букву, можно представить в виде многочлена, расположенного по убывающим степеням буквы;* для этого достаточно раскрыть все скобки и затем, сделав приведение подобных членов, переставить члены в надлежащем порядке. По-

лучающийся в результате многочлен тождественно равен первоначальному выражению.

Для того чтобы проверить, не сделано ли ошибки при вычислении, часто производят числовую подстановку одного или нескольких значений входящей буквы.

Упражнение 137.

443. Расположить следующие выражения по убывающим степеням входящей буквы. Сделать проверку посредством подстановки: а) указанных в скобках числовых значений, б) произвольно выбранного значения буквы.

1) $(x+2)(x+3)$, $(x=5,\ x=-7)$,
2) $(x^3+1)^2$, $(x=4,\ x=-2)$,
3) $(t-t^2)^2$, $(t=1,\ t=3,\ t=5)$,
4) $(1+x^2)-(1-x)^2$, $(x=10,\ x=-1)$,
5) $(1+s)^2-(1-s)^3$, $\left(s=\frac{1}{4},\ s=-\frac{3}{2}\right)$,
6) $(u+1)^3-(u^3+1)$, $(u=2,\ u=9)$.

444. Решить уравнения:

1) $(5x-1)+2(3x+2)-3(x-4)=0$,
2) $(x+3)(x+7)-(x+4)^2=0$,
3) $(x-1)(x-3)+(x-2)(x-3)=2(x-1)(x-2)$.

445. Полностью не производя вычисления, назвать устно:

1) степень многочлена, получающегося после выполнения действий, 2) коэффициент при старшем члене, 3) свободный член, 4) коэффициент при первой степени буквы.

1) $(3n+5)(n-2)+(2n+1)(n+3)$,
2) $(x^2+1)(x-2)+2(x+1)(x+2)$,
3) $(y+1)(y+5)(y+7)$,
4) $z(z-1)(z-2)(z-3)$.

446. Если известно, что P и Q — многочлены, расположенные по степеням буквы x, причем степени их известны, то можно ли что-нибудь сказать, и что именно, о степени многочленов:
1) $P+Q$, 2) $P-Q$, 3) $-P$, 4) $-Q$, 5) PQ, 6) P^2+Q^2.

447. Дано:

$$\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = 4t + 3. \end{cases}$$

Вычислить, чему равняется xy и $x^2 + y^2$; сделать проверку подстановками $t=1$, $t=4$, $t=-2$. Заполнить пустые места в таблице

t	x	y	xy	x^2+y^2
1				
4				
−2				

Упражнение 138.

448. Вычислить, какие значения имеет выражение

$$\frac{1}{5}(x^3 - 9x)$$

при целых значениях x от -5 до $+5$; отметить график точками на клетчатой бумаге. В каких точках график пересекается с горизонтальной осью?

449. Придавая букве x четные значения в пределах от -10 до $+10$, вычислить значения многочленов:

1) $y = 0{,}24x^2 + 0{,}6x$, 2) $y = -0{,}24x^2 + 1{,}8x$;

наметить их графики. В каких точках эти графики пересекаются с горизонтальной осью? Между собою?

450. Скажите сразу, какие значения примут многочлены

$$5d + 7,$$
$$4d^2 + 9d + 1,$$
$$d^3 + 1,$$
$$d^3 + 9d^2 + 5d$$

при подстановке $d = 10$.

§ 50. Десятичная система счисления

Во всем мире люди считают *десятками*. Это, несомненно, зависит от устройства человеческой руки: маленькие дети прежде всего считают пальцы, или «по пальцам».

Римская цифра пять (V) изображает ладонь руки; римская цифра (X) образовалась из двух «ладоней», приставленных одна к другой.

Десять десятков составляют сотню; десять сотен — тысячу и т. д. Другими словами, единицы высших разрядов — это степени десяти: обозначая для краткости число 10 буквой d, мы получаем:

$$\begin{aligned} 10 &= d \\ 100 &= d^2 \\ 1\,000 &= d^3 \\ 10\,000 &= d^4 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

То обстоятельство, что степень такого большого числа, как десять, при увеличении показателя возрастает очень быстро, делает степени десяти пригодными для изображения чисел, как бы велики они ни были.

Если нужно изобразить, например, число 38 759, то смотрят прежде всего, какая самая большая степень десяти содержится в этом числе и сколько раз. Такой степенью оказывается четвертая: $10\,000 = d^4$, и содержится она 3 раза; итак, мы получаем $30\,000 = 3d^4$, и еще остается 8 759. Здесь содержится 8 раз третья степень: $1\,000 = d^3$; после того как отнимаем $8d^3$, останется еще 759. В этом новом остатке 7 раз содержится вторая степень: $100 = d^2$. Затем, отняв $7d^2$, будем иметь число 59. В нем число $10 = d$ содержится 5 раз (что составляет $5d$) и еще остается 9. В этом числе никакая степень d уже не содержится ни разу. Собирая вместе все отдельные части, на которые разбилось наше число, мы получаем:

$$38\,759 = 3d^4 + 8d^3 + 7d^2 + 5d + 9.$$

Итак, *всякое целое положительное (натуральное) число записывается в виде многочлена, расположенного по степеням буквы, которая обозначает число 10: коэффициенты этого многочлена непременно целые положительные числа* (они могут также равняться *нулю*) *и меньшие чем 10.*

Ясно, что справедливо обратное: всякий расположенный многочлен, обладающий указанными свойствами, изображает целое положительное число.

Общеупотребительная запись является сокращенной: опущены плюсы и буква, заменяющие десятку в различных степенях.

Запись числа в виде многочлена, расположенного по букве $d\,(=10)$, называется систематической.

Правила действий над многозначными числами (сложение, вычитание, умножение), которыми мы постоянно пользуемся, по существу, не отличаются от правил действий с многочленами и из них вытекают.

Так, сложение чисел 357 и 412 мы могли бы записать следующим образом:

$$\begin{array}{r} 3d^2 + 5d + 7 \\ 4d^2 + \ d + 2 \\ \hline 7d^2 + 6d + 9 \end{array}$$

и получили бы 769.

Однако, выполняя действия над многозначными числами, приходится нередко преодолевать своеобразную трудность — «переход

через десяток». Если бы, например, нужно было сложить числа 357 и 482, то запись

$$\begin{array}{r} 3d^2+5d+7 \\ 4d^2+8d+2 \\ \hline 7d^2+13d+9 \end{array}$$

привела бы к правильному результату, который, однако, трудно было бы прочесть по десятичной системе, так как коэффициент при члене первой степени больше, чем 9.

Тогда, не упуская из виду, что d и 10 — одно и то же, мы «переходим через десяток» следующим образом:

$$7d^2+13d+9=7d^2+(10+3)\,d+9=7d^2+(d+3)\,d+9=$$
$$=7d^2+(d^2+3d)+9=(7d^2+d^2)+3d+9=8d^2+3d+9,$$

и теперь ясно, что сумма равна 839. Нам приходится:

1) представить число 13 в виде многочлена $(d+3)$;

2) воспользоваться распределительным законом умножения (раскрываем скобки);

3) воспользоваться сочетательным законом сложения (присоединяем d^2 к $7d^2$);

4) сделать приведение подобных членов $7d^2$ и d^2 (снова распределительный закон).

Подобным же образом «объясняются» и другие арифметические действия над многозначными числами.

Упражнение 139.

451. Пользуясь систематической записью, объясните, делая все необходимые ссылки на основные законы арифметических действий, как произведены следующие действия:

$$\begin{array}{rr} 1) & \begin{array}{r} 480 \\ +\,736 \\ 905 \\ \hline 2121 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 2) & \begin{array}{r} 728 \\ -\,363 \\ \hline 365 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 3) & \begin{array}{r} 47 \\ \times\,23 \\ \hline 1081 \end{array} \end{array}$$

С помощью систематической записи чисел можно легко решать некоторые задачи-загадки.

Пример 1. Сумма цифр трехзначного числа N равна 21, и притом каждая следующая цифра на единицу больше предыдущей. Что это за число N?

Решение: Обозначим первую цифру через x; тогда вторая будет $x+1$; третья $x+2$. В систематической записи все число имеет вид:

$$N=xd^2+(x+1)\,d+(x+2),$$

а сумма цифр равна 21; значит,

$$x+(x+1)+(x+2)=21.$$

Решая это уравнение, получаем: $x=6$. Подставляя это значение в формулу для N, получим: $N=678$.

Пример 2. Сумма цифр трехзначного числа N равна 19, и притом каждая следующая цифра на единицу больше предыдущей. Что это за число N?

Р е ш е н и е. Предположим, что первая цифра обозначена через x. Тогда по-прежнему число N изображается формулой:

$$N = xd^2 + (x+1)\,d + (x+2).$$

Условие, что сумма цифр равна 19, приводит нас к уравнению:

$$x + (x+1) + (x+2) = 19;$$

решая уравнение, видим, что единственный корень его есть $x = \frac{16}{3}$.

Уравнение решено верно. Но решения задачи мы не получаем, и вот почему: по смыслу задачи требуется н е т о л ь к о т о, чтобы удовлетворялось наше уравнение, но и то, чтобы число x было ц е л ы м, именно, о д н и м и з ч и с е л 0, 1, 2,..., 9. Добиться удовлетворения о б о и х требований с р а з у нет возможности. Значит, задача н е и м е е т р е ш е н и я.

С которого из двух требований начинать — в сущности безразлично. Мы начали с первого, но могли бы начать и со в т о р о г о; тогда пришлось бы подставлять все числа 0, 1, 2,...,9 одно за другим в наше уравнение, и мы убедились бы, что ни одно из них не является корнем уравнения, т. е. не удовлетворяет п е р в о м у требованию.

Нужно ясно представлять себе, в чем здесь дело. Первому требованию удовлетворяет одно число, второму — десять чисел; но ни одно из десяти не совпадает с единственным числом, удовлетворяющим первому требованию. Итак, удовлетворить обоим требованиям вместе — невозможно.

Упражнение 140.

452. Сумма цифр трехзначного числа равна 14, и притом каждая следующая цифра вдвое больше предыдущей. Что это за число? (Решите двумя способами.)

453. Каждая следующая цифра трехзначного числа втрое больше предыдущей, а о сумме цифр ничего не известно. Что это за число?

454. Сумма цифр трехзначного числа равна 8. Кроме того, известно, что вторая цифра есть 2 и что при перестановке между собою первой и третьей цифр число уменьшается на 396. Что это за число?

455. Сумма цифр двузначного числа равна 16. Если переставить цифры, то число увеличится на 18. Что это за число?

456. Сумма цифр двузначного числа равна 13, их произведение 36. Что это за число?

* § 51. Задачи на делимость

Уже из курса арифметики начальной школы известно, что если предлагается р а з д е л и т ь одно целое положительное (натуральное) число p (делимое) на другое целое число q (делитель), отличное от нуля*, то поставленную таким образом задачу можно понимать двояко:

---

* Ради краткости в этом параграфе будем, говоря о «целых» числах, подразумевать целые п о л о ж и т е л ь н ы е числа и л и н у л ь.

(1) **или** требуется решить относительно x уравнение

$$p = qx,$$

т. е. найти такое число x, которое, будучи умножено на q, дает в точности p,

(2) **или** требуется найти два таких **целых** числа s (частное) и r (остаток), чтобы, во-первых, имело место равенство

$$p = qs + r$$

(«делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток») и, во-вторых, чтобы имело место неравенство

$$r < q$$

(«остаток меньше делителя»).

Деление в первом смысле можно было бы назвать **точным** делением; деление во втором смысле называется **делением с остатком**.

Пусть, например, $p = 30$, $q = 7$. Если идет речь о точном делении; то мы, решая уравнение

$$30 = 7x,$$

получаем **дробь**

$$x = \frac{30}{7};$$

если идет речь о делении с остатком, то получаем частное $s = 4$ и остаток $r = 2$, так что

$$30 = 7 \cdot 4 + 2,$$

$$2 < 7.$$

Точное деление и деление с остатком следует рассматривать как различные действия и в каждом данном случае отдавать себе отчет, о каком из них идет речь.

Эти два действия **совпадают**, если остаток r равен нулю. Тогда делимое равно делителю, умноженному на частное

$$p = qs,$$

и, следовательно, целое число

$$s = \frac{p}{q}$$

есть корень уравнения

$$p = qx.$$

В этом случае говорят, что число p **делится** на число q; другими словами, существует такое **целое** число s, при котором

$$p = qs.$$

Чтобы найти **все** целые числа p, которые делятся на q, достаточно в последней формуле давать букве s **всевозможные** целые значения; мы получаем:

$$0,\ q,\ 2q,\ 3q \text{ и т. д.}$$

Точно так же, чтобы найти все целые числа p, которые при делении на q дают назначенный остаток $r (<q)$, достаточно в формулу

$$p = qs + r$$

подставлять вместо буквы s всевозможные целые значения; мы получаем:

$$r,\ q + r,\ \ 2q + r,\ \ 3q + r \text{ и т. д.}$$

Например, все целые числа, которые при делении на 7 дают остаток 2, содержатся в такой последовательности:

$$2, 7 + 2,\ \ 2 \cdot 7 + 2,\ \ 3 \cdot 7 + 2 \text{ и т. д.},$$

т. е.

$$2,\ 9,\ 16,\ 23 \text{ и т. д.}$$

Упражнение 141.

457. Двузначное число при делении на 29 дает остаток 23, а при делении на 17 дает остаток 13. Что это за число?

Решение. Так как искомое число при делении на 29 дает остаток 23, то оно непременно имеет вид $29s + 23$ (где s — целое), т. е. это — одно из чисел

$$23,\ 52,\ 81^*.$$

Так как, с другой стороны, это же число при делении на 17 дает остаток 13, то оно имеет вид $17t + 13$ (где t — целое), т. е. это — одно из чисел

$$13,\ 30,\ 47,\ 64,\ 81,\ 98.$$

Отсюда ясно, что единственное число, удовлетворяющее обоим требованиям, есть 81.

458. Найти трехзначное число с суммой цифр 10, являющееся кубом простого числа.

Решение. Нужно было бы выписать: 1) все трехзначные числа с суммой цифр 10; 2) все трехзначные числа, являющиеся кубами простых чисел; и затем отобрать те из них, которые войдут и в первый и во второй список.

Но первый список будет довольно длинным, тогда как второй — значительно короче; поэтому начнем со второго. В него входят всего лишь два числа:

$$125 (= 5^3) \text{ и } 343 (= 7^3).$$

Число 125 имеет сумму цифр 8, число 343—сумму цифр 10. Итак, решение существует, притом только одно: искомое число равно 343.

459. Найти трехзначное число, делящееся на 5, а при делении на 129 дающее остаток 84.

Ответ: 600.

460. Найти трехзначное число, делящееся на 11 и на 37.

Ответ: Таких чисел два: 407 и 814.

461. Найти двузначное число, дающее при делении на 5 остаток 2, а при делении на 13 — остаток 3.

---

* Все числа, следующие за 81, надо отбросить, так как они не двузначные.

Ответ: 42.

Доказать, что квадрат всякого нечетного числа при делении на 4 дает остаток 1.

Решение. Раз число — нечетное, значит, при делении на 2 оно дает остаток 1; следовательно, оно имеет вид $2s + 1$, где s — целое. Тогда его квадрат равен:

$$(2s + 1)^2 = 4s^2 + 4s + 1 = 4(s^2 + s) + 1.$$

Здесь $S = s^2 + s$ — также целое число. Поэтому, деля $(2s + 1)^2$ на 4, получим частное S и остаток 1.

462. Доказать, что остаток 1 получается также: 1) при делении на 3 квадрата всякого числа, которое дает при делении на 3 остаток 1, 2) при делении на 9 куба всякого такого же числа.

463. Доказать, что сумма квадратов трех последовательных целых чисел при делении на 3 дает остаток 2.

* § 52. Деление многочленов

Предположим, что заданы два многочлена P и Q, расположенные по степеням одной и той же буквы, например, буквы x.

Требуется разделить многочлен P на многочлен Q. Что это значит?

Вполне правильным является такой ответ. Результатом деления многочлена P на многочлен Q будет дробь $\frac{P}{Q}$. Такое утверждение вытекает из понимания деления как действия, обратного умножению: разделить P на Q — значит найти такое алгебраическое выражение X (зависящее также от буквы x), чтобы при всех значениях* буквы x было справедливо равенство

$$P = QX.$$

Таким выражением является дробь

$$X = \frac{P}{Q}.$$

Но можно поставить вопрос и иначе, а именно:

Разделить многочлен P на многочлен Q — значит найти такой новый, расположенный также по степеням буквы x, многочлен S, который, будучи умножен на многочлен Q, дает многочлен P; другими словами, требуется, чтобы при всех значениях x выполнялось равенство

$$P = QS.$$

Новое толкование «деления многочлена на многочлен» от прежнего отличается лишь тем, что от искомого «частного» (X или S) требуется дополнительно, чтобы оно само было также многочленом.

Мы увидим, что при таком толковании деления поставленная задача не во всех случаях выполнима.

---

* За исключением, может быть, лишь тех значений, при которых многочлен-делитель Q обращается в нуль.

Пример 1. Разделить многочлен $P = 6x^3 - x^2 + 5x + 30$ на многочлен $Q = 2x + 3$.

Станем искать такой многочлен S, который, будучи умножен (по правилу умножения многочленов) на Q, даст P; посмотрим прежде всего, каков должен быть его старший член.

Легко понять, что старший член многочлена произведения всегда есть не что иное, как произведение старших членов перемножаемых многочленов. Поэтому, чтобы получить старший член многочлена S (если такой многочлен существует), надо, обратно, старший член $6x^3$ многочлена P разделить на старший член $2x$ многочлена Q, мы получим $3x^2$.

Составим теперь произведение $Q \cdot 3x^2$ и рассмотрим разность многочленов:

$$P - Q \cdot 3x^2 = (6x^3 - x^2 + 5x + 30) - (6x^3 + 9x^2).$$

Так как старшие члены многочленов P и $Q \cdot 3x^2$ одинаковы, то эта разность (которую мы обозначим через P_1) будет иметь степень, меньшую, чем степень P:

$$P_1 = P - Q \cdot 3x^2 = -10x^2 + 5x + 30.$$

Чтобы определить следующий член многочлена S, сделаем теперь с многочленом P_1 то же самое, что мы делали с многочленом P. Разделив старший член $(-10x^2)$ многочлена P_1 на старший член $2x$ многочлена Q, мы получаем $(-5x)$. Произведение $Q \cdot (-5x)$ имеет тот же старший член, что и многочлен P_1; составим разность:

$$P_1 - Q \cdot (-5x) = (-10x^2 + 5x + 30) - (-10x^2 - 15x);$$

она представляет собою многочлен (назовем его P_2), степень которого меньше, чем степень P_1:

$$P_2 = P_1 - Q \cdot (-5x) = 20x + 30.$$

Обращаемся далее к многочлену P_2. Разделив его старший член $20x$ на старший член $2x$ многочлена Q, получаем 10. Произведение $Q \cdot 10$ имеет тот же старший член, что и многочлен P_2. Разность

$$P_2 - Q \cdot 10 = (20x + 30) - (20x + 30)$$

(которую мы обозначим через P_3) оказывается тождественно равной нулю:

$$P_3 = P_2 - Q \cdot 10 = 0.$$

Мы получили ряд тождеств:

$$P_1 = P - Q \cdot 3x^2,$$
$$P_2 = P_1 - Q \cdot (-5x),$$
$$P_3 = P_2 - Q \cdot 10.$$

Принимая во внимание, что P_3 сводится к нулю, им можно придать вид:

$$P = Q \cdot 3x^2 + P_1,$$
$$P_1 = Q \cdot (-5x) + P_2,$$
$$P_2 = Q \cdot 10.$$

Складывая их вместе (§ 37, I) и вычитая почленно P_1 и P_2 (§ 37, II), получаем тождество:

$$P = Q \cdot 3x^2 + Q \cdot (-5x) + Q \cdot 10.$$

Вынося в правой части Q за скобки, будем иметь:

$$P = Q \cdot (3x^2 - 5x + 10).$$

Таким образом, мы видим, что выражение S, определяемое равенством

$$S = 3x^2 - 5x + 10,$$

и есть искомый многочлен.

Все эти действия записывают короче, именно, следующим образом (наподобие записи при делении многозначных чисел):

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - x^2 + 5x + 30 & 2x + 3 \\ \hline 6x^3 - 9x^2 & 3x^2 - 5x + 10 \\ \hline -10x^2 + 5x \\ -10x^2 - 15x \\ \hline 20x + 30 \\ 20x + 30 \\ \hline 0 \end{array}$$

Пример 2. Разделить многочлен $P = 6x^3 - x^2 + 5x + 35$ на многочлен $Q = 2x + 3$.

В этом примере, как и в предыдущем, мы получим:

$$P - Q \cdot 3x^2 = P_1,$$

$$P_1 - Q \cdot (-5x) = P_2.$$

Но разность $P_2 - Q \cdot 10$, которую мы обозначим через P_3, на этот раз не будет тождественно равной нулю. Мы будем иметь

$$P_1 = (6x^3 - x^2 + 5x + 35) - (6x^3 + 9x^2) = -10x^2 + 5x + 35,$$

$$P_2 = (-10x^2 + 5x + 35) - (-10x^2 - 15x) = 20x + 35,$$

$$P_3 = (20x + 35) - (20x + 30) = 5.$$

Таким образом, теперь

$$P_2 - Q \cdot 10 = P_3.$$

Полученным тождествам

$$P - Q \cdot 3x^2 = P_1,$$

$$P_1 - Q \cdot (-5x) = P_2,$$

$$P_2 - Q \cdot 10 = P_3$$

можно придать вид

$$P = Q \cdot 3x^2 + P_1,$$

$$P_1 = Q \cdot (-5x) + P_2,$$

$$P_2 = Q \cdot 10 + P_3$$

и продолжать дальше уже нельзя, так как степень P_3 меньше, чем степень Q.

Отсюда, как и раньше, посредством сложения получится:

$$P = Q \cdot (3x^2 - 5x + 10) + P_3.$$

Обозначая многочлен $3x^2 - 5x + 10$ через S и заменяя P_3 через R, мы приходим к тождеству

$$Q = P \cdot S + R,$$

т. е.

$$6x^3 - x^2 + 5x + 35 = (2x + 3) \cdot (3x^2 - 5x + 10) + 5.$$

Расположение действия таково:

$$\begin{array}{l|l} 6x^3 - x^2 + 5x + 35 & 2x + 3 \\ \hline 6x^3 + 9x^2 & 3x^2 - 5x + 10 \\ \hline -10x^2 + 5x & \\ -10x^2 - 15x & \\ \hline 20x + 35 & \\ 20x + 30 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

В первом примере многочлен P делится на многочлен Q; это значит, что существует такой многочлен S, что имеет место тождество

$$P = QS.$$

Во втором примере многочлен P не делится на многочлен Q: при делении получается «остаток» R. Подобрать такой многочлен S, чтобы произведение QS равнялось P, уже нельзя, но можно подобрать два многочлена S и R (последний — степени меньшей, чем степень Q) таким образом, чтобы имело место тождество

$$P = QS + R.$$

Итак, задачу деления с «остатком» многочлена на многочлен ставят следующим образом:

Разделить многочлен P («делимое») на многочлен Q («делитель») — значит найти два таких многочлена S («частное») и R («остаток»), чтобы, во-первых, имело место тождество

$$P = QS + R$$

и, во-вторых, чтобы степень остатка R была меньше, чем степень делителя Q.

Основное тождество выражается такими словами:

Многочлен-делимое тождественно равен многочлену-делителю, умноженному на многочлен-частное, плюс многочлен-остаток.

Или, короче (как в арифметике):

Делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток.

Во всем предыдущем изложении предполагается, что многочлен-делитель Q тождественно не равен нулю. Излишне также считать его числом постоянным (не зависящим от буквы x) и отличным от нуля, так как в этом случае деление выполняется очевидным образом, без всякого остатка. Итак, можно предполагать, что степень Q не меньше единицы.

Упражнение 142.

464. В следующих примерах разделите многочлен P на многочлен Q, определяя частное S и остаток R. Проверяйте тождество $P = QS + R$.

1) $P = 6x^3 + 17x^2 + 14x + 3$, $Q = 3x + 1$;
2) $P = 6x^3 + 17x^2 + 14x + 7$, $Q = 3x + 1$;
3) $P = x^3 + 2x + 5$, $Q = x + 1$;
4) $P = x^3 + 2x + 5$, $Q = x^2 + 1$;
5) $P = x^2 + x + 1$, $Q = x + 1$;
6) $P = x^2 + x + 1$, $Q = x^2 + 1$;
7) $P = 3x + 7$, $Q = x + 1$;
8) $P = x$, $Q = x + 1$;
9) $P = 2x - 5$, $Q = x - 2$;
10) $P = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$, $Q = x - 2$;
11) $P = x^3 - 3x^2 - 10$, $Q = x^2 + 4$;
12) $P = x^2 - x + 1$, $Q = x^2 + x + 1$;
13) $P = x^3 - 125$, $Q = x - 5$.

§ 53. Разложение многочленов на множители

Если мы перемножим два многочлена первой степени, то получим многочлен второй степени. Если умножим многочлен второй степени на многочлен первой степени, получается многочлен третьей степени. Умножая многочлен третьей степени на многочлен первой степени или перемножая два многочлена второй степени, получаем многочлен четвертой степени.

Возникает вопрос: можно ли данный многочлен степени выше первой представить как произведение двух (или большего числа) многочленов низших степеней? Всегда ли это можно сделать?

Представляя данный многочлен в виде произведения многочленов низших степеней, мы выполняем его разложение на множители.

В некоторых отдельных случаях такое разложение можно выполнить без труда (см. § 41 и 42), с помощью догадки или пользуясь основными формулами умножения.

Например:

1) многочлен x^2-9 есть разность квадратов чисел x и 3; поэтому он равен произведению их суммы на их разность:

$$x^2-9=(x+3)(x-3);$$

2) многочлен $4x^2+4x+1$ есть квадрат суммы чисел $2x$ и 1:

$$4x^2+4x+1=(2x+1)^2;$$

3) многочлен x^2+5x+6, как легко догадаться, разлагается на множители следующим образом:

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3).$$

Разложение многочлена на множители — задача, в общем случае представляющая очень большие трудности. Она не всегда выполнима: например, такой простой многочлен второй степени, как x^2+1, нельзя разложить на два множителя.

Если бы такое разложение было возможно, то мы легко нашли бы такое значение x, при котором один из множителей обратился бы в нуль (пришлось бы решить уравнение); но раз обратился бы в нуль один из множителей, то обратилось бы в нуль и произведение (§ 25), т. е. многочлен x^2+1. Однако 1 есть число положительное, а x^2 при всяком значении x также есть число положительное (или равное нулю — при $x=0$); значит, сумма x^2+1 всегда есть число положительное и, следовательно, никогда в нуль не обращается.

Ниже предлагаются некоторые упражнения в разложении на множители расположенных многочленов, начиная с многочленов второй степени (дальнейшее по этому поводу будет сказано в § 83).

Упражнение 143.

465. Разложить на множители следующие выражения:

1) x^2-25,
2) $(x+1)^2-25$,
3) $(x^2+2x+1)-25$,
4) $x^2+2x-24$,
5) x^2-16,
6) $(x-3)^2-16$,
7) $x^2-6x+9-16$,
8) x^2-6x-7,

9) $x^2 - 36$,

10) $(x-5)^2 - 36$,

11) $x^2 - 10x + 25 - 36$,

12) $x^2 - 10x - 11$.

Упражнение 144.

466. Разложить на множители следующие выражения:

1) $x^2 - 4x + 3$, 5) $x^2 + 8x + 16$, 9) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$,
2) $x^2 + 2x - 8$, 6) $4t^2 - 4t + 1$, 10) $y^3 - 12y^2 + 48y - 64$,
3) $s^2 - 24s + 44$, 7) $4t^2 + 4t - 3$, 11) $z^4 + z^3$,
4) $N^2 + 2N - 3$, 8) $x^4 - 3x^2 - 4$, 12) $p^4 - p^2$.

Упражнение 145.

467. Вычислить (по возможности в уме), чему равны значения выражений:

1) $x^2 - 16x + 39$ при $x = 13,\ 23,\ 33$;
2) $x^2 + 1{,}3x + 0{,}36$ при $x = 0{,}6,\ 1{,}1$;
3) $xy + x - y - 1$ при $x = 21,\ y = 39$; $x = 201,\ y = 14$;
4) $10x^2 + 101xy + 10y^2$ при $x = 5,\ y = 1$; $x = 5,\ y = \frac{1}{2}$.

§ 54. Многочлены с двумя буквами

Предположим, что наш многочлен содержит две буквы: x и y.

Степенью данного члена в этом многочлене называется сумма показателей при той и при другой букве.

Так, в многочлене

$$5x^2y - 3y^4 + x - 2 + 7x^2y^2 - xy^2 + 2x^4 + 4y$$

член $5x^2y$ третьей степени, член $(-3y^4)$ четвертой степени, член x первой степени, член (-2) нулевой степени (свободный член), член $7x^2y^2$ четвертой степени, член $(-xy^2)$ третьей степени, член $2x^4$ четвертой степени, член $4y$ первой степени.

Чтобы упорядочить расположение членов (расположить по степеням двух букв), пишут обыкновенно, после приведения подобных членов, группами подряд все члены одной и той же степени таким обра-

зом, чтобы степени убывали от группы к группе; в пределах же каждой группы располагают члены таким образом, чтобы степени одной из букв (первой, например, буквы x) убывали, а степени другой (второй, например, буквы y) возрастали.

При соблюдении этого правила приведенный выше многочлен должен быть записан следующим образом:

$$(2x^4 + 7x^2y^2 - 3y^4) + (5x^2y - xy^2) + (x + 4y) - 2.$$

Те члены, которые имеют наибольшую степень, называются старшими; их может быть несколько; они образуют первую группу.

Степенью многочлена называют степень старших членов.

В нашем примере имеется три старших члена; степень многочлена — четвертая.

Если все члены многочлена — одной и той же степени, то многочлен называется однородным: о «старшинстве» в этом случае не может быть речи. В предыдущем примере каждая из групп в скобках, взятая в отдельности, есть однородный многочлен.

Упражнение 146.

468. Напишите следующие многочлены с соблюдением приведенных выше правил расположения. Назовите степень каждого многочлена; группу старших членов; свободный член. Укажите, какие из многочленов являются однородными.

1) $3x^2 + 2x^2y + y^3 - x^3 + 5x + 10 - 7y + 4xy$,

2) $x^3 - 3xy + y^3$,

3) $u^2 + uv + v^2$,

4) $1 + ab$,

5) $r^3 + \frac{1}{2} r^2s^3 - s^4$.

6) $xy - x^2$,

7) $a^3b^2 + a^2b^3 + 2a^5 + 2b^5$,

8) $P + Q + PQ + 1$.

Упражнение 147.

469. Выполнив указанные действия, расположите каждый из полученных многочленов в надлежащем порядке.

1) $3(2x - 5y + 8) + 7(x + 2y - 4)$,

2) $(x^2 + y - 1) + (y^2 + x + 1) + 2xy$,

3) $5(-3u+v-4)-2(u-2v)$,

4) $(a^2+b^2)+(a^2-b^2)+(a^2+ab)+(ab+b^2)$,

5) $2\left(\frac{L}{3}-\frac{M}{4}+\frac{1}{12}\right)+3\left(\frac{L}{4}-\frac{M}{3}-\frac{1}{12}\right)$,

6) $\frac{1}{2}(h+2k)-\frac{3}{4}(1-2h)+\frac{1}{2}(4k-1)$,

7) $(x^2+1)+2\left(xy+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(2x+3y)$,

8) $(p^2q-q^3)+3(p^3+q^3)-2(pq^2-q^3)$,

9) $(t^4-t^3u)+(t^3u-t^2u^2)+(t^2u^2-tu^3)+(tu^3-u^4)$,

10) $(H^4-3H^2h^2+2h^4)-(H^4-6H^2h^2+h^4)$.

Упражнение 148.

470. Выполнив указанные действия, расположите каждый из полученных многочленов в надлежащем порядке.

1) $25(x^2+y^2)-(3x+4y)^2$,

2) $1+x(x^2-y+1)+y(y^2-x+1)$,

3) $(x+y-1)^2-3xy$,

4) $(2a+3b)(a+4b)-(2a-3b)(a-4b)$,

5) $(U+V)^3+(U-V)^3$,

6) $(x-y)(xy+1)+(x+y)(xy-1)$,

7) $(A^2+AB+B^2)(A^2-AB+B^2)$,

8) $(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-1)$.

В полученных тождествах, с целью проверки, положите:

$x=2,\ y=1;\ a=2,\ b=1;\ U=2,\ V=1;\ A=2,\ B=1.$

С той же целью положите:

$$y=0,\quad b=0,\quad V=0,\quad B=0.$$

И, наконец:

$$y=x,\quad b=a,\quad V=U,\quad B=A.$$

Упражнение 149.

471. Составьте таблицу значений многочлена

$$x^2-2xy+3x-5y+1$$

при указанных значениях x и y.

x \ y	2	−5	−3	0,1
1				
3				
−2				
0,3				

Сделайте проверку по строчкам. (Указание: прежде чем проверять первую строчку, положите $x = 1$ и т. д.). Проверьте таким же образом один из столбцов.

§ 55. Буквенные коэффициенты

В данном алгебраическом выражении, составленном из нескольких букв, часто приходится выделять одну или две буквы и считать их главными*, остальные же, не выделенные, буквы считать побочными (или параметрами). Выделение главных букв производится большею частью с той целью, чтобы было видно, каким буквам предполагается давать различные числовые значения и какие можно рассматривать как имеющие (в пределах предложенной задачи) одно и то же неизменное значение.

Обыкновенно главные буквы берутся из конца латинского алфавита, побочные — из начала или из середины.

При условии разделения букв на главные и побочные такие понятия, как «одночлен», «многочлен», «коэффициент» подвергаются обобщению. Именно:

Одночленом называют выражение, представляющее собою произведение множителя, не содержащего главных букв, и одного или нескольких множителей, являющихся главными буквами. При этом множитель, не содержащий главных букв, называется коэффициентом.

---

* Случай, когда имеется более двух главных букв, возможен, но мы его рассматривать не будем.

Многочленом называют алгебраическую сумму нескольких одночленов (в обобщенном смысле).

Например: считая главными буквы x и y, можно назвать одночленами такие выражения, как

$$a^2bx^2, \quad -(a+b)xy, \quad \frac{x}{a}, \quad 2b^4;$$

коэффициентами здесь являются:

$$a^2b, \quad -(a+b), \quad \frac{1}{a}, \quad 2b^4.$$

Выражение

$$bx^2-(a+b)xy+\frac{x}{a}+2b^4$$

можно назвать многочленом относительно* x и y. Буквы же a и b являются параметрами.

Если выделены главные буквы, то счет степеней ведется исключительно по этим буквам (т. е. на параметры не обращают внимания). Итак, в нашем примере первый и второй члены — второй степени, третий — первой, четвертый — нулевой (свободный член).

В том же примере можно было бы условиться считать главной лишь букву x, а букву y относить к числу параметров. Тогда наш многочлен был бы второй степени относительно буквы x, но член $-(a+b)xy$ был бы уже первой степени, с коэффициентом $(a+b)y$.

Напротив, если считать главной лишь одну букву y, то тот же многочлен будет относительно y линейным (первой степени); тогда второй член $(a+b)xy$ будет первой степени с коэффициентом $(a+b)x$, а прочие члены — свободными.

Соответственным образом обобщается и понятие «подобные члены» (§ 32). Так, в выражении (с главной буквой x)

$$x^2+ax+bx+ab$$

члены ax и bx — подобные (так как отличаются лишь коэффициентами).

Приведение таких подобных (в обобщенном смысле) членов производится посредством вынесения главных букв за скобки. Например:

$$x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab.$$

---

* Слово «относительно» служит для выделения главных букв.

Заметим еще, что оборот речи «расположить по степеням такой-то буквы» подразумевает, что эта буква, и только она, выделяется в качестве главной. Один и тот же многочлен можно расположить по степеням той или иной буквы. Например, многочлен:

$$(x^5 + x^3y^2) + 2y^4 + 5xy^2 + (3x^2 + xy) + 4y$$

можно расположить по степеням буквы x:

$$x^5 + y^2x^3 + 3x^2 + (5y^2 + y)\,x + (2y^4 + 4y)$$

и можно так же расположить по степеням буквы y:

$$2y^4 + (x^3 + 5x)\,y^2 + (x + 4)\,y + (x^5 + 3x^2).$$

Относительно буквы x этот многочлен пятой степени, относительно y — четвертой.

Упражнение 150.

472. Скажите, какой степени каждый член в следующем многочлене:

$$x^2y^3 + y^5 - 2x^3y^2 + 3x^5y - xy^4 + 5x^4$$

и какой степени сам многочлен: a) относительно x, b) относительно y, c) относительно x и y. Расположите его: a) по степеням x, b) по степеням y, c) по степеням x и y (см. § 54).

473. Выполните указанные действия и расположите результат по степеням буквы x:

1) $a(x^2 + 3x - 2) + b(x^2 - 4x + 5)$,

2) $A(ax + b) + B(cx + d)$,

3) $(x - a)(ax + 1)$,

4) $(x + m)^2(x - m)^3$,

5) $(x^3 + m^3)^2 - (x^2 + m^2)(x^4 - m^2x^2 + m^4)$.

474. Выполните указанные действия и расположите результат в надлежащем порядке, по буквам x и y:

1) $ax(y - 1) + by(x + 1)$,

2) $m(ax + by + c) + n(dx + ey + f)$,

3) $(ax + by + c)(dx + ey + f)$,

4) $(ax + by + c)^2 + (dx + ey + f)^2$.

475. В следующих выражениях

$$3P + 2Q, \quad PQ, \quad P^2 - Q^2$$

положите

$$P = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}, \quad Q = \frac{x}{3} + \frac{y}{2}$$

и результат приведите в порядок.

Упражнение 151.

476. Что станет с выражением

$$ax^2 - (a^2 - 1)x - a,$$

если в нем положить: 1) $a = 2$, 2) $a = -2$, 3) $a = 0$?

Можно ли выбрать значение a таким образом, чтобы в этом выражении пропал член первой степени? Во что оно тогда превратится?

477. Каковы должны быть значения m и n, чтобы выражение

$$m(2x + 3y) + n(2x - 3y)$$

обращалось в нуль при $x = 1$, $y = 1$? Укажите два примера таких значений.

478. Скажите, что станет с выражением

$$Ax + By + C,$$

если в нем сделаем указанные ниже подстановки:

1) $A = 3$, $B = 2$, $C = 5$,

2) $A = 2$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -1$,

3) $A = \frac{1}{5}$, $B = -1$, $C = 0$,

4) $A = -1$, $B = \frac{2}{5}$ $C = -\frac{1}{10}$,

5) $A = 1$, $B = 0$, $C = -4$,

6) $A = 0$, $B = 1$, $C = -4$,

7) $A = p$, $B = q + 1$, $C = 3r + 2$,

8) $A = \frac{1}{a}$, $B = \frac{1}{b}$, $C = 0$,

9) $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$.

479. Напишите, какие значения нужно дать буквам A, B и C, чтобы выражение

$$Ax + By + C$$

приняло вид:

1) $x + 2y + 7$, 4) $\frac{x + 2y - 5}{3}$, 7) 3,

2) $\frac{x}{3} - y + 1$, 5) $5x + 1$, 8) $x + a + b$,

3) $-\frac{2}{5}x + y$, 6) $x - c$, 9) $(2m+n)x - ny + (m-n)$.

480. Следующие выражения преобразуйте к виду $Ax + By + C$ и скажите, каковы будут A, B и C:

1) $5x + y + 2x$,
2) $(3x - 1) + (y + 5)$,
3) $2(4 - x) - (3y + 8) + (2x + 3y)$,
4) $\frac{x + 1}{2} + \frac{2y - 3}{3}$,
5) $1 - \frac{x + y}{10}$,
6) $\frac{1}{3}(2y - 1) + \frac{1}{5}(x + 2)$,
7) $a(x + b) + b(y + a)$,
8) $(px + qy) - (py - qx)$,
9) $m(x + y) + n(x - y) + (2x - y)$,
10) $r^2(x - 1) + 2rs(y + 1) + s^2$.

481. В выражение $Ax^2 + Bx + C$ подставьте значения коэффициентов:

1) $A = 1$, $B = 5$, $C = 6$, 4) $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = \frac{1}{3}$,

2) $A = -1$, $B = 0$, $C = 1$, 5) $A = 1$, $B = p$, $C = q$,

3) $A = 3$, $B = 10$, $C = 3$, 6) $A = \frac{1}{t}$, $B = \frac{1}{t^2}$, $C = 0$.

482. Напишите, какие значения нужно дать коэффициентам A, B и C, чтобы выражение $Ax^2 + Bx + C$ приняло вид:

1) $9x^2 + 9x + 2$, 4) $\frac{x^2 + a^2}{a^2}$,

2) $\frac{1 + 2x^2}{5}$, 5) $(x - 1)(x - 2)$,

3) $2 - \frac{x}{2}$, 6) $x(m - x)$.

483. Следующие выражения преобразуйте к виду $Ax^2 + Bx + C$ и скажите, каковы будут A, B и C:

1) $7(x^2 + x - 1) + 8(x^2 - x + 1)$, 3) $(ax + b)^2 + x^2$,

2) $(1 - x)^2$, 4) $(p + x)^2 + (qx + 1)$.

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VIII

Упражнение 152.

484. В более сложных случаях, вроде следующего:

$$\frac{5}{2}x^2 - x + x^2 + \frac{3}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}x^3 - 2 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3} + 2x^3 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{6}x,$$

возможна вспомогательная запись:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & -\frac{1}{3} - \frac{4}{3} + 2 = \frac{1}{3} \\ x^2 & \frac{5}{2} + 1 - \frac{3}{2} = 2 \\ x & -1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{7}{6} = 0 \\ 1 & \frac{3}{4} - 2 + \frac{1}{3} = -\frac{11}{12}. \end{array}$$

Итак, данный многочлен, будучи расположен по убывающим степеням буквы x, принимает вид:

$$\frac{x^3}{3} + 2x^2 - \frac{11}{12}.$$

По этому образцу сделайте примеры:

1) $5x - 7x^2 + 2 - 3x + 8x^2 - 4 + 5 - 6x^2 + 4x + x^2 - 2x + 3x^2$,

2) $a - 0{,}3a^2 + 1{,}7 + 0{,}08a^2 - 2{,}04 - 0{,}98a + 2{,}507a^2 + 0{,}542$.

485. В более общем случае, располагая многочлен по степеням входящей в него буквы, очень полезно «собирать» коэффициенты при каждой степени этой буквы. Так, например, если задано выражение

$$(2x + 1)(x + 3) + (3x + 1)(x + 2),$$

то коэффициент при старшей степени x^2 равен $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1$, т. е. 5; коэффициент при x равен $2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1$, т. е. 14; свободный член $1 \cdot 3 + 1 \cdot 2$, т. е. 5. Итак, данное выражение тождественно равно расположенному многочлену

$$5x^2 + 14x + 5.$$

Расположите следующие выражения по убывающим степеням входящей буквы:

1) $(2v+1)(v+3)+(3v+1)(v+2)$, $(v=1,\ v=-1)$;

2) $(a+1)^3+2(a+1)^2+3(a+1)+6$, $(a=0,\ a=9,\ a=-1)$;

3) $x(x^3+1)-(x^2-1)(x^2-3)$, $(x=1,\ x=2)$;

4) $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2$, $(x=0,\ x=1,\ x=-1)$;

5) $(x-2)(x-3)-8(x-1)(x-3)+9(x-1)(x-2)$, $(x=1,\ x=2,\ x=3)$;

6) $1+7(x-1)+2(x-1)(x-2)+(x-1)(x-2)(x+1)$, $(x=1,\ x=2,\ x=-1)$.

486. Дано:

$$A=3x+4,\ B=2x+5,\ C=x+6.$$

Составить многочлены:

$$1)\ AC-B^2,\quad 2)\ A^2+B^2+C^2,\quad 3)\ ABC.$$

Каждое из действий проверить подстановками $x=1$ и $x=-1$.

Упражнение 153.

487. Чтобы найти числовое значение расположенного многочлена, например,

$$P=5x^3+7x^2+2x+10,$$

при некотором значении входящей буквы, хотя бы $x=3$, можно представить себе предварительно этот многочлен в следующем виде:

$$P=((5x+7)x+2)x+10.$$

После этого подстановка производится значительно удобнее (в уме):

$$((5\cdot 3+7)\cdot 3+2)\cdot 3+10=214.$$

Вычислите этим способом значения многочлена P при значениях x, равных: 4, 10, 11, 2, 1, -2. Проверьте обычным способом.

488. При каком из целых значений x, удовлетворяющих неравенству $0<x<6$, многочлен

$$y=\frac{1}{10}(x^3+2x^2-25x+100)$$

принимает наименьшее значение? При каком из целых значений x, удовлетворяющих неравенству $-6<x<0$, принимает наибольшее значение?

Пользуясь вычисленными значениями, наметьте график.

489. Значение которого из многочленов

$$P=2x^2+5x+3,\quad Q=3x^2+x+2,\quad R=x^2+5x+9$$

оказывается наибольшим

1) при $x=1$, 2) при $x=10$, 3) при $x=-1$, 4) при $x=-10$.

Упражнение 154.

490. Докажите, что если

$$x = p^2 - q^2,\ y = 2pq,\ z = p^2 + q^2,$$

то

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Проверьте справедливость тождества

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2$$

при следующих значениях p и q:

(1) $p = 2,\ q = 1$;

(2) $p = 3,\ q = 1$; (5) $p = 3,\ q = 2$;

(3) $p = 4,\ q = 1$; (6) $p = 4,\ q = 2$; (8) $p = 4,\ q = 3$;

(4) $p = 5,\ q = 1$; (7) $p = 5,\ q = 2$; (9) $p = 5,\ q = 3$; (10) $p = 5,\ q = 4$.

Постройте на клетчатой бумаге треугольники (1) — (10) со сторонами x, y, z. Все ли они прямоугольные? Почему?

Проверьте циркулем (полоской клетчатой бумаги) длину каждой гипотенузы. Есть ли среди треугольников подобные (различающиеся только по величине)?

Ответ: Подобные треугольники:

(1), (2) и (6);

(3) и (9);

(4) и (5).

Глава IX

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ

§ 56. Уравнение с одной буквой (неизвестным)

Один из основных вопросов, которыми занимается алгебра, заключается в решении уравнений нормального вида. Так называются уравнения, у которых в левой части стоит многочлен, расположенный по степеням неизвестной буквы, а в правой части — нуль. Степень многочлена в левой части носит название степени уравнения.

Мы встречались не раз с уравнениями, которые не имели нормального вида: таковы, например, уравнения

$$3x = x + 6, \quad x + \frac{16}{x} = 4, \quad \frac{x}{x+1} = 3.$$

Подобного рода уравнения могут быть приведены к уравнениям нормального вида. Для этого достаточно освободиться от дробей, затем перенести налево члены, стоящие в правой части, сделать приведение подобных членов и, наконец, правильно расположить члены.

Таким образом, привести заданное уравнение к уравнению нормального вида удается по большей части несложными приемами.

Напротив, нахождение всех корней уравнения представляет собою более трудную задачу, в особенности в том случае, если уравнение высокой степени.

Уравнение первой степени (линейное) имеет вид

$$Ax + B = 0.$$

Уравнение второй степени (иначе квадратное) имеет вид

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Уравнение третьей степени (иначе кубическое) имеет вид

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Так можно продолжать и дальше. Ради единообразия неизвестное здесь обозначено буквой x; коэффициенты же A, B и т. д. — известные числа. В уравнении нормального вида старший коэффициент, конечно, следует считать отличным от нуля.

Уравнение первой степени мы решаем (см. гл. VI) следующим образом: свободный член переносим направо

$$Ax = -B,$$

затем делим уравнение на коэффициент при x:

$$x = -\frac{B}{A}.$$

В случае уравнений второй степени или высших степеней решение уравнения тесно связано с разложением левой части на линейные множители. Так, например, уравнение

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

можно переписать в виде

$$(x - 3)(x - 5) = 0;$$

далее сошлемся на теорему (§ 25, стр. 105): если произведение двух множителей равно нулю, то непременно один из множителей равен нулю. Поэтому или $x-3 = 0$ или $x-5=0$; значит, или $x=3$ или $x=5$. Обратно, если $x=3$ или $x=5$, то или первый множитель равен нулю или второй; но в обоих случаях произведение равно нулю, т. е. уравнение удовлетворяется. Итак, уравнение имеет два корня: 3 и 5.

В отдельных примерах нам удавалось (см. § 42 и 47) разлагать трехчлен второй степени на линейные множители; более полно общий прием разложения (посредством «выделения квадрата») будет рассмотрен в главе XII.

Что касается уравнений третьей, четвертой и высших степеней, то, не говоря об отдельных частных случаях, разложить их левую часть на множители весьма трудно. С другой стороны, очень просто можно составить уравнение, имеющее наперед заданные корни; при этом степень уравнения в точности будет равняться числу корней. Например, пусть заданы три числа:

$$1,\ 4 \text{ и } (-7);$$

тогда уравнение, имеющее эти числа (и только их) своими корнями, таково:

$$(x-1)(x-4)(x-(-7))=0,$$

или

$$(x-1)(x-4)(x+7)=0.$$

Производя умножение, получаем окончательно:

$$x^3+2x^2-31x+28=0.$$

Можно доказать, что число корней уравнения никогда не превышает его степени. Но иногда оно бывает меньше степени уравнения. Например, уравнение

$$x^3+x=0$$

— третьей степени, но имеет только один корень $x=0$. Это сразу видно, если в левой части вынести x за скобку

$$x(x^2+1)=0$$

(здесь второй множитель x^2+1 ни при каком значении x не обращается в нуль).

Упражнение 155.

491. Предположим, что имеется числовая прямая Ox с намеченным на ней масштабом (см. гл. IV, § 22). Покажите на этой оси все корни каждого из следующих уравнений. Называйте вместе с тем степень уравнения:

1) $2x-11=0$,
2) $7-4x=0$,
3) $x+3=0$,
4) $x(x-1)=0$,
5) $(x-2)(x-5)=0$,
6) $(3x-4)(2x+5)=0$,
7) $(x-2)(x-3)(x+5)=0$.
8) $x^2-5x=0$,
9) $(x-2)(x+2)=0$.
10) $x^2-4=0$,
11) $x^2-25=0$,
12) $x^2-49=0$.

13) $x^2 - 36 = 0$,

14) $(x-8)^2 - 36 = 0$,

15) $(x+1)^2 - 4 = 0$,

16) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$,

17) $(x-5)^2 - 16 = 0$,

18) $(x-3)^2 - 4 = 0$,

19) $(x^2 - 6x + 9) - 4 = 0$,

20) $x^2 - 6x + 5 = 0$,

21) $(x-1)^2 - 25 = 0$,

22) $x^2 - 2x - 24 = 0$,

23) $x^2 - 8x - 20 = 0$,

24) $x^2 - 14x + 45 = 0$,

25) $4x^2 - 1 = 0$,

26) $x^2 + 4 = 0$,

27) $(x-2)^2 + 4 = 0$,

28) $x(x^2 + 5) = 0$,

29) $(2x+1)(x^2 + 8) = 0$,

30) $x^2(x-5) = 0$,

31) $(x-2)(x^2 + 9x + 14) = 0$,

32) $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 2x - 3) = 0$.

Упражнение 156.

492. Составьте уравнения, имеющие корнями данные числа; освобождайтесь, если нужно, от знаменателей, раскрывайте скобки, располагайте многочлены по убывающим степеням буквы:

1) 3 и 7,

2) 1 и (-2),

3) 7 и 0,

4) $\frac{1}{2}$ и 3,

5) $\frac{2}{3}$ и $\left(-\frac{1}{2}\right)$,

6) 1, 2 и 3,

7) 2, 0 и (-3),

8) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ и $\left(-\frac{1}{2}\right)$,

9) a и b,

10) a, b и c.

Возьмите наугад две точки на оси, определите на глаз (округляя в десятых) соответствующие им числа и составьте уравнение, имеющее их своими корнями.

Совокупность точек на числовой оси, являющихся корнями уравнения (иначе, удовлетворяющих этому уравнению), дает нам геометрическое представление этого уравнения.

§ 57. Уравнение с двумя буквами (переменными)

Нам хорошо известно (§ 4), что решением (корнем) уравнения с одной неизвестной буквой называется всякое значение входящей буквы, удовлетворяющее уравнению.

Если уравнение содержит две неизвестные буквы, понятие решения должно быть обобщено и именно следующим образом: решением уравнения с двумя неизвестными буквами называется пара значений двух неизвестных, удовлетворяющая уравнению *.

Так, пара чисел (2, 1) есть решение уравнения $3x + 2y - 8 = 0$; то же можно сказать о паре чисел (4, —2); но, например, пара (3, 2) не есть решение.

В случае уравнения с двумя неизвестными найти и перечислить все решения, как правило, невозможно. Уже простейшие примеры, вроде $y = 2x$ или $3x + 2y - 8 = 0$, показывают, что такое уравнение может иметь бесконечное множество решений.

Поэтому, если в уравнение входят две (или более) неизвестных буквы, их называют обыкновенно не неизвестными, а переменными (переменными величинами).

Алгебраическое уравнение с двумя буквами считается нормальным, если в правой части стоит нуль, а в левой — многочлен, расположенный по обеим буквам (см. § 54).

Уравнения с двумя буквами (как и уравнения с одной буквой) классифицируются по степеням: степенью уравнения называется степень многочлена, стоящего в его левой части, причем обе буквы считаются главными.

Уравнения первой степени (линейные) имеют вид

$$Ax + By + C = 0.$$

Уравнения второй степени (квадратные) имеют вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Отдать себе отчет в том, какова совокупность решений данного уравнения, нам помогает геометрическое представление уравнения: оно делает наглядной ту зависимость, которая существует между значениями букв, удовлетворяющими уравнению. Познакомимся ближе с этим геометрическим представлением.

Так как у нас имеется не одна, а две буквы, допустим, x и y, из которых каждая может принимать

---

* В случае уравнения с двумя или большим числом неизвестных эти значения называть корнями не принято.

различные значения, то уже нельзя обойтись числовой прямой, а необходимо прибегнуть к числовой (координатной) плоскости. Проведем на листе клетчатой бумаги горизонтальную ось Ox и вертикальную ось Oy; масштабы на осях будем брать одинаковые. Каждая пара значений букв (x, y) изображается, как нам известно (гл. IV, § 28), некоторой определенной точкой плоскости Oxy, именно — точкой с абсциссой x и ординатой y. Поэтому совокупность всех пар значений (x, y), удовлетворяющих уравнению, изображается также некоторой совокупностью (геометрическим местом) точек на плоскости Oxy. Эта совокупность и дает геометрическое представление решений нашего уравнения; она называется графиком уравнения. Итак, *график уравнения есть совокупность всех тех точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению.*

Пример 1.

Рассмотрим уравнение

$$x - y = 0.$$

Его графиком является совокупность точек (x, y), у которых абсцисса x равна ординате y; легко понять, что все такие точки лежат на биссектрисе первого и третьего координатных углов: эта биссектриса и представляет собой график нашего уравнения.

Пример 2.

Второй пример возьмем более сложный. Пусть нам дано уравнение второй степени:

$$x^2 - 8x + 2y = 0.$$

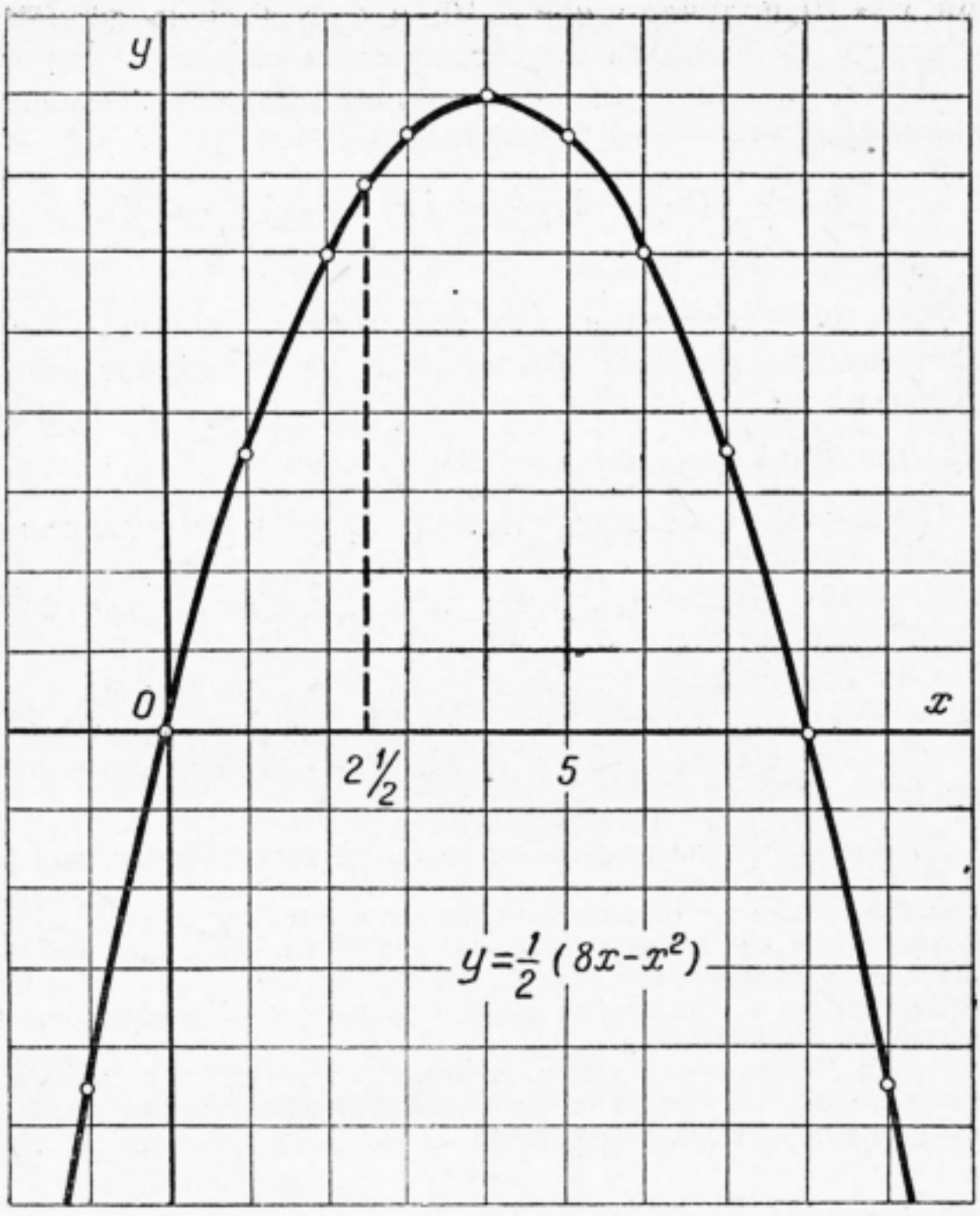
Посмотрим, как можно наметить его график.

Ничего не стоит решить уравнение относительно буквы y:

$$y = \frac{1}{2}(8x - x^2).$$

Дальше можно составить табличку числовых значений переменной y, соответствующих заранее назначенным значениям переменной x:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	$3\frac{1}{2}$	6	$7\frac{1}{2}$	8	$7\frac{1}{2}$	6	$3\frac{1}{2}$	0



Черт. 39

Каждую полученную точку сейчас же отмечают на чертеже. Точки располагаются с известной правильностью. Чертеж 39 показывает, что при возрастании значений x от 0 до 4 значения y также возрастают от 0 до 8; затем при дальнейшем возрастании x от 4 до 8 значения y убывают от 8 до 0.

При $x = 9$ получаем уже отрицательное значение: $y = -4\frac{1}{2}$, придется поставить точку ниже оси Ox.

При $x = 10$ получаем $y = -10$; и еще дальше значения y быстро убывают (в алгебраическом смысле).

Можно букве x давать и отрицательные значения; например, при $x = -1$ будем иметь

$$y = \frac{1}{2}(8 \cdot (-1) - (-1)^2) = -4\frac{1}{2}$$

и т. д.

Полезно убедиться, что точки, получающиеся при подстановке дробных значений x, не нарушают общей правильности в расположении точек графика (например, при $x = 2\frac{1}{2}$ получаем $y = 6\frac{7}{8}$).

Поставим себе еще и такой вопрос: имеет ли наш график какие-нибудь точки на оси Ox, кроме двух, уже найденных? Чтобы получить ответ, достаточно в уравнении положить $y = 0$ и решить полученное уравнение $x^2 = 8x$ относительно x. Мы получаем два корня: $x = 0$ и $x = 8$. Иных корней нет. Значит, график пересекается с осью Ox только в двух, уже ранее найденных точках.

Хотя мы отметили на чертеже не свыше десятка точек, положение которых нам известно вполне точно, тем не менее правильность их расположения не оставляет сомнений в том, что все остальные, не отмеченные нами, точки графика лежат на некоторой плавной кривой, проходящей через отмеченные точки.

Эта кривая и есть график нашего уравнения. Провести ее от руки не представит труда.

Правда, полученная таким образом кривая даст возможность лишь приближенно судить о положении тех точек графика, координаты которых не были вычислены.

Упражнение 157.

493. Предварительно решив данное уравнение относительно буквы y, наметьте следующие графики. Давайте букве x целые положительные значения из первого десятка и 2—3 дробных значения по собственному выбору. Округляйте в сотых. Масштаб: 1 = 1 клетке.

1) $xy - 10 = 0$, 2) $x - 10y = 0$, 3) $x^2 - 10xy - 100 = 0$.

Какова степень каждого из этих уравнений?

494. В том же масштабе наметьте таким же образом график уравнения

$$x^2y - 100(x - y) = 0.$$

Давайте букве x значения 0; 1; 2; ...; 20 и еще 2—3 промежуточных (выражающихся обыкновенными или десятичными дробями). Какова степень уравнения?

Использованный нами прием получения графика носит название построения графика по точкам.

Постараемся дать описание этого приема, не связывая его с каким-либо определенным примером. Пусть дано некоторое уравнение, содержащее буквы x и y; мы хотим знать, каков его график.

Посмотрим, существуют ли такие точки графика, которые имеют заранее назначенную абсциссу, скажем, $x = 1$. Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно подставить в уравнение вместо буквы x число 1 и решить полученное уравнение (содержащее теперь уже только одну букву) относительно буквы y. Корни этого уравнения дают нам ординаты всех точек графика, имеющих абсциссу $x = 1$, т. е. лежащих на одной и той же вертикальной прямой, отстоящей вправо от оси Oy на расстоянии 1. Продолжая поступать таким же образом, т. е. давая абсциссе x другие, заранее назначенные, значения, например, 2, 3, 4,..., можно найти все точки графика, расположенные на других вертикальных прямых. Обыкновенно поступают именно таким образом; при этом стараются облегчить себе работу тем, что предварительно решают данное уравнение относительно буквы y, т. е. приводят его к такому виду, чтобы в левой части была одна буква y, а правая зависела только от x, но не от y. Тогда нахождение точек графика сводится к выполнению числовых подстановок в правой части уравнения.

Разумеется, можно было бы также решить данное уравнение относительно буквы x и затем придавать ряд значений букве y.

Примечание. Иные уравнения — таковы, что не существует ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравнению. Тогда график отсутствует или представляет собою «пустое место». Этим свойством обладает, например, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$, у которого левая часть всегда положительна.

В редких случаях график может оказаться состоящим из одной точки или нескольких точек (в конечном числе). Так, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяется только одной парой значений $x = 0$, $y = 0$.

Действительно, каждый из квадратов x^2 и y^2 может быть или положительным числом, или нулем, но никак не отрицательным числом; сумма же $x^2 + y^2$ равна нулю только в том случае, если x и y одновременно равны нулю. Следовательно, весь график сводится к одной точке — началу O.

§ 58. Линейное уравнение с двумя переменными

Упражнение 158.

495. Наметьте на клетчатой бумаге графики следующих уравнений, решенных относительно y. Возьмите масштаб: 1 = 1 клетке. Подставляйте столько числовых значений переменной x (положительных и отрицательных), сколько вам понадобится для того, чтобы выяснить расположение графика.

В пределах чертежа отмечайте все точки графика, имеющие целые координаты («вершины» сетки).

1) $y = \frac{1}{2}x$, 2) $y = 2x$, 3) $y = -\frac{1}{2}x$, 4) $y = -2x$,

5) $y = \frac{2}{3}x$, 6) $y = -\frac{3}{4}x$, 7) $y = 5x$, 8) $y = -\frac{1}{5}x$.

Пересекаются ли графики с горизонтальной осью? В какой точке?

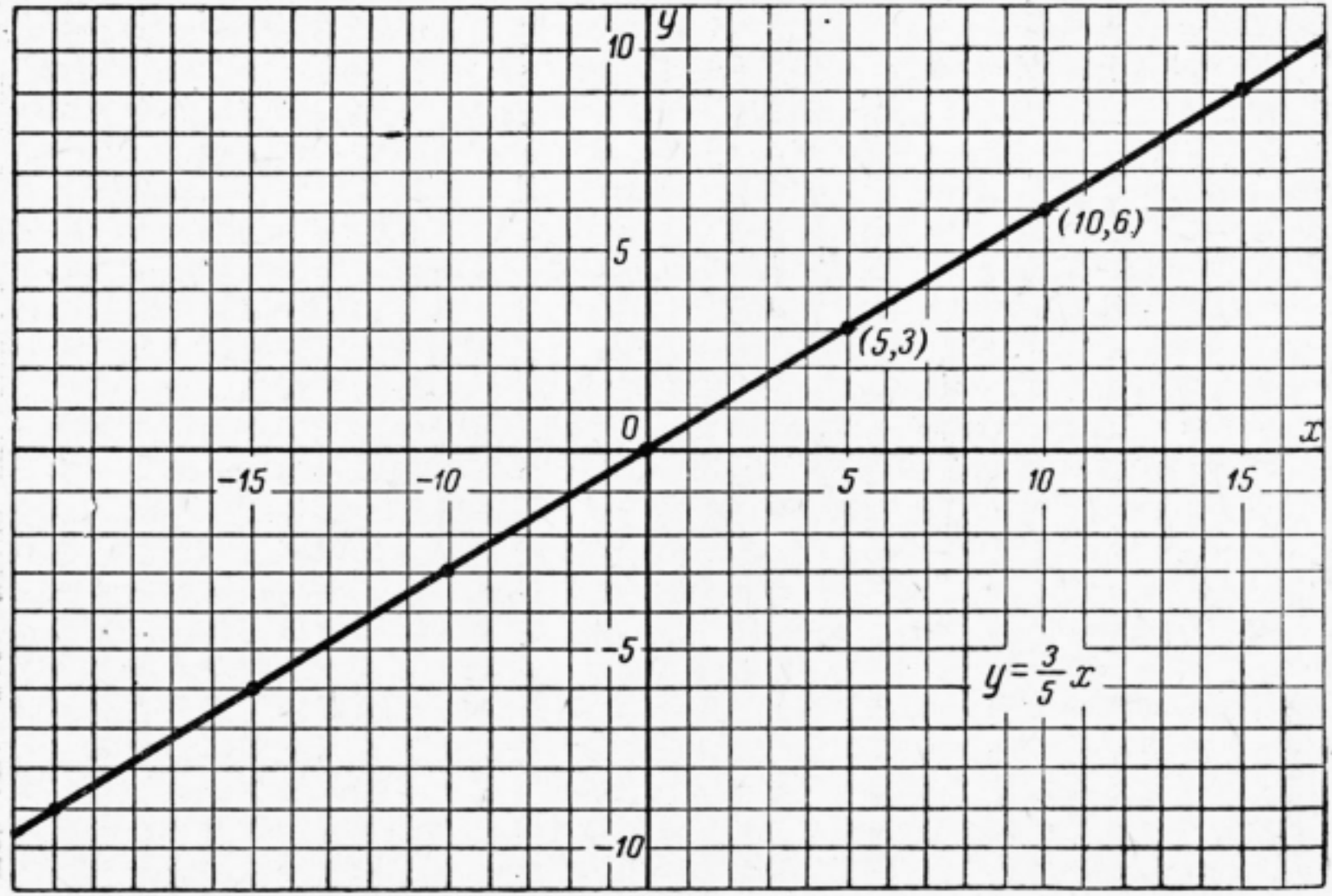
Какой вид имеют все эти графики? Что в них общего и что различного? Можно ли все их назвать графиками прямой пропорциональности (см. § 9)? В каких четвертях координатной плоскости они расположены? Можно ли было бы ответить на этот последний вопрос, судя только по внешнему виду уравнения?

Все рассмотренные уравнения имеют вид $y = mx$; какие значения коэффициента m были взяты в предыдущих примерах? Попробуйте сказать, какие свойства графика зависят от знака коэффициента m, от его абсолютного значения? Можно ли положить $m = 0$? Какое получится уравнение? Каков будет его график?

На чертеже 40 изображен график уравнения

$$y = \frac{3}{5}x. \qquad (1)$$

Это — прямая линия, проходящая через начало координат и расположенная в первой и третьей четвертях. Уравнение показывает, что величина y прямо пропорциональна величине x. Желая найти все точки графика с целыми координатами, мы даем букве x значения, кратные 5, и получаем точки: (0,0), (5,3), (10,6) и т. д. Эти точки отмечены на чертеже. Чтобы перейти от одной такой точки к следующей (считая вправо), доста-



Черт. 40

точно отсчитать «5 клеточек вправо и 3 — вверх». Коэффициент пропорциональности $m = \frac{3}{5}$ позволяет, таким образом, определить направление нашей прямой.

Если бы вместо уравнения (1) было задано, например, уравнение

$$y = \frac{4}{3}x, \tag{2}$$

то мы получили бы точки графика (с целыми координатами): (0,0), (3,4), (6,8) и т. д.; отмечая их одну за другой, мы отсчитывали бы «3 клетки вправо, 4 — вверх».

Рассмотрим еще уравнение

$$y = -\frac{3}{5}x. \tag{3}$$

При значениях x, кратных 5, получаем точки:

(0, 0), (5,—3), (10,—6) и т. д.

Отсчитывать нужно «5 клеток вправо и 3 — вниз». Прямая, являющаяся графиком этого уравнения, расположена во второй и в четвертой четвертях.

Из наших примеров можно сделать следующие общие заключения. Графиком уравнения вида

$$y = mx \tag{4}$$

является прямая линия, проходящая через начало O. Придавая уравнению вид

$$\frac{y}{x} = m,$$

мы убеждаемся, что коэффициент пропорциональности m представляет собою отношение ординаты любой точки графика к ее абсциссе *. Если $m>0$, то прямая проходит в первой и третьей четвертях; если $m<0$, то во второй и четвертой. При $m=0$ уравнение принимает вид $y=0$, и графиком тогда является ось Ox.

Чем меньше m по абсолютному значению, тем более п о л о г о расположена прямая (т. е. тем меньше острый угол, образованный ею с горизонтальной осью); напротив, чем больше m по абсолютному значению, тем более

---

* Можно сказать и так: коэффициент m в уравнении $y=mx$ равен значению ординаты y при значении абсциссы x, равном 1.

круто расположена прямая (тем упомянутый острый угол ближе к прямому).

Коэффициент m в уравнении (4) называется наклоном прямой, являющейся графиком этого уравнения.

Упражнение 159.

496. Наметьте графики следующих уравнений, решенных относительно буквы y:

1) $y=\frac{1}{2}x+3$, 2) $y=\frac{1}{2}x-3$, 3) $y=-\frac{1}{2}x+3$,

4) $y=-\frac{1}{2}x-3$, 5) $y=2x+1$, 6) $y=2x-1$,

7) $y=-2x+1$, 8) $y=-2x-1$.

Чем графики уравнения $y=\frac{1}{2}x+3$ и уравнения $y=\frac{1}{2}x-3$ отличаются от графика уравнения $y=\frac{1}{2}x$? Как каждый из этих графиков пересекается с осью Oy? Как каждый из этих графиков пересекается с осью Ox? Назовите координаты точек пересечения. В каких четвертях расположены графики?

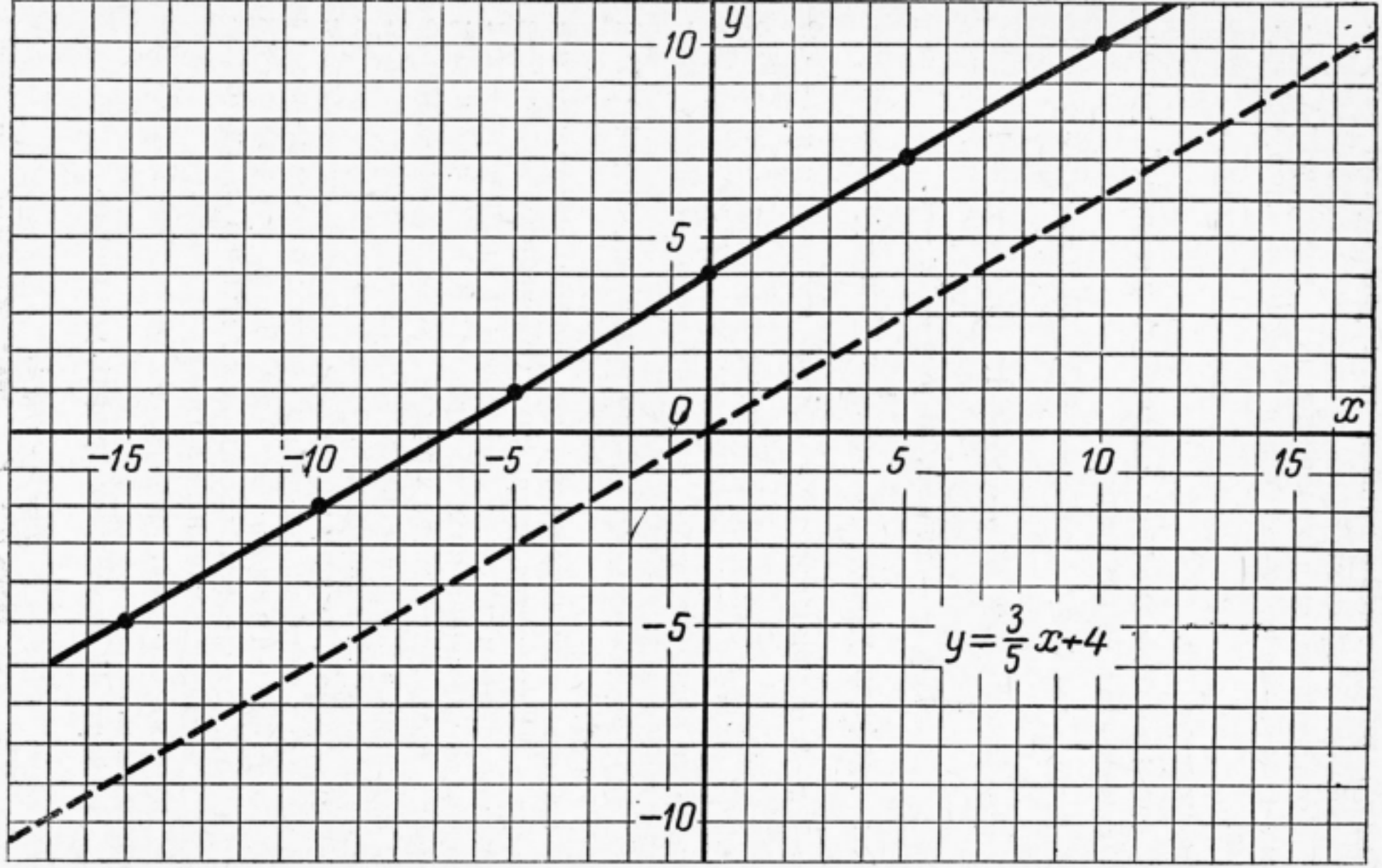
Такие же вопросы по поводу уравнений 3) и 4); 5) и 6); 7) и 8).

Обратим внимание на то, чем график уравнения $y=mx+n$ отличается от графика уравнения $y=mx$. При каждом данном значении абсциссы x соответствующая ордината увеличена на n единиц ($n>0$, $n<0$ или $n=0$); значит, получается снова прямая линия, но «сдвинутая» на n единиц в направлении оси Oy: она уже не проходит через начало O, а пересекает ось Oy в точке $N(0, n)$. Таким образом, направление прямой $y=mx+n$ то же, что и направление прямой $y=mx$: оно зависит от коэффициента m при x в уравнении прямой, решенном относительно y (называемого и в этом случае наклоном прямой).

Другими словами, прямые $y=mx+n$ и $y=mx$ параллельны.

На черт. 41 изображен график уравнения

$$y=\frac{3}{5}x+4.$$



Черт. 41

Это — прямая, параллельная прямой $y = \frac{3}{5}x$, но образующая на оси Oy отрезок, равный 4.

Упражнение 160.

497. Наметьте графики следующих линейных уравнений, предварительно решив их относительно буквы y:

1) $2x - 3y + 6 = 0$, 2) $5x + 4y - 20 = 0$,

3) $x - 2y - 8 = 0$, 4) $3x + 5y + 30 = 0$.

Каковы наклоны полученных прямых?

498. Наметьте графики следующих линейных уравнений:

1) $x - 5 = 0$, 2) $y + 8 = 0$, 3) $2x + 3 = 0$, 4) $5y - 1 = 0$.

Можно ли говорить о «наклоне» каждой из полученных прямых?

Пусть буква a обозначает какое угодно число. Постараемся уяснить себе, каков график уравнения

$$x = a.$$

Нам нужно установить, какова совокупность точек на плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют уравнению. Уравнение не удовлетворяется, если значение абсциссы x не равно a; если же оно равно a, то, каково бы ни было значение ординаты y, уравнение удовлетворяется. Это значит, что уравнению удовлетворяют координаты любой точки на прямой, параллельной оси Oy и отстоящей от этой оси вправо на расстоянии a.

Итак, уравнение вида

$$x = a$$

имеет графиком прямую, параллельную оси Oy.

Точно так же уравнение вида

$$y = b$$

имеет графиком прямую, параллельную оси Ox*.

---

* Тот же результат получается, если в уравнении $y=mx+n$ положим $m=0$ и заменим n через b.

Из предыдущего следует весьма важное заключение: всякое уравнение, линейное относительно букв x и y, именно, уравнение вида

$$Ax + By + C = 0$$

(где A, B и C — постоянные числа, причем A и B не равны нулю одновременно), имеет своим графиком прямую линию.

Действительно, если буква y на самом деле *входит* в уравнение (это значит, что B не равно нулю), то не представляет труда решить уравнение относительно y. Мы получим:

$$By = -Ax - C$$

и далее, деля все уравнение на B,

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B};$$

полагая затем

$$-\frac{A}{B} = m, \quad -\frac{C}{B} = n,$$

приходим к уравнению вида

$$y = mx + n,$$

которое, как нам уже известно, изображается прямой линией.

Если же буква y *отсутствует* в уравнении (т. е., если $B = 0$), то тогда уравнение $Ax + C = 0$ можно решить относительно буквы x (раз $B = 0$, то, по предположению, $A \neq 0$), и мы получим:

$$x = -\frac{C}{A},$$

или

$$x = a$$

(где для краткости положено $-\frac{C}{A} = a$). Графиком такого уравнения является совокупность точек, имеющих абсциссу a; это также прямая, но уже параллельная оси Oy.

Рассматривать случай, когда $A = B = 0$ не представляет интереса. В этом случае, если $C \neq 0$, заданное уравнение

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + C = 0$$

не удовлетворяется ни при каких значениях x и y и, значит, график этого уравнения представляет собою «пустое место»; если же $C = 0$, то напротив, уравнение

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$$

удовлетворяется при всех значениях x и y, и тогда его «график» — вся плоскость.

Раз известно, что линейное уравнение $Ax + By + C = 0$ изображается прямой линией, то для того, чтобы начертить эту линию на координатной плоскости (на листе клетчатой бумаги), нет необходимости в больших вычислениях.

В самом деле, прямая определяется двумя точками: значит, достаточно сделать две числовые подстановки.

Проще всего установить точки пересечения прямой с осями Ox и Oy. Пусть, например, дано уравнение $2x - 3y + 6 = 0$. Полагая $y = 0$, получим уравнение относительно x:

$$2x + 6 = 0,$$

из которого следует, что $x = -3$. Таким образом, найдена точка графика $P\ (-3,0)$, лежащая на оси Ox. Полагая $x = 0$, получим таким же образом:

$$-3y + 6 = 0,$$

откуда следует, что $y = 2$. Итак, найдена точка графика $Q\ (0,2)$, лежащая на оси Oy. Затем остается провести прямую через точки P и Q.

Указанный прием неудобен только в том случае, если точки P и Q находятся очень близко одна от другой, т. е. близки к началу O; он непригоден вовсе, если график проходит через начало ($C = 0$). В этих случаях следует делать какие-нибудь другие подстановки.

Например, чтобы построить график прямой

$$y = 0,37x,$$

заметим прежде всего, что она проходит через начало O; чтобы получить еще одну точку, положим $x = 10$ и получим $y = 3,7$; итак, прямая проходит через точку $(10;\ 3,7)$.

Упражнение 161.

499. Найти точки пересечения с осями прямых из упражнения 160, пункт 497.

500. Построить прямые, заданные следующими уравнениями, определяя точки пересечения с осями. Для контроля найти еще какую-нибудь третью точку.

1) $15x - 10y - 81 = 0$, 2) $14x + 11y + 70 = 0$,

3) $x + y = 10$.

501. Построить прямые

1) $5x - 8y = 0$, 2) $3x + 4y = 0$.

§ 59. Нелинейные уравнения с двумя переменными

Мы видели, что если заданное уравнение — л и н е й н о е (т. е. первой степени) относительно букв x и y, то его график — п р я м а я линия.

Дальнейшие примеры покажут, что если заданное уравнение — н е л и н е й н о е (т. е. степени второй или выше) относительно букв x и y, то его графиком являются к р и в ы е линии.

Степень уравнения относительно букв x и y называется п о р я д к о м соответствующей кривой.

Мы рассмотрим здесь только несколько наиболее простых и важных примеров кривых, преимущественно второго порядка.

Пример 1.

$$\boxed{xy = 1}$$

С этим уравнением мы уже встречались (см. § 10 и § 28, упр. 78, пункт 244). Оно говорит о том, что переменные величины x и y о б р а т н о п р о п о р ц и о н а л ь н ы.

Можно ли решить уравнение относительно y? Ответ — утвердительный, если только x имеет значение, не равное нулю. Но легко понять, что при $x = 0$ никакое значение y не может удовлетворить уравнению: это значит геометрически, что на оси Oy нет ни одной точки графика.

Итак, пусть теперь $x \neq 0$. Решим уравнение относительно y:

$$y = \frac{1}{x}.$$

Это равенство свидетельствует, что y есть «величина, обратная величине x». Посмотрим, как изменится величина, обратная x, при изменении самого x.

Ограничиваясь пока положительными значениями величины x, станем составлять табличку

x	1	2	3	4	5
y	1	$\frac{1}{2}=0{,}50$	$\frac{1}{3}\sim 0{,}33$	$\frac{1}{4}=0{,}25$	$\frac{1}{5}=0{,}20$

x	6	...	10	...	100	...
y	$\frac{1}{6}\sim 0{,}17$	...	$\frac{1}{10}=0{,}10$	...	$\frac{1}{100}=0{,}01$	...

и одновременно отмечать точки на чертеже. Ясно, что с увеличением x величина y убывает, приближаясь к нулю. Но значения 0 она не принимает.

Попробуем взять и дробные значения x:

x	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{9}$	...
y	$\frac{2}{7}\sim 0{,}29$	$\frac{2}{5}=0{,}40$	$\frac{3}{5}=0{,}60$	$\frac{9}{10}=0{,}90$	...

Получающиеся на чертеже точки имеют правильное расположение: через них можно с уверенностью провести плавную кривую. Менее ясно пока, как вести кривую влево, в промежутке от 0 до 1. Продолжим табличку:

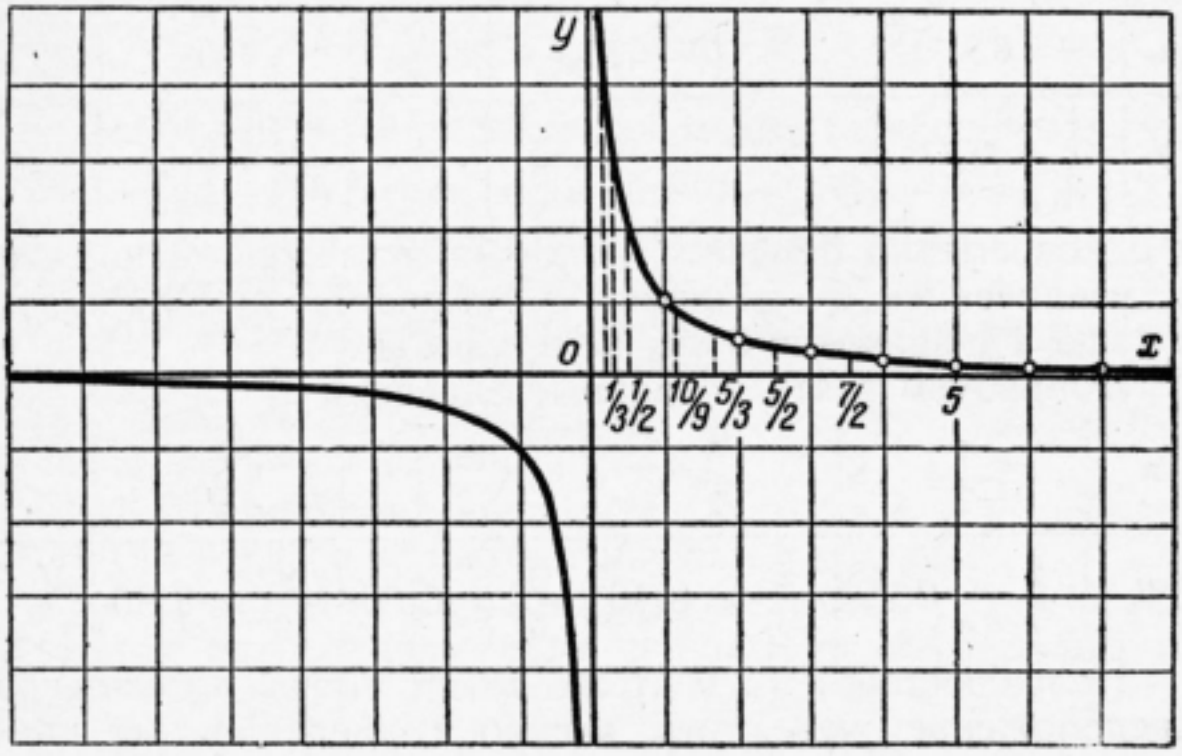
x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{10}$	...
y	2	3	4	...	10	...

и станем отмечать новые точки. Теперь становится ясно, что с убыванием положительных значений x величина y возрастает и притом неограниченно. Именно, y примет какое угодно большое значение, если только значение x будет достаточно малым*. Кривая (при движении справа налево) подни-

* Например, если мы хотим, чтобы значение y стало равным 100, то нужно будет положить $x=\frac{1}{100}$; и если хотим, чтобы y стало большим, чем 100, то нужно будет положить $x<\frac{1}{100}$.

мается вверх, примыкая к оси Oy, хотя, как мы видели, с этой осью общих точек не имеет (см. черт. 42).

Вся полученная кривая расположена в первой четверти. Если бы мы пожелали давать букве x отрицательные значения, то, составляя соответствующую



Черт. 42

таблицу и при этом производя деление по известным правилам (гл. IV, § 26), получили бы в третьей четверти другую «ветвь» кривой.

Обе «ветви», рассматриваемые совместно, образуют кривую, называемую «гиперболой».

Гипербола — кривая второго порядка.

Упражнение 162.

502. Начертив по точкам гиперболу $xy = 1$ на клетчатой бумаге в крупном масштабе ($1 = 10$ клеток), очень аккуратно, постарайтесь по чертежу на глаз, без таблиц и вычислений, определить величины, обратные следующим числам (округляйте до сотых):

3,7; 2,3; 2,75; 1,9; 1,35; 2,35; 1,28; 0,82; 0,59.

Проверьте по таблицам «обратных величин» или посредством деления.

503. Чем отличаются от графика $y=\frac{1}{x}$ графики следующих уравнений?

1) $y=\frac{10}{x}$, 2) $y=\frac{1}{2x}$, 3) $y=-\frac{1}{x}$, 4) $y=-\frac{2}{x}$.

Наметьте их все на одном чертеже в масштабе: 1 = 2 клеткам.

Пример 2.

$$\boxed{y=x^2}$$

Подставляя положительные значения x, получаем таблицу

x	0	1	2	3	4	5	6...
y	0	1	4	9	16	25	36...

Отметив соответствующие точки на чертеже, мы видим, что при увеличении абсциссы x ордината y очень быстро возрастает, причем сам график (если попробовать его провести) все больше выпрямляется. Напротив, ближе к началу O он довольно сильно искривлен. Подставляя еще значения $x=2\frac{1}{2}$, $x=1\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{2}$, мы получим:

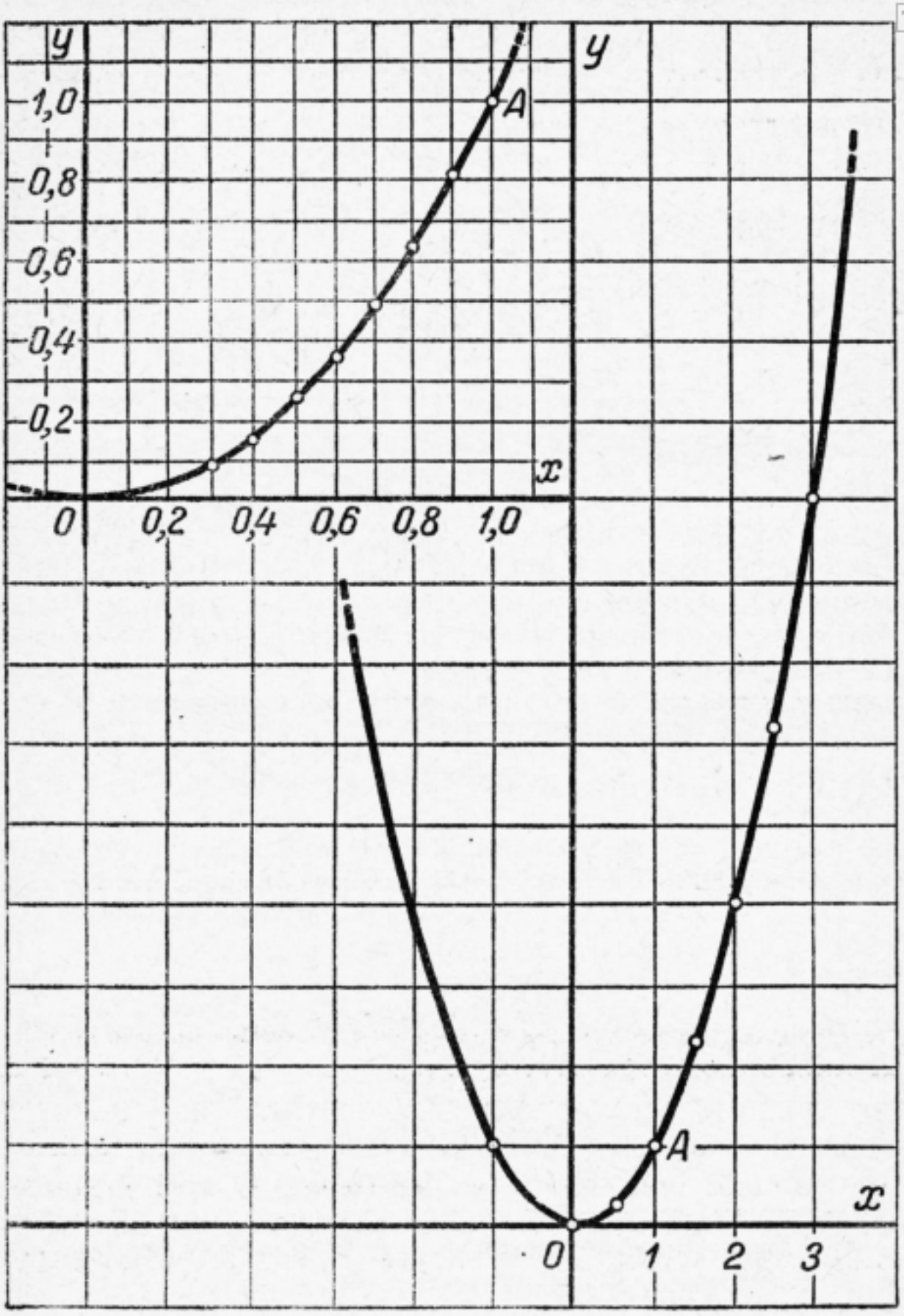
x	$2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$	$1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
y	$\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

В первой клеточке ($0<x<1$) сделаем подстановки даже через одну десятую:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1

Последняя табличка позволяет заключить, что, подходя к началу O, график тесно примыкает к оси Ox, касается ее.

Обращаясь к отрицательным значениям x, мы видим, что при возведении в квадрат отрицательного числа



Черт. 43

знак минус будет уничтожаться. Отсюда ясно, что кривая продолжается из первой четверти во вторую симметрично относительно вертикальной оси.

Полученная кривая носит название параболы (см. черт. 43).

Парабола — кривая также второго порядка.

Упражнение 163.

504. Начертите параболу $y = x^2$ на классной доске в масштабе $1 = 10$ *см*. Продолжите ось Ox до края доски; затем вообразите, что она продолжена до стены комнаты; и рассчитайте, на какую высоту поднялась бы парабола: *а*) у края доски, *б*) у правой стены комнаты.

505. Начертите сами на клетчатой бумаге параболу $y = x^2$; а) в масштабе: $1 = 1$ клетке; б) в масштабе $1 = 10$ клеткам (во втором случае на листе поместится лишь часть параболы, близкая к вершине или к началу O).

506. С помощью последних чертежей постарайтесь на глаз определить, чему примерно равны квадраты следующих чисел:

3,4; 4,8; 0,72; 0,39.

Проверьте вычислением.

507. Установите, чем отличаются от параболы $y = x^2$ графики следующих уравнений (постарайтесь поместить их на одном и том же чертеже):

$$1)\ y = \frac{1}{2}x^2,\quad 2)\ y = 2x^2,\quad 3)\ y = -x^2,$$

$$4)\ y = -\frac{1}{2}x^2,\quad 5)\ y = -2x^2.$$

508. Наметьте графики следующих уравнений:

1) $y = (x-2)^2$, 4) $y = (x+3)^2$, 7) $y = (x-5)^2$,
2) $y = (x-2)^2 + 1$, 5) $y = (x+3)^2 + 4$, 8) $y = (x-5)^2 + 2$
3) $y = (x-2)^2 - 1$, 6) $y = (x+3)^2 - 4$, 9) $y = (x-5)^2 - 2$

Расположите графики 1)—3) на одном чертеже, графики 4)—6) на другом, графики 7)—9) на третьем.

Раскройте всюду скобки.

Пересекаются ли кривые 1)—9) с осью Ox? В каких точках?

Все кривые в пунктах 6 и 7 — также параболы, только в различных расположениях.

509. Известно, что величины x и y связаны уравнением вида $y=Ax^2$. Заполните пустые места в табличке.

x	y
2	
3	
5	15
10	
	60

510. В уравнении $y = Ax^2$ подберите коэффициент A таким образом, чтобы кривая прошла через точку $M(2, 3)$; затем наметьте кривую.

511. Из листа фанеры вырезан квадрат со стороной, равной x *см*; он весит y граммов. Написать зависимость между x и y, зная, что квадрат со стороной, равной 5 *см*, весит 40 граммов.

* Пример 3.

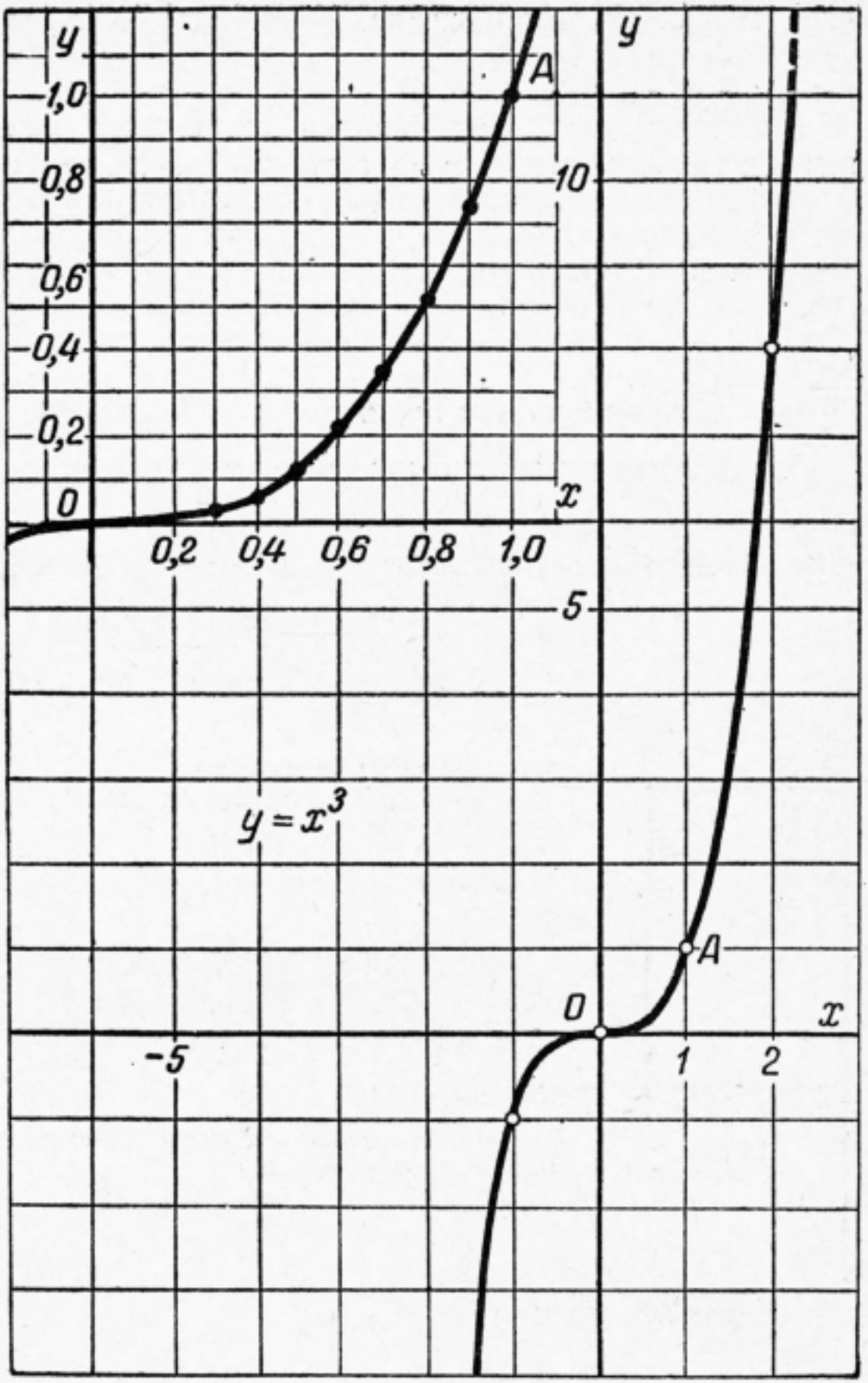
$$\boxed{y = x^3}$$

При подстановке больших значений x, как показывает следующая таблица, кубы возрастают гораздо быстрее, чем квадраты:

x	0	1	2	3	4	5	6 ...
y	0	1	8	27	64	125	216 ...

Напротив, при подстановке значений, близких к нулю, кубы убывают быстрее, чем квадраты:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5 ...
y	0	0,001	0,008	0,027	0,064	0,125...



Черт. 44

Поэтому кривая $y=x^3$ с возрастанием x поднимается вверх гораздо круче, чем парабола $y=x^2$; и при убывании x до нуля гораздо теснее примыкает к оси Ox.

На параболу $y=x^2$ эта кривая не похожа еще и в том отношении, что у нее отсутствует вертикальная ось симметрии; но имеется центр симметрии в начале O. Это зависит от того, что при возведении в куб отрицательного числа его абсолютное значение возводится в куб, но знак остается отрицательный.

Общий вид кривой $y=x^3$ (кубической параболы) показан на черт. 44.

Это — кривая *третьего* порядка.

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IX

Упражнение 164.

512. Напишите квадратные уравнения, имеющие данные корни:

1) 1 и (— 1), 2) 3 и 10,

3) (— 3) и (— 10), 4) 3 и $\frac{1}{3}$,

затем, обратно, решите их.

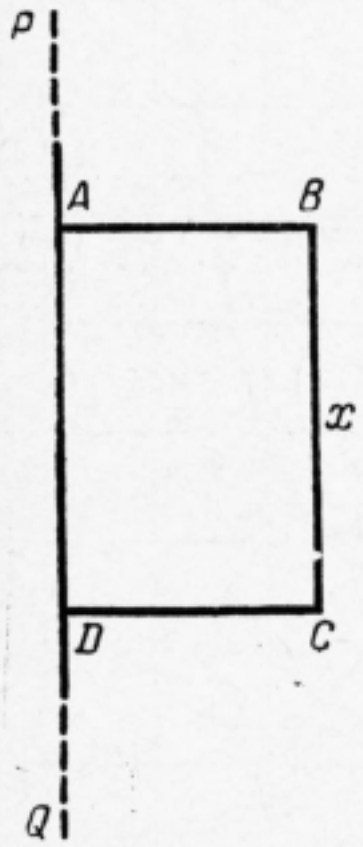
513. То же самое для кубических уравнений с корнями:

1) 0; 1 и (— 1), 2) 0; 3 и $\frac{1}{3}$.

514. Каковы графики уравнений:

1) $x+y=1$, 2) $x+y=0$,

3) $x+y=-1$, 4) $xy+x+y=0$?



Черт. 45

Упражнение 165.

515. Начертите сами на клетчатой бумаге график уравнения

$$y=x^3$$

в масштабе: а) 1=1 клетке, б) 1 = 10 клеткам.

516. С помощью этих чертежей определите приближенно на глаз, чему равны кубы чисел, приведенных в примере 506; проверьте вычислением.

* **517.** Для устройства палисадника решено к стенке PQ (см. черт. 45) приставить изгородь $ABCD$, длина которой равна 12 метрам. Каков должен быть отрезок изгороди $BC = x$, чтобы площадь, отведенная для палисадника, была возможно большей?

Указание. Выразить площадь через x, наметить, график, затем выделить квадрат.

Упражнение 166.

518. Вычислить значения величины

$$y = (x^2 - 1)^2$$

при значениях $x = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 1{,}5$.

Наметить график данного уравнения по этим точкам.

Глядя на график, скажите, при каких (приблизительно) значениях x величина y принимает значение 1,2, значение 0,5?

Глава X

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

§ 60. Общие замечания о дробях

Упражнение 167.

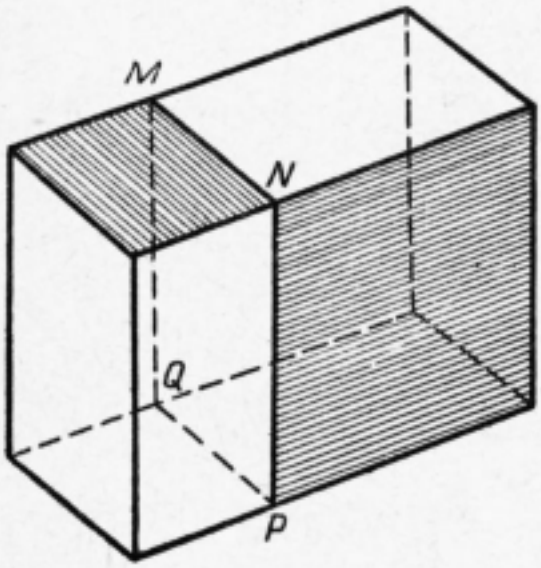
519. Сколько метров тесемки можно купить на n рублей, если один метр стоит p рублей? Обсудите также случаи, когда: 1) $n=0$, $p\neq 0$, 2) $p=0$, $n\neq 0$, 3) $p=0$, $n=0$.

520. Какова цена одного метра тесемки, если за a метров заплачено m рублей? Обсудите также случаи, когда: 1) $a\neq 0$, $m=0$, 2) $a=0$, $m=0$.

521. За 5 часов велосипедист проехал d километров. Сколько километров он проедет с той же скоростью за t часов?

522. Велосипедист за 5 часов проехал d километров, а самолет за 2 часа пролетел D километров. Каково отношение скорости самолета к скорости велосипеда?

523. Тело, имеющее форму прямоугольной призмы (см. черт. 46), разрезано сечением $MNPQ$ на две части таким образом, что $\frac{MN}{NP}=\frac{1}{2}$, а заштрихованные фигуры оказываются квадратами. Во сколько раз объем правой части больше объема левой? Во сколько раз площадь правого квадрата больше площади левого?



Черт. 46

524. За R рублей можно купить n апельсинов. Но

мандаринов можно купить на 5 штук больше, сэкономив при этом 3 рубля. Какова цена мандарина? Положите $R=12$, $n=5$.

Если алгебраическое выражение, составленное из букв и чисел, содержит, кроме трех первых действий — сложения, вычитания и умножения, — также еще и деление (на буквенное выражение), то такое выражение называют дробным. Примером могут служить выражения:

$$\frac{n}{p},\quad \frac{m}{a},\quad \frac{5D}{2d},\quad \frac{R-3}{n+5},\quad \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1},\quad \frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}.$$

Если последнее действие, указываемое выражением, есть деление, то такое выражение называется просто дробью (алгебраической дробью). При этом, если, кроме этого последнего действия, делений больше производить не нужно, дробь называется простой, в противном случае — сложной. Так, среди предыдущих примеров только последний нельзя назвать дробью (это сумма двух дробей); предпоследний есть сложная дробь, четыре предыдущих — простые дроби.

К сложным дробям мы обратимся несколько позднее (§ 65); сначала же будем заниматься только простыми.

Простая алгебраическая дробь есть отношение двух целых алгебраических выражений, являющихся числителем и знаменателем дроби.

Мы знаем (§ 16), что существует число, которое ни в коем случае не может быть знаменателем дроби: это — нуль; поэтому, если знаменатель простой алгебраической дроби оказывается тождественно равным нулю, то сама дробь не имеет смысла ни при каких значениях входящих букв. Примером служит дробь

$$\frac{a}{b-b}.$$

Очень часто встречается другой случай, когда знаменатель дроби тождественно не равен нулю, однако обращается в нуль при некоторых значениях входящих букв. При этих значениях букв дробь «теряет смысл» — не имеет никакого числового значения. Поэтому, написав дробь, всегда подразумевают, что число-

вые значения, придаваемые входящим буквам, таковы, что не обращают знаменатель в нуль.

Иногда это отмечают и в явной форме: например,

$$z = \frac{x+y}{x-y} \qquad (x \neq y).$$

В дальнейшем, говоря о данной дроби, мы всегда будем подразумевать, что буквам даются лишь такие значения, которые не обращают знаменатель в нуль.

Что касается числителя дроби, то исключать из рассмотрения те случаи, когда он обращается в нуль, излишне. Напомним (см. § 16), что если числитель дроби равен нулю, то и сама дробь равна нулю. Обратно, если дробь равна нулю, то непременно числитель равен нулю. Итак, *простая алгебраическая дробь обращается в нуль при тех и только при тех значениях входящих букв, при которых ее числитель обращается в нуль.*

Упражнение 168.

525. Установите, при каких значениях входящей буквы следующие целые алгебраические выражения принимают дробное значение $\frac{1}{4}$:

1) $2x$, 2) $1 - \frac{z}{2}$, 3) $10a - 1$, 4) $z^2 - 2$, 5) $u^2 + \frac{3}{2}u + \frac{1}{4}$.

526. Установите, при каких значениях входящей буквы следующие дробные выражения принимают целое значение 4:

1) $\frac{a-1}{a}$, 2) $\frac{1+b}{b}$, 3) $\frac{1}{1-y}$, 4) $\frac{x(4x+1)}{x^2+1}$.

527. Могут ли быть равны друг другу целое выражение $m+1$ и дробное выражение $\frac{5m-3}{m}$? При каких значениях m?

528. Каких значений нельзя давать входящим буквам в каждой из следующих дробей?

1) $\frac{a+b}{a}$, 2) $\frac{1}{1-y}$, 3) $\frac{1}{z+1}$, 4) $\frac{u+n}{u-n}$,

5) $\frac{x}{x^2-4x+3}$, 6) $\frac{x(4x+1)}{x^2+1}$.

529. Решите уравнения:

1) $\frac{2x-5}{x^3+1}=0$, 2) $\frac{(t-2)(t-3)}{t-1}=0$, 3) $\frac{z^2+z}{z^2+z+1}=0$.

530. Решите уравнения:

1) $\frac{x}{5}=\frac{7}{9}$, 2) $\frac{2}{x}=\frac{10}{5}$, 3) $\frac{18}{96}=\frac{x}{24}$, 4) $\frac{9x}{21}+\frac{27}{10}=0$,

5) $\frac{x}{15}=\frac{1,44}{1,92}$, 6) $\frac{25}{45x}-\frac{3x}{12}=0$,

7) $\frac{x}{0,02}-\frac{0,5}{x}=0$, 8) $\frac{x}{0,02}+\frac{0,5}{x}=0$.

Из арифметики отлично известно основное свойство дроби (частного); *дробь (частное) не изменяется, если числитель (делимое) и знаменатель (делитель) умножить или разделить на одно и то же число m.* Например, дробь $\frac{6}{2,5}$ не изменяется, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на 5:

$$\frac{6}{2,5}=\frac{6\cdot 5}{2,5\cdot 5}=\frac{6:5}{2,5:5}.$$

Число m может также быть дробным: если, допустим, m равно $\frac{3}{4}$, то умножить на m — значит сначала умножить на 3 и затем разделить на 4. Оно может быть и отрицательным: при умножении числителя и знаменателя на отрицательное число знаки числителя и знаменателя меняются, а знак дроби остается неизменным. Оно не может быть только равным нулю: понятно — почему.

В виде формулы основное свойство дроби записывается следующим образом:

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}, \qquad (m\neq 0). \qquad (*)$$

Основное свойство дроби можно выразить следующими словами: *если некоторое выражение входит множителем в числитель и в знаменатель алгебраической дроби, то при условии, что оно не равно нулю, можно на него «сократить» данную дробь:* значение дроби при этом не меняется. И, напротив, можно

умножить числитель и знаменатель алгебраической дроби на произвольное выражение при условии, что оно не обращается в нуль.

Примечание. Равенство (*), выражающее основное свойство дроби, считается тождеством, несмотря на то, что его левая часть теряет смысл при $m = 0$, и на то, что обе его части теряют смысл при $b = 0$.

Вообще за равенством двух алгебраических выражений принято сохранять наименование тождества и в том случае, если одно из этих выражений или оба теряют смысл при некоторых исключительных значениях входящих букв. Такое расширенное понимание тождества, между прочим, позволяет относить сокращение дроби на буквенное выражение к числу тождественных преобразований.

Руководствуясь основным свойством дроби, можно сокращать алгебраическую дробь (как и арифметическую) на буквенные или числовые множители, входящие одновременно в ее числитель и в ее знаменатель. Если таких множителей нет, дробь называют несократимой.

Например, дробь $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$ можно сократить на $x-1$:

$$\frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Левая и правая часть равенства тождественно равны (хотя левая теряет смысл при $x=1$, и обе — при $x=-1$).

Упражнение 169.

531. Проверьте основное свойство дроби (*) числовыми подстановками:

1) $a = 5,\ b = 7,\ m = 3$; 2) $a = \frac{2}{5},\ b = \frac{7}{8},\ m = \frac{5}{6}$;

3) $a = -4,\ b = 3,\ m = -5$.

532. Упростите следующие дроби:

1) $\frac{8\frac{1}{3}}{1\frac{2}{3}}$, 3) $\frac{5a}{3a}$, 5) $\frac{ab}{bc}$,

2) $\frac{12}{9}$, 4) $\frac{ab}{ac}$, 6) $\frac{3}{12H}$.

7) $\frac{m}{4m}$,

8) $\frac{3p}{p}$,

9) $\frac{a^2b}{ac^2}$,

10) $\frac{mnp}{mnq}$,

11) $\frac{Hrx}{Hsx}$,

12) $\frac{6u}{15v}$,

13) $\frac{21rs}{35st}$,

14) $\frac{2\frac{1}{4}x}{3\frac{1}{4}y}$,

15) $\frac{1,11M}{3,7N}$,

16) $\frac{a^2}{a}$,

17) $\frac{(a-b)x}{3(a-b)}$,

18) $\frac{a^3b}{b^2}$,

19) $\frac{m^3n^2p}{mn^2p^3}$,

20) $\frac{14Ax^3}{18Bxy^2}$,

21) $\frac{(r+s)^2(r-s)}{(r+s)(r-s)^2}$,

22) $\frac{(u-v)^2}{(u-v)^3}$,

23) $\frac{a^2-b^2}{a-b}$,

24) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$,

25) $\frac{m^2+2mn+n^2}{m+n}$,

26) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$,

27) $\frac{(t-1)(t+2)}{t(t-1)}$,

28) $\frac{u^2-5u+3}{u^2-u}$,

29) $\frac{-8S}{12}$,

30) $\frac{-5}{-15L}$,

31) $\frac{m^2+mn}{m^2-mn}$,

32) $\frac{3x+9}{6x-12}$,

33) $\frac{a-b}{b-a}$,

34) $\frac{p^2-q^2}{q-p}$,

35) $\frac{U^2-9}{15-5U}$,

36) $\frac{1-x^3}{1+x+x^2}$,

37) $\frac{a^2b-ab^2}{a^2b^3+a^3b^2}$,

38) $\frac{-1}{1-X}$,

39) $\frac{(r-s)^2}{(s-r)^2}$,

40) $\frac{(t-2u)^3}{(2u-t)^3}$.

533. Верно ли равенство $\frac{5+2}{3+5}=\frac{5}{3}$? При каком значении m верны следующие равенства:

1) $\frac{5+m}{3+m}=\frac{5}{3}$, 2) $\frac{5+m}{5+m}=\frac{5}{5}$, 3) $\frac{a+m}{b+m}=\frac{a}{b}$?

Мы переходим дальше к изучению действий над алгебраическими дробями — сложения, вычитания, умножения и деления. Выполнить одно из этих действий над данными простыми дробями — значит не только соединить эти дроби соответственным знаком, но также и произвести над полученным выражением тождественные преобразования, целью которых является представить это выражение в виде про-

стой дроби (или целого выражения). Производя действия над дробями, стараются вместе с тем сокращать дробь на общие множители числителя и знаменателя.

При изучении действий над дробями мы начнем с более легких — умножения и деления, а затем перейдем к более трудным — сложению и вычитанию. Те случаи, когда какие-нибудь из данных выражений оказываются целыми, мы не будем рассматривать отдельно, так как *всякое целое выражение можно представить в виде дробного, именно, подписывая под ним в качестве знаменателя единицу.*

§ 61. Умножение и деление дробей

Упражнение 170.

534. Проверить справедливость равенства $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ при значениях букв, указанных в следующей таблице:

	a	b	c	d
1)	4	15	5	6
2)	0,4	1,5	0,5	0,6
3)	$\frac{4}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$
4)	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$
5)	4	15	-5	6
6)	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{10}$

Правило умножения арифметических дробей выражается формулой:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad (I)$$

и словами может быть прочитано следующим образом: *произведение двух дробей равно дроби, у которой числитель равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей.*

Написанная выше формула справедлива не только в том случае, если входящие буквы имеют целые поло-

жительные значения, но и в том случае, если эти значения — дробные; она справедлива также и в том случае, если некоторые из входящих букв имеют отрицательные значения. Значение нуль, конечно, исключено для знаменателей, но не исключено для числителей.

Но раз равенство (1) имеет место при всех значениях входящих букв (кроме тех исключительных, при которых знаменатели дробей обращаются в нуль), то оно является тождеством.

Таким образом, правило умножения алгебраических дробей выражается той же формулой и формулируется теми же словами, что и правило умножения арифметических дробей.

Упражнение 171.

535. В формуле (I) положите $a = x$, $b = x - 1$, $c = x - 2$, $d = x - 3$. При каких значениях x справедливо полученное равенство? Как перемножить дроби $\frac{x}{x-1}$ и $\frac{x-2}{x-3}$?

536. В формуле (I) положите $c = m$, $d = 1$ и сформулируйте полученный результат словами. Как умножить алгебраическую дробь на какое-нибудь (хотя бы целое) алгебраическое выражение?

537. Выполнить указанные умножения:

1) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{11}$, 2) $\frac{2}{a} \cdot \frac{b}{5}$, 3) $\frac{3}{4} \cdot \frac{h}{k}$,

4) $\frac{1}{6} \cdot \frac{z}{2}$, 10) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a^2}{b^2}$, 16) $x \cdot \frac{3}{4}$,

5) $\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{n}$, 11) $\frac{2ab}{3c} \cdot \frac{6bc}{5a^2}$, 17) $x \cdot \frac{3}{x}$,

6) $\frac{3a}{2} \cdot \frac{8}{9}$, 12) $\frac{3}{5} \cdot 7$, 18) $a \cdot \frac{1}{a^2}$,

7) $\frac{p}{4} \cdot \frac{6}{p}$, 13) $\frac{a}{m} \cdot b$, 19) $a^3 \cdot \frac{1}{a^2}$,

8) $\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m}$, 14) $p \cdot \frac{r}{s}$, 20) $uv \cdot \frac{u}{v}$,

9) $\frac{pq}{2} \cdot \frac{p}{q}$, 15) $a \cdot \frac{1}{m}$, 21) $0{,}8t \cdot \frac{5t}{4s}$,

22) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$,

23) $\frac{a}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{5}$,

24) $2x^2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 5x$,

25) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c}$,

26) $\frac{pq}{r} \cdot \frac{qr}{p} \cdot \frac{pr}{q}$,

27) $\frac{4xyz}{3} \cdot \frac{6x^2}{5y^2} \cdot \frac{15}{8x}$,

28) $\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a-b}{a+b}$,

29) $(a^2-b^2) \cdot \frac{2}{ab} \cdot \frac{a-b}{a+b}$,

30) $\frac{x^2+y}{xy^2} \cdot 2xy \cdot \frac{x^2-y}{xy^2}$.

31) $\frac{x-y}{a-b} \cdot \frac{b-a}{x+y}$,

32) $\frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x^2}{x^2+1}$,

33) $\frac{Ax+Ay}{Ax+Bx} \cdot \frac{Ay+By}{Bx+By}$.

В алгебре вместо того, чтобы вычесть некоторое число, можно прибавить число, противоположное по знаку:

$$a - m = a + (-m).$$

Таким же образом *вместо того, чтобы разделить на некоторое число (не равное нулю), достаточно умножить на величину, обратную этому числу:*

$$a : m = a \cdot \frac{1}{m}.$$

Действительно, следуя правилу умножения, мы получаем:

$$a \cdot \frac{1}{m} = \frac{a}{m}.$$

Так как величина, обратная дроби $\frac{c}{d}$, есть дробь $\frac{d}{c}$, то правило деления дроби на дробь (подобное арифметическому) дается формулой:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}. \qquad (II)$$

Чтобы разделить на дробь, достаточно умножить на величину, ей обратную («разделить на числитель и умножить на знаменатель»).

Упражнение 172.

538. Выполните следующие деления:

1) $\frac{3}{5} : \frac{7}{11}$,

2) $\frac{2}{a} : \frac{b}{5}$,

3) $\frac{3}{4} : \frac{h}{k}$,

4) $\frac{1}{6} : \frac{z}{2}$,

5) $\frac{x}{y} : \frac{1}{n}$,

6) $\frac{3a}{2} : \frac{8}{9}$,

7) $\frac{p}{4} : \frac{6}{p}$,

8) $\frac{m}{n} : \frac{m}{n}$,

9) $\frac{pq}{2} : \frac{p}{q}$,

10) $\frac{a}{b} : \frac{a^2}{b^2}$,

11) $\frac{2ab}{3c} : \frac{6bc}{5a^2}$,

12) $\frac{3}{5} : 7$,

13) $\frac{a}{b} : m$,

14) $3 : \frac{5}{7}$,

15) $a : \frac{b}{m}$,

16) $\frac{x}{3} : 4$,

17) $x : \frac{3}{4}$,

18) $\frac{3}{x} : 4$,

19) $3 : \frac{x}{4}$,

20) $3 : \frac{4}{x}$,

21) $\frac{1}{a} : \frac{1}{a^2}$,

22) $a^2 : \frac{1}{a}$,

23) $\frac{1}{a} : a^2$,

24) $uv : \frac{u}{v}$,

25) $\frac{a^2b}{c} : \frac{ac}{b^2}$,

26) $2x^2yz : \frac{4x}{y^2}$,

27) $\frac{x}{2} : \frac{1}{3} y$,

28) $3p : \frac{9}{pq^2}$,

29) $0{,}84 \frac{x}{a} : 1{,}28 \frac{y}{a}$,

30) $\frac{a+b}{m} : \frac{a+b}{n}$,

31) $\frac{a^2-b^2}{ab} : \frac{a+b}{a-b}$,

32) $\frac{\left(\frac{2}{7}\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)}$,

33) $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}$,

34) $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$,

35) $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$.

Упражнение 173.

539. Уравнение

$$\frac{3}{10} x = \frac{5}{7}$$

можно решить двумя способами: или определяя сразу x

$$x = \frac{5}{7} : \frac{3}{10},$$

и затем деля дробь на дробь, или же умножая предварительно обе части уравнения на 70

$$21x = 50$$

и затем уже определяя x (второй способ удобнее).

Решите подобным же образом (двумя способами) уравнения:

$$1)\ \frac{c}{d}x = \frac{a}{b},\quad 2)\ \frac{s}{pq}x = \frac{t}{qr},\quad 3)\ \frac{x}{a} = \frac{2}{a^2},$$

$$4)\ \frac{2m}{a^3bc^2}x = \frac{3n}{a^2bc},\quad 5)\ \frac{a+b}{a-b}x = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

540. Деление дробей можно выполнять посредством «приведения к общему знаменателю». Например,

$$\frac{13}{50} : \frac{17}{20} = \frac{26}{100} : \frac{85}{100} = \frac{26}{85}.$$

Выполните этим способом следующие деления и проконтролируйте обычным способом:

$$1)\ \frac{a}{b} : \frac{c}{d},\quad 2)\ \frac{t}{qr} : \frac{s}{pq},\quad 3)\ \frac{2}{a^3} : \frac{1}{a^2},$$

$$4)\ \frac{3n}{a^2bc} : \frac{2m}{a^3bc^2},\quad 5)\ \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{a+b}{a-b}.$$

§ 62. Сложение и вычитание дробей

Сложить две алгебраические дроби означает — представить их сумму в виде одной алгебраической дроби; то же — для вычитания.

Если данные дроби имеют один и тот же знаменатель, то, чтобы сложить их — в алгебре, как и в арифметике, — достаточно составить дробь с тем же знаменателем и с числителем, равным сумме числителей:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

Это — распределительный закон деления, справедливый при любом m, не равном нулю (§ 16).

Если же складываемые дроби имеют различные знаменатели, то в алгебре, как и в арифметике, необходимо предварительно привести дроби к общему знаменателю. При этом пользуются основным свойством

дроби — основным тождеством (*) (§ 60), в котором мы теперь поменяем местами правую и левую части:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Желая сложить две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, мы всегда можем умножить числитель и знаменатель первой дроби на d, а числитель и знаменатель второй — на b, и тогда получим:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd};$$

дальше достаточно сложить числители:

$$\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Итак, мы получаем тождество

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}. \qquad \text{(III)}$$

Упражнение 174.

541. Подобным же образом, ссылаясь на распределительный закон деления и на основное свойство дроби, выведите общую формулу вычитания дробей:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}. \qquad \text{(IV)}$$

542. Объясните, каким путем из формулы (III) можно сразу получить формулу (IV).

543. Что получится, если в формулах (III) и (IV) положить 1) $b=1$; 2) $d=1$?

Что получится, если положить в тех же формулах $b=m$, $d=m$?

Упражнение 175.

544. Выполните следующие сложения и вычитания:

1) $\frac{3}{4} + \frac{5}{7}$, 4) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, 7) $\frac{3}{4} - \frac{5}{7}$,

2) $\frac{a}{4} + \frac{b}{7}$, 5) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, 8) $\frac{r}{2} - \frac{s}{3}$,

3) $\frac{n}{3} + \frac{n}{5}$, 6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, 9) $\frac{h}{8} - \frac{h}{9}$,

10) $\frac{m}{n} - \frac{n}{m}$,

11) $\frac{u}{p} - \frac{v}{q}$,

12) $\left(\frac{u}{p}\right)^2 - \left(\frac{v}{q}\right)^2$,

13) $\frac{m}{n} + \frac{2}{3}$,

14) $5 + \frac{3}{8}$,

15) $F + \frac{2F}{3}$,

16) $\frac{x}{4} + x$,

17) $y - \frac{5y}{3}$,

18) $\frac{t}{N} + 2t$,

19) $\frac{x}{y} + z$,

20) $2A - \frac{1}{2}$,

21) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$,

22) $\frac{p^2}{q^3} - \frac{q^2}{p^3}$,

23) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd}$,

24) $\frac{2}{AB} - \frac{3}{C}$,

25) $1 + \frac{1}{n^2}$,

26) $-\frac{3}{2r} - \frac{1}{5s}$,

27) $\frac{x}{5} + \frac{7}{x}$,

28) $\frac{T}{a} - \frac{a}{T}$,

29) $\frac{x}{ab} + \frac{3y^2}{ab^2}$,

30) $\frac{t}{z} + \frac{5t^2}{z^2}$,

31) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{7}$,

32) $\frac{a}{2} - \frac{a}{3} + \frac{a}{5}$,

33) $\frac{u}{v} + \frac{2u}{v} + \frac{3u}{w}$,

34) $\frac{2a}{m} + \frac{b}{n} - \frac{a}{m}$,

35) $\left(\frac{2x}{p} + \frac{3y}{q}\right) - \left(\frac{x}{p} - \frac{y}{q}\right)$.

Упражнение 176.

545. Выполните следующие сложения и вычитания:

1) $\frac{a+b}{m} + \frac{c+d}{n}$,

2) $\frac{m}{a+b} + \frac{n}{c+d}$,

3) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}$,

4) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$,

5) $\frac{1+x}{2} - \frac{1-x}{3}$,

6) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}$,

7) $\frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{2}$,

8) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$,

9) $\frac{2}{t-3} + \frac{3}{t-2}$,

10) $\frac{u}{u+1} - \frac{v}{v+1}$,

11) $\frac{x+y}{x} + \frac{x-y}{y}$,

12) $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}$,

13) $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R}$,

14) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$,

15) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$,

16) $\frac{M}{3}+\frac{2}{N}+\frac{1}{5}$,

17) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$,

18) $\frac{2}{y-1}+\frac{3}{y}-\frac{5}{y+1}$,

19) $t-\frac{1}{t-2}+\frac{2}{t-1}$,

20) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}$,

21) $\frac{c}{a+b}+1$,

22) $\frac{r^2+rs+s^2}{r^2-rs+s^2}-1$,

23) $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}=\frac{2ab}{(a+b)^2}$.

* **546.** Мой знакомый сказал: «Задумайте двузначное число. Прибавьте 10, возведите в квадрат, разделите на задуманное число и запишите то, что получилось. Отнимите 10 от задуманного числа, возведите в квадрат, разделите на задуманное число и то, что получилось, вычтите из того, что вы записали. Теперь я знаю, что из всего этого вышло».

Что именно вышло и как он это узнает?

При действиях с дробями часто приходится пользоваться важным частным случаем основного свойства дроби (*)

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},$$

именно, тем случаем, когда m равно (-1). В этом случае мы получаем:

$$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}.$$

Таким образом, *значение дроби не меняется при одновременном изменении знаков числителя и знаменателя.*

Так как

$$\frac{-a}{b}=\frac{(-1)\cdot a}{b}=(-1)\cdot\frac{a}{b}=-\frac{a}{b}$$

и

$$\frac{a}{-b}=\frac{a}{(-1)b}=\frac{1}{(-1)}\cdot\frac{a}{b}=-\frac{a}{b},$$

то можно заключить: *при изменении знака только числителя или только знаменателя знак дроби меняется.*

Отсюда следует: *если мы меняем знак знаменателя, то, чтобы значение дроби не изменилось, доста-*

точно еще изменить знак или числителя или самой дроби; если мы меняем знак числителя, то, чтобы значение дроби не изменилось, достаточно еще изменить знак или знаменателя или самой дроби. Например,

$$\frac{2}{5}=\frac{-2}{-5}=-\frac{-2}{5}=-\frac{2}{-5}.$$

Упражнение 177.

547. Скажите верно ли такое правило: «Чтобы изменить знак произведения, нужно изменить знак каждого множителя»? Если это правило неверно, то как его следует исправить? На каком основании?

548. Скажите, верно ли такое правило: «Чтобы изменить знак алгебраической суммы, нужно изменить знак перед каким-нибудь одним ее членом»? Если это правило неверно, как его следует исправить? На каком основании?

549. Выполните следующие действия:

$$1)\ \frac{2}{13}+\frac{(-5)}{13}+\frac{7}{(-13)}+\frac{(-10)}{(-13)}-\frac{4}{13}-\frac{(-6)}{13}-\frac{9}{(-13)}-\frac{(-8)}{(-13)},$$

$$2)\ \frac{a}{b}+\frac{(-a)}{b}+\frac{a}{(-b)}+\frac{(-a)}{(-b)}-3\,\frac{a}{b}-5\,\frac{(-a)}{(-b)}-2\,\frac{a}{(-b)}-6\,\frac{(-a)}{(-b)},$$

$$3)\ 1+\frac{a-2}{4-2a},\quad 4)\ \frac{1}{x+y}-\frac{y-x}{x^2-y^2},\quad 5)\ \frac{a-b}{a+b}+\frac{(b-a)^2}{b^2-a^2},$$

$$6)\ \frac{3x-6y-9}{3+2y-x}+\frac{-x+y-5}{2x^2-2y+10x}.$$

§ 63. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК)

В арифметике указывается правило для нахождения наибольшего общего делителя (НОД) и наименьшего общего кратного (НОК) нескольких целых чисел.

Пусть даны числа 2016, 3600 и 7560. Разложим их на простые множители:

$$2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7,$$
$$3600=2^4\cdot 3^2\cdot 5^2,$$
$$7560=2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7.$$

Составим новое число из данных чисел следующим образом: возьмем каждый встречающийся множитель в наименьшей из степеней, в которых он встречается *, и затем перемножим:

$$2^3 \cdot 3^2 = 72.$$

Полученное число 72 есть НОД данных чисел: частные от деления этих чисел на 72 уже не имеют общих делителей, отличных от 1.

Составим другое число из данных чисел, отбирая каждый встречающийся множитель в наибольшей из степеней, в которых он встречается, и перемножая:

$$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 151200.$$

Полученное число 151200 есть НОК данных чисел; частные от деления числа 151200 на эти числа уже не имеют общих делителей, отличных от 1.

Таким же образом можно составлять НОД и НОК алгебраических одночленных выражений с целыми коэффициентами, обращаясь при этом с буквами как с целыми числами (хотя буквы могут иметь какие угодно, в том числе и дробные, значения).

Так, если даны выражения a^5b^2d, $a^4b^2c^2$ и a^3b^3cd, то их наибольший общий делитель равен a^3b^2, а их наименьшее общее кратное равно $a^5b^3c^2d$. После деления данных выражений на их НОД получаются частные a^2c, ad^2 и bcd, уже не имеющие общих множителей. После деления НОК на данные числа получаются частные bc^2, abd и a^2c, также не имеющие общих множителей.

Наибольший общий делитель двух чисел может быть полезен в арифметике при сокращении дробей: найдя НОД числителя и знаменателя и сократив на него, мы сразу получаем несократимую дробь. При этом нахождение НОД стоит некоторого труда, так как не всегда очевидно с первого взгляда, каковы простые множители данного числа и в каких степенях они входят. В алгебре же такого рода применение НОД излишне,

---

* Если данный множитель не входит в какое-нибудь число, то считают иногда, что он входит «в нулевой степени». Например число 2016 содержит множитель 5 «в нулевой степени».

так как буквенные множители выписываются явно. Если, например, дана дробь

$$\frac{a^3b^2c^3}{a^2c^3d},$$

то НОД числителя и знаменателя равен a^2c^3; сокращая на него, получим $\frac{ab^2}{d}$. Но и без наибольшего общего делителя можно сократить сначала, например, на a^2, потом на c^3.

Зато в алгебре НОД приносит больше пользы при вынесении за скобку общих множителей многочленных выражений. Пусть дано выражение

$$a^5b^2c + a^3b^2c^4 + a^4bcd^2 + a^3c^4d.$$

Мы видим сразу, что НОД всех членов равен a^3c, и, вынося его за скобку, получаем:

$$a^3c(a^2b^2 + b^2c^3 + abd^2 + c^3d).$$

Что касается наименьшего общего кратного, то мы увидим дальше, что в алгебре, как и в арифметике, оно позволяет значительно упрощать записи при сложении и вычитании дробей.

Упражнение 178.

550. Найдите НОД и НОК следующих чисел или одночленных выражений:

1) 918, 1080, 1530 и 4500,
2) m^3np^2r, $m^2n^4pqr^2$ и m^2nq^7,
3) $8a$, $12b$ и $20c$,
4) 27, $9x$, $3x^2$ и x^3,
5) $45a^2bct$, $12ab^2ct$ и $36abc^2t$,
6) u, u^2 и u^3,
7) $m(p+q)$ и $m(p-q)$,
8) $a+b$, $a-b$ и a^2-b^2,
9) $a+b$ и $(a+b)^2$,
10) $4(a-b)^2$, $6(a-b)^3$ и $2(a+b)$.

551. Назовите НОД членов данной алгебраической суммы и вынесите его за скобку:

1) $84ap^2q + 72bpq^2$,
2) $105x^2y^2 - 75x^4y$,
3) $3h^2(a+b) + 2h^2(a-b)$,
4) $3h^2(a+b) + 2h(a+b)^3$,
5) $12x(x+y) - 6(x+y)^2 + 8(x^2-y^2) - 10y(x+y)$.

§ 64. Более сложные случаи сложения и вычитания дробей

При сложении и вычитании дробей удобно пользоваться приемом составления общего знаменателя посредством перемножения знаменателей данных дробей только в том случае, если каждые два, попарно взятые, знаменателя не имеют общих — ни буквенных, ни числовых — множителей. В других случаях употребление этого приема, хотя и дает верный результат, однако, никоим образом не может быть рекомендовано, так как ведет к лишним записям и потере времени. Общее правило таково: *в качестве общего знаменателя нескольких дробей следует брать НОК знаменателей всех данных дробей.* Предварительно необходимо каждый знаменатель представить как произведение отдельных множителей; в частности, если данный знаменатель — многочлен, нужно общие числовые и буквенные множители его членов выносить за скобку. Если встречаются многочленные множители, отличающиеся только знаком, то знак нужно менять, пользуясь уже известными (см. § 62) приемами.

После того как общий знаменатель найден, необходимо выяснить, на какой один и тот же «дополнительный множитель» придется умножить знаменатель и числитель каждой дроби для того, чтобы ее знаменатель стал равным выбранному общему знаменателю. Дальше, раз уже дроби приведены к общему знаменателю, сделать сложение или вычитание не представляет труда.

Пример 1.

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=?$$

Произведение знаменателей равно $a^2b^2c^2$. Однако есть возможность в качестве общего знаменателя взять более простое выражение, именно НОК знаменателей, равное abc. Дополнительным множителем для первой дроби является c, для второй a, для третьей b:

$$\frac{1}{ab}=\frac{c}{abc},\quad \frac{1}{bc}=\frac{a}{abc},\quad \frac{1}{ac}=\frac{b}{abc}.$$

Итак,

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{c}{abc}+\frac{a}{abc}+\frac{b}{abc}=\frac{a+b+c}{abc}.$$

Пример 2.

$$\frac{c^3}{12ab^2}+\frac{a^5}{8b^3c^2}=?$$

НОК знаменателей равно $24ab^3c^2$. Для первой дроби дополнительный множитель равен $2bc^2$, для второй $3a$. Итак,

$$\frac{c^3}{12ab^2}+\frac{a^5}{8b^3c^2}=\frac{2bc^5}{24ab^3c^2}+\frac{3a^6}{24ab^3c^2}=\frac{2bc^5+3a^6}{24ab^3c^2}.$$

Пример 3.

$$\frac{3a+5b}{6(a-b)}-\frac{a^2+b^2}{2(a^2-b^2)}+\frac{b}{3(b-a)}=?$$

Принимая во внимание, что $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ и что $(b-a)=-(a-b)$, мы можем переписать данное выражение в следующем виде:

$$\frac{3a+5b}{6(a-b)}-\frac{a^2+b^2}{2(a+b)(a-b)}-\frac{b}{3(a-b)}.$$

Теперь ясно, что наименьшее общее кратное знаменателей равно $6(a+b)(a-b)$. Дополнительные множители трех дробей соответственно равны $a+b$, 3 и $2(a+b)$. Итак, мы получаем сумму

$$\frac{(a+b)(3a+5b)-3(a^2+b^2)-2(a+b)b}{6(a-b)(a+b)},$$

или же, после упрощений в числителе и сокращения на 6,

$$\frac{ab}{a^2-b^2}.$$

Упражнение 179.

552. Выполните указанные ниже действия:

1) $\frac{14}{15} - \frac{1}{6} + \frac{3}{10}$,

2) $\frac{3}{ab} + \frac{2}{bc}$,

3) $\frac{x}{p} + \frac{y}{pq}$,

4) $\frac{a}{m} + \frac{ab}{mn} + \frac{b}{n}$,

5) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27}$,

6) $1 - \frac{2}{t} + \frac{3}{t^2}$,

7) $\frac{1}{H^2} + \frac{2}{HK} + \frac{1}{K^2}$,

8) $\frac{x^2}{2m} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{m}$,

9) $\frac{P}{18} - \frac{Q}{24}$,

10) $\frac{1}{2z} - \frac{3}{z^2} + \frac{1}{6z^3}$,

11) $\frac{1}{a^2b} + \frac{1}{b^2c}$,

12) $\frac{X}{a} - \frac{Y}{abc}$,

13) $\frac{x}{bc^2} + \frac{y}{a^2c} + \frac{z}{ab^2}$,

14) $\frac{a+b}{2a} + \frac{a-b}{5a}$,

15) $\frac{a+b}{2a} + \frac{a-b}{5b}$,

16) $\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$,

17) $\frac{M}{ab} - \frac{N}{b^2} + \frac{P}{c}$,

18) $\frac{m}{54a} + \frac{n}{84b}$,

19) $\frac{u^3}{r^2st^3} - \frac{2}{rs^2} - \frac{4}{s^2t}$,

20) $\frac{2u}{9g^4} + \frac{5uv}{6g^2h} - \frac{v^2}{4h^2}$.

553. Выполните указанные ниже действия:

1) $\frac{a}{am+bm} + \frac{b}{an+bn}$,

2) $\frac{a}{am+bm} - \frac{b}{cm+dm}$,

3) $\frac{2x-y}{x+2y} - \frac{x-y}{2x+4y}$,

4) $\frac{p-q}{6(p+q)^2} + \frac{1}{4(p+q)}$,

5) $\frac{x}{x+1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{x-1}$,

6) $\frac{1}{a-2} + \frac{c}{b(2-a)}$,

7) $1 + \frac{2}{1-2x} + \frac{4}{4x^2-4x+1}$,

8) $\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(c-d)(b-a)}$,

9) $\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2(x-3)}$,

10) $\frac{2}{z-1} - \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2}$,

11) $\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}$,

12) $\frac{2}{3(n+2)} - \frac{1}{2(n+3)} - \frac{1}{6(n+5)}$.

Упражнение 180.

554. Решите каждое из следующих уравнений, выполняя предварительно действия, указанные в его левой части:

$$1)\ \frac{x}{x+2}-\frac{5}{7}=0,$$

$$2)\ \frac{1}{x-1}+\frac{5}{x+1}=0,$$

$$3)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}=0,$$

$$4)\ \frac{8}{3(x+1)}+\frac{5}{6(x-2)}-\frac{9}{2x}=0,$$

$$5)\ \frac{2t+1}{t^2+t+1}-\frac{2}{t-1}=0.$$

555. Поставьте в формулу

$$(a)\quad y=\frac{1}{x-1}+\frac{5}{x+1}$$

значения x=0; 0,5; 0,8; 0,7; 0,6 и проследите, какие получаются значения y — положительные или отрицательные? Можно ли было бы, не производя арифметических вычислений, относительно любого заданного значения x сказать, какое значение y получится при подстановке в эту формулу — положительное или отрицательное?

Решение. Складывая дроби, можно выражению, обозначенному буквой y, придать вид

$$(a)\quad y=\frac{2(3x-2)}{(x-1)(x+1)},$$

или иначе, вынося за скобку коэффициент при x в числителе,

$$y=\frac{6\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(x-1)(x+1)}.$$

Без всяких вычислений можно сказать, каков знак y, если знать, каковы знаки отдельных множителей в числителе и знаменателе, именно, множителей 6, $x-\frac{2}{3}$, $x-1$ и $x+1$. Знак 6 положителен; что касается знака

$x-\frac{2}{3}$, то он положителен или отрицателен, смотря по тому, будет ли значение x больше или меньше, чем $\frac{2}{3}$. Подобным же образом решается вопрос о знаке каждого из множителей в знаменателе.

Пусть теперь, например, x равно 0,6. Тогда, как легко понять, знаки множителей 6, $x-\frac{2}{3}$, $x-1$ и $x+1$ (соответственно) суть +, —, —, +. Всего отрицательных знаков два; очевидно, значение y окажется положительным.

Напротив, при $x=0{,}7$ мы будем иметь знаки множителей +, +, —, +; так как отрицательный знак только один, то значение y будет отрицательным.

Подобным же образом определите знаки данных дробных выражений:

(*b*) $y=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$ при $x=2;\ 0{,}3;\ 0{,}8;\ -0{,}2;\ -2;$

(*c*) $y=\frac{8}{x+1}+\frac{7}{x-2}$ при $x=3;\quad 0;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ -\frac{3}{2};\ -2;$

При каких значениях x величина y в формулах (*a*), (*b*) и (*c*) принимает значение нуль? Каких значений вообще нельзя давать букве x в формулах (*a*), (*b*) и (*c*)?

§ 65. Сложные дроби

Если приходится выполнять деление над выражениями, уже содержащими дроби, то, записывая частное в виде дроби (с чертой), мы получаем сложную дробь. Для облегчения записи в таких случаях иногда пользуются знаком двоеточия, но смысл получаемого от этого, конечно, не изменяется. Например, если требуется разделить $a+\frac{b}{c}$ на $\frac{a}{c}-\frac{b}{d}$, то результат можно записать в виде

$$\frac{a+\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}-\frac{b}{d}} \quad \text{или} \quad \left(a+\frac{b}{c}\right):\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{d}\right).$$

Сложную дробь всегда можно преобразовать в простую. Для этого достаточно выполнить все действия в том порядке, как они указаны: сначала числитель и знаменатель сложной дроби записать

в виде простых дробей и затем разделить дробь на дробь, согласно правилу деления. Так, в нашем примере мы получим:

$$\frac{a+\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}-\frac{b}{d}}=\left(a+\frac{b}{c}\right):\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{d}\right)=\frac{ac+b}{c}:\frac{ad-bc}{cd}=\frac{(ac+b)\,d}{ad-bc}.$$

Однако такой способ преобразования сложной дроби в простую практически менее удобен, чем следующий. Пользуясь основным свойством дроби, умножим в нашем примере числитель и знаменатель на cd; тогда получим прежний результат:

$$\frac{a+\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}-\frac{b}{d}}=\frac{(ac+b)\,d}{ad-bc}.$$

В качестве множителя, на который умножаются и числитель и знаменатель данной сложной дроби, следует, конечно, выбирать НОК знаменателей всех дробей, содержащихся в числителе и знаменателе данной дроби.

Упражнение 181.

556. Следующие сложные дроби преобразуйте в простые (двумя способами) и сравните результаты:

1) $\dfrac{3+\frac{1}{8}}{2+\frac{5}{8}}$, 2) $\dfrac{5}{1-\frac{3}{10}}$, 3) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$, 4) $\dfrac{\frac{7}{2}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{2}+\frac{1}{5}}$,

5) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, 6) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}$, 7) $\dfrac{\frac{3}{4}}{5P+\frac{1}{4}}$, 8) $\dfrac{A+\frac{1}{n}}{A-\frac{1}{n}}$,

9) $\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}$, 10) $\dfrac{\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}}{\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}}$, 11) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}}$, 12) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$.

557. В следующих выражениях выполните указанные подстановки:

1) $y=\dfrac{2+x}{1-2x}$; $x=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{4}{7}$, $\dfrac{1}{10}$, $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{p}{q}$;

2) $y=\dfrac{1+x^2}{2+x^2}$; $x=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{p}{q}$;

3) $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$; $x=\dfrac{t+1}{t-1}$.

Всякое дробное алгебраическое выражение содержит лишь конечное число делений. Поэтому, сколько бы ни было «этажей» в сложной дроби, такую дробь всегда можно преобразовать в простую, постепенно уничтожая «этажи». Отсюда следует, что *дробное алгебраическое выражение всегда может быть представлено в виде отношения двух целых алгебраических выражений.*

§ 66. Все действия с дробями

Упражнение 182.

558. Выполнить указанные преобразования:

1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$,

2) $\left(y-\frac{1}{y}\right)^2$,

3) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2$,

4) $\left(\frac{a}{b}+1\right)^2+\left(\frac{a}{b}-1\right)^2$,

5) $\left(\frac{a}{b}+1\right)^2-\left(\frac{a}{b}-1\right)^2$,

6) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+b}\right)$,

7) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+b}\right)$,

8) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):(x+y)$,

9) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right):\frac{x-y}{x+y}$,

10) $\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)$,

11) $\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$,

12) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right):\left(\frac{1}{ax}-1\right)$,

13) $\left(\frac{m+n}{n}-\frac{m}{m+n}\right):\left(\frac{m+n}{m}-\frac{n}{m+n}\right)$,

14) $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)$,

15) $\left(1+\frac{x+1}{x-1}\right)\left(1+\frac{x+2}{x-2}\right)$,

16) $\left(\frac{a}{a+2b}+1\right)\left(\frac{a}{a+3b}+2\right)$.

Упражнение 183.

559. Предположим, что значения x, оставаясь положительными, будут возрастать (увеличиваться). Скажите относительно каждого из следующих выражений, будут ли при этом его значения возрастать или убывать?

1) $\frac{3}{x}$, 2) $\frac{1}{x+5}$, 3) $1+\frac{2}{x}$, 4) $\frac{2}{3x+5}$, 5) $\frac{x+3}{2}$,

6) $\frac{x^2}{4}$, 7) $\frac{1}{x^2+x+1}$, 8) $\frac{1+x^3}{3}-\frac{1}{4}$, 9) $\frac{x+x^2}{1+x}$.

560. Тот же вопрос по поводу следующих выражений — в предположении, что входящая переменная (буква) будет возрастать, оставаясь при этом удовлетворяющей неравенству в скобках.

1) $10 - x$, $(0 < x < 10)$; 5) $\frac{10+s}{10-t}$, $(0 < s < 10)$;

2) $1 + \frac{1}{5z^3}$, $(z > 0)$; 6) $\frac{2}{x^2-1}$, $(x > 1)$;

3) $1 - \frac{1}{N}$, $(N > 1)$; 7) $\frac{12}{6-x}$, $(0 < x < 6)$.

4) $u - \frac{1}{u}$, $(u > 1)$;

561. Если букве x давать положительные значения, меньшие, чем 6, то при увеличении этих значений выражение $\frac{12}{6-x}$ также увеличивается. При $x=2$ это выражение равно 3; значит, если значение x больше, чем 2, то это выражение становится больше, чем 3. Итак: при $x > 2$ мы имеем $\frac{12}{6-x} > 3$.

Доказать таким же образом, что

	при условии	справедливо неравенство
1)	$x > 7$	$10 - x < 3$
2)	$z > 1$	$1 + \frac{1}{5z^3} < \frac{6}{5}$
3)	$N > 3$	$1 - \frac{1}{N} > \frac{2}{3}$
4)	$u > 2$	$u - \frac{1}{u} > \frac{3}{2}$
5)	$0 < s < 3$	$\frac{10+s}{10-s} < \frac{13}{7}$
6)	$x > 5$	$\frac{2}{x^2-1} < \frac{1}{12}$

562. Не производя вычислений, замените звездочку знаком неравенства в следующих соотношениях:

$$1)\ \frac{(2,7)^2+1}{1,21} * \frac{(3,1)^2+1}{1,21},$$

$$2)\ \frac{10-2\frac{1}{4}}{7+2\frac{1}{4}} * \frac{10-2\frac{2}{3}}{7+2\frac{2}{3}},$$

$$3)\ \frac{1+0,32}{1-0,32} - \frac{1-0,32}{1+0,32} * \frac{1+0,41}{1-0,41} - \frac{1-0,41}{1+0,41}$$

Упражнение 184.

563. Подставляя в выражение

$$(a)\ y = \frac{3(x-1)}{x+2}$$

числовые значения $x=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, составьте таблицу соответствующих значений y и наметьте график (масштаб : 1 = 2 клеткам). Постарайтесь проследить за дальнейшим ходом графика. Глядя на график, скажите, как изменяется (возрастает или убывает) y при возрастании x?

564. Сделайте то же для формул:

$$(b)\ y = \frac{4(5-x)}{3+x},\quad (c)\ y = \frac{3(x+1)}{8-x},\quad (d)\ y = x + \frac{16}{x}.$$

Можно ли в примерах $(a)-(d)$ подставить значения $x = 0$, $x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{10}$, значения $x = 8$, $x = -2$, $y = -3$?

Упражнение 185.

565. Найдите числовые значения выражения

$$y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

при

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}.$$

Записывайте результаты в форме таблицы, одновременно намечайте график. Масштаб : 1 = 6 клеткам.

Всякое ли значение x можно подставить в этом примере?

Как изменяется y при возрастании x?

Что сделается с данным выражением, если заменить x через $(-x)$? Если заменить x через $\frac{1}{x}$? Как истолковать геометрически ответы на эти вопросы?

Какого порядка полученная кривая?

Упражнение 186.

566. Решить относительно x уравнение $ax = bx + c$.

Решение. Здесь x является главной буквой, a, b, c — параметры. Перенесем члены, содержащие x, в левую часть и вынесем x за скобку:

$$(a - b)\,x = c.$$

Дальше остается разделить на коэффициент при x, что возможно при условии $a - b \neq 0$:

$$x = \frac{c}{a - b}.$$

Сделаем проверку:

$$ax = \frac{ac}{a - b},\quad bx + c = \frac{ac}{a - b}.$$

Особенный случай, когда $a - b = 0$, т. е. $a = b$, нужно рассмотреть отдельно. Полагая в данном уравнении b равным a, мы получаем

$$ax = ax + c.$$

Если $c \neq 0$, то уравнение, очевидно, не имеет корней.

Если же $c = 0$, то уравнение удовлетворяется при любом значении x.

567. Решить каждое из следующих уравнений с буквенными параметрами (относительно одной из букв x, y или z). Сделать проверку, подставляя полученное выражение в данное уравнение. Рассмотреть отдельно особенные случаи, указанные в скобках:

1) $\frac{z}{c} - z = b$ (особенный случай: $c = 1$);

2) $ax + b = cx + d$ (особенный случай: $c = a$);

3) $\frac{py}{q} - \frac{qy}{p} = a$ (особенные случаи: $q = p$ и $q = -p$);

4) $\frac{a+x}{a+1} = \frac{b+x}{b+1}$ (особенный случай: $b = a$);

5) $(A+x)(B+x) = (C+x)(D+x)$ (особенный случай: $A+B=C+D$);

6) $(a+b+1)(x-1) - (a+b-1)(x+1) = 0$.

§ 67. Расположенные многочлены в числителе и знаменателе дроби. Выделение целой части из неправильной дроби

Выполняя указанные действия над данными, простыми или сложными, алгебраическими дробями, мы получаем в результате простую алгебраическую дробь. Если числители и знаменатели данных дробей — многочлены, расположенные по степеням одной и той же буквы, то числитель и знаменатель дроби, получающейся в результате выполнения действий, также представляются в виде многочленов, расположенных по степеням той же буквы.

После этого, если удастся в числителе и знаменателе обнаружить общие множители, на них следует сокращать полученную дробь.

Упражнение 187.

568. Выполнить указанные действия:

1) $\frac{1}{2(x-1)} - \frac{4}{x-2} + \frac{1}{2(x-3)}$,

2) $\frac{t+1}{t^2+t+1} - \frac{t-1}{t^2-t+1}$,

3) $\frac{4}{s} - \frac{5}{s+2} - \frac{5}{s-2} + \frac{6}{s^2+4}$,

4) $\frac{a+1}{3a^2+2} + \frac{1}{2a+3}$,

5) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$,

6) $\frac{z+1}{z^2+1} - \frac{z^2+1}{z^3+1}$,

7) $\frac{x^2-6x+8}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x^2+4x-12}$,

8) $\frac{u^2-2u-3}{u^2+6u-16} : \frac{u^2+2u-15}{u^2+2u-48}$.

Упражнение 188.

569. Выполнить указанные действия:

1) $\frac{x-a}{ax+1}+\frac{ax+1}{x-a}$,

2) $\frac{ax+b}{cx+d}+\frac{dx-c}{-bx+a}$,

3) $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x^2-px+q}{x^2+px+q}$,

4) $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$,

5) $\frac{L}{x-a}+\frac{M}{(x-a)^2}+\frac{N}{(x-a)^3}$.

Простая дробь, у которой числитель и знаменатель — многочлены, расположенные по степеням одной и той же буквы, называется: правильной, если степень числителя меньше, чем степень знаменателя; неправильной, если степень числителя больше или равна степени знаменателя.

Упражнение 189.

570. Выполните указанные преобразования над следующими выражениями; установите, каковы будут степени числителя и знаменателя в той дроби, которая получится; будет ли эта дробь правильной или неправильной:

1) $\frac{(x+1)(x+2)-2x(2-x)}{(x+2)(2-x)+2x(x+1)}$,

2) $1:\left(z+\frac{1}{z^2}\right)$,

3) $\frac{t(2t^2-3)-2t^2(t-1)+2(t^2-1)}{t(2t^2+3)-2t^2(t+1)+2(t^2+1)}$,

4) $\frac{(ax+1)(x-b)+(bx+1)(x-a)}{(ax+1)(x-b)-(bx+1)(x-a)}$.

* *Если дробь — неправильная, то ее всегда можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.* Это делается посредством деления числителя на знаменатель (§ 52).

Пусть P — числитель, Q — знаменатель дроби; обозначим через S частное и через R остаток, получающиеся при делении P на Q. Тогда имеет место тождество

$$P=QS+R.$$

Разделив обе части на Q, мы будет иметь новое тождество

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}.$$

Здесь S — многочлен; $\frac{P}{Q}$ — правильная дробь (так как степень остатка меньше степени делителя). Итак:

Неправильная дробь равна сумме: 1) частного, получающегося при делении числителя на знаменатель, и 2) правильной дроби, у которой числитель равен остатку при этом делении, а знаменатель — знаменателю данной дроби.

Например, деля многочлен $4x^3+18x^2+22x+11$ на двучлен $2x+3$, получаем:

$$4x^3 + 18x^2 + 22x + 11 = (2x^2 + 6x + 2) \cdot (2x + 3) + 5;$$

значит,

$$\frac{4x^3 + 18x^2 + 22x + 11}{2x + 3} = 2x^2 + 6x + 2 + \frac{5}{2x + 3}.$$

Описанное выше преобразование напоминает выделение целой части из неправильной арифметической дроби; сравните хотя бы с таким примером:

$$\frac{6031}{23} = 262 + \frac{5}{23}; (6031 = 4\,000 + 1\,800 + 220 + 11).$$

По указанной причине это преобразование называется выделением целой части из неправильной алгебраической дроби.

Упражнение 190.

571. Выделите целую часть из данной дроби $\frac{P}{Q}$.

Воспользуйтесь примерами 1) — 13) из упражнения 142 в § 52.

572. Выделите целую часть из дробей, в которых буква x считается главной

$$1)\frac{ax-1}{x-a};\quad 2)\frac{x-a}{ax-1},\ (a \neq 0);\quad 3)\frac{x^2+px+q}{x-c}.$$

§ 68. Вынесение за скобки каких угодно выражений

Заменяя в тождестве

$$(a + b)c = ac + bc$$

(распределительный закон умножения) a через $\frac{a}{c}$ и b через $\frac{b}{c}$, мы получим новое тождество

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)c=\frac{a}{c}\cdot c+\frac{b}{c}\cdot c;$$

выполняя в правой части умножения, затем переставляя множители в левой части и потом меняя местами правую и левую части, мы будем иметь, наконец, новое тождество

$$a+b=c\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right).$$

Оно говорит о следующем: *любое отличное от нуля число или алгебраическое выражение можно «вынести за скобки» из какой угодно алгебраической суммы.* Вынося некоторое выражение из алгебраической суммы за скобки, нужно каждый член суммы разделить на это выражение.

Пример 1. Вынести за скобки x из выражения

$$x^2+x+1.$$

Мы получаем:

$$x^2+x+1=x\left(x+1+\frac{1}{x}\right).$$

Пример 2. Из выражения $3a^2b-\frac{b^2}{2a}$ вынести за скобки $\frac{b}{2a}$.

Мы получаем:

$$3a^2b-\frac{b^2}{2a}=\frac{b}{2a}(6a^3-b).$$

В многочленах, расположенных по степеням одной буквы, часто бывает полезно выносить за скобки или старший член или свободный член.

Упражнение 191.

573. В следующих многочленах вынести за скобки старший член:

1) x^2+2x+5, 2) $20t^2-7t+\frac{1}{4}$, 3) $5z^4-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{25}$;

затем вычислить их значения при: 1) $x=10$, 2) $t=100$, 3) $z=1000$.

574. В тех же многочленах вынести за скобки свободный член, затем вычислить их значение при: 1) $x = 0{,}1$, 2) $t = 0{,}01$, 3) $z = 0{,}001$.

575. В следующих суммах дробей вынести за скобки дробь, у которой числитель равен наибольшему общему делителю числителей слагаемых дробей, а знаменатель — наименьшему общему кратному знаменателей:

1) $\frac{6a^2b}{5c^2} + \frac{2ab^3}{3cd^2} + \frac{14ab^2}{45d^3}$,

2) $\frac{1}{4} + \frac{2m}{3n} + \frac{3m^2}{2n^2} + \frac{4m^3}{n^3}$,

3) $\frac{1}{4} - \frac{3n}{2m} + \frac{3m^2}{2n^2} - \frac{4m^3}{n^3}$,

4) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$,

5) $\frac{1}{2}a^2bc + \frac{3}{4}ab^2c - \frac{5}{6}abc^2$,

6) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4}$,

7) $2mp - \frac{1}{3}np$,

8) $\frac{3}{2}a^3 + \frac{5}{7}ax$.

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ X

Упражнение 192.

*** 576.** Если из нескольких целых чисел (или алгебраических выражений) никакие два не имеют общих множителей, то каково наименьшее общее кратное всех данных чисел (выражений)?

Если наименьшее общее кратное нескольких целых чисел (или алгебраических выражений) равно их произведению, то могут ли какие-нибудь два числа (выражения) иметь общий множитель, отличный от единицы?

Если из нескольких целых чисел (или алгебраических выражений) никакие два не имеют общих множителей, то каков наибольший общий делитель всех данных чисел (выражений)?

Если наибольший общий делитель нескольких данных чисел (или алгебраических выражений) равен единице, то могут ли какие-нибудь два числа (выражения) иметь общий множитель, отличный от единицы?

Упражнение 193.

577. Выполнить указанные действия:

1) $\frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 1}{x^2 - 2x + 5} + \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x^2 - 6x + 10}$,

2) $\frac{x^2 + 1}{x^3 + x + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^3 - x + 1}$,

3) $\frac{6x^2 + 1}{6x^3 + 4x} - \frac{24x^3 + 6x}{24x^4 + 18x^2 + 1}$,

*4) $\frac{x^5 + 1}{x^6 + x^3 + x} - \frac{x^9 + x^4 + x^2}{x^{10} + x^7 + x^5 + x^3 + 1}$.

578. 1) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{1-x}$, 5) $(p-q):\frac{1}{q-p}$,

2) $\frac{5}{u-v}+\frac{3}{v-u}$, 6) $\left(-\frac{2}{ab}\right)\cdot\left(-\frac{a}{4}\right)$,

3) $\frac{p-q}{u-v}+\frac{r-s}{v-u}$, 7) $\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{x}{x^2-1}$.

4) $\frac{1}{p-q}:\frac{1}{q-p}$,

Упражнение 194.

579. Решить уравнения:

1) $\frac{2(5x-1)}{3}+\frac{3(2x-1)}{5}+\frac{5(3x-1)}{2}=\frac{124}{15}$;

2) $\frac{1}{3}(t^2+2t-5)-\frac{1}{4}(t^2-t+3)=\frac{1}{12}(t^2+4t-5)$,

3) $\frac{1}{2}-\frac{a-5}{3a^2}=\frac{3a+2}{6a}$,

4) $\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^3}=\frac{2}{2z-3}$.

580. Решить относительно x уравнения:

1) $\frac{5a}{x}=\frac{3p}{q}$, 5) $\frac{1-x}{1+x}=\frac{a}{b}$,

2) $\frac{x}{12}=\frac{7}{10}$, 6) $\frac{1-2x+3x^2}{1+3x+2x^2}=\frac{3}{2}$,

3) $\frac{mx}{n^3}=\frac{2}{n}$, 7) $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x-2}$.

4) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{1}{x}$,

Упражнение 195.

581. Решите следующие уравнения относительно буквы x:

1) $2x=a$, 5) $x+3(x+1)=q$, 9) $2x+3x=2c+3d$,

2) $x=m-2x$, 6) $x-a=b-x$, 10) $nx+x=1$,

3) $2x+1=n$, 7) $x+(x-a)=b$, 11) $px+qx=a$,

4) $2(x+1)=p$, 8) $x+h=2(x+k)$, 12) $x=l-3x$,

13) $x = l - mx$,

14) $\frac{x}{2} = \frac{t}{3} - x$,

15) $\frac{x}{3} + \frac{a}{2} = 1$,

16) $\frac{x-u}{2} = x - v$,

17) $\frac{x}{p} + \frac{x}{q} = 1$,

18) $\frac{s+x}{x} - 2 = 0$,

19) $x + y = 5x$,

20) $x + y = xy$,

21) $p(Ax - a) + q(Bx - b) + r(Cx - c) = 0$,

22) $(x + h)(x + l) - (x + k)^2 = 0$,

23) $(x - a)(x - c) + (x - b)(x - c) = 2(x - a)(x - b)$.

При всех значениях параметров каждое из них имеет одно и только одно решение?

Упражнение 196 а.

582. Следующие уравнения, решенные относительно буквы y, решите относительно буквы x:

1) $y = 2x + 3$,

2) $y = \frac{x+1}{2}$,

3) $y = 5(x - 4)$,

4) $y = \frac{1}{x}$,

5) $y = \frac{1}{x-2}$,

6) $y = \frac{x+1}{x}$,

7) $y = \frac{x}{x+1}$,

8) $y = mx + n$,

9) $y = m(x - a)$,

10) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

583. Следующие уравнения решите относительно каждой из входящих букв:

1) $x + y = 1$,

2) $2x + 5y = 20$,

3) $6x - 7y = 14$,

4) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$,

5) $xy - 1 = 0$,

6) $x - y = 2xy$,

7) $2x + 5y = xy$,

8) $2(x + 1) = 3(y - 1)$,

9) $\frac{x+y}{y} = \frac{4}{3}$,

10) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{5}$,

11) $x + y + z = 1$,

12) $xy - z = 0$,

13) $2x - 3y + 4z = 0$,

14) $xyz = 1$,

15) $xy + yz + xz = xyz$,

16) $\frac{u+v}{3} = \frac{u-v}{2}$,

17) $p - 4q = 1$,

18) $3r + 5 = 2s - 7$,

19) $a + bc = 0$,

20) $ab - \frac{2c}{3d} = 0$,

21) $S = \frac{1}{2}bh$,

22) $C = 2\pi R$,

23) $m = \frac{a+b}{2}$,

24) $S = \frac{ab}{c}$,

25) $S = \pi R^2$,

26) $V = abc$,

27) $9C - 5F + 160 = 0$,

28) $st - 12 = 0$,

29) $2x + 3y = 18$,

30) $P(Q + 1) = 1$,

31) $h - k = hk$,

32) $u(v + 2) + v(u - 2) = 1$,

33) $KL = 5L + 1$,

34) $xyz + 1 = xy + z$,

35) $pq + 2qr + 3pr = 0$,

36) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$,

37) $\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = \frac{D}{d}$.

Упражнение 196 б.

584. Какое число d нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{2}{5}$, чтобы получить дробь $\frac{3}{7}$?

Какое число d нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{2}{5}$, чтобы получить дробь $\frac{5}{14}$?

585. За день экскурсанты сделали 28 *км*, причем шли 5 часов до обеда и 2 часа после обеда. С какой скоростью v шли экскурсанты до обеда, если известно, что после обеда каждый час они проходили на 1 *км* меньше?

586. Пассажирский поезд вышел со станции через t часов после товарного и нагнал его еще через 2 часа. Чему равно t, если товарный поезд делает 25 *км* в час, а пассажирский 40 *км*?

587. Окружность заднего колеса экипажа равна 125 *см*. Какова длина окружности переднего колеса, если известно, что на протяжении километра переднее колесо сделало на 200 оборотов больше, чем заднее?

Упражнение 197.

588. Я задумал число x; отнял от него 3, потом разделил на 2 и получил результат a. Определите, чему равно x. Сделайте проверку, полагая: 1) $a = 2$, 2) $a = 5$, 3) $a = 100$, 4) дав букве a произвольное числовое значение.

589. Какое число d нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{2}{5}$, чтобы получить число n?

Сделайте проверку, полагая n равным $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, 2.

590. По данному периметру P фигуры, изображенной на черт. 36*в*, определить величину отрезка x. Сделайте проверку при значениях:

1) $s = 5$, $b = 7$, $P = 30$, 2) $s = 8$, $b = 5$, $P = 40$.

Упражнение 198.

591. Смешано 3 *кг* кофе первого сорта, ценой по a руб. за килограмм, и 2 *кг* кофе второго сорта, ценой по b руб. за килограмм. Какова цена c одного *кг* смеси? Сделайте проверку при значениях $a = 5$, $b = 3$.

592. Смешано p *кг* товара одного сорта, ценой по a руб. за килограмм, и q *кг* товара другого сорта, ценой по b руб. за килограмм. Какова цена c одного килограмма смеси?

Что станет с полученной формулой, если в ней положить:

1) $b = 0$, 2) $a = 0$, 3) $b = a$, 4) $p = q$, 5) $p = 0$, 6) $q = 0$?

593. Смешано p *кг* товара ценой по a руб. за килограмм, q *кг* товара ценой по b руб. за килограмм и r *кг* товара ценой по c руб. за килограмм. Какова цена килограмма смеси?

Положите в полученной формуле $a = b = c$. Что получится?

Упражнение 199.

594. Разбить число 150 на три слагаемых в отношении 2 : 3 : 5. Составляя уравнение, обозначьте первое слагаемое: 1) через x, 2) через $2t$.

595. Разделить N на две части в отношении $a : b$. Составляя уравнение, обозначьте первую часть: 1) через x, 2) через at.

596. Разделить N на три части x, y и z пропорционально числам a, b и c.

Решение: Если обозначим коэффициент пропорциональности через t, то части будут: $x = at$, $y = bt$, $z = ct$. Их сумма равна $at + bt + ct$. Но это и есть число N. Решая относительно t уравнение

$$at + bt + ct = N,$$

получаем:

$$t = \frac{N}{a + b + c}.$$

Отсюда следует, что

$$x = \frac{Na}{a + b + c}, \qquad y = \frac{Nb}{a + b + c}, \qquad z = \frac{Nc}{a + b + c}.$$

597. Разделить число 100 000 на 12 частей пропорционально числу дней в каждом из месяцев 1950 г.

Упражнение 200.

В следующих задачах предварительно напишите уравнение, связывающее между собой x и y, и затем решите его относительно каждой из этих букв.

598. Я задумал число x; прибавил к нему 5, затем умножил на 3 и получил число y. Каково значение y, если $x = 7$, 13, 20, $\frac{2}{3}$, (—8)? Каково значение x, если $y = 24$, 360, 10, (—2)?

599. Основание прямоугольника равно x *см*, высота равна y *см*, периметр равен 20 *см*. Каково y, если $x = 5{,}7,\ 9$ *см*? Каково x, если $y = 3,\ 6,\ 8$ *см*? Отметьте полученные точки $(x,\ y)$ на координатной сетке в масштабе: 2 клетки = 1.

600. Маляр может покрасить крышу за x часов, его ученик — за y часов. Они взялись за работу вместе и закончили ее за 10 часов. Каково y, если $x = 15,\ 12,\ 20,\ 11$? Каково x, если $y = 25,\ 50;\ 80,\ 16$?

Наметьте график в масштабе: 1 час = 2 клеткам.

Упражнение 201.

601. В следующих задачах предварительно составьте уравнение связывающее все величины, входящие в условие; затем решите его относительно к а ж д о й из букв.

1. Две подруги купили мандарины у одной и той же продавщицы. Лиза за b мандаринов заплатила a руб. Надя — за d мандаринов заплатила c руб.

Каково a, если $b = 10,\ c = 12,\ d = 15$?

« b, » $a = 16,\ c = 8,\ d = 10$?

» c, » $a = 4,\ b = 5,\ d = 35$?

» d, » $a = 8,\ b = 10,\ c = 25$?

602. При смешении p *кг* товара ценой по a руб. за килограмм и q *кг* товара ценой по b руб. за килограмм получилось $p + q$ *кг* товара ценой по c руб. за килограмм.

Каково c, если $a = 3,\ b = 2,\ p = 10,\ q = 12$?

» a, » $b = 4,\ c = 3,\ p = 10,\ q = 8$?

» b, » $a = 5,\ p = 2,\ q = 10,\ c = 3$?

603. Измерения прямоугольной призмы равны x, y и z (в метрах); ее объем равен V *м*^{3}.

Каково x, если $y = 4,\ z = \frac{1}{2},\ V = 6$?

» y, » $x = 1,\ z = 10,\ V = 10$?

» z, » $x = 2,\ y = 2,\ V = 0{,}1$?

Каковы x, y и z, если $x = y = z$ и $V = 8$?

Упражнение 202.

604. Даша может прополоть огород за 3 часа, Маша — за 7 часов. Во сколько часов будет прополот огород, если обе они возьмутся за работу одновременно.

605. Одна машинистка берется напечатать рукопись за a дней, другая за b дней. За сколько дней они справятся с работой, если возьмутся за нее обе сразу?

Решив задачу, подставьте значения: $a = 7,\ b = 8$.

606. Рабочий может выкачать воду из чана ведрами за h часов. Сколько времени ему потребовалось бы для этой же самой работы

при непрерывно идущем дожде, если допустить, что дождь мог бы наполнить пустой чан за k часов?

Решив задачу, подставьте значения: $h = 10$, $k = 24$.

607. Бригада состоит из трех рабочих. Первый из них может за a дней изготовить A деталей, второй — за b дней B деталей, третий — за c дней C деталей. Если они возьмутся за работу вместе, то 1) сколько деталей они изготовят за d дней? 2) за сколько дней они изготовят D деталей?

608. Убирают картошку в поле мужчины, женщины и подростки. Всю работу один мужчина мог бы выполнить за p часов, каждая женщина — за q часов, каждый подросток — за r часов. За сколько часов будет убрана картошка, если в работе примут участие X мужчин, Y женщин и Z подростков?

Упражнение 203.

609. Два самолета делают рейсы по одной и той же трассе между Москвой и Алма-Атой. Оба они одновременно вылетели из Москвы и одновременно вернулись, имея стоянку в Алма-Ате одной и той же продолжительности. Но первый самолет летел туда и обратно с нормальной скоростью v (*км* в час), тогда как скорость второго в прямом рейсе была на a (*км* в час) меньше нормальной, и потому в обратном рейсе, чтобы вернуться во-время, ему пришлось лететь со скоростью на b (*км* в час) больше нормальной.

Расстояние от Москвы до Алма-Аты можно обозначить буквой D.

1. Напишите соотношение, связывающее величины, упомянутые в условии задачи.

2. Определите v, если известно, что $a = 10$; $b = 12{,}5$.

3. Напишите выражение для v при произвольных a и b.

4. Считая, что $v = 100$, выразите b через a (на сколько нужно увеличить скорость в обратном рейсе, если в прямом она была уменьшена на a?). Вычислите b при значениях:

$$a = 10;\ 12;\ 13;\ 15;\ 9;\ 8;\ 20;\ 5;\ 2.$$

5. По этим данным наметьте график зависимости b от a в масштабе: 1 = 1 клетке. Продолжается ли график из правой полуплоскости Oab в левую? Как можно истолковать это продолжение?

* 6. Докажите, что нагнать утерянное время (даже теоретически) можно лишь при условии $a < 50$ и что при этом условии непременно $b > a$.

* 7. Практически возможность нагнать утерянное время ограничивается предельной скоростью самолета V. Каково наибольшее возможное значение a при данном значении V? При значениях $V = 300$? $V = 200$?

Глава XI

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 69. Основные понятия

Пусть задано равенство, содержащее две неизвестные буквы, например, x и y. Рассматривая его как уравнение относительно обеих букв, мы называем пару значений букв (x, y) решением этого уравнения, если при подстановке этих значений равенство оказывается верным, или, как говорят, «уравнение удовлетворяется» (см. § 57).

Так уравнение

$$3(x-2)-4(y-6)=0$$

имеет решение (6, 9) (10, 12) и другие.

Подобным же образом, если дано равенство, содержащее три неизвестные буквы, например, x, y и z, то, рассматривая его как уравнение относительно этих трех букв, мы его решением назовем тройку чисел (x, y, z), если при подстановке этих значений равенство оказывается верным («уравнение удовлетворяется»).

Так, уравнение

$$3(x-2)-4(y-6)+(z+1)=0$$

имеет решения (6, 9, -1), (10, 12, -1), (10, 13, 3) и многие другие.

Упражнение 204.

610. Удовлетворяется ли уравнение

$$3x-4y=24$$

следующими парами чисел?

1) $x = 12,\ y = 2$; 5) $x = 10,\ y = 1\frac{1}{2}$;

2) $x = 12,\ y = 3$; 6) $x = 16,\ y = 6$;

3) $x = 8,\ y = 4$; 7) $x = 4,\ y = 3$;

4) $x = 8,\ y = 0$; 8) $x = -4,\ y = -3$.

Какие его решения вы могли бы придумать сами?

611. Те же вопросы по отношению к уравнению

$$7(x-8)^2 + 16y^2 = 256.$$

612. Является ли пара чисел $x = 2,\ y = 3$ решением каждого из следующих уравнений?

1) $5x + 4y = 22$, 2) $3x + 2y = 12$, 3) $2x + y = 6$,

4) $2x - 5y = -6$, 5) $-3x + 2y = 5$, 6) $-3x + 2y = 0$,

7) $x^2 + y^2 = 13$, 8) $xy = x + y$.

Те же вопросы по отношению к паре чисел $x=2$, $y=2$.

613. Среди троек чисел:

1) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$; 2) $x = 0,\ y = 1,\ z = 0$;

3) $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$

выделите такие, которые являются решениями одного из уравнений:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, 2) $x + y - z = 0$, 3) $x + y + z = 3xyz$.

Если даны *два* уравнения, содержащих две неизвестные буквы, и требуется найти такую пару значений этих букв, которая была бы решением *обоих* уравнений, то говорят, что задана *система двух уравнений с двумя неизвестными*. Всякая пара значений, удовлетворяющая поставленному требованию, называется *решением системы*. Так, например, система уравнений

$$\begin{cases} xy = 12 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

имеет решение $x=3$, $y=4$; она имеет также и другое решение $x=2$, $y=6$.

Найти *какое-нибудь* решение системы — еще не значит решить систему: *решить систему — значит найти все ее решения*. Систему в предыдущем примере нельзя

считать решенной, так как, хотя найдено даже не одно, а два ее решения, однако, остается навыясненным, не существует ли еще иных решений.

Можно идти таким образом дальше и рассматривать системы трех уравнений с тремя неизвестными и т. п. Число уравнений в системе не должно обязательно совпадать с числом неизвестных: возможны, например, системы двух уравнений с тремя неизвестными и системы трех уравнений с двумя неизвестными.

Если речь идет о системе уравнений с тем или иным числом неизвестных букв, то при подсчете степени каждого уравнения все буквы, являющиеся неизвестными, считаются главными (см. § 54). Так, в приведенном выше примере первое уравнение — второй степени, второе — первой.

В курсе начальной алгебры изучаются только системы уравнений с двумя неизвестными, притом преимущественно такие системы, в состав которых входят уравнения только первой степени (линейные системы).

§ 70. Линейные системы. Способ подстановки

Пусть дано одно линейное уравнение с двумя неизвестными, например, уравнение

$$4x - 5y = -20. \qquad (I)$$

Оно имеет, очевидно, сколько угодно решений: в самом деле, чтобы получить решение, достаточно, дав одной из букв совершенно произвольное значение, подобрать значение другой буквы таким образом, чтобы уравнение удовлетворялось.

Предположим, что дано другое линейное уравнение с двумя неизвестными, скажем

$$3x + 2y = 18. \qquad (II)$$

Оно также имеет бесчисленное множество решений.

Рассмотрим теперь систему, составленную из этих двух уравнений

$$\begin{cases} 4x - 5y = -20 & (I) \\ 3x + 2y = 18. & (II) \end{cases}$$

Допустим, что решение системы существует: значит, существует такая пара чисел (x, y), которая одновременно удовлетворяет обоим уравнениям (I) и (II).

Посмотрим, какие следствия можно вывести из такого допущения. Решим одно из уравнений, например (II), относительно одной из букв, хотя бы относительно y; для этого вычтем из обеих частей (II) по $3x$ [прибавим по $(-3x)$] и затем полученное равенство разделим на 2; получаем равенство

$$y = -\frac{3}{2}x + 9. \qquad \text{(III)}$$

Если верны одновременно равенства (I) и (II), то верно и равенство (III). Это последнее равенство удобно в том отношении, что оно решено относительно y, и потому значение y может быть немедленно получено с его помощью, если только известно значение x.

Теперь «подставим» выражение (III), полученное для y, в уравнение (I). Это значит, что из равенств (I), (II) и (III) мы выводим дальнейшее следствие:

$$4x - 5\left(-\frac{3}{2}x + 9\right) = -20. \qquad \text{(IV)}$$

При выполнении указанной подстановки нет надобности ссылаться на какие-либо иные свойства равенства, кроме тех, которые нам уже известны. Именно, мы сначала умножаем обе части равенства (III) на (-5)

$$-5y = -5\left(-\frac{3}{2}x + 9\right);$$

затем прибавляя к обеим частям выражение $4x$, получаем

$$4x - 5y = 4x - 5\left(-\frac{3}{2}x + 9\right).$$

Согласно (I), левая часть этого равенства равна (-20); значит, и правая равна тому же; отсюда следует равенство (IV).

Уравнение (IV), являющееся следствием уравнений (I) и (II), уже не содержит буквы y (мы ее «исключили»).

Умножая, дальше, (IV) на 2, чтобы освободиться от дроби, и совершая тождественные преобразования в левой части, получим

$$23x = 50,$$

откуда, наконец, следует

$$x = \frac{50}{23}. \qquad \text{(V')}$$

Но в таком случае, «подставляя» значение x в формулу (III), мы приходим к равенству

$$y = \frac{132}{23}. \qquad (V'')$$

Таким образом, иных решений нашей системы (I—II), кроме решения

$$x = \frac{50}{23}, \qquad y = \frac{132}{23}, \qquad (V)$$

быть не может.

Подставляя значения x и y в уравнения (I—II)

$$4 \cdot \frac{50}{23} - 5 \cdot \frac{132}{23} = -20,$$

$$3 \cdot \frac{50}{23} + 2 \cdot \frac{132}{23} = 18,$$

мы убеждаемся, что данная система имеет единственное решение, определяемое формулами (V).

Следует ясно понимать, что, получив формулы (V), мы вовсе не имели права заключить из приведенных рассуждений, что система (I—II) имеет решение, определяемое этими формулами: заключить можно было бы только то, что никакая пара чисел, кроме указанных формулами (V), не представляет собой решения системы. То же, что пара чисел (V) есть решение, вытекает не иначе, как из последней подстановки.

Таким образом, подстановку полученных значений x, y в уравнениях (I—II) следует рассматривать не только как проверку правильности проделанных вычислений.

Упражнение 205.

614. Решить систему (I—II), определяя y из уравнения (I) и подставляя в уравнение (II).

615. Решить систему (I—II), определяя y из уравнения (II) и подставляя в уравнение (I).

616. Решить ситему (I—II), определяя x из уравнения (II) и подставляя в уравнение (I).

617. Решить систему (I—II), определяя x из уравнения (I) и подставляя в уравнение (II).

Какой из четырех способов проще с точки зрения вычислений?

Упражнение 206.

618. Решите следующие системы. При выборе определяемого неизвестного и уравнения, из которого будете его определять, руководствуйтесь соображением: выбирать член с наименьшим (по абсолютному значению) коэффициентом.

1) $\begin{cases} 7x - y = 5 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x + 3y = 10 \\ 7x + 11y = 20 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x + 3y = 29 \\ -3x + 13y = 50 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 15 \end{cases}$

619. Решите следующие системы:

1) $\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{5} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 7x + 5y = 15 \\ y = \frac{x}{10} + 1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{5} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{7} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + 3y = 24 \\ \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{8} = 1 \\ \frac{y}{x} = \frac{2}{3} \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{2} \\ \frac{x+2}{y+2} = \frac{5}{9} \end{cases}$

Упражнение 207.

Решите следующие задачи с помощью системы уравнений:

620. Маша купила 10 пуговиц и 3 катушки ниток, Наташа — 7 пуговиц и 5 катушек. При этом Маша заплатила 3 р. 45 к., Наташа — 4 р. 30 к. Какова цена пуговицы и какова цена катушки?

621. В клетке 17 голов и 54 ноги. Сколько в ней кроликов и сколько фазанов? (Древняя китайская задача).

622. От Москвы до Калинина 170 *км*. Из обоих городов одновременно навстречу друг другу выезжают два автомобиля и двигаются со скоростями, находящимися в отношении 5 : 7. На каком расстоянии от Москвы и от Калинина произойдет встреча?

623. Разница в возрасте братьев 4 года, но 9 лет назад младший брат был вдвое моложе старшего. Сколько лет тому и другому?

624. Если к числителю и знаменателю дроби прибавить по единице, то получится 2; если от числителя и от знаменателя отнять по единице, то получится $\frac{1}{2}$. Каковы числитель и знаменатель?

625. В прямоугольном треугольнике утроенный меньший угол на 12° больше, чем больший острый угол. Каковы эти углы?

§ 71. Способ уравнивания коэффициентов

Этот способ основывается на следующем свойстве равенств (которое не было упомянуто раньше): если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$.

Доказательство вытекает из свойств равенств, указанных в главе III, § 19, и в главе VI, § 37. Прибавив к обеим частям равенства $a = b$ по c, получим

$$a + c = b + c.$$

Прибавив таким же образом к обеим частям равенства $c = d$ по b, получим

$$c + b = d + b,$$

или

$$b + c = b + d.$$

В таком случае из двух полученных равенств вытекает равенство

$$a + c = b + d.$$

Кратко говорят: «равенства можно складывать почленно», понимая под этим, что если сложить два (или больше) верных равенства (левую часть с левой, правую — с правой), то новое равенство также будет верным.

Таким же образом можно почленно выполнять следующие операции над равенствами: «одно равенство можно вычесть из другого», «равенства можно перемножать», «одно равенство можно разделить на другое (если только левая и правая части второго равенства не равны нулю)».

Рассмотрим в качестве примера прежнюю систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 5y = -20 & \text{(I)} \\ 3x + 2y = 18 & \text{(II)} \end{cases}$$

Предположим, как и раньше, что система имеет решение, т. е. что существует пара чисел (x, y), удовлетворяющая одновременно обоим уравнениям (I) и (II).

Пользуясь способом подстановки, мы «исключали» букву y таким образом: определяли y из уравнений (II) и результат подставляли в уравнение (I).

Попробуем теперь «исключить» букву y из уравнений (I—II) сразу. С этой целью, посмотрев, каковы коэффициенты при y в уравнениях (I) и (II), умножим уравнение (I) на 2:

$$8x - 10y = -40, \qquad (I')$$

а уравнение (II) на 5:

$$15x + 10y = 90; \qquad (II')$$

затем, складывая между собою полученные равенства, мы придем к заключению, что

$$23x = 50,$$

и, значит,

$$x = \frac{50}{23}. \qquad (III')$$

С другой стороны, заметив, каковы коэффициенты в данных уравнениях при x, мы можем «исключить» букву x. Для этого умножим уравнение (I) на 3

$$12x - 15y = -60, \qquad (I'')$$

а уравнение (II) на 4

$$12x + 8y = 72 \qquad (II'')$$

и затем вычтем хотя бы (I′) из (II′), тогда получится

$$23y = 132,$$

или

$$y = \frac{132}{23}. \qquad (III'')$$

Этот способ, как и способ подстановки, приводит нас к следующему заключению. Если система (I—II) имеет решение, то этим решением может быть только пара чисел

$$x = \frac{50}{23}, \qquad y = \frac{132}{23}. \qquad (III)$$

Остается подставить эти числа в уравнения (I—II), чтобы убедиться, что они действительно дают нам решение.

Можно порекомендовать научиться решать линейные системы вида (I—II) указанным здесь способом, не выписывая при этом промежуточных результатов (I′—II′), (I″—II″) и вместе с тем действуя с помощью отрицательных чисел таким образом, чтобы избегать вычитаний.

Желая исключить y, справа за вертикальной чертой пишут множители 2 и 5 и подчеркивают запись

$$\begin{array}{l|l} 4x-5y=-20 & 2 \\ 3x+2y=18 & 5 \end{array} \qquad \begin{matrix} (I) \\ (II) \end{matrix}$$

Затем говорят: коэффициент при x (после умножения уравнения (I) на 2, уравнения (II) на 5 и последующего сложения) равен $4\cdot 2+3\cdot 5=23$; коэффициент при y (это — контроль) равен $(-5)\cdot 2+2\cdot 5$, т. е. обращается в нуль; свободный член (справа) равен $(-20)\cdot 2+18\cdot 5=50$. Результат записывается под чертой.

Далее добавляют еще вертикальную черту и за нею пишут, намереваясь исключить x, множители 3 и 4. Чтобы избежать вычитания, при одном из этих множителей ставят знак минус, именно в данном случае перед первым множителем 3, с таким расчетом, чтобы после сложения сразу получить положительный коэффициент при x. Проверяют, что при сложении коэффициент при x обращается в нуль, и подсчитывают коэффициент при y и свободный член.

Итак, запись в целом имеет вид:

$$\begin{array}{l|l|l} 4x-5y=-20 & 2 & -3 \\ 3x+2y=18 & 5 & 4 \end{array}$$

$$23x=50$$

$$23y=132$$

$$x=\frac{50}{23},\ y=\frac{132}{23}.$$

Примечание. В качестве множителей (в случае целых или буквенных коэффициентов при неизвестных) целесообразно брать, ради упрощения вычислений, дополнительные множители до НОК коэффициентов при исключаемом неизвестном.

Так, в следующем примере вместо схемы множителей

$$\begin{cases} 25x + 6y = 37 \\ 15x + 8y = 31 \end{cases} \begin{vmatrix} 8 & -15 \\ -6 & 25 \end{vmatrix}$$

следует взять более простую схему

$$\begin{cases} 25x + 6y = 37 \\ 15x + 8y = 31 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5. \end{vmatrix}$$

(НОК 6 и 8 равно 24; $\frac{24}{6} = 4$; $\frac{24}{8} = 3$.

НОК 25 и 15 равно 75; $\frac{75}{25} = 3$, $\frac{75}{15} = 5$).

Действуя способом уравнивания коэффициентов, решим линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными общего вида, т. е. с буквенными коэффициентами:

$$\begin{cases} Ax + By = M \\ Cx + Dy = N \end{cases} \qquad (*)$$

Приписывая множители за вертикальной чертой, как было указано раньше, мы наметим схему

$$\begin{cases} Ax + By = M \\ Cx + Dy = N \end{cases} \begin{vmatrix} D & -C \\ -B & A \end{vmatrix}$$

Умножение на множители $D, -B$ и последующее сложение дают:

$$(AD - BC)x = DM - BN.$$

Умножение на множители $-C$, A и последующее сложение дают:

$$(AD - BC)y = AN - CM.$$

Если только коэффициенты A, B, C, D удовлетворяют условию

$$AD - BC \neq 0, \qquad (**)$$

то отсюда сейчас же следует, что иного решения системы быть не может, кроме

$$x = \frac{DM - BN}{AD - BC}, \qquad y = \frac{AN - CM}{AD - BC}.$$

Чтобы убедиться в том, что эта пара значений (x, y) в самом деле есть решение системы, нужно сделать подстановку этих значений в данные уравнения. Подставим эти значения x и y в левую часть первого уравнения и сделаем упрощения; получим:

$$A \cdot \frac{DM - BN}{AD - BC} + B \cdot \frac{AN - CM}{AD - BC} = \frac{A(DM - BN) + B(AN - CM)}{AD - BC} =$$

$$= \frac{ADM - BCM}{AD - BC} = M.$$

Точно так же подстановка во второе уравнение дает:

$$C \cdot \frac{DM - BN}{AD - BC} + D \cdot \frac{AN - CM}{AD - BC} = \frac{C(DM - BN) + D(AN - CM)}{AD - BC} =$$

$$= \frac{-BCN + ADN}{AD - BC} = N.$$

Мы приходим, таким образом, к следующему важному результату, который нужно твердо помнить: каковы бы ни были коэффициенты в данной системе (*), лишь бы только выражение $AD - BC$ не равнялось нулю, система имеет одно и только одно решение.

Этот результат имеет общий характер — и именно по той причине, что все коэффициенты в уравнениях (*) были взяты в буквенной форме.

Полезно как-нибудь назвать те системы вида (*), для которых выполняется условие (**). Их называют регулярными.

Из сказанного следует практический вывод: в случае, если линейная система — регулярная, проверка посредством подстановки полученных значений неизвестных x и y в уравнения данной системы необходима лишь постольку, поскольку имеются сомнения в правильности проделанных вычислений.

Что касается систем, не являющихся регулярными, то мы ограничимся рассмотрением отдельных примеров.

§ 72. Особенные случаи

Пример 1.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & \text{(I)} \\ 4x + 6y = 7 & \text{(II)} \end{cases}$$

Действуя способом подстановки, определим x из уравнения (I):

$$x = \frac{5 - 3y}{2}$$

и подставим найденное выражение в уравнение (II):

$$4 \cdot \frac{5-3y}{2} + 6y = 7;$$

отсюда, после тождественных преобразований, получается:

$$10 = 7.$$

Далее остается провести следующее рассуждение: допустив, что данная система имеет решение, мы пришли к нелепому заключению, что 10 равно 7, так как 10 на самом деле не равно, то, значит, наше допущение было ошибочно. Итак, данная система не имеет ни одного решения.

Действуя способом уравнивания коэффициентов и исключая, например, y по схеме

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4y + 6y = 7 \end{cases} \begin{array}{c|c} & 2 \\ & -1, \end{array}$$

мы сталкиваемся с тем фактом, что одновременно с y исключается также и x, и мы получаем

$$0 = 3.$$

Следует рассуждение, подобное приведенному выше.

Пример 2.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & \text{(I)} \\ 4x + 6y = 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

Действуя способом подстановки, мы получаем:

$$x = \frac{5-3y}{2};$$

далее

$$4 \cdot \frac{5-3y}{2} + 6y = 10,$$

и после преобразований

$$10 = 10.$$

Действуя способом уравнивания коэффициентов, мы пришли бы к подобному же неоспоримому заключению.

Разберемся, в чем здесь дело.

Рассматривая данную систему внимательнее, мы видим, что равенство (II) есть следствие равенства (I): оно получается из него посредством умножения на 2. Поэтому всякое решение уравнения (I) есть вместе с тем и решение системы (I—II); но уравнение (I) имеет бесчисленное множество решений; значит, то же можно сказать и о системе (I—II).

Легко заметить, что в примерах 1 и 2 мы имеем дело как раз с системами, которые не являются регулярными: в самом деле,

$$AD - BC = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0.$$

Из этих примеров можно сделать следующий вывод: существуют нерегулярные системы, не имеющие ни одного решения

(несовместные системы), и существуют нерегулярные системы, имеющие бесчисленное множество решений (неопределенные системы).

В примере 1 мы встретились с несовместной системой, в примере 2 — с неопределенной.

§ 73. Геометрическое представление решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Мы решили (§ 70 и 71) систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 5y = -20 & \text{(I)} \\ 3x + 2y = 18, & \text{(II)} \end{cases}$$

и оказалось, что система имеет единственное решение

$$x = \frac{50}{23}, \qquad y = \frac{132}{23}. \qquad \text{(III)}$$

Что это значит геометрически?

Посмотрим, каковы графики уравнений (I) и (II).

Геометрическое место точек координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют уравнению (I), представляет собою прямую линию (§ 58); построить ее по точкам не представляет труда: достаточно, впрочем, отметить две точки пересечения с осями Ox и Oy, именно точки (—5, 0) и (0, 4), и затем провести через них прямую.

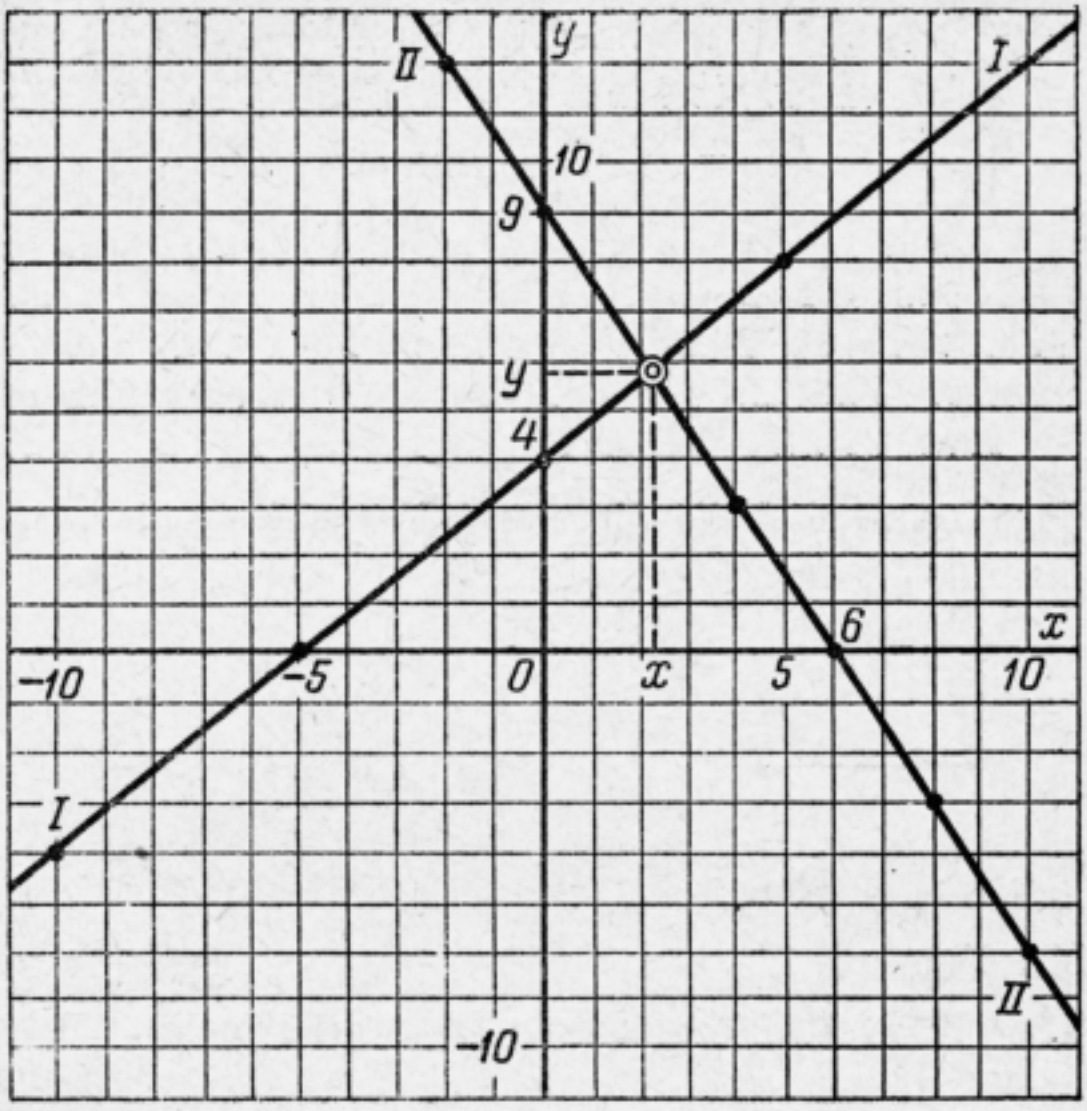
Точно так же геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (II), есть другая прямая: она пересекается с осями в точках (6, 0) и (0,9).

Оба графика изображены на черт. 47.

Решив систему (I—II), мы установили, что существует единственная пара чисел $x = \frac{50}{23}$, $y = \frac{132}{23}$, удовлетворяющая обоим уравнениям сразу: эти числа — координаты единственной точки, принадлежащей одновременно как графику (I), так и графику (II).

Записав эти числа в виде десятичных дробей (с округлением хотя бы в десятых)

$$\frac{50}{23} \sim 2{,}2; \qquad \frac{132}{23} \sim 5{,}7$$



Черт. 47

и взглянув на чертеж, мы видим, что таковы (примерно) в самом деле координаты точки пересечения прямых (I) и (II).

Итак, *каждому из данных линейных уравнений системы геометрически соответствует его график — прямая линия; решению системы — точка пересечения этих графиков.*

Упражнение 208.

626. Дайте геометрическое истолкование решению каждой из систем 1—6 в упражнении 206 § 70: наметьте графики уравнений системы (по точкам или пользуясь точками пересечения графиков с осями) и сравните координаты точки пересечения с полученным раньше решением системы.

Геометрическое представление решения системы позволяет проконтролировать правильность решения посредством несложных построений на координатной сетке (клетчатой бумаге).

В тех случаях, когда достаточно найти приближенное решение системы, но нужно сделать это по возможности скорее и без вычислений, на геометрическое построение можно смотреть и как на метод решения системы (графическое решение системы).

Упражнение 209.

627. Решить следующие системы графически:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 14 \\ 3x - 5y = 15, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2{,}7x + 8{,}3y = 44{,}28 \\ 7{,}1x - 4{,}5y = 63{,}9, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3{,}6x + 5{,}1y = 19{,}2 \\ -1{,}2x + 4{,}3y = 5{,}8. \end{cases}$

628. Решить те же системы алгебраически и сопоставить результаты.

Упражнение 210.

629. Дать геометрическое представление следующих систем:

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$ и (b) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10. \end{cases}$

Объяснить: какой геометрический факт соответствует тому обстоятельству, что система (a) не имеет решений, что система (b) имеет бесчисленное множество решений?

630. Каково должно быть значение коэффициента D, чтобы система

$$\begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ 6x + Dy = 10 \end{cases}$$

не имела решений?

631. Каково должно быть значение коэффициента N, чтобы система

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 5x + 10y = N \end{cases}$$

а) имела сколько угодно решений? b) не имела вовсе решений?

Не представляет труда и в общем случае уяснить себе геометрический смысл того, что данная система не регулярна (см. § 71 и 72)

$$AD - BC = 0.$$

Прямая, являющаяся графиком уравнения $Ax+By = M$, имеет наклон (см. § 58), равный $-\frac{A}{B}$ (при условии $B \neq 0$); прямая, являющаяся графиком уравнения $Cx + Dy = N$, имеет таким же образом наклон $-\frac{C}{D}$ (при условии $D \neq 0$). Равенству $AD - BC = 0$, разделив на BD, можно придать вид

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = 0,$$

или

$$-\frac{A}{B} = -\frac{C}{D}.$$

Но это значит, что наклоны двух прямых равны, т. е. прямые параллельны.

Если $B = 0$, то из условия $AD - BC = 0$ следует, что и $D = 0$ (так как A и B не могут обращаться в нуль одновременно); прямые параллельны и в этом случае.

Итак, невыполнение условия регулярности свидетельствует о том, что прямые, являющиеся графиками данных уравнений, параллельны. В таком случае очевидно геометрически, что у них или вовсе нет общих точек (если они различны), или имеется их бесконечное множество (если они совпадают).

§ 74. Примеры и задачи

Упражнение 211.

632. Решить системы относительно входящих в них букв:

1) $\begin{cases} 6x + 7y + 8 = 0 \\ 8x + 9y + 10 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} u + v + 1 = 2u + 5v + 3 \\ 3u - 2v + 4 = 2u - v + 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(5p - q) + 3(p + 3q) = 58 \\ 5(p + q) - 7(p - 2q) = -29 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(1 + a) - (1 - b) = 3(1 - a) - 4(1 + b) \\ 5(1 - a) + 2(1 + b) = (1 + a) + 3(1 - b) \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} H = 3K - 1 \\ K = 2H - 3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x}{3} = 5 \\ \frac{x-y}{3} + \frac{y}{2} = 4\frac{1}{6} \end{cases}$

8) $\begin{cases} F = 2G + 1 \\ G = 2F + 1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \frac{2s+3t}{s} + 1 = \frac{15}{s} \\ \frac{3s-2t}{t} + 2 = \frac{9}{t} \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{L}{5} = \frac{M}{7} \\ \frac{L}{4} = \frac{M}{-3} \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{u-v}{u+v+1} = \frac{8}{13} \\ \frac{u+v}{u-v+1} = \frac{4}{3} \end{cases}$

Упражнение 212.

633. Решая следующие системы относительно букв x и y, выделять особенные случаи: указывать, какие ограничения нужно наложить на остальные буквы, чтобы решение существовало и было единственным.

1) $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = s \\ y = mx \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = d \\ ax + by = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = ny + a \\ y = nx + b \end{cases}$

5) $\begin{cases} hx - ky = p \\ kx + hy = q \end{cases}$

6) $\begin{cases} hx - ky = 0 \\ kx - hy = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + ty = 5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x + sy = m \\ x + s^2y = n \end{cases}$

9) $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$

Упражнение 213.

634. «Если мне дадут, — сказал мальчик, — еще 40 орехов, то у меня будет столько же, сколько у моего брата, а если мне дадут 90 орехов, то у меня станет вдвое более, нежели у моего брата». Сколько он и брат его имели орехов. (Задача П. Л. Чебышева).

635. Бутылка с пробкой стоит 11 копеек. Бутылка стоит на 10 копеек дороже, чем пробка. Сколько стоит бутылка и сколько пробка?

636. Куплено 1000 бутылок с пробками за 100 рублей. Каждая бутылка стоит в 10 раз дороже, чем пробка. Сколько стоит каждая бутылка и каждая пробка?

637. В кошельке лежат пятаки и гривенники. Всего в нем 32 монеты на общую сумму 2 р. 45 к. Сколько в кошельке пятаков и сколько гривенников?

638. В кошельке лежат пятаки и гривенники. Всего в нем 2 р. 45 к., но если заменить пятаки гривенниками, а гривенники пятаками, то станет 2 р. 5 к. Сколько в кошельке пятаков и сколько гривенников?

639. Из левого кармана я переложил в правый столько денег, сколько было в правом; затем из правого — в левый столько, сколько стало в левом. После этого в левом кармане оказалось 92 р., в правом — 8 р. Сколько денег было вначале в каждом кармане?

640. Из левого кармана я переложил в правый столько денег, сколько было в правом; затем из правого переложил в левый столько, сколько стало в левом. После этого в левом кармане стало на 30 р. больше, а в правом втрое меньше, чем было вначале. Сколько денег было в каждом кармане?

641. На класс выдана коробка перьев. Если каждому ученику дать по 15 перьев, то останется 135; если — по 20, то не хватит 20 перьев. Сколько учеников в классе и сколько перьев в коробке?

642. Если каждому ученику в классе раздать по 15 перьев из коробки, то в коробке останется 65 перьев; если же раздавать по 20 перьев, то, исчерпав одну коробку, придется взять вторую такую же и еще раздать 16% того, что в ней содержится. Сколько учеников в классе и сколько перьев в коробке?

Упражнение 214.

643. В уравнении прямой линии

$$y = mx + n$$

подберите коэффициенты m и n таким образом, чтобы эта прямая проходила через точки $A(3, 5)$ и $B(8, 7)$.

644. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(2, -5)$ и $B(-1, 8)$.

645. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(a, b)$. Положите: $a = 3$, $b = 7$; сделайте чертеж.

Пересекается ли полученная прямая с прямой $14x + 6y = 25$?

646. В уравнении

$$y = Ax^2 + C$$

подберите коэффициенты A и C таким образом, чтобы график проходил через точки $P(1, 3)$ и $O(3, -5)$. В каких точках он пересечется с осями координат?

§ 75. Общие соображения по поводу решения систем уравнений

Было бы ошибочно, основываясь на рассмотрении систем линейных уравнений, сделать общее заключение о том, что система двух уравнений с двумя неизвестными всегда имеет единственное решение. Такое утверждение, как мы видели, справедливо даже не для всех линейных систем (а только для регулярных, см. § 71). В случае, если уравнения данной системы — оба или хотя бы одно — степени выше первой, возможно существование *нескольких* решений или же их может *не быть вовсе*. Примеры были приведены в § 69.

Почему это так — в этом легко отдать себе отчет, если рассмотреть вопрос с геометрической точки зрения. Решая систему двух уравнений, мы ставим своей задачей найти все точки пересечения двух графиков, соответствующих данным уравнениям. Если оба уравнения линейные, то графики — прямые линии, и две прямые, при условии, что они не параллельны, имеют только одну точку пересечения. Но если хотя бы одно из уравнений системы — не линейное, то уже нельзя сказать, что его график — прямая линия, а в таком случае *графики могут пересекаться в нескольких точках*, а могут и *совсем не иметь общих точек*.

В подтверждение высказанных соображений мы рассмотрим несколько примеров.

Решая системы, в дальнейшем мы будем пользоваться методом подстановки: именно, определяем одно из неизвестных (выражаем его через другое) какого-нибудь уравнения и затем подставляем то, что получится, в другое уравнение; вновь получаемое уравнение есть следствие данных, но содержит уже только одну неизвестную букву. «Исключив», таким образом, одну из букв, находят, решая уравнение, значение другой, а затем не представляет труда найти и значение первой буквы.

Пример 1.

$$\begin{cases} y = x^2 & \text{(I)} \\ 2x - y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Уравнение (I) — второй степени, уравнение (II) — линейное и легко решается относительно y:

$$y = 2x.$$

Подставляя полученное значение в уравнение (I), мы получаем:

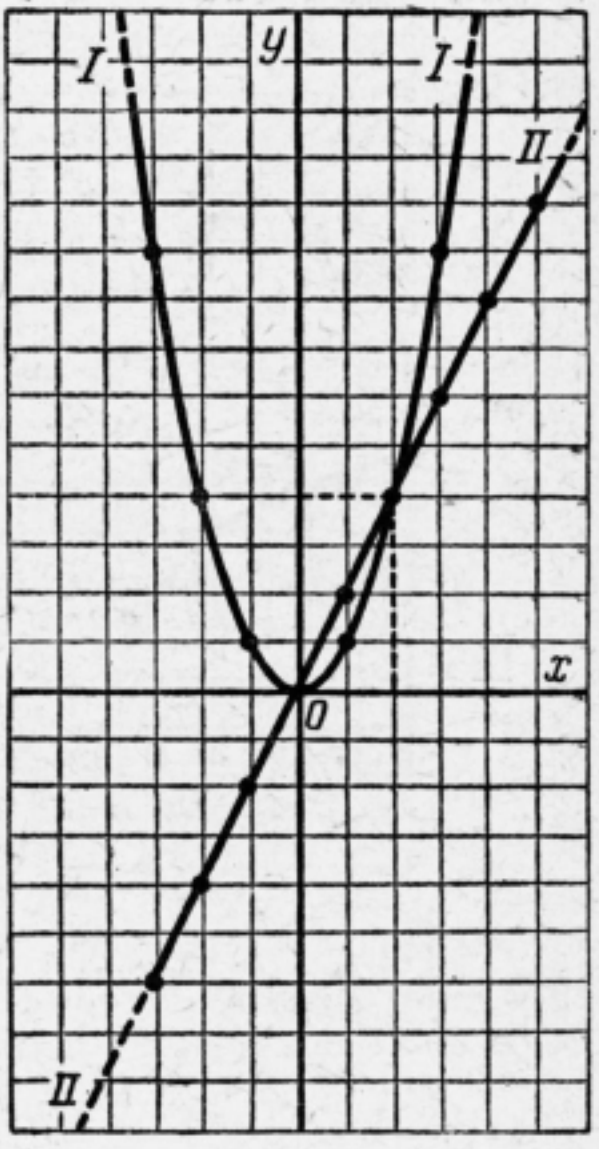
$$2x = x^2,$$

или

$$x(x-2) = 0. \qquad \text{(III)}$$

Произведение равно нулю в том, и только в том случае, если один из множителей равен нулю: значит, или $x = 0$, или $x - 2 = 0$, т. е. $x = 2$. Уравнение второй степени (III) имеет два корня $x = 0$ и $x = 2$. Из уравнения (II) затем видно, что если $x = 0$, то непременно $y = 0$; и если $x = 2$, то непременно $y = 4$.

Итак, решениями системы (I—II) могут быть только пары чисел (0, 0) и (2, 4); непосредственная подстановка показывает, что эти пары, действительно, дают решения.



Черт. 48

Пример иллюстрируется чертежом 48: парабола $y = x^2$ (I) и прямая $2x - y = 0$ (II) пересекаются в двух точках с координатами (0, 0) и (2, 4).

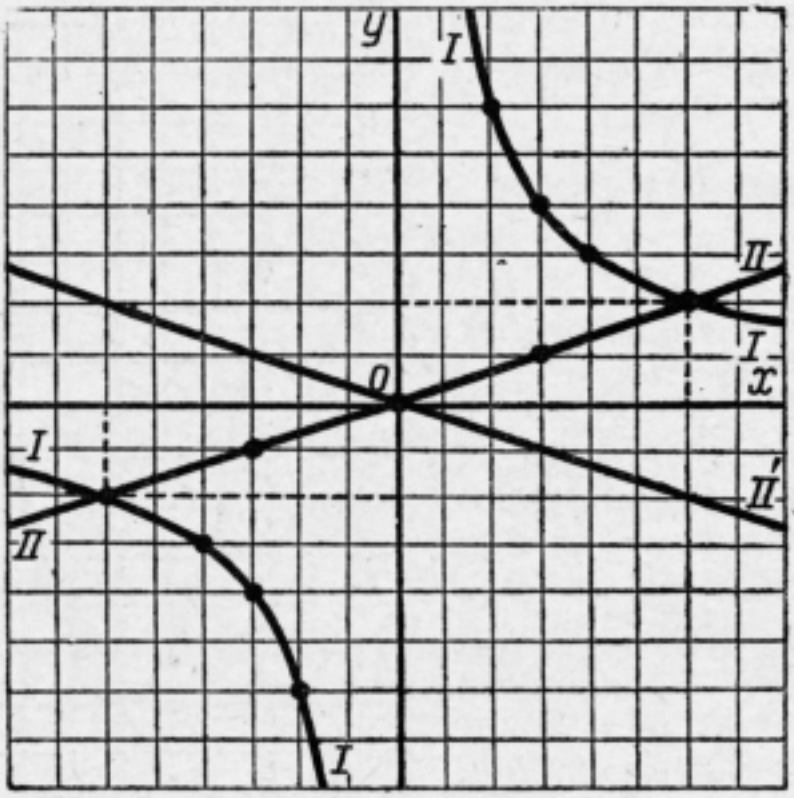
Пример 2.

$$\begin{cases} xy = 12 & \text{(I)} \\ x - 3y = 0. & \text{(II)} \end{cases}$$

Подставляя выражение для x, взятое из уравнения (II), в уравнение (I), мы получаем после сокращений:

$$y^2 = 4. \qquad \text{(III)}$$

Уравнение второй степени (III) имеет два корня: $y = 2$ и $y = -2$. Из уравнения (II) видно, что если $y = 2$, то $x = 6$, и если $y = -2$, то $x = -6$.



Черт. 49

Итак, решениями системы (I—II) могут быть только пары чисел (6, 2) и (—6, —2).

Черт. 49 показывает, что мы имеем здесь дело с пересечением гиперболы $xy = 12$ (I) и прямой $x - 3y = 0$ (II).

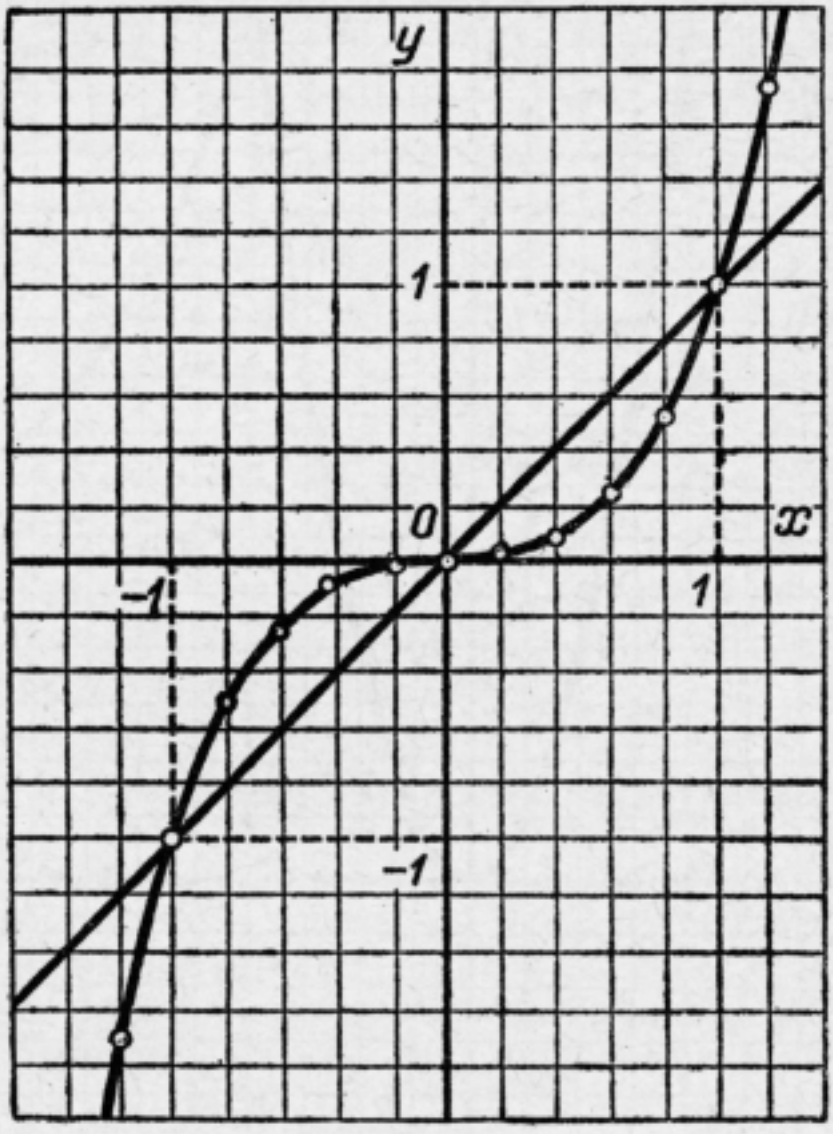
Если бы вместо системы (I—II) была задана система

$$\begin{cases} xy = 12 & \text{(I)} \\ x + 3y = 0, & \text{(II')} \end{cases}$$

то вместо уравнения (III) у нас получилось бы уравнение

$$y^2 = -4, \qquad \text{(III')}$$

которое, очевидно, не имеет ни одного корня (так как правая часть отрицательна, а левая не может быть отрицательной).



Черт. 50

Отсюда следует, что система (I — II′) не имеет решений. Прямая (II′) на черт. 49 не пересекается с гиперболой (I).

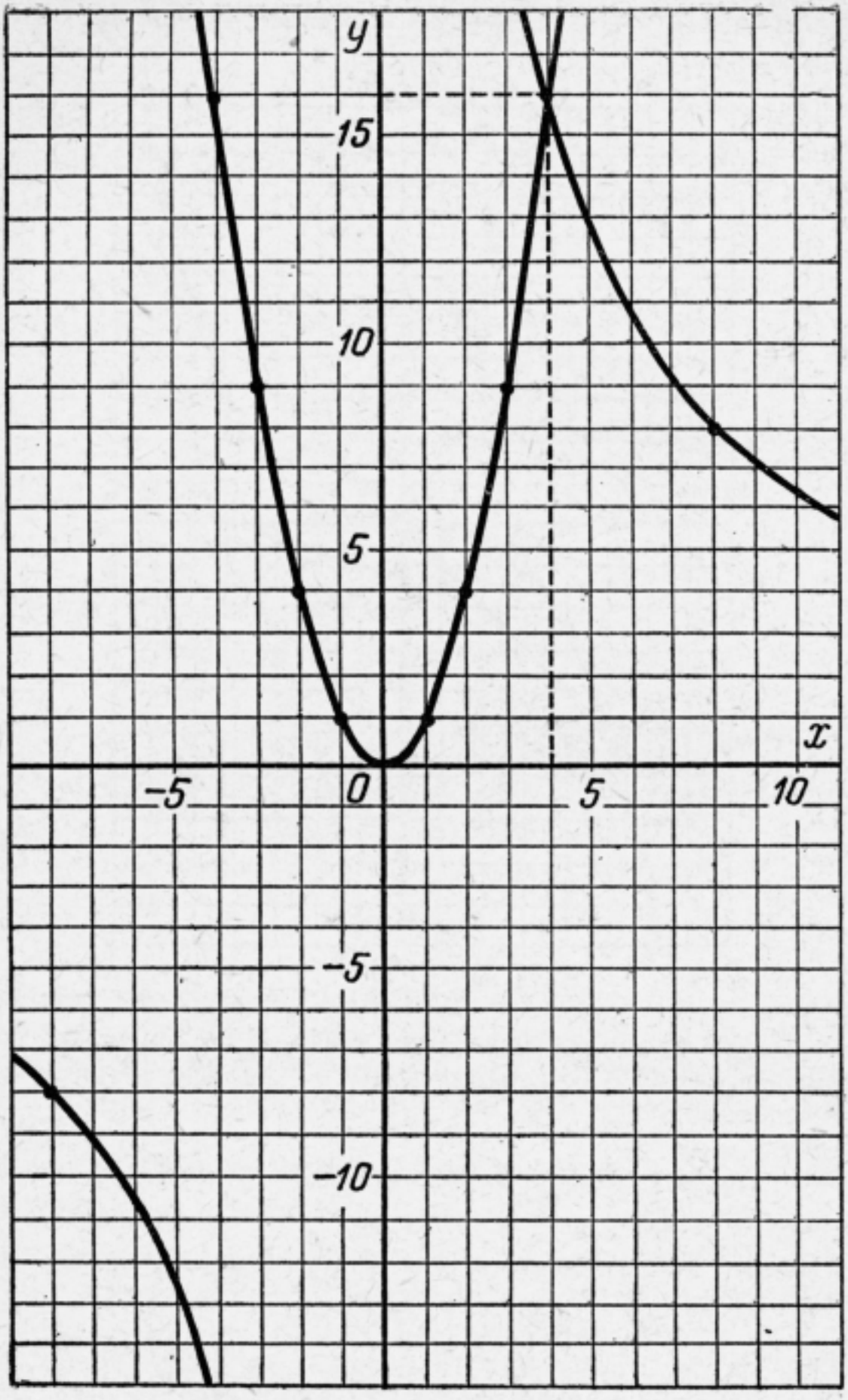
Пример 3.

$$\begin{cases} y = x^3 & \text{(I)} \\ x - y = 0. & \text{(II)} \end{cases}$$

После исключения y мы получаем, перенося все члены в одну сторону и разлагая на множители:

$$x(x-1)(x+1) = 0. \qquad \text{(III)}$$

Из этого уравнения вытекает одно из трех: или $x = 0$, или $x = 1$, или $x = -1$. Соответствующие значения y также равны 0; 1 или —1. Итак, возможны



Черт. 51

только три решения: (0, 0), (1, 1) и (—1, —1), и легко проверить, что их, действительно, три.

На черт. 50 видны три точки пересечения кривой $y = x^3$ (I) с прямой линией $x - y = 0$ (II).

Пример 4.

$$\begin{cases} xy = 64 & \text{(I)} \\ y = x^2. & \text{(II)} \end{cases}$$

Исключая y, мы получаем:

$$x^3 = 64 \qquad \text{(III)}$$

и, значит,

$$x = 4.$$

Отсюда следует, что система (I—II) имеет единственное решение:

$$x = 4,\ y = 16.$$

Гипербола (I) и парабола (II) пересекаются только в одной точке (4, 16) — см. черт. 51.

§ 76. Исключение буквы из двух уравнений

Мы уже несколько раз пользовались выражением «исключить такую-то букву из двух данных уравнений». Очень важно не только понимать смысл этих слов, но и уметь правильно ответить на вопрос: «Что значит исключить букву из двух уравнений?» Точный ответ таков:

Исключить названную букву из двух равенств (которые могут содержать также и другие буквы) — *значит составить новое равенство, не являющееся тождеством и, кроме того, обладающее двумя свойствами:*

1) *оно есть следствие данных равенств* *,

2) *оно не содержит названной буквы.*

На вопрос же: «Как исключить букву из двух уравнений?» — нужно ответить: это можно сделать разными способами. Мы видели, например, в случае линейных уравнений, что для этого можно определить

---

* Напомним, это значит: всякий раз, как при каких-нибудь значениях букв удовлетворяются данные равенства, непременно удовлетворяется при тех же значениях букв и вновь составленное равенство.

букву из одного уравнения и полученное выражение подставить вместо этой буквы в другое уравнение.

Но можно, наоборот, определить букву из второго уравнения и подставить в первое. Уравнивание коэффициентов (§ 71) представляет собой еще один, большей частью самый удобный, способ исключения буквы из линейных уравнений.

Упражнение 215.

647. В следующих примерах 1) и 2) исключите букву y из данных уравнений тремя способами: 1) определяя y из первого уравнения и подставляя во второе, 2) определяя y из второго уравнения и подставляя в первое, 3) посредством уравнения коэффициентов. Примените еще четвертый способ: 4) определите y из первого и из второго уравнений и приравняйте полученные выражения:

1) $\begin{cases} 4x - 5y = -20 \\ 3x + 2y = 18, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} Ax + By = M \\ Cx + Dy = N. \end{cases}$

Упражнение 216.

648. Из следующих систем двух уравнений исключите букву t:

1) $\begin{cases} x = a + t \\ y = b - t, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{2} \\ y = \dfrac{t-1}{2}, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = at \\ y = \dfrac{a}{t}, \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = pt \\ y = qt, \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2. \end{cases}$

Упражнение 217.

649. В момент времени t координаты движущейся точки $M(x, y)$ определяются равенствами:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 + 4t. \end{cases}$$

Напишите уравнение пути, по которому движется точка (так называемой «траектории» движения).

650. Тот же вопрос для уравнений

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 2t. \end{cases}$$

651. Тот же вопрос для уравнений

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2. \end{cases}$$

Наметьте траекторию, придавая t значения $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$. Масштаб: 1 = 10 клеткам.

652. Точка $M(x, y)$ движется по кривой

$$y = x^2 + x,$$

причем ее абсцисса x зависит от времени следующим образом:

$$x = 2 - 3t.$$

Какова будет ордината y точки M в момент времени t?

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XI

Упражнение 218.

653. Проверьте, все ли пары чисел, заданные табличкой

x	1	2	3	4	5	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{6}{5}$	-2	$-\frac{15}{17}$
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	-1	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{8}$	1	2	3	4	5

удовлетворяют уравнению $xy+2x+3y=0$. Сделайте чертеж. Исправьте ошибки в табличке.

654. Проверьте, всем ли следующим уравнениям удовлетворяет пара чисел $x = 1$, $y = 1$:

1) $x + y = 2$, 2) $3x + 5y = 8$, 3) $x^2 + y^2 = 2$, 4) $xy = 1$,

5) $y = \frac{x+1}{2}$, 6) $y = x^2$, 7) $x = y^2$, 8) $x^2 = y^2$.

655. Проверьте, что обе пары чисел

(1) $x = 3$, $y = 4$ и (2) $x = 2$, $y = 6$

удовлетворяют всем трем уравнениям

1) $xy = 12$, 2) $2x + y = 10$, 3) $4x^2 + y^2 = 52$.

656. Докажите, что никакая пара чисел (x, y) не удовлетворяет одновременно двум уравнениям

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ и } x + y = 10.$$

Упражнение 219.

657. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} 8(i+j) - 5(i-j) = -17 \\ 3(i+j) + 4(i-j) = 23 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}y = \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y = \frac{3}{4} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{t+2z}{6} - \frac{3t-z}{5} = -\frac{4}{5} \\ \frac{t+2z}{4} + \frac{3t-z}{3} = \frac{9}{2} \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6(r+s) - 3(r+2s) = 5 \\ 2(r+s) + 5(r+2s) = 7 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x-2}{y+3} = \frac{x+2}{y-3} \\ \frac{x-2}{y+3} = \frac{x+3}{y-2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} \\ x + y = 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{x+a}{b} = \frac{y+b}{a} \\ \frac{x+b}{x} = \frac{y+a}{y} \end{cases}$

8) $\begin{cases} p(x+y) + q(x-y) = \\ \quad = -p^2 + 2pq + q^2 \\ p(x+y) - q(x-y) = \\ \quad = -p^2 - q^2 \end{cases}$

Упражнение 220.

658. За a яблок и b груш заплачено m рублей, за c яблок и d груш заплачено n рублей. Определите стоимость x одного яблока и стоимость y одной груши.

В полученные формулы подставьте значения:

1) $a = 10$, $b = 10$, $m = 40$, $c = 15$, $d = 15$, $n = 37{,}5$;

2) $a = 5$, $b = 20$, $m = 35$, $c = 3$, $d = 10$, $n = 19$.

Что можно сказать о случае, когда

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}?$$

659. Через a лет отец будет в p раз старше сына; через b лет — в q раз. Определите возраст x сына и возраст y отца.

В полученные формулы подставьте значения:

1) $a = 2$; $p = 2{,}5$, $b = 12$; $q = 2$; 2) $a = 2$; $p = 3$; $b = -4$; $q = 5$.

Выразите p и q через x, y, a, b и убедитесь, что $p > q$, если $a < b$, и что $p < q$, если $a > b$.

660. Сегодняшний день на h часов длиннее сегодняшней ночи. Определите продолжительность x сегодняшнего дня и продолжительность y сегодняшней ночи.

В полученные формулы подставьте значения:

$$1)\ h = 3\frac{1}{15},\quad 2)\ h = 1\frac{17}{20},\quad 3)\ h = -\frac{5}{12}.$$

Выразите через h отношение продолжительности ночи к продолжительности дня. При увеличении h увеличивается это отношение или уменьшается?

661. Отношение продолжительности сегодняшней ночи к продолжительности сегодняшнего дня равно k. Определите продолжительность x сегодняшнего дня и продолжительность y сегодняшней ночи.

В полученных формулах подставьте значения:

$$1)\ k = \frac{3}{2},\quad 2)\ k = \frac{4}{5},\quad 3)\ k = 3.$$

Выразите через k разность между продолжительностью дня и продолжительностью ночи. При увеличении k увеличивается эта разность или уменьшается?

662. Между Москвой и Тулой 200 *км*. Из Москвы выезжает по направлению к Туле велосипедист, двигающийся со скоростью u (*км* в час); через 3 часа из Тулы по направлению к Москве выезжает мотоциклист, двигающийся со скоростью v (*км* в час.) Через сколько часов T после выезда велосипедиста из Москвы и на каком расстоянии X от Москвы произойдет встреча?

В полученные формулы подставьте значения:

(a) $u = 20$, $v = 30$, (b) $u = 10$, $v = 20$, (c) $u = 10$, $v = 50$,

(d) $u = 10$, $v = 30$.

На каком расстоянии p (*км*) от Москвы будет находиться велосипедист через t часов после своего выезда? На каком расстоянии q от Москвы будет находиться мотоциклист через t часов после выезда из Москвы велосипедиста?

При каком значении t будет иметь место равенство $p = q$?

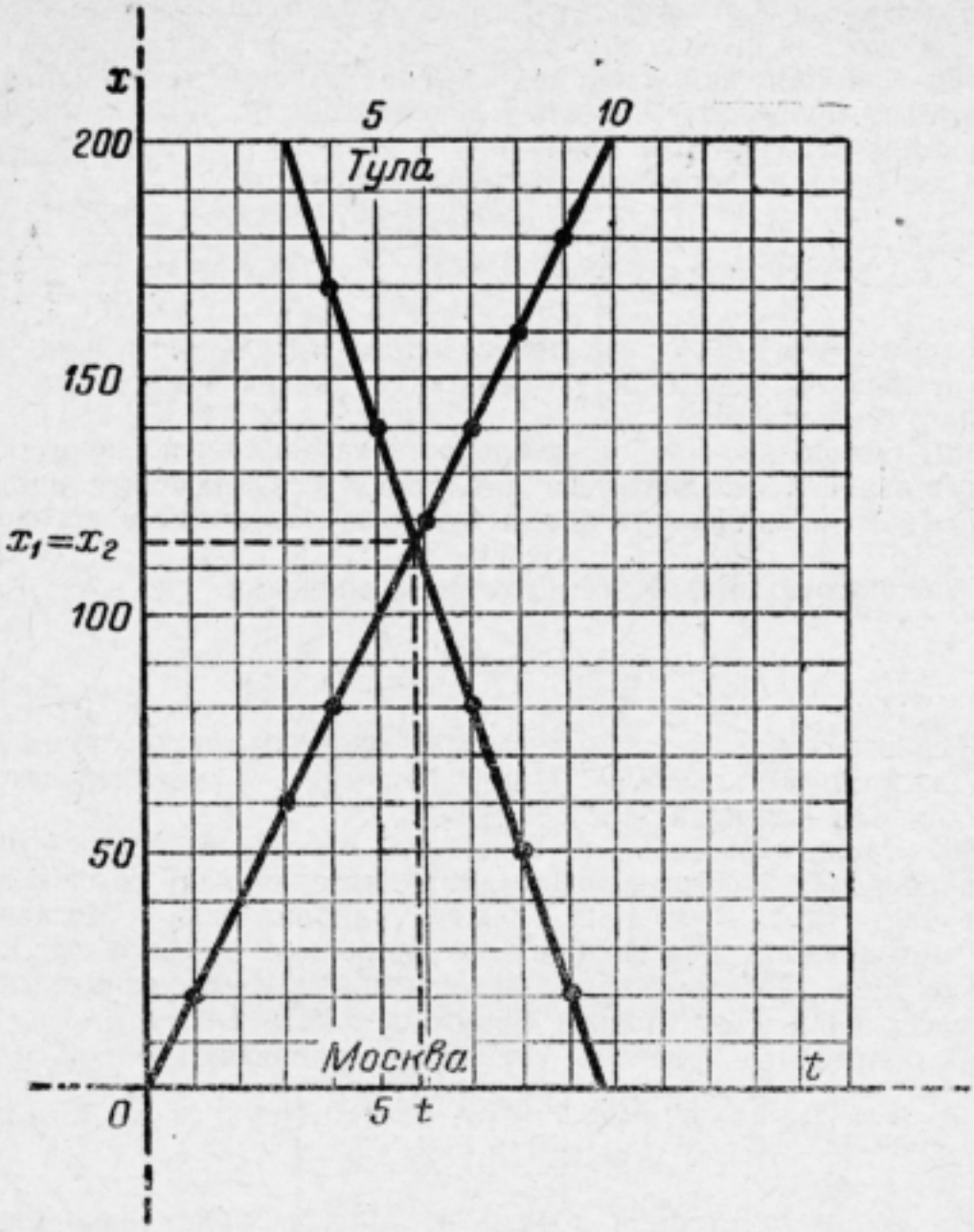
На черт. 52 построены графики движения велосипедиста и мотоциклиста, соответствующие предположению (a). Постройте сами на одном и том же чертеже такие же графики, соответствующие предположениям (b), (c) и (d).

Упражнение 221.

663. Решите системы:

$$1)\ \begin{cases} xy = 16 \\ x - y = 0, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} xy = 12 \\ 3x - y = 0, \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} xy = 12 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$$

и дайте их геометрическое истолкование на одном чертеже.



Черт. 52

664. Решите системы

$$1)\ \left.\begin{aligned} y &= x^3 \\ x - 9y &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 2)\ \begin{cases} y = x^3 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$$

и дайте геометрическое представление на одном чертеже.

665. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

и истолкуйте результаты геометрически.

666. То же для системы

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 9, \end{cases}$$

Упражнение 222.

667. Из следующих систем исключите букву t.

1) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 - 2t, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \dfrac{t}{t+1}, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{t} \\ y = a + \dfrac{b}{t}, \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \dfrac{t-1}{t+1} \\ y = t^2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2t, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

668. Из уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 5z + 20 = 0 \\ 3x + y - 7z - 10 = 0 \end{cases}$$

a) исключить z, b) исключить y, c) исключить x.

669. Из уравнений

$$\begin{cases} mx - y = a \\ x + my = b \end{cases}$$

исключить m.

670. Из уравнений

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = mt + n \end{cases}$$

исключить x.

671. Из уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{az + b}{cz + d} \\ z = \dfrac{px + q}{rx + s} \end{cases}$$

исключить z.

*** 672.** Из уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$$

исключите букву y. Объясните результат.

Глава XII

КВАДРАТНЫЕ И КУБИЧЕСКИЕ КОРНИ. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧИСЛОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 77. Корни (арифметические)

Упражнение 223.

673. Напишите следующие уравнения, не пользуясь показателями степеней, и затем попытайтесь найти их положительные решения:

$$x^2 = 25, \quad x^2 = 49, \quad x^2 = 100, \quad x^2 = 16, \quad x^2 = 1;$$

$$x^2 = \frac{1}{9}, \quad x^2 = \frac{9}{25}, \quad x^2 = 1\frac{32}{49}, \quad x^2 = 0{,}64;$$

$$x^3 = 343, \quad x^3 = 125, \quad x^3 = 1\,000\,000;$$

$$x^3 = \frac{1}{8}, \quad x^3 = 3\frac{3}{8}, \quad x^3 = 0{,}729;$$

$$x^5 = 32, \quad x^4 = 16, \quad x^4 = \frac{1}{81}, \quad x^5 = 0{,}00001, \quad x^{10} = 1024.$$

674. Какова должна быть сторона квадрата, чтобы его площадь равнялась 256 $м^2$? 625 $м^2$? 1600 $м^2$? $^1/_4$ $м^2$?

Каково должно быть ребро куба, чтобы его объем равнялся 8 $м^3$? 125 000 $м^3$? 0,001 $м^3$?

675. Назовите два таких последовательных целых числа, чтобы между их квадратами заключалось число 70; число 10 000; число 250.

Назовите два таких последовательных целых числа, чтобы между их кубами заключалось число 100; число 500; число 7500.

676. Участок земли площадью в 50 $м^2$ имеет форму квадрата. Легко понять, что сторона этого квадрата

немного больше 7 *м* и во всяком случае меньше 8 *м*; поэтому можно сказать, что она приближенно равна 7 *м*. Попробуйте ответить: сколько она (приближенно) содержит сантиметров?

677. В бассейне строго кубической формы должно помещаться 3000 $м^3$ воды. Определите приближенно линейные размеры бассейна (ребро куба) в метрах; в дециметрах.

Определения.

Число, квадрат которого равен a, называется квадратным корнем из числа a и обозначается $\sqrt{a}$. Так, например, $\sqrt{121} = 11$; в самом деле, $11^2 = 121$.

Число, куб которого равен a, называется кубическим корнем из числа a и обозначается $\sqrt[3]{a}$. Так, например, $\sqrt[3]{216} = 6$, так как $6^3 = 216$.

Вообще число, n-я степень которого равна a, называется корнем степени n из числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$. Например, $\sqrt[5]{243} = 3$, так как $3^5 = 243$. Если $n = 2$, то показатель при корне писать не принято.

Нахождение корня некоторой степени из данного числа называется извлечением корня. Конечно, не из всякого числа можно извлечь корень данной степени в точности. Если нам не удается сделать это точно, то всегда можно сделать приближенно.

Пример.

Требуется начертить квадрат, площадь которого равнялась бы 1500 $мм^2$; какова должна быть в миллиметрах длина его стороны?

Дело сводится, очевидно, к решению уравнения

$$x^2 = 1500,$$

т. е. к извлечению корня квадратного из 1500. Мы не найдем целого числа, квадрат которого равнялся бы 1500; но легко убедиться, что квадрат числа 30 меньше, чем 1500, а квадрат числа 40 больше, чем 1500; точно так же квадрат числа 38 меньше, чем 1500, а квадрат числа 39 больше, чем 1500. Отсюда можно заключить, что искомый корень нашего уравнения заключен между 38 и 39. Он нами вычислен приближенно («с точностью до единицы»). Итак, чтобы начертить квадрат

площадью в 1500 $мм^2$, нужно взять сторону его чуть большей 38 *мм*.

Предположим, что точность, доставляемая неравенством

$$38 < x < 39,$$

нас бы не удовлетворяла. Тогда можно было бы перейти хотя бы к десятичным дробям и найти число десятых, содержащихся в искомом числе. Было бы нетрудно установить, что среди чисел

$$38{,}1;\ 38{,}2;\ 38{,}3;\ \ldots;\ 38{,}8;\ 38{,}9$$

все до числа 38,7 включительно имеют квадраты, меньшие, чем 1500, тогда как два последних имеют квадраты, большие, чем 1500. Отсюда мы заключили бы, что

$$38{,}7 < x < 38{,}8.$$

И так можно было бы продолжать дальше.

Знак корня иначе называется р а д и к а л о м.

Упражнение 224.

678. Решение уравнения $x^2 = 25$ в пункте 673 можно с помощью радикала записать в виде $\sqrt{25} = 5$. Запишите подобным же образом с помощью радикалов решения всех остальных уравнений пункта 673. Запишите точно так же решения задач пункта 674.

679. Объясните, что означают следующие равенства:

$$\sqrt{169} = 13;\quad \sqrt[4]{10\,000} = 10;\quad \sqrt[3]{1331} = 11;$$

$$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6},\quad \sqrt{1{,}44} = 1{,}2.$$

680. Проверьте, справедливы ли следующие равенства, и исправьте их, если найдете нужным:

$$\sqrt{289} = 17,\quad \sqrt{300} \sim 17,\quad \sqrt{576} = 24,\quad \sqrt{1090} = 33,$$

$$\sqrt{970} \sim 30,\quad \sqrt{1000} \sim 30,\quad \sqrt[3]{9261} \sim 21,\quad \sqrt[3]{3375} = 15.$$

681. Запишите с помощью радикалов и знаков точного или приближенного равенства решения задач в пунктах 675—676.

Упражнение 225.

682. Среди следующих выражений выделите такие, которые представляют одно и то же число, и соедините знаками равенств:

$$1)\ \sqrt{100},\ 2)\ 2+2^3,\ 3)\ \sqrt{\frac{1}{9}},\ 4)\ 1^{10},\ 5)\ \sqrt{1},$$

$$6)\ \sqrt[3]{1},\ 7)\ \frac{(2+2)^3-4}{6},\ 8)\ \sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{36}},$$

$$9)\ \sqrt[3]{1000},\ 10)\ \frac{1}{\sqrt[3]{27}}.$$

683. Вместо звездочек между написанными ниже числами или арифметическими выражениями поставьте знаки $<$, $>$ или $=$:

$$5^2 * 7^2;\ 3^5 * 5^3;\ \left(\frac{1}{5}\right)^2 * \left(\frac{1}{7}\right)^2;\ 2^{10} * 1\,000;$$

$$\sqrt{1000} * 31;\ \sqrt{1000} * 32;\ \sqrt{144} * \sqrt[3]{1728};$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} * \sqrt{0{,}2};$$

$$9^2 * \sqrt{9};\ \left(\frac{1}{9}\right)^2 * \sqrt{\frac{1}{9}};\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 * 2\cdot 10^6.$$

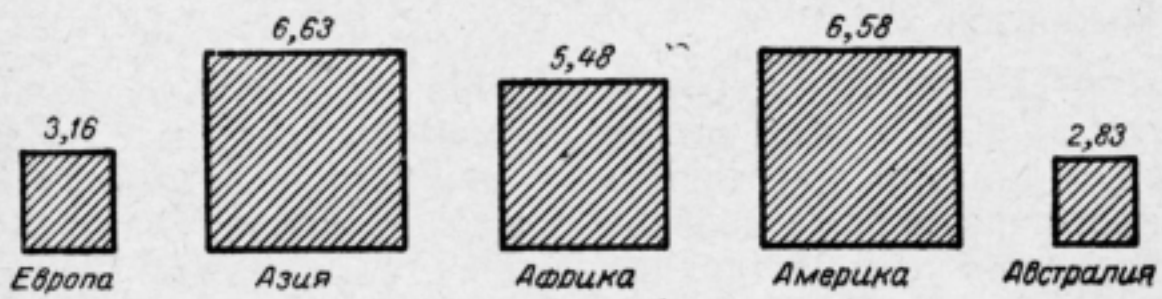
684. Найдите числовые значения следующих выражений:

1) $\dfrac{3\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ при $x=1$ и при $x=0$;

2) $\sqrt{(2+a)(2-a)}$ при $a=2$ и при $a=0$;

3) $t^2+t+\sqrt{t}$ при $t=4$, $t=1$ и при $t=0$.

Изображая с помощью диаграмм различные величины, измеряемые квадратными единицами, часто представляют их в виде квадратов, площади которых равны данным числам. При этом, чтобы определить стороны квадратов, приходится извлекать квадратные корни.



Черт. 53

Упражнение 226.

685. Площади пяти частей света даются (с округлением в миллионах квадратных километров) следующей табличкой:

Европа	$10 \cdot 10^6$ км²
Азия	$45 \cdot 10^6$ »
Африка	$38 \cdot 10^6$ »
Америка	$38 \cdot 10^6$ »
Австралия	$8 \cdot 10^6$ »

Изобразите на клетчатой бумаге площади частей света в виде квадратов, принимая квадратную клетку за 10^6 км² (см. черт. 53).

686. По данным 1939 г., численность населения нескольких важнейших городов Советского Союза выражалась цифрами (в тысячах):

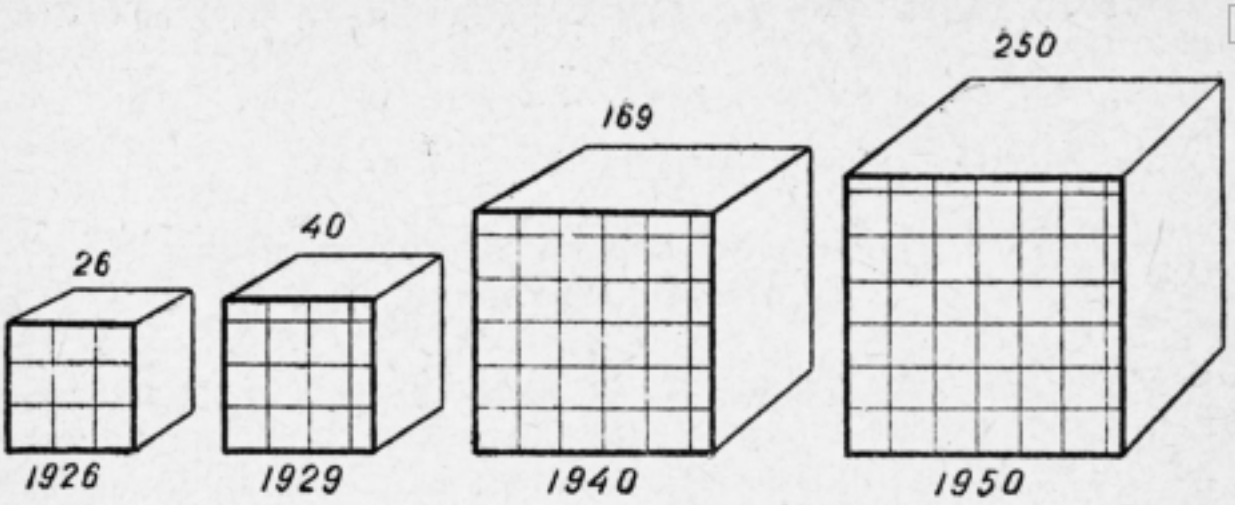
Алма-Ата	230	Ереван	200
Ашхабад	127	Запорожье	289
Баку	809	Киев	846
Днепропетровск	501	Ленинград	3191
Минск	239	Сталино	462
Москва	4137	Ташкент	585
Одесса	604	Тбилиси	519
Петрозаводск	80	Фрунзе	93
Сталинабад	82	Харьков	833

Изобразите эти данные в виде квадратов, принимая квадрат, составленный из 4 клеток, за 100 (тысяч).

Величины, выражаемые в объемных единицах, нередко изображаются в виде пространственных тел, например, кубов. При этом изображаемые числа обозначают объемы кубов, и потому при подсчете стороны каждого куба приходится извлекать кубический корень.

Упражнение 227.

687. Рассмотрите чертеж 54, характеризующий добычу угля в СССР (в миллионах тонн) за ряд лет. Проверьте наличие соответствия между числовыми данными и размерами изображающих их кубов, пользуясь квадратной сеткой, покрывающей грани кубов. Установите, каков масштаб этого чертежа.



Черт. 54

Упражнение 228.

688. Разыщите изготовленный раньше чертеж, изображающий график уравнения $y = x^2$. Используйте его для ускоренного (приближенного) извлечения квадратного корня из следующих чисел:

20; 10; 8; 3; 2; 1,7; 1,2; 0,82; 0,65; 0,32.

Проверьте вычислением или по таблицам (см. стр. 348).

689. Ответьте, пользуясь теми же чертежами, на вопросы:

а) Какова площадь S квадрата со стороной a, равной 2,3 *м*; 1,7 *см*; 0,84 *см*?

б) Какова сторона a квадрата, имеющего площадь S, равную 2 $м^2$; 1,6 $м^2$; 75 $см^2$; 0,0012 $м^2$?

690. Пользуясь графиком уравнения $y = x^3$, извлеките подобным же образом корни кубические из чисел, указанных в вопросе 688. Сделайте проверку вычислением или по таблицам (см. стр. 349).

691. С помощью того же графика определите:

а) Каков объем V куба со стороной a, равной 1,42 *м*; 78 *см*?

б) Какова сторона a куба, имеющего объем V, равный 2 $м^3$; 1,47 $м^3$; 0,54 $м^3$?

692. Составьте таблицу значений выражения

$$y = \sqrt{x}$$

при $x = 0$; 1; 2; 3; ...; 10; наметьте точки в координатной плоскости. Добавьте точки, соответствующие значениям $x = 0{,}5$ и $x = 1{,}5$. Соедините плавной кривой. Сравните с графиком уравнения $y = x^2$.

693. Сделайте то же для выражения

$$y=\sqrt[3]{x}.$$

Сравните с графиком уравнения $y = x^3$.

§ 78. Извлечение корней непосредственно и с помощью таблиц

При решении множества самых разнообразных задач приходится извлекать квадратные корни из чисел; довольно часто нужно бывает извлекать и кубические корни.

Иногда удается извлечь корень точно, и притом не прибегая ни к каким особым приемам. Так, например, непосредственно ясно, что:

$$\sqrt{289}=17,\quad \sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5},\quad \sqrt{0{,}16}=0{,}4,$$

$$\sqrt[3]{216}=6,\quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3},\quad \sqrt[3]{0{,}125}=0{,}5.$$

Однако на каждом шагу мы встречаемся и с такими случаями, когда точное извлечение корня невозможно. Тогда, с практической точки зрения, совершенно достаточно найти приближенное значение корня. Обыкновенно значение корня записывают в виде десятичной дроби, ограничиваясь тем или иным числом десятичных знаков после запятой.

Нахождение этих десятичных знаков стоит некоторого труда. Пусть требуется вычислить приближенно $\sqrt{3}$: это равносильно решению уравнения

$$x^3=3.$$

Легко понять, что искомое число x, которое мы обозначаем через $\sqrt{3}$, должно быть больше единицы, но меньше 2 (так как $1^2<3$, но $2^2>3$). Уже отсюда ясно, что слева от запятой стоит одна цифра 1. Чтобы установить следующую цифру, подвергаем испытанию число 1,5. Так как $1{,}5^2=2{,}25<3$, то число десятых должно быть не меньше, чем 5. Попробуем взять число 1,7: мы видим, что $1{,}7^2=2{,}89<3$, и потому интересующая нас цифра не меньше, чем 7. Испытывая число 1,8, убеждаемся, что $1{,}8^2=3{,}24>3$, и, значит, цифра 8 уже слишком

велика. Итак, наверное, первая цифра после запятой есть 7. Чтобы определить вторую цифру, возьмем хотя бы число 1,75: так как $1{,}75^2 = 3{,}0625 > 3$, то мы взяли слишком много. Подставив в уравнение $x = 1{,}72$, получим $x^2 = 2{,}9584 < 3$: это — недостаточно. Дальше, $1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3$: тоже мало. Но $1{,}74^2 = 3{,}0276$ — уже больше, чем нужно. Таперь нет сомнения в том, что вторая цифра после запятой есть 3. Можно сказать, что искомый корень $x = \sqrt[3]{3}$ приближенно, с точностью до одной сотой, равен 1,73... Если нужна большая точность, то таким же методом, с помощью дальнейших «проб», найдем и третий десятичный знак после запятой.

То же можно сказать и о вычислении корней кубических. Желая, например, определить приближенное значение $\sqrt[3]{7}$, т. е. найти приближенное решение уравнения

$$x^3 = 7,$$

мы в результате «проб» (затратив порядочно времени) придем к заключению, что $1{,}91^3 < 7$, но $1{,}92^3 > 7$; отсюда следует, что $\sqrt[3]{7}$ приближенно равняется 1,91 ..., причем можно ручаться за правильность всех выписанных цифр.

Более усовершенствованный прием извлечения корня (квадратного) указывается в основном курсе алгебры. С другой стороны, в особенности, если надо извлечь целый ряд корней, естественно прибегнуть к готовым таблицам. Существуют таблицы корней с четырьмя, пятью, десятью и большим числом десятичных знаков. Можно себе представить, какой громадный труд был вложен при составлении этих таблиц, иногда издаваемых в виде отдельных книжек.

Для целей курса начальной алгебры достаточны трехзначные таблицы, занимающие гораздо меньше места. Такие таблицы приведены в конце этой книги (стр. 348—349).

Следует заметить, что они составлены посредством округления до ближайшей тысячной тех данных, которые содержатся в более подробных таблицах. Поэтому погрешность, возникающая при заимствовании числового значения корня из таблиц этой книги, не может превысить половины тысячной, т. е. 0,0005.

Упражнение 229.

694. Найдите в вашей тетрадке график уравнения $y = x^2$ (параболу) и установите на глаз, какова абсцисса той точки графика (в пределах первой четверти), у которой ордината равна 10.

695. Вычислите $\sqrt{10}$ описанным выше методом «проб», определяя сначала целое число, затем число десятых и, наконец, число сотых. Запишите результаты в виде неравенств и в виде равенства (с многоточием).

696. Наметьте график уравнения

$$y = x^2 - 10,$$

подставляя значения

$$x = 2;\ 3;\ 4;\ 3{,}5;\ 3{,}3;\ 3{,}2;\ 3{,}1;\ 3{,}15;\ 3{,}16;\ 3{,}17.$$

Возьмите масштабы: 1 = 20 клеткам на оси Ox, 1 = 2 клеткам на оси Oy. В какой точке график пересекается с осью Ox?

697. Найдите по таблице, чему равняется $\sqrt{\ }$ 10, и сопоставьте результаты (пункты 694—697).

Упражнение 230.

698. Выполните подобные же действия по отношению к радикалу $\sqrt[3]{10}$.

699. Пользуясь таблицей корней квадратных, постройте (в масштабе: 1 = 10 клеткам) график уравнения $y = \sqrt{x}$ и сравните с графиком $y = x^2$ (в том же масштабе), который вы строили раньше.

700. Пользуясь таблицей корней кубических, постройте в том же масштабе график уравнения $y = \sqrt[3]{x}$ (добавьте значения $x = 0{,}125;\ 0{,}027;\ 0{,}343;\ 0{,}512;\ 0{,}729$) и сравните с имеющимся у вас графиком $y = x^3$.

Упражнение 231.

701. Разыщите (см. пункт 518) или восстановите график уравнения

$$y = (x^2 - 1)^2.$$

Глядя на график, скажите, при каких (приблизительно) значениях x величина y принимает значение 1,2, значение 0,5?

Проверьте вычислением.

Выразите x через y.

§ 79. Понятие об алгебраических корнях

Извлекая корень квадратный из какого-нибудь числа, например 25, мы ставим себе задачу — решить уравнение $x^2 = 25$, т. е. найти все числа, квадрат которых равен 25. Решение существует: уравнение имеет корень $x = 5$. Но этот корень — не единственный: противоположное по знаку число (—5) также удовлетворяет требованию:

$$(-5)^2 = 25.$$

Можно было бы рассуждать иначе: придав уравнению вид

$$x^2 - 25 = 0,$$

или

$$(x - 5)(x + 5) = 0,$$

и принимая во внимание, что произведение может равняться нулю только в том случае, если один из множителей равен нулю, мы видим, что неизвестное x или равно 5, или (—5) — третьего корня нет.

Таким же образом, *всякое положительное число имеет два корня квадратных: один корень — положительный, другой — противоположный по знаку, отрицательный.* Пишут иногда:

$$\sqrt{25} = \pm 5, \quad \sqrt{1{,}69} = \pm 1{,}3 \text{ и т. п.}$$

Положительное значение корня квадратного называется арифметическим (или значением корня в арифметическом смысле).

Напротив, если хотят рассматривать оба значения квадратного корня из положительного числа, то говорят об алгебраических значениях корня (или о значениях корня в алгебраическом смысле).

Из отрицательного числа квадратный корень извлечь нельзя; действительно, квадрат никакого числа не может быть отрицательным. Другими словами, отрицательные числа квадратных корней не имеют.

Что касается нуля, то легко понять, что корень квадратный из 0 существует только один:

$$\sqrt{0} = 0.$$

В таблицах ради краткости указываются только арифметические (т. е. положительные) значения корней.

Полезно уяснить себе геометрическую сторону дела, добавляя к графику уравнения $y = \sqrt{x}$ (см. упр. 230, пункт 699) те точки, которые соответствуют отрицательным значениям радикалов.

Предыдущие замечания относятся только к корням квадратным, но не кубическим. Так как куб всякого положительного числа есть число положительное, а куб всякого отрицательного числа — число отрицательное, то и обратно: *корень кубический из положительного числа имеет лишь одно значение — положительное, а корень кубический из отрицательного числа — лишь одно значение, отрицательное.*

Например:

$$5^3 = 125, \qquad (-5)^3 = -125,$$

поэтому

$$\sqrt[3]{125} = 5, \qquad \sqrt[3]{-125} = -5.$$

К тому же результату приводит иное рассуждение. Уравнению $x^3 = 125$ можно придать вид $x^3 - 125 = 0$, или

$$(x-5)(x^2+5x+25) = 0.$$

Второй множитель не может равняться нулю, так как при любом значении x

$$x^2 + 5x + 25 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{75}{4} > 0$$

и значит, должен быть равен нулю первый множитель, что дает $x = 5$.

Глядя на график уравнения кубической параболы $y = x^3$, совсем не трудно «прочесть» ответ на вопрос: сколько существует корней кубических из данного, положительного или отрицательного, числа.

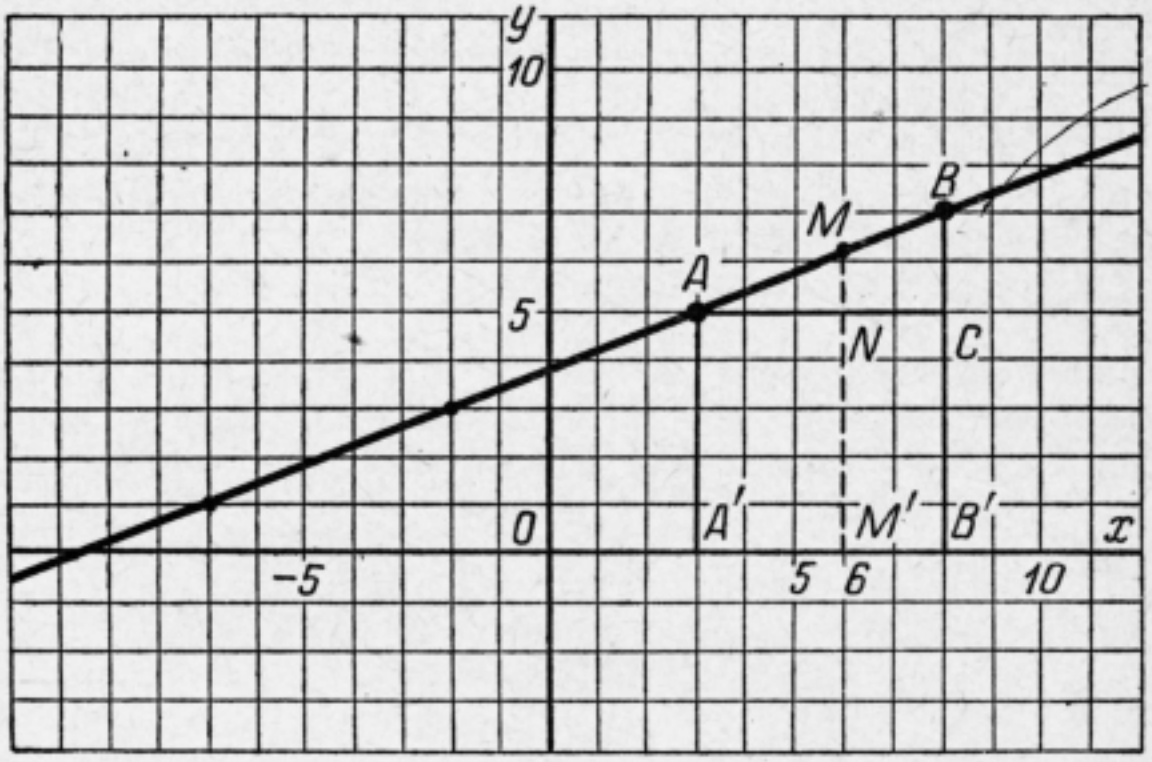
§ 80. Нахождение промежуточных значений по таблице

Упражнение 232.

702. На прямой линии лежат две точки $A(3, 5)$ и $B(8, 7)$. Лежащая на той же прямой промежуточная точка M имеет абсциссу 6. Определить ее ординату (см. черт. 55).

Указание. Написав уравнение прямой линии в форме $y = mx + n$, следует подобрать коэффициенты

m и n таким образом, чтобы уравнению удовлетворяли координаты точек A и B. Затем, подставив в уравнение найденные значения m и n, останется только вычислить значения y при $x = 6$ (см. § 74, упр. 214, пункт 643).



Черт. 55

Как ни просто указанное решение этой задачи, при необходимости решать большое число задач подобного содержания удобнее рассуждать несколько иначе. Именно, достаточно прибегнуть к составлению пропорции. Из чертежа видно, что в треугольниках ACB и AMN катеты NM и CB пропорциональны катетам AN и AC:

$$\frac{NM}{AN} = \frac{CB}{AC}.$$

В этой пропорции известны все члены, кроме первого; в самом деле:

$$CB = B'B - A'A = 7 - 5 = 2,$$
$$AN = OM' - OA' = 6 - 3 = 3,$$
$$AC = OB' - OA' = 8 - 3 = 5.$$

Поэтому пропорция принимает вид

$$\frac{NM}{3} = \frac{2}{5},$$

и отсюда следует:

$$NM = \frac{2}{5} \cdot 3 = 1{,}2,$$

$$M'M = A'A + NM = 5 + 1{,}2 = 6{,}2.$$

Короче: если на 5 единиц «приращения абсциссы x» (AC) приходится 2 единицы «приращения ординаты y» (CB), то на 3 единицы «приращения абсциссы x» (AN) придется $\frac{3}{5} \cdot 2$, т. е. 1,2 «приращения ординаты» (NM); итого, искомая ордината равна «начальной» ($A'A$) плюс «приращение» (NM): $5 + 1{,}2 = 6{,}2$.

Упражнение 233.

703. Известно, что величины x и y связаны линейной зависимостью $y = mx + n$. Не вычисляя коэффициентов m и n, заполните пустое место в табличке

x	y
5	18
10	25
7	

Решение. При увеличении x на $10-5=5$ y увеличивается на $25-18=7$. Значит, при увеличении x на $7-5-=2$ y увеличивается на $\frac{2}{5} \cdot 7 = 2{,}8$.

Итак, на пустом месте нужно написать

$$18 + 2{,}8 = 20{,}8.$$

704. Рассуждая подобным же образом, заполните пустые места в табличках

a)

x	y
5	18
10	25
8	
6	

b)

x	y
228	312
233	319
229	
230	
231	
232	

c)

x	y
120	741
121	
122	
123	
124	
125	726

d)

x	y
0,15	2,134
0,17	2,076
0,157	

При нахождении корня квадратного или кубического из числа, которое отсутствует в таблице, но

заключено между двумя числами, имеющимися в таблице, приходится решать подобные же задачи. Правда, таблица составлена не для линейной зависимости, и, следовательно, график ее — не прямая линия; тем не менее на очень маленьком протяжении (между точками, абсциссы которых равны последовательно взятым числам таблицы) кривую приближенно можно заменить прямой линией и зависимость между x и y считать линейной.

Пример 1. $\sqrt{6{,}72} = ?$

В таблице находим:

6,7	2,588
6,8	2,608

При увеличении числа на 0,1 корень из него увеличивается на 0,020. Отсюда следует, что при увеличении числа на 0,01 корень увеличивается на 0,002; а при увеличении на 0,02 корень должен увеличиться на 0,004. Итак, можно считать, что $\sqrt{6{,}72}$ равняется 2,592.

Пример. 2. $\sqrt[3]{352{,}7} = ?$ В таблице находим:

350	7,047
360	7,114

Запишем кратко приращения:

10	0,067
1	0,0067
0,1	0,00067
2	0,0134
0,7	0,00469
2,7	0,018 (округлено в тысячных)

Итак, $\sqrt[3]{352{,}7}$ равняется 7,047 + 0,018, т. е. 7,065.

Полезно постепенно научиться проделывать подобного рода вычисления в уме.

Упражнение 234.

705. Пользуясь таблицами, имеющимися в этой книге (стр. 348 и 349), вычислить с округлением в тысячных значения следующих радикалов:

1) $\sqrt{5{,}34}$, 2) $\sqrt{73{,}8}$, 3) $\sqrt{0{,}53}$,

4) $\sqrt[3]{8{,}1}$, 5) $\sqrt[3]{255}$, 6) $\sqrt[3]{630{,}1}$.

Упражнение 235.

706. С помощью таблиц найдите значения величины

$$y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$$

при значениях $x = 0; 0{,}1; 0{,}2; \ldots; 1{,}9; 2$.

Найдите также значения величины

$$y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$$

при $x = 0; 0{,}1; 0{,}2; \ldots; 0{,}9; 1$.

Пользуясь вычисленными значениями, наметьте график уравнения

$$y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$$

(где оба радикала понимаются в алгебраическом смысле).

§ 81. Употребление таблиц при решении простейших геометрических задач

Примечание. Пользуясь в дальнейшем таблицами корней квадратных и кубических, следует округлять данные и результаты до трех значащих цифр.

Упражнение 236.

707. Площадь прямоугольника выражается формулой

$$S = ab.$$

Выразите b через S и a. Выразите a через S и b. Положите b равным a (случай квадрата) и после этого выразите a через S.

По формуле

$$a = \sqrt{S}$$

вычислите сторону квадрата, площадь которого равна S ($см^2$), при числовых данных

$$S = 50, 60, 70, 80, 90, 100 \ (см^2).$$

Нарисуйте квадраты, соотьетствующие этим данным, на клетчатой бумаге.

708. Объем прямоугольной призмы выражается формулой

$$V = abc.$$

Выразите c через V, a и b; b через V, a и c; a через V, b и c. Положите b и c равными a (случай куба) и после этого выразите a через V.

По формуле

$$a = \sqrt[3]{V}$$

вычислите сторону (ребро) куба, объем которого равен V ($см^3$), при числовых данных

$$V = 500, 600, 700, 800, 900, 1000\ (см^3).$$

Нарисуйте стороны соответствующих кубов на клетчатой бумаге.

709. В формуле для объема прямоугольной призмы $V = abc$ положите c равным a (случай призмы с квадратным основанием).

Решите уравнение

$$V = a^2b$$

относительно b; относительно a. По формуле

$$a = \sqrt{\frac{V}{b}}$$

вычислите сторону a квадрата, служащего основанием, при числовых данных $V = 1000$ ($см^3$), $b = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ($см$). Нарисуйте соответствующие квадраты на клетчатой бумаге.

710. Площадь круга выражается формулой

$$S = \pi R^2 (\pi = 3{,}1415...).$$

Как выражается радиус круга R через его площадь S?

По формуле

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

вычислите радиус круга R при числовых данных

$$S = 50, 60, 70, 80, 90, 100\ (см^2).$$

Нарисуйте соответствующие круги циркулем на клетчатой бумаге.

711. Объем кругового цилиндра выражается формулой

$$V = \pi R^2 H.$$

Выразите H через V и R; R через V и H. По формуле

$$R = \sqrt{\frac{V}{\pi H}}$$

вычислите радиус R при числовых данных

$$V = 1000 \ (см^3), \ H = 5, 8, 10 \ (см).$$

Как выразить R через V, если известно, что $H = R$?

712. Объем шара выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Выразите R через V. По формуле

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

определите радиус R при данных

$$V = 500, 800, 1000 \ (см^3).$$

Упражнение 237.

Катеты a и b и гипотенуза c прямоугольного треугольника связаны между собою, как известно, соотношением Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

713. Выразите c через a и b. По формуле

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

вычислите гипотенузу, предполагая, что длины катетов даются равенствами

1) $a = 3, \ b = 10$, 2) $a = 7, \ b = 9$, 3) $a = 5, \ b = 14$.

Постройте треугольники на клетчатой бумаге и проверьте вычисление циркулем.

714. Выразите b через a и c; выразите a через b и c. По формуле

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

вычислите катет b, если дано:

1) $a = 3, \ c = 10$, 2) $a = 7, \ c = 9$, 3) $a = 5, \ c = 14$.

Пользуясь циркулем, постройте треугольники на клетчатой бумаге и сделайте проверку.

715. В формуле $a^2 + b^2 = a^2$ положите b равным a (случай равнобедренного прямоугольного треугольника).

Решите уравнение $2a^2 = c^2$: а) относительно c, b) относительно a.

Во сколько раз диагональ квадрата больше его стороны? Какую часть (сколько сотых) диагонали составляет сторона?

716. Даны вершины треугольника $A(1,2)$, $B(3,7)$, $C(9,3)$. Определить его стороны и периметр.

717. В формуле $a^2 + b^2 = c^2$ положите b равным $\frac{c}{2}$ (половина равностороннего треугольника).

Решите уравнение

$$a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = c^2$$

а) относительно a, b) относительно c. Вычислите отношение высоты равностороннего треугольника к его стороне.

§ 82. Приближенное определение корней уравнения

Пусть дано уравнение второй степени (квадратное уравнение)

$$x^2 - 6x - 1 = 0.$$

Пробуя разыскать его решение непосредственными подстановками, мы замечаем, что его левая часть (которую мы обозначим через y)

$$y = x^2 - 6x - 1$$

при значениях x, равных 0, 1,..., 6, принимает отрицательные значения, но при значениях $x = 7, 8, \ldots$ принимает значения положительные

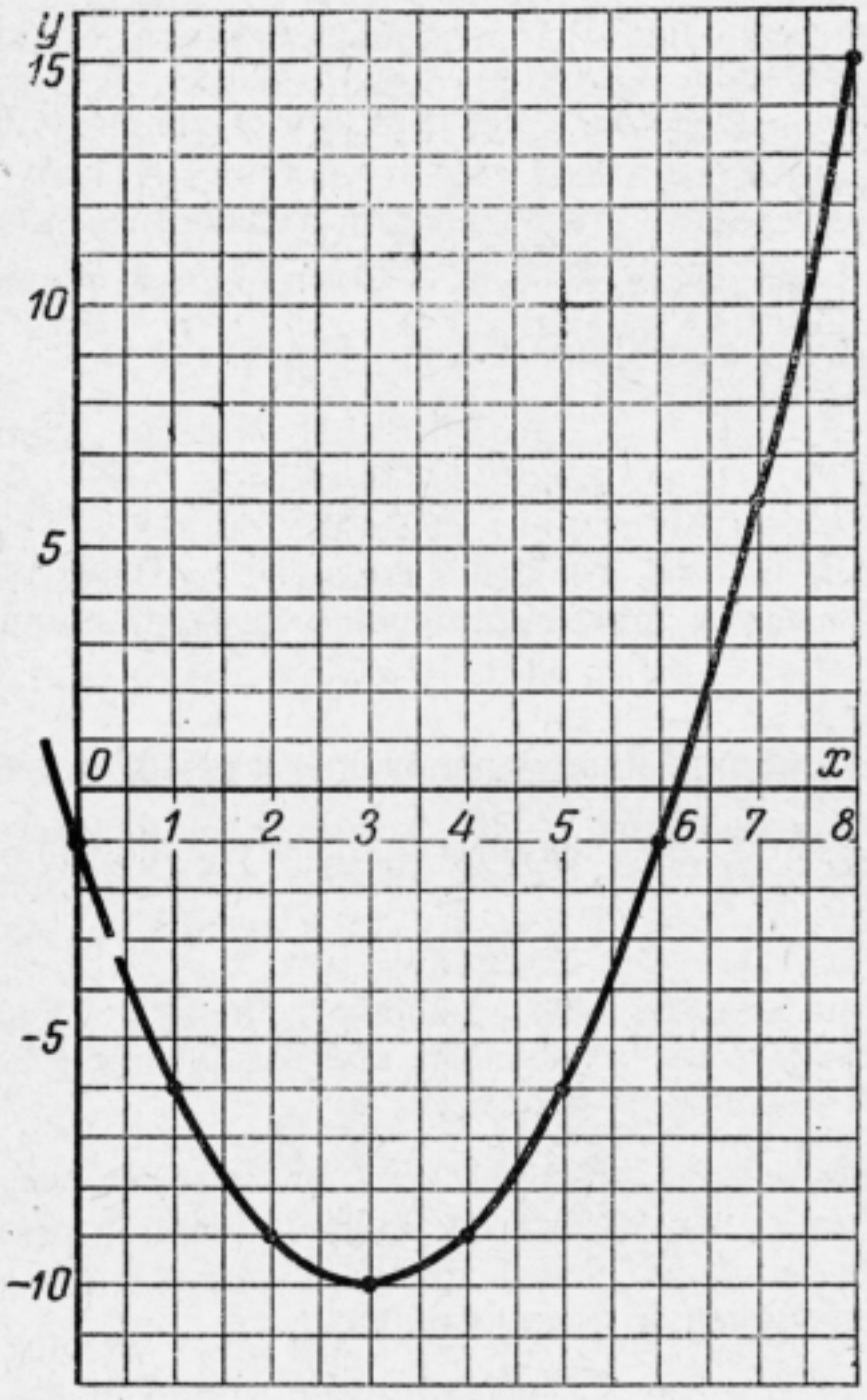
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8 ...
y	−1	−6	−9	−10	−9	−6	−1	6	15 ...

Соответствующий график намечен на черт. 56.

Возникает мысль, что при переходе от точки $A(6,-1)$ к точке $B(7, 6)$ кривая должна в какой-то точке, абсцисса которой заключена между 6 и 7, пересечь

ось Ox; другими словами, величина y должна принять значение 0, т. е. уравнение $x^2 - 6x - 1 = 0$ должно иметь корень в промежутке $6 < x < 7$.

Более точно этот корень можно вычислить уже знакомыми нам приемами (§ 78). Подставляя хотя бы



Черт. 56

значение $x = 6{,}5$, мы убеждаемся, что при этом значении величина y принимает уже положительное значение 2,25; отсюда можно заключить, что перемена знака y совершается в промежутке, более тесном $6 < x < 6{,}5$. Подставляя $x = 6{,}2$, получаем $y = 0{,}24 > 0$,

и промежуток снова стеснился: $6 < x < 6{,}2$. Наконец, подстановка $x = 6{,}1$ дает: $y = -0{,}39 < 0$; итак, искомый корень уравнения находится в промежутке $6{,}1 < x < 6{,}2$. Таким образом, значение корня уже известно с точностью до одной десятой.

Подставляя дальше промежуточные значения x, заключенные между 6,1 и 6,2, мы сможем вычислить корень с точностью до одной сотой и т. д.

Упражнение 238.

718. Показать, что уравнение $x^2 + x - 1 = 0$ имеет корень в промежутке $0 < x < 1$; вычислить этот корень с точностью до 0,1.

719. Показать, что уравнение $x^3 + x^2 - 10 = 0$ имеет корень в промежутке $1 < x < 2$; вычислить его с точностью до 0,1.

720. Показать, что уравнение $x^2 - 6x - 1 = 0$ имеет отрицательный корень в промежутке $-1 < x < 0$; вычислить его с точностью до 0,1.

§ 83. Применение радикалов к решению квадратных уравнений с числовыми коэффициентами

Рассмотрим неполное* квадратное уравнение

$$x^2 - 9 = 0$$

и постараемся найти все его корни. Сделать это очень легко, если преобразовать левую часть по формуле «разность квадратов» (§ 43, формула III):

$$(x - 3)(x + 3) = 0.$$

Дальше придется сказать: «Произведение равняется нулю в том, и только в том случае, если один из множителей равен нулю» (§ 25). В данном примере может быть одно из двух: или $x - 3 = 0$, или $x + 3 = 0$. Но в первом случае $x = 3$, во втором $x = -3$.

Итак, наше уравнение имеет точно два корня: 3 и -3.

Если бы было дано квадратное уравнение

$$x^2 - 10 = 0,$$

---

* Так называется это уравнение потому, что в нем отсутствует член первой степени.

то в предыдущем рассуждении изменялось бы немногое: нужно было бы принять во внимание, что

$$10 = (\sqrt{10})^2,$$

и тогда мы получили бы

$$x^2 - 10 = (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10}).$$

Отсюда можно было бы заключить о существовании двух корней уравнения, а именно, $\sqrt{10}$ и $-\sqrt{10}$ (см. конец § 78).

Упражнение 239.

721. Почему нельзя таким же образом решить уравнения

$$x^2 + 9 = 0 \text{ и } x^2 + 10 = 0?$$

722. Решите уравнения

$$1)\ x^2 - 1 = 0, \quad 2)\ x^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

$$3)\ x^2 - 529 = 0, \quad 4)\ x^2 = 0.$$

723. При каком условии можно решить уравнения

$$1)\ x^2 - a = 0, \quad 2)\ x^2 + a = 0?$$

Рассмотрим теперь полное квадратное уравнение, например,

$$x^2 - 6x - 1 = 0.$$

Его решение не представит труда, если удастся разложить на линейные множители левую часть. Для разложения трехчлена второй степени на линейные множители существует замечательный прием, который носит название «выделение квадрата».

В формуле «квадрат суммы» (§ 42, формула II)

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

положим $a = x$, $b = -3$, и тогда получим

$$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9.$$

Последнее выражение только свободным членом отличается от левой части данного уравнения $x^2 - 6x - 1$. Если добавим свободный член 9, то, чтобы

тождество не было нарушено, придется одновременно 9 отнять:

$$x^2 - 6x - 1 = (x^2 - 6x + 9) - (1 + 9) = (x - 3)^2 - 10.$$

Итак, наш трехчлен принимает вид

$$x^2 - 6x - 1 = (x - 3)^2 - 10,$$

или

$$x^2 - 6x - 1 = (x - 3)^2 - (\sqrt{10})^2.$$

Теперь уже ничего не стоит разложить трехчлен на множители:

$$x^2 - 6x - 1 = \left((x - 3) - \sqrt{10}\right)\left((x - 3) + \sqrt{10}\right) =$$
$$= \left(x - (3 + \sqrt{10})\right)\left(x - (3 - \sqrt{10})\right).$$

После этого уравнение можно переписать в следующей форме

$$\left(x - (3 + \sqrt{10})\right)\left(x - (3 - \sqrt{10})\right) = 0,$$

и прежнее рассуждение приводит к заключению, что данное уравнение имеет два корня: $3 + \sqrt{10}$ и $3 - \sqrt{10}$.

Обращаясь к таблицам, видим, что эти корни приближенно равны

$$6{,}162 \text{ и } -0{,}162.$$

Упражнение 240.

724. По приведенному образцу разложить на множители следующие трехчлены:

1) $x^2 - 6x + 8$, 2) $x^2 - 10x + 16$, 3) $x^2 + 4x - 21$,
4) $x^2 + x - 2$, 5) $x^2 - 6x + 7$, 6) $x^2 - 10x + 15$,
7) $x^2 + 4x - 20$, 8) $x^2 + x - 1$, 9) $x^2 - 6x + 9$,
10) $x^2 - 6x$.

725. Решить квадратные уравнения, в левой части которых стоит каждый из трехчленов 1) — 10), а в правой 0.

726. Посредством «выделения квадрата» покажите, что уравнения

1) $x^2 - 6x + 10 = 0$, 2) $x^2 + x + 1 = 0$, 3) $x^2 - x + 1 = 0$

не имеют корней.

727. Наметьте графики уравнений

1) $y = x^2 - 6x + 8$, 2) $y = x^2 - 6x + 10$,

подставляя целые значения x из промежутка $-2 < x < 8$.

728. Доказать, что уравнение

$$x^3 - a^3 = 0$$

имеет только один корень $x = a$.

Если коэффициент при старшем члене в данном трехчлене не равен единице, то лучше всего при разложении трехчлена на множители сразу выносить его за скобки. Например,

$$3x^2 - 10x + 3 = 3\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right).$$

Но

$$x^2 - \frac{10}{3}x + 1 = \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} =$$

$$= \left(x - \frac{5}{3} - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{5}{3} + \frac{4}{3}\right) = (x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Значит,

$$3x^2 - 10x + 3 = 3\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right) = 3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= (x - 3)(3x - 1).$$

Упражнение 241.

729. Решите уравнения:

1) $2x^2 - 4x - 3 = 0$, 2) $3x^2 + 4x - 5 = 0$,

3) $2x^2 + 9x + 10 = 0$.

730. Давая букве x целые значения $(-10 < x < +10)$, построить по точкам график уравнения

$$y = 1 + \frac{x}{5} - \frac{x^2}{10}$$

и определить, посредством вычисления, точки его пересечения с осью Ox. Масштаб: 1 = 2 клеткам.

Упражнение 242.

731. Найти два числа, зная, что их сумма равна 17, а произведение равно 70.

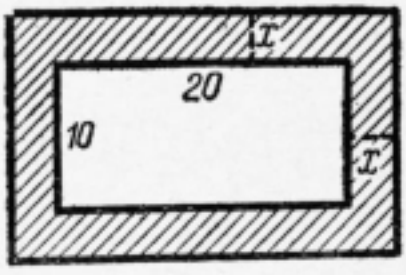
732. Найти размеры прямоугольника, зная, что его периметр равен 44 *см*, а площадь равна $S(см^2)$.

Положите:

а) $S = 40$, b) $S = 20$.

733. Высота прямоугольника на 2 *м* меньше основания, а площадь равна 5 $м^2$. Вычислить основание.

734. Вокруг дома, основание которого имеет длину 20 *м* и ширину 10 *м*, сделан тротуар (см. черт. 57), общая площадь которого составляет 99 $м^2$. Какова ширина тротуара?



Черт. 57

735. Из трех чисел второе на единицу больше первого, третье — на единицу больше второго, а сумма квадратов двух первых чисел равна квадрату третьего. Что это за число?

736. Больший катет прямоугольного треугольника на один метр больше меньшего, а гипотенуза — на один метр больше большего катета. Определить стороны треугольника.

737. Во сколько раз нужно увеличить сторону квадрата, чтобы площадь его увеличилась в n раз?

738. Во сколько раз нужно увеличить сторону куба, чтобы объем его увеличился в n раз?

739. Куплено ткани на 40 р. Если бы метр ткани стоил на 2 р. меньше и куплено было на 3 метра больше, то заплатить пришлось бы 48 р. Сколько куплено ткани и по какой цене?

740. Куплено ткани на 40 р. Если бы метр ткани стоил на 2 р. больше и куплено было на один метр больше, то заплатить пришлось бы 60 р. Сколько куплено ткани и по какой цене?

§ 84. Некоторые действия с радикалами

Выполняя те или иные действия над радикалами, необходимо прежде всего помнить, что согласно смыслу радикала имеют место тождества

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \quad \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a,$$

или

$$a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \qquad a = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}.$$

Упражнение 243.

741. Упростить следующие выражения:

1) $\frac{3}{\sqrt{3}}$, 4) $\frac{a^2b}{\sqrt{a}}$,

2) $\frac{a}{\sqrt{a}}$, 5) $\frac{2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}$,

3) $\frac{20}{\sqrt{5}}$, 6) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$,

7) $10\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, 13) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$,

8) $mn\left(\frac{2}{\sqrt{m}}-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$, 14) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$,

9) $(1+\sqrt{2})^2$, 15) $(\sqrt{5})^3$,

10) $(1-\sqrt{3})^2$, 16) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^7$,

11) $(a+\sqrt{m})^2$, 17) $(\sqrt{a})^6$,

12) $(\sqrt{p}-q)^2$, 18) $(\sqrt[3]{a})^6$.

Предполагая числа a и b положительными, а все входящие корни считая арифметическими, установим справедливость следующих формул (I—IV):

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab} \qquad (I)$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \qquad (II)$$

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab} \qquad (III)$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \qquad (IV)$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства (I), посмотрим, каковы квадраты выражений $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ и $\sqrt{ab}$. Мы получаем:

$$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})=$$
$$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{a})\cdot(\sqrt{b}\cdot\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab$$
$$(\sqrt{ab})^2=\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}=ab.$$

Оказывается, что положительные числа $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ и $\sqrt{ab}$ имеют одинаковые квадраты, именно, ab. Значит, они оба являются корнями квадратными из числа ab. Но так как каждое положительное число имеет только один положительный квадратный корень, то отсюда следует, что рассматриваемые числа не могут быть различными. Таким же образом устанавливается справедливость равенства (II).

Что касается равенств (III) и (IV), то для их доказательства нужно, конечно, сравнить между собой не квадраты, а кубы правой и левой частей, ссылаясь на то, что каждое положительное число имеет только один кубический корень.

Упражнение 244.

742. Упростить следующие выражения:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$,
2) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$,
3) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^5$,
4) $a\sqrt{a}\cdot b\sqrt{b}$,
5) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$,
6) $\sqrt{12}$,
7) $\sqrt{72}$,
8) $\sqrt{\dfrac{3}{4}}$,
9) $\sqrt{2520}$,
10) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{18}}$,
11) $\sqrt[3]{250}$,
12) $\sqrt{1000}$,
13) $\sqrt{a^3b^2c}$,
14) $\sqrt{\dfrac{mn^3}{pq^4}}$,
15) $\sqrt[3]{a^3b^2c}$,
16) $\sqrt{\dfrac{mn^3}{pq^4}}$,
17) $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}}$,
18) $\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}}$,
19) $\left(1+\sqrt{2}\right)^3$,
20) $\left(a+\sqrt{m}\right)^3$,
21) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$,
22) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3$,
23) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{b}\right)$.

743. Объясните, как получаются равенства:

1) $\sqrt{n}=10\sqrt{\dfrac{n}{100}}$,
2) $\sqrt{n}=\dfrac{1}{10}\sqrt{100n}$,
3) $\sqrt[3]{n}=10\sqrt[3]{\dfrac{n}{1000}}$,
4) $\sqrt[3]{n}=\dfrac{1}{10}\sqrt[3]{1000\,n}$.

Если в данном уравнении неизвестная буква стоит под радикалом (квадратным или кубическим), то освободиться от радикала удается посредством возведения обеих частей уравнения в степень (вторую или третью). При этом мы опираемся на свойства равенств: 1) если $a = b$, то $a^2 = b^2$, 2) если $a = b$, то $a^3 = b^3$.

Упомянутые свойства не являются для нас новыми. Нам уже известно (§ 71), что если $a = b$ и $c = d$, то $ac = bd$. В частности, полагая c равным a и d равным b, мы получим первое из свойств. Полагая c равным a^2 и b равным d^2, получим второе.

При решении уравнений, содержащих радикалы, необходимо делать проверку.

Упражнение 245.

744. Верно ли, что

1) если $a^2 = b^2$, то $a = b$? 2) если $a^3 = b^3$, то $a = b$?

745. Решите следующие уравнения и сделайте проверку:

1) $5\sqrt{x} = 3$, 4) $\sqrt{x-5} = 2$, 7) $\sqrt[3]{x+1} = 8$,

2) $\frac{1}{\sqrt{3x}} = 2$, 5) $3\sqrt{2x+1} = 2\sqrt{5}$, 8) $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \frac{2}{3}$,

3) $\frac{1}{3\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$, 6) $\sqrt{x^2-4} = x-1$, 9) $\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{2}$.

*** 746.** Решите уравнение

$$y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$$

относительно x. Какова степень полученного уравнения относительно y?

*** 747.** Тот же вопрос по поводу уравнения

$$y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}$$

Упражнение 246.

*** 748.** Решите следующие уравнения относительно каждой из входящих букв.

1) $D^2 - a^2s = 0$, 3) $(1-m^2)t = am^2$,

2) $P - Qt^2 = 0$. 4) $e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$,

5) $F = \frac{m}{R^2}$, 6) $\frac{M-1}{M+1} = \frac{\sqrt{N}}{t}$.

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XII

Упражнение 247.

749. Проверьте (с помощью таблиц или иначе) справедливость следующих равенств, содержащих арифметические радикалы:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$, 2) $\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$

Упражнение 248.

750. Решите уравнения:

1) $a^2-2x+3=0$, 3) $3x^2-2x+1=0$,

2) $x^2-3x+5=0$, 4) $5x^2-3x+1=0$.

Разложите на множители левые части этих уравнений.

751. Решите, если это возможно, уравнения:

1) $\sqrt[3]{1-x^2} = \frac{1}{2}$, 2) $\sqrt{x^2+96} = 2x+1$,

3) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7$, 4) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$,

5) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}=1$.

Сделайте проверку.

752. Решите следующие уравнения относительно каждой из входящих букв:

1) $S^2 = a^2(b^2-x^2)$, 2) $TU^3V^2 = p$,

3) $s = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}+y^2$, 4) $s = \frac{1}{\sqrt{x}+y^3}$.

753. Известно, что площадь каждой из названных ниже фигур равна 1 $м^2$: а) квадрат, б) прямоугольный равнобедренный треугольник, в) равносторонний треугольник, г) круг, д) полукруг. Вычислить: а) — в) сторону, г) — д) радиус.

754. Известно, что объем каждого из названных ниже тел равен 1 $м^3$: а) куб, б) цилиндр, у которого осевое сечение — квадрат, в) шар, г) полушар. Вычислить: а) сторону, б) сторону осевого сечения, в) — г) радиус.

ОБЩИЕ ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

I

1. Что называется отношением двух чисел? Что такое пропорция? Каково основное свойство пропорции? Объясните, откуда оно получается. Дана пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Выразите каждую из четырех букв через три остальные.

2. В каком случае две величины называются прямо пропорциональными, обратно пропорциональными? Приведите по три примера.

Предположим, что величины x и y связаны соотношением прямой пропорциональности

$$y = mx.$$

Пусть эта формула при $x=a$ дает $y=c$ и при $x=b$ дает $y=d$. Тогда имеет место пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Докажите это.

Предположим, что величины x и y связаны соотношением обратной пропорциональности

$$xy = m, \text{ или } y = \frac{m}{x}.$$

Пусть последняя формула при $x = a$ дает $y = c$ и при $x = b$ дает $y = d$. Тогда имеет место пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}.$$

Докажите это.

3. Каков геометрический смысл уравнения $y = mx$?

Известно, что величины x и y прямо пропорциональны и что при $x = 23{,}7$ получается $y = 8{,}3$; постройте (без вычислений) график зависимости между x и y.

Используйте этот график для того, чтобы заполнить пустые места в таблице:

x	y
23,7	8,3
15,9	
26,2	
	5,8
9,4	

4. В уравнении $y = \sqrt{cx}$ подберите значение c таким образом, чтобы при $x = 12$ было $y = 3{,}6$. Пользуясь таблицей квадратных корней и подставляя целые значения x, наметьте по точкам график полученного уравнения; проверьте, проходит ли он через точку (12; 3,6). При каком значении x величина y примет значение 5?

Пропорциональны ли между собою в этом примере величины x и y?

5. Постарайтесь решить в уме следующие уравнения:

$$1)\ 5(x-2) = 8 - 3(x-2),\quad 2)\ \frac{3}{x-1} - \frac{3}{1-x} = \frac{2}{3},$$

$$3)\ (2x+3)^2 - 5(2x-3) + 6 = 0.$$

6. Даны выражения

$$A = \frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n} \text{ и } B = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}.$$

Составьте $A+B$, $A-B$, AB и $\frac{A}{B}$ и произведите упрощения. Проконтролируйте правильность сделанных преобразований, подставляя: 1) числовое значение $n = 3$, 2) произвольно взятое числовое значение n.

7. Напишите дробь, знаменатель которой на 4 больше, чем числитель, но на 3 меньше удвоенного числителя.

8. Брат втрое старше сестры: через 3 года он будет старше лишь вдвое. Сколько лет каждому из них?

9. Допуская, что плотность зубного порошка равна 0,4 (это значит, что один кубический сантиметр порошка весит 0,4 грамма), определите, сколько граммов (p) порошка помещается в коробке с квадратным дном, имеющей размеры $m \times m \times n$ $см^3$.

Заполните двойную табличку, дающую значение p:

m \ n	3	4	5
6			
8			

10. Площадь квадрата равна 144 $м^2$; 14,4 $м^2$; 1,44 $м^2$. Какова его сторона?

Объем куба равен 729 $м^3$; 72,9 $м^3$; 0,729 $м^3$. Каково его ребро?

Во сколько раз уменьшается площадь квадрата при уменьшении его стороны в 10 раз? В m раз?

Во сколько раз уменьшается объем куба при уменьшении его ребра в 10 раз? В m раз?

II

1. Объясните смысл следующих утверждений:

«Длина окружности пропорциональна ее радиусу».

«Площадь круга пропорциональна квадрату радиуса».

«Объем шара пропорционален кубу радиуса».

«Ювелиры считают, что стоимость бриллианта пропорциональна четвертой степени его веса».

«Сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния частицы от центра притяжения».

Что представляют собой в этих примерах коэффициенты пропорциональности?

2. Что значит разделить число N на части пропорционально нескольким данным числам? Как это сделать на самом деле? Объясните в общей форме и приведите пример.

3. Если несколько лучей с общей вершиной пересечены двумя параллельными прямыми, то отрезки,

образовавшиеся на одной прямой, пропорциональны отрезкам, образовавшимся на другой прямой.

Используйте это обстоятельство для того, чтобы посредством геометрического построения разделить данное число (отрезок) N на части, пропорциональные числам (отрезкам) a, b, c, d. Положите: $N = 20$, $a = 4$, $b = 5$, $c = 1$, $d = 3$.

4. Посредством подобного же геометрического построения разделите данный отрезок на части, пропорциональные стороне и диагонали одного и того же квадрата. Как можно было бы сделать то же самое путем вычислений?

5. Решите уравнения:

$$1)\ \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}=\frac{3}{2},\quad 2)\ \frac{x+1}{2}-\frac{2}{x+1}=\frac{x-1}{2},$$

$$3)\ x+\frac{1}{x}=2+\frac{1}{2}.$$

6. Даны многочлены, расположенные по степеням x,

$$P = 2x^3 - x + 3 \text{ и } Q = x^2 + 5x.$$

Напишите в такой же форме их: 1) сумму $P + Q$; 2) разность $P - Q$; 3) произведение PQ. Разделите P на Q: какое получится частное S и какой остаток R? Напишите, чему равняется дробь $\frac{P}{Q}$, выделяя целую часть.

7. Допишите недостающие члены в следующих пропорциях таким образом, чтобы получились тождества:

$$1)\ \frac{3x}{5y}=\frac{?}{20y^2},\quad 2)\ \frac{m^2p}{2n}=\frac{3mp^2}{?}=\frac{?}{\left(-\frac{10}{mp}\right)},$$

$$3)\ \frac{?}{x^2-1}=\frac{x+1}{x-1},$$

$$4)\ \frac{a}{a+b}=\frac{1}{?},\quad 5)\ \frac{rs}{r^2+s^2}=\frac{1}{?},\quad 6)\ \frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{r}}{?}=\frac{(-\sqrt{7})}{?}.$$

8. Площади пяти кругов находятся в отношении 1 : 2 : 3 : 4 : 5. В каком отношении находятся их радиусы? Нарисуйте такие круги.

Объемы пяти шаров находятся в отношении 1:2:3:4:5. В каком отношении находятся их радиусы? Нарисуйте такие шары.

9. Некто на вопрос, сколько лет ему и его сыну, ответил: «Мне теперь 27 лет, а сколько лет сыну вы узнаете, если примете во внимание, что за последние два года его возраст увеличился во столько же раз, во сколько я буду старше, чем он, через 19 лет». Сколько лет сыну этого человека?

10. Наметьте (в пределах первой четверти) графики уравнений

$$\text{(a)}\quad y = 2 + \frac{x}{3},$$

$$\text{(b)}\quad y = 3 + \frac{x}{2}$$

и определите путем вычисления точку их пересечения.

III

1. Перечислите известные вам свойства (законы) арифметических действий. Приведите примеры.

2. Оправдывается ли переместительный закон для вычитания и для деления? Для возведения в степень?

В каких случаях имеют место равенства:

$$1)\ a - b = b - a,\quad 2)\ \frac{a}{b} = \frac{b}{a}?$$

Верно ли равенство

$$a - b = -(b - a)?$$

Верно ли равенство

$$(a - b)^2 = -(b - a)^2,$$

и если неверно, то всегда ли неверно? Когда именно неверно и когда верно?

Покажите на примерах (ограничиваясь целыми положительным числами), что равенство

$$a^b = b^a$$

не всегда верно; укажите вместе с тем и такие значения a и b, при которых оно удовлетворяется.

3. В чем заключается сочетательный закон (сложения и умножения)?

Верны ли равенства

$$1)\ 2^{(2^2)} = (2^2)^2,\quad 2)\ 3^{(3^3)} = (3^3)^3?$$

В чем заключается распределительный закон? Какие действия ему подчиняются?

4. Объясните, как устроена и для чего служит прямоугольная система координат на плоскости.

Наметьте на координатной сетке прямую

$$y = \frac{17x - 100}{48};$$

выпишите (точно) координаты каких-нибудь 3—4 точек, на ней расположенных.

В уравнении прямой

$$y = mx + n$$

подберите коэффициенты m и n таким образом, чтобы прямая прошла через точки P (2, 3) и Q (12, 6). Каково будет уравнение этой прямой? Какие отрезки она образует на осях Ox и Oy? Сделайте чертеж.

Каково расстояние между точками пересечения этой прямой с осями?

5. Решите уравнения:

$$1)\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{3},\quad 2)\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3},$$

$$3)\ x - \frac{1}{x} = \frac{5}{6}.$$

6. Решите системы уравнений:

$$1)\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases}\quad 2)\begin{cases} 3x^2 - \sqrt{y} = 9 \\ x^2 + 3\sqrt{y} = 13 \end{cases}$$

7. Даны формулы:

$$u = \frac{xy}{z},\quad v = \frac{x^3}{y^2},\quad w = \frac{x\sqrt{y}}{z^2},$$

$$U = \frac{x+y}{x-y},\quad V = \frac{xy+yz+xz}{x+y+z},\quad W = \frac{\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}}{xyz}.$$

Что станет с величинами u, v, w, U, V, W, если каждую из величин x, y, z увеличить в m раз?

8. Дана окружность радиуса R. Требуется провести концентрическую окружность, которая разделит внутренность данной окружности на две части одинаковой площади. Сделайте чертеж, положив $R = 10$.

Дан шар (сфера) радиуса R. Найдите радиус концентрической сферы, которая разделит внутренность данного шара на две части одинакового объема. Сделайте чертеж, положив $R = 10$.

9. Лодка за h часов проехала a километров вниз по реке, затем за k часов проехала b километров вверх по реке. Во сколько раз собственная скорость лодки u больше, чем скорость течения реки v?

Положите $h = 3$, $k = 4$, $a = 17$, $b = 15$.

10. В нефтелавке каждому покупателю отпускают по два литра керосина. Предполагая, что все покупатели приходят с сосудами цилиндрической формы, напишите зависимость между радиусом сосуда (R *см*) и уровнем (H *см*), до которого он наполняется. Выразите H через R; характеризуйте зависимость между R и H словами. Заполните пустые места в таблице

R	H
10	
5	
	10
	5

Наметьте график.

IV

1. Как производятся четыре основные действия (сложение, вычитание, умножение и деление) над двумя числами, из которых каждое может быть положительным, отрицательным или нулем?

В чем заключается «правило знаков» при умножении и делении? Иллюстрируйте примером и дайте подробные разъяснения.

2. Может ли a) сумма, b) разность, c) произведение двух чисел равняться нулю, и в каких именно случаях это возможно? Может ли дробь (частное) равняться нулю, и когда именно это бывает? Может ли a) сумма квадратов, b) разность квадратов двух чисел равняться нулю, и когда именно?

3. Что значит «возвести число a в степень n» (n — целое положительное число)? Что значит «извлечь из числа a корень степени n»?

Каков знак произведения m чисел в зависимости от знаков самых чисел? Сформулируйте правило возведения отрицательного числа в n-ю степень.

Что вам известно о числе корней a) 2-й, b) 3-й степени из данного числа? Об их знаках? Дайте по этому поводу обстоятельные разъяснения.

4. Скажите, из равенства $x = y$ следуют ли равенства:

a) $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, b) $3x + 5 = 3y + 5$, c) $ax + b = ay + b$,

*d) $x^2 - 2x + 3 = y^2 - 2y + 3$.

На каком основании?

Из равенства a) всегда ли следует равенство $x = y$? Объясните. То же по поводу равенств b), c), d).

5. Решите уравнения

1) $\frac{\frac{x}{2} + 3}{4} + 5 = 6$, 2) $\frac{\frac{x}{2} + 3}{4} + 5 = 6x$.

6. Обозначим: делимое через P, делитель через Q, частное через S и остаток через R. Тогда, как известно, P выражается через Q, S и R следующим образом:

$$P = QS + R.$$

Выразите подобным же образом: 1) Q через P, R и S, 2) через P, Q и S, 3) S через P, Q и R. Прочтите словами все полученные соотношения.

7. Треть суммы двух чисел на 8 больше, чем четверть их разности; треть разности на единицу больше, чем четверть их суммы. Найдите числа.

8. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом 4-, 5-, 6-угольнике? В каком многоугольнике можно провести ровно 35 диагоналей? 1952 диагонали?

9. Вокруг прямоугольного здания размером 10 *м* $\times$ $\times$ 22 *м* сделана асфальтовая дорожка. Какова ее площадь, если ширина равна 2 *м*?

Какой ширины можно было бы сделать дорожку, если асфальта хватило бы на 185 $м^2$? На 300 $м^2$?

10. Выразите диагональ c прямоугольника через его стороны a и b. Заполните приведенную двойную табличку

a \ b	3	5	7	9
2				
4				
6				

Округляйте в сотых. Проверяйте циркулем на клетчатой бумаге.

V

1. Что значит «решить уравнение»? Что называется корнем уравнения? Сколько корней может иметь уравнение?

Установите, какова степень следующих уравнений, и постарайтесь их решить:

$$1)\ x^3 = 4096,\ 2)\ \frac{x}{5} = \frac{3125}{x^2},$$

$$3)\ x^2 = (2x+1)(x-1) - x(x+1),\ 4)\ x^4 = 16,$$

$$5)\ (x+2)^3 = 8,\ 6)\ ((x-3)^2+1)^3 = 125,\ 7)\ (x^2-1)^3 = 10,$$

$$8)\ (x^3-1)^2 = 10.$$

2. Какие действия нужно выполнить над уравнением, чтобы узнать, какова его степень? Что такое степень уравнения?

3. Что значит «линейное уравнение»? Что значит «квадратное уравнение»? Бывают ли «кубические» уравнения?

Сколько корней может иметь линейное уравнение, квадратное уравнение? Всякое ли линейное уравнение имеет корень?

Напишите такое квадратное уравнение, в котором коэффициент при первой степени неизвестного отличен от нуля и которое не имеет корней.

4. Напишите уравнение, которое будет иметь корни:

1) 7 и 12, 2) (-1) и (-2), 3) 7, 5 и 2

4) 6, $\frac{1}{2}$ и (-4).

Как написать эти уравнения, не пользуясь скобками?

5. Решите уравнения:

$$1)\ \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}}=2,$$

$$2)\ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}=\frac{43}{30}.$$

6. Каково должно быть p для того, чтобы $x=3$ было корнем уравнения

$$x=\frac{x-p}{1-x}?$$

Имеет ли тогда уравнение еще и другие корни?

7. Если единицу прибавить к числителю дроби, получается $\frac{2}{3}$; если к знаменателю — получается $\frac{1}{2}$. Что это за дробь?

8. Призма с квадратным основанием и высотой, равной $h=4$ *см*, имеет полную поверхность $S=130$ *см*^{2}. Определите сторону основания и объем призмы V.

9. Для совместной поездки несколько туристов, разделив поровну расходы, наняли грузовик за 108 руб. Так как четверо из них не приняли участия в поездке, то каждому из остальных пришлось доплатить по 90 коп. Сколько было всего туристов и по какой сумме внес каждый из них первоначально?

10. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 *см*, длины катетов обозначим через x и y (*см*). Напишите уравнение, связывающее x и y. Выразите y через x. С помощью таблицы вычислите значения y при $x=0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$ и отметьте точки $(x,\ y)$ на координатной сетке и плоскости Oxy. Проверьте циркулем и с помощью циркуля отметьте также точки графика с абсциссами 1, 3, 5, 7, 9.

Докажите, что график — дуга окружности.

1. Дайте подробное описание того, как вы обыкновенно решаете уравнение относительно назначенной буквы: какие действия и в каком порядке вы совершаете? Укажите обоснование каждого шага.

2. Почему нужно менять знак члена, перенося его из одной части уравнения в другую? Почему, «перенося» множитель из одной части уравнения в другую, вы отправляете его из числителя в знаменатель (или обратно)?

Можно ли в данном уравнении переменить знаки при всех членах, и на каком основании? Можно ли, если уравнение имеет вид пропорции, «перевернуть» дроби в обеих частях, и почему?

Как «освобождаются от дробей» при решении уравнения? Приведите пример и объясните.

Как «освобождаются от радикалов»? Приведите пример и объясните. Решите уравнения:

$$1)\ \sqrt{x} = 2 - x, \quad 2)\ \sqrt{x} = x - 2.$$

3. Как решить уравнение, в котором нет ни дробей, ни радикалов, ни скобок, ни подобных членов? Напишите такое уравнение, но с условием, чтобы никто в классе не мог его решить, кроме вас.

Опишите отдельно приемы решения уравнений первой степени и уравнений второй степени.

4. На примерах уравнений

$$1)\ x^2 - 14x + 45 = 0 \text{ и } 2)\ 15x^2 + x - 6 = 0$$

объясните, в чем заключается «выделение квадрата»?

5. Постройте график уравнения

$$y = 3x^2 - 10x + 9.$$

Докажите, что он весь расположен выше оси OX. Найдите точку, в которой ордината графика имеет наименьшее значение: напишите ее координаты.

6. Докажите: квадрат суммы двух чисел больше или меньше, чем сумма квадратов тех же чисел — смотря по тому, имеют ли числа одинаковые или различные знаки; квадрат суммы и сумма квадратов равны между

собой в том, и только в том случае, если хотя бы одно из чисел равно нулю.

7. «Прекрасная дева с блестящими глазами, ты, которая умеешь правильно решать задачи обратным способом, — скажи мне число, которое, будучи умножено на 3, затем увеличено на $^3/_4$ этого произведения, разделено на 7, уменьшено на $^1/_3$ частного, возвышено в квадрат, уменьшено на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10, дает число 2?» (Древняя индусская задача.)

Составьте уравнение и решите его.

8. Каков должен быть поперечник (диаметр) и радиус круглой цветочной клумбы, чтобы ее площадь равнялась 12 $м^2$? 1 $м^2$?

Каков должен быть радиус шарообразного баллона («воздушного шара»), чтобы находящийся в нем газ занимал объем, равный 12 $м^3$? 1 $м^3$?

9. Собственная скорость лодки равна u ($км$ в час), скорость течения в реке равна v ($км$ в час). Сколько часов h потребуется, чтобы проехать в лодке d $км$ по течению и затем вернуться обратно?

Напишите формулу, выражающую h через u, v и d. Затем, пользуясь этой формулой, выразите 1) d через h, u и v, 2) v через u, h и d, 3) u через v, h и d.

Скажите словами, какие задачи решаются с помощью написанных вами формул (1—3).

10. В уравнении

$$xy = m(x + y)$$

подберите m таким образом, чтобы уравнение удовлетворялось значениями $x = 3$, $y = 2$.

Затем, решив уравнение относительно y, постройте по точкам его график.

Данному уравнению, разделив на mxy, можно придать вид

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m}.$$

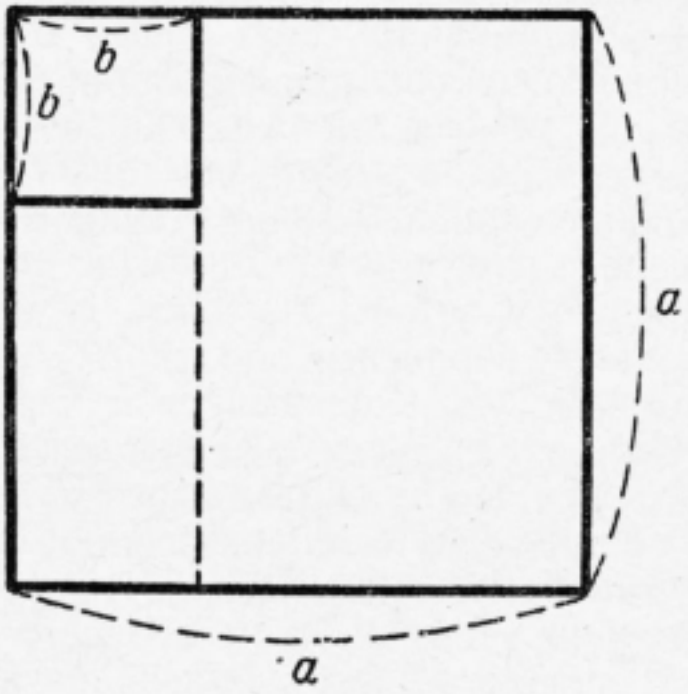
Придумайте задачу (на выполнение работы двумя работниками или на наполнение бассейна двумя трубами), которая приводила бы к рассмотрению этого уравнения. Истолкуйте нарисованный график применительно к условию этой задачи.

1. Что называется тождеством? Какие выражения считаются тождественно-равными? Что такое «тождественное преобразование? Какие вам известны тождественные преобразования целых и дробных выражений?

2. Докажите, что два выражения

$$U = \frac{(x+1)(x-2)}{x} + 1 \text{ и } V = x - \frac{2}{x}$$

равны между собою при всех значениях x (кроме, конечно, $x = 0$). Перечислите все законы (свойства действий и свойства равенств), на которые придется сослаться.



Черт. 58

3. Расположите многочлен

$$(b-c)(x-a)^2 + (c-a)(x-b)^2 + (a-b)(x-c)^2 + \\ + (b-c)(c-a)(a-b)$$

по убывающим степеням буквы x.

4. Выведите тождество

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

ссылаясь на основные законы (свойства действий). Посмотрите на черт. 58 и скажите, какие фигуры надо вырезать и как их сложить для того, чтобы наглядно проиллюстрировать это тождество.

5. Следующие многочлены разложите на линейные множители, прибегая к надлежащей группировке и ссылаясь на распределительный закон:

1) $xy + ax + ay + ab$, 2) $t^2 + 2ut - 3vt - 6uv$,

3) $3ac + 6bc + 5ad + 10bd$,

4) $mx + my - mz + ny - nz + nx$.

6. Решите уравнения

1) $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 40$, 2) $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 40$

и систему

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 64 \\ (x + 2)^2 - (y - 2)^2 = 16. \end{cases}$$

7. Найдите положительное число, зная, что выполнено одно из следующих условий:

a) квадратный корень из него в 30 раз меньше, чем само число,

b) кубический корень из него в 25 раз меньше, чем само число,

c) квадратный корень из него в 3 раза больше, чем кубический,

d) квадратный корень из него на 20 меньше, чем само число.

8. Диагональ квадрата на один метр больше стороны. Какова сторона? Диагональ куба на один метр больше ребра. Каково ребро?

9. Придумайте текст задачи, которая приводила бы к решению уравнения

$$ax + b(x + h) = s.$$

10. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 4 *см*, другой x *см*, гипотенуза y *см*. Напишите уравнение, связывающее эти величины. Решите его относительно y. Вычислите по таблицам значения y при $x = 0, 2, 4, 6 \ldots$ и наметьте график. Проверьте полученные точки посредством циркуля и добавьте промежуточные.

Выполните подобное же упражнение, считая по-прежнему один из катетов равным 4 *см*, но, обозначая через x гипотенузу, а через y — другой катет. Как раньше, решите уравнение, связывающее x и y, относительно y.

Подставлять придется значения x начиная с $x = 4$, т. е. 4, 6, 8, ... Сделайте проверку поставленных точек графика с помощью циркуля и добавьте промежуточные.

Намеченные графики — дуги кривых, называемых гиперболами. Сами кривые получатся полностью, если буквам x и y дать всевозможные, не только положительные, но и отрицательные значения.

VIII

1. Напишите и затем, ссылаясь на основные законы действий, выведите известные вам на память формулы: «квадрат и куб суммы», «квадрат и куб разности».

2. Разделив $a^3 + b^3$ на $a + b$ и $a^3 - b^3$ на $a - b$, получите формулы разложения «суммы кубов» и «разности кубов» на два множителя. Проверьте справедливость этих формул: 1) посредством умножения, 2) посредством подстановки частных значений.

3. Докажите, что выражения 1) $a^2 + b^2$, 2) $a^2 + ab + b^2$ и 3) $a^2 - ab + b^2$ не могут быть представлены как произведения двух линейных множителей.

Указание. Считайте букву b постоянной, а букву a переменной. Сошлитесь на то, что каждое линейное уравнение имеет корень. Используйте в примерах 2) и 3) выделение квадрата.

4. Представьте в виде дроби результат деления на $x + 1$ каждого из двучленов

$$x^2 + 1,\ x^2 - 1,\ x^3 + 1,\ x^3 - 1,\ x^4 + 1,\ x^4 - 1.$$

Исключите целую часть из каждой дроби.

Сделайте то же самое, заменив делитель $x + 1$ делителем $x - 1$.

5. Найдите НОД и НОК выражений:

1) $8uv^3w^2$ и $18u^2vw^3$,

2) $(m + 1)(m + 3)^2(m + 4)(m + 5)^3(m + 7)$,
$(m + 3)(m + 4)^2(m + 6)(m + 7)^3$ и $(m + 3)(m + 7)$,

3) $x^2 - 1$, $x^3 - 1$ и $x^4 - 1$.

6. Даны три числа, из которых ни одно не равно нулю. Докажите, что если квадрат их суммы равен сумме квадратов, то непременно сумма величин, им обратных, равна нулю. Проверьте на примерах, что в этом случае указанное обстоятельство, действительно, имеет место.

7. Если множимое увеличить на 10, то произведение увеличивается втрое; если увеличить на 10 множитель, то произведение увеличивается вшестеро. Чему равно произведение?

8. Из куска глины объемом в $V = 1200$ *см*^{3} нужно слепить параллелепипед, три измерения которого находятся в отношении $p : q : r$. Каковы будут его ребра?

Из такого же куска глины нужно слепить три куба, объемы которых находятся в отношении $p : q : r$. Каковы будут их ребра?

Положите:

1) $p = 1,\ q = 2,\ r = 3$; 2) $p = 2,\ q = 3,\ r = 4$.

9. Придумайте задачу, которая приводила бы к решению уравнения

$$\frac{x-a}{p} + \frac{x+b}{q} = d.$$

10. Уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ геометрически представляет окружность радиуса R с центром в начале O. Скажите, почему это так?

Положите $R = 5$ и, найдя несколько точек графика путем вычисления, проведите затем окружность циркулем.

Решите системы уравнений

1) $\begin{cases} x^3 + y^2 = 25 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 6. \end{cases}$

Проконтролируйте полученные решения чертежом.

1. Что называется графиком уравнения, содержащего две буквы x и y?

Установите, каковы на плоскости Oxy графики следующих уравнений:

1) $xy = 0$, 2) $xy = y$, 3) $x + y = 0$, 4) $x^2 - y^2 = 0$,
5) $x^2 + y^2 = 0$, 6) $(x + y)^2 = 1$, 7) $x^3 + y^3 = xy(1 + xy)$,
8) $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Указание к примеру 7. Перенесите все налево и, надлежащим образом группируя члены, разложите левую часть на множители.

2. Можно ли извлечь корень квадратный из отрицательного числа? Наметьте график уравнения

$$y = \sqrt{-x}.$$

Найдите точки пересечения его с прямыми

$a)$ $x + 9 = 0$, $b)$ $y - 2 = 0$, $c)$ $2x - y + 15 = 0$

которые также изобразите на чертеже.

3. Напишите уравнение, график которого был бы прямой линией, пересекающей ось Ox в точке с абсциссой 3, а ось Oy — в точке с ординатой 7.

Напишите уравнение прямой, график которой был бы прямой линией, пересекающей ось Ox в точке с абсциссой a, а ось Oy — в точке с ординатой b.

4. Решите уравнение

$$\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1}.$$

Сделайте проверку.

5. Подберите положительное значение R таким образом, чтобы уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2$$

удовлетворялось при $x = 6$, $y = 8$. Начертите график — окружность. Найдите точки пересечения окружности с прямыми:

1) $x + 2y = 11$, 2) $2x + y = 13$, 3) $5x - y = 22$.

Установите также, в каких точках пересекаются между собою эти прямые линии.

6. При каком значении буквы d значение выражения

$$\frac{2x+3}{5x+d}$$

не зависит от значения x?

Как должны быть связаны между собою значения букв a, b, c и d, чтобы значение выражения

$$\frac{ax+b}{cx+d}$$

не зависело от значения x?

7. Квадрат числа на $\frac{6}{25}$ меньше, чем само число. Что это за число?

Квадрат утроенного числа на $\frac{1}{6}$ больше, чем утроенный квадрат того же числа. Что это за число?

8. Периметр равнобедренного прямоугольного треугольника равен 3 *м*. Каковы катеты и гипотенуза?

9. Придумайте задачу, которая приводила бы к решению системы уравнений

$$\begin{cases} ax+by=m \\ x+y=n. \end{cases}$$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ x^2-y^2=24. \end{cases}$$

Постройте графики каждого из уравнений и проконтролируйте правильность решения чертежом.

X

1. Что называется решением системы двух уравнений с двумя неизвестными?

Каков геометрический смысл такой системы?

В чем заключается решение системы методом подстановки?

2. Что значит «исключить букву из двух уравнений»? Какими способами можно производить исключение? Приведите примеры.

Просмотрев примеры § 76, постарайтесь дать ответ на вопрос: «З а ч е м нужно бывает исключать букву из данных уравнений?»

3. Какая система называется линейной?

В чем заключается решение линейной системы способом уравнивания коэффициентов?

Сколько решений имеет линейная система? Всегда ли только одно?

4. Каково должно быть значение буквы s для того, чтобы система

$$\begin{cases} (3 - s)x - 4y = 20 \\ x - (2 + s)y = 5 \end{cases}$$

имела не одно решение? Сколько их в таком случае будет?

5. Дайте геометрическое истолкование предыдущей системы, полагая в ней a) $s = 0$, b) $s = 2$, c) $s = -1$.

6. При каких значениях x и y имеет место равенство

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x + y}?$$

7. Представить число 120 как произведение двух множителей, разность которых равнялась бы 19?

Сколькими способами это можно сделать?

8. Сумма катетов x и y прямоугольного треугольника равна 4, гипотенуза равна 3. Каковы катеты?

Катеты прямоугольного треугольника x и y относятся, как 2 : 3. Гипотенуза равна 10. Каковы катеты?

В обеих задачах дайте геометрическое представление системы уравнений. Укажите для обеих задач прием построения с помощью циркуля и линейки.

9. Придумайте задачу, которая приводила бы к решению системы уравнений

$$\begin{cases} xy = p \\ (x + a)(y + b) = q. \end{cases}$$

10. Между городами A и B расстояние равно 100 *км*; в 30 *км* от A (и, следовательно, в 70 *км* от B) находится станция M.

Из города A в город B выходит путешественник, делающий по v *км* в час. Достигнув M, он садится на мотоцикл и едет в B со скоростью V *км* в час и затем обратно в M, после чего с прежней скоростью v продолжает свой путь из M в B.

В тот самый момент, когда наш путешественник выходит из A, другой путешественник выходит из B по

направлению к A и двигается со скоростью v до станции M; отсюда, как и первый путешественник, он, сев на мотоцикл, со скоростью V едет в B и затем обратно в M, после чего с прежней скоростью v продолжает путь из M в A.

Требуется установить, сколько раз и именно где и когда повстречаются оба путешественника.

Положив $v = 5$, $V = 70$, постройте графики движения обоих путешественников, откладывая вправо — время, вверх — расстояние от города A.

Потом произведите арифметические подсчеты; результаты сверьте с чертежом.

ТАБЛИЦА КОРНЕЙ КВАДРАТНЫХ

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
0,1	0,316	4,1	2,025	8,1	2,846	21	4,583	61	7,810
0,2	0,447	4,2	2,049	8,2	2,864	22	4,690	62	7,874
0,3	0,548	4,3	2,074	8,3	2,881	23	4,796	63	7,937
0,4	0,632	4,4	2,098	8,4	2,898	24	4,899	64	8,000
0,5	0,707	4,5	2,121	8,5	2,915	25	5,000	65	8,062
0,6	0,775	4,6	2,145	8,6	2,933	26	5,099	66	8,124
0,7	0,837	4,7	2,168	8,7	2,950	27	5,196	67	8,185
0,8	0,894	4,8	2,191	8,8	2,966	28	5,292	68	8,246
0,9	0,949	4,9	2,214	8,9	2,983	29	5,385	69	8,307
1,0	1,000	5,0	2,236	9,0	3,000	30	5,477	70	8,367
1,1	1,049	5,1	2,258	9,1	3,017	31	5,568	71	8,426
1,2	1,095	5,2	2,280	9,2	3,033	32	5,657	72	8,485
1,3	1,140	5,3	2,302	9,3	3,050	33	5,745	73	8,544
1,4	1,183	5,4	2,324	9,4	3,066	34	5,831	74	8,602
1,5	1,225	5,5	2,345	9,5	3,082	35	5,916	75	8,660
1,6	1,265	5,6	2,366	9,6	3,098	36	6,000	76	8,718
1,7	1,304	5,7	2,387	9,7	3,114	37	6,083	77	8,775
1,8	1,342	5,8	2,408	9,8	3,130	38	6,164	78	8,832
1,9	1,378	5,9	2,429	9,9	3,146	39	6,245	79	8,888
2,0	1,414	6,0	2,449	10,0	3,162	40	6,325	80	8,944
2,1	1,449	6,1	2,470	10,1	3,178	41	6,403	81	9,000
2,2	1,483	6,2	2,490	10,2	3,194	42	6,481	82	9,055
2,3	1,517	6,3	2,510	10,3	3,209	43	6,557	83	9,110
2,4	1,549	6,4	2,530	10,4	3,225	44	6,633	84	9,165
2,5	1,581	6,5	2,550	10,5	3,240	45	6,708	85	9,220
2,6	1,612	6,6	2,569	10,6	3,256	46	6,782	86	9,274
2,7	1,643	6,7	2,588	10,7	3,271	47	6,856	87	9,327
2,8	1,673	6,8	2,608	10,8	3,286	48	6,928	88	9,381
2,9	1,703	6,9	2,627	10,9	3,302	49	7,000	89	9,434
3,0	1,732	7,0	2,646	11,0	3,317	50	7,071	90	9,487
3,1	1,761	7,1	2,665	11	3,317	51	7,141	91	9,539
3,2	1,789	7,2	2,683	12	3,464	52	7,211	92	9,592
3,3	1,817	7,3	2,702	13	3,606	53	7,280	93	9,644
3,4	1,844	7,4	2,720	14	3,742	54	7,348	94	9,695
3,5	1,871	7,5	2,739	15	3,873	55	7,416	95	9,747
3,6	1,897	7,6	2,757	16	4,000	56	7,483	96	9,798
3,7	1,924	7,7	2,775	17	4,123	57	7,550	97	9,849
3,8	1,949	7,8	2,793	18	4,243	58	7,616	98	9,899
3,9	1,975	7,9	2,811	19	4,359	59	7,681	99	9,950
4,0	2,000	8,0	2,828	20	4,472	60	7,746	100	10,000

При вычислении корней квадратных из чисел, больших, чем 100, пользуйтесь формулой: $\sqrt{n} = 10\sqrt{\frac{n}{100}}$.

При вычислении корней квадратных из чисел, меньших, чем 1, пользуйтесь формулой: $\sqrt{n} = \frac{1}{10}\sqrt{100\,n}$.

ТАБЛИЦА КОРНЕЙ КУБИЧЕСКИХ

n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$
1	1,000	41	3,448	81	4,327	210	5,944	610	8,481
2	1,260	42	3,476	82	4,344	220	6,037	620	8,527
3	1,442	43	3,503	83	4,362	230	6,127	630	8,573
4	1,587	44	3,530	84	4,380	240	6,214	640	8,618
5	1,710	45	3,557	85	4,397	250	6,300	650	8,662
6	1,817	46	3,583	86	4,414	260	6,383	660	8,707
7	1,913	47	3,609	87	4,431	270	6,463	670	8,750
8	2,000	48	3,634	88	4,448	280	6,542	680	8,794
9	2,080	49	3,659	89	4,465	290	6,619	690	8,837
10	2,154	50	3,684	90	4,481	300	6,694	700	8,879
11	2,224	51	3,708	91	4,498	310	6 768	710	8,921
12	2,289	52	3,733	92	4,514	320	6,840	720	8,963
13	2,351	53	3 756	93	4,531	330	6,910	730	9,004
14	2,410	54	3,780	94	4,547	340	6,980	740	9,045
15	2,466	55	3,803	95	4,563	350	7 047	750	9 086
16	2,520	56	3,826	96	4,579	360	7,114	760	9,126
17	2,571	57	3,849	97	4,595	370	7,179	770	9,166
18	2,621	58	3,871	98	4,610	380	7,243	780	9,205
19	2,668	59	3,893	99	4,626	390	7,306	790	9,244
20	2,714	60	3,915	100	4,642	400	7,368	800	9,283
21	2,759	61	3,936	101	4,657	410	7,429	810	9,322
22	2,802	62	3,958	102	4 672	420	7,489	820	9,360
23	2,844	63	3,979	103	4,688	430	7,548	830	9,398
24	2,884	64	4,000	104	4,703	440	7,606	840	9,435
25	2,924	65	4 021	105	4,718	450	7,663	850	9,473
26	2 962	66	4 041	106	4,733	460	7,719	860	9,510
27	3,000	67	4,062	107	4,747	470	7,775	870	9,546
28	3,037	68	4,082	108	4,762	480	7,830	880	9,583
29	3,072	69	4,102	109	4,777	490	7,884	890	9,619
30	3,107	70	4,121	110	4,791	500	7,937	900	9,655
31	3,141	71	4,141	110	4,791	510	7,990	910	9,691
32	3 175	72	4,160	120	4,932	520	8,041	920	9,726
33	3,208	73	4,179	130	5,066	530	8,093	930	9,761
34	3,240	74	4,198	140	5,192	540	8,143	940	9,796
35	3,271	75	4,217	150	5,313	550	8,193	950	9,830
36	3,302	76	4,234	160	5,429	560	8,243	960	9,865
37	3,332	77	4,254	170	5,540	570	8,291	970	9,899
38	3,362	78	4,273	180	5,646	580	8,340	980	9,933
39	3,391	79	4,291	190	5,749	590	8,387	990	9,967
40	3,420	80	4,309	200	5,848	600	8,434	1000	10,000

При вычислении корней кубических из чисел, больших, чем 1000, пользуйтесь формулой:

$$\sqrt[3]{n} = 10\sqrt[3]{\frac{n}{1000}}.$$

При вычислении корней кубических из чисел, меньших, чем 1, пользуйтесь формулой: $\sqrt[3]{n} = \frac{1}{10}\sqrt[3]{1000\,n}$.

НЕПОЛНАЯ ЗАПИСЬ И ОКРУГЛЕНИЕ ЧИСЕЛ

1. Желая представить число в виде десятичной дроби, часто ограничиваются тем, что находят несколько первых десятичных знаков, а вместо остальных знаков ставят многоточие. Например:

$$\frac{5}{23} = 0{,}21\ldots;\quad \frac{7}{23} = 0{,}30\ldots$$

Это — точные равенства, но запись в правых частях — неполная.

2. С другой стороны, нередко (в частности, при составлении таблиц) прибегают к округлению числа в заранее назначенном разряде. При этом, если, скажем, выбран разряд сотых, заменяют число ближайшей конечной десятичной дробью с двумя знаками после запятой: если первая отбрасываемая цифра меньше, чем 5, то округляют с недостатком; если первая отбрасываемая цифра 5 или больше, чем 5, то округляют с избытком. Например:

$$\frac{5}{23} = 0{,}217\ldots \sim 0{,}22 \text{ (а не } 0{,}21),$$

$$\frac{7}{23} = 0{,}304\ldots \sim 0{,}30 \text{ (а не } 0{,}31).$$

Это — приближенные равенства.

Примечание. Если отбрасывают только одну цифру 5, то безразлично, округлять ли с недостатком или с избытком; но в таких случаях условились при округлении отдавать предпочтение четной цифре. Например:

$$\frac{127}{200} = 0{,}635 \sim 0{,}64,$$

и также

$$\frac{129}{200} = 0{,}645 \sim 0{,}64.$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПРЕДУПРЕЖДЕНИЯ

Объяснительная записка к программе «начального» курса алгебры, разработанной Сектором методики математики Института методов обучения АПН РСФСР в 1948 г., следующим образом определяет содержание и цели преподавания этого предмета в шестых-седьмых классах.

«Начальный курс алгебры в VI и VII классах имеет целью:

а) расширить понятие числа, вынесенное учащимися из курса арифметики (отрицательные числа, числовая ось, приближенное представление длин отрезков и результатов измерений конечными десятичными дробями),

б) обосновать приемы наиболее употребительных преобразований и решение наиболее часто встречающихся типов алгебраических уравнений или систем уравнений, вместе с прочным закреплением соответствующих оперативных навыков,

в) сообщить умение пользоваться алгебраической символикой при решении задач практического (в частности, геометрического) содержания,

г) выработать основные вычислительные и графические навыки, связанные с применением формул, использованием таблиц и составлением таблиц по заданным формулам».

По поводу распределения учебного материала по алгебре между «начальным» (VI—VII классы) и «основным» курсом (старшие классы) нужно сказать следующее.

Громадному большинству учащихся, окончивших школу, в жизненной, служебной и заводской практике совсем не приходится встречаться с рациональными преобразованиями более сложных типов — разнообразными приемами разложения многочленов на множители, действиями с громоздкими дробями и т. п.

Такой материал не соответствует реальным потребностям; вместе с тем он мало приспособлен к возрасту учащихся шестых-седьмых классов школы.

Напротив, жизненно необходимым и оправдываемым также с точки зрения геометрических, физических и технических применений является введение радикалов и квадратных уравнений.

В предлагаемом пособии имеются следующие особенности в программном отношении:

1) Техника рациональных операций несколько ограничена, причем предполагается, что до значитель-

но более высокого уровня она будет поднята уже в последующих классах.

2) Употребляются лишь числовые (целые, положительные) показатели.

3) Уделено внимание изучению корней (квадратных и кубических).

4) В последней главе указываются приемы решения произвольных квадратных уравнений с числовыми коэффициентами.

Говоря более детально, дело обстоит так. Обычный алгорифм извлечения квадратного корня в учебнике не введен: корни предлагается извлекать сначала непосредственными испытаниями («метод проб»), позднее — с помощью таблиц. Если корень не «извлекается» точно, его извлекают приближенно, ни в малой степени не углубляясь в «проблему иррационального», рассмотрение которой будет иметь место в старших классах.

Что касается решения квадратных уравнений с числовыми коэффициентами, то усвоение этого вопроса облегчено тем, что на протяжении ряда предшествующих глав ведется тщательная к тому подготовка, в которой особую роль играет «выделение квадрата» из трехчлена второй степени.

Сказанным, в сущности, исчерпываются своеобразные черты пособия в программном отношении.

Перейдем теперь к его методическим особенностям. Важнейшей из них является намерение автора «пронизать» курс алгебры идеями изменяемости и непрерывности. В этом замысле нет, как известно, никакой новизны, но все же до наших дней он остается не осуществленным в практике преподавания, и именно этим фактом обусловливается длящийся «разрыв» между школой и жизнью, не говоря уже о «разрыве» между средней школой и высшей. Вместе с переменными величинами в математику (по словам Энгельса) вошла диалектика. Но преподавание математики в нашей школе все еще остается лишенным диалектической основы.

С формальной точки зрения алгебраическое выражение представляет собою объект тождественных преобразований; с функциональной точки зрения оно есть функция входящих в него букв, так как меняет свои значения в зависимости от изменения значений этих букв.

Раскрывая понемногу функциональную идею, предлагаемое пособие не имеет в виду чрезмерных задач и делает попытку отобрать материал, включение которого является одновременно не только практически возможным, но и строго необходимым (в смысле планомерного развития соответствующих представлений и в такой же степени планомерного развития вычислительных и графических навыков).

Другой методической особенностью пособия является намерение автора заучиванию правил противопоставить отчетливое понимание их генезиса или взаимной обусловленности. Речь не идет, конечно, о том, чтобы предоставить самим учащимся «открывать» алгебраические истины. Инициатива и руководящая роль в этом случае по-прежнему остается за учебником. Но учебник должен не столько информировать учащихся, сколько (в упражнениях) ставить перед ними

вопросы, заставляя их мысль в поисках ответов направляться в нужную сторону. Весьма ответственная роль предоставляется при этом преподавателю, который является «режиссером» в диалоге между учебником и учащимся и учитывает все ситуации, создающиеся в силу «местных» или случайных обстоятельств.

Объяснительный текст, насколько возможно, сжат. Употребляемый ныне учебник алгебры пользуется умеренным вниманием со стороны учащихся. Главная причина этого, несомненно, заключается в том, что пассивное восприятие математических, большею частью достаточно отвлеченных, рассуждений мало свойственно раннему возрасту.

Третьей методической особенностью пособия — на этом закончим перечисление — является своеобразное расчленение и расположение материала. Общеизвестно, что школьный курс алгебры имеет «конгломератное» строение (состоит из неоднородных частей). В нем можно различать четыре основные линии: a) — линию развития понятий (логическую), b) — линию формально-оперативную (обозначения, техника буквенных преобразований, включая сюда в значительной степени и решение уравнений), c) — линию содержательно-прикладную (текстовые, в том числе геометрические, технические и физические задачи) и d) — линию вычислительно-графическую (диаграммы, таблицы, графики).

Приведем несколько примеров.

1) Разъясняется и усваивается, со ссылками на распределительный закон и т. п., правило приведения подобных членов — линия (*a*); вслед за тем переходят к тренировочным упражнениям в сложении и вычитании многочленов, содержащих подобные члены — линия (*b*).

2) Дана текстовая задача. Составляется уравнение — линия (*c*); затем производится его решение — линия (*b*); из корней выбираются, наконец, те, которые удовлетворяют условию задачи — снова линия (*c*).

3) Предложено уравнение, содержащее, кроме неизвестного x, параметр t. Уравнение решается относительно неизвестного — линия (*b*); величина x изучается как функция параметра t; составляется таблица значений и график — линия (*d*).

По мнению автора, преподавание выигрывает — становится интереснее и эффективнее, если эти линии не смешиваются между собой, а, тщательно различаясь, чередуются между собой.

Задачи «смешанного» типа должны быть сравнительно редкими и встречаться преимущественно при повторении.

Преподавателю, готовящемуся к уроку, можно было бы порекомендовать анализировать материал, классифицируя его по четырем «линиям»; это было бы полезным для него упражнением.

В нашем пособии каждый вопрос, поставленный в том или ином упражнении, соответствует по большей части какой-нибудь одной из линий (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), кроме текстовых задач, для которых характерна (в курсе алгебры) одна и та же комбинация — *cbc*. Вместе с тем каждое упражнение, каждый параграф, даже каждая глава имеют свою «преобладающую» линию.

Выделение «линий» в предмете вытекает из анализа потребностей в этом предмете; оно до некоторой степени противоположно

фузионистской тенденции к слиянию математических предметов.

Переходя к более подробному описанию конструкции пособия, начнем с перечня глав:

Глава I — Буквенные выражения.

Глава II — Простейшие графические представления. Прямая и обратная пропорциональность.

Глава III — Свойства арифметических действий. Равенства и неравенства.

Глава IV — Положительные и отрицательные числа.

Глава V — Тождественные преобразования (I).

Глава VI — Решение линейных уравнений.

Глава VII — Тождественные преобразования (II).

Глава IX — Алгебраические уравнения и их геометрическое истолкование.

Глава X — Алгебраические дроби.

Глава XI — Системы уравнений.

Глава XII — Квадратные корни и кубические. Приближенное решение квадратных уравнений с числовыми коэффициентами.

Следуют еще:

Повторительные упражнения (заключительная глава).

Таблицы корней, квадратных и кубических.

Глава I является своего рода *введением* в курс алгебры и представляет собою более или менее самостоятельное целое — вступительный концентр. Она, так сказать, дает развернутый ответ (вместо «определения») на вопрос: что такое алгебра? То обстоятельство, что уже эта глава обеспечивает учащимся некоторое знакомство с уравнениями, создает особые преимущества для дальнейшего изложения.

Большая часть главы II и почти вся глава III, собственно говоря, относятся не к алгебре, а к арифметике. Глава III содержит повторение «теории» арифметики, в алгебраизированной (буквенной) форме, установление отправных формальных позиций. Глава II, как видно из заглавий параграфов, также содержит материал, обычно находящий себе место в курсе арифметики (кроме § 11); но на целом ряде затронутых здесь вопросов стоят достаточно выразительные алгебраические акценты: «подача» этих вопросов сделана с точки зрения алгебры.

Мы полагаем, что значительную часть материала, содержащегося в главах II и III, следует проходить в часы, предназначенные для курса арифметики в VI классе *.

В главе IV теория положительных и отрицательных чисел *основывается* на рассмотрении *числовой прямой*.

Тождественные преобразования целых алгебраических выражений разделены между главами V и VII. В главе V вводятся термины «одночлен» и «многочлен» и рассматриваются действия с ними, необходимые для решения линейных уравнений.

---

* Образование резерва времени в курсе арифметики в V и VI классах связано с прекращением решения текстовых алгебраических задач арифметическим способом. Мы сознаем, что возможность использования этого резерва временно может ограничиваться экзаменационными требованиями.

Немало уравнений встречалось в главах I—IV; но глава VI посвящена систематической теории решения линейных уравнений и применениям к соответствующим задачам.

Глава VII посвящена умножению многочлена на многочлен и основным формулам умножения. Содержание глав VIII—XII достаточно полно характеризуется их наименованиями. Отметим, что в главе IX отчетливо выступает идея координат и приводится геометрическое изображение аналитических фактов.

Неоднократные возвраты к одному и тому же предмету, имеющиеся в разных местах книги, дают возможность взглянуть на этот предмет с разных точек зрения: они делают усвоение более прочным и отчасти служат заменой «повторения» (которое независимо от этого предусмотрено в конце каждой главы и в конце курса).

Чтобы не перегружать «начальный» курс алгебры, на данном этапе мы отказались от сообщения исторических сведений о предмете и внесения в тексты задач более яркой и современной тематики; к тому же в методической литературе имеется немало указаний по тому и другому поводу.

Мы приветствуем инициативу преподавателей, которые в своей школьной практике пожелали бы восполнить указанный пробел.

Глава I

БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Общие замечания

1. Наименование и запись букв латинского алфавита усваивается учащимися исподволь, по мере появления букв в тексте учебника. Гораздо чаще встречаются строчные буквы, чем прописные. В математике принято смешанное (латино-французское) произношение букв. Большинство букв произносится по-латински и по-французски одинаково:

A,a	*B,b*	*D,d*	*E,e*	*I,i*	*K,k*	*L,l*	*M,m*	*N,n*	*O,o*	*P,p*	*R,r*	*S,s*
а	бэ	дэ	э	и	ка	эль	эм	эн	о	пэ	эр	эс

T,t	*V,v*	*X,x*	*Z,z.*
тэ	вэ	икс	зэт

Следующие буквы произносятся по-латински:

C,c	*Q,q*	*U,u*
цэ	ку	у

Следующие буквы произносятся по-французски:

G,g	*H,h*	*J,j*	*W,w*	*Y,y*
жэ	аш	жи	дубль-вэ	игрек

Прописная и строчная буква одного и того же наименования, например А и а, в математике обозначают различные величины; учащиеся иногда заблуждаются в этом отношении.

2. Начальный курс алгебры предполагает известными из арифметики целые и дробные положительные числа. Нуль и его употребление также считаются известными,

Предполагается, что в курсе арифметики были показаны на примерах законы (свойства) действий. В главе I свободно (вскользь, в описательной форме) применяются переместительный и сочетательный законы сложения и умножения. Более внимательное изучение законов совершается в главе III; там же сообщаются и их наименования.

3. Говоря о записи и порядке действий, преподаватель подчеркивает отличие обыкновений, принятых в алгебре, от обыкновений, принятых в арифметике. В арифметике строго различаются между собою, в зависимости от текста задачи, множимое и множитель, причем множимое при записи ставится раньше множителя; в алгебре, сколько бы ни было перемножаемых чисел, букв или выражений, они все в одинаковой степени называются «множителями».

Много раз учителю приходится повторять в классе, что *«в алгебре числовой множитель пишут впереди»*, что *«точка (знак умножения) опускается перед буквой, но сохраняется перед числом»*. Но это — обычаи, а не законы: иногда они нарушаются, и упоминать о них нужно к месту.

В арифметике знак деления — двоеточие, а черта — знак дроби. В алгебре то и другое в одинаковой степени — знаки деления, но двоеточие (наравне с косым крестом как знаком умножения) употребляется лишь в особых случаях.

4. В арифметике рассматриваются дроби только с целыми числителями и знаменателями. В алгебре буквам, в любой формуле, можно давать как целые, так и дробные (позднее — отрицательные и т. д., вплоть до мнимых) значения; в частности в дроби $\frac{a}{b}$ и числитель и знаменатель могут быть дробными числами. Учащиеся не привыкли к такому пониманию дробей; в главе I дается некоторое число упражнений, позволяющих с ним освоиться.

Заметим, между прочим, что выражение вида $\frac{a}{b}$ с равным правом называется иногда, в зависимости от обстоятельств, «дробью» или (см. § 8) «отношением».

5. В арифметике, или, точнее говоря, в текстовых арифметических задачах, числа неотделимы от измеряемых ими величин, что выражается и в записях. В алгебре буквами обозначаются только отвлеченные числа, причем заранее условливаются, если нужно, о единицах измерения. В записях формул наименование единиц измерения содержаться не должно. Например: условимся, что буква a обозначает цену яблока, выраженную в копейках; тогда равенство $a = 75$ говорит о том, что «яблоко стоит 75 копеек», а равенство $a = 100$ — о том, что «яблоко стоит один рубль». Напротив, запись $a = 75$ коп. была бы ошибочной.

6. В главе I (и всюду далее) записи, как $\frac{n}{4}$ и $\frac{1}{4}n$, употребляются без всякого различия — для обозначения числа, получающегося при делении n на 4. Это оправдывается тем, что, как известно из арифметики, «умножить на $\frac{1}{4}$» и «разделить на

4» — означает одно и то же. Но в главе I это применяется лишь по отношению к целым знаменателям (обобщение $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$ см. в главе III).

7. На первых порах (во время изучения главы I) при выполнении в письменном виде числовой подстановки следует сначала только заменить буквы числами, а потом уже выполнять действия, например, если $a = \frac{1}{4}$, $b = 1\frac{1}{2}$, $u = 3\frac{1}{2}$, $v = 6$, то

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(3\frac{1}{2}\right)} + \frac{\left(1\frac{1}{2}\right)}{6} = \frac{1}{14} + \frac{1}{4} \text{ и т. д.}$$

Преподаватель должен внимательно следить за соблюдением этого правила. В дальнейшем от него можно (иногда и должно) отступать, но придется возвращаться к нему всякий раз, когда обнаруживается непонимание смысла числовой подстановки.

8. Уже в главе I неоднократно приходится округлять числа (большей частью—десятичные дроби). Правила округления не должны быть предметом специального изучения: преподаватель указывает их по мере надобности и первое время, пока в их применении не будет достигнут автоматизм, неукоснительно следит за их выполнением.

Правила округления следует отличать от неполной записи чисел (см. стр. 350).

§ 1

Первый отрывок объяснительного текста ставит своей задачей — не столько «дать определение» алгебры, сколько дать внешнее описание того, чем учащиеся будут заниматься на уроках алгебры.

В школе курс алгебры прежде всего обобщает курс арифметики: «Раньше вы писали только цифры, теперь будете, кроме цифр, писать и буквы».

Арифметическое выражение есть частный случай алгебраического.

Следующие *упражнения 1—4* (и далее 18) преследуют различные цели: не только показать на конкретном материале употребление букв, но также направить внимание к функциональным связям, напомнить и укрепить специфические обороты речи, известные из арифметики, и т. п.

Возможно, что первые шаги будут не так просты.

Все, что не сразу выходит с буквами, делайте сначала с числами. Все, что сразу выходит с буквами, сейчас же проверяйте на числах.

1—5. Добивайтесь: «Какие действия надо сделать? Почему именно эти?»

2. Оборот речи «составьте формулу для пути S», вероятно, потребует дополнительных разъяснений со стороны учителя.

Хотя еще нет «составления таблиц по формуле», преподаватель должен следить, чтобы записи на доске были упорядочены и не носили хаотического характера.

Упражнение 4. Очень важно, чтобы учащиеся воочию убедились, что формула для площади прямоугольника $S = bh$ справедлива не только при целых, но и при дробных значениях букв b и h.

§ 2

Из § 1 учащиеся получили некоторое представление о составлении, или выводе, формул.

В § 2 предлагаются формулы в «готовом» виде, и речь идет об их применении — о подстановке числовых значений.

Преподаватель может встретиться с вопросами: «Откуда взялась эта формула?» В разных случаях ответы будут различные. Формула для числа часов сна (упражнение 5, вопрос 12) — нормативная: она указывает правило, определяет режим. Преподаватель, если вопросы возникнут, объяснит учащимся, что нередко составление формулы оказывается трудной задачей: прежде же всего нужно научиться понимать смысл и употребление данных формул. Более пространные объяснения излишни, от них следует уклониться.

Следует вести систематическую запись. В дальнейшем из систематической записи будет устранено все лишнее (словесное), и она превратится в табличную.

Работа ведется у доски: каждый учащийся, вызванный к доске, делает одну-две числовые подстановки.

Упражнения 5—6 издалека подготовляют идею функции одной переменной, *упражнение 7* — идею функции двух переменных. Табличная запись стимулирует возникновение представлений о непрерывной изменяемости. Говорить об этом учащимся излишне.

В *упражнениях 5—6* удобно проделать два-три вопроса в классе, с табличной записью на доске (причем какая-то часть площади доски должна быть оставлена для текущих вычислений); остальные вопросы пригодятся для домашних заданий.

Вопрос 15 особенно подходит как тренировка в обращении обыкновенных дробей в десятичные; он предоставляет также материал для домашней работы, цель которой — проверить усвоение правил округления (сообщаемых, разумеется, «на ходу»).

Правила округления см. на стр. 350.

Принцип составления двойной таблицы должен быть усвоен в классе, в процессе выполнения пунктов 16 и 17 из *упражнения 7*. Вызванному ученику учитель говорит: «Заполни вот это место (клетку) в таблице». Вопросы 17 и 18 можно задать на дом.

§ 3

Цель параграфа — не только напомнить учащимся терминологию, известную им из курса арифметики, но и способствовать приобретению умения ею активно пользоваться. Не запрещается, конечно, сказать, «вот это выражение», прямо на него указывая; но точнее, лучше сказать «написанная здесь сумма» (если это сумма) или «это произведение» (если имеем дело с произведением).

Новым моментом для учащихся является то, что тренировка ведется на буквенном материале.

Но не следует обольщать себя мыслью, что указанная цель может быть скоро достигнута. К упражнениям в «чтении и записи формул» придется вернуться в повторительных упражнениях к главе I (и не раз в дальнейшем).

Упражнение 8 надо сделать в классе, не затрачивая на него много времени. Это упражнение укрепляет понимание и употребление термина «обратное число (или величина)». Можно предвидеть, что учащиеся подметят и даже сформулируют «правило» нахождения числа, обратного по отношению к данной дроби: «поменять местами числитель и знаменатель».

Упражнение 9. На примерах выясняется роль скобок. В 1) нужно «к сумме чисел a и b прибавить число c», в 2) — «составить сумму трех чисел a, b и c»: но это то же самое, действия совершаются те же, в том же порядке; скобки в 1) могут быть признаны лишними; 3) предписывает иной порядок действий, чем 1), но результат получится тот же самый (первое «тождественное преобразование»). В 20) и 21) различие имеется только в форме записи; также в 22) и 23).

Упражнение 10. Здесь материал более разнообразный. Преподаватель следит за правильным пониманием формул: числовые подстановки служат методом контроля правильного понимания.

Упражнение 11. «Обратные» вопросы. Следует ставить и обсуждать вопрос о скобках.

§ 4

К уравнениям приводит следующий естественный (хотя и не традиционный) ход мыслей. В § 2 мы брали выражение, содержащее некоторую букву, и, выполняя различные числовые подстановки, получали соответствующие значения этого выражения. Теперь нас интересует обратная задача: какое значение надо подставить вместо буквы, чтобы получить такое-то значение данного выражения? Дальнейшее обобщение: даны два выражения, содержащие одну и ту же букву; при каком значении буквы они принимают одинаковые числовые значения?

Традиционный методический подход к уравнениям связан с предложением текстовых задач. Но роль текстовых задач в этом случае не должна быть преувеличена. Жизненная практика не так уж часто предлагает текстовые задачи, требующие составления уравнений; напротив, путь от готовой формулы к уравнению — менее искусственный и теснее примыкает к применениям.

Уравнение представляет собой формальный математический аппарат. Даже если оно возникло в связи с решением текстовой задачи, об этой задаче не следует думать в процессе решения уравнения (к ней необходимо вернуться после того, как уравнение решено).

Общего метода решения всех уравнений не существует. Или, если угодно, имеется один общий метод: угадать решение, «пробуя» подставлять вместо неизвестного разные числа и отбирая из них те, которые подходят («метод проб»).

В алгебре указываются, однако, некоторые «систематические» методы, пригодные для решения уравнений строго ограниченных классов (прежде всего линейных).

Высказанными соображениями оправдывается, как мы думаем, избранный нами подход к уравнениям.

На данном, самом раннем, этапе сущность уравнения должна быть преподнесена учащимся в доступном, но вместе с тем в подлинном, не искаженном виде.

Следует также предупредить возможность возникновения предрассудков, связанных с тем, что на протяжении двух первых лет обучения алгебре учащиеся встречаются только с линейными уравнениями (рождается ложная мысль, что «каждое уравнение имеет один, и только один, корень»). Вопрос не так уж сложен.

Упражнение 12 — классное: оно подготовляет конкретный материал, необходимый для понимания последующего объяснительного текста.

Бесполезно подвергать обсуждению в классе вопрос о том, что такое «верное» равенство. Но следует на примерах привлечь внимание к тому, что равенство, содержащее букву, может оказаться верным при одном значении буквы и неверным при другом.

Определение уравнения, содержащееся в объяснительном тексте, удовлетворяет всем требованиям логики. В нем «родовое понятие» — «равенство», «видовое различие» указывается условным предложением, начинающимся словом «если». Порядок слов, при желании, может быть переставлен. Характерно и оправдано подчеркивание субъективного момента («мы»). Обобщение на случай двух переменных» [$F(x, y) = 0$] совершается без труда: каждое решение — точка графика, совокупность решений — весь график в целом.

Упражнение 13 и последующий текст, как бы ни было велико их принципиальное значение, могут быть отложены до повторения главы.

28. Учащимся неизвестны пока никакие методы решения уравнения. Преподаватель поступит правильно, если спросит: «Кто первый (из всего класса) угадает?» Допустим, что в таких примерах, как 6) — 10), не угадает никто. Беды нет: эти примеры вслед за тем рассмотрены в объяснительном тексте.

Многие примеры из пунктов 28 и 29 рассматривайте как упражнение в числовых подстановках.

§ 5

В § 4 был дан ряд примеров, которые в глазах учащихся делают небеспредметной приводимую в конце этого параграфа критику метода непосредственных подстановок («метода проб») при решении уравнений. Эта критика, возможно, выражает в некоторой степени собственное суждение учащихся по данному вопросу. Учащиеся ждут того, чтобы им были указаны приемы решения уравнений, носящие систематический характер, т. е. обеспечивающие нахождение решений или устанавливающие их отсутствие.

Нам кажется, что способ решения уравнений, называемый «применение свойств арифметических действий», мог бы быть вообще опущен. Он примитивен по идее и, самое главное, применим только к уравнениям, имеющим особую структуру. Это — существенно арифметический (неалгебраический) способ. Все же решение уравнений этим способом не лишено элементов поучительности, так как укрепляет понимание взаимоотношений между действиями. Мы имеем здесь дело с чисто словесным, но полезным, упражнением.

Упражнение 15.

33. Представлены все алгебраические типы задач на одно действие. Решение подчиняется принципу: «обозначь поскорее неизвестную величину буквой x — и размышляй».

Упражнение 16.

Оказывается, что уравнения можно применить к примерам, рассмотренным раньше. Предусматриваются помощь учителя и самые примитивные приемы решения. Например, пусть решается уравнение

$$8 + \frac{18 - T}{2} = 10.$$

«Что нужно прибавить к 8, чтобы получить 10?» «Надо прибавить 2».

Итак,

$$\frac{18 - T}{2} = 2,$$

«Что нужно разделить на 2, чтобы получить 2?» «Надо разделить 4».

Итак,

$$18 - T = 4.$$

И т. д.

Задачи 37 своим острием направлены против воззрения (распространенного среди учащихся), будто бы буквы обозначают целые числа. Эти задачи — не «шуточные», хотя и выглядят такими.

Упражнение 17.

Тренировка в «записи формул под диктовку».

Упражнение 18.

41, 42. Записи: $\frac{a+b}{2}$; $\frac{a+b+c}{3}$, $\frac{a}{2} + \frac{b}{3}$ (или $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$: необходимо показать оба способа записи) и т. д.

Уместно сообщить попутно термин «среднее арифметическое». При дележе между Николаем, Михаилом и Сергеем придется округлить суммы (в рублях, в копейках).

43. Покажите обе записи: $\frac{n}{4}$ или $\frac{1}{4}n$, $\frac{n}{5}$ или $\frac{1}{5}n$ и т. п.

Но $\frac{100}{t}$ (не иначе).

Вопросы 44 (и многие дальше) должны выработать понимание того, что числитель и знаменатель дроби могут быть дробными. Не объявляя запрещенным двоеточие, следует переходить к постоянному употреблению черты как знаки деления. Возможны, в зависимости от удобства, и смешанные записи; например: при $n = \frac{3}{4}$, $t = \frac{1}{3}$, мы получаем: $\frac{n}{t} = \frac{3}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 1} = 2\frac{1}{4}$.

45. Записи: $\frac{a+b}{m}$, $\frac{n}{a+b}$ и т. д.

Если по формуле $\frac{a}{u}+\frac{b}{v}$ получается числовое значение $\frac{1}{14}+\frac{1}{4}$, то, принимая во внимание, что речь идет о часах, естественно сказать, что $\frac{1}{14}$ часа приближенно (или приблизительно) равняется 4,3 минутам, $\frac{1}{4}$ часа равняется 15 минутам; итого потребуется идти около 19,3 минуты.

Упражнение 19.

О температурной формуле, связывающей C и F, можно сказать, что она выводится в курсе физики (не увлекайтесь объяснениями).

Упражнение 20.

О формуле для железнодорожного тарифа можно сказать, что она почерпнута из справочника.

Упражнение 21.

Вопрос труден, так как требует сосредоточенного внимания при рассуждении. Пример рассуждения: если один фут составляет 0,3 метра, то f футов составляют в f раз больше; значит, надо 0,3 умножить на f; получится $0{,}3f$. Можно вначале взять f числовым.

Формула $m = 0{,}3f$ не означает, конечно, что «метр равен 0,3 фута», она означает: «если отрезок содержит f футов, то он же содержит число метров m, равное $0{,}3f$».

Упражнение 22.

Необходимо правильно округлять.

Упражнение 23.

53. Корень 2 общими усилиями будет найден мгновенно. На поисках второго корня $\left(\frac{4}{3}\right)$ стоит сосредоточиться: составлять табличку значений левой части, наводя на мысль о необходимости испытывать и дробные значения x.

В заключение заметим, что приводимые текстовые примеры имеют жизненный характер: недопустимо, чтобы они воспринимались только как вычислительные упражнения. Пусть учащиеся подумают над тем, что 60° по Фаренгейту есть комнатная температура, над тем, достаточно ли спит каждый из них, и т. д. Интересен учет высказываний и обсуждений, которые здесь могут возникнуть.

Глава II

ПРОСТЕЙШИЕ ГРАФИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

Общие замечания

1. Содержание главы II — двоякое. В ней:

а) воспитывается навык представлять (на бумаге или на доске, а также мысленно) сопоставляемые между собою числовые значения величин в виде отрезков прямых линий (или площадей фигур);

б) сообщаются элементарные сведения о пропорциональности в той форме, в какой они могут быть полезны для курса алгебры и для разного рода применений.

2. Упражнения этой главы настойчиво внушают учащимся мысль: какова бы ни была физическая размерность однородных сравниваемых величин, их числовые значения, при надлежащем выборе масштаба, всегда могут быть «отложены» на некоторой «числовой оси».

3. Преподавателю можно рекомендовать перед уроком в особенности тщательно продумывать, что и как он будет чертить на доске?

Во всех упражнениях указаны масштабы чертежей применительно к обыкновенной клетчатой бумаге. На доске необходимо чертить «сетку», однако не мелкую, а крупную, делая на осях пометки 0, 1, 2,... или 0,5, 10, или 0, 2, 4 и т. п.

Если преподаватель затрудняется сделать сетку на доске достаточно аккуратно и быстро от руки, пусть он не стесняется пользоваться классной линейкой и угольником.

Клетчатая доска упрощает работу в классе и сберегает время. На такой доске не следует делать вычислений.

При чертежной работе на доске в особенности важно качество мела.

4. Излагаемую в § 8—12 теорию пропорциональности следует взять за основу. Однако, независимо от того в курсе арифметики VI класса должно быть выполнено по арифметическим задачникам большое число задач на пропорциональность («тройное правило»), преимущественно текстовых.

5. Упражнения главы II, как правило, подразумевают деятельность учащихся вычислительно-графического характера. Такая деятельность не должна подавлять учащихся. Поэтому более трудоемкие вопросы из § 7—8 (например, 56—59, 66—68) могут быть выполняемы исподволь во время прохождения § 9—10; что же касается повторительных упражнений 37—40, то ими, таким же образом, можно заниматься при прохождении главы III.

Значительная часть упражнений должна быть отнесена к домашним работам, причем вполне уместно прибегать к параллельным вариантам: например, полкласса получает задание 56 и полкласса — 57; аналогично 111 и 112; вопросы 107—110 можно использовать как четыре параллельных варианта, и т. п.

§ 7

Необходимо добиться вполне правильного понимания и активного употребления оборотов речи «на столько-то больше» и «во столько-то раз больше» и пр.

Не надо смущаться тем (см. 64), что урожай «увеличился в $1\frac{1}{2}$ раза», «в $1\frac{15}{16}$ раз»; нужно только требовать разъяснения того, что это значит, и помочь в понимании, если будет необходимо. Объясняя, увеличивайте число примеров, приводите собственные.

При работе с диаграммами прямой задачей является «прочесть» диаграмму, обратной — составить диаграмму по числовым данным. Интерес сосредоточивается, конечно, на составлении диаграмм: диаграммы, приведенные в книге и предлагаемые для «прочтения», играют роль образцов.

Диаграмму, составленную одним учащимся, «читают» также его товарищи: обсуждают ее, делают сопоставления и выводы.

Объяснительный текст в § 7 почти отсутствует: время для обобщений еще не настало, накапливается фактический материал.

Работу в классе надо поставить таким образом, чтобы каждый учащийся чертил и считал у себя в клетчатой тетрадке, а учитель осуществлял общее наблюдение и делал необходимые поправки и замечания, обращаясь к классу в целом или к отдельным учащимся.

Из шести примеров (54—59) первые два следует проделать на доске. При этом каждый вызываемый к доске ученик ставит 1—2 пометки («точки», «черточки», «столбики»).

Если в тексте указан, например, масштаб: 5 клеток = 50 *см*, то, прежде чем приступить к построению диаграммы, нужно поставить масштабные пометки через 5 клеток: 0, 50, 100, 150 и т. д. Образцом может служить чертеж 17.

Преподаватель должен добиваться наибольшей возможной степени точности при построении диаграмм. Если у отдельных учеников обнаруживается отсутствие точности, то это свидетельствует, что идея изображения величины посредством отрезков не схвачена: в этом случае требуются индивидуальные, вполне конкретные, разъяснения. Гнаться за «художественной» стороной дела излишне: в меру наличия свободного времени она может быть предоставлена инициативе учащихся.

В пунктах 54—57 числа (значения величин) изображаются параллельными, вертикальными или горизонтальными отрезками («столбиками» или «ленточками»); в следующих далее пунктах все сравниваемые отрезки сносятся на одну числовую ось и отсчитываются от одного и того же общего начала; так что достаточно отмечать концы отрезков. Поэтому выходит, что числа изображаются точками.

Преподаватель должен найти случай исчерпывающим образом довести до понимания учащихся это обстоятельство.

§ 8

Упражнение 26.

Все «отношения должны быть представлены, конечно, в виде десятичных дробей». Например, чтобы получить отношение высоты Чатырдага к высоте Арарата, надо 1500 разделить на 5200; получится 0.29 *.

---

* По поводу выполнения делений в подобных случаях заметим, что необходимо округлять результаты (см. стр. 350).

Существенно посредством дополнительных вопросов устанавливать, не ускользает ли от учащихся реальный смысл получаемых результатов («Арарат во столько-то раз выше Чатырдага» и т. п.).

§ 9

Без сомнения, представление о пропорциональности существует у каждого подростка: оно создается многочисленными путями на почве повседневного житейского опыта. Но задача школы — не в том только, чтобы пробудить это представление, надлежащим образом направляя к нему внимание; кроме того нужно:

1) дать точное понятие о пропорциональности двух величин, выделяя пропорциональную зависимость как простейшую из числа всевозможных функциональных зависимостей;

2) научить решать основные типы относящихся сюда задач («тройное правило»);

3) развить у учащихся способность правильно пользоваться термином «пропорциональность» (если преподаватель не прилагает особых усилий, то учащиеся повторяют этот термин, но редко употребляют его по собственной инициативе).

Пропедевтика пропорциональности, содержащаяся в курсе арифметики, пользуется при определении самого понятия описательными формулировками («одна величина пропорциональна другой, если при увеличении одной из них в несколько раз другая увеличивается во столько же раз», и т. п.). В курсе алгебры дается прямое определение: величина y прямо пропорциональна величине x, если значение y может быть вычислено по значению x с помощью формулы вида $y = mx$, где m — постоянный коэффициент; после этого арифметическое определение становится «свойством» пропорциональности.

Знание вида формулы пропорциональности освобождает от заучивания «тройного правила». Приведем пример задачи: «За 5 часов поезд прошел 150 *км*. Сколько километров он пройдет за 7 часов?» Пусть x — время в часах; y — пройденный путь в километрах. По формуле $y = mx$ нельзя сразу определить значение y при значении x, равном 7, так как неизвестен коэффициент m. Но условие, что при $x = 5$ мы имеем $y = 150$, нам дает уравнение $150 = 5m$, откуда следует, что $m = 30$. Итак, $y = 30x$; поэтому, если x равно 7, то y равно 210. Как видно, здесь — рассуждение общеалгебраического характера.

Предлагаемое изложение, взамен развернутого применения алгебраических методов (которые еще неизвестны учащимся), рекомендует их «сжатое» применение: по паре взаимно-соответствующих значений величин x и y определяем их отношение, которое и будет коэффициентом пропорциональности m; затем, зная m и заданное значение x, находим искомое значение y. Весь этот процесс «упорядочивается» применением «табличек пропорциональности».

Упражнение 27.

Правильный путь к постижению пропорциональной зависимости лежит через выделение ее из функциональных зависимостей более общего вида. В вопросах 69—71 мы встречаемся соответст-

венно с зависимостями вида $y = x + 20$, $y = x^2$ и о некоторой эмпирической зависимостью, причем в 69 и 71 отношение $\frac{9}{x}$ убывает, а в 70 возрастает. Только в вопросе 72 это отношение постоянно, что приводит к прямой пропорциональности. Это упражнение — вводное, его нужно проделать в классе и немедленно приступить к чтению последующего объяснительного текста.

Упражнение 28.

О «величинах» здесь говорится отвлеченно. Но заставляя в классе делать примеры у доски, пусть преподаватель их конкретизирует; например (см. 73): «Метр материи стоит 6 рублей; сколько стоят 2 метра, 7, 11, 29 метров?», и пусть предлагает учащимся самим придумывать к каждому примеру по нескольку задач разнообразного содержания.

Примеры, требующие письменных вычислений, более подходят для домашних заданий.

Упражнение 29 содержит, напротив, текстовые задачи. Можно посоветовать записывать их решение с помощью таких же табличек пропорциональности, какие были в упражнении 28.

§ 10

Изложение обратной пропорциональности идет, в основном, по той же схеме, что и изложение прямой. Разница лишь в том, что вместо формулы $y = mx$ мы имеем формулу вида $y = \frac{m}{x}$.

§ 11

Впервые обращаясь к графикам, мы и на этот раз начинаем с рассмотрения конкретных примеров, преимущественно используя уже знакомый материал.

Упражнение 32.

Вопрос 87 сводится к «чтению» графика, 88—91 приводят к «построению». Только в 91 мы встречаемся с графиком прямой пропорциональности — прямой линией, проходящей через начало координат.

Следует обратить внимание на то, что график еще не трактуется как геометрическое место всех точек, которые могут быть построены: строится лишь несколько «столбиков», и их вершины, ради наглядности, соединяют плавной линией. Определение графика уравнения как геометрического места точек откладывается до VII класса.

Первые построения графиков должны быть выполнены на доске, при непосредственном показе учителя: нужно показывать, что и где писать, что и как отмечать на чертеже. Необходимо обозначать «полуоси» и «начало» надлежащими буквами (*tOd* в вопросе 92, *TOv* в вопросе 93 и т. п.).

После проведения графиков обязательны, в конкретной форме, вопросы: «по графику определить значение одной из двух величин, если заданы значения другой».

Для домашней работы подходят вопросы 88—90.

В упражнении 33 лучше вопрос 92 задать на дом, а 93 сделать в классе на доске. Учитель может сообщить наименование графика обратной пропорциональности (**гипербола**).

§ 12

Алгебраический прием решения задачи на пропорциональное деление заключается в том, что в **качестве неизвестной величины берется коэффициент пропорциональности.**

Упражнение 34.

Постепенно усложняющиеся вопросы приводят к этому приему. Решение следующей далее «образцовой» задачи, сопровождаемое разъяснениями, может быть прочтено в классе.

Затем (*упражнения 35* и *36*) идут применения к текстовым задачам и к составлению прямоугольных и секторных диаграмм.

Из «Повторительных упражнений к главе II» для классных занятий пригодны вопросы 104—105, 106—108, 113—114; прочие больше подходят для домашних заданий. Все вопросы 113 и 114 должны быть рассмотрены при непосредственном участии учителя; подразумеваются, после некоторых размышлений, устные ответы с места, сопровождаемые аргументацией.

При повторении уместно вернуться к температурным графикам. Особенное внимание следует уделить словесному описанию хода изменения температуры. Преподаватель может также предложить классу рассмотрение графика, им самим нарисованного на доске. Он рекомендует учащимся составлять температурные графики на основе собственных (многодневных) наблюдений.

Глава III

СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ. РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА

Общие замечания

1. В главе III учащиеся получают **элементы теоретических основ арифметики в буквенном, т. е. алгебраизированном виде.**

Речь идет о фактах, отношениях, правилах, известных учащимся из курса арифметики. Но к словесным формулировкам здесь прибавляется символическая, формульная запись, которой в особенности должно быть уделено внимание.

2. На первый план выдвинуты **законы действий** «в простейшей форме», перечисленные под номерами I—VIII в § 13—16. В словесной формулировке эти законы известны из курса арифметики: «Сумма двух слагаемых не изменяется при перестановке этих слагаемых» (I), «Чтобы к данному числу прибавить сумму двух слагаемых, нужно прибавить сначала первое, потом второе слагаемое» (II) и т. д. **Но запись законов в виде буквенных формул отныне нужно рассматривать как**

основной первичный факт, словесное их чтение — как полезное упражнение.

3. То обстоятельство, что учащиеся уже знакомы с уравнениями (из главы I), позволяет установить единообразный взгляд на обратные действия: каждое из этих действий сводится к решению уравнения, в состав которого входит соответствующее прямое действие.

4. Преподаватель в каждый данный момент должен быть уверен в том, что отвлеченная буквенная запись не препятствует ясному пониманию. У него остается возможность в случае надобности (при ошибках или затруднениях) избежать отвлеченности и конкретизировать рассматриваемый вопрос посредством временного перехода к числовым значениям.

Приведем пример. Допустим, что обсуждается вопрос: как на данное число m умножить сумму двух чисел $a + b$ и как на это же число умножить произведение ab? Формально правильный ответ таков: в первом случае, ссылаясь на распределительный закон, мы получаем

$$(a + b)\, m = am + bm;$$

во втором случае ссылка на сочетательный закон умножения дает

$$(ab)\, m = a\,(bm).$$

Но представим себе, что учащийся станет вести словесное рассуждение (опираясь на ложную аналогию) примерно таким образом: «Чтобы умножить на m сумму $a + b$, я умножил на m каждое из слагаемых. Чтобы умножить на m произведение ab, я, таким же образом, умножу на m каждый из множителей; итак,

$$(ab)\, m = (am) \cdot (bm).$$

«Нет! — скажет преподаватель, — таким же образом здесь рассуждать нельзя! Суди сам: попробуй в этой своей формуле положить $a = 2$, $b = 3$, $m = 5$. Выйдет верно или неверно?»

Установить истину стоит труда; чтобы обнаружить заблуждение, часто достаточно одного эксперимента.

После того, как заблуждение будет обнаружено, можно будет верное равенство $(ab)m = a(bm)$ прочесть такими словами: «Чтобы умножить на m произведение ab, достаточно умножить на m один из множителей».

5. Глава III в методическом отношении представляется более трудной. Поэтому в дальнейшем она комментирована особенно подробно.

§ 13

В возрасте 12—14 лет понимание переместительного закона (свойства) сложения целых однозначных чисел, несомненно, уже является прочно приобретенным. Не так обстоит дело в том возрасте, когда ребенок еще только учится считать: тогда может оказаться, что сложение $2 + 8$ сделать труднее, чем $8 + 2$, именно потому, что переместительный закон неизвестен.

На данном этапе надлежит вернуться еще раз к существу дела и прийти к формальному заключению: каковы бы ни были числа, обозначенные буквами, допустим, a и b, если эти буквы соединены знаком $+$, то их можно между собою переставить.

Аналогично должен быть трактован сочетательный закон сложения. Объяснительный текст параграфа формулирует эти два закона в обобщенном виде (т. е. в буквенных обозначениях) и сообщает их наименования. Оба закона даются «в простейшей форме», как принято в науке; но сейчас же делается дальнейший вывод о возможности каких угодно перестановок и группировок слагаемых. Именно этот вывод имеет особенное значение для школы.

Упражнение 41.

118. Что из трех элементов получается шесть перестановок, не излишне и запомнить. Записи $(a+b)+c$ и $a+b+c$ имеют один и тот же смысл.

120—121. Общему понятию о действительном числе не суждено откристаллизоваться в семилетней школе. Поэтому роль «действительных чисел» играют «длины отрезков». Преподавателю должно быть ясно, что речь идет об «экспериментальной геометрической проверке», а не о «логическом доказательстве».

Следующий текст и *упражнение 42* посвящены числу нуль и его свойствам как слагаемого. В научном построении алгебры равенство:

$$a+0=0+a=a$$

вводится аксиоматически. В школьном изложении необходимо исходить из текстовых задач. «Было нуль перьев», значит: «не было перьев».

С геометрической точки зрения, отрезок перестает быть отрезком, если его начальная и конечная точки совпадут. Но длина отрезка (число) стремится к нулю, если конечная точка приближается к начальной. Поэтому условно можно называть отрезком длины нуль «фигуру», составленную из двух совпадающих точек. При этом условии равенство $a+0=a$ (или $0+a=a$) приобретает простой геометрический смысл.

На последний вопрос правильный ответ (до введения отрицательных чисел) таков: да — только в том случае, если оба слагаемых равны нулю.

§ 14

Желательно, чтобы сочетательные законы (II′—II‴), известные в словесной форме из курса арифметики, были записаны в буквенной форме, хотя бы под давлением наводящих вопросов, самими учащимися.

В упражнении 44 предлагается выполнить проверку этих законов — арифметическую [(127, 1)] и геометрическую [(127, 2)], а также указываются случаи их применения при проверке решения уравнений (128).

В зависимости от плана построения учебника пользоваться законами (II′ — II‴) при тождественных преобразованиях придется не так скоро (в главе V); все же и теперь внимание учащихся должно быть привлечено к формальному моменту: изменению знаков при раскрытии скобок, перед которыми стоит знак «минус».

Далее рассматривается вычитание «с участием нуля». Действия с нулем чрезвычайно затрудняют учащихся: необходимо обеспечивать этим действиям логическую обоснованность, но не менее нужны и текстовые интерпретации.

Упражнение 45.

130. Раз еще не введены отрицательные числа, будет правильно сказать, что из нуля можно вычесть только нуль.

131. Равенство $a - b = b - a$ возможно лишь при $a = b$, так как при $a \gtrless b$ или одна или другая его часть лишена смысла.

§ 15

Переместительный и сочетательный законы умножения разрабатываются параллельно аналогичным законам сложения.

Упражнение 47.

134. Текстовые задачи (покупка пирожных, площадь прямоугольника, объем прямоугольной призмы) выясняют роль нуля и единицы как множителей.

135. По поводу «прямоугольников с нулевым основанием» (или «высотой»), «призм с нулевым ребром» и т. п. уместны те же замечания, что и по поводу «нулевых отрезков» (см. стр. 63, вопрос 2). Подобным же образом лишь условно можно говорить о «покупке» пирожных, если денег не уплачено.

Обратный вопрос: что можно сказать о множителях, если известно, что произведение равно нулю? — гораздо труднее. В этой главе он не рассматривается.

Упражнение 48. Пока нет отрицательных чисел, приходится различать д в а распределительных закона — относительно сложения и относительно вычитания.

Преподаватель может указать, что в случае, е с л и c — ц е л о е ч и с л о, равенства V и VI вытекают прямо из свойства сложения. Так, при $c = 3$:

$$3(a + b) = (a + b) + (a + b) + (a + b) =$$
$$= (a + a + a) + (b + b + b) = 3a + 3b.$$

§ 16

Д е л е н и е рассматривается как действие, обратное умножению, подобно тому, как в § 14 вычитание рассматривалось как действие, обратное сложению.

Упражнение 50.

143. Необходимо добиваться словесных формулировок: «Мы ищем такое число x, что, умножив его на 7, получаем 5», и т. п. 4) Уравнение не имеет н и о д н о г о решения, так как всякое число, будучи умножено на 0, дает 0 (а не 2). 5) Решением уравнения является л ю б о е число, так как любое число, будучи умножено на 0, дает 0.

145. При целых значениях a равенством

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a} \cdot b$$

мы пользовались уже не раз; теперь предлагается проверить (на примерах), что оно справедливо и при дробных значениях a.

Упражнение 51.

150. Предлагаемое здесь логическое обоснование утверждения, касающегося обращения дроби в нуль, может быть отложено до повторения.

151. Законы (IV′—IV‴) аналогичны законам (II′—II‴). Объяснять их следует, исходя из правил действий с дробями; запоминать — излишне.

Наряду с распределительными законами умножения V и VI, приведены также распределительные законы деления VII и VIII: они выражают правила сложения и вычитания дробей, известные из арифметики.

Определение термина «закон» нигде не дано. Но если бы вопрос об этом возник, то можно было бы сказать, что под «законами» понимаются элементарные свойства действий, выражаемые равенствами, справедливыми при всех значениях входящих букв (т. е. тождествами). Законы I—VIII должен твердо запомнить, притом в буквенной форме, тот, кто начинает изучать алгебру.

Что касается равенств, приведенных в вопросе 157, то их нельзя назвать законами, так как они не верны хотя бы, например, при указанных числовых значениях букв.

§ 18

Понятие «меньше» и «больше» применительно к целым числам существует у детей уже при поступлении в школу и много раньше; они получают дальнейшее развитие в связи с изучением дробей. Но знаки неравенств нередко показываются учащимся с запозданием, которое с трудом может быть оправдано, — иногда настолько поздно, что учащиеся за время пребывания в средней школе не успевают с ними освоиться.

Цель настоящего параграфа — ввести в обиход знаки неравенств $<$ и $>$ наравне со знаком равенства с тем, чтобы в дальнейшем мало-помалу можно было добиться их правильного и беглого употребления.

Введения в курсе «начальной» алгебры знаков $\leqslant$ и $\geqslant$ мы не предусматриваем.

Упражнение 53.

159. Предполагаем, что примеры с «заменой звездочки» знаком равенства или неравенства не представят затруднений ни для учащихся, ни для преподавателей. Процедура, которую мы здесь имеем в виду, напоминает «сравнительное взвешивание двух предметов на чашках весов».

Получив ответ, преподаватель должен задать вопрос: «Почему так?» Объяснения могут быть довольно разнообразными. Например: «$\frac{8}{3} < 2{,}67$, так как при делении получаем: $\frac{8}{3} = 2{,}66\ldots$».

«$7 \cdot 8 = 8 \cdot 7$ — вследствие переместительного закона умножения».

Упражнение 54.

162. Примеры ответов:

1) $2x < 6$ при $x = 2$, $2x = 6$ при $x = 3$, $2x > 6$ при $x = 4$.

8) $2(x + 3) = 2x + 6$ при всех значениях x (распределительный закон).

§ 19

Свойства неравенств полезно формулировать также и словесно. Чтобы перейти от буквенных формулировок к словесным, достаточно вместо a, b,... говорить «первая величина», «вторая величина»,.. и знаки неравенства $<$ и $>$ читать словами «меньше» и «больше».

Если угодно, это можно делать в классе в качестве упражнения.

Упражнение 55.

164. Ответы: 1) да (по свойству III), 2) да (по свойству II), 3) да (по свойству II), 4) да (по свойству I), 5) нет (так как относительно d ничего неизвестно).

Упражнение 56.

166. Уместно использовать тематику вопроса 165, например: «если Алексей ниже Бориса, а Борис — того же роста, что и Василий, то Алексей, очевидно, ниже Василия».

§ 20

Числовой луч встречается, конечно, не впервые (см. многочисленные примеры в главе II). Его место в конце настоящей главы оправдывается тем, что нельзя было бы говорить о числовом луче абстрактно, не рассмотрев предварительно ряда конкретных примеров; нельзя было бы также ввести своеобразной терминологии («координата», «точка», «соответствует», отвлеченная «единица длины» и т. п.). Напротив, после ознакомления со свойствами чисел (глава III) вполне своевременно поставить в отвлеченной форме вопрос о геометрическом представлении чисел.

Этот параграф представляет в особенности удобный случай для того, чтобы привлечь внимание учащихся к следующему, уже отмеченному выше, обстоятельству. Изображая, как раньше, числа 1, 2, 3 и т. д. отрезками, мы за начало всех отрезков берем одну и ту же точку O; поэтому, чтобы отрезок был определен, достаточно указать еще только одну его конечную точку. Именно этим объясняется, что постоянно говорят об изображении чисел точками, а не отрезками (на числовой прямой или луче).

Нельзя ожидать, что правильное понимание указанного обстоятельства может прийти сразу: к нему следует привлекать внимание неоднократно, по мере надобности.

Необходимо сказать несколько слов и по другому вопросу, более принципиального порядка.

Каждой ли точке луча соответствует числовая координата? На этот вопрос мы ответим: координата всякой точки может быть получена с какой угодно точностью. Для этого сначала, откладывая надлежащее число раз единичный отрезок, устанавливают число целых единиц в этой координате; затем, если имеется дробный остаток, измеряют его десятыми долями единицы и получают первую цифру после запятой; новый остаток измеряют сотыми долями единицы и получают третью цифру после запятой и т. д. Практически этот процесс, конечно, ограничен точностью измерительного инструмента.

Мы не считаем, что даже вдумчивый учащийся сумеет найти слова, чтобы выразить свои сомнения по данному поводу; не считаем также, что преподаватель должен заинтересовывать учащихся подобного рода соображениями. Но мы полагаем, что преподавателю необходимо ясно сознавать, какова единственно правильная (по нашему мнению) позиция по отношению к действительным числам в VI — VII классах.

Упражнение 57.

168. Надо подумать, что из чего вычитать.

169. Привлеките длину отрезка Oa и Ob.

170. Необходимо смотреть на числовой луч.

174. Задачи на движение заслуживают самого внимательного рассмотрения. Занимаясь ими, не нужно торопиться. Один пример можно сделать в классе, другой — задать на дом.

§ 21

Появление пар чисел не должно удивить учащихся. Ведь с парами чисел они достаточно имели дело в главах I и II. Может быть, стоит об этом напомнить.

Лучше всего, если объяснительный текст этого параграфа будет пересказан учителем, в сопровождении иллюстраций на доске. Изготовленный при этом «координатный угол» (см. черт 28) пусть служит во время дальнейших упражнений, при вызове учащихся к доске.

Число примеров на определение точки по данным координатам или координат по данной точке можно значительно увеличить, вовлекая в работу весь класс, но в оживленном темпе.

Мы вменяем в обязанность преподавателю научить строить точку по ее координатам не так, как сказано в тексте. Не надо «лазить на вертикальную ось». Это значит: после трех-четырех примеров, выполненных согласно тексту, необходимо обратить внимание учащихся на то обстоятельство, что построение на клетчатой бумаге (или доске) удобнее выполнить следующим образом: сначала отсчитать столько-то клеточек по оси Ox (вправо или влево), затем от полученной точки отсчитывать столько-то клеточек вверх или вниз (т. е. параллельно оси Oy, а не обязательно по самой оси). Такой порядок должен стать прочным навыком у каждого учащегося.

Упражнение 59.

180. Примеры «на действия с нулем и единицей».

182. Заметим, обращаясь к преподавателю, что простейший (но не единственный, конечно) способ указать число x, удовлетворяющее неравенству $a < x < b$, заключается в том, чтобы взять среднее арифметическое:

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

186—187. Предложите смотреть на числовую ось!

Глава IV

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Общие замечания

1. В главе IV, посвященной теории так называемых «относительных» (т. е. положительных и отрицательных) чисел *, содержится предложение: излагать всю эту теорию в самой непосредственной связи с числовой осью.

Числовую ось, с делениями и числовыми пометками, в начале урока чертит на доске преподаватель; еще лучше, если бы представлялась возможность пользоваться в классе демонстрационной линейкой с делениями и пометками крупных размеров, которая играла бы роль числовой оси.

Мы полагаем, что наглядность — единственная вполне надежная опора при первоначальном изучении положительных и отрицательных чисел в их взаимном сопоставлении.

2. Следует заранее сказать, что понимается под «правилом знаков».

Чисто формально правило знаков состоит из четырех пунктов:

I. + на + дает +

II. + на — дает —

III. — на + дает —

IV. — на — дает +

Оно применяется в трех различных случаях (мы берем в качестве образца пункт IV как наиболее характерный):

1) при вычитании разности: $a - (b - c) = a - b + c$,

2) при умножении отрицательных чисел: $(-5) \cdot (-3) = +15$,

3) при раскрытии скобок: $a - 3(b - c) = a - 3b + 3c$.

Случай (1) никак не связан с умножением: в соответствующем смысле можно было говорить о «правиле знаков» гораздо раньше (см. § 14).

В более узком смысле «правило знаков» относится к умножению положительных или отрицательных чисел — случай (2).

В обоих случаях (1) и (3) «правило знаков» логически является следствием из правила умножения положительных и отрицательных чисел и из распределительного закона. Именно из тождества

$$a + m(b - c) = a + mb - mc$$

мы получаем тождество (1), полагая $m = -1$, и получаем тождество (3), полагая $m = -3$.

Мы считаем правильным в методическом отношении «правило знаков» понимать в узком смысле, т. е. понимать его как составную часть правила умножения (и, конечно, также деления!) положительных и отрицательных чисел [случай (2)].

---

* Заметим кстати, что термин «относительные» числа — методический и учащимся сообщаться не должен, так как в школе учат математике, а не методике математики.

Однако мы не видим необходимости лишить преподавателя права более широкого понимания «правила знаков», с распространением его на случаи (1) и (3); но лишь после того, как будет закончено изложение теории положительных и отрицательных чисел — с тем, чтобы взаимоотношение случаев (1), (2) и (3) могло быть разъяснено учащимся

В тексте пособия термин «правило знаков», по причине неоднозначности его понимания, вообще избегнут.

§ 22

1. Мы предвидим возражения со стороны иных преподавателей, которые нам укажут, что «от нас зависит», как выбирать координатную систему; в частности, откладывать ли положительные числа (отрезки) на числовой оси вправо, а отрицательные — влево, или же, быть может, наоборот. Мы же декларируем здесь безотносительно, что на горизонтальной оси Ox положительные числа изображаются точками, лежащими вправо от начала O, а отрицательные — точками, лежашими влево от него. Далее (§ 28) подобным же образом фиксируется раз навсегда ориентация вертикальной оси Oy.

По этому поводу мы можем привести следующие соображения. Нам кажется, что в условиях курса «начальной» алгебры, где ни разу не приходится менять (переносить или переворачивать) систему координат, «относительность» или «произвольность» выбора координатной системы не представляет никаких заметных преимуществ. С другой стороны, приобретая возможность говорить «вправо», «влево», «выше», «ниже» и т. п., мы обеспечиваем чрезвычайную краткость и выразительность речи и вместе с тем непосредственное понимание. Это — незаменимые преимущества на ранней ступени обучения.

Именно по этой причине мы систематически пользуемся «стандартно расположенными» осями.

2. Нельзя заниматься теорией «относительных» чисел, не введя предварительно понятия «абсолютного значения». Распространенные определения «абсолютного значения» нас мало удовлетворяют и неприемлемы хотя бы потому, что не связываются непосредственно с геометрическим истолкованием. По этой причине мы предлагаем именно геометрическое определение («абсолютное значение a есть расстояние точки a от начала O»). Это вполне соответствует общей установке — исходить из числовой прямой. Впрочем, сейчас же выясняется, что это определение в точности равносильно общепринятому «отвлеченно-логическому».

Нас очень мало беспокоит при этом то (логически-оправданное, конечно) соображение, что «учащиеся еще не знают, как измеряется расстояние между двумя произвольными точками». Мы полагаем, что при нахождении расстояния между двумя точками учащиеся поступят очень просто: приложат линейку с делениями и посмотрят, сколько делений поместится между двумя точками. Впрочем, наше суждение о положении проблемы иррационального в начальном курсе уже было высказано выше (§ 20, стр. 372).

Знак абсолютного значения (две вертикальные черточки) мы в данном курсе вводить не предлагаем.

Упражнение 62 служит для укрепления правильного понимания термина «абсолютное значение».

3. Такой же геометрический наглядный характер носит и определение отношений «больше» и «меньше». Из двух чисел на оси Ox больше то, которое лежит правее. Отсюда немедленно следуют (видны без необходимости логического доказательства) традиционные формулировки, вслед за тем приводимые. Нужно, конечно, позаботиться о достаточно прочной фиксации этих формулировок в сознании учащихся.

4. Обыкновенно изложение отрицательных чисел начинается с приведения ряда примеров, иллюстрирующих практическую потребность в этих числах. По нашему пониманию, обращение к геометрическому образу — числовой прямой — надлежащим образом сосредоточивает внимание учащихся и вместе с тем способно удовлетворять потребностям практики.

Но после того, как расположение положительных и отрицательных чисел на оси усвоено учащимися, мы обращаемся к перечислению тех жизненных случаев или примеров (текстовых задач), когда может оказаться полезным употребление отрицательных чисел. Находить такие примеры нетрудно: желательно, чтобы список, приведенный в упражнении 65, был продолжен самими учащимися.

Труднее, напротив, указать примеры величин, которым нельзя приписывать отрицательных значений. Разумеется, утверждение (содержащееся в следующем примечании) относительно расстояний, длин, площадей и т. п. слишком категорично: оно, однако, нигде не нарушается в пределах средней школы.

5. Такой оборот речи, как «на (—3) единицы вправо», мы предлагаем понимать и употреблять как равносильный обороту «на 3 единицы влево». Мы полагаем, что такие обороты (представляя собою некоторое насилие над живой речью, практикой языка) соответствуют духу математики и служат целям упрощения преподавания.

В подтверждение обоснованности нашего предложения приведем следующий довод. При допущении, что $m > 0$, оборот речи «точка B лежит на m единиц вправо от точки A», означает то же, что «разность между координатами точки B и точки A равна m». При $m < 0$ второй оборот речи не теряет смысла: естественно, чтобы первому обороту и в этом случае приписывался тот же смысл, что и второму.

Аналогично обстоит дело с оборотом речи «в m раз больше» при $0 < m < 1$.

Упражнение 64.

198. Ответы: «Я пришел на урок за (—10) минут до звонка». «Поезд опоздал на (—2) минуты».

«Коля отстал от Сережи на $\left(-1\frac{1}{2}\right)$ метра». И т. п.

§ 23

При объяснении сложения и вычитания положительных и отрицательных чисел весьма важно иметь, кроме неподвижной демонстрационной линейки с делениями, также и подвижную линейку с такими же точно делениями. Действуя двумя линейками (так, как обыкновенно действуют логарифмической линейкой), можно избавить себя от утомительных подсчетов.

Подвижную линейку из клетчатой бумаги каждый учащийся может без труда приготовить для себя сам. Но важно, чтобы он научился ею пользоваться.

Логическая схема мыслей в этом параграфе такова. Сначала выясняется геометрический смысл сложения $a + b$ в случае положительных слагаемых a и b (передвижение от точки a вправо на b единиц).

Затем, по определению, принимается, что:

1) при $b > 0$ этот же смысл вкладывается в «сложение» и в случае произвольного a (положительного, отрицательного, равного нулю),

2) при $b < 0$ прибавить b к произвольному a означает передвижение от a на b единиц влево,

3) при $b = 0$ сумма $a + b$ принимается равной a.

Упражнение 65.

Следует практика, опирающаяся непосредственно на числовую прямую; в процессе практики, при наводящих вопросах учителя («Какие действия пришлось в этом примере произвести над абсолютными значениями слагаемых?», «Объясни геометрически, почему это так?»), вырабатываются правила сложения и проверяется (на частных примерах) справедливость переместительного и сочетательного законов. Со ссылкой на эти законы мы получаем новую, усовершенствованную формулировку правила нахождения суммы нескольких слагаемых.

Упражнение 66.

Целям укрепления полученных правил служат примеры более разнообразного содержания, в которые входят дроби, простые и десятичные.

Упражнение 67.

Здесь содержатся текстовые примеры на сложение величин. Какова бы ни была «размерность» величин, мы продолжаем пользоваться числовой прямой; впоследствии, по мере усвоения формальных правил, рисование прямой станет излишним. Но в воображении учащегося числовая прямая не должна никогда исчезнуть, и при возникновении ошибок к ней всякий раз придется обращаться.

Преподаватель должен следить, чтобы в упражнении 67 знак «минус» не употреблялся в качестве знака вычитания, кроме возникающего уже в процессе вычисления случая, когда из большего положительного числа вычитается меньшее, также положительное. Попыткам производить записи, противоречащие этому требованию, на худой конец может быть противопоставлено замечание: «Вычитанием мы пока не занимаемся; обходись одними сложениями. В твоем распоряжении имеются отрицательные числа».

§ 24

Вычитание, как видно из объяснительного текста, понимается не иначе, как действие, обратное сложение. Чтобы вычесть 13 из 7, надо решить любое из двух уравнений $13 + x = 7$ или $x + 13 = 7$; необходимо указывать учащимся, что геометрические истолкования этих уравнений — различны, хотя корни у них совпадают.

Упражнение 68.

О вычитании пока речь не идет; предлагается решать уравнения, содержащие сложение. Чем будет руководствоваться учащийся при решении уравнения: правилами ли сложения, ему уже известными, или же станет смотреть на числовую прямую — это его дело; дело же преподавателя при возникновении затруднений или при продолжительных размышлениях направлять внимание к числовой прямой.

Упражнение 69.

После того как в объяснительном тексте введено вычитание, учителю при решении примеров из этого упражнения придется ставить вопрос: «Какое уравнение придется решить, чтобы сделать этот пример?»

Здесь имеются и текстовые примеры. Отметим прием их решения. «Как вообще узнать, на сколько рублей у Ивана больше денег, чем у Петра?», «Сколько рублей, по условию задачи, у Ивана, у Петра? — «Что же надо делать?».

После продолжительной практики сообщается правило вычитания (необходимо объяснение, «вывод»). Нужно не спешить с формулировкой этого правила, даже если некоторые учащиеся увидят его гораздо раньше и (про себя) станут им пользоваться. Спешить не нужно по той причине, чтобы не смазать отношения взаимной обратности между сложением и вычитанием.

Правило вычитания и вытекающий из него формально необыкновенно простой прием «избавления от двойных знаков» облегчает работу учащихся.

Упражнение 71.

Здесь и всюду дальше можно практиковать «уничтожение» сразу же двойных знаков.

Следует тщательно обсудить в классе заключительные замечания § 24. В них, между прочим, разъясняются следующие важные (и новые для учащихся) обстоятельства:

1) Алгебраическое выражение может начинаться со знака «минус». Предлагается расшифровка, не опирающаяся на умножение:

$$-a = 0 - a,$$

взамен более употребительной

$$-a = (-1) \cdot a.$$

2) Подобно тому, как a необязательно обозначает положительное число, $-a$ необязательно обозначает отрицательное.

§ 25

То обстоятельство, что «правило знаков» при умножении предлагается в тексте учебника (из соображений экономии места) в откровенно-догматической форме, не лишает преподавателя права и возможности (в зависимости от намерения и искусства) затушевать догматизм и дать учащимся мотивировку правила. В методическом отношении едва ли удачно ссылаться на желательность сохранения законов умножения при расширении числовой области (хотя такого

рода ссылка может быть сделана в неявной, незаметной для учащихся форме). Обыкновенно используют «схему движения» (у нас эта схема представлена в задаче 221), преподаватель имеет возможность начать параграф именно с рассмотрения названной задачи с тем, чтобы ею мотивировать правило знаков. Другая возможность, которой мы были бы склонны отдать предпочтение, заключается в том, чтобы начать с построения графиков уравнений $y = 2x$ и $y = -2x$ (упр. 78, вопрос 243): «правило знаков» было бы тогда мотивировано желанием получить прямую линию.

Излишне говорить, что ни один из указанных здесь ходов мысли не является «доказательством» правила знаков.

Упражнение 73.

221. Следует, в результате рассмотрения примера с «движением точки», прийти к заключению, что в случае «положительной скорости» ($v = 6$) точка двигается слева направо, в случае «отрицательной скорости» ($v = -6$) — справа налево.

Упражнение 74.

222. Правильный ответ: это — частные случаи умножения.

Перед рассмотрением законов умножения нужно напомнить, что буквам можно давать не только положительные значения.

224. В законченной форме объяснение должно быть таково. Пусть числа a и b отличны от нуля. Абсолютные значения произведений ab и ba согласно правилу умножения равны. Сами эти произведения — положительны, если a и b одинаковых знаков, и отрицательны, если — разных. Итак, в обоих случаях знаки ab и ba одинаковы. Наконец, если хотя бы одно из чисел a и b равняется нулю, то равенство $ab = ba$ очевидно.

Преподаватель пусть будет удовлетворен, если получит достаточно внятное объяснение «на примерах», свидетельствующее о понимании.

При обсуждении «доказательства» «теоремы о равенстве нулю произведения двух множителей», может быть, не будет излишним, если преподаватель укажет, что произведение двух очень маленьких положительных чисел может быть числом, еще значительно меньшим: например, 0,01, 0,001 = 0,00001. И все же, по правилам арифметики, в произведении никак не получится нуль, если оба множителя отличны от нуля.

Проводя это рассуждение, естественно не осложнять дело знаками и ограничиться случаем 1, более близким учащимся; можно сказать кратко, что в случаях 2—4 дело обстоит аналогично.

Упражнение 75.

228. При всей безупречности логического рассуждения, приведенного выше, можно ожидать, что конкретный пример будет способствовать его убедительности.

229. Нет никаких оснований откладывать на долгий срок решение уравнений данного типа: их решение непосредственно основывается на предыдущей «теореме».

Следует говорить: «если $(x - 2)(x - 3)$ равняется нулю, то или $x - 2$ равняется нулю, или $x - 3$ равняется нулю» и т. д.

Упражнение 76.

235. Должно быть выполнено в классе, устно, за один раз.

236. Дело сводится к решению уравнения $x = \frac{1}{x}$. Нужно убедиться*, что числа x, удовлетворяющие условиям 1) $x > 1$, 2) $0 < x < 1$, 3) $x < -1$, 4) $-1 < x < 0$, не являются корнями уравнения; а числа $x = 1$ и $x = -1$, напротив, являются корнями.

Упражнение 77.

Приводим ответы: 1) при $t = 1$, 2) при $a = 1$ и при $a = 2$, 3) при $z = 1$ и при $z = 2$, 4) при $p = 0$ и при $q = 0$, 5) при $p = 0$ и при $q = 0$, 6) при $p = q$, 7) при $n = 0$ и при $n = -1$, 8) при $x = 0$ и при $x = \frac{5}{2}$.

§ 28

Этот параграф имеет то значение, что в нем, после введения отрицательных чисел, координатный у г о л заменяется координатной п л о с к о с т ь ю.

Упражнение 78.

245—246. Необходимо требовать, чтобы при отмеченных точках стояли соответствующие значения t.

Добивайтесь активного употребления слова «момент» (точка на оси времени)!

Упражнение 80.

257. Что u тождественно равно v, учащиеся могут и не заметить.

Если нужно, у в е л и ч ь т е число примеров на числовые подстановки положительных и отрицательных чисел.

Глава V

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (I)

Общие замечания

1. Учение о тождественных преобразованиях в VI классе разбито на два концентра (главы V и VII). К первому из них отнесены: 1) сложение, вычитание и умножение одночленов, 2) сложение и вычитание многочленов, 3) умножение многочлена на одночлен. Это — как раз те операции, которыми в основном приходится пользоваться при решении линейных уравнений.

2. Глубоко ошибочно было бы полагать, что тождественные преобразования покоятся лишь на формальных основах и что функциональное начало не отражается при их изучении. Всякое тождество о б о с н о в ы в а е т с я формальными законами действий, но п р о в е р я е т с я функционально — подстановками произвольных значений входящих букв. На первых порах учащиеся делают немало оши-

* Не чуждаясь обращения к числовой оси.

бок в преобразованиях, и каждое неверно написанное равенство в практике преподавания должно быть опровергнуто числовой подстановкой. Вместе с тем учащемуся должна быть привита установка: во всяком «сомнительном» случае делать «проверку», заменяя буквы произвольно взятыми числами. Здесь слово принадлежит учителю: его обязанность не только предупреждать ошибки, но и уметь их обнаруживать.

3. Возведение в степень не рассматривается как «новое» (алгебраическое) действие, так как имеются в виду лишь целые положительные степени и, следовательно, возведение в степень представляет собою повторное умножение.

Показатели степеней вводятся лишь числовые, преимущественно 2 и 3, изредка — бóльшие. При таких условиях нет необходимости в формулировках общих правил действий со степенями. Опыт показывает, что такого рода подход обеспечивает вполне сознательное выполнение действий со степенями, освобождая вместе с тем память учащихся от излишней нагрузки.

При переходе к буквенным показателям (в VIII классе) не представит труда сформулировать соответствующие правила.

4. Независимо от вышесказанного процессу возведения в степень уделено особое внимание. (Запись, числовые подстановки, моменты функционального характера.)

5. На видное место поставлены в этой главе «буквенные подстановки». Речь идет об операции, заключающейся в том, чтобы в данном алгебраическом выражении заменить указанную букву заданным алгебраическим выражением. Употребление этой операции неизбежно: в частности, она применяется и в стабильном учебнике алгебры; но там она входит «явочным порядком», причем ей не уделяется специальных упражнений.

§ 29

Чтобы сразу же предупредить возникновение распространенной и затяжной «болезни» изучающих алгебру — смешения коэффициента и показателя, в книге проведено следующее мероприятие: два первых отрывка объяснительного текста вполне аналогичны по содержанию, но в первом идет речь о сложении и о коэффициенте, во втором — об умножении и о показателе. Коэффициентом (целым!) мы пользуемся, когда хотим записать кратко сумму нескольких одинаковых слагаемых, показателем (также целым), когда хотим записать кратко произведение нескольких одинаковых множителей. Вполне отвечают друг другу по содержанию и два первых *упражнения* — *82* и *83*.

Аналогия не может быть проведена далеко именно по той причине, что показатель, согласно определению — не иначе, как целое положительное число. Коэффициент же может быть каким угодно числом, если его понимать как числовой множитель.

Упражнение 85 преследует цель укрепления правильного понимания вновь введенных терминов.

§ 30

Понятие степени нуждается в более углубленной проработке: ей нужно посвятить некоторое время, заботясь вместе с тем, чтобы не уйти от основного содержания главы.

Упражнения 86—87.

Необходимо добиться отчетливого понимания различия между степенью и коэффициентом, беглого употребления терминов «квадрат» и «куб» числа у всех учеников. Прекрасное и своевременное упражнение — разложение многозначных чисел на простые множители, с записью в показателях.

§ 31

Объяснительный текст показывает, как можно «без правила» (т. е. без заучивания правила) перемножать степени: достаточно писать подробно, чтобы получить правильный результат. Однако писать подробно необходимо лишь по мере надобности: учащегося, который схватил суть дела и обходится без подробных записей, нужно останавливать или задерживать только при возникновении ошибок.

Упражнения 88—89.

Выполняя действия с одночленами, имеющими отрицательные коэффициенты, удобнее заменять знак «минус» (хотя бы в уме) множителем (-1):

$$(-2f)\cdot(-5g) = [(-1)\cdot 2f]\cdot[(-1)\cdot 5g] =$$
$$= [(-1)\cdot(-1)]\cdot(2f\cdot 5g) = 2f\cdot 5g = 10fg.$$

§ 32

При работе над этим параграфом в первую очередь должно быть усвоено на конкретных примерах, что умножение на целое число равносильно повторному сложению.

Далее, должно быть усвоено, что умножить на числовую дробь $\frac{p}{q}$ — значит разделить на a и то, что получится, умножить на p.

Наконец, нужно выработать понимание простейшего тождественного преобразования — сложения подобных однобуквенных одночленов с числовыми коэффициентами. Упоминание о распределительном законе преждевременно и может быть отнесено к повторению. Наводящие вопросы: «Сколько будет 2 десятка и 5 десятков? 2 дюжины и 5 дюжин? Или еще: «Сколько будет пол-яблока и треть яблока?», «Километр, да полтора, да два километра?»

В *упражнениях 90* и *91* мы встречаемся с суммами, в которых все члены подобны между собою. Напротив, в *упражнении 92* надо искать глазами подобные члены и делать приведение по возможности в уме. При затруднениях обычные методические приемы (подчеркивание подобных членов), конечно, не возбраняются.

Все производимые (здесь и дальше) преобразования должны быть обоснованными. Если, например, учащийся написал:

$$a^2 + a^3 = a^5,$$

следует прежде всего добиваться от него, на каком основании он так сделал («вследствие какого закона», «в силу какого правила»), а когда он окажется неспособным дать объяснения, — предложить ему сделать числовую подстановку $(a = 2)$.

§ 33

Предполагается, что догматически звучащие правила сложения и вычитания многочленов, данные в объяснительном тексте, могут быть приняты учащимися без протеста, так как, по видимости, это — хорошо известные ему правила арифметики. Они могут упустить из виду (и это не беда!), что содержание их — новое, алгебраическое, так как многочлен есть а л г е б р а и ч е с к а я с у м м а. Строгий вывод этих правил сделан позднее, на основе распределительного закона, в § 35 [формулы (5) — (8) на стр 131]. На данном же этапе, когда нас интересует формально-оперативная сторона вопроса, заниматься выяснением логических основ едва ли своевременно.

Но скрывать от учащихся то обстоятельство, что имеются в виду а л е б р а и ч е с к и е суммы, никак не следует: напротив, к этому все время должно быть направлено внимание.

§ 34

Правило умножения многочлена на одночлен «следует непосредственно» из распределительного закона, поскольку закон этот сформулирован словесно. Более точный ход мыслей основан на разъяснениях, данных в § 35: чтобы умножить, например, $x + 2$ на 5, надо в тождестве $(a + b)c = ac + bc$ положить $a = x$, $b = 2$, $c = 5$.

§ 35

Упражнение 94б.

315. Писать «$t = 2t$», конечно, нельзя. Нужно сказать: «после замены t на $2t$ получим:

$$x = 2 \cdot (2t) = 4t, \quad y = 3 \cdot (2t)^2 = 12t^2, \quad z = \frac{1}{2t}\text{»}.$$

Другое объяснение: «с н а ч а л а сделаем подстановку $t = u$, п о т о м подстановку $u = 2t$».

Умение сознательно выполнять буквенные подстановки весьма существенно с разных точек зрения, а потому предлагаемые примеры заслуживают особого внимания.

Сформулированный в объяснительном тексте «принцип сохранения тождества при подстановках» подчинен единственному ограничению: буквам следует давать лишь такие значения, при которых подставляемые выражения не теряют смысла. (Например, формулы (3) и (4) на стр. 132 теряют смысл при $c = 0$).

Доказательство принципа, которое незачем навязывать учащимся, крайне просто: раз буквам даются значения, при которых подставляемые выражения не теряют смысла и, следовательно, принимают некоторые числовые значения, то о к о н ч а т е л ь н о п о л у ч а е м о е равенство справедливо, так как д а н н о е равенство, будучи тождеством, выполняется при упомянутых значениях подставляемых выражений.

В частности, этот принцип немедленно получает применение для «унификации» распределительных законов.

Чтение текста, помещенного на стр. 132—133 даже при повторении, возможно, представило бы трудности: лучше было бы, если бы преподаватель п р и с л у ч а е дал необходимые объяснения у доски, и пожалуй — не раз.

Глава VI

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Общие замечания

1. Главная цель, преследуемая начальным курсом алгебры в части, касающейся уравнений, заключается в том, чтобы, не слишком углубляя принципиальную сторону дела, практически познакомить учащихся с механизмом решения уравнений. Это основное положение не должно быть упускаемо из виду преподавателем.

2. Тем не менее, для того чтобы обосновать рекомендуемые примеры решения и, в частности, для того чтобы дать удовлетворительные разъяснения по поводу некоторых особых случаев *, преподаватель, обучающий решению уравнений, должен опираться на некоторую, хотя бы скромную, теорию.

Предлагаемая здесь теория уравнений такова. Приступая к решению уравнений, мы допускаем (постулируем), что корень уравнения существует (хотя бы один), и обозначаем его (или один из корней) той же буквой, которой обозначено «неизвестное», например, буквой x. Затем выводим из уравнения, представляющего теперь уже утверждение, хотя и гипотетическое, одно за другим, ряд следствий, строя их цепь таким образом, чтобы прийти к равенству вида $x = a$ (или же дизъюнктивному заключению: или $x = a$, или $x = b$, и т. д.). После этого остается проверить — и это принципиально необходимо, — удовлетворяет ли число a (или числа a, b и т. д.) нашему требованию.

Если же вместо равенств указанного типа мы получим в качестве следствия заведомо неверное равенство, то это свидетельствует о том, что сделанное допущение о существовании корня было ошибочно и, значит, уравнение корней не имеет.

Таким образом, понятие эквивалентности уравнений не вводится, что же касается проверки, то она составляет органическую часть решения.

3. В главе VI будет идти речь только об одном, довольно узком, но вместе с тем и важном, классе уравнений — об уравнениях линейных (1-й степени). Мы не думаем, чтобы об этом ограничении следовало заранее уведомлять учащихся. Классификация уравнений будет сообщена им позднее. Однако беглые разъяснения в этом направлении следует все же дать безотлагательно, если будут заданы достаточно точно поставленные вопросы со стороны самих учащихся.

4. Мы полагаем, что для учащегося VI класса достаточно проделать запас предлагаемых здесь текстовых задач. Однако, если время позволит, преподаватель с успехом может пользоваться, с целью обогащения материала, существующими задачниками: прибегать к задачникам, в частности, целесообразно при классных письменных работах.

§ 36

Глава VI начинается с упражнений повторительного характера, имеющих целью — восстановить в сознании учащегося знакомый ему прием решения уравнений посредством «свойств арифметических

* Особые случаи рассматриваются в VII классе.

действий». Чтобы перейти в дальнейшем (и уже окончательно) к применению «свойств равенств», на данном этапе следует лишь в меру крайней необходимости прибегать к словесным, развернутым формулировкам «свойств арифметических действий» (см. § 5) и преимущественно пользоваться оборотами речи, указанными в первом же пункте упражнения 99. Далее в этом упражнении предложен (342) обильный запас весьма простых примеров, из которых полдесятка придется сделать с записью и обстоятельными разъяснениями (как в тексте), но затем перейти «на устное решение с места», в таком роде: читая, например, вслух уравнение

$$13)\ \frac{x}{2}+5=10,$$

ученик говорит:

«Значит, $\frac{x}{2}=5$; значит, $x=10$»

Желательно за непродолжительный срок проделать все 30 примеров, привлекая при этом, по возможности, всех учащихся.

В *упражнении 100* даны примеры уравнений, решение которых связано с простейшими преобразованиями, рассмотренными в главе V.

Упражнение 101 содержит текстовые задачи, приводящие к уравнениям подобного же типа.

§ 37

Чтобы из данных равенств выводить новые равенства, являющиеся их следствиями, необходимо знать свойства равенств.

Свойства равенств I—IV, необходимые для решений уравнений и излагаемые в настоящем параграфе, должны быть отчетливо поняты учащимися. Каждое из этих свойств стоит в соответствии с одним из четырех арифметических действий.

Подолгу на изучении § 37 задерживаться вместе с тем не следует; достаточно разъяснить смысл утверждений, иллюстрировать их примерами, наконец дать словесные формулировки. Мелкий шрифт стоит отложить до повторения.

Алгебраическое решение уравнений начинается, собственно говоря, с «применения свойств равенств».

Чтобы обеспечить полную ясность в понимании механизма решения уравнений этим способом, учащиеся должны всякий раз указывать то свойство равенств, которым они в данный момент пользуются. Мы предлагаем делать это кратко: устно — словами «первое», «второе», «третье», «четвертое» свойство; письменно — ссылаясь в скобках на номер (как в тексте).

В самом начале не обойтись без очень подробной записи: действительно, не всем без исключения учащимся сразу же будет понятно, что, вычитая из обеих частей равенства

$$13x+17=100$$

по 17, мы получим равенство

$$3x=83.$$

Придется начинать с такой записи, какая указана в примере 1; позднее можно будет объяснить на словах, что при вычитании 17 в левой части член 17 уничтожается; в правой же части вместо 100 получается 83.

Мы предлагаем упражнения 102—103 проделать не иначе, как с обязательными устными или письменными ссылками на свойства равенств и не переходя к оборотам речи «перенесем такой-то член из одной части равенства в другую». Недопустимо, чтобы «перенесение» воспринималось как автоматический акт, разрешенный или предписанный учащемуся, независимо от логики внутренних алгебраических отношений. Не иначе, как в итоге продолжительной практики и в результате полного усвоения смысла совершаемых операций, может быть допущено употребление оборота речи «перенести из одной части в другую».

В *упражнении 102* и *103*, чтобы не отвлекать учащихся излишним разнообразием, неизвестное все время обозначается буквой x; но в упражнении 104 в качестве неизвестных встречаются различные буквы алфавита.

Ближе к концу параграфа объяснительный текст указывает общий план решения линейного уравнения. Изложение «общего плана» рассматривается здесь как своего рода синтез, подведение итогов всей проделанной работе. «План» должен создаваться в процессе напряжения усилий, направленных на решение каждого примера в предыдущих упражнениях.

Уже в предшествующих упражнениях учащиеся должны ясно видеть цель: нужно сосредоточить члены, содержащие неизвестное, в левой части, свободные члены — в правой части, затем для определения неизвестного придется еще разделить на коэффициент при нем.

В процессе решения уравнений учащиеся должны понять и усвоить, что свойство равенств II лишь внешним образом отличается от свойства I, свойство IV — от свойства III. Постепенно надо отказываться от свойств II и IV и переходить к прибавлению отрицательных чисел (вместо вычитания положительных) и к умножению на дробные числа (вместо деления на целые).

Постепенно нужно также вырабатывать навык соединять вместе однотипные операции над уравнениями. Например, представим себе, что при решении уравнения 13) в упражнении 103 учащийся, раскрыв скобки, получил:

$$20x - 4 = 13x + 3;$$

затем «прибавляем по 4»

$$20x = 13x + 7;$$

и, далее, «отнимаем по $13x$»

$$7x = 7.$$

Тогда его стоит спросить: «Вместо того, чтобы отнимать по $13x$, что можно прибавить?», «А нельзя ли сразу прибавить $4—13x$?» К концу учебного года неуменение сделать одновременно несколько «перенесений» должно рассматриваться как недостаток навыка, как существенный недочет.

Необходимо постоянно заботиться о том, чтобы проверка решения уравнения имела действенный, а не фиктивный характер.

Опыт показывает, что приходится встречаться со случаями, когда учащийся в данное уравнение (в левую и в правую его часть) «подставил» найденное им решение, но не сделал никаких арифметических действий и, следовательно, не установил правильности полученного им равенства. Если решение верное, у учащегося есть оправдание, так как он может сказать (и в простых примерах, конечно, с полным правом), что он сделал действия «в уме». Но никоим образом недопустима терпимость преподавателя в тех случаях, если «подставленное» и фактически не проверенное решение оказывается ошибочным.

Необходимо не столько внушать и требовать, сколько главным образом воспитывать потребность в выполнении проверки (мы не ставим своей задачей решить, какими путями этого лучше всего добиться).

§ 39

Преподаватель должен понимать (и при случае уметь разъяснить учащимся), что «проверка по уравнению» и «проверка по условию задачи» преследуют различные цели. Цель «проверки по уравнению»—узнать, является ли число решением уравнения; цель «проверки по условию задачи» — узнать, дает ли оно нам решение задачи. Если, например, составляя уравнение, мы через x обозначим возраст дедушки, и в результате решения оказалось, что $x = 200$, то, пожалуй, лучше сказать, что задача не имеет решения. (Дело это, конечно, условное.)

В каждой задаче вопрос указывает прямо, какую из величин надлежит взять в качестве неизвестной. Однако преподаватель по своему усмотрению может решить некоторые из задач вторично, меняя выбор неизвестного: как правило, это — полезнее, чем решить новую задачу.

Значение текстовых задач, по нашему мнению, несколько преувеличивается в практике преподавания. Во всяком случае, ошибочно усматривать прикладное значение в текстовых задачах «жизненного» содержания: с такими задачами не так уж часто приходится встречаться в жизни.

Но учебное значение этого рода задач никак не должно быть недооценено.

Как видно из построения учебника, мы полагаем, что следует прежде всего добиться ясного понимания того, что представляет собою уравнение, затем научиться решать систематическим способом некоторые уравнения, и, наконец, уже тогда перейти к составлению уравнений по текстам задач.

Тем не менее, мы не имеем возражений против того, чтобы преподаватель, если найдет нужным, приступил к составлению уравнений уже в процессе выполнения упражнений 102—104, заимствуя тексты из § 39, или из «Повторительных упражнений», или из различных задачников, или сочиняя их самостоятельно.

§ 40

В § 38 (и раньше) уже попадались «дробные» уравнения. Поскольку эти уравнения «приводятся» к линейным, учащиеся распо-

лагают уже всеми средствами для их решения (при условии обязательной проверки*).

«Уравнения в виде пропорции» ничем не отличаются от прочих уравнений. Выделены они в особый параграф по той причине, что встречаются довольно часто, и притом заслуживает особого внимания «основное свойство пропорции», на которое удобно ссылаться при решении (с точки зрения краткости речи).

Упражнение 110.

372. Вместо того чтобы следовать общему плану, здесь уместно искать своеобразных путей решения. Одним из таких путей, позволяющим избежать бесполезного переписывания, является введение новых неизвестных. Так, можно положить в уравнении 1) $3u-5=v$, в уравнении 2) $\frac{h}{h+1}=k$, в уравнении 3) $2z-3=t$.

Упражнение 111

373—374. В задачах на пропорциональность можно выбрать неизвестное в соответствии с постановкой вопроса или же принять в качестве такового коэффициент пропорциональности (см. § 12). Полезно сделать каждую задачу обоими способами и сравнить.

Упражнение 112.

Четыре задачи с существенно различными условиями приводят к одному и тому же уравнению.

Полезно, обнаружив этот факт вместе с учащимися, заняться (если позволит время) составлением различных текстовых задач, приводящих к одному и тому же заданному уравнению.

Упражнение 113.

Ответы: 382. $P=26$ (от x не зависит); $S=24+3x$; $S=30$ при $x=2$

383. $P=28+2x$; $S=12+8x$; $S=28$ при $x=2$.

384. $P=36-2x$; $S=18x-2x^2$; $P=30$ при $x=3$, $S=28$ при $x=2$.

(Последнее обстоятельство обнаруживается при заполнении таблички; что решение — единственное, видно из чертежа, так как с увеличением x от 0 до 4 площадь возрастает и, следовательно, не может два раза принять одно и то же значение).

Глава VII

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (II)

Общие замечания

1. Ко второму концентру тождественных преобразований отнесено прежде всего умножение многочлена на многочлен. Правило этой операции должно быть выведено самым явственным образом

---

* Заметим, что предлагать в начальном курсе уравнения, приводящие к так называемым «паразитным» корням, нам кажется излишним.

из распределительного закона умножения*. Основные формулы умножения («квадрат суммы» и пр.) должны возникнуть как частные случаи общего правила**.

Далее, сюда включены некоторые обратные операции: деление одночлена на одночлен и многочлена на одночлен и, наконец, простейшие приемы разложения на множители.

2. Заслуживают особого внимания два вопроса, рассматриваемые в этой главе попутно и в пропедевтическом плане:

1) теорема Пифагора, 2) выделение квадрата из трехчлена второй степени.

3. Действия с многочленами, расположенными по степеням какой-нибудь буквы, в частности, деление многочлена на многочлен, отнесены уже к курсу VII класса.

4. Необходимо стремиться к тому, чтобы учащиеся, занимаясь тождественными преобразованиями, приобретали: 1) понимание того, каким образом обосновывается каждый предпринятый ими шаг («Зачем это нужно?»).

Зачем нужно изучение иных операций (например, разложение на множители или формула для суммы и разности кубов), — следует надеяться, что это в достаточной степени будет понято позднее.

5. Как и всегда, не следует упускать из виду проверку правильности выполнения преобразований посредством подстановки числовых значений букв.

§ 41

В объяснительном тексте дан вывод правила умножения двучлена на двучлен, двучлена на трехчлен и трехчлена на трехчлен [формулы (1)—(3)], и затем без ссылки на применение полной индукции*** предлагается общая формулировка правила умножения многочлена на многочлен. Запись формул (1)—(3) в правой части сделана «по прямоугольнику». Если бы множимое содержало p членов, а множитель q членов, то в этом прямоугольнике было бы p строк и q столбцов.

Упражнение 115.

388. Большое число, впрочем, довольно легких примеров должно обеспечить уверенные и твердые навыки при умножении многочленов.

Хотя о «расположенных» многочленах еще не говорилось, все же пусть учитель рекомендует выписывать члены произведения не как попало, а в порядке возрастания или убывания степеней входящей буквы. Понемногу надо приучать делать приведение подобных членов в уме, не переписывая.

Примеры 19 и 39 позволяют осветить с алгебраической точки зрения механизм умножения многозначных чисел «столбиком».

---

* Геометрическое истолкование весьма желательно (см. упр. 114, 386, 387), но лишь как иллюстрация.

** Нам известен случай, когда преподаватель, не видевший связи между общим правилом умножения и основными формулами, заученными им догматически, был весьма обрадован, усмотрев внезапно эту связь (в силу обстоятельств случайного характера).

*** Так называемые полные индукции на данном этапе слишком мало убедительны.

Примеры 21—24, 34—35, 43—44 позднее станут «основными формулами», которые нужно будет заучить на память: здесь же предлагается сделать и вывод в качестве «рядовых» примеров. Это однако нужно делать в классе, причем учитель наблюдает за правильностью действий.

Упражнение 116.

389. Немногочисленные более громоздкие примеры, приведенные в этом пункте, особенно удобны для домашних заданий.

390. Предлагаются уравнения, при решении которых приходится перемножать многочлены. Уравнения — с виду квадратные, но степень всюду снижается.

Упражнение 117.

К уравнениям того же типа приводят текстовые задачи.

§ 42—45

1. Вывод всех основных формул умножения I—VII предложен учащимся в качестве очередных примеров на умножение в *упражнении 115*.

Мы представляем себе, что вторичный вывод всех пяти формул, подлежащих запоминанию, будет произведен на доске внятно, тщательно, с разборчивой записью — во всех отношениях лучше, чем это сделал бы учащийся, — самим учителем, который вместе с тем добавит все необходимые, по его мнению, устные разъяснения.

При выводе каждой из формул (естественно спариваются формулы I и II, IV и V, VI и VII), когда промежуточные вычисления будут рассмотрены и уже не будут нужны, можно их стереть и написать еще раз рассматриваемую формулу более сжато и после этого начать с нею работу.

2. Необходимо прежде всего констатировать, что формулы I—VII — тождества, так как справедливы при каких угодно числовых значениях входящих букв; что тождества эти не нарушаются также и в том случае, если вместо букв a и b подставить какие угодно новые буквенные выражения.

3. Необходимо, во-вторых, установить следующую связь между формулами I и II, IV и V, VI и VII: формула II получается из формулы I посредством замены b на $(-b)$; точно так же V — из IV, VII из VI. Формула III при этой замене не изменяется.

Это полумнемонического характера замечание не столько имеет целью ослабить нагрузку памяти, сколько выяснить взаимоотношения между формулами, и может также служить отчасти средством контроля.

4. Необходимо, наконец, формулы заучить на память. Мы полагаем, что заучивать нужно именно сами формулы, а не их словесное изложение. Тем не менее, чтение словами всех этих формул следует считать полезным упражнением.

5. Формулы I — VII часто называют «формулами сокращенного умножения». Мы избегаем этого термина по той причине, что он нередко толкуется ошибочно в смысле арифметических применений: $51^2 = (50 + 1)^2$, и т. п. Под «сокращенными действиями» (умноже-

нием и делением) желательно было бы понимать совсем другой прием (см. «Энциклопедию элементарной математики», т. I, стр. 423—425).

Применение основных формул к устным вычислениям над двузначными числами представляет собою прием весьма сомнительной практической ценности и удобен сравнительно в редких случаях. Тем не менее этот прием представляет яркую и наглядную иллюстрацию формул и способен возбуждать любознательность учащихся этого возраста.

Поэтому в упражнениях приведено несколько относящихся сюда примеров (396, 405, 409), но их число без особых оснований не стоит увеличивать.

6. Умножение буквенных выражений «по основным формулам» мы истолковываем последовательно и систематически с помощью «принципа подстановки».

Учащиеся должны ясно понимать значение этих формул: если бы произвести действие по «общему» правилу умножения многочленов, то результат получился бы как раз тот же самый; но он несколько короче получается «по формулам».

Упражнение 118.

394. Фигура, о которой идет речь, достаточно известна: ее легко нарисовать.

397. «Квадрат суммы трех слагаемых».

398. Равенство $(a-b)^2=(b-a)^2$ не мешает запомнить.

Упражнение 119.

399. Теорема Пифагора относится сюда независимо от курса геометрии. Чрезвычайно наглядное доказательство основано на применении формулы для «квадрата разности». На теореме Пифагора стоит остановиться и разъяснить ее значение в геометрии. Может быть затронут пропедевтически вопрос об извлечении квадратного корня из чисел. Но истолковывать квадраты как площади и строить квадраты на сторонах прямоугольника — необходимости нет.

Упражнение 121.

407. Наверное в каждом классе нашлись бы желающие склеить разборный куб из восьми кусков.

§ 45

По поводу формул VI и VII стоит сделать замечания:

1. Строго говоря, их можно было бы называть формулами «умножения» только после перестановки левой и правой части равенства: но лучше запомнить в предлагаемой форме.

2. Как объект запоминания формулы эти сложнее предыдущих, их следовало бы отнести к курсу VIII класса. Однако это не сделано из программных соображений.

§ 46

Деление одночлена и многочлена на одночлен рекомендуется выполнять «по соображению», руководствуясь приведенными образцами. В некоторых примерах деление нацело не выполняется, и воз-

никают дроби. Беды в этом нет: действия с дробями изучаются в VII классе, здесь же приходится только сокращать дробь на буквенные множители, что затруднений вызвать не может.

§ 47

Вынесение за скобки предлагается выполнять без предварительного сообщения сведений об общем наибольшем делителе. Если все общие множители не будут вынесены за скобки сразу, спросите: «Нельзя ли вынести еще что-нибудь?».

Нам представляется целесообразным в шестом-седьмом классах ограничить применение «разложения многочленов на множители методом группировки» примерами, не более сложными, чем здесь приведенные; ради прочности усвоения преподаватель может, впрочем, несколько увеличить их число.

При разложении на двучленные множители трехчлена второй степени методом группировки предлагается не действовать, так как этот прием не общий. В простых примерах (вроде предлагаемых в упр. 126,7—11) разложение «угадывается», в более сложных случаях оно выполняется посредством «выделения квадрата» и применения формулы «разность квадратов» (см. § 48, пример 2 и 423).

§ 48

«Выделение квадрата из трехчлена второй степени» — один из важнейших навыков, овладение которым имеет громадное значение в курсе элементарной алгебры. Из рассмотрения ряда примеров учащимся должно стать ясным, что в том случае, если данный трехчлен, с числовыми коэффициентами, не есть квадрат двучлена, из него все же можно выделить квадрат посредством изменения свободного члена. Возможны три случая:

1) Если свободный член, получающийся после выделения квадрата, положителен, то делать какие-либо дальнейшие преобразования не предлагается.

2) Если этот член — отрицателен, то в случае, если он представляет собою точный квадрат, производится разложение на линейные множители с помощью формулы «разность квадратов»; в случае же, если свободный член не есть точный квадрат, это самое преобразование откладывается до введения радикалов (VIII класс).

3) Если свободный член оказывается равным нулю, то разложение на «квадрат суммы или разности» уже осуществлено, и дальнейшие преобразования излишни.

Излагать эту теорию учащимся в VI классе не следует.

Кроме трехчленов второй степени, рассматриваются с этой же точки зрения однородные многочлены второй степени.

Глава VIII

РАСПОЛОЖЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Общие замечания

1. Учащиеся, закончившие работу по первой части данного учебника (для VI класса) и стоящие на пороге второго года обучения алгебре, кое-что во время летнего перерыва занятий, как водится, позабыли. Но больших трудов не составит для них и для

преподавателя восстановление тех основ предмета, к которым их внимание было привлечено на протяжении прошлого года. Им ясен смысл и употребление буквенных обозначений, они понимают, как следует составлять и решать некоторые (преимущественно линейные) уравнения, умеют в какой-то степени обращаться с формулами и даже знакомы с геометрическими представлениями величин и их изменений. Все это довольно надежный фундамент.

В меньшей степени продвинутой оказывается в курсе алгебры VI класса формально-оперативная линия: без большого преувеличения можно сказать, что учащиеся выполняли тождественные преобразования постольку, поскольку в них оказывалась надобность. Пониманию правил и прочности их усвоения способствовал энергичный упор на основные законы арифметики (свойства арифметических действий).

Задачей настоящей главы учебника является дать закрепление достигнутых этапов и дальнейшую тренировку в тождественных преобразованиях в объеме трех действий (исключая деление).

2. Глава VIII непосредственно примыкает по своему содержанию к предыдущей. Она удачно падает на начало учебного года, так как содержит многочисленные элементы повторения и дозу формализма, преодолеть которую в особенности удобно свежими силами.

3. Требование записывать многочлены в определенном порядке — скорее дисциплинарное, чем математическое. Его следует выполнять во всех случаях, кроме тех, когда имеются достаточные основания для того, чтобы его нарушить. Оно выполнялось, как правило, уже при работе над главой VII, но теперь впервые к нему привлекается внимание учащихся; это дает повод для того, чтобы сообщить ряд обиходных терминов и указать ряд практических приемов, касающихся порядка действий и расположения записей.

Естественно внушать учащимся мысль, что записывать многочлен в «нормальной» форме — по степеням — важно потому, что это и облегчает действия и уменьшает число возможных ошибок, происходящих от невнимательности.

При этом повышается мало-помалу и уровень формально-оперативной техники учащихся. Приемы совершенствуются, работа идет быстрее. Один из первых шагов в этом направлении — приобретение умения «собирать коэффициенты» в подобных членах (см. пункт 484) посредством особой записи или же (в более простых случаях) зрительно, глазами. К последнему явно направлены лишь немногие из упражнений (например, 445); однако практиковаться можно, в меру сил, на каждом шагу.

4. Заслуживает внимания такая деталь: весьма распространена, не только среди школьников, тенденция при записи многочленов избегать того, чтобы начинать с члена, при котором стоит знак «минус». Не будем судить, насколько это, вообще говоря, оправданно или является предрассудком. Но если решено располагать многочлены «по степеням» такой-то буквы, то сомнений быть не должно; забота о том, чтобы избегать «минуса впереди», должна отпасть полностью.

5. На протяжении главы VIII само понятие «многочлен» совершает некоторую эволюцию, долженствующую, как нам представ-

ляется, реализовать увязку между различными определениями, в том числе «школьным» («алгебраическая сумма одночленов», см. глава I, стр. 16) и «научным» («целая рациональная функция»). В этом отношении заслуживает внимания прежде всего «примечание» на странице 176, устраняющее противоречие между двумя названными определениями в случае наличия лишь одной буквы. Это примечание автоматически распространяется и на случай двух букв (§ 54 «Многочлены с двумя буквами»), и, если угодно, на большее их число. Вместе с тем еще далее (§ 55) учащимся указано на возможность выделения «главных» букв, причем остальным буквам отводится роль «побочных параметров», и указано, что коэффициенты при степенях главных букв (или при их произведениях) могут зависеть от параметров как угодно (т. е. необязательно быть целыми рациональными функциями от них). При таком понимании «многочленом» (относительно x и y) оказывается, например, выражение

$$\frac{a}{b+c}x+\frac{m+n}{p}y,$$

что, кстати, не стоит в противоречии с распространенным определением многочлена «по последнему действию».

6. Нередко специфические особенности частных случаев способны затемнять существо вопроса; таковое, напротив, легче схватывается на примерах более общего характера, хотя бы и более громоздких.

Вот почему нам кажется более целесообразным, вопреки известному принципу, идти иногда «от сложного к простому» (см., например, § 52).

7. Теорема о тождестве многочленов («если значения двух многочленов $Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+L$ и $A'x^n+B'x^{n-1}+\ldots+L'$ равны при всех значениях x, то непременно $A=A'$, $B=B'$, ..., $L=L'$») является неизбежным логическим звеном в теории целых рациональных функций.

Однако мы считаем необходимым предупредить, что в «начальном» курсе не видим надобности ее сообщать, ею пользоваться или на нее ссылаться (см. ниже, 482 и пр.).

8. Три параграфа (50—52), отчасти связанные между собою, при первом прохождении главы VIII целесообразно опустить и вернуться к ним при повторении. Такое предложение обусловливается как большей их трудностью для усвоения (деление многочленов), так и своеобразным их содержанием (наличие вопросов теоретико-числового характера).

§ 49

Если в объяснительном тексте говорится о члене «нулевой степени», то это не следует истолковывать в том смысле, что в данном месте вводится соответствующее обобщение понятия «степень»; указывается лишь удобный оборот речи, обеспечивающий общность формулировок.

С другой стороны, обороты речи «свободный член», «старший член», «линейный многочлен» не следует понимать как научные термины: употребление их преследует цель — сообщить речи краткость

и выразительность. Они должны быть прекрасно усвоены учащимися: сначала нужно добиться их правильного понимания, затем и активного их употребления.

Упражнение 133.

434—435. Предлагается выполнить указанные действия над многочленами P и Q; A, B и C; их уместно трактовать и иначе: предлагается в данных выражениях $P+Q$, $P-Q$ и т. д. вплоть до $2A+5B+7C$ выполнить такие-то буквенные подстановки и сделать затем упрощения (см. § 35, упр. 95).

Упражнение 134.

437—438. «Проверка» основывается на следующем важном принципе, о котором упомянуто было раньше (стр. 132): если в данном тождестве заменить входящие буквы некоторыми алгебраическими выражениями («не теряющими смысла»), то получится также тождество.

Если предлагается далее (в упр. 136) составить квадраты и даже кубы данных многочленов, то это не значит, что в данном месте должно быть сформулировано (тем более — заучено) правило возведения в степень многочлена: учащиеся должны прибегать к обыкновенному умножению.

По поводу приема проверки тождества методом подстановки числовых значений (стр. 143) следует заметить, как и о всяком другом приеме проверки, что он не доказывает правильности полученного результата, а способен только обнаружить его ошибочность.

Упражнение 137.

446. Этот пункт имеет весьма существенное значение, однако вследствие своей отвлеченности должен быть отнесен к повторению. Степень суммы или разности многочленов не превышает наибольшей из степеней данных многочленов (старшие члены иногда могут взаимно уничтожаться); степень произведения многочленов всегда в точности равна сумме степеней перемножаемых многочленов, и при этом старший член произведения равен произведению старших членов многочленов (это будет использовано в «Делении многочленов», стр. 189). При изменении знака многочлена степень не меняется; степень суммы квадратов многочленов в точности равна наибольшей из удвоенных степеней (здесь старшие члены не могут взаимно уничтожаться).

447. Полезно построить соответствующий график и отдать себе отчет в том, что значения xy представляют собою площади прямоугольников, а значения x^2+y^2 после извлечения квадратного корня дают расстояния точек от начала координат.

Тематика *упражнения 138* определяется тем, чтобы от формальных операций с расположенными многочленами своевременно (хотя бы ради разнообразия) переключить внимание учащихся на функциональные свойства многочленов: следует отметить характер изменяемости нелинейных многочленов. Этот материал служит также подготовкой к § 59 («от сложного к простому»). Пункт 450 имеет отношение вместе с тем к следующему § 50.

§ 50

К этому параграфу (и к § 51—52) мы предлагаем обратиться лишь при повторении главы и тогда начать (снова) с вопроса 450, чтобы понятен был идущий далее объяснительный текст.

Непосредственной целью параграфа является разъяснение принципа, на котором строится десятичное счисление, и осветить (не более того) с алгебраической точки зрения правила трех первых действий над многозначными числами*. Все это заканчивается *упражнением 139*.

Содержание второй половины параграфа — иное. В «задачах-загадках», — так мы назвали их потому, что учащиеся найдут в них известный элемент развлекательности, но едва ли сумеют увидеть много «полезного», — мы возвращаемся снова к составлению и решению уравнений. Вместе с тем здесь поставлена впервые проблема взаимоотношения между текстовой задачей и соответствующим уравнением: решение уравнения может не приводить к решению задачи; не во всякой задаче удобно начать с уравнения (см. вопрос 456); иной раз (453) никакого уравнения нет вовсе, хотя задача имеет единственное решение (!) Нужны сильные средства для того, чтобы предупредить возникновение готовой сложиться автоматической установки: составляй уравнение и решай его, больше от тебя ничего не требуется.

Излишне говорить, что при работе над *упражнением 140* преподаватель должен воздержаться от далеко идущей теоретизации и ограничиваться преимущественно констатацией фактов. Например: в пункте 456 составить уравнение легко, но решить его («систематически») трудно; поэтому гораздо лучше «перепробовать» все числа, сумма цифр которых равна 13 (или произведение цифр равно 36).

§ 51

И этот параграф служит, по крайней мере, двум различным целям. Непосредственной целью является подготовка к делению многочленов. Здесь приходится опереться на аналогию с делением натуральных чисел. Отмечая наличие двух различных действий — «точного» деления и деления с остатком, естественно слегка затронуть вопрос: в каких же задачах приходится прибегать к точному делению и в каких — к делению с остатком? На данном этапе возможны некоторые обобщения, основанные на хорошо знакомом арифметическом материале. Если величина допускает безграничное деление на равные части (таковы, как мы себе представляем: мука, песок, отрезок, время), то всегда выполнимо точное деление: например, какое бы то ни было количество муки всегда можно разделить поровну между любым числом людей; всякий отрезок прямой, или промежуток времени, можно разделить на какое угодно число равных частей (поупражняйтесь!). Напротив, в других случаях деление на равные части невыполнимо: например, 13 кроликов нельзя поровну рассадить в 4 ящиках; один окажется «в остатке» и т. п. Иногда от нас зависит выбор способа деления («разделить точно» или «с остатком»): 13 дынь можно разде-

---

* Сюда относятся также вопросы 19 и 39 в упр. 115.

лить между 4 мальчиками, давая каждому по 3 дыни и по одной четвертушке, или же дать каждому по 3 дыни, а одна дыня «останется». Сказанное относится к делению «по содержанию»: так в данном отрезке другой отрезок (скажем, сантиметр) может уложиться, допустим, «ровно» 4 раза или может уложиться «с остатком» в один сантиметр, и в последнем случае не возбраняется сказать, что он укладывается «четыре раза с третью». От преподавателя следует ждать, что при чтении абстрактного объяснительного текста § 51 он пополнит этот текст конкретным содержанием (кстати, тем самым будут сделаны шаги в сторону рассмотрения вопроса о «соизмеримости», которым придется заниматься в VIII классе).

Во-вторых, в данном параграфе учащиеся имеют возможность познакомиться (стр. 187) с общей формой натуральных чисел, которые при делении на q дают остаток r: это — тот общеобразовательный минимум, который все же желательно сохранить после устранения из программы элементарной алгебры всех прочих теоретико-числовых вопросов. Следующее *упражнение 141* закрепляет относящиеся сюда сведения. В пункте 457 приведен образчик того, как на данном этапе мыслится нами «решение совместной системы сравнений по различным модулям».

Вместе с тем в пунктах 457—460 этого упражнения продолжает разрабатываться та же проблема, что и в § 50 как найти все числа, удовлетворяющие одновременно нескольким, скажем, двум, требованиям? Нужно: найти множество («список») чисел, удовлетворяющих одному требованию, и множество чисел, удовлетворяющих другому требованию, и затем отобрать множество, являющееся их «общей частью», или, нашедши первое множество чисел, отобрать из него все числа, удовлетворяющие второму требованию, или, если угодно, наоборот.

С методической точки зрения представляется существенным, чтобы в каждой задаче все «списки» (множества) чисел — если они не чрезмерно длинны — выписывались полностью.

Три последних примера (пункты 461—463), построенные тематически на том же материале, представляют собою задачи «на доказательство» традиционного содержания.

Своеобразная черта параграфов 50 и 51 заключается в том, что в них все буквы обозначают не иначе, как целые положительные числа: преподаватель должен это подчеркнуть, указывая вместе с тем, что такое толкование букв алгебре, вообще говоря, не свойственно (тогда как опыт показывает, что учащиеся к нему нередко весьма склонны).

§ 52

Деление многочленов, расположенных по одной и той же букве, — вопрос достаточно трудный и в логическом, и в алгорифмическом отношении: вполне естественно было бы отнести его (именно вследствие его трудности) к VIII классу. Однако традиция и «систематически» построенная программа смотрят иначе: решение, принятое в данном учебнике, носит компромиссный характер и заключается в том, что, следуя «систематическому» изложению, мы сохранили этот вопрос в настоящей главе, посвященной расположенным многочленам, однако рекомендуем проходить соответствующий па-

раграф (вместе с двумя предшествующими) не иначе, как при повторении *.

Учащиеся уяснят себе постановку вопроса о «делении многочленов с остатком» на основе аналогии с целыми числами. При делении многочлена на многочлен выдвигается «дополнительное» требование, чтобы частное также было многочленом.

К «дополнительным» требованиям учащиеся подготовлены упражнениями § 50 и 51. Как показывают примеры 1 и 2, так поставленная задача в одних случаях имеет решение (неизбежно единственное), в других — не имеет решения; однако она обобщается (на стр. 191) таким образом, чтобы решение всегда существовало (и тогда оно — неизбежно единственное).

Формула — «Делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток» — должна быть прочно (притом словесно) усвоена учащимися; следует добиться отчетливого понимания того, что она применима и к натуральным числам и — аналогично — к многочленам (расположенным по степеням данной буквы).

Не излишне предупредить преподавателя о некотором (неявном) расширении термина «тождество», имеющем место на стр. 189: говорится, например, что имеет место «тождество»

$$P_1 = P - Q \cdot 3x^2.$$

Однако подразумевают равенство справедливым конечно не при всех значениях входящих букв (P_1, P, Q и x). Но в данном случае следует понимать, что в равенство входит только одна буква x, при всех значениях которой равенство в самом деле оправдывается; буквы же P_1, P и Q — не что иное, как сокращенные обозначения для многочленов, расположенных по этой букве. Если потребуется, преподаватель разъяснит это учащимся.

Чтобы приобрести совершенно необходимый навык в делении многочленов, число примеров в упражнении, может быть, придется увеличить; однако не стоит слишком поднимать уровень их сложности.

§ 53

Мы не склонны полагать, что вопросу о разложении многочленов на множители в пределах начального курса алгебры надлежит придавать самостоятельное значение; однако попутно нами не раз был использован случай предлагать соответствующие упражнения (гл. VII, в особенности § 47).

Если ограничиться рассмотрением многочленов с числовыми коэффициентами, зависящих от одной буквы, то настоящий параграф содержит все те типичные разложения на множители, которые доступны учащимся на данном этапе: в основном это случай трехчлена второй степени, преобразование которого продвигается еще на один шаг дальше, чем раньше. Именно в § 48 мы «выделяли квадрат» и приходили к заключению, что в случае, если после выделения квадрата свободный член есть отрицательный точный квадрат, то возможно разложение на два линейных множителя; мы видим, что если свободный член оказывается положительным, то та-

---

* На ответственность преподавателя может быть допущен другой порядок: проходить § 50—52 при повторении главы VIII непосредственно после ее окончания.

кое разложение невозможно. Желательно, чтобы прием был найден учащимися самостоятельно в процессе работы над примерами *упражнения 143*; для закрепления навыка служит *упражнение 144*, примеры 1) —8). В *упражнении 145* (и много раз дальше) обнаруживается «служебное» значение разложения на множители.

В следующем § 54 прекрасный повод для обсуждения вопроса о разложении на множители дают примеры 6) и 8) в упражнении 146, примеры 2), 9) и 10) в упражнении 147, примеры 1), 5) — 7) в упражнении 148. Разложение на множители следует производить во всей дальнейшей работе, если к тому представляется возможность; преподаватель должен выработать установку: видя, что получаемое выражение допускает разложение, задавать вопрос — «Нельзя ли разложить на множители? Каким образом?».

При повторении должно быть твердо усвоено правило: «Сумма квадратов не разлагается на множители». При этом речь идет не только о выражении $x^2 + 1$, о котором сказано, но и о любых трехчленах второй степени с отрицательным дискриминантом (последнее слово, разумеется, непригодно для употребления в «начальном» курсе).

Преобразование, заключающееся в вынесении за скобки постоянного множителя, например,

$$6x - 9 = 3\ (2x - 3),$$

не считается разложением многочлена на множители: согласно определению на стр. 190 оба множителя должны быть низшей степени, чем данный многочлен, тогда как в рассматриваемом случае один из множителей — той же степени.

§ 55

В соответствии с классификацией «по степеням» многочленов, зависящих от двух (или большего числа) букв, стоит и классификация алгебраических кривых «по порядкам» (см. § 59). Определение порядка кривой с научной точки зрения оправдывается тем, что порядок остается неизменным, как бы ни была выбрана система координат.

С учебной точки зрения привычка следить за степенями многочленов и располагать таковые по однородным группам убывающих степеней представляет собою полезный навык и оказывает на учащихся дисциплинирующее воздействие.

Общеизвестно понятие «однородной функции». Функция $f(x, y)$ называется однородной, степени m, если имеет место тождество

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Приведенное в тексте определение «однородного многочлена» не стоит в противоречии с этим определением, однако, носит менее общий характр: так, выражение

$$\sqrt{x^4 + x^2y^2 + y^4}$$

есть однородная функция степени 2, но не есть однородный многочлен.

Упражнения 147 и *148* различны по содержанию: в первом из них над многочленами предлагается выполнять лишь сложение, вы-

читание и умножение на постоянное число; во втором добавляется умножение многочлена на многочлен. В двух последних вопросах упражнения 148 нужно предложить учащимся (если они сами не догадаются) обозначить перед выполнением действия выражения $A^2 + B^2$ и $x^2 + y^2$ одной буквой; или же, для упрощения преобразований, просто воспользоваться надлежащими группировками членов.

Упражнение 149 (отчасти и «проверка» в упражнении 148) переключает учащихся на вычислительную работу.

Преподаватель должен иметь в виду, что термины «главная буква», «побочная буква» оправданы лишь методическими соображениями. В математической практике главные буквы обыкновенно выделяются описательными оборотами речи («решим систему относительно таких-то букв» и т. п.) или, если приводится график, — наименованиями координатных осей; вместо «побочная буква» всегда пользуются термином «параметр» (недостаточно употребительным в условиях школьного обучения).

Насколько существенно возникающее здесь обобщение понятий «коэффициент», «подобные члены» и т. п., едва ли нужно объяснять.

Обстоятельство, указанное в сноске на стр. 197, объясняется тем, что главные буквы обычно вводятся в качестве координат, идти же дальше двух измерений в общеобразовательной школе мы не предусматриваем.

Упражнение 150.

475. Снова «буквенные подстановки».

Упражнение 151.

476. Имеется два решения: $a = \pm 1$.

477. «Решений» — бесконечное множество (достаточно взять $n = 5m$).

478. При ответе на вопрос 2) (и в аналогичных случаях дальше) следует приводить к общему знаменателю:

$$2x - \frac{1}{3}y - 1 = \frac{6x - y - 3}{3}.$$

479. Напротив, здесь в вопросе 4) следует писать:

$$\frac{x + 2y - 5}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}.$$

В пунктах 479, 480, 482 и 483 учащимся предлагается дать хотя бы одно решение в каждом вопросе, но преподаватель должен понимать, что решение существует только одно (теоремы о тождестве многочленов: если при всех значениях x и y мы имеем $Ax + By + C = A'x + B'y + C'$, то $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$; если при всех значениях x имеем $Ax^2 + Bx + C = A'x^2 + B'x + C'$, то $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$).

Содержание *упражнения 153* представляет собой так называемое «правило Горнера».

488—489. Мы переключаемся на вычислительно-графическую линию.

Упражнение 154, приводящее к Пифагоровым треугольникам, по своей поучительности заслуживает особого внимания. Проверку

длин гипотенуз желательно хотя бы отчасти провести в классе, на клетчатой доске. С геометрической точки зрения интересно найти среди построенных треугольников такие, которые подобны между собою.

Что каждый из полученных треугольников — прямоугольный, вытекает, конечно, не из теоремы Пифагора, а из теоремы, ей обратной. Рассуждать можно, например, следующим образом. Пусть стороны треугольника равны 20, 21 и 29, причем

$$20^2 + 21^2 = 29^2.$$

Представим себе, что угол, заключенный между сторонами 20 и 21, постепенно увеличивается: тогда, по известной теореме, увеличивается и лежащая против этого угла сторона. В тот момент, когда угол становится прямым, по теореме Пифагора, противолежащая сторона как раз равна 29; до этого момента она меньше 29, после этого момента она больше 29. Значит, равна 29 она только в тот момент (в том случае), если угол — прямой.

Глава IX

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ

Общие замечания

1. Эта глава — «узловая» в настоящем пособии: в ней осуществляется тесное взаимодействие формально-оперативной линии глав V, VII, VIII с вычислительно-графической линией первых глав пособия.

2. В данном изложении видное место отдано «функциональному началу»; это не значит, однако, что в основу положено понятие «функции». Больше того, введение термина «функция» в семилетней школе признается нами еще недостаточно оправданным (хотя приведено немало примеров функций).

В основу изложения у нас положено понятие уравнения: предполагается, что уравнение содержит или одну или большее число неизвестных букв. Имея дело с уравнением, мы ставим своей задачей найти и указать все его решения, т. е. все числа, или системы чисел, которые ему «удовлетворяют».

С уравнением теснейшим образом связывается его геометрическое представление. Таковым является: 1) в случае одной неизвестной буквы совокупность всех точек-решений на числовой прямой: 2) в случае двух неизвестных букв совокупность всех точек-решений в координатной плоскости. Уравнение с тремя неизвестными буквами и его геометрическое представление в виде совокупности всех точек-решений в координатном пространстве остается за пределами семилетней школы.

Термином «график» удобно пользоваться лишь в том случае, если имеются две буквы и дается геометрическое представление в координатной плоскости («graph» — след карандаша на бумаге); в иных случаях мы сохраняем общий термин «геометрическое представление».

Если задана некоторая функция

$$y = f(x) \qquad (*)$$

(допустим для определенности, что она зависит от одной независимой переменной x и что $f(x)$ обозначает некоторое алгебраическое выражение), то формула (*) также представляет собой некоторое уравнение, однако специального вида («решенное относительно y»), и график этой функции (в общепринятом понимании) не отличается от графика уравнения (*). Таким образом, понятие «график уравнения» — более общее, чем понятие «график функции», и включает его как частный случай.

С другой стороны, мы ограничиваем себя тем, что рассматриваем только алгебраические уравнения нормального вида и притом сравнительно простого вида, невысоких степеней.

График уравнения (его геометрическое представление) позволяет охватить взглядом все его решения сразу (совокупность или множество решений, геометрическое место точек-решений). В этом его исключительное значение; выражаясь иначе, он является наглядной геометрической моделью данного уравнения.

3. Тот, кто научился строить графики данных уравнений, имеет возможность рассуждать об этих уравнениях осмысленно. Очень часто график подсказывает, решение того или иного вопроса и тем ускоряет математическую работу.

Следует, с другой стороны, иметь в виду, что ссылки на график не имеют, вообще говоря, доказательной силы, так как на плоскости можно отметить сравнительно небольшое число точек графика и притом с ограниченной точностью.

4. По поводу терминологии следует сказать, что в случае, если уравнение содержит только одну букву, то оно имеет конечное число решений (по «основной теореме алгебры» уравнение нормального вида n-ой степени имеет не более n корней); число же решений уравнения с двумя (или более) буквами, вообще говоря, безгранично велико. По этой причине мы пользуемся в одном случае термином «неизвестное», в другом — термином «переменные»; оставляем, однако, за учащимися семилетней школы право во всех случаях говорит просто о «буквах».

§ 56

Учащиеся знакомятся с классификацией уравнений, содержащих одну букву; затем им предлагается в *упражнении 155* решать данные уравнения, сопровождая решение геометрическим представлением (точки, являющиеся корнями, отмечаются или указываются на числовой оси). Внимание сосредоточивается, естественно, не на линейных уравнениях, а на уравнениях высших степеней с правой частью, равной нулю, и левой, разложенной на линейные множители (придется припомнить, при каком условии произведение равно нулю); или же левая часть такова, что учащиеся уже умеют разложить ее на множители: в случае квадратного трехчлена это достигается посредством выделения квадрата и представления разности квадратов в виде произведения суммы на разность (см. § 52, упр. 144).

О «формуле для решения квадратного уравнения» не может быть и речи; излишне также, перечисляя корни, ставить значки (x_1, x_2 и т. д.). Заключения должны быть таковы (см., например, уравнение 31): «если выражение $(x-2)\ (x+2)\ (x+7)$ равно нулю, значит, и л и x равен 2, и л и x равен (-2), и л и x равен (-7), и три названные точки должны быть сейчас же отмечены на оси. Уравнения 26 и 27 «не имеют корней», уравнения 28 и 29 имеют по одному корню, уравнение 30 имеет д в а корня (о кратности учащимся ничего неизвестно).

Решение алгебраического уравнения — обратная задача по отношению к прямой: составить уравнение по данным корням. Этой прямой, весьма важной, задаче посвящено *упражнение 156*. Трудностей в предложенных примерах нет никаких: так, если требуется составить уравнение с корнями 2,0 и —3 (вопрос 7), то достаточно приравнять нулю произведение разностей:

$$(x-2)\,(x-0)\,[x-(-3)]=0,$$

что дает:

$$x^3+x^2-6x=0.$$

Нужно проверять подстановками.

§ 57

В объяснительном тексте даны два примера: в первом из них уравнение

$$x-y=0$$

ясно показывает, что графиком является биссектриса координатных углов. Такого рода примеров, где график в условиях VII класса может быть найден «логически», посредством одного лишь рассуждения, крайне мало *.

Во втором примере, более типичном, уже приходится прибегать к числовым подстановкам и «построению по точкам». Этот пример должен служить образцом для дальнейших подобного же рода построений, выполняемых не иначе, как на координатной сетке (на классной доске или клетчатой бумаге).

В *упражнении 157* два первых примера не выходят за пределы тематики первых глав; дальнейшие подобраны таким образом, чтобы при небольших сравнительно вычислениях можно было обратить внимание на разнообразие возникающих форм. Масштабы указаны в условиях, и точно так же указаны те значения x, которые следует подставлять в уравнение. Значения x и y в условиях классной работы и в ученических тетрадях здесь удобнее располагать не по горизонталям, а по вертикалям. Подстановка промежуточных значений «по собственному выбору» нужна ради упражнения в дей-

---

* Можно было бы еще, опираясь на теорему Пифагора, установить, что уравнение

$$x^2+y^2=R^2$$

представляет окружность радиуса R с центром в начале координат.

ствиях с дробями и как подтверждение «правильности» в расположении точек графика. Дроби, получаемые в результате вычислений (значения y), следует обращать в десятичные, округляя в сотых.

Преподаватель должен быть внимателен к тому, чтобы на доске и в тетрадках отрезки откладывались «на глаз» насколько возможно точно: дальше будет гораздо труднее добиться точности, если в самом начале не выработан соответствующий навык.

В объяснительном тексте уже говорится о «возрастании» и «убывании», причем ввести математически правильные определения этих терминов пока еще нет возможности, да нет и необходимости. Эти термины сами по себе достаточно выразительны и общепонятны, если употребляются в предложениях, сформулированных достаточно аккуратно и отчетливо (без принятых в высшей математике условных сокращений). Например, учащийся семилетней школы едва ли поймет, что значит фраза: «в промежутке $4<x<8$ величина y убывает», но должен быть достаточно удовлетворен пространной формулировкой: «при увеличении значений буквы x от 4 до 8 значения буквы y убывают».

Следует при первых же точечных построениях начать постепенно приучать к пониманию и затем к употреблению обиходного термина «текущие координаты», заменяющего более тяжелый оборот речи «те две буквы, которые в данном уравнении обозначают абсциссу и ординату любой точки графика».

Заслуживает внимания принципиальный момент, отмеченный в объяснительном тексте: безразлично, подставить ли с н а ч а л а в уравнение числовое значение x, и п о т о м решать полученное уравнение относительно y, или же с н а ч а л а решить уравнение относительно y (считая букву x параметром) и п о т о м подставить вместо x числовое значение. На практике чаще пользуются вторым приемом.

§ 58

Раздел алгебры, посвященный графикам уравнений, изложен существенно иначе, чем излагается обыкновенно аналитическая геометрия. Это явственно сказывается в настоящем параграфе. В аналитической геометрии считается заданной прямая линия и разыскивается ее уравнение; здесь же считается данным линейное уравнение и требуется найти его график. При нахождении графика логически-последовательно исходить из определения графика как совокупности точек, координаты которых удовлетворяют уравнению, или — что то же — могут быть получены из уравнения в результате числовых подстановок; поэтому даже в случае линейного уравнения естественно н а ч и н а т ь с построения графика «по точкам». Если учащиеся спрашивают: «Сколько нужно сделать подстановок, чтобы затем через полученные точки провести график линейного уравнения?» — то на этот вопрос лучше всего отвечать уклончиво: «Столько, сколько вам потребуется». Учащиеся не так наивны: в среднем они довольно быстро соображают, что график — прямолинейный *, и затем нисколько в этом не сомневаются; таким образом, по их мнению, многочисленные подстановки бесполезны, нужно только узнать, чего требует учитель. Отвечать все же приходится уклончиво по той

* Заметим, что вопрос отчасти подготовлен в § 11.

причине, что к непоколебимой уверенности в прямолинейности графика не весь класс приходит одновременно, и необходимо некоторое количество времени и упражнений, чтобы каждый успел прийти к этой уверенности на основе эксперимента. Вот почему § 58 начинается с упражнений, вот почему в этих упражнениях столько вопросительных знаков, обращенных к учащимся.

Приступая к *упражнению 158*, следует предоставить активную роль учащимся и добиться, чтобы каждый из них сделал самостоятельно все примеры в этом упражнении (весьма полезно их несколько варьировать). После того, как прямолинейность графика подмечена всем классом и даны почерпнутые из эксперимента ответы на предложенные вопросы, можно прочесть объяснительный текст на стр. 214.

Текст подтверждает, что графики уравнений вида

$$y = mx \qquad (*)$$

(графики прямой пропорциональности) — прямые линии, проходящие через начало координат. Логического доказательства здесь не приведено: таковое опирается на теорию подобия и может быть дано позднее в курсе геометрии; но в данный момент в нем нет потребности.

После того, как прямолинейность графика линейного уравнения установлена, преподаватель должен уточнить вопрос о необходимом числе подстановок в том смысле, что является обязательным отмечать утолщениями все те «вершинки» координатной сетки (точки с целыми координатами), через которые проходит прямая; что же касается выписывания таблицы числовых значений, то от такового в дальнейшем можно отказаться.

В курсах аналитической геометрии доказывается, что «коэффициент пропорциональности m («угловой коэффициент прямой») есть тангенс угла, который прямая образует с горизонтальной осью. Так как нам нельзя (и не нужно) опираться на тригонометрию, то достаточно истолковывать коэффициент m так, как указано в тексте; особый термин, отражающий геометрический смысл этого коэффициента, весьма нужен, и мы предлагаем пользоваться термином «наклон».

При переходе к общему случаю линейного уравнения, решенного относительно y,

$$y = mx + n, \qquad (**)$$

нужно следовать тому же порядку: сначала — несколько «экспериментальных» построений по точкам (упр. 159), затем — «теория», содержащаяся в объяснительном тексте на стр. 217.

В упражнении 160 пункт 497 служит для закрепления предшествующего объяснительного текста: после того как графики построены по точкам, надлежит убедиться, что прямая на чертеже имеет должный наклон и образует на оси Oy именно такой отрезок, который усматривается из уравнения. В пункте 498 ответ на вопросы 2) и 4) таков, что о «наклоне» можно говорить, и он равен нулю (уравнение приводится к виду (**), причем $m = 0$); в случае же вопросов 1) и 3) о «наклоне» нельзя говорить, так как уравнения не содержат буквы y и, значит, не могут быть решены относительно этой буквы.

На стр. 218 доказывается, что всякое линейное уравнение вида

$$Ax + By + C = 0$$

(если A и B не равны нулю одновременно) приводится к одному из видов:

$$y = mx + n \text{ или } x = a$$

и, значит, представляет прямую линию. О тривиальном случае $A = B = 0$ сказать все же небесполезно (мелкий шрифт на этой же странице).

Исходя из того, что график линейного уравнения — прямая линия, можно строить эту прямую всего лишь «по двум точкам». Если разыскивается точка на одной из координатных осей, например, на оси Ox, то практически достаточно прикрыть рукой член при букве y и решить полученное уравнение «в уме» относительно x; аналогично для оси Oy. Этот крайне простой прием должен быть бегло усвоен учащимися (упр. 161, пункты 499—500).

§ 59

В тексте сказано: «Примеры покажут», что если уравнение не линейное, то его график — кривая линия. Примеры, далее рассматриваемые, в самом деле, это показывают. Но доказать такое утверждение эти примеры, конечно, не могут, да оно и не верно. Так, график кубического уравнения $x^3 - y^3 = 0$ — прямая линия, ничем не отличающаяся от графика $x - y = 0$; с другой стороны, график уравнения $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (см. примечание в § 57—«пустое место», но не «кривая»).

В данном параграфе содержится обстоятельное рассмотрение трех кривых: 1) $xy = 1$, 2) $y = x^2$ и 3) $y = x^3$. Объяснительный текст можно читать вслух с обсуждениями и комментариями, выполняя на доске все вычисления и строя чертежи. Определение того, что называется гиперболой или параболой, в тексте отсутствует: указано лишь, что график уравнения $xy = 1$ называется гиперболой, а уравнения $y = x^2$ — параболой. Естественно также (см. упр. 163, в примерах 508 и 507) называть графики «одинаковыми» кривыми, так как они конгруэнтны или даже подобны между собой в геометрическом смысле.

Попутно при рассмотрении трех названных графиков отмечаются некоторые их особенности:

1) разрыв функции $y = \frac{1}{x}$ при $x = 0$, возникновение двух «ветвей» кривой;

2) стремление этой функции к бесконечному пределу ($+\infty$ или $-\infty$) при неограниченном приближении x к нулю и к пределу 0 при неограниченном возрастании x (по абсолютному значению);

3) касание кривых $y = x^2$ и $y = x^3$ с осью Ox в начале координат (в одном случае без пересечения этой оси, в другом — с пересечением);

4) симметрия относительно оси Oy или относительно центра O.

Далее в *упражнении 163* учащиеся встречаются в результате точечных построений с кривыми, которые из данных «основных» кривых получаются:

1) или посредством отражения относительно оси;

2) или посредством растяжения или сжатия в направлении одной из осей;

3) или посредством параллельного перенесения.

Изложение какой бы то ни было теории по любому из этих вопросов было бы совершенно неуместным: имеется в виду лишь побудить учащихся наблюдать возникающие явления и дать им наименование.

Параллельное перенесение графика трехчлена второй степени в особенности важно: учащиеся заметят связь этого вопроса с выделением квадрата.

Чтобы стала ясна конгруэнтность таких кривых, как, например,

$$y = x^2 \text{ и } y = (x-5)^2,$$

полезно выписать таблички вроде следующих:

$y = x^2$	
x	y
. . .	. . .
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
. . .	. . .

$y = (x-5)^2$	
x	y
. . .	. . .
3	4
4	1
5	0
6	1
7	4
. . .	. . .

Во второй табличке в рубрике «y» повторяются те же числа, что и в соответствующей рубрике первой таблички, но они получаются при значениях x, на 5 единиц больших. Логическое рассуждение, устанавливающее факт конгруэнтности, крайне просто, но не особенно доходчиво.

Желательно, чтобы все три «основные» кривые этого параграфа каждый учащийся начертил для себя в крупном масштабе на большом листе бумаги (клетчатой или миллиметровой) с тем, чтобы в дальнейшем пользоваться этими чертежами как средством, выполнять графически следующие операции:

1) нахождение обратной величины (см. упр. 162, пункт 502);

2) возведение в квадрат и извлечение квадратного корня (см. упр. 163, пункт 506).

После того как учащиеся научились строить по точкам простенькие параболы вида $y = Ax^2$, новая задача — подобрать коэффициент A по данному условию — представит для них своеобразную трудность. К преодолению ее они отчасти были подготовлены при рассмотрении прямой и обратной пропорциональности.

В пункте 509 *упражнения 163* нужно обратить внимание на строчку, в которой стоят значения о б е и х букв x и y; подставляя эти значения в формулу, получаем: $15 = A \cdot 25$, откуда $A = \frac{3}{5}$, и, значит, уравнение таково: $y = \frac{3}{5}x^2$. Аналогично — в пункте 510.

Приводим решение последней задачи в упражнении 165.

$$\frac{12-x}{2} \cdot x = \frac{1}{2}(12x - x^2) = \frac{1}{2}[36 - (x-6)^2] \leqslant \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$$

(равенство только при $x = 6$).

Аналогичное упражнение с кривой $y = x^3$ вынесено в конец главы (515). Графики второй и третьей степени впоследствии смогут быть использованы с целью извлечения квадратного и кубического корня (но можно попытаться сделать это в качестве обратного вопроса уже и на данном этапе).

Глава X

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Общие замечания

1. В этой главе дробные алгебраические выражения встречаются не впервые: в небольшом числе они попадались и раньше, например, в главах I и III. Теперь мы с о с р е д о т о ч и в а е м с я на их изучении.

2. Задачей настоящей главы является научить выполнять четыре основных действия над дробными алгебраическими выражениями. Достаточно рассматривать действия над простыми дробями, так как сложные дроби (см. определение на стр. 253) приводятся к простым (§ 65). При этом мы не стремимся к тому, чтобы поднять на большую высоту уровень формально-оперативной техники, предполагая, что дальнейшие успехи в этом направлении могут быть достигнуты впоследствии. С этой установкой не стоит в противоречии то обстоятельство, что некоторое внимание уделено сложным дробям, так как с ними часто приходится иметь дело, и необходимо усвоить удобные приемы их упрощения.

3. Умножение и деление дробей проще, чем сложение и вычитание, и потому поставлены раньше; сложение и вычитание изложены совместно, но изложение разбито на два этапа: случай, когда при составлении общего знаменателя не следует перемножать знаменатели данных дробей, а предпочтительно искать их наименьшее кратное, — рассмотрен отдельно.

4. Условие, согласно которому числовой знаменатель может быть отнесен к коэффициенту, сохраняется и в этой главе; однако, выписывая дробные коэффициенты, в этой главе полезно видеть в подобного рода записях дроби: например, запись $\frac{1}{4}n$ понимать как дробь $\frac{n}{4}$ При таком понимании числовые коэффициенты в числителе и в знаменателе дроби можно считать

целыми* и не остается никакой неопределенности в том, как разлагать целые алгебраические выражения на «простые множители»: именно, числовые коэффициенты разлагаются на целочисленные простые множители.

§ 60

Упражнение 167 напоминает, что результат деления (частное, отношение) записывается в виде дроби («черта — знак деления»); оно заставляет также подумать о принципиальном моменте, каковым является «деление на нуль», и дает минимальную практику в обращении с дробями, облегчающую понимание последующего объяснительного текста.

521—523. Подчеркивается, что целое алгебраическое выражение может иметь дробное числовое значение, а дробное алгебраическое выражение может иметь целое числовое значение. Вместе с тем здесь возникает целый ряд разнохарактерных уравнений, решение которых, в порядке повторения, достаточно полезно.

524. И здесь тоже нахождение ответов на вопросы сводится к решению уравнений. Если знаменатель дроби ни при каких значениях входящей буквы не обращается в нуль (как в примере 4—6), то дробь «имеет смысл» при любом значении буквы.

Упражнение 168.

530. Решение пропорций подготовляет «основное свойство дроби». Уравнения 6) и 7) имеют по д в а корня, уравнение 8) не имеет н и о д н о г о.

Доказательство «основного свойства дроби», с формальной точки зрения, неполно лишь в том отношении, что оставлен в стороне случай, когда m — иррациональное. Но на данном этапе этот случай и нельзя было бы рассматривать: учащимся неизвестно существование иррациональных чисел.

Упражнение 169.

532. Примеры 14) —15). Следует ожидать, что учащийся будет делать упрощение «сложных арифметических» дробей по правилам арифметики:

$$\frac{8\frac{1}{3}}{1\frac{2}{3}} = \frac{25}{3} : \frac{5}{3} = \frac{25 \cdot 3}{3 \cdot 5} = 5.$$

Однако лучше его поправить: «умножим и числитель и знаменатель на 3!»

В примерах 33)—35) и 38)—40) следует заставлять д у м а т ь учащихся. Соответствующее правило будет сформулировано на стр. 245.

533. Предупреждение очень грубой и распространенной ошибки (сокращение «части числителя» с «частью знаменателя»).

О т в е т ы: 1) только при $m = 0$, 2) при всяком m, 3) если $a \neq b$, то только при $m = 0$; если $a = b$, то при всяком m.

---

* С и р р а ц и о н а л ь н ы м и числовыми коэффициентами нам иметь дело не приходится.

В объяснительном тексте на стр. 238 сказано: «Стараются сокращать дробь на общие множители числителя и знаменателя». Сказать более энергично нельзя, так как в некоторых редких случаях обнаружить общий множитель довольно трудно.

Растолковать учащимся последний абзац весьма существенно: здесь случай целого выражения включается в случай дроби, и тем обеспечивается общность дальнейших формулировок.

§ 61

Упражнение 170 приводит к правилу умножения дробей. «Проверка», выполненная для указанных систем значений букв, не теряет доказательной силы от того, что проведена не в общем виде. Что доказываемое тождество справедливо в случае целых положительных значений букв, можно считать известным из арифметики; далее рассматриваются дроби с одним и тем же знаменателем, затем дроби с разными знаменателями (такие могут быть приведены к общему знаменателю); наконец, обращаемся к случаю, когда одна или несколько из входящих букв отрицательны.

Упражнение 171.

535. Снова применяется принцип «сохранения тождества при буквенных подстановках».

536. Очень важно, чтобы правило «умножения дроби на целое выражение» вводилось как частный случай общего правила умножения дроби на дробь.

537. Тренировочные примеры подобраны достаточно простыми, но по возможности разнообразными.

Это относится и к *упражнению 172*. При делении дробей удобнее пользоваться знаком двоеточия; однако употребление двоеточия все же необязательно.

§ 62

Упражнение 174 имеет целью показать, что из основной формулы (III) — правила сложения дробей — вытекает как частный случай ряд других правил. В пункте 537 правило вычитания дробей «выводится» независимо от правила сложения; в пункте 538 показывается, что такого рода «вывод» в сущности — излишен: достаточно хотя бы в формуле (III) заменить c через $(-c)$.

При следующей тренировке (упр. 175 и 176) нужно настойчиво требовать от учащихся понимания того, что всякое целое выражение можно рассматривать как дробь со знаменателем 1. В случае сложения трех дробей желательно вначале действовать двумя способами: 1) сначала сложить две дроби, потом прибавить третью, 2) сразу брать в качестве общего знаменателя произведения знаменателей.

В *упражнении 176*, пункт 546, текстовая задача приводит к тождественному преобразованию. Условие «двузначности» задуманного числа существенной роли, конечно, не играет.

Объяснительный текст на стр. 245 предлагает рассматривать правила, касающиеся изменения знаков числителя и знаменателя, как вытекающие из умножения их на (—1).

Упражнение 177.

Ответ на вопрос пункта 547 вытекает из сочетательного и переместительного законов умножения:

$$(-ab) = (-1)\cdot(ab) = [(-1)\cdot a]\cdot b = (-a)\cdot b$$

$$\text{или } = a\cdot[(-1)\cdot b] = a\cdot(-b)$$

(«... достаточно изменить знак перед о д н и м из множителей»).

Ответ на вопрос пункта 548 вытекает из распределительного закона:

$$-(a+b-c) = (-1)\cdot(a+b-c) = (-1)\cdot a + (-1)\cdot b - (-1)\cdot c =$$

$$= -a - b + c$$

(«...необходимо изменить знак перед к а ж д ы м слагаемым»).

Если предшествующие упражнения этой главы, отмеченные звездочкой, были опущены, их следует проделать после упражнения 177.

§ 63

Можно ожидать, что умение разлагать целые числа на простые множители (по образцам, приведенным на стр. 246) в курсе арифметики учащимися не было приобретено. В таком случае именно этим вопросом следует основательно заняться, прежде чем обращаться к вопросам алгебраического содержания; вместе с тем необходимо добиться также на числовых примерах твердого практического освоения правил нахождения наибольшего общего делителя (НОД) и наименьшего общего кратного (НОК) нескольких данных чисел.

Сокращенные термины «НОД» и «НОК» способны прививаться и, надо думать, серьезно облегчают работу.

Если представляется надобность, можно пользоваться понятием «нулевой степени».

В итоге выполнения упражнений этого параграфа учащиеся должны убедиться, что в алгебре «разложение на простые множители», а также нахождение НОД и НОК — отнюдь не более трудные операции, чем в арифметике.

Упражнение 178.

В результате работы над пунктом 550 учащиеся должны прийти к заключению, что отсутствие общих множителей у всякой пары данных чисел (выражений) есть необходимое и достаточное условие того, чтобы НОК этих чисел равнялся их произведению, но это условие, будучи достаточным, не является необходимым для того, чтобы НОД этих чисел равнялся единице (пример: pq, qr, pr). Однако подобного рода словесная формализация необязательна; достаточно того, чтобы, вникая в существо каждого из предложенных вопросов, учащиеся сумели дать обоснованные ответы.

§ 64

Упражнение 180.

554. Как вытекает из текста вопроса, предлагается «теория решения дробных уравнений», отличная от излагаемой в стабильном задачнике. Вместо того, чтобы сразу освобождаться от знаменателей и затем, найдя корни, проверять, не является ли каждый из

них излишним («паразитным»), у нас рекомендуется перенести все члены в одну (скажем, левую) часть уравнения, затем выполнить все действия — в том числе сокращение на общие буквенные множители, если таковые окажутся, — и после приравнивать нулю числитель дроби. При таком порядке действий никаких «излишних» корней возникнуть не может.

В качестве примера для преподавателя приведем уравнение

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}=0.$$

Но если учащимися усваивается именно рекомендуемый нами прием, то нет вообще надобности в том, чтобы предлагать «казусные» примеры (мы ни одного и не предлагаем).

555. Здесь указывается прием определения знака дробного выражения при заданном значении входящей буквы; роль этого приема при исследовании данного выражения и построении соответствующего графика очевидна. Вместо словесных формулировок «значение y положительно» или «отрицательно», можно пользоваться записями «$y>0$», «$y<0$»; можно также результаты исследования знака записывать в табличках, вроде следующей:

x	$x-1$	$3x-2$	$x+1$	$y=\frac{2(3x-2)}{(x-1)(x+1)}$
$x<-1$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-1<x<\frac{2}{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{2}{3}<x<1$	$-$	$+$	$+$	$-$
$1<x$	$+$	$+$	$+$	$+$

§ 65

Чтобы избежать осложнений в формулировке правила преобразования сложной дроби, в объяснительном тексте, предшествующем *упражнению 181*, в частности, в его последнем абзаце, следует предполагать, что сложная дробь содержит лишь два «этажа». В дальнейших упражнениях это предположение не выполнено только в последнем примере 12; здесь (как и во всякой «непрерывной» дроби) нужно сначала упростить знаменатель «большой» дроби.

Пункт 557 содержит примеры, показывающие, каким образом сложные дроби встречаются в вычислениях, имеющих практическое значение.

Хотя объяснительный текст в этом параграфе и отсутствует, тем не менее здесь осуществляется энергичное движение вперед.

Упражнение 182.

558. Уже в этих тренировочных примерах открываются широкие возможности для проявления изобретательности — преимущественно в целесообразных уклонениях от указанного порядка действий. Так, в примерах 7)—9), 12)—13) мы встречаемся со сложными дробями (§ 65); в примерах 10) — 11) и других нет надобности начинать со сложения и вычитания дробей: лучше заменить (хотя бы мысленно) $\frac{1}{x}$ новой буквой, например t; и т. п..

Упражнение 183 чрезвычайно важно; оно связано (начиная с пункта 2) с написанием неравенств.

1. Черчение графиков не предполагается. Числовые значения можно подставлять для проверки по мере надобности. Вопрос же о возрастании или убывании должен быть решаем по следующему образцу (берем хотя бы пример 4). «При возрастании x, очевидно, увеличивается также и $3x$; значит, увеличивается и $3x + 5$. Но если числитель дроби 2 не меняется, а знаменатель $3x + 5$ увеличивается, то дробь $\frac{2}{3x+5}$, несомненно, уменьшается (убывает)». Ни на какие теоремы здесь ссылаться не следует: нужно только по мере надобности ставить наводящие вопросы.

Ограничение $x > 0$, всюду — одно и то же, введено для того, чтобы было легче сосредоточиться.

560. Продолжение упражнений того же типа, но вместо $x>0$ вводятся более разнообразные ограничения «области изменяемости». Образец (пример 5): «Если s увеличивается в указанных пределах, то числитель данной дроби также увеличивается, а знаменатель уменьшается, при этом не только числитель, но и знаменатель остаются положительными, так как s остается меньшим, чем 10. В таком случае, т. е. при увеличении числителя и одновременном уменьшении знаменателя, дробь, очевидно, возрастает».

Связных ответов от учащихся ждать не следует, действуйте наводящими вопросами. Старайтесь, чтобы связные ответы, наконец, пришли сами.

561. Только один небольшой шаг вперед; придется вместе с тем писать много неравенств, что само по себе полезно.

В чем смысл этих упражнений? Из одних неравенств нередко бывает нужно (и довольно скоро потребуется) выводить как следствие другие, с ними тесно связанные. Но формальная теория неравенств (т. е. систематическое изложение их свойств, аналогичных свойствам равенств, изложенным в § 37) далеко впереди; было бы рискованно включать ее в программу VII класса. Кстати, она плохо усваивается, и причины этого явления достаточно серьезны.

Мы видим выход из положения в том, чтобы употреблять простейшие, связанные с неравенствами приемы, в выполнении которых рано возникает надобность, например: «с увеличением (положительного) знаменателя дробь убывает». Тогда ученику может помочь та-

кой наводящий вопрос. «Ты же знаешь график функции $y = \frac{5}{x}$; скажи, как изменяется ордината точки этого графика, если точка движется вправо от оси Oy»?.

У учащихся, не усвоивших приема, о котором идет речь, есть только один способ ответить на предложенные здесь вопросы: произвести указанные вычисления. Но сколько же это составит совершенно лишней работы!

Упражнения 184 и *185* имеют главной целью на материале дробей закрепить правильное понимание терминов «возрастает», «убывает». Однако высказывать суждения учащиеся должны теперь не иначе, как глядя на вычерченный график.

В случае каждой из четырех гипербол упражнения 184 весьма важно следить за окрестностью точки разрыва: если, например, в уравнении (*c*) нельзя положить x равным 8, то это — «по той причине», что кривая не имеет ни одной общей точки с прямой $x = 8$; иначе говоря, никакая точка с абсциссой 8 не удовлетворяет уравнению $(8 - x)\ y = 3\ (x + 1)$. Но если абсцисса x приближается к 8, то ордината y соответствующей точки на кривой неограниченно возрастает или убывает смотря по тому, приближается ли значение x к значению 8 слева или справа.

В *упражнении 185* точек разрыва нет; зато кривая — более интересная, и имеется возможность упражняться в вычислении сложных дробей (при подстановке дробных значений).

Упражнения 186 — формально-оперативного содержания (графики не нужны). Раз уравнение содержит буквенные параметры, то решить уравнение — значит найти все его решения при какой угодно системе числовых значений этих параметров. Затруднения представляют в этом отношении «особенные случаи», когда после приведения подобных членов коэффициент при неизвестном оказывается равным нулю. Желательно, чтобы рассмотрение особенных случаев носило исчерпывающий характер. Чтобы исследовать особенный случай, нужно в самом уравнении (а не в его буквенном решении) осуществить соответствующие предположения. Это сделано в тексте книги по отношению к примеру 567,1; рассмотрим еще пример (567, 5). После раскрытия скобок уравнение принимает вид

$$(A + B)x + AB = (C + D)x + CD.$$

Особенный случай имеет место, если $A + B = C + D$. Тогда уравнение принимает вид

$$AB = CD.$$

Если постоянные A, B, C, D (данные числа) таковы, что это равенство неверно, то оно не станет верным, какое бы ни давать значение букве x: в этом случае уравнение не имеет решений.

Если же постоянные A, B, C, D таковы, что это равенство верно, то оно будет верно, какое бы ни давать значение букве x: в этом случае решениями данного уравнения являются все числа.

§ 67

Первая часть параграфа, включая упражнения 187—189, посвящена приведению данного дробного выражения к одному из простейших «канонических» видов, каковым является отношение двух

расположенных многочленов. Достижение этой цели равносильно выполнению над данным дробным выражением всех содержащихся в нем операций.

Умение различать правильную и неправильную дробь следует считать элементарным и вполне общедоступным. Вторую часть параграфа, отмеченную звездочкой (выделение целой части неправильной дроби), с упражнением 190 следует пройти не иначе, как в связи с параграфом 52, с которым она тесно связана.

§ 68

В математической практике вынесение за скобки наперед назначенного какого угодно выражения — одна из употребительнейших операций. Надобность в ней обусловливается теми или иными частными обстоятельствами. Примеры 1) —2) вопроса 573 показывают, что иногда выносят за скобки «главный член» (по величине значительно больший, чем все остальные, вместе взятые). В других же случаях, как показывают примеры пункта 575, — это способ ускоренно, «одним махом» (в смысле записи) упростить данное дробное выражение, выполняя сразу все действия, в него входящие.

Упражнение 194. Необходимо обращать внимание на «особенные случаи» (см. упр. 186).

Упражнение 202. Задачи на «совместный труд» в старое время именовались задачами «на бассейны»

Упражнение 203.

Большая текстовая задача с «исследованием». Уравнение имеет вид

$$\frac{D}{v-a}=\frac{D}{v+b}=\frac{2D}{v},$$

данное D является, конечно, излишним. Отсюда следует

$$v=\frac{2ab}{b-a}.$$

Пусть $v=100$; тогда, далее,

$$b=\frac{50a}{50-a}.$$

Графически это — гипербола, одна ветка которой проходит через начало координат в плоскости Oab; другая — не проходит.

Предположение $a<0$ означает, что в прямом рейсе скорость самолета была больше нормальной; тогда (при условии $a<50$) мы имеем $b<0$, т. е. в обратном рейсе скорость должна быть меньше нормальной.

По условию задачи (если только самолет не ошибется в выборе направления) должно быть:

$$100-a>0 \text{ и } 100+b>0.$$

Эти условия нарушаются для второй ветки гиперболы; значит, отвечает реальным возможностям лишь первая. Таким образом, из чертежа видно*, что $a < 50$.

Если, кроме того, скорость самолета в обратном рейсе должна не превышать V, то наибольшее возможное значение a получится из равенства

$$100 + \frac{50a}{50 - a} = V;$$

откуда следует:

$$a = 50\,\frac{V - 100}{V - 50}\,.$$

Намеченные выше исследования нужно провести в классе, вычерчивая на доске график и пользуясь им при работе над факультативными пунктами *6 и *7.

Глава XI
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Общие замечания

1. Значение и место в курсе алгебры раздела «Системы уравнений» прочно установлено и не нуждается в объяснениях. Для нас важнее отметить то обстоятельство, что решение систем может и должно быть тесно увязано с соответствующими геометрическими представлениями. В главе IX производилась работа над графическим представлением одного уравнения с двумя неизвестными. Построенный график уравнения давал ответ на вопрос: Каковы все решения данного уравнения? Вопрос был неопределенный: данное уравнение имело, как правило, бесконечное множество решений.

Если предложена система двух уравнений с двумя неизвестными, то решения ее соответствуют всем точкам пересечения** двух графиков. Задача делается «более определенной», даже просто определенной, если два графика имеют только одну общую точку.

Построение графиков становится более интересным для учащихся, если связывается с целевой установкой — решить систему. С другой стороны, решение системы становится более осмысленным и содержательным, если с ним связывается геометрическая интерпретация.

2. Следует различать геометрическое представление*** и графическое решение системы. Об этом сказано на стр. 284; там же (в упр. 209) приведены примеры графических решений.

---

* Формальное рассуждение: соотношению между a и b можно придать вид $(50 - a)(100 + b) = 50(100 - a)$, откуда видно, что неравенства $50 < a < 100$ и $100 + b > 0$ не могут быть выполнены одновременно.

** Случай «касания» мы здесь особо не выделяем.

*** Термины «геометрическое (графическое) представление» и «геометрическая (графическая) интерпретация» рассматриваются нами в случае двух переменных величин как равнозначащие.

§ 69

Крайне необходимо четкое понимание того, что называется «решением системы уравнений». Учащиеся нередко ошибочно толкуют этот термин; решив, например, некоторую систему 2 уравнений с 2 неизвестными и получив результат

$$x = 3,\ y = 4,$$

считают, что нашли «два» решения.

Случай трех уравнений с тремя неизвестными затронут в настоящем параграфе ради большей ясности при определении понятия «решение системы». Само же решение систем 3 уравнений с 3 неизвестными (даже линейных), в соответствии с замыслом учебника, не входит в курс VII класса.

Так как в действующую в настоящее время программу входит решение отдельных примеров систем 3 линейных уравнений с 3 неизвестными (без общей теории), то, при желании избегнуть недовыполнения программных требований, преподаватель должен будет уделить данному вопросу некоторое внимание (как мы полагаем, при повторении гл. XI). Придется, конечно, ограничиваться только «алгебраическим» решением, оставляя в стороне пространственное геометрическое представление.

На стр. 272 в объяснительном тексте сказано, что число уравнений системы необязательно совпадает с числом неизвестных. Преподаватель должен иметь в виду, что система д в у х уравнений с т р е м я неизвестными и даже о д н о уравнение с тремя неизвестными могут иметь только одно решение (например, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$); в примере 654 система из в о с ь м и уравнений с двумя неизвестными оказывается имеющей решение (совместной). С другой стороны, возможно и такое положение, что система т р е х уравнений с д в у м я неизвестными допускает бесконечное множество решений (например, $x = y$, $y = z$, $z = x$).

Чертить при работе над этим параграфом не предполагается: надо только делать указанные подстановки. Впрочем, при повторении (после окончания главы) полезно, насколько возможно, разобраться в геометрическом смысле рассмотренных примеров.

§ 70

Общая теория линейной системы уравнений в этом параграфе еще не дается: она помещена позднее (стр. 278—279). Указывается лишь п р и е м р е ш е н и я (методом подстановки), причем мелкий шрифт на стр. 274 уточняет ход мыслей.

На стр. 273 впервые встречается весьма употребительный термин «исключить». Определение его содержится в § 76; в данном же случае форма употребления этого термина такова: «то, что мы сделали, называется и с к л ю ч е н и е м».

Упражнение 205.

Очень важно, чтобы о д н а и т а ж е система (допустим, I—II) была решена всеми четырьмя способами. На поставленный здесь вопрос нужно стараться получить ответ в соответствии с текстом следующего упражнения («выбирать член с наименьшим, по абсолютному значению, коэффициентом»).

Упражнение 206.

В пункте 618 системы записаны в «канонической» форме (см. знак (*) на стр. 279); в пункте 619 это условие не соблюдено, да и приводить к «каноническому» виду не во всех примерах целесообразно.

Упражнение 207.

Выбор неизвестных прямо указывается текстом каждой задачи.

Следует обратить внимание на ответ задачи 624; числитель дроби равен $\frac{1}{3}$, знаменатель $(-\frac{1}{3})$.

§ 71

Вводимые здесь свойства равенств вначале можно считать очевидными; при повторении разобрать приведенный пример доказательства и по его образцу построить другие доказательства. Важный формальный момент, оправдывающий то, что мы «доказываем очевидное»: при перечислении свойств равенств можно не называть тех свойств, которые вводятся в этом параграфе, так как они логически вытекают (следуют) из свойств, введенных раньше.

По поводу примечания на стр. 278 нужно заметить, что на первых порах — при решении 4—5 первых систем методом уравнивания коэффициентов — можно отнестись терпимо к тому, чтобы множители не были дополнениями до НОК коэффициентов при исключаемом неизвестном: далее же это требование должно быть выдвинуто в качестве обязательного (наравне с требованием: «сокращать, если возможно, дроби»).

В дальнейшем не следует также считать безразличным, при котором из множителей ставить знак «минус» (если эти множители — разных знаков): нужно приобрести навык сразу расставлять знаки таким образом, чтобы после сложения коэффициент при оставшей букве был положительным.

После разбора примера, помещенного в объяснительном тексте на стр. 278, необходима обширная тренировка в решении систем методом уравнивания коэффициентов.

Решение системы (*) с буквенными коэффициентами на стр. 278—279 есть общая теория решения линейной системы двух уравнений с двумя неизвестными (а не просто пример). Основную теорему на стр. 279, вытекающую из изложенных соображений, следует заучивать (равно как и весь ее вывод).

В качестве иллюстрации к этой теореме приведем пример системы:

$$\begin{cases} 2x + y = 2a + b \\ 5x + 3y = 5a + 3b \end{cases}$$

Здесь решение $x = a$, $y = b$ легко «угадывается», а его единственность — на основании упомянутой теоремы — следует из того, что в данном случае $AD - BC = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1 \neq 0$.

§ 72

Предполагается, что теория линейных систем, не являющихся регулярными («иррегулярные системы»), не входит в программу семилетней школы: приводятся лишь примеры, из которых в конце параграфа сделано соответствующее заключение о возможности двух случаев. Преподаватель легко усмотрит из двух первых равенств на стр. 279, что только эти два случая возможны.

В самом деле, при условии $AD - BC = 0$ названные равенства принимают вид:

$$0 \cdot x = DM - BN,$$

$$0 \cdot y = AN - CM.$$

Если хоть одно из выражений $DM - BN$ и $AN - CM$ отлично от нуля, то система, очевидно, не имеет решений. Если же все три выражения

$$AD - BC,\ DM - BN \text{ и } CN - AM$$

равны нулю, то числа A, B, M пропорциональны числам C, D, N; тогда одно из уравнений системы (*) есть следствие другого (получается из него посредством умножения на некоторое число); поэтому решения системы — те же, что и решения одного линейного уравнения, так что число их — бесконечное.

§ 73

Упражнение 208 представляет удобный случай практиковаться в проведении на координатной сетке прямых по заданному уравнению, исходя из точек пересечения с осями.

В *упражнении 209* сопоставляются «графическое» и «алгебраическое» решения (см. «Общие замечания» к этой главе).

Упражнение 210 касается особенных случаев.

630. По основной теореме (стр. 279), если система не имеет решений, то $AD - CB = 0$, т. е. в нашем примере $2D = 30$ и $D = 15$. Необходимо после этого проверить, что система, получающаяся при подстановке $D = 15$, в самом деле не имеет решений.

631. Здесь $AD - BC = 0$, так что ни при каком значении N система не может иметь только одно решение. Если $N = 25$, то второе уравнение есть следствие первого, так как получается из него посредством умножения на 5 (другими словами, их графики одинаковы); значит, имеется сколько угодно решений. Если, напротив, $N \neq 25$ *, то легко убедиться алгебраически (вычитая из второго уравнения первое, умноженное на 5), что решений нет (тогда графики оказываются параллельными, но не совпадающими, прямыми).

После рассмотрения этих примеров линейных уравнений с числовыми коэффициентами естественно перейти к разъяснению геометрического смысла особенных случаев в общем виде, что и сделано в дальнейшем объяснительном тексте.

---

* Непременно нужно дать N числовое значение, отличное от 25, например, положить $N = 50$.

Упражнение 211 посвящено тренировке в решении линейных систем.

По поводу однородных линейных систем (примеры 5, 10) полезно заметить, в порядке обобщения, что в регулярном случае они имеют только «нулевое» решение ($x = 0$, $y = 0$). Имея это в виду, излишне трудиться над такими системами; достаточно проверить, что выполнено неравенство $AD - BC \neq 0$.

Упражнение 212.

При решении этих систем следует ясно формулировать условие регулярности, приводя его вместе к простейшему виду. В примерах 1, 9 системы регулярны; в остальных система регулярна, если: 2) $m \neq -1$; 3) $a + b = 0$; 4) $n = \pm 1$; 5) h и k не равны нулю одновременно, 6) $h = \pm k$; 7) $t \neq 1$; 8) s отлично от 0 и от 1. В двух-трех примерах полезно проанализировать случаи нарушения регулярности с тем, чтобы установить, будет ли в этих случаях система несовместной или неопределенной. Например: однородная система 6, в случае регулярности имеющая лишь одно «нулевое» решение ($x = 0$, $y = 0$), при нарушении регулярности принимает вид:

$$\text{а)} \begin{cases} x - y = 0 \\ \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ в случае } h = k \neq 0$$

$$\text{в)} \begin{cases} x + y = 0 \\ \\ x + y = 0 \end{cases} \text{ в случае } h = -k \neq 0,$$

и потому в первом случае имеет бесконечное множество решений вида $x = t$, $y = t$, во втором случае — бесконечное множество решений вида $x = t$, $y = -t$, (где t — произвольное число).

Однако следует соблюдать умеренность в проведении подобного рода исследований и в большинстве примеров ограничиваться указанием тех случаев, когда система перестает быть регулярной.

Упражнение 213.

637 и 638. Необходимо, как только уравнения составлены, прежде всего требовать их «сокращения» на общие множители коэффициентов.

Обязательна проверка; притом, если обнаруживается ошибка, надо уметь ее искать. Приведем пример. При решении задачи 640 были сделаны записи

$$(1) \begin{cases} 2x - 2y = x + 30 \\ \\ 3y - x = \dfrac{1}{3}\, y \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x - 2y = 30 \\ \\ 3x = 8y \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} x = 120 \\ \\ y = 45 \end{cases}$$

Делая проверку «по условию задачи», запишем последовательно, что было в левом и правом карманах вначале, после первого перекладывания денег и после второго перекладывания:

л.	120	65	130
пр.	45	90	25

(*)

Оказывается, что в левом кармане окончательно стало на 10 больше, а в правом — в 1,8 раза меньше, что не соответствует условию задачи. Итак, налицо имеется ошибка. Чтобы посмотреть, не произошла ли она при решении системы уравнений (2), подставляем значения (3) в уравнения этой системы и убеждаемся, что оба они удовлетворяются; следовательно, ошибка — в другом месте. Тогда подставим те же значения в уравнения (1): так как и они удовлетворяются, то, значит, ошибка сделана не при переходе от системы (1) к «нормальной» системе (2). Возникает мысль, что ошибочно составлены уравнения (1), но, составляя эти уравнения снова по условию задачи, ошибки тоже не обнаруживаем. Где же ошибка? Остается высказать предположение, что ошибочна ... сама проверка. И в самом деле, обращаясь снова к табличке (*), мы видим, что неверна запись цифр после первого перекладывания: если переложено из левого кармана в правый 45 руб., то в левом останется не 65, а 75 руб. Исправляя табличку, получим новую:

л.	120	75	150
пр.	45	90	15

и здесь все соответствует условию задачи. Итак, первоначально полученное решение было правильно.

643. Эту чрезвычайно важную задачу необходимо решать многократно, меняя координаты данных точек и проверяя чертежом: график полученного уравнения, построенный по отрезкам на осях, должен пройти через данные точки.

§ 75

Настоящий параграф не ставит целью систематически изложить теорию решения систем уравнений высших порядков: наша задача заключается всего лишь в рассмотрении нескольких отдельных примеров на уже подготовленном материале (§ 58—59), с привлечением геометрических представлений. Что касается формально-оперативной стороны дела, то всегда возможно ограничиться применением метода подстановки. Возникающие после исключения одной из букв уравнения легко решаются посредством разложения левой части на множители с помощью теоремы об обращении в нуль произведения, или непосредственно извлечением корня.

Поучительно сопоставление алгебраической и геометрической стороны дела. Все полученные решения систем обнаруживаются на чертеже в виде точек пересечения двух графиков, и обратно, каждая точка пересечения соответствует некоторому решению системы. Успех работы обеспечивается не сложностью данных систем, а вниманием к указанной геометрической интерпретации.

§ 76

Практика преподавания алгебры (от которой мы не отступаем) такова, что учащиеся гораздо раньше научаются правильно понимать смысл слов «исключить букву» из двух уравнений (см. стр. 278), чем узнают точное определение этого термина. Однако именно этот термин, не в пример многим другим, по нашему мнению, нуждается в определении.

Дать определение, впрочем, не легко. Предлагаемое определение нам кажется подходящим для начального курса алгебры, несмотря на наличие в нем одного дефекта: если равенство

$$R = 0$$

есть результат исключения некоторой буквы из двух уравнений, то равенство

$$F \cdot R = 0,$$

где F — произвольное выражение, не содержащее упомянутой буквы, есть также (согласно данному определению) результат исключения.

Этому затруднению мы противопоставили в тексте определения слова «не являющиеся тождеством», которые, по крайней мере, устраняют возможность введения множителя F, тождественно равного нулю.

Может возникнуть вопрос: исключая букву из двух уравнений двумя разными способами, можно ли получить разные результаты? Поставим этот вопрос точнее: исключая двумя разными способами букву y из совместной системы двух уравнений (α) и (β), содержащих буквы x и y, можем ли мы быть заранее уверены, что полученные два уравнения, содержащие только одну букву x, скажем (γ_1) и (γ_2), будут иметь одни и те же корни? Ответ таков: должен существовать непременно хоть один общий корень уравнений (γ_1) и (γ_2). Действительно, так как уравнения (α) и (β) совместны, то они непременно удовлетворяются при некоторой паре значений $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда, по нашему определению, уравнения (γ_1) и (γ_2), не содержащие буквы y, справедливы при значении $x = x_0$, т. е. имеют общий корень.

Отсюда следует, напротив: если, исключая двумя разными способами букву y из системы уравнений (α) и (β), мы получаем два уравнения (γ_1) и (γ_2), не имеющие общих корней, то система уравнений (α) и (β) несовместна.

Упражнение 215. В пункте 4) указан так называемый «метод сравнения».

Упражнение 216. Не следует (по крайней мере, преподавателю) упускать из виду механический смысл предлагаемых примеров: каждый из них, если считать, что t — время, может быть истолкован в качестве «уравнений движения» точки на плоскости.

Нужно для каждой данной системы искать наилучшие приемы исключения: 1) сложить уравнения, 2) вычесть, 3) перемножить, 4) разделить, 5) возвести второе уравнение в квадрат, потом разделить одно на другое, 6) возвести первое уравнение в квадрат, второе в куб, потом сравнять левые части, и т. д.

То, что получается, есть уравнение траектории движения.

Упражнение 218.

Подсказать доказательство, требуемое в примере 656, может чертеж: все точки прямой $x + y = 10$ имеет расстояние от начала большее, чем 5. Формальное доказательство легко провести, опираясь хотя бы на тождество

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2),$$

из которого следует сразу, что

$$x^2+y^2 \geqslant \frac{1}{2}(x+y)^2.$$

Отсюда видно: если $x+y=10$, то $x^2+y^2 \geqslant 50$.

Упражнение 219.

657 Примеры 1), 3), 5) и 8) желательно проделать дважды: 1) обыкновенным способом (раскрывая скобки) и 2) вводя новые неизвестные, например,

$$\begin{cases} i+j=k \\ i-j=l, \end{cases}$$

и т. п.

Упражнение 220.

658. Случай, когда $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$, не регулярный: смотря по значениям чисел m и n, задача «невозможна» (не имеет решений) или неопределенна.

659. Получаем:

$$p=\frac{y+a}{x+a}, \quad q=\frac{y+b}{x+b}, \quad p-q=-(a-b)\frac{y-x}{(x+a)(x+b)},$$

откуда и следует заключение, так как $y<x$ (отец старше сына).

660. Величина

$$\frac{y}{x}=\frac{24-h}{24+h} \quad (-24<h<+24)$$

при увеличении h убывает, так как числитель дроби (справа) убывает, а знаменатель — возрастает.

661. Величина

$$x-y=24\,\frac{1-k}{1+k} \quad (0<k<\infty)$$

при увеличении k убывает (по той же причине, что и в предыдущей задаче).

Полезно отдавать себе отчет в том, в какое время года величины h и k принимают значения, указанные в тексте задач.

662. Получаются соотношения:

$$p=tu, \quad T=\frac{200+3v}{u+v},$$

$$q=200-(t-3)v \quad (t>3), \quad X=\frac{(200+3v)u}{u+v}.$$

Если $p=q$, то $t=T$.

Упражнение 222.

672. Умножая первое уравнение на 2 и сравнивая правые части, получим: $10=7$. Это значит: если бы оба данных уравнения были совместны (могли бы быть верными одновремечно), то верно было бы также равенство $10=7$. Но это равенство неверно; значит, уравнения несовместны (см. § 72).

Глава XII

КВАДРАТНЫЕ И КУБИЧЕСКИЕ КОРНИ. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧИСЛОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Общие замечания

1. Сказать, что учащиеся VII класса, учившиеся по данной книге, приступая к настоящей главе, имеют представление о действиях только с рациональными числами, было бы не вполне точно. Какие угодно действительные числа уже введены в оборот неявным образом, как длины отрезков, как координаты точек. Учащимся привита (хотя и не высказана прямо) мысль о наличии взаимнооднозначного соответствия между числами и точками числовой оси. Если какого-нибудь числа (длины отрезка, координаты точки) они не могут назвать точно, то делают это приближенно, пользуясь обыкновенно десятичными дробями, с надлежащим округлением. С другой стороны, проблема нахождения общей меры отрезков еще не была затронута, идея несоизмеримости не могла и возникнуть.

2. Следует предупредить преподавателя, приступающего вместе с учащимися к изучению главы XII, что, имея дело с корнями из чисел, не извлекающимися точно, ему необходимо избегать в курсе «начальной» алгебры употребления терминов «рациональные» и «иррациональные» числа, как совершенно лишенных смысла в глазах учащихся. Допустимо лишь обсуждение вопроса о том, «можешь ли ты написать такое-то число точно или только приближенно?» Нельзя также пользоваться и термином «действительные» числа, так как «действительным» числам противополагаются какие-то иные, не являющиеся «действительными», а таковых учащиеся не знают. Надо говорить просто «все» числа. Уравнение $x^2 + 1 = 0$ в семилетней школе «не имеет корней», как не имеет корней до того момента, как объяснены отрицательные числа, уравнение $x + 1 = 0$.

3. Не должно быть никаких упоминаний о «бесконечных десятичных дробях», о «представлении» или «изображении» числа такой-то бесконечной десятичной дробью, о «разложении» числа в такую-то бесконечную десятичную дробь, о «периодах» и т. п. Что было возможно сообщить по этому поводу, было сообщено, допустим, в курсе арифметики; в алгебре же придется обратиться к этим вопросам, может быть, позднее, во всяком случае, за пределами «начального» курса.

4. При решении задач по настоящему учебнику числовые данные, как правило, не бывают приближенными: поэтому не приходится затрагивать весьма трудную проблему оценки погрешности результата в зависимости от погрешности данных. Погрешность возникает только в результате вычислений: таковые доводятся до разряда заранее назначенного (условием или преподавателем) и округляются.

§ 77

Общеизвестный алгорифм извлечения квадратного корня из данного числа нашей системой изложения отнесен к старшему классу.

В VII же классе учащимся предлагается извлекать квадратные и кубические корни по таблицам, имеющимся в конце книги.

Пользование таблицами представляет собой практический навык, который в основном должен быть показан и объяснен преподавателем. Сначала надо научиться извлекать корни по таблицам из тех чисел, которые имеются в таблице; потом (в § 80) из промежуточных (интерполяция).

Прежде всего необходимо, чтобы учащиеся, имея дело с двучленным уравнением, ведущим к извлечению корня, усвоили механизм его решения «методом проб». В качестве примера применения этого метода мы проводим извлечение квадратного корня из 1500, с точностью до единицы и до одной десятой, а в настоящем параграфе извлекается квадратный корень из 3, с точностью до 0,01. Предполагается, что на данном этапе идея метода усваивается всеми учащимися уже в обязательном порядке: до их сознания доводится, что, затратив некоторое, может быть, и весьма немалое, время на вычисление, они могут сами получить столько десятичных знаков искомого числа, сколько пожелают; таким образом, таблицы корней им предлагаются только для ускорения и облегчения работы.

Упражнение 229 имеет целью показать учащимся на конкретном примере вычисления корней $\sqrt{10}$ и $\sqrt[3]{10}$, что значения корней различными способами (графически или «методом проб») могут быть получены и без применения таблиц, но с помощью таблиц они получаются «мгновенно».

Обращаясь затем к таблицам, надо практиковаться сначала в нахождении квадратных корней из тех чисел n, которые имеются в таблице; затем — из таких чисел n, которых в таблице нет, но есть зато числа вида $\frac{n}{100}$ или $100n$, именно с помощью формул, помещенных внизу страницы 348: например, из чисел 1070, или 5100 и 0,107, или 0,51. «Выводить» упомянутые формулы нет надобности (это будет сделано позднее, в § 84); однако важно проверить их на нескольких таких примерах, где результат получается точный.

Аналогичная работа проводится также и с кубическими корнями; но упражняться в извлечении квадратных корней следует, конечно, значительно больше, чем в извлечении кубических.

Следующий далее объяснительный текст (на стр. 309—310) вводит различие между понятиями арифметического и алгебраического значения корня, а также касается извлечения квадратных и кубических корней из отрицательных чисел.

Преподаватель учтет, что из числа алгебраических значений корня семилетняя школа «признает» только действительные.

Отметим для преподавателя еще одну тонкую деталь, на которую в тексте пособия трудно было бы обратить внимание учащихся. В математической практике, а также и в преподавании знаки радикалов употребляются в двух различных смыслах: 1) как указание на то действие, которое надо будет совершить (это действие равносильно нахождению всех действительных корней соответствующего двучленного уравнения); 2) как результат

действия, и тогда радикалом обозначается только арифметическое значение корня. Чаще всего радикалы употребляются во втором смысле; но, например, в объяснительном тексте на стр. 309 они употреблены в первом смысле.

§ 80

Короче говоря, в этом параграфе идет речь о линейной интерполяции. «Интерполировать» — значит «находить промежуточные значения по таблице»; если говорится, что интерполяция — «линейная», то имеют в виду, что промежуточные значения подсчитываются так, как будто бы рассматриваемая функция в данном промежутке была линейной (многочленом первой степени).

Прием линейной интерполяции крайне прост по идее и вполне общедоступен, но плохо усваивается, если в самом начале не поработать над ним основательно, терпеливо, без спешки. Именно такую работу предусматривает настоящий параграф, специально посвященный данному вопросу.

Преподаватель, если найдет нужным, может сразу после § 79 перейти к § 81 с тем, чтобы обратиться к § 80, когда возникнет надобность в применении интерполяции (примерно — посреди § 81).

Упражнение 232 не представляет собою чего-нибудь нового: но уже сделанную раньше задачу необходимо снова решить алгебраическим путем, прежде чем перейти к чтению объяснительного текста (стр. 309—310). Здесь, как это бывает сравнительно редко, «арифметическое» решение, указанное в тексте, имеет преимущество перед алгебраическим.

Объяснительный текст служит образцом того, как нужно рассуждать при работе над примерами следующего *упражнения 233*. Впрочем, это рассуждение повторено в сжатой форме (а пространным оно в применениях быть не должно) в пункте 1 этого упражнения. Для учащихся будет известным облегчением то обстоятельство, что примеры построены в знакомой им «табличной» форме — как это было в § 9—10 и несколько раз после того.

Объяснительный текст на стр. 313 вводит новый, очень важный принципиальный момент: кривая линия (график рассматриваемой функции) в пределах рассматриваемого маленького «табличного» промежутка заменяется приближенно прямой линией. В семилетней школе не следует делать попыток оценить возникающую отсюда погрешность. Если у учащихся при извлечении корней будут оставаться (или возникать) сомнения по поводу точности результата, лучше всего, не теряя времени на разговоры, сравнить полученный результат с данными более точной и более подробно составленной таблицы, например, Барлоу.

Следует, впрочем, предупредить, что в самом начале таблиц, приведенных в нашей книжке, линейная интерполяция в самом деле дает заметную погрешность: например, получаем: $\sqrt{0{,}15} = 0{,}382$ (тогда как нужно было бы получить 0,387).

При работе над *упражнением 234* учащиеся должны выполнять интерполяцию в письменной форме, с небольшим объяснением, затем мало-помалу переходить к устной интерполяции.

В *упражнении 235* предлагается строить графики данных уравнений, содержащих квадратные радикалы. Интерполировать придет-

ся только при вычислении второго радикала; при этом (имея в виду ограниченную «графическую» точность чертежа) можно рекомендовать отбрасывать третью (после запятой) цифру числа под радикалом, округляя при этом вторую.

Стоило бы, пожалуй, предварительно проделать в классе на доске более простой пример

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

(окружность: $x^2 + y^2 = 1$).

§ 81

«Прикладной» характер этого параграфа нисколько не уменьшает, а, напротив, весьма увеличивает его значение. Проделав предложенную здесь работу, учащиеся будут понимать, з а ч е м нужно знание корней и умение пользоваться таблицами.

Упражнение 236.

Преподаватель имеет возможность, если найдет нужным, несколько разнообразить тексты задач, конкретизируя их и придавая им более «жизненную» форму.

Следует, при предварительном чтении «Примечания» на стр. 314, или, еще лучше, пользуясь удобным случаем, объяснить учащимся, что такое «значащие цифры». Указание на «округление данных» в последующих текстах задач относится только к числу π: поскольку принят принцип «трех значащих цифр», в качестве π нужно брать число 3,14.

Чтобы указать желательную запись и расположение действий, воспользуемся примером 710.

S	$\frac{S}{\pi}$	$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$
50	15,9	3,99
60	19,1	4,37
70	22,3	4,72
80	25,5	5,05
90	28,7	5,36
100	31,8	5,64

Рисование квадратов, кругов и т. д. н е о б х о д и м о, так как представляет собой один из методов контроля и укрепляет доверие к цифрам.

Формулы $S = \pi R^2$, $V = \pi R^2 H$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ в примерах 710—712, если не «выводились» в геометрии, просто с о о б щ а ю т с я учащимся.

Упражнение 237.

Полезно повторить вывод теоремы Пифагора, данный в § 42, стр. 162. Содержащийся здесь материал ценен своею связью с действительностью: рисование треугольников и прозерка циркулем — важнейшая часть работы.

Существенно, чтобы дополнительные задачи таких же типов составили предмет домашних занятий учащихся.

Формулы для диагонали квадрата и для высоты равностороннего треугольника подлежат запоминанию.

§ 82

Любое «нормальное» уравнение — не только двучленное — можно решать «методом проб». Только эту мысль мы хотим довести в данном параграфе до сознания учащихся.

Решение уравнения «методом проб» (точнее сказать, нахождения некоторого корня) начинается с того момента, когда удалось «поймать» (найти) корень: подмечены два значения буквы, при которых левая часть уравнения принимает различные знаки.

Случай двучленного уравнения имеет ту особенность, что (при положительных значениях неизвестной буквы) левая часть изменяется монотонно, т. е. в одну сторону — или возрастая или убывая. Поэтому в случае двучленного уравнения существует, наверное, только один корень. В общем же случае может обнаружиться и несколько корней в промежутке между двумя значениями, о которых шла речь.

Вычисления в примерах *упражнения 238* минимальны и вместе с тем достаточны для достижения поставленной цели. Существенно, чтобы каждая «пробная» подстановка отражалась на чертеже в виде точки, принадлежащей графику левой части уравнения.

В этих примерах корни «вычисляются» с точностью до 0,1. Полезно обратить внимание учащихся на условность термина «вычислить»: если, например, установлено, что в промежутке $1 < x < 2$ существует корень, то он тем самым уже «вычислен» — с точностью до единицы.

§ 83

Параграф посвящен решению квадратного уравнения с числовыми коэффициентами (т. е. без общей теории или элементов исследования).

Нужно ясно понимать, что есть в этом параграфе и чего нет, а также — чем предлагаемое изложение отличается от изложения в стабильном учебнике.

В учебнике Киселева вывод формулы для решения квадратного уравнения опирается на двойственный смысл квадратного корня; полученная формула применяется к частным случаям.

В настоящем изложении формула не выводится, а решение уравнения в нормальной форме получается посредством разложения левой части на множители и последующей ссылки на теорему о равенстве нулю произведения. Общую формулу не представило бы затруднения вывести этим же способом; но вывод формулы отнесен к VIII классу.

Усвоение приема решения квадратного уравнения достаточно подготовлено предыдущим изложением (см. ссылки на параграфы

в тексте). Преодоление трудностей было достигнуто посредством их расчленения: сначала мы «выделяли квадрат», затем разлагали «разность квадратов» на множители, наконец, в § 56 решение простых примеров квадратных уравнений было доведено до конца; там же было обнаружено, что в тех случаях, когда после выделения квадрата постоянное слагаемое оказывается положительным, уравнение не имеет решений.

Остается последнее затруднение, преодоление которого отложено до настоящего параграфа. Если постоянное слагаемое, получающееся после выделения квадрата, — отрицательное, но его абсолютное значение не представляет собой точного квадрата, то все же его абсолютное значение следует представить в виде квадрата от радикала:

$$(x - A)^2 - B = (x - A)^2 - (\sqrt{B})^2.$$

Раз этот пункт будет уяснен, возможно дать «связное» описание решения квадратного уравнения — для случая числовых коэффициентов или в общей форме.

Так как рассмотрение общего случая отложено, то нельзя говорить о дискриминанте; однако нужно добиться, чтобы учащиеся освоились с тем фактом, что квадратное уравнение может иметь два корня, или иметь один корень, или не иметь ни одного корня, смотря по тому, какой знак будет иметь постоянное слагаемое после выделения квадрата: отрицательный или положительный или, наконец, трехчлен окажется квадратом линейного выражения. Достаточно понять, в чем дело: заучивать признаки наличия того или иного числа корней на данном этапе излишне.

Нам кажется, что в VII классе не следует пользоваться записью «со значками» x_1 и x_2 для каждого корня в отдельности. Мы предлагаем пользоваться следующим заключением: если верно равенство вида

$$(x - a)(x - b) = 0,$$

то непременно или x равен a или x равен b.

В пункте 729 *упражнения 241* вскрывается с геометрической точки зрения, от чего зависит наличие того или иного числа корней.

Случай, когда коэффициент при квадрате неизвестного отличен от единицы, выделен особо и рассмотрен в объяснительном тексте на стр. 322. Мы рекомендуем выносить коэффициент за скобки. Другой прием, заключающийся в том, чтобы умножать на этот самый коэффициент, имеет некоторые преимущества, но все же не представляется нам предпочтительным.

Упражнение 241.

730. Полезно проследить, как отражается на графике то обстоятельство, что коэффициент при квадрате: 1) мал по абсолютному значению, 2) отрицателен.

Упражнение 242.

Целесообразно и естественно вводить два неизвестных, затем, после исключения одного из них, получать квадратное уравнение. Ошибочно считать этот путь более длинным или менее полезным.

732. Решение варианта (*а*) — рациональное (20 и 2), реше-

ние варианта (*b*) — иррациональное ($11+\sqrt{101}\sim 21{,}049$ и $11-\sqrt{101}\sim 1{,}051$). Но второе не менее реально, чем первое.

733. Решение задачи — иррациональное, но вполне реальное ($\sqrt{6}-1\sim 1{,}449$).

734. Отрицательное решение уравнения следует отбросить как не имеющее реального смысла и поэтому не являющееся решением задачи.

735. Имеется два решения: (3, 4, 5) и (—1, 0, 1).

736. По смыслу задачи имеется только одно решение: (3, 4, 5).

739. Составив уравнения

$$\begin{cases} xy = 40 \\ xy - 2x + 3y - 6 = 48, \end{cases}$$

нужно вычесть одно из другого, чтобы понизить степень; затем исключить одну из букв (см. начало § 76). Решение: «Куплено 5 *м* ткани по 8 руб. за метр».

740. То же. Но решений — два:

1) «Куплено 5 *м* ткани по 8 руб. за метр» и 2) «Куплено 4 *м* ткани по 10 руб. за метр».

§ 84

«Действия с радикалами» даны, хотя и крайне скудно, в соответствии с предположением, что некоторая часть учащихся, закончив свое образование седьмым классом, все же в жизненной практике или при чтении литературы не раз встретится с необходимостью оперировать радикальными выражениями. Вместе с тем для всех прочих учащихся, которые продолжат свое школьное образование, здесь дается материал, полезный в качестве пропедевтики курса VIII класса.

Краеугольным камнем являются «разложения любого числа на множители»:

$$a=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\quad\sqrt[3]{a}.$$

Учить всякий раз «освобождаться от иррациональности в знаменателе» не нужно. Так, например 1) в *упражнении 243*, пункт 741, следует делать следующим образом («по разуму»):

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Пример 3):

$$\frac{20}{\sqrt{5}}=\frac{4\cdot 5}{\sqrt{5}}=\frac{4\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}.$$

Пример 15):

$$(\sqrt{5})^3=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=(\sqrt{5}\cdot\sqrt{5})\sqrt{5}=5\sqrt{5}.$$

Не должно возникать сомнений в том, применимы ли основные законы арифметики к числам, записанным в радикальной форме (если только они имеют реальный числовой смысл): ведь о свой-

стве «иррациональности» учащиеся еще не имеют представления, а в главе III, с другой стороны, справедливость законов проверялась для каких угодно чисел-отрезков. Поэтому можно смело писать (пример 9):

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Доказательство равенств (I—IV) базируется на предпосылке, что «всякое положительное число имеет один, и только один (арифметический), квадратный (или кубический) корень». Эта предпосылка геометрически очевидна для учащихся («существует квадрат, имеющий заданную площадь», и «куб, имеющий заданный объем»).

Упражнение 244.

742. «Упростить»—значит здесь привести данное выражение к виду, по возможности более удобному для вычисления (уменьшить число радикалов; уменьшить целое число, стоящее под радикалом; избежать возведения в степень радикального выражения и т. п.).

743. Например, равенство (1) получается посредством «упрощения» правой части:

$$10\sqrt{\frac{n}{100}} = 10\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{100}} = 10\cdot\frac{\sqrt{n}}{10} = \sqrt{n}.$$

О сколько-нибудь развитой «теории уравнений в радикалах» не может быть речи. Тем не менее техника их решений не сложна, а вопрос о появлении «лишних» корней нет оснований затрагивать, так как вплоть до VII класса, по нашей мысли, господствует принцип: «проверять полученные решения всегда».

748. *Упражнение* носит общеповторительный характер и подразумевает неоднократное оперирование радикалами.

ОБЩИЕ ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Общие замечания

1. Предлагаемые упражнения представляют собою органическую часть учебника, заключительную его главу. Каждое упражнение в любой из прочих глав (I—XII) посвящено определенному объекту — применению правила, тренировке в нем, или подготовляет к пониманию излагаемой далее теории. Повторительные упражнения делают глубокие разрезы пройденного материала, подвергают ревизии приобретенные средства и инструменты и приучают выбирать среди них те, которые нужны для каждого данного случая. Вместе с тем, если при первоначальном прохождении минимальной целью было достижение правильного понимания и умения действовать, то на повторительном этапе уместно значительное усиление вербального элемента: «Расскажи, что ты знаешь по такому-то поводу; говори связно, посмотрим, что из этого выйдет». Появляются новые типы вопросов: например, предлагается придумать текст задачи, которая приводила бы к заданному уравнению.

2. Построение «Повторительных упражнений» таково, что каждый из десяти их разделов содержит некоторое ясно выраженное

ядро, примерно: I и II — пропорциональность, III — четыре основные действия и их законы, координаты, прямая линия, IV — положительные и отрицательные числа, степени и корни, V — уравнения, VI — приемы решения уравнений, VII — тождественные преобразования, VIII — основные формулы умножения, IX—графики уравнений, X—системы уравнений. В каждом разделе около главной темы сгруппирован ряд примеров и задач с таким расчетом, чтобы были охвачены все основные линии преподавания.

3. В теоретической части «Повторительных упражнений» особое внимание уделено вопросам, имеющим более принципиальное значение. Примеры и задачи, естественно, содержат многочисленные моменты «прогрессивного характера», т. е. означающие дальнейшее движение вперед.

Среди «новинок» следует отметить: графический прием пропорционального деления (II, 3), примеры окружностей и гипербол в канонической форме (V, 10, VII, 10), более сложные приемы разложения многочлена на множители (VII, 5), поставленный в явной форме вопрос о минимуме трехчлена (VI, 5); в иных случаях возникает надобность в том, чтобы освобождаться от радикала в знаменателе дроби (II, 4; VII, 8), попадаются буквенные параметры в квадратном уравнении (VI, 9), встречаются замены переменных в системах (III, 6), предлагается «построить график» без указания значений независимой переменной (VI, 10) и т. п.

4. При таком построении «Повторительных упражнений» ими вполне удобно заниматься подряд, без пропусков, на протяжении последнего месяца учебного года, в порядке подготовки к экзамену.

I

1. Отношение — то же, что частное (при «точном» делении, без остатка) или дробь. Пропорция — «равенство двух отношений». «Основное свойство» известно из арифметики.

2. Приводится формальное объяснение происхождения термина «пропорциональность» (от «пропорции»).

3. Для заполнения таблицы применяется «графический метод» (иначе, чем в § 9).

4. Придется решать уравнение в радикалах относительно c. Величина y здесь пропорциональна корню квадратному из x.

5. «В уме» уравнения решаются легко заменами букв: например: положив мысленно $2x - 3$ равным новой букве (положим, t), видим, что уравнение $t^2 - 5t + 6 = 0$ имеет корни $t = 2$ или 3; значит, $x = \frac{5}{2}$ или 3.

6. Конечно, не возбраняется сразу упростить A и B.

9. Табличку удобнее заполнять по строчкам. Полезно констатировать словесно, что «p пропорционально квадрату m и первой степени n».

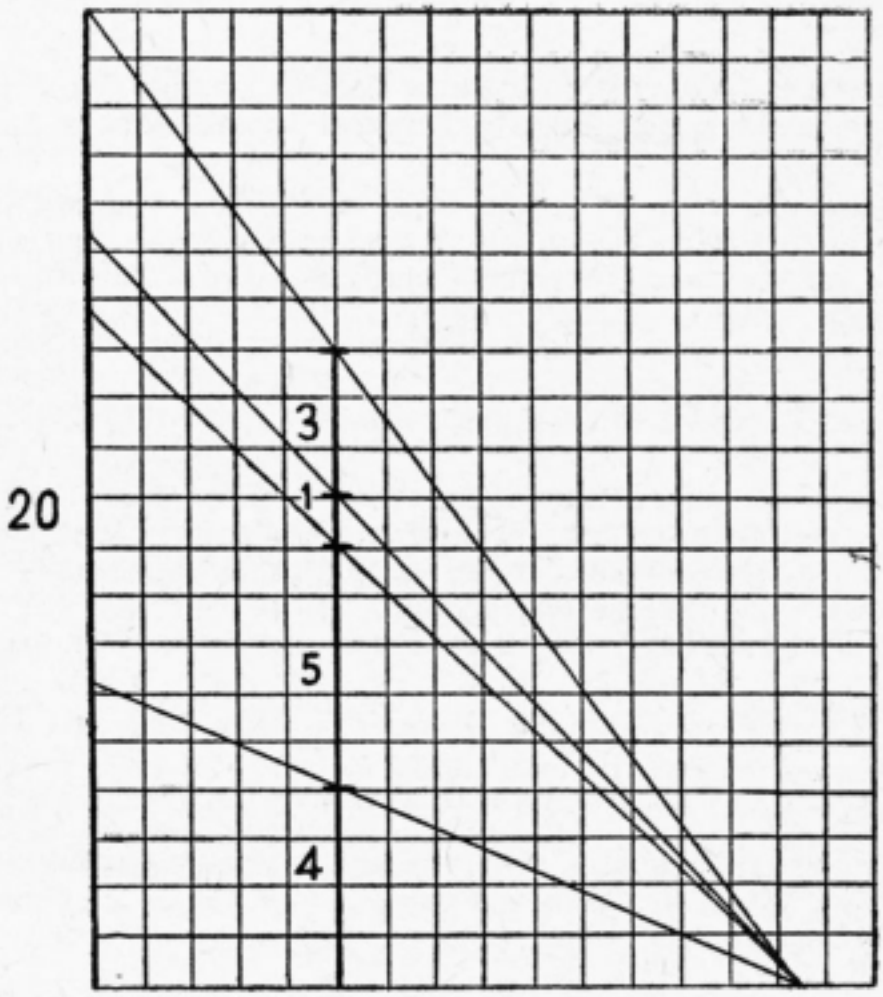
10. «Площадь квадрата пропорциональна (и равна) квадрату стороны», и т. п.

II

1. Ожидаются примерно такие ответы: «Это значит, что справедлива формула $L = mR$, где R — радиус окружности, а L — ее дли-

на; что касается коэффициента пропорциональности m, то его числовое значение равно 2π, причем $\pi = 3{,}1415...$» Или: «Справедлива формула $N = mP^4$, где P — вес бриллианта (допустим, выраженный в каратах), N — его стоимость; m — коэффициент, численно равный стоимости бриллианта, вес которого равен одному карату».

2. При ответе должен быть использован не только материал § 12, но и материал § 39. Вместо трех можно взять иное число частей.



Черт. 59

3. Удобный графический прием пропорционального деления. Приведенный в вопросе пример иллюстрируется чертежом 59. Желательны многочисленные упражнения в тетрадках (домашние задания).

4. Нужно работать циркулем и параллельно — произвести вычисления. Попутно можно объяснить, как освободиться от радикала в знаменателе (чтобы не приходилось делить на приближенную десятичную дробь).

5. Ответы: 1) 25, 2) 1, 3) 2 и $\frac{1}{2}$. В примере 3) корни видны сразу, но при отсутствии общей теории квадратного уравнения его нужно решать обычным способом.

7. Вместо вопросительных знаков можно писать большие буквы. Нужно ясно понимать, что запись $a = b = c$ означает систему равенств $a = b$, $b = c$ и еще $a = c$.

8. Этот пример подготовлен примером I, 10. Следует взять произвольно радиус наименьшего круга (например, 10 клеток). Пользоваться таблицами.

9. Решение 23 отбрасывается как несообразное с условием задачи.

III

1. Имеется в виду, что должны быть названы лишь пять законов, относящихся к прямым действиям: остальные из них выводятся.

2. Равенство $a^b = b^a$ верно при $a = 4$, $b = 2$ (или наоборот).

3. Сочетательный закон не имеет места для возведения в степень, так как, если и верно, например, что

$$2^{(2^2)} = (2^2)^2 = 16,$$

то, с другой стороны,

$$3^{(3^3)} = 3^{27}$$

(очень большое число), тогда как $(3^3)^3 = 27^3 =$ всего лишь 19 683.

4. Желательно связное описание «своими словами». Точки отмечаются приближенно, но их координаты указываются точно. Используйте оба приема построения. 1) по отрезку на оси Oy и угловому коэффициенту, 2) по отрезкам на осях Ox и Oy.

5. Ответы: 1) $\frac{1}{8}$, 2) $\frac{1}{4}$, 3) $\frac{3}{2}$ и $\left(-\frac{2}{3}\right)$.

6. Ответы: 1) $x = 4$, $y = 6$, 2) $x = \pm 2$, $y = 9$.

Можно вводить новые неизвестные и можно уравнивать коэффициенты, не вводя новых неизвестных.

7. Образец записи:

$$\frac{(mx)(my)}{mz} = m\frac{xy}{z}.$$

9. Следует принять в качестве неизвестных u и v, затем определить отношение $\frac{u}{v}$.

Ответ: $\frac{113}{23} \sim 4{,}91$.

IV

1. При повторении правила действий с положительными и отрицательными числами должны быть даны в формализованном виде (стр. 93, 98, 107); обращение к числовой оси является уже пройденным этапом.

2. В поисках ответов надо решать уравнения ($x+y=0$, $x-y=0$ и т. д.).

4. На прямые вопросы все ответы — утвердительные, надо лишь в пункте а) сделать оговорку, что x и y отличны от нуля.

На обратные вопросы утвердительны ответы в пунктах a) и b); в пункте c) — также, но с оговоркой $a \neq 0$; в случае пункта d), перенося все члены влево и разлагая на множители, приходим к заключению, что или $x = y$, или $x = 2 - y$.

8. Прежде чем вывести общую формулу для числа диагоналей в n-угольнике, нужно произвести непосредственный подсчет для случаев $n = 4, 5, 6$; получив формулу, проверить ее для этих значений.

Ответ: в 10-угольнике; в 64-угольнике.

9. Ответ: 144 $м^2$; 2,5 $м$; 3,79 $м$.

V

1. Примеры 1—8 иллюстрируют ответы на теоретические вопросы. При решении уравнений желательны обстоятельные объяснения (с приведением к нормальному виду и разложением на множители) в случае примеров 1—4; в дальнейших же следует действовать посредством извлечения корней, учитывая знаки.

4. Обязательна проверка.

9. См. пункты 739 и 740. Ответ: 24; 4 руб. 50 коп.

10. Нужно доказать (ссылаясь на теорему Пифагора), что уравнение $x^2 + y^2 = 100$ представляет окружность.

VI

2. Считая, как обычно, корни арифметическими, мы должны заключить в результате проверки, что уравнение 1) имеет только один корень $x = 1$, а уравнение 2) — только один корень $x = 4$.

3. Речь идет о «нормальном» уравнении. Учащемуся придется задумать не менее трех корней, допустим, a, b и c, и затем раскрыть скобки в левой части уравнения

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0.$$

5. Надо выделять квадрат:

$$y = 3\left[\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right] \geqslant 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

Минимум достигается при $x = \frac{5}{3}$.

VII

3. Данный многочлен тождественно равен нулю.

4. Ответ: Надо вырезать и удалить квадрат со стороной b; затем, разрезав оставшуюся фигуру по пунктиру, сложить две ее части так, чтобы получился прямоугольник.

6. Ответ: 1) $x = 5$, 2) $x = \pm 4$, 3) $x = 3$ или (-7), $y = 5$ или (-1) — четыре решения.

7. Ответ: a) 900, b) 125, c) 729, d) 25.

8. Уместно и здесь (см. II, 4) освободиться от радикала в знаменателе.

VIII

4. Во многих случаях (6 из 12) числитель, по основным формулам, делится на знаменатель без остатка, так что правильная дробь отсутствует.

7. Решать как систему. Ответ: $5 \cdot 2 = 10$ и $0 \cdot 0 = 0$.

10. Очень легкие задачи с окружностью, польза которых несомненна.

IX

1. Ответы: 1) пара осей, 2) ось Ox и прямая, параллельная оси Oy, 3) биссектриса 2-го и 4-го координатных углов, 4) пара биссектрис координатных углов, 5) одно лишь начало координат, 6) пара прямых $x + y = \pm 1$, 7) пара парабол с вершинами в начале координат, 8) пара прямых, параллельных оси Oy.

2. При построении графика нужно давать букве x отрицательные значения.

3. Частный случай многократно рассмотренной задачи: провести прямую через две точки.

4. Ответ: 0 и -1.

6. Раз выражение вида $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ не зависит от x, значит, при всех значениях x (кроме одного!) оно равно одному и тому же постоянному числу:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = m.$$

Тогда имеет место тождество

$$ax + b = cmx + dm,$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} a = cm \\ b = dm, \end{cases}$$

так что

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

10. См. VIII, 10 и VII, 10.

X

4. По условию задачи система не должна быть регулярной. В таком случае (см. § 71, стр. 279) обращается в нуль выражение $AD - BC = (3 - s) \cdot [-(2 + s)] - (-4) \cdot 1 = s^2 - s - 2 = (s - 2)(s + 1)$, т. е. s равно или 2, или (-1). Если $s = 2$, то система несовместна; если $s = -1$, то она неопределенна (сводится к одному уравнению $x - y = 5$).

6. Ответ: ни при каких.

7. Ответ: $120 = 24 \cdot 5 = (-5) \cdot (-24)$.

8. Ответ: 1) $2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

2) $\dfrac{20}{\sqrt{13}}$ и $\dfrac{30}{\sqrt{13}}$.

При нахождении приема построения прибегнуть к графическому истолкованию системы.

10. Путешественники встретятся всего 5 раз. Задача иллюстрируется чертежом 60.

ПРИМЕРНЫЕ ТЕКСТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

По главам *

Работа № 1.

1. Вычислить значение t по формуле: $t = \frac{a}{u} + \frac{b}{v}$ при $a = 12$; $b = 15$; $u = 0{,}6$; $v = \frac{3}{4}$.

2. В библиотеке имеется n книг. Из них p книг расставлены на полках; остальные книги разложены в 4 шкафах, причем в каждом шкафу помещено по x книг. Напишите в виде формулы, чему равно число x.

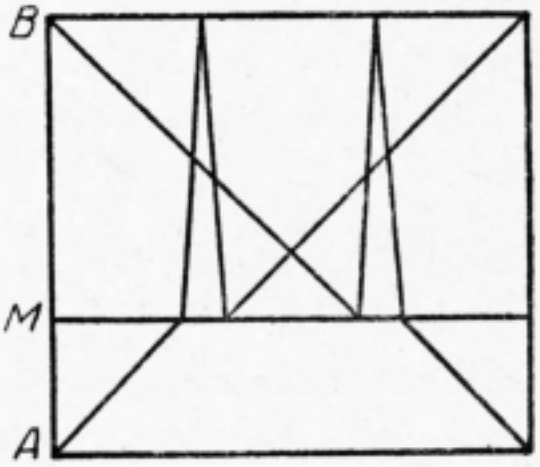
Затем подставьте: $n = 600$, $p = 160$, и вычислите значение x.

3. Напишите произведение суммы чисел a и 2 на число b.

Работа № 2

1. Дана табличка

x	y
18	12
3	2
12	10
21	14
9	6



Черт. 60

Установите, являются ли пропорциональными между собой значения x и значения y, данные в табличке.

Если это так, то каков коэффициент пропорциональности?

Если это не так, то нельзя ли изменить одно из чисел в табличке таким образом, чтобы значения x и значения y стали между собой пропорциональными?

---

* Каждый вопрос, как правило, рекомендуется предлагать в четырех вариантах. В вопросах же, отмеченных звездочкой, данные берутся из графика: здесь число вариантов, очевидно, равно числу работ.

Приведенные ниже образцы по большей части даны в одном варианте; частично приведено четыре варианта, в исключительных случаях (работа № 11 и проверочная работа на стр. 443) приводится 30 и 40 вариантов.

Сделайте чертеж к табличке, откладывая значения x вправо, а значения y вверх. Масштаб: 1 = 1 клетке.

2. Дана (слева от вертикальной черты) фигурка $ABCDEF$ *. Увеличьте ее (справа от черты) в 2,5 раза.

3. Изменение температуры воздуха за сутки изображается данным графиком.

Напишите: 1) какова была температура в 9 часов утра, в 5 часов вечера? 2) В котором часу температура равнялась 10 градусам? 3) Когда температура была наименьшей и когда наибольшей (за сутки)? Какой она при этом оказалась?

Указания для преподавателей

В вопросе 2 подразумевается линейное увеличение. График в примере 3 проводится рукой преподавателя на каждом листе свободным движением руки. Координатные оси с масштабными пометками должны быть приготовлены заранее.

Работа № 3

1. Даны равенства:

$$p = 3x + 2y, \qquad q = 3(x + 2y),$$
$$r = (3x + 2)y, \qquad s = 3x \cdot 2y.$$

Вычислить значения p, q, r и s при значениях $x = 7$, $y = 5$.

2. Напишите, что больше (поставьте между числами знаки $<$, $>$ или $=$):

1) $\frac{5}{11}$ или $\frac{7}{71}$; 2) 0,375 или 0,39; 3) 0,63 или $\frac{12}{19}$.

3. На числовом луче отмечены точки a и b. Вычислите значения выражений:

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad B = \frac{a+2b}{3}, \quad C = \frac{2ab}{a+b}$$

и отметьте их на том же луче.

Указания для преподавателей

В вопросе 3 числовой луч с масштабными пометками (масштаб: 1 = 2 клеткам) должен быть приготовлен заранее. Точки a и b ставятся рукой преподавателя свободным движением руки, с ограничениями $2 < a < b < 12$, $b - a > 4$.

Работа № 4

1. Вычислите, чему равняется:

$$u = \frac{xy + z}{x - yz}$$

при значениях: $x = \frac{1}{5}$, $y = (-4)$, $z = (-10)$.

---

* Фигурка — многоугольная, стороны, параллельные осям, выражаются уравнениями вида $x = m$ и $y = n$ (где m и n целые).

2. На числовой оси отмечена (черточкой вниз) точка m. Отметьте на этой же оси (черточками вверх) восемь точек:

$$p = m + 1, \qquad q = m - 1,$$

$$r = -m, \qquad s = -m + 1, \qquad t = -m - 1,$$

$$u = 2m, \qquad v = \frac{m}{2}, \qquad w = \frac{20}{m}.$$

3. Движение точки по оси Ox задается формулой:

$$x = \frac{13 - 5t}{2}.$$

Вычислить значения x при $t = 0, 1, 2, 3$ и отметить на оси соответствующие точки черточками вверх. При отмеченных точках поставить значения t.

Указания для преподавателей

В вопросе 2 точка m должна быть поставлена рукой преподавателя свободным движением, с соблюдением условия $2 < m < 5$.

Числовые оси с масштабными пометками в обоих вопросах 2 и 3 подготавливаются заранее.

Работа № 5

1. В выражении

$$z = 3u - 2v$$

подставить: $u = x + 9y$, $v = 2x - 5y$.

Упростить полученные выражения.

Затем вычислить значение z при $x = 1{,}2$; $y = 0{,}7$.

2. На координатной плоскости Oxy даны точки $M\ (a, b)$ и $N\ (c, d)$. Напишите, чему равны их координаты a, b, c и d.

Отметьте на плоскости точку $P\ (x, y)$, координаты которой x и y вычислите по формулам:

$$x = a + c, \qquad y = b + d.$$

3. Вычислить, чему равняются выражения:

$$p = 3x + 2y, \qquad q = x^3 + y^2,$$

$$r = 2x + 3y, \qquad s = x^2 + y^3$$

при значениях: $x = 4$, $y = 5$.

Указания для преподавателей

В вопросе 2 на заранее подготовленной координатной сетке с масштабными пометками (масштаб: 1 = 1 клетке) преподаватель должен своей рукой свободным движением поставить точки M и N, с соблюдением условий $OM > 5$, $ON > 5$, $MN > 5$.

Работа № 6

1. Решить уравнение:

$$10(8 - 3x) + 11(x - 4) - 3(4 - 3x) = 4.$$

2. Веревку длиной в 13 метров нужно разделить на три части таким образом, чтобы вторая часть была в 4 раза больше первой, а третья на 7 метров больше первой. Какой длины должна быть первая часть, какой длины вторая и третья?

3. Решить уравнение:

$$\frac{10-q}{q+3}=\frac{2}{7}.$$

Работа № 7

1. Выполните умножение:

$$12ac\cdot\frac{1}{3}bc\cdot\frac{5}{8}abc^2.$$

2. Выполните указанные действия, вынося в результате, что можно, за скобки или представляя результат в виде произведения:

$$(1+2ax)(1-2ax)+(2bx+1)(2bx-1).$$

3. Постройте на клетчатой бумаге прямоугольный треугольник с катетами 11 и 17. Измерьте длину гипотенузы (с округлением в миллиметрах) и проверьте, насколько точно выполняется соотношение Пифагора.

4. Можете ли вы следующие трехчлены представить в виде квадратов двучленов и как именно?

1) $x^2-8x+16$, 2) $9x^2-30xy+25y^2$, 3) $y^2+12y+27$.

Работа № 8

1. Выполнить умножение многочленов:

$$(x^3+2x^2+4x+8)(x^3-2x^2+4x-8).$$

2. Вычислить, чему станет равно выражение

$$AC-B^2$$

после замены:

$$A=3a-b,\ B=2a-2b,\ C=a-3b.$$

3. Каково должно быть значение y, чтобы многочлен

$$x^2-4xy-3x+5y-10$$

обращался в нуль при $x=2$? при $x=-2$? Проверьте.

4. Следующее выражение преобразуйте к виду $Px+Qy$ и напишите, чему будут равны P и Q:

$$\frac{3}{5}(4x+7y)-\frac{1}{2}(x-3y).$$

Работа № 9

1. Решите уравнение

$$x^2+2x-35=0$$

и отметьте его корни на числовой оси.

2. Составьте уравнение, имеющее корнями числа 7, (—1) и (—2). Расположите по степеням неизвестного.

3. Башня имеет основание A (5,0) и вершину.

Вариант 1. B (5,30) Вариант 3. B (5,10)
Вариант 2. B (5,25) Вариант 4. B (5,20)

В момент времени $t = 0$ с вершины брошен мячик. Его движение задается уравнениями:

Вариант 1. $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 30 + 2t - 0{,}5t^2 \end{cases}$

Вариант 2. $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 25 - 0{,}5t^2 \end{cases}$

Вариант 3. $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 10 + 4t - 0{,}5t^2 \end{cases}$

Вариант 4. $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 20 + 3t - 0{,}5t^2 \end{cases}$

Подставляя значения $t = 0, 1, 2, 3$ и т. д., составьте таблицу и наметьте график движения мячика.

В какой момент и в какой точке мячик упадет на землю?

Напишите, необходим ли вам график для решения последнего вопроса, или же вы смогли бы обойтись без графика?

Масштаб: 1 = 1 клетке.

Указания для преподавателей

Распланировать работу по вопросу 3 таким образом, чтобы чертеж был на правой стороне полного разворота, таблица и вычисления — на левой.

Условие пишите на доске и не заставляйте переписывать.

Работа № 10

1. Два плотника — мастер Семен (С.) и ученик Иван (И.) — строгают доски.

Вариант 1. С. вчера работал 8 часов, а И. — 12 часов, причем строгал вдвое меньше досок, чем С. Сегодня они взялись за работу вместе и за 2 часа строгали 10 досок. Сколько досок вчера строгал С. и сколько И.?

Вариант 2. С. вчера строгал 24 доски, а И. 12 досок, причем И. работал на 2 часа меньше, чем С. Сегодня они снова взялись за работу вместе и, затратив времени вчетверо меньше, чем вчера затратил С., строгали 10 досок. Сколько часов вчера работал С. и сколько И.?

Вариант 3. С. вчера строгал 24 доски, а И. — 12 досок, причем И. работал на 2 часа меньше, чем С. Сегодня они снова взялись за работу вместе и за 2 часа строгали 10 досок. Сколько часов вчера работал С. и сколько И.?

Вариант 4. С. вчера работал 8 часов, а И. — 6 часов, причем строгал на 12 досок меньше, чем С Сегодня они снова взялись за работу вместе и за 2 часа строгали 10 досок. Сколько досок строгал вчера С. и сколько И.?

2. Выполните действия и представьте результат в виде простой дроби:

Вариант 1. $\left(1-\frac{b}{2a}\right)\frac{a}{3}-\left(\frac{b}{3}-\frac{a}{6}\right)$.

Вариант 2. $\left(1-\frac{b}{2a}\right)\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{3}\right)-\frac{a}{6}$.

Вариант 3. $1-\frac{b}{2a}\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{3}-\frac{a}{6}\right)$.

Вариант 4. $1-\frac{b}{2a}\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{3}\right)-\frac{a}{6}$.

3. Докажите, что

Вариант 1, при $c>5$ справедливо неравенство $2+\frac{3}{c}<2{,}6$.

Вариант 2, при $x>10$ » » $x^2-1>99$.

Вариант 3, при $y>0{,}5$ » » $\frac{1}{y+y^2}<\frac{4}{3}$.

Вариант 4, при $0<p<2$ » » $0{,}3<\frac{5-p}{3+p}<0{,}625$.

Указания для преподавателей

Вопрос 1 — задача на «совместный труд» (упр. 202). Вопрос 3 подразумевает использование приема, указанного в упражнении 183.

Работа № 11

Дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Требуется:

1) решить ее способом уравнивания коэффициентов,

2) решить ее способом подстановки,

3) дать геометрическое представление решения этой системы.

Варианты систем — см. на табл. 1.

Указания для преподавателей

Предлагается 30 вариантов, все — различные.

Варианты сконструированы по системе двойной таблицы (5×6). Первое из уравнений системы — одно и то же во всех вариантах каждой строки, второе уравнение — одно и то же во всех вариантах каждого столбца. Такая конструкция облегчает переписывание вариантов, не говоря уже о проверке работ.

Желательно, чтобы алгебраическое решение вместе со всеми вычислениями уместилось на левой стороне полного разворота тетради, геометрическое представление — на правой. Полезно отмечать время, затраченное каждым учащимся на выполнение работы.

При проверке нарисуйте для себя все 15 прямых и проверяйте их по чертежу.

Рекомендуйте записывать решения в виде простых дробей и эти дроби использовать при проверке; однако, переходя к чертежу, надо представить дроби в виде десятичных, округляя в десятых.

Работа № 12

1. Извлечь по таблицам квадратные корни из чисел:

1) A, 2) B, 3) C.

2. В координатной плоскости даны точки M и N. Вычислить, пользуясь таблицами:

1) расстояние точки M от начала координат O,
2) расстояние точки N от начала координат O,
3) расстояние между точками M и N.

(Указание. Пользуйтесь теоремой Пифагора).

3. Дано уравнение

$$x^2 + 4x - 6 = 0.$$

Разложите левую часть на множители посредством выделения квадрата. Затем вычислите, возможно точнее, корни.

Указания для преподавателей

Вместо A, B, C впишите числа:

$A = 33$, 34, 35 и т. д. (кроме 36, 49, 64).

$B = 631$, 632, 633 и т. д. (кроме 640, 650, 660).

$C = 0{,}251$; 0,252, 0,253 и т. д. (кроме 0,260; 0,270; 0,280

Точки M и N (с целыми координатами) поставьте своей рукой соответственно в кругах с центром (10, 10) радиуса 4, с центром (19,5) радиуса 4, однако не на одной и той же горизонтали.

По поводу разложения квадратного трехчлена на множители см. § 83.

Работа, предназначенная для проверки навыка построения графиков по точкам

Дана формула:

$$y = \ldots\ldots\ldots$$

Вычислить значения y при значениях x, равных:

0, 2, 4, 6, 8 и 10.

Отметить точки на координатной плоскости Oxy и соединить их плавной кривой.

Примечание. Если получаемое значение не целое, надо писать его в виде десятичной дроби, округляя в десятых.

Указания для преподавателей

В правой части данной формулы должны быть вписаны дробные линейные функции переменной x, взятые из табл. 2.

Каждый учащийся получает свою формулу на отдельной карточке, одинаковых формул быть не должно.

Карточки необходимо подготовить заранее по числу учащихся.

Переписывать условие излишне. Рекомендуется писать формулу и все вычисления на левой стороне разворота, на правой же помещать таблицу и график.

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
$4x + 7y = 56$ $11x + 4y = 88$	$3x + 4y = 48$ $11x + 4y = 88$	$x + 2y = 20$ $11x + 4y = 88$	$8x + 13y = 208$ $11x + 4y = 88$	$5x + 8y = 120$ $11x + 4y = 88$
№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
$4x + 7y = 56$ $13x + 5y = 130$	$3x + 4y = 48$ $13x + 5y = 130$	$x + 2y = 20$ $13x + 5y = 130$	$8x + 13y = 208$ $13x + 5y = 130$	$5x + 8y = 120$ $13x + 5y = 130$
№ 11	№ 12	№ 13	№ 14	№ 15
$4x + 7y = 56$ $9x + 2y = 36$	$3x + 4y = 48$ $9x + 2y = 36$	$x + 2y = 20$ $9x + 2y = 36$	$8x + 13y = 208$ $9x + 2y = 36$	$5x + 8y = 120$ $9x + 2y = 36$
№ 16	№ 17	№ 18	№ 19	№ 20
$4x + 7y = 56$ $16x + 7y = 224$	$3x + 4y = 48$ $16x + 7y = 224$	$x + 2y = 20$ $16x + 7y = 224$	$8x + 13y = 208$ $16x + 7y = 224$	$5x + 8y = 120$ $16x + 7y = 224$
№ 21	№ 22	№ 23	№ 24	№ 25
$4x + 7y = 56$ $-2x + 7y = 28$	$3x + 4y = 48$ $-2x + 7y = 28$	$x + 2y = 20$ $-2x + 7y = 28$	$8x + 13y = 208$ $-2x + 7y = 28$	$5x + 8y = 120$ $-2x + 7y = 38$
№ 26	№ 27	№ 28	№ 29	№ 30
$4x + 7y = 56$ $-7x + 18y = 84$	$3x + 4y = 48$ $-7x + 18y = 84$	$x + 2y = 20$ $-7x + 18y = 84$	$8x + 13y = 208$ $-7x + 18y = 84$	$5x + 8y = 120$ $-7x + 18y = 84$

$\frac{16x}{3x+2}$	$\frac{48x}{7x+10}$	$\frac{112x}{13x+30}$	$\frac{32x}{3x+10}$	$\frac{144x}{11x+50}$
$\frac{59x+10}{11x+10}$	$\frac{7x+2}{x+2}$	$\frac{27x+10}{3x+10}$	$\frac{23x+10}{2(x+5)}$	$\frac{103x+50}{7x+50}$
$\frac{2(19x+10)}{7x+10}$	$\frac{2(11x+10)}{3x+10}$	$\frac{2(5x+6)}{x+6}$	$\frac{2(7x+10)}{x+10}$	$\frac{2(31x+50)}{3x+50}$
$\frac{17x+30}{3x+10}$	$\frac{3(3x+10)}{x+10}$	$\frac{19x+90}{x+30}$	$\frac{3(7x+50)}{50-x}$	$\frac{6(10-x)}{10+x}$
$\frac{7(10-x)}{2(5+x)}$	$\frac{8(10-x)}{10+3x}$	$\frac{9(10-x)}{2(5+2x)}$	$\frac{150-11x}{x+30}$	$\frac{2(18-x)}{x+6}$
$\frac{70-3x}{3x+10}$	$\frac{8(30-x)}{13x+30}$	$\frac{270-7x}{17x+30}$	$\frac{50-x}{10+x}$	$\frac{2(x+30)}{3x+10}$
$\frac{x+14}{x+2}$	$\frac{8(x+10)}{7x+10}$	$\frac{11x+90}{9x+10}$	$\frac{7x+50}{3x+10}$	$\frac{6(3x+10)}{7x+10}$
$\frac{29x+70}{11x+10}$	$\frac{8(x+2)}{3x+2}$	$\frac{3(17x+30)}{19x+10}$	$\frac{16x}{x+6}$	$\frac{19x+10}{x+10}$

Координатная наметка должна быть заранее приготовлена самим учащимся и проверена преподавателем на предыдущем уроке (для чего потребуется 2—3 минуты). Наметка имеет вид квадрата со стороной в 20 клеток, что при масштабе «1 = 2 клеткам» составляет 10 единиц. Основной квадрат разделен на $5 \times 5 = 25$ меньших квадратов со сторонами по 4 клетки, т. е. по 2 единицы. Прямые линии следует проводить карандашом по линейке, без нажима. Поставить у левой нижней вершины основного квадрата O, вправо x, вверх y; сделать в обе стороны координатные пометки 0, 2, 4, 6, 8 и 10.

Пример (образец) одной числовой подстановки, включая обращение дроби в приближенную десятичную, должен быть четко написан на доске преподавателем (после раздачи карточек) и оставаться в течение всего урока.

Если работа заканчивается учащимся раньше конца урока (45 минут), то преподаватель пишет на ней, сколько минут потребовалось для ее выполнения.

Контроль нимало не затруднителен для преподавателя: достаточно проверить «гладкость» кривой и учесть то обстоятельство, что во всех вариантах значения y при x, равном 0 и 10, — целые, а при x, равном 2, получается значение $y = 4$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

Глава I. Буквенные выражения 15

§ 1. Употребление букв. Составление формул ..... —
§ 2. Подстановка числовых значений в формулу и составление таблиц по формуле 21
§ 3. Словесное чтение формул и запись их под диктовку 24
§ 4. Уравнения 27
§ 5. Решение уравнений применением свойств арифметических действий 29
§ 6. Решение задач при помощи уравнений 32
Повторительные упражнения к главе I 34

Глава II. Простейшие графические представления. Прямая и обратная пропорциональность 38

§ 7. Сравнение величин и изображение их отрезками. —
§ 8. Отношение чисел 42
§ 9. Прямая пропорциональность 44
§ 10. Обратная пропорциональность 48
§ 11. Графическое представление зависимости между величинами 52
§ 12. Пропорциональное деление. Прямоугольные и секторные диаграммы 54
Повторительные упражнения к главе II 57

Глава III. Свойства арифметических действий. Равенства и неравенства 61

§ 13. Сложение ..... —
§ 14 Вычитание 64
§ 15. Умножение 66
§ 16. Деление 70
§ 17. Все действия 74
§ 18 Равенства и неравенства ..... —
§ 19. Основные свойства равенств и неравенств 77
§ 20. Числовой луч 79
§ 21. Координатный угол 82
Повторительные упражнения к главе III 84

Глава IV. Положительные и отрицательные числа 87

§ 22. Числовая прямая (ось) ..... —
§ 23. Сложение положительных и отрицательных чисел 92
§ 24. Вычитание положительных и отрицательных чисел 96
§ 25. Умножение положительных и отрицательных чисел 101
§ 26. Деление положительных и отрицательных чисел 106
§ 27. Все действия с положительными и отрицательными числами 108
§ 28. Координатная плоскость 110
Повторительные упражнения к главе IV 113

Глава V. Тождественные преобразования (I) 115

§ 29. Коэффициент и показатель степени. Одночлены и многочлены ..... —
§ 30. Возведение в степень 120
§ 31. Умножение одночленов 122
§ 32. Сложение и вычитание одночленов 123
§ 33. Сложение и вычитание многочленов 127
§ 34. Умножение многочлена на одночлен 129
§ 35 Буквенные подстановки 131
Повторительные упражнения к главе V 139

Глава VI. Решение линейных уравнений и текстовых задач 138

§ 36. Тренировка ..... —
§ 37. Дальнейшие свойства равенств 140

§ 38. Основной прием решения уравнений 142
§ 39. Решение задач посредством уравнений 148
§ 40. Уравнения, имеющие вид пропорции 152
Повторительные упражнения к главе VI 153

Глава VII. Тождественные преобразования (II) 156

§ 41. Умножение многочлена на многочлен ..... —
§ 42. Квадрат суммы и разности 159
§ 43. Произведение суммы на разность 162
§ 44. Куб суммы и разности 163
§ 45. Разность и сумма кубов 166
§ 46. Деление на одночлен 167
§ 47. Разложение многочлена на множители 168
§ 48. Выделение квадрата из трехчлена 171
Повторительные упражнения к главе VII 172

Глава VIII. Расположенные многочлены 175

§ 49. Многочлены с одной буквой ..... —
§ 50. Десятичная система счисления 182
§ 51. Задачи на делимость 185
§ 52. Деление многочленов 188
§ 53. Разложение многочленов на множители 192
§ 54. Многочлены с двумя буквами 194
§ 55. Буквенные коэффициенты 197
Повторительные упражнения к главе VIII 202

Глава IX. Алгебраические уравнения и их геометрическое истолкование 205

§ 56. Уравнение с одной буквой (неизвестным) ..... —
§ 57. Уравнение с двумя буквами (переменными) 208
§ 58. Линейное уравнение с двумя переменными 214
§ 59. Нелинейные уравнения с двумя переменными .. 222
Повторительные упражнения к главе IX 230

Глава X. Алгебраические дроби 232

§ 60. Общие замечания о дробях ..... —
§ 61. Умножение и деление дробей 238
§ 62. Сложение и вычитание дробей 242
§ 63. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) 246

§ 64. Более сложные случаи сложения и вычитания дробей 249
§ 65. Сложные дроби 253
§ 66 Все действия с дробями 255
§ 67. Расположенные многочлены в числителе и знаменателе дроби. Выделение целой части из неправильной дроби 259
§ 68. Вынесение за скобки каких угодно выражений 261
Повторительные упражнения к главе X 263

Глава XI. Системы уравнений 270

§ 69. Основные понятия ..... —
§ 70. Линейные системы. Способ подстановки 272
§ 71. Способ уравнивания коэффициентов 276
§ 72. Особенные случаи 280
§ 73. Геометрическое представление решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. 282
§ 74. Примеры и задачи 285
§ 75. Общие соображения по поводу решения систем уравнений 288
§ 76. Исключение буквы из двух уравнений 293
Повторительные упражнения к главе XI 295

Глава XII. Квадратные и кубические корни. Приближенное решение уравнений с числовыми коэффициентами 300

§ 77. Корни (арифметические) ..... —
§ 78. Извлечение корней непосредственно и с помощью таблиц 306
§ 79. Понятие об алгебраических корнях 309
§ 80. Нахождение промежуточных значений по таблице 310
§ 81. Употребление таблиц при решении простейших геометрических задач 314
§ 82. Приближенное определение корней уравнения . 317
§ 83. Применение радикалов к решению квадратных уравнений с числовыми коэффициентами 319
§ 84. Некоторые действия с радикалами 323
Повторительные упражнения к главе XII 327
Общие повторительные упражнения 328
Таблица корней квадратных 348
Таблица корней кубических 349

Неполная запись и округление чисел 350
Методические указания 351
Общие положения и предупреждения ..... —
Глава I. Буквенные выражения 355
Глава II. Простейшие графические представления. Прямая и обратная пропорциональность 363
Глава III. Свойства арифметических действий. Равенства и неравенства 367
Глава IV. Положительные и отрицательные числа 374
Глава V. Тождественные преобразования (I) 380
Глава VI. Решение линейных уравнений 384
Глава VII. Тождественные преобразования (II) 388
Глава VIII. Расположенные многочлены 392
Глава IX. Алгебраические уравнения и их геометрическое истолкование 401
Глава X. Алгебраические дроби 408
Глава XI. Системы уравнений 416
Глава XII. Квадратные и кубические корни. Приближенное решение уравнений с числовыми коэффициентами 424
Общие повторительные упражнения..... 431
Примерные тексты контрольных работ (по главам) 437

Василий Леонидович Гончаров

НАЧАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

Редакторы Л. А. Коптекова и Г. Г. Гуськов
Худож. редактор Т. И. Добровольнова
Техн. редактор В. В. Тарасова
Корректор Н. М. Нагайцева

Сдано в набор 4/I 1960 г. Подписано к печати 20/VII 1960 г.
Формат 84×108¹/₃₂ Бум. л. 7,06 Печ. л. 28,25 Усл. п. л. 23,17
Уч.-изд. л. 23,53 А 06974 Тираж 38300 Зак. 1322

Изд.-во АПН РСФСР. Москва, Погодинская ул., 8.
Набрано в типографии Металлургиздата
Москва, Цветной бульвар, 30.
Отпечатано в типографии, Москва, ул. Фр. Энгельса, 46.
Цена 7 р. 35 к. с 1/I 1961 г. цена 74 к.