Die Geschichte der alternierenden Vorzeichenmatrix Vermutung

Ilse Fischer

Universität Wien

Abzählen!

- # der Permutationen von $1, 2, \ldots, n = n!$
- # der Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\} = 2^n$
- # der k-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Alternierende Vorzeichenmatrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quadratische Matrizen mit 0ern, 1ern und -1ern, sodass

- Zeilen- und Spaltensummen 1 ergeben
- 1er und -1er in jeder Zeile und Spalte alternieren.

Jede Permutationsmatrix ist eine AVM!

Satz (Zeilberger 1996). Die Anzahl der $n \times n$ alternierenden Vorzeichenmatrizen beträgt

$$\prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}.$$

“These conjectures are of such compelling simplicity that it is hard to understand how any mathematician can bear the pain of living without understanding why they are true.

- David Robbins (1991)

Dodgson's Algorithmus zur Berechnung von Determinanten.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} -8 \end{pmatrix} \qquad B^{(3)} = ()$$

$$\det A = -8$$

Regel:

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(k+1)} &= \frac{1}{b_{i,j}^{(k)}} \det \begin{pmatrix} a_{i,j}^{(k)} & a_{i,j+1}^{(k)} \\ a_{i+1,j}^{(k)} & a_{i+1,j+1}^{(k)} \end{pmatrix} \\ b_{i,j}^{(k+1)} &= a_{i+1,j+1}^{(k)} \end{aligned}$$

λ-Determinante:

$$\det_\lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} + \lambda a_{1,2}a_{2,1}$$

Mittels Dodgson's Algorithmus Erweiterung der λ-Determinante auf quadratische Matrizen beliebiger Dimension.

Es gilt: $\det_{-1} = \det$

3×3 λ-Determinante:

$$\det_{1\le i,j\le 3}(a_{i,j}) = a_{11}a_{22}a_{33} + \lambda a_{12}a_{21}a_{33} + \lambda a_{11}a_{23}a_{32} \\ + \lambda^2 a_{13}a_{21}a_{32} + \lambda^2 a_{12}a_{23}a_{31} + \lambda^3 a_{13}a_{22}a_{31} \\ + \lambda^3(1+\lambda^{-1})a_{12}a_{21}a_{23}a_{32}/a_{22}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Satz (Robbins, Rumsey 1986). Es sei M eine $n \times n$ Matrix mit Eintragungen $m_{i,j}$, $\mathcal{A}_n$ die Menge der $n \times n$ alternierenden Vorzeichenmatrizen, $\mathcal{I}(A)$ die Inversionszahl von A und $N(A)$ die Anzahl der -1er in A, dann gilt

$$\det_\lambda(m_{i,j}) = \sum_{A \in \mathcal{A}_n} \lambda^{\mathcal{I}(A)}(1+\lambda^{-1})^{N(A)} \prod_{i,j=1}^{n} m_{i,j}^{A_{i,j}}.$$

$\lambda = -1$:

$$\det_{1 \le i,j \le n}(m_{i,j}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}$$

$$= \sum_{P \in \mathcal{P}_n} (-1)^{\mathcal{I}(P)} \prod_{i,j=1}^{n} m_{i,j}^{P_{i,j}}.$$

Robbins: Wieviele alternierende Vorzeichenmatrizen mit fixer Dimension n gibt es?

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040
A_n	1	2	7	42	429	7436	218348

Quotientenbildung: $Q_n^{(1)} = A_{n+1}/A_n, Q_n^{(2)} = Q_{n+1}^{(1)}/Q_n^{(1)}$

$$Q_n^{(2)} = \frac{(n+1)(3n+2)(3n+3)(3n+4)}{(2n+1)(2n+2)^2(2n+3)}$$

Zusätzlicher Parameter: Es gibt genau einen 1er in der ersten Zeile einer alternierenden Vorzeichenmatrix. k sei die Spalte dieses 1ers.

$A_{n,k}$ = # der $n \times n$ alternierenden Vorzeichenmatrizen, mit dem 1er in der ersten Zeile in der k-ten Spalte.

Es gilt: $A_n = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}$ und $A_{n,1} = A_{n-1}$

Vermutung 1 (Mills, Robbins, Rumsey 1983).

$$\frac{A_{n,k}}{A_{n,k+1}} = \frac{\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n-2}{n-k-1} + \binom{n-1}{n-k-1}} = \frac{k(2n-k-1)}{(n-k)(n+k-1)}.$$

Vermutung 2 (Mills, Robbins, Rumsey 1983).

$$A_{n,k} = \binom{n+k-2}{k-1} \frac{(2n-k-1)!}{(n-k)!} \prod_{j=0}^{n-2} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}.$$

Bewiesen von Zeilberger (1996).

Mathematicians often recognize truth without knowing how to prove it. Confirmations come in many forms. Proof is only one of them. But knowing something is true is far from understanding why it is true and how it connects to the rest of what we know. The search for proof is the first step in the search of understanding.

I can best illustrate my point by describing real mathematics. I shall do so with a story of recent discoveries at the boundary of algebra and combinatorics, the story of the alternating sign matrix conjecture proposed by William Mills, David Robbins and Howard Rumsey. For fifteen years this conjecture was known to be true. It was validated in many ways: in the surprising simplicity of its formulation, by numerical verification of the first twenty cases, through unanticipated implications that could be proven. But none of this was proof. When a proof finally was found in 1995, it lay in unexpected territory and revealed a host of new insights and engaging problems.

- David Bressoud (1999)

Plane Partitions

$$\begin{array}{cccccc} 6 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 3 & 1 & \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 1 & \\ 4 & 2 & 2 & 1 & & \\ 3 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \end{array}$$

Plane Partition von 75 der Form $(6,5,5,4,3,3)$.

Zweidimensionales Feld ganzer Zahlen mit monoton fallenden Zeilen und Spalten.

Anzahl der Plane Partitions in einer $a \times b \times c$-Box:

$$\prod_{i=1}^{a} \prod_{j=1}^{b} \prod_{k=1}^{c} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

Descending Plane Partitions

$$\begin{array}{ccccc} 6 & 6 & 6 & 5 & 5 \\ & 5 & 4 & 2 & \\ & & 3 & & \end{array}$$

• Shifted Form, Zeilen schwach fallend, Spalten streng fallend.

• Die Anzahl der Teile in jeder Zeile ist kleiner als das grösste Element in dieser Zeile und grösser oder gleich dem grössten Element in der nächsten Zeile.

George Andrews 1979: Die Anzahl der descending Plane Partitions mit Teilen $\le n$ beträgt

$$\det_{1\le i,j\le n-1}\left(\delta_{ij}+\binom{i+j}{j-1}\right)=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{(3j+1)!}{(n+j)!}.$$

Finde Bijektion zwischen alternierenden Vorzeichenmatrizen und descending Plane Partitions!

Suche nach Statistiken, die dieselbe Verteilung haben...

Vermutung (Mills, Robbins, Rumsey 1982).
$A_{n,k,m,p}$ = # der $n \times n$ alternierenden Vorzeichenmatrizen, wobei k die Position des 1ers in der ersten Zeile ist, m die Anzahl der -1er und p die Anzahl der Inversionen der Matrix.

$D_{n,k,m,p}$ = # der descending Plane Partitions $(a_{i,j})$, wobei alle Teile $\leq n$, genau $k-1$ Teile gleich n, m Teile mit $a_{i,j} \leq j-i$ und insgesamt p Teile.

Dann gilt $A_{n,k,m,p} = D_{n,k,m,p}$.

Satz (Mills, Robbins, Rumsey 1982). Die erzeugende Funktion von descending Plane Partitions mit Teilen $\le n$ bezüglich der Summe der Teile beträgt

$$\prod_{1 \le i \le j \le n} \frac{1 - q^{r+i+j-1}}{1 - q^{2i+j-1}}.$$

Satz (Mills, Robbins, Rumsey 1982). Die erzeugende Funktion von zyklisch-symmetrischen PPs in einer $n \times n \times n$-Box beträgt

$$\prod_{\eta \in B(n,n,n)/\mathcal{C}_3} \frac{1 - q^{|\eta|(1+\mathrm{ht}(\eta))}}{1 - q^{|\eta|\,\mathrm{ht}(\eta)}}.$$

Satz (Andrews 1994). Die Anzahl der total symmetrischen selbst-komplementären Plane Partitions in einer $2n \times 2n \times 2n$-Box beträgt

$$\prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}.$$

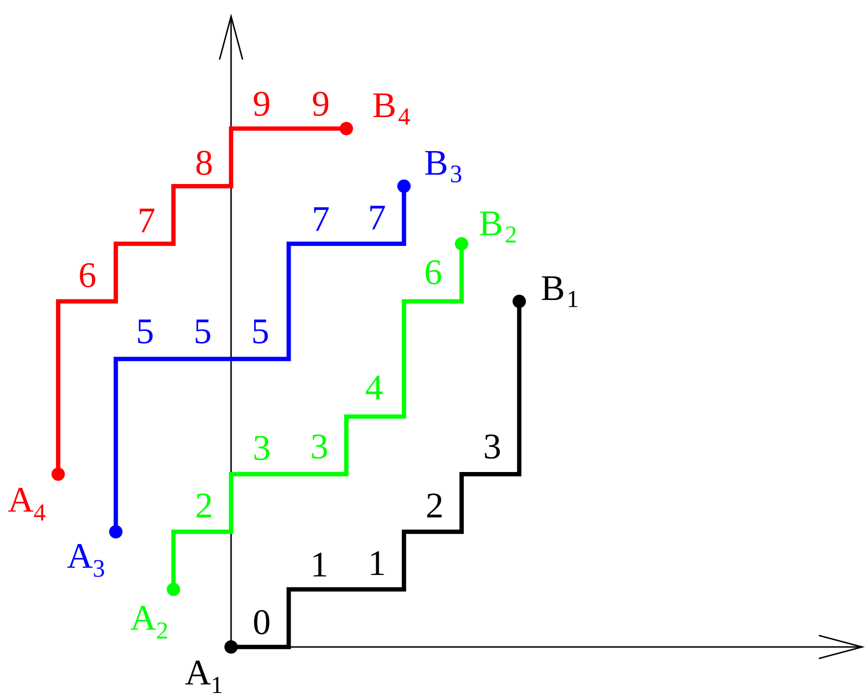
Satz (Kuperberg 1994). Die Anzahl der zyklisch symmetrischen selbst-komplementären Plane Partitions in einer $2n \times 2n \times 2n$-Box beträgt

$$\left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}\right)^2.$$

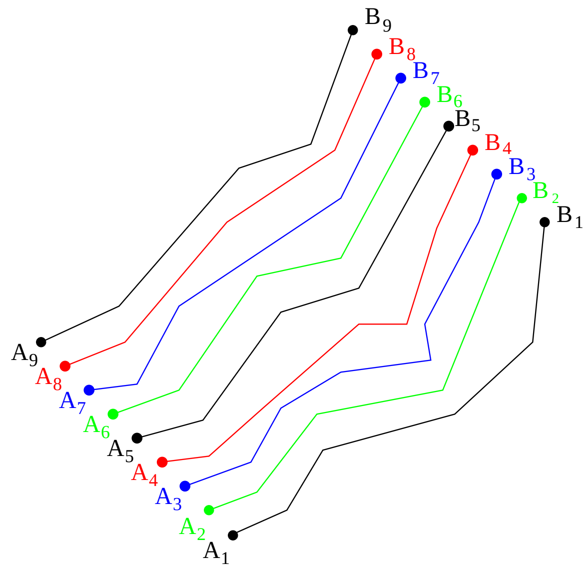
Plane Partitions in einer $a \times b \times c$ Box

$$a\left\{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 6&6&5&4&3\\ \hline 5&5&3&3&3\\ \hline 5&3&2&2&1\\ \hline 3&2&1&1&0\\ \hline\end{array}}_{b}\right.\begin{array}{l}+3\\+2\\+1\\ \end{array}\longrightarrow\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 9&9&8&7&6\\ \hline 7&7&5&5&5\\ \hline 6&4&3&3&2\\ \hline 3&2&1&1&0\\ \hline\end{array}$$

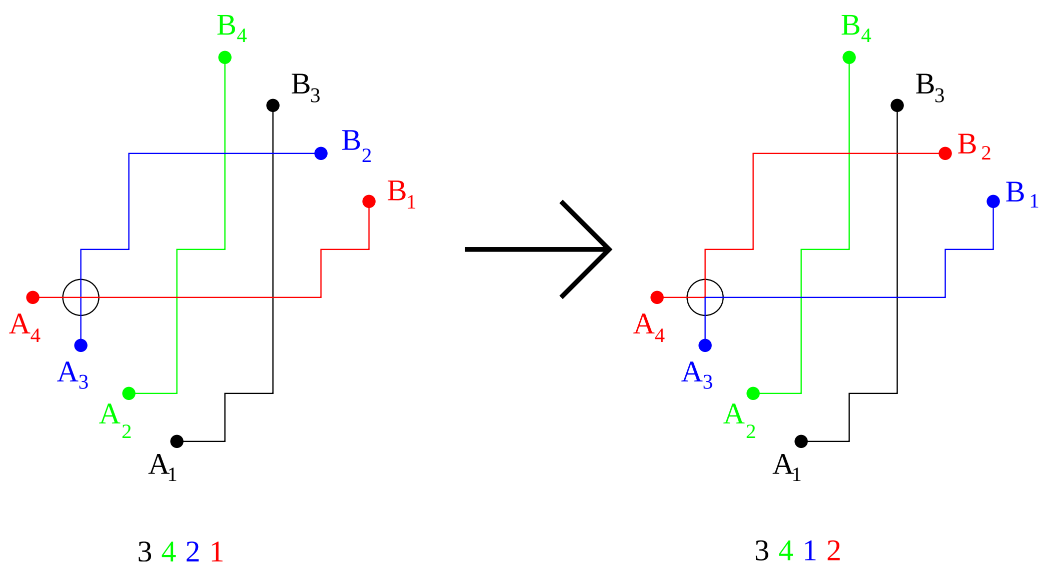
Nichtüberschneidende Gitterpunktwege



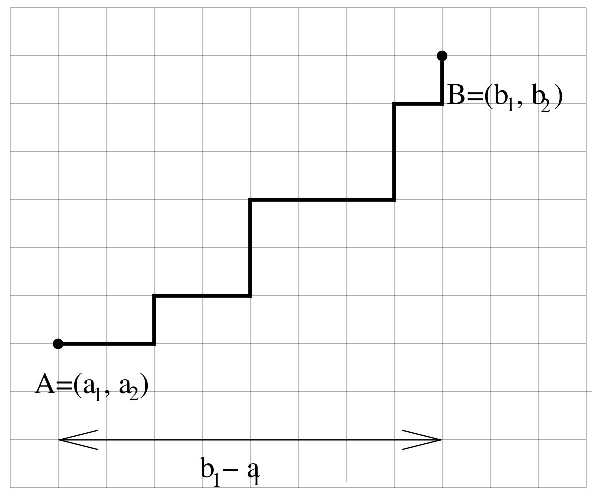
Müssen Familien von nichtüberschneidenden Gitterpunktwegen abzählen!



$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_a} (\operatorname{sgn} \sigma) P(A_1 \to B_{\sigma(1)}) P(A_2 \to B_{\sigma(2)}) \dots P(A_a \to B_{\sigma(a)})$$
$$= \det_{1 \le i,j \le a} P(A_i \to B_j)$$



- $P(A \to B) = \binom{b_1+b_2-a_1-a_2}{b_1-a_1}$



- $A_i = (-i, i), B_i = (b-i, c+i), i = 1, 2, \ldots, a.$

Anzahl der Plane Partitions in einer $a \times b \times c$-Box:

$$\det_{1 \le i,j \le a} \binom{b+c}{b-i+j} = \prod_{i=1}^{a} \prod_{j=1}^{b} \frac{c+i+j}{i+j}.$$

Berechnung der Determinante

Krattenthaler's Determinantenformel

$$\det_{1\le i,j\le n}\left((x_i+a_n)\dots(x_i+a_{j+1})(x_i+b_j)\dots(x_i+b_2)\right)=$$

$$\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)\prod_{2\le i\le j\le n}(b_i-a_j)$$

$$\det_{1\le i,j\le a}\left(\binom{b+c}{b-i+j}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^{a}\frac{(b+c)!}{(b-i+a)!(c+i-1)!}\\
&\quad\times\det_{1\le i,j\le a}\big((b-i+a)(b-i+a+1)\cdots(b-i+j+1)\\
&\qquad (c+i-j+1)(c+i-j+2)\cdots(c+i-1)\big)\\
&= \prod_{i=1}^{a}\frac{(b+c)!}{(b-i+a)!(c+i-1)!}\\
&\quad\times\det_{1\le i,j\le a}\big((i-b-a)(i-b-a+1)\cdots(i-b-j-1)\\
&\qquad (i+c-j+1)(i+c-j+2)\cdots(i+c-1)\big)
\end{aligned}$$

Setze $X_i=i$, $A_j=-b-j$, $B_j=c-j+1$.

AVMs $\Leftrightarrow$ Monotone Dreiecke

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & 3 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 5 & & \\ & 1 & & 2 & & 4 & & 5 & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \end{array}$$

Gog – Magog

(n, k)-Magog Trapezoid (TSSCPP)

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 3 & 5 & \\
1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 5
\end{array}$$

Zeilen und Spalten monoton steigend, Einträge in der j-ten Spalte $\leq j$, n Spalten, k Zeilen.

(n, k)-Gog Trapezoid (AVM)

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & 4 & & \\
 & & & & 4 & & 5 & \\
 & & & 3 & & 5 & & 6 \\
 & & 2 & & 4 & & 5 & \\
 & 1 & & 3 & & 4 & & \\
1 & & 2 & & 3 & & &
\end{array}$$

Zeilen strikt steigend, NO-Diagonalen und SO-Diagonalen schwach steigend, Einträge in der j-ten SO-Diagonale $\leq j$, n Zeilen, k NO-Diagonalen.

Zeilbergers Beweis (1992 - 1995)

Anzahl der (n,k)-Magog Trapezoide = konstanter Term von

$$\frac{\prod_{i=1}^{k}(1-2x_i)\prod_{1\le i<j\le k}(x_j-x_i)(x_j+\overline{x_i})}{\prod_{i=1}^{k}x_i^{n+k-i-1}\overline{x_i}^{n+k+1}\prod_{1\le i<j\le k}(1-x_ix_j)},$$

wobei $\overline{x_i}=1-x_i$.

Anzahl der (n,k)-Gog Trapezoide = konstanter Term von

$$(-1)^k\frac{\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{S}_k\\ S\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}}(-1)^{\mathcal{I}(\sigma)+|S|}g_{\sigma,S}\left(\prod_{i=1}^{k}\overline{x}_i^{k-i}x_i^k\prod_{1\le i<j\le k}(1-x_i\overline{x}_j)(1-\overline{x}_i\overline{x}_j)\right)}{\prod_{i=1}^{k}x_i^n\overline{x}_i^{n+i+1}\prod_{1\le i<j\le k}(1-x_ix_j)(1-\overline{x}_ix_j)},$$

wobei $g_{\sigma,S}$ alle x_i mit $i\in S$ durch $\overline{x}_i$ ersetzt und danach jedes x_i durch $x_{\sigma(i)}$.

Kuperbergs Durchbruch (1996)

Entdeckt, dass in der statistischen Mechanik Objekte – "ebenes Eis" – betrachtet werden, die zu AVMs äquivalent sind.

J. W. Gibbs, "Elementary Principles in Statistical Mechanics": Freie Energie eines Systems von sich beeinflussenden Teilchen

$$F = -k\,T\,\log(Z),$$

wobei k die Boltzmann Konstante ist und T die Temperatur.

Partition function:

$$Z = \sum_s e^{-E(s)/kT},$$

wobei die Summe über alle Energiezustände s geht, $E(s)$ die Energie im Zustand s ist.

Izergins and Korepins Resultate für "ebenes Eis"

Gewichte = Exponentielle Energie:

horizontales H_2O: z, vertikales H_2O: z^{-1}

südwest und nordost: $\frac{az-(az)^{-1}}{a-a^{-1}}$

südost und nordwest: $\frac{z-z^{-1}}{a-a^{-1}}$ =: $[z]$

Mehr Parameter: z in der i-ten Zeile und j-ten Spalte durch x_i/y_j ersetzen.

Partition function für "ebenes Eis":

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i/y_i \prod_{1 \le i,j \le n} [x_i/y_j][ax_i/y_j]}{\prod_{1 \le i < j \le n} [x_i/x_j][y_j/y_i]} \det M$$

wobei M die $n \times n$ Matrix ist mit Eintragungen

$$M_{i,j} = \frac{1}{[x_i/y_j][ax_i/y_j]}.$$

Literatur:

David Bressoud

"Proofs and Confirmations, The story of the Alternating Sign Matrix Conjecture"

Cambridge University Press, 1999.