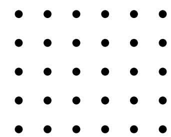
Die Mathematik des Käse-Kästchen-Spiels

Ilse Fischer

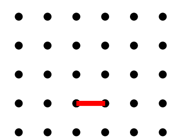
Universität Wien

Spielregeln

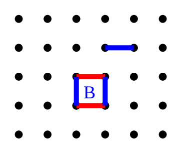
Zwei Spieler beginnen mit einer rechteckigen Anordnung von Punkten.



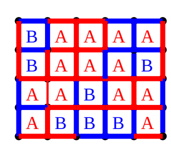
Ein Zug besteht darin, zwei horizontal oder vertikal benachbarte Punkte durch einen Strich zu verbinden.



Hat eine Spielerin bei ihrem Zug ein Einheitsquadrat vollendet, so kennzeichnet sie dieses Kästchen und macht einen weiteren Strich.



Das Spiel ist zu Ende, wenn alle Kästchen vollendet sind, und die Siegerin ist die mit den meisten Kästchen.

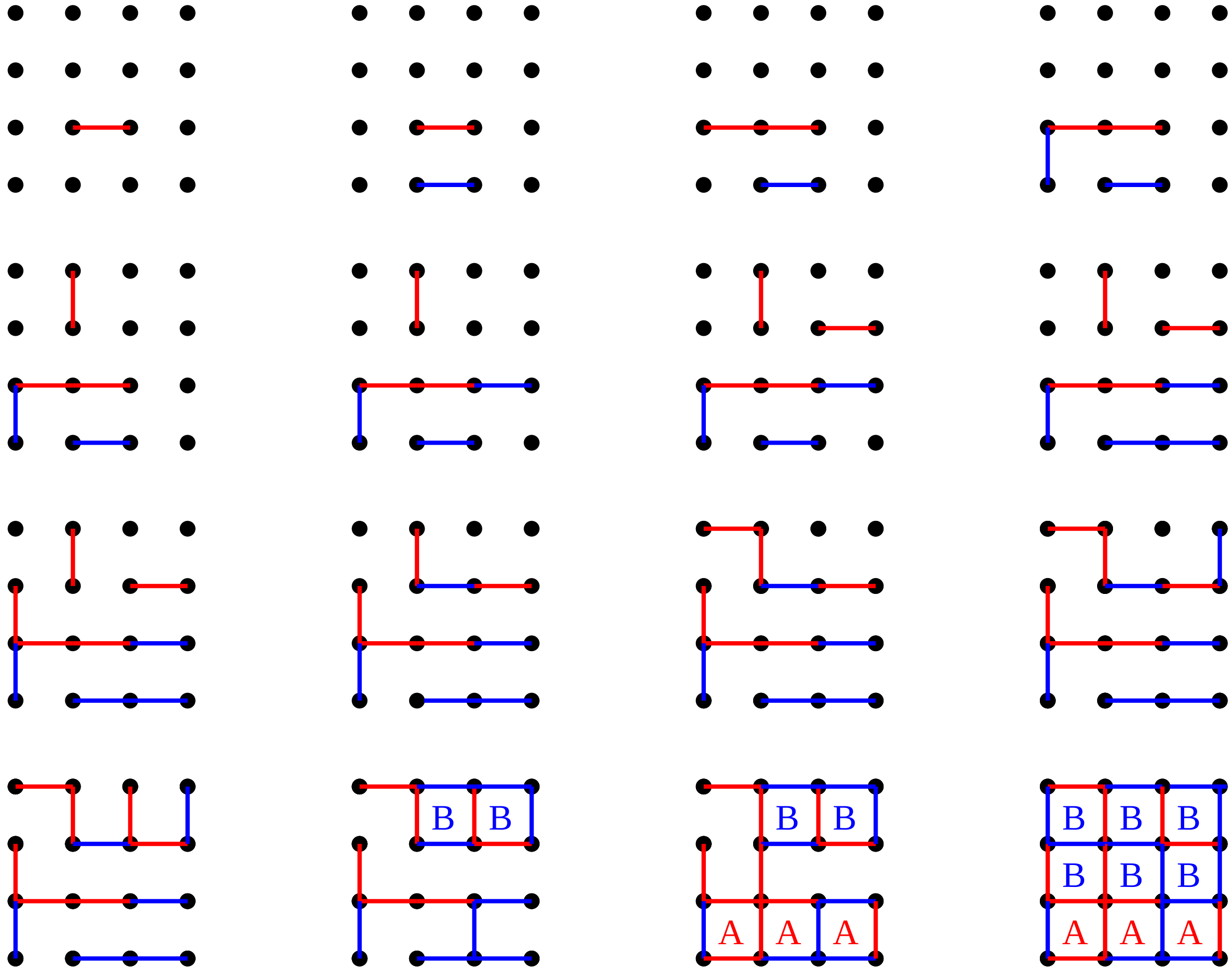


Was wird in diesem Vortrag geboten ?

NICHT geboten wird eine vollständige Analyse des Spiels, die eine sichere Gewinnstrategie erlaubt, weil sowas gibt es noch (?) gar nicht!

Dafür aber gewisse Einsichten, die helfen können, das Spiel zu gewinnen, vorallem wenn der Gegner diese Einsichten nicht hat.

Ein Beispiel



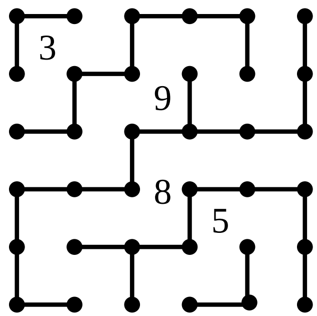
Strategie in diesem Beispiel

Man fügt solange zufällig Striche hinzu, bis jeder weitere Zug eine Kette von Kästchen ermöglicht.

Danach eröffnet jene Spielerin, die gerade am Zug ist, die kürzeste Kette und überlässt diese damit dem Gegenspieler, der sie vollendet und seinerseits mit dem letzten Strich des Zuges die nächstlängste Kette für die Spielerin eröffnet...

$$B \; : \; 2+4$$
$$A \; : \; 3$$

Anderes Beispiel



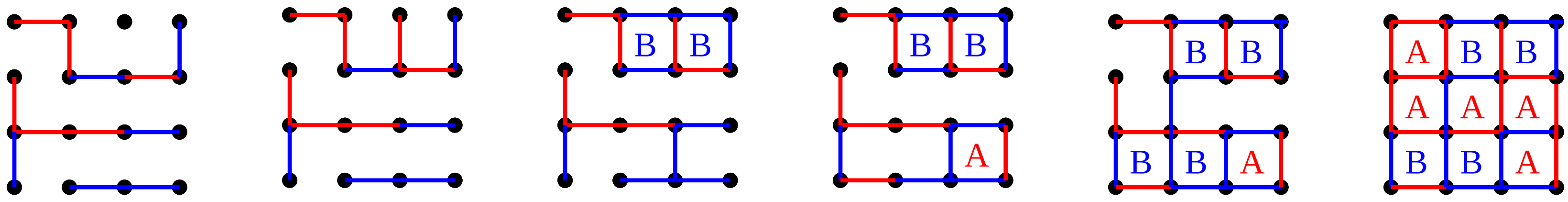
$$B : 3 + 8$$
$$A : 5 + 9$$

Allgemein: Angenommen es gibt r Ketten mit jeweiligen Längen $l_1, l_2, \ldots, l_r$, sodass $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_r$ und Spieler A eröffnet die erste Kette. Dann gilt:

$$B : l_1 + l_3 + \ldots$$
$$A : l_2 + l_4 + \ldots$$

In den meisten Fällen gewinnt in diesem Fall Spieler A. Insbesondere wenn beispielsweise r gerade und nicht alle Ketten gleich lang sind.

Spieler A kanns aber besser machen:

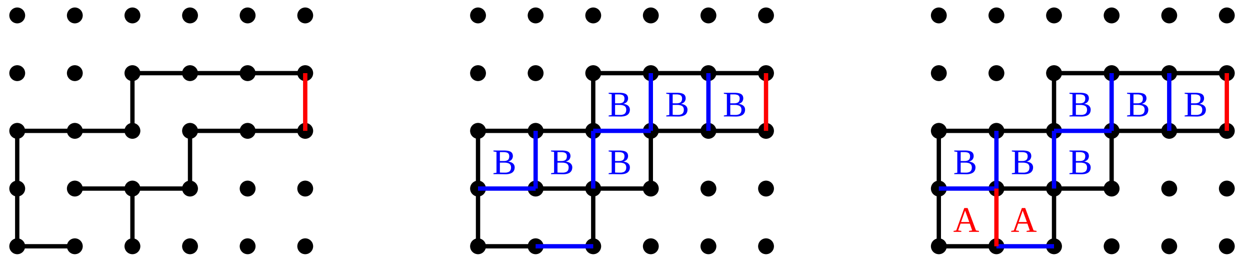


$$B \;:\; 2 + 2$$

$$A \;:\; (3 - 2) + 4$$

Spieler A gewinnt!

Doppelzüngigkeit führt zu Fallen-Zügen



...und Spieler A muss wieder die nächste Kette eröffnen.

Das geht immer bei Ketten der Länge ≥ 3.

Anstatt die Kette zu vervollständigen, überlässt man dem anderen Spieler die letzten beiden Kästchen. Die nimmt er dann und muss aber mit dem nächsten Strich eine neue Kette eröffnen, die man dann selbst vervollständigen kann.

Strategie

Annahmen: Nach der ersten Phase des Spiels hat Spieler A bisher a Kästchen und Spielerin B bisher b Kästchen bekommen. Es sind r Ketten der Länge $l_1, l_2, \ldots, l_r$ mit $3 \leq l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_r$ übriggeblieben. Spieler A ist am Zug.

Dann gilt: Spielerin B kann erreichen, dass das Spiel nicht schlechter als

$$\begin{array}{lcl} B & : & b + (l_1 - 2) + (l_2 - 2) + \ldots + (l_{r-1} - 2) + l_r \\ A & : & a + 2 \cdot (r - 1) \end{array}$$

für sie ausgeht. Wenn daher

$$b + l_1 + l_2 + \ldots + l_r > a + 4 \cdot (r - 1),$$

dann kann Spielerin B gewinnen.

Legt folgende Vorgehensweise nahe:

Man sichere die Existenz von langen Ketten, und versuche, den Gegner dazu zu bringen, als Erster eine solche zu eröffnen. (Wir sagen: Jede, die ihren Gegner dazu bringt, eine lange Kette zu eröffnen, hat das Spiel unter Kontrolle.)

Hat man die Kontrolle über das Spiel, so sichere man sie auch weiterhin, indem man von jeder Kette, bis auf die letzte, 2 Kästchen zurückweist.

In Wirklichkeit wird also um die Kontrolle gekämpft!

Bei obiger Strategie hat die Spielerin, die den letzten Zug macht, die Kontrolle. Der erste Spieler möchte daher, dass es eine ungerade Anzahl von Zügen gibt, die zweite Spielerin möchte, dass es eine gerade Anzahl von Zügen gibt.

Satz.
Anzahl der Züge $=$ Anzahl der Punkte $+$ Anzahl der Fallen-Züge

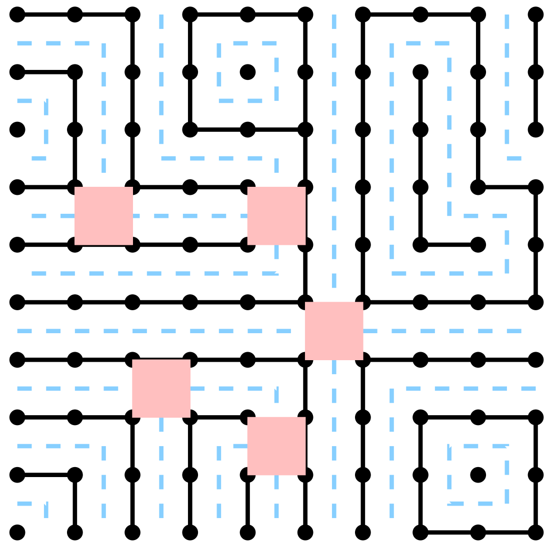
Beweis:
$z =$ Anzahl der Züge, $p =$ Anzahl der Punkte, $f =$ Anzahl der Fallen-Züge
Zu zeigen: $z = p + f$
Hilfsgrößen: $s =$ Anzahl der Striche, $k =$ Anzahl der Kästchen
Dann gilt:

$$z = s - (k - 1 - f) = s - k + 1 + f = p + f$$

$\square$

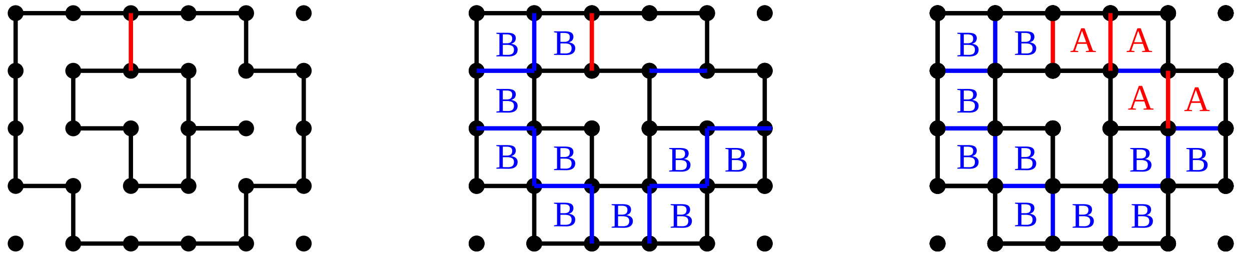
Bei Spielen, in den es nach der ersten Phase nur Ketten der Länge ≥ 3 gibt, ist $f =$(Anzahl der Ketten -1). Daher will Spieler A, dass ($p+$ Anzahl der Ketten) gerade ist.

Es müssen nicht nur Ketten sein...



Das ist eine Situation, in der jeder weitere Zug zumindest ein Kästchen für die Gegnerin eröffnet.

Doppelzüngigkeit bei Kreisen



...und Spieler A muss wieder die nächste Kette bzw. Kreis eröffnen.

Bei Kreisen muss man dem Gegner 4 Kästchen überlassen, um die Kontrolle zu behalten.

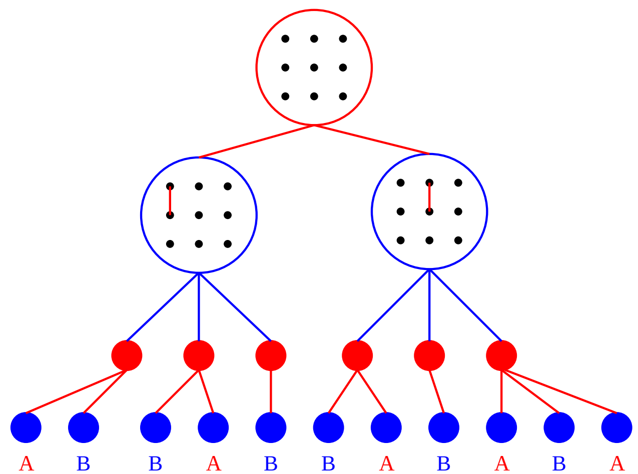
Ketten der Länge 2

Eröffnet man eine Kette der Länge 2, so hat man entweder die Möglichkeit die Kontrolle zu bekommen und dafür zwei Kästchen zu verlieren (hartherzige Almosen)

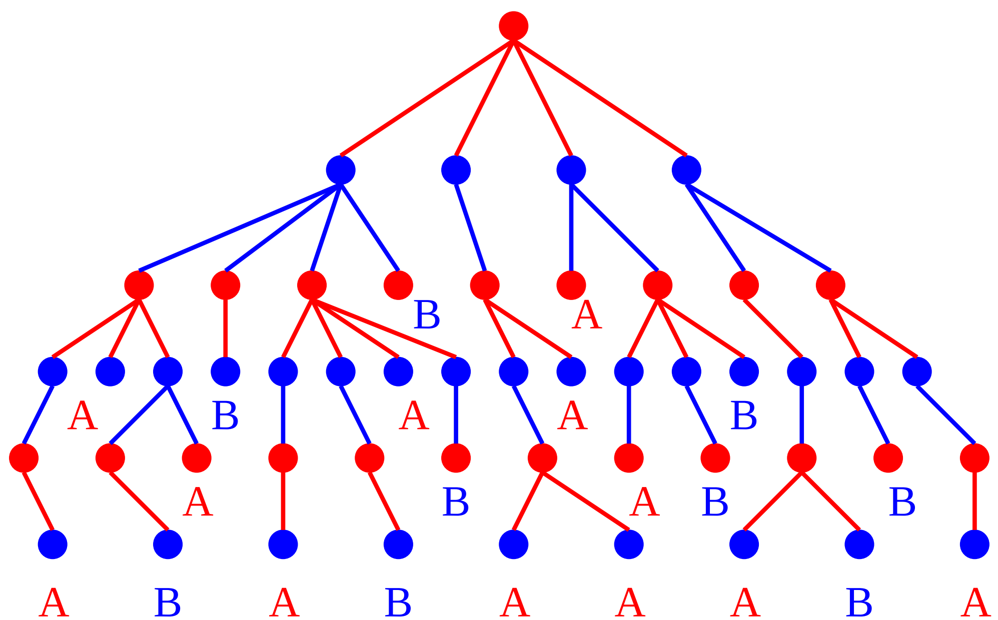
oder der Gegnerin die Entscheidung zu überlassen, ob sie die Kontrolle oder zwei Kästchen nimmt. (halbherzige Almosen)

Satz. Bei vorgegebenem Spielfeld gibt es entweder für Spieler A eine Strategie, bei der er zumindest ein Unentschieden erreicht oder für Spielerin B eine Strategie bei der sie gewinnt.

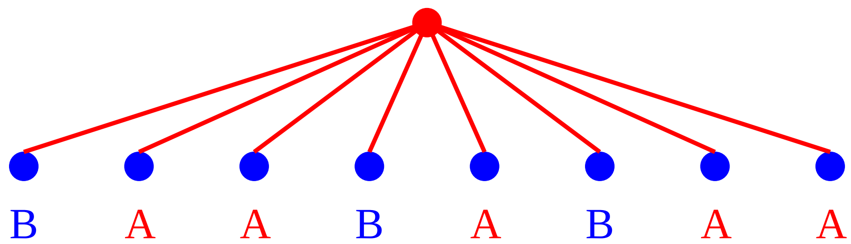
Beweis: Spielbaum



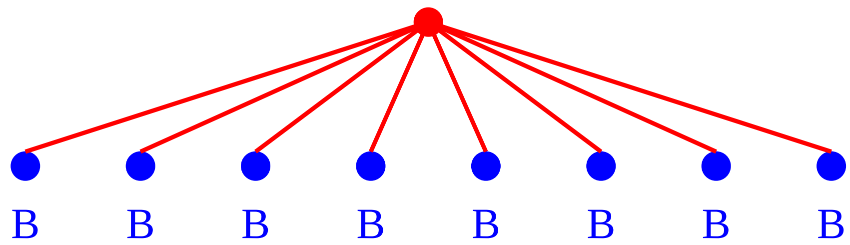
Komplizierter...



Spielbäume der Höhe 1

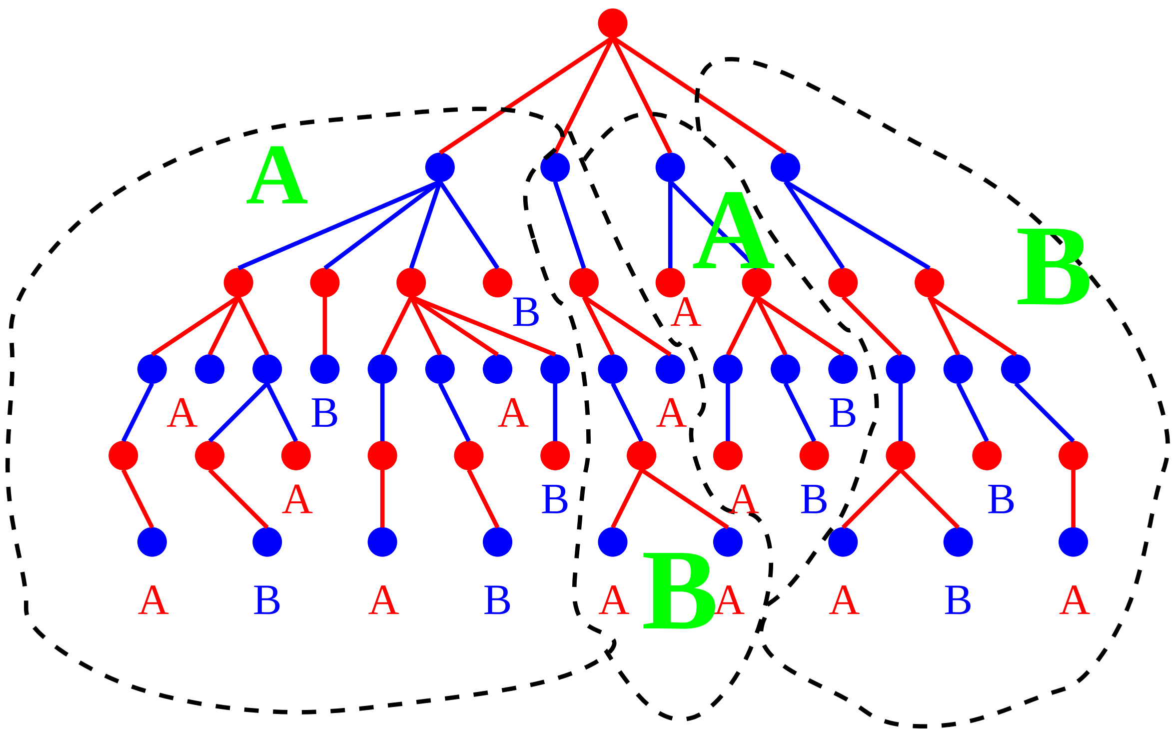


Hier hat Spieler A eine Gewinnstrategie...

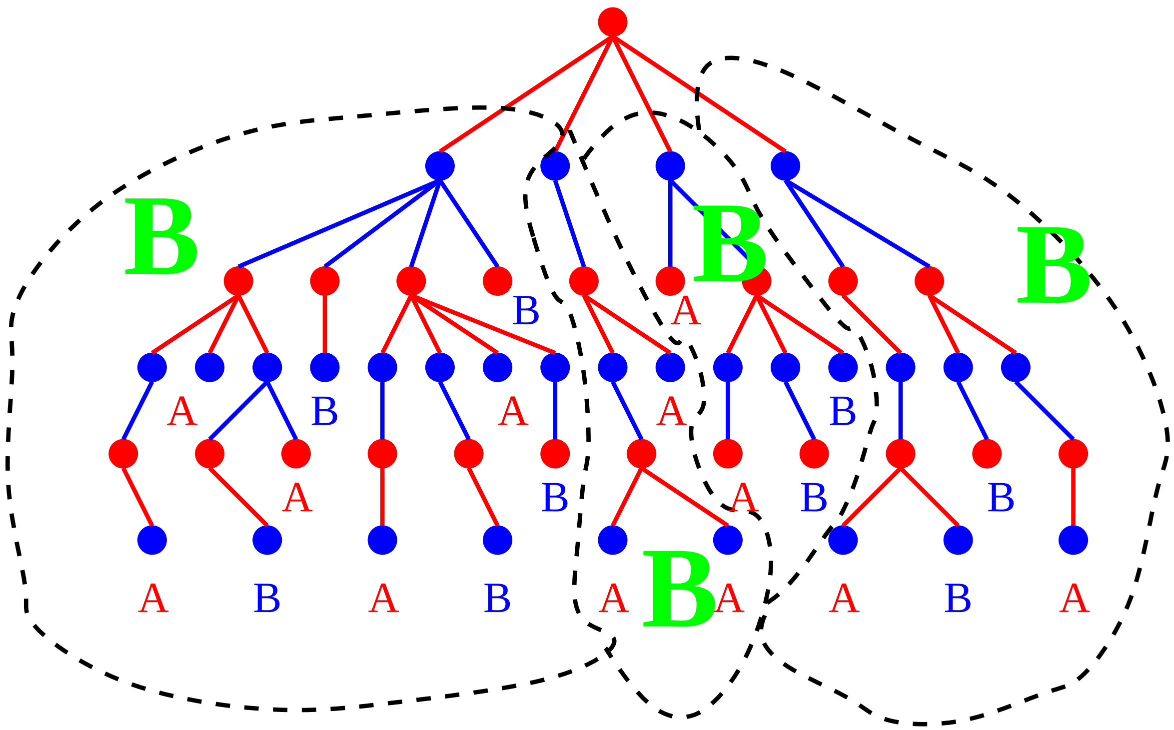


...und nur in diesem Fall hat Spielerin B eine "Gewinnstrategie"!

Allgemein...

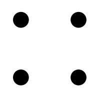


Hier hat Spieler A eine Gewinnstrategie...

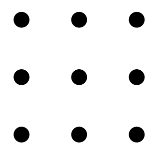


…und hier hat Spielerin B eine Gewinnstrategie! □

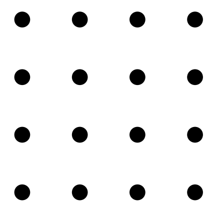
Spezialfälle



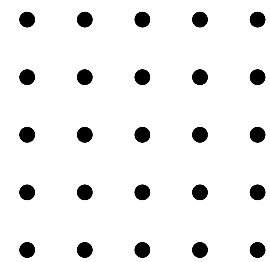
Spielerin B gewinnt



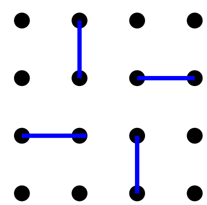
Spielerin A kann gewinnen

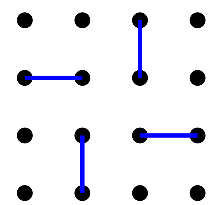


Spielerin B kann gewinnen

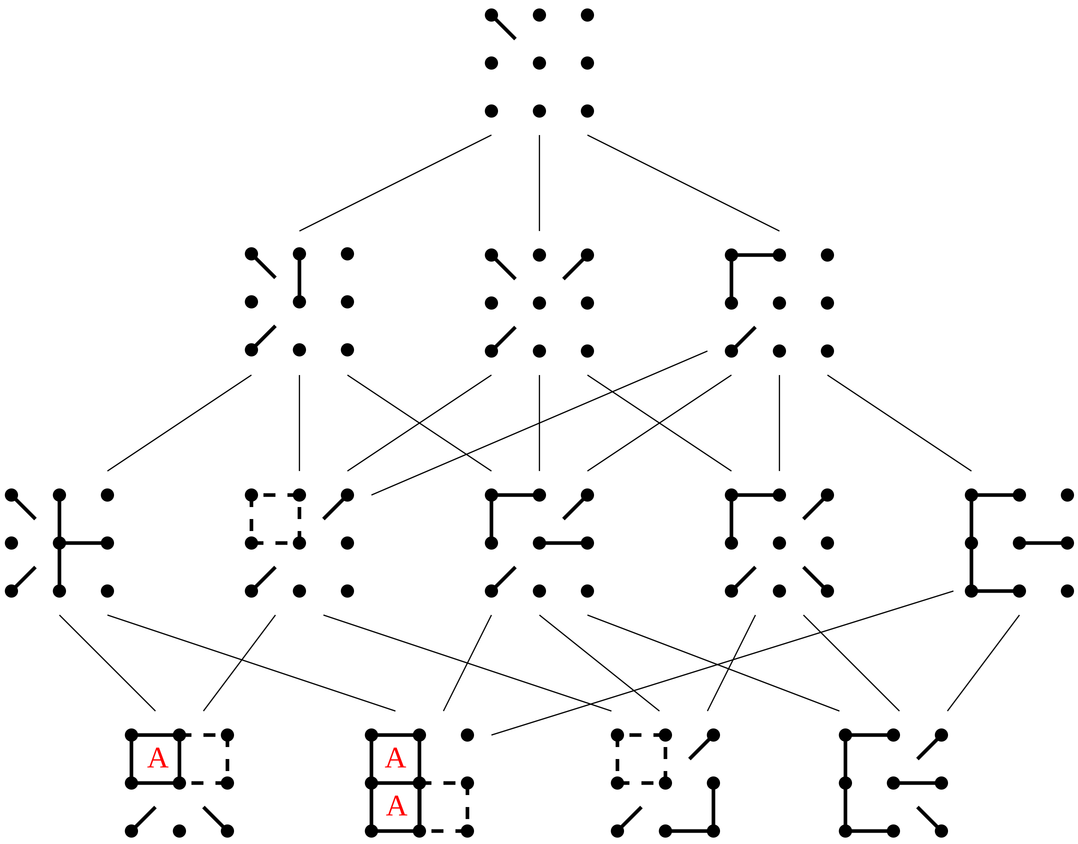


ungelöst





2 × 2 Käse-Kästchen

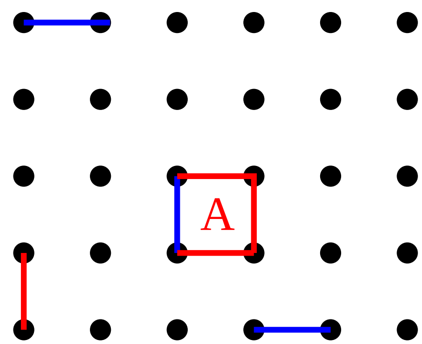


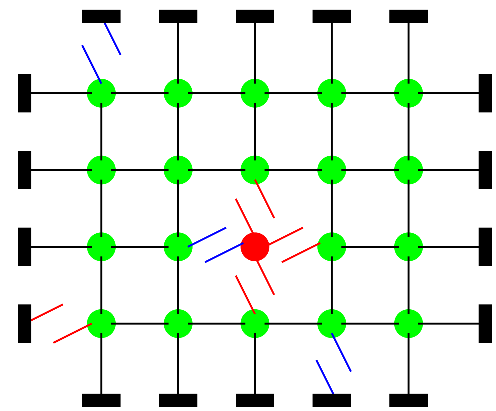
3×3 Käse-Kästchen

Beim 3×3 Spiel kann Spielerin B gewinnen, indem sie eins der beiden Räder "baut". Dabei werden immer Striche an jenen Kästchen bevorzugt, bei denen Spieler A schon einen gemacht hat. So wird erreicht, dass jede Kette der Länge ≥ 3 durch das mittlere Kästchen geht und daher kann es maximal eine solche Kette geben. Folglich gibt's keine Fallen-Züge. Daher: Anzahl der Züge $=$ Anzahl der Punkte $= 16 =$ gerade.

Selbst probieren!

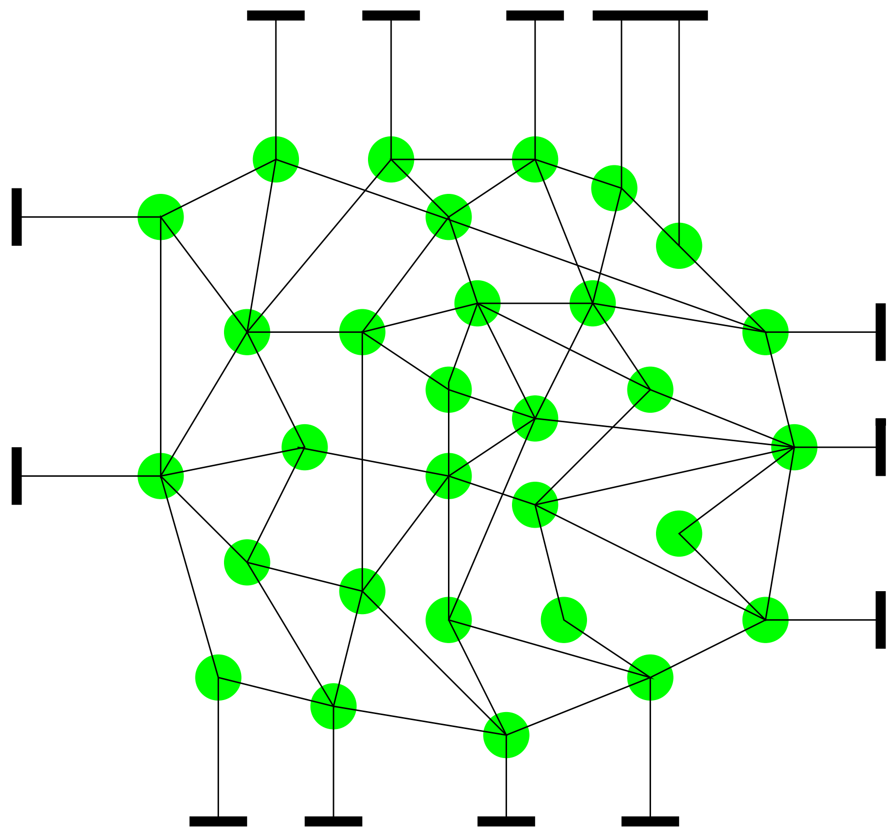
Fäden-und-Münzen – die duale Version von Käse-Kästchen





Wird mit Fäden, Münzen und einer Schere gespielt. Die Enden jedes Fadens sind an zwei verschiedenen Münzen oder an einer Münze und dem Boden befestigt. Ein Zug besteht aus dem Durchtrennen eines noch unbeschädigten Fadens. Wenn eine Münze vollständig losgelöst ist, dann gehört sie einem, und man schneidet einen weiteren Faden durch. Gewonnen hat, wer die meisten Münzen am Ende des Spiels hat.

Ist eine Verallgemeinerung von Käse-Kästchen...

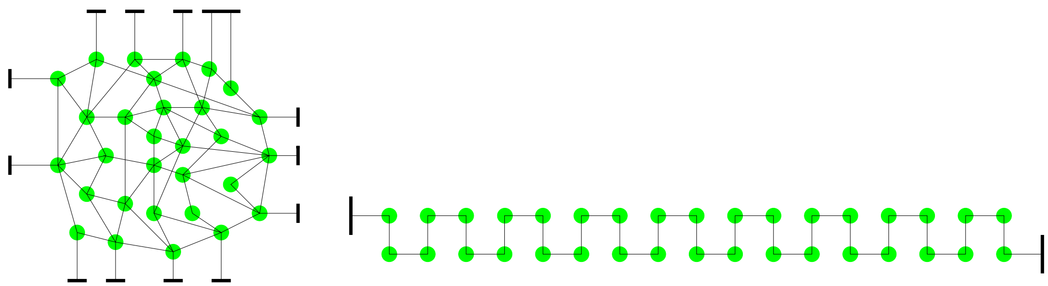


...weil man andere Ausgangskonfigurationen wählen kann.

Anderes Spiel: Nimm-Fäden

Wird auf den selben Konfigurationen und mit den selben Regeln wie Fäden-und-Münzen gespielt. Verloren hat, wer die letzte Münze nehmen muss.

Nimm-Fäden ist ein Spezialfall von Fäden-und-Münzen:



Jener Spieler, der die lange Kette anschneidet, hat verloren. Daher wird zuerst auf der restlichen Konfiguration gespielt. Verlierer ist dann, wer dort die letzte Münze nehmen muss.

Literatur:

- Folien: `http://www.mat.univie.ac.at/~ifischer/`

- E. R. Berlekamp, The Dots and Boxes Game: Sophisticated Child's Play. A. K. Peters, 2000.

- E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, Gewinnen. Strategien für mathematische Spiele. Vieweg, 1985 – 1986. (3. Band)