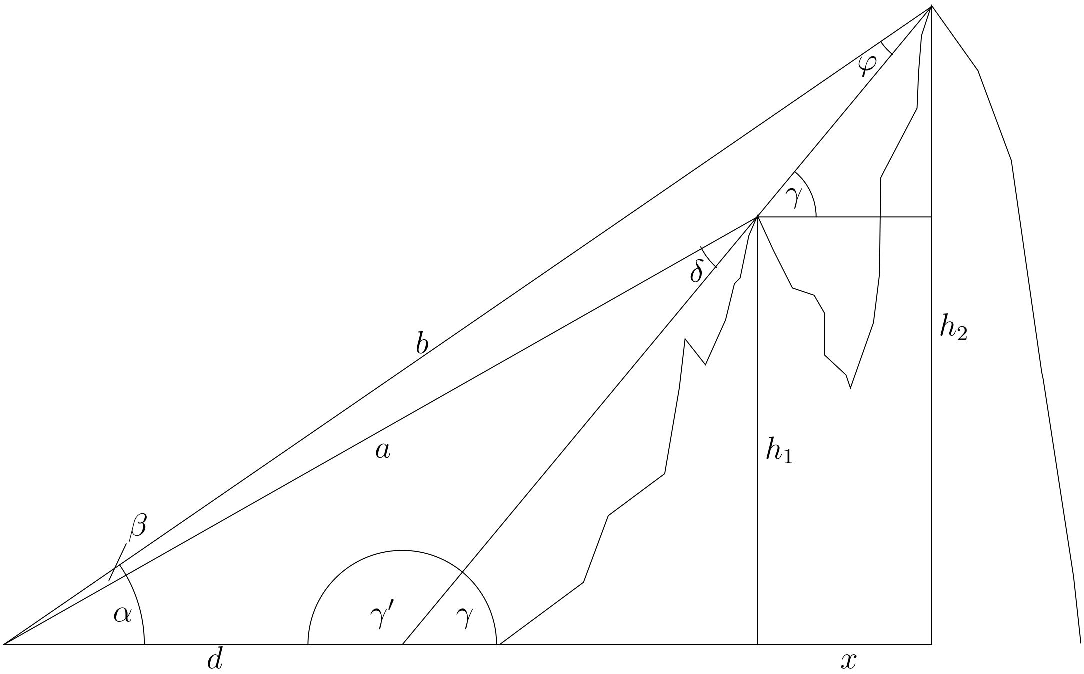
Lösungen für die Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (24.1.2003)

1. (a) Betrachten wir die folgende Skizze (**1 Punkt**).



Wir kennen aus der Angabe die Größen $d = 3000\,m$, $\alpha = 10,2°$, $\beta = 3,1°$ und $\gamma = 17,3°$.
Zur Berechnung von h_1 verwenden wir den Sinussatz. Um diesen anzuwenden, müssen wir die Winkel $\gamma' = 180° - \gamma$ und $\delta = 180° - \alpha - \gamma' = \gamma - \alpha = 7,1°$ bestimmen. Dann wissen wir

$$\frac{a}{\sin\gamma'} = \frac{d}{\sin\delta}, \quad \sin\gamma' = \sin\gamma.$$

Durch einfache Umformung ergibt das

$$a = \frac{d\sin\gamma}{\sin\delta} = 7217,7505\ldots\ m.$$

Ein rechtwinkeliges Dreieck genügt dann, um h_1 zu bestimmen:

$$h_1 = a\sin\alpha = 1278,1534\ldots\ m.$$

(**1 Punkt**)
Auch die Berechnung von h_2 verwendet den Sinussatz. Der Winkel φ ergibt sich aus $\varphi + \beta + \gamma' = 180°$ und der Formel für δ von oben zu $\varphi = \delta - \beta = 4°$. Mit Hilfe des Sinussatzes bestimmen wir

$$b = \frac{d\sin\gamma}{\sin\varphi} = 12789,130\ldots\ m.$$

Also ist

$$h_2 = b\sin(\alpha + \beta) = 2942,136\ldots\ m.$$

(**1 Punkt**)
Zur Bestimmung der absoluten Höhen der Berge müssen h_1 und h_2 noch mit der Seehöhe der Ebene und der Instrumentenhöhe addiert werden. Wir finden

$$H_1 = h_1 + 357\,m + 1,4\,m = 1636,553\ldots\,m \cong 1637\,m,$$
$$H_2 = h_2 + 357\,m + 1,4\,m = 3300,536\ldots\,m \cong 3301\,m.$$

(**1 Punkt**)
Zuletzt bestimmen wir den Abstand der beiden Gipfel:

$$x = \frac{h_2 - h_1}{\tan\gamma} = 5342,432\ldots\,m.$$

In einer Landkarte im Maßstab $1 : 50\,000$ benötigt $1\,km$ genau $2\,cm$. Daher ist der Abstand der Berggipfel in der Karte

$$x_{\text{Karte}} = 2 \cdot 5,342432\,cm = 10,684\ldots\,cm.$$

Man muss die Berge also mit etwa $10,7\,cm$ Abstand einzeichnen.
(**1 Punkt**)

(b) Wenn der Student auf gut Glück rät, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frage richtig beantwortet wird, $p = \frac{1}{3}$.

i. Mehr Fragen korrekt beantwortet hat der Student, wenn er 3, 4 oder 5 Fragen errät. Das Ergebnis lässt sich leicht mit Hilfe der Binomialverteilung bestimmen.

$$\mathbb{P} = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0 =$$
$$= \frac{10 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 1}{3^5} = \frac{51}{243} = 0.20987\ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also etwa 21%.
(**1$\frac{1}{2}$ Punkte**)

ii. Um positiv zu bestehen, muss der Kandidat mindestens 7 Punkte erreichen. Wenn er also die letzte Frage richtig beantwortet, muss er noch die korrekte Antwort einer der ersten vier Fragen erraten. Hat er die letzte Antwort allerdings falsch, so muss er notwendigerweise alle vier 2-Punkte-Fragen richtig tippen.

$$\mathbb{P} = \frac{1}{3}\left(1 - \binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4\right) + \frac{2}{3}\left(\binom{4}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\right) =$$
$$= \frac{3^4 - 2^4 + 2}{3^5} = 0.27572\ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine positive Note beträgt also etwa 27.6%.
(**1$\frac{1}{2}$ Punkte**)

2. Um zu untersuchen, ob die angegebene Struktur ein Körper ist, überprüfen wir die neun Körperaxiome und die Abgeschlossenheit.

Abgeschlossenheit: Die $\oplus$–Summe und das $\otimes$–Produkt zweier rationaler Zahlen sind wieder rationale Zahlen, also sind $\oplus$ und $\otimes$ Verknüpfungen auf $\mathbb{Q}$. Um die Sache etwas zu vereinfachen, schreiben wir das Produkt ein wenig um:

$$a \otimes b = 4ab - 8a - 8b + 18 = 4(a-2)(b-2) + 2$$

(**1 Punkt**)

AG ($\oplus$): Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (a + b - 6) \oplus c = a + b - 6 + c - 6 = a + b + c - 12 = \\ &= a + b + c - 6 - 6 = a \oplus (b + c - 6) = a \oplus (b \oplus c).\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

KG ($\oplus$): Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \oplus b = a + b - 6 = b + a - 6 = b \oplus a.$$

(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Nullelement ($\oplus$): Für das Nullelement $n \in \mathbb{R}$ muss

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \oplus n = a$$

gelten. Wenn wir einsetzen, erhalten wir $a + n - 6 = a$, also $n = 6$.
(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Inverses ($\oplus$): Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann muss für das Inverse $\ominus a$ von a die Beziehung

$$a \oplus (\ominus a) = n = 6$$

erfüllt sein. Wenn wir wieder einsetzen, sehen wir

$$a + (\ominus a) - 6 = 6,$$

also $\ominus a = 12 - a$. Jedes Element besitzt also ein Inverses bezüglich $\oplus$.
(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

AG ($\otimes$): Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \otimes c &= \big(4(a-2)(b-2) + 2\big) \otimes c = 4\big(4(a-2)(b-2) + 2 - 2\big)(c-2) + 2 = \\ &= 16(a-2)(b-2)(c-2) + 2 == 4(a-2)\big(4(b-2)(c-2) + 2 - 2\big) + 2 = \\ &= a \otimes \big(4(b-2)(c-2) + 2\big) = a \otimes (b \otimes c).\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

KG ($\otimes$): Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \otimes b = 4(a-2)(b-2) + 2 = 4(b-2)(a-2) + 2 = b \otimes a.$$

(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Einselement ($\otimes$)**:** Wenn $e \in \mathbb{R}$ das Einselement ist, dann muss für alle $n \neq a \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$a \otimes e = a$$

gelten. Setzen wir ein, so finden wir

$$\begin{aligned} 4(a-2)(e-2)+2 &= a \\ e &= \tfrac{a-2}{4(a-2)} + 2 = \tfrac{1}{4} + 2 = \tfrac{9}{4}. \end{aligned}$$

($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

Inverses ($\otimes$)**:** Für jedes $n \neq a \in \mathbb{R}$ muss das Inverse a^{-1} existieren, das

$$a \otimes a^{-1} = e = \tfrac{9}{4}$$

erfüllt. Setzen wir die Definition von $\otimes$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 4(a-2)(a^{-1}-2)+2 &= \tfrac{9}{4} \\ a^{-1} - 2 &= \frac{\frac{1}{4}}{4(a-2)} = \frac{1}{16(a-2)} \\ a^{-1} &= \frac{1}{16(a-2)} + 2. \end{aligned}$$

Dieses Element ist offensichtlich definiert für alle $a \neq 2$. Es sollte aber für alle $a \neq 6$ definiert sein. Für $a = 2$ existiert also kein Inverses. Dieses Axiom ist daher **nicht** erfüllt.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

DG ($\oplus$, $\otimes$)**:** Schließlich bleibt noch für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ das Distributivgesetz zu untersuchen:

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \otimes c = (a+b-6) \otimes c &= 4(a+b-6-2)(c-2)+2 = \\ &= 4\big((a-2)+(b-2)-4\big)(c-2)+2 = \\ &= 4(a-2)(c-2)+4(b-2)(c-2)-16(c-2)+2 \neq \\ &\neq \big(4(a-2)(c-2)+2\big) + \big(4(b-2)(c-2)+2\big) - 6 = \\ &= \big(4(a-2)(c-2)+2\big) \oplus \big(4(b-2)(c-2)+2\big) = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c). \end{aligned}$$

Das Distributivgesetz ist also **nicht** erfüllt.
(**1 Punkt**)

Die Struktur, die durch die beiden Operationen $\oplus$ und $\otimes$ auf $\mathbb{Q}$ erklärt ist, definiert also keinen Körper.

Um die gegebene Gleichung zu lösen, setzen wir in die Definition ein und erhalten

$$\begin{aligned} (x \oplus x) \otimes x = \big(2x-6\big) \oplus x = 4(2x-8)(x-2)+2 = 3 \\ 8x^2 - 48x + 63 = 0 \\ x_{1,2} = \frac{48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 8 \cdot 63}}{16} = \frac{48 \pm \sqrt{2 \cdot 144}}{16} = 3 \pm \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Die Gleichung hat also **keine** Lösungen, da beide ausgerechneten Wurzeln der quadratischen Gleichung irrational sind.
(**1 Punkt**)

3. (a) Wir beginnen jeden Induktionsbeweis mit dem **Induktionsanfang** (hier für $n = 0$):

$$\sum_{k=0}^{0}(8k^3 - 6k^2 + 6k) = 0 = 0 = 2(0^4 + 0^3 + 0^2 + 0).$$

Dieser ist also richtig.
(**1 Punkt**)
Dann schreiben wir die **Induktionsvoraussetzung** auf. Für alle $j \leq n$ gelte

$$\sum_{k=0}^{j}(8k^3 - 6k^2 + 6k) = 2(j^4 + j^3 + j^2 + j).$$

(**1 Punkt**)
Nun formulieren wir die **Induktionsbehauptung** (die Behauptung, die wir im **Induktionsschritt** beweisen möchten): Zu zeigen ist

$$\sum_{k=0}^{n+1}(8k^3 - 6k^2 + 6k) = 2((n+1)^4 + (n+1)^3 + (n+1)^2 + (n+1)).$$

(**1 Punkt**)
Zuletzt beweisen wir unsere Behauptung:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1}(8k^3 - 6k^2 + 6k) = \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n}(8k^3 - 6k^2 + 6k) + 8(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 6(n+1) = \\
&\quad\ \ \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&\quad = 2(n^4 + n^3 + n^2 + n) + 8(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 6(n+1) = \\
&\quad = 2\big((n+1-1)^4 + (n+1-1)^3 + (n+1-1)^2 + (n+1-1)\big) + \\
&\qquad 8(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 6(n+1) = \\
&\quad = 2\big((n+1)^4 + (n+1)^3 + (n+1)^2 + (n+1)\big) + 2\big(-4(n+1)^3 + 6(n+1)^2 - \\
&\qquad 4(n+1) + 1 - 3(n+1)^2 + 3(n+1) - 1 - 2(n+1) + 1 - 1\big) + \\
&\qquad 8(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 6(n+1) = \\
&\quad = 2\big((n+1)^4 + (n+1)^3 + (n+1)^2 + (n+1)\big) + 2\big(-4(n+1)^3 + 3(n+1)^2 - \\
&\qquad 3(n+1)\big) + 8(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 6(n+1) = \\
&\quad = 2((n+1)^4 + (n+1)^3 + (n+1)^2 + (n+1))
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.
(**3 Punkte**)

(b) Kann man die Wein- und Giftflaschen nicht unterscheiden, dann hat man

$$\frac{7!}{3!2!} = 420$$

Möglichkeiten.
(**1 Punkt**)
Sind alle Flaschen verschieden groß, dann sind alle Flaschen voneinander unterscheidbar, und man hat $7! = 5040$ Möglichkeiten.

Alternativ könnte man die Angabe so interpretieren, dass man sieben verschieden große Flaschen hat, von denen zwei Wein, drei Gift und der Rest Zaubertränke enthalten. Dann hat man, wenn man Positionen der Flaschen und die Inhalte variieren kann,

$$7!\frac{7!}{3!2!} = 2116800$$

Möglichkeiten.
(jede Lösung **1 Punkt**)

4. (a) Die angegebene Gleichung ist eine biquadratische Gleichung, und daher können wir rechnen

$$z^4 + 42z^2 + 841 = 0$$
$$z_{1,2}^2 = -21 \pm \sqrt{441 - 841} = -21 \pm \sqrt{-400} = -21 \pm 20i.$$

(**1 Punkt**)
Um die Lösungen zu finden, müssen wir die Wurzel aus diesen komplexen Zahlen ziehen. Am einfachsten geht das mit Hilfe eines abstrakten Ansatzes $z = a + bi$, denn

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi,$$

und daher finden wir die Gleichungen

$$I: \ a^2 - b^2 = -21$$
$$II: \ 2abi = \pm 20.$$

(**1 Punkt**)
Verwenden wir außerdem noch, dass

$$III: \ a^2 + b^2 = |z|^2 = |z^2| = |-21 \pm 20i| = 29,$$

dann können wir die Gleichungen I und III addieren bzw. subtrahieren und erhalten

$$2a^2 = 8, \quad 2b^2 = 50,$$

und damit $a = \pm 2$ und $b = \pm 5$.
Die vier Lösungen sind also

$$z_1 = 2 + 5i, \quad z_2 = 2 - 5i = \overline{z_1}, \quad z_3 = -2 - 5i = -z_1, \quad z_4 = -2 + 5i = -\overline{z_1}.$$

(**1 Punkt**)
Das Produkt der Lösungen ist also

$$z_1 z_2 z_3 z_4 = z_1\overline{z_1}(-z_1)(-\overline{z_1}) = |z_1|^2|-z_1|^2 = |z_1|^4 = \sqrt{4 + 25}^4 = 29^2 = 841,$$

oder das konstante Glied in der Gleichung (das ist immer so).
(**1 Punkt**)

(b) Setzen wir die Gleichungen der gesuchten Kreise allgemein an:

$$k: \quad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.$$

Nun verwenden wir die Informationen in der Angabe. Zunächst wissen wir, dass k die y–Achse berührt. Nachdem k' in der linken Halbebene liegt, muss der Kreis k ebenfalls in der linken Halbebene liegen, und daher gilt $x_M = -r$.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)
Der Kreis k berührt k' von außen, und daher ist die Länge der Verbindungsstrecke $\overline{MM_{k'}} = r_{k'} + r$. Daher gilt

$$(x_M + 6)^2 + (y_M - 0)^2 = (3 + r)^2.$$

(**1 Punkt**)
Schließlich liegt P auf k, erfüllt also dessen Gleichung:

$$(-12 - x_M)^2 + (9 - y_M)^2 = r^2.$$

($\frac{1}{2}$ **Punkt**)
Setzen wir $x_M = -r$ in die beiden quadratischen Gleichungen ein, so erhalten wir zwei Gleichungen in zwei Variablen:

$$\begin{aligned} (r-6)^2 + y_M^2 &= (r+3)^2 \\ (r-12)^2 + (y_M - 9)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Ausquadrieren und Umformen führt zu

$$\begin{aligned} 27 + y_M^2 &= 18r \\ 225 - 18y_M + y_M^2 &= 24r. \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$198 - 18y_M = 6r$$

Diese Beziehung können wir wieder in die erste quadratische Gleichung einsetzen, und

$$\begin{aligned} 27 + y_M^2 &= 594 - 54y_M \\ y_M^2 + 54y_M - 567 &= 0 \\ y_{M1,2} &= -27 \pm \sqrt{1296} = -27 \pm 36 = 9, -63 \\ r_{1,2} &= 33 - 3y_{M1,2} = 6, 222. \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen lauten also

$$\begin{aligned} (x+6)^2 + (y-9)^2 &= 6^2 \\ (x+222)^2 + (y+63)^2 &= 222^2. \end{aligned}$$

(**2 Punkte**)