Lösungen für die Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (13.12.2002)

1. Dieses Beispiel ist eine *umgekehrte Kurvendiskussion.*

   (a) Um die Koeffizienten von f zu bestimmen, können wir ansetzen

   $$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

   Wir wissen $f'(3) = 0$, weil $E_1 = (3, y_1)$ ein Extremwert ist. Weiters haben wir $f''(2) = 0$ wegen des Wendepunktes $W = (2, y_w)$.
   Die Gleichung der Wendetangente liefert uns gleich zwei Hinweise. Zum ersten muss der Wendepunkt auf der Wendetangente liegen, und daher gilt $y_w = 4 - 6 = -2$ und $f(2) = -2$. Darüber hinaus verrät uns die Wendetangente, dass f in W die Steigung -3 haben muss. Es gilt also $f'(2) = -3$.
   (1 Punkt)
   Um die Koeffizienten zu bestimmen, müssen wir ein Gleichungssystem für a, b, c und d aufstellen. Wir erhalten

   $$\begin{array}{rrcrcrcrcr} I: & 27a & + & 6b & + & c & & & = & 0, \\ II: & 12a & + & 2b & & & & & = & 0, \\ III: & 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & -2, \\ IV: & 12a & + & 4b & + & c & & & = & -3. \end{array}$$

   (1 Punkt)
   Gleichung II verrät uns, dass $b = -6a$ gilt. Setzen wir das in die anderen Gleichungen ein, dann erhalten wir

   $$\begin{array}{rrcrcrcr} I: & -9a & + & c & & & = & 0, \\ III: & -16a & + & 2c & + & d & = & -2, \\ IV: & -12a & + & c & & & = & -3. \end{array}$$

   Jetzt sehen wir aus Gleichung I, dass $c = 9a$, und wenn wir das in IV einsetzen, ergibt sich $a = 1$. Daher sind $b = -6$ und $c = 9$. Bleibt schließlich noch Gleichung III, aus der wir $d = -4$ bestimmen.
   Fassen wir zusammen, so erhalten wir für das Polynom die Lösung

   $$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$$

   (1 Punkt)

   (b) Kurvendiskussion von f: Versuchen wir rationale **Nullstellen** zu finden, dann bieten sich die Möglichkeiten ± 1, ± 2 und ± 4. Es gilt $f(1) = 0$, also haben wir eine Nullstelle $N_1 = (1, 0)$ gefunden. Für die übrigen Nullstellen dividieren wir f durch $x - 1$:

   $$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x - 1)(x^2 - 5x + 4).$$

   Dann bestimmen wir die Nullstellen des entstehenden quadratischen Polynoms $x^2 - 5x + 4$. Wir sehen, dass $x = 1$ wieder Lösung ist und außerdem noch $x = 4$. Das Polynom f hat also die doppelte Nullstelle N_1 und die einfache Nullstelle

$N_2 = (4, 0)$.
(**1 Punkt**)

Die **Extremwerte** erhält man durch Lösen von $f'(x) = 0$, wobei wir bereits wissen, dass $E_1 = (3, -4)$ ein Extremwert (ein Minimum) ist. Den zweiten Extremwert müssen wir ebenfalls nicht ausrechnen, da jede doppelte Nullstelle auch ein Extremwert ist. Wir haben das Maximum N_1.

Der **Wendepunkt** von f ist bereits bekannt, $W = (2, -2)$, ebenso die Gleichung der Wendetangente.

Die Funktion f weist keine außergewöhnlichen Symmetrien auf, sie hat keine Pole und keine Asymptoten.

Das Verhalten im Unendlichen ergibt sich durch $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Daher ist f **streng monoton fallend** in $[1, 3]$ und **streng monoton wachsend** in $(-\infty, 1]$ und $[3, \infty])$. Die Krümmugsbereiche ergeben sich durch die Kenntnis des Wendepunkte und das Vorzeichen von f''. Wir erhalten: Die Funktion f ist **konvex** auf $[2, \infty)$, während sie im Intervall $(-\infty, 2]$ **konkav** ist.
(**1 Punkt**).

(c) Der Graph von f im angegebenen Bereich ist dargestellt in Abbildung 1.
(**1 Punkt**)

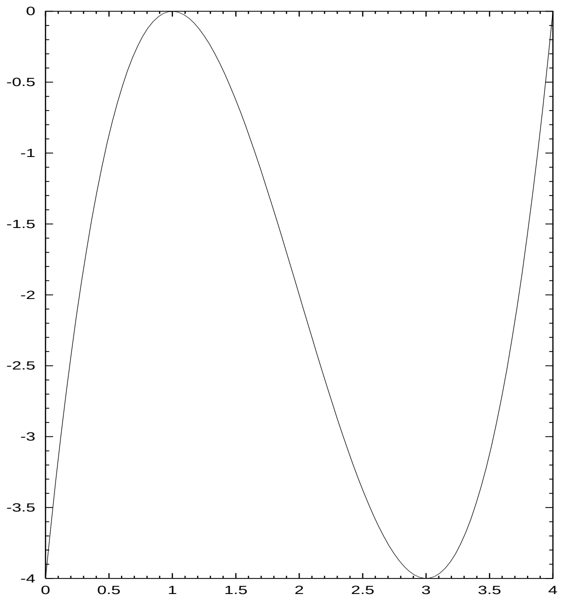

Abbildung 1: Graph von f

(d) Um das Rotationsvolumen zu berechnen, müssen wir das Ergebnis des folgenden Integrals bestimmen:

$$V = \pi \int_1^4 f(x)^2 \, dx.$$

Setzen wir ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^4 f(x)^2\,dx = \pi \int_1^4 (x^3 - 6x^2 + 9x - 4)^2\,dx = \\
&= \pi \int_1^4 x^6 - 12x^5 + 54x^4 - 116x^3 + 129x^2 - 72x + 16\,dx = \\
&= \pi \left[\frac{x^7}{7} - 2x^6 + \frac{54x^5}{5} - 29x^4 + 43x^3 - 36x^2 + 16x\right]_1^4 = \\
&= \pi(\frac{832}{35} - \frac{103}{35}) = \tfrac{729\pi}{35} \cong 65.43\ldots
\end{aligned}$$

(**2 Punkte**)

2. (a) Um zu beweisen, dass K ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, müssen wir zunächst die Abgeschlossenheit der Operationen $+$ und $*$ nachweisen:

Abgeschlossenheit von +: Es gilt

$$(a_1 + b_1\sqrt{7}) + (a_2 + b_2\sqrt{7}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{7},$$

und weil die Summe zweier rationaler Zahlen wieder rational ist, liegt die Summe zweier Elemente von K wieder in K.
(**1 Punkt**)

Abgeschlossenheit von ∗: Wir haben

$$\begin{aligned}
(a_1 + b_1\sqrt{7}) * (a_2 + b_2\sqrt{7}) &= a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{7} + a_2b_1\sqrt{7} + 7b_1b_2 = \\
&= (a_1a_2 + 7b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{7}.
\end{aligned}$$

Summe und Produkt rationaler Zahlen sind rational, also hat das Produkt zweier Elemente aus K dieselbe Form wie alle Elemente von K und liegt daher auch in der Menge. Daher ist $*$ auf K abgeschlossen.
(**1 Punkt**)

Inverse bzgl. +: Sei $k = a + b\sqrt{7} \in K$. Dann ist das Inverse bzgl. $+$ in $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$-k = -a + (-b)\sqrt{7}.$$

Offenbar ist dieses Element wieder in K. Daher sind additiv Inverse enthalten.
(**1 Punkt**)

Inverse bzgl. ∗: Gehen wir wieder aus von $k = a + b\sqrt{7} \in K$ und sei $k \neq 0$. Wir finden das Inverse von k in $\mathbb{R}$ durch

$$k^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{7}} = \frac{a - b\sqrt{7}}{(a + b\sqrt{7})(a - b\sqrt{7})} = \frac{a}{a^2 - 7b^2} + \frac{-b}{a^2 - 7b^2}\sqrt{7}.$$

Dieses Element ist definiert und liegt in K, falls $a^2 - 7b^2 \neq 0$ gilt. Das ist aber der Fall, da anderweits $a = \pm b\sqrt{7}$ gälte. Wäre dann $b \neq 0$, so hätten wir $\sqrt{7} = \pm\frac{a}{b}$, und $\sqrt{7}$ wäre eine rationale Zahl. Für $b = 0$ folgte $a = 0$ und $k = 0$, was wir aber ausgeschlossen hatten. Darum sind die multiplikativ Inversen aller nichtverschwindenden Elemente von K wieder in K und K ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$.
(**1 Punkt**)

(b) Betrachten wir die gegebene Gleichung, so erkennen wir, dass sie quadratisch in z ist. Wir können also rechnen:

$$z_{1,2} = -3 + 6i \pm \sqrt{(3-6i)^2 + 62 + 48i} = -3 + 6i \pm \sqrt{35 + 12i}.$$

(**1 Punkt**)
Um die Lösungen in der Form $a + ib$ darstellen zu können, müssen wir die Wurzel berechnen. Dazu setzen wir an

$$\sqrt{35 + 12i} = a + ib.$$

Nach dem Quadrieren ergibt das das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 35 \\ ab &= 6. \end{aligned}$$

Verwenden wir noch den Trick $a^2 + b^2 = |a + ib|^2 = |35 + 12i| = 37$, dann fällt es uns leicht, sofort a^2 und b^2 zu bestimmen:

$$2a^2 = 72, \quad 2b^2 = 2,$$

und daher $a = \pm 6$ und $b = \mp 1$.

$$\sqrt{35 + 12i} = 6 + i.$$

(**1 Punkt**)
Die Lösungen der Gleichung lauten also

$$z_{1,2} = -3 + 6i \pm (6 + i) = 3 + 7i, -9 + 5i.$$

(**1 Punkt**)
Das Produkt der Lösungen

$$z_1 z_2 = (3 + 7i)(-9 + 5i) = -62 - 48i$$

ergibt das konstante Glied in der Gleichung, eine einfache Testmöglichkeit.
(**1 Punkt**)

3. (a) Wir beginnen jeden Induktionsbeweis mit dem **Induktionsanfang** (hier für $n = 0$):

$$4 + \sum_{k=0}^{0} (4k^3 - 6k^2 + 8k - 3) = 4 + (-3) = 1 = (0^2 + 1)^2.$$

Dieser ist also richtig.
(**1 Punkt**)
Dann schreiben wir die **Induktionsvoraussetzung** auf. Für alle $j \leq n$ gelte

$$4 + \sum_{k=0}^{j} (4k^3 - 6k^2 + 8k - 3) = (j^2 + 1)^2.$$

(**1 Punkt**)
Nun formulieren wir die **Induktionsbehauptung** (die Behauptung, die wir im **Induktionsschritt** beweisen möchten): Zu zeigen ist

$$4+\sum_{k=0}^{n+1}(4k^3-6k^2+8k-3)=((n+1)^2+1)^2.$$

(**1 Punkt**)
Zuletzt beweisen wir unsere Behauptung:

$$\begin{aligned}
&4+\sum_{k=0}^{n+1}(4k^3-6k^2+8k-3)=\\
&\qquad=4+\sum_{k=0}^{n}(4k^3-6k^2+8k-3)+(4(n+1)^3-6(n+1)^2+8(n+1)-3)=\\
&\qquad\ \ \text{(Induktionsvoraussetzung)}\\
&\qquad=(n^2+1)^2+4(n+1)^3-6(n+1)^2+8(n+1)-3=\\
&\qquad=n^4+2n^2+1+4(n+1)^3-6(n+1)^2+8(n+1)-3=\\
&\qquad=n^4+4n^3+6n^2+4n+1+8n^2+8n+4-6(n+1)^2+8(n+1)-3=\\
&\qquad=(n+1)^4+2(n+1)^2+1+8n^2+8n-8(n+1)^2+8(n+1)=\\
&\qquad=(n+1)^4+2(n+1)^2+1\\
&\qquad=((n+1)^2+1)^2
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.
(**3 Punkte**)

(b) Die Anzahl der Möglichkeiten kann man leicht durch Abzählen bestimmen. Die Kugel, die aus Kiste 1 in Vertiefung 1 gelegt wird, ist beliebig. Es gibt also für die erste Vertiefung 4 Möglichkeiten. Jede weitere Kugel, die aus Kiste k in Vertiefung k gelegt wird, hat auf die Kugel in Vertiefung $k-1$ Rücksicht zu nehmen. Ihre Farbe darf nicht der Farbe der Kugel in Vertiefung $k-1$ gleichen. Es bleiben also noch 3 Möglichkeiten übrig.
(**1 Punkt**)
Wir haben also für 8 Kisten und Vertiefungen und 4 Farben

$$4\cdot 3^7=8748$$

Möglichkeiten, sie wie verlangt aufzulegen.
(**1 Punkt**)

4. (a) Zunächst bestimmen wir die Kenngrößen der Ellipse. Dazu bringen wir die Gleichung auf Normalform

$$ell:\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Wir haben $a=13$ und $b=5$. Daher ist $e=\sqrt{a^2-b^2}=12$.
Die Brennpunkte sind $F_1=(-12,0)$ und $F_2=(12,0)$.
(**1 Punkt**)

Sei $P = (x, y)$ ein beliebiger Ellipsenpunkt von der gesuchten Art. Es müssen die Brennstrahlen senkrecht auf einander stehen, was bedeutet, dass die Vektoren

$$\overrightarrow{F_1P} = \begin{pmatrix} x+12 \\ y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{F_2P} = \begin{pmatrix} x-12 \\ y \end{pmatrix}$$

orthogonal sind. Es gilt

$$0 = (x-12)(x+12) + y^2 = x^2 + y^2 - 144.$$

(**1 Punkt**)
Außerdem muss P auf der Ellipse liegen und Gleichung *ell* erfüllen. Setzen wir $x^2 = 144 - y^2$ in die Ellipsengleichung ein, so ergibt sich

$$25(144 - y^2) + 169y^2 = 3600 + 144y^2 = 4225$$

und

$$144y^2 = 625,$$

also

$$12y = \pm 25, \quad y = \pm\frac{25}{12}$$

(**1 Punkt**)
Außerdem erhalten wir

$$x^2 = 144 - y^2 = 144 - \frac{625}{144} = \frac{20111}{144},$$

also

$$x = \pm\frac{13\sqrt{119}}{12}.$$

Die vier gesuchten Punkte sind

$$P = \tfrac{1}{12}(\pm 13\sqrt{119}, 25) \cong (\pm 11.82, \pm 2.08).$$

(**1 Punkt**)

(b) Es gibt offenbar 70 Treffer und 30 Nieten.

i. Die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Kauf von drei Losen nichts gewinnt ist,

$$\frac{30}{100} \cdot \frac{29}{99} \cdot \frac{28}{98} = 0.0251\ldots,$$

also 2.5%.
(**2 Punkte**)

ii. Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 2 Treffer beträgt

$$\frac{70}{100} \cdot \frac{69}{99} \cdot \frac{68}{98} + \binom{3}{1} \cdot \frac{70}{100} \cdot \frac{69}{99} \cdot \frac{30}{98} = \frac{70 \cdot 69}{100 \cdot 99 \cdot 98}(68 + 3 \cdot 30) = 0.7865\ldots,$$

also 78.7%.
(**2 Punkte**)

Approximativ kann man das Beispiel mittels Binomialverteilung lösen: Dazu verwendet man, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Los 0.7 ist.

i. Die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Kauf von drei Losen nichts gewinnt ist ungefähr,

$$(1-0.7)^3 = 0.3^3 = 0.027,$$

also 2.7%.
($1\frac{1}{2}$ Punkte)

ii. Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 2 Treffer beträgt ungefähr

$$0.7^3 + \binom{3}{1} 0.7^2 \cdot 0.3 = 0.7^2(0.7+0.9) = 0.784,$$

also 78.4%.
($1\frac{1}{2}$ Punkte)