Lösungen für die Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (16.11.2001)

1. Dieses Beispiel läuft unter dem Stichwort *umgekehrte Kurvendiskussion*.

   (a) Um die Koeffizienten von f zu bestimmen, müssen wir ein Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b und c aufstellen. Dazu verwenden wir $f(-2) = 0$, $f(4) = 0$ und $f'(4) = -2$. Wir erhalten

   $$\begin{array}{rrcrcrcr} I: & 4a & - & 2b & + & c & = & 0 \\ II: & 16a & + & 4b & + & c & = & 0 \\ III: & 8a & + & b & & & = & -2 \end{array}$$

   (**1 Punkt**)
   Subtrahieren wir $II - I$ und dividieren wir das Ergebnis durch 6, so finden wir

   $$\begin{array}{rrcrcr} \frac{1}{6}(II - I): & 2a & + & b & = & 0 \\ III: & 8a & + & b & = & -2 \end{array}$$

   Nach Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhalten wir $a = -\frac{1}{3}$ und rückwärts Einsetzen liefert die beiden anderen Koeffizienten $b = \frac{2}{3}$ und $c = \frac{8}{3}$. Fassen wir zusammen, so erhalten wir für das erste Polynom die Lösung

   $$f(x) = \tfrac{1}{3}(-x^2 + 2x + 8).$$

   (**1 Punkt**)
   Eine Stammfunktion g von f finden wir durch unbestimmtes Integrieren

   $$g(x) = \int f(x)\,dx = \tfrac{1}{3}\int -x^2 + 2x + 8 = \tfrac{1}{3}(-\tfrac{x^3}{3} + x^2 + 8x) + K =$$
   $$= \tfrac{1}{9}(-x^3 + 3x^2 + 24x + d)$$

   Die Unbekannte d erhalten wir aus der Angabe durch die Tatsache, dass g bei $x = 1$ eine Nullstelle besitzt, also $g(1) = 0$ gilt:

   $$g(1) = \tfrac{1}{9}(-1 + 3 + 24 + d) = 0,$$

   also $d = -26$. Dies führt zu

   $$g(x) = \tfrac{1}{9}(-x^3 + 3x^2 + 24x - 26).$$

   (**1 Punkt**)

   (b) Kurvendiskussion von f und g:

   f: Die **Nullstellen** sind schon bekannt: $N_1 = (-2, 0)$ und $N_2 = (4, 0)$. Der **Extremwert** liegt in der Mitte (bzw. ist Lösung der Gleichung $f'(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = 0$), also $E = (1, 3)$ und ein **Maximum** (in diesem Fall weil der Funktionswert größer als Null ist). Es existiert kein Wendepunkt, weil f eine quadratische Funktion ist.
   $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$. f ist **monoton wachsend** in $(-\infty, 1]$, **monoton fallend** in $[1, \infty)$ und auf ganz $\mathbb{R}$ **konkav**.
   (**1 Punkt**).

g: Eine Nullstelle von g ist bekannt $N_2 = (1,0)$. Um die übrigen auszurechnen, muss man $g(x)$ durch $x-1$ dividieren:

$$\tfrac{1}{9}(-x^3+3x^2+24x-26) : (x-1) = \tfrac{1}{9}(-x^2+2x+26).$$

Die weiteren Nullstellen von g finden wir dann mit Hilfe der Lösung einer quadratischen Gleichung:

$$-x^2+2x+26 = 0$$
$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+26} = 1 \pm 3\sqrt{3},$$

und daher $N_1 = (1-3\sqrt{3}, 0)$ und $N_3 = (1+3\sqrt{3}, 0)$.
(**1 Punkt**)
Die übrige Kurvendiskussion von g ist leicht, denn die Extremwerte von g sind die Nullstellen von $f = g'$, welche schon bekannt sind: $E_1 = (-2,-6)$, ein **Minimum**, und $E_2 = (4,6)$, ein **Maximum**. Der Wendepunkt ist die Nullstelle von g'', also von f', also $W = (1,0)$. Die Steigung der Tangente an W ist der Wert $g'(1) = f(1) = 3$, also ist die Gleichung der Wendetangente

$$t_W : \ y = 3x - 3.$$

Die Funktion g ist **streng monoton fallend** in $(-\infty,-2]$ und $[4,\infty)$ und **streng monoton fallend** in $[-2,4]$. In $(-\infty,1]$ ist g **konvex** und in $[1,\infty)$ **konkav**. Es gelten $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$.
(**1 Punkt**)

Der Graph von f und g im angegebenen Bereich ist dargestellt in Abbildung 1.
(**1 Punkt**)

(c) Um die Fläche zwischen f und g zu berechnen, sieht man aus den Graphen der Funktionen, dass man das bestimmte Integral

$$\int_{-2}^{1} f(x) - g(x)\, dx$$

berechnen muss. Wir bestimmen also

$$\int_{-2}^{1} f(x)\, dx = g(1) - g(-2) = 0 - (-6) = 6,$$

weil g eine Stammfunktion von f ist. Weiters berechnen wir

$$\int_{-2}^{1} g(x)\, dx = \tfrac{1}{9}\int_{-2}^{1} -x^3+3x^2+24x-26\, dx =$$
$$= \frac{1}{9}\left[-\frac{x^4}{4} + x^3 + 12x^2 - 26x\right]_{-2}^{1} = -\frac{45}{4}.$$

Die Fläche ist demnach $A = 6 + \frac{45}{4} = \frac{69}{4} = 17,25$.
(**1 Punkt**)

2. Um zu beweisen, dass die angegebene Struktur ein Körper ist, überprüfen wir die neun Körperaxiome und die Abgeschlossenheit.

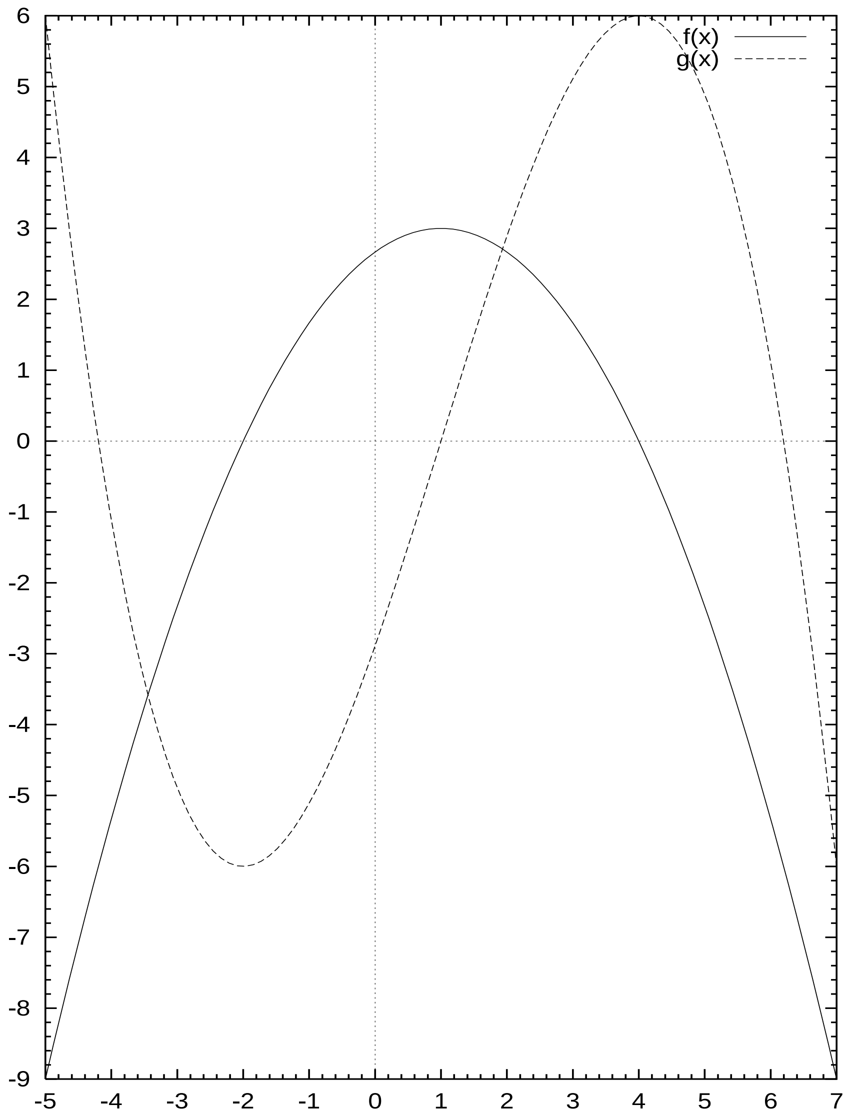

Abbildung 1: Graphen von f und g

Abgeschlossenheit: Die $\oplus$–Summe und das $\otimes$–Produkt zweier reeller Zahlen sind wieder reelle Zahlen, also sind $\oplus$ und $\otimes$ Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$.
(**1 Punkt**)

AG ($\oplus$): Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c = (a + b - 5) \oplus c = a + b - 5 + c - 5 = a + b + c - 10 = \\ = a + b + c - 5 - 5 = a \oplus (b + c - 5) = a \oplus (b \oplus c).\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

KG ($\oplus$): Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \oplus b = a + b - 5 = b + a - 5 = b \oplus a.$$

(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Nullelement ($\oplus$): Für das Nullelement $n \in \mathbb{R}$ muss

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \oplus n = a$$

gelten. Wenn wir einsetzen, erhalten wir $a + n - 5 = a$, also $n = 5$.
(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Inverses ($\oplus$): Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann muss für das Inverse $\ominus a$ von a die Beziehung

$$a \oplus (\ominus a) = n = 5$$

erfüllt sein. Wenn wir wieder einsetzen, sehen wir

$$a + (\ominus a) - 5 = 5,$$

also $\ominus a = 10 - a$. Jedes Element besitzt also ein Inverses bezüglich $\oplus$.
(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

AG ($\otimes$): Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \otimes c = \big((a - 5)(b - 5) + 5\big) \otimes c = \big((a - 5)(b - 5) + 5 - 5\big)(c - 5) + 5 = \\ = (a - 5)(b - 5)(c - 5) + 5 == (a - 5)\big((b - 5)(c - 5) + 5 - 5\big) + 5 = \\ = a \otimes \big((b - 5)(c - 5) + 5\big) = a \otimes (b \otimes c).\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

KG ($\otimes$): Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a \otimes b = (a - 5)(b - 5) + 5 = (b - 5)(a - 5) + 5 = b \otimes a.$$

(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Einselement ($\otimes$): Wenn $e \in \mathbb{R}$ das Einselement ist, dann muss für alle $n \neq a \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$a \otimes e = a$$

gelten. Setzen wir ein, so finden wir

$$\begin{aligned}(a - 5)(e - 5) + 5 = a \\ e = \tfrac{a-5}{a-5} + 5 = 1 + 5 = 6.\end{aligned}$$

(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)

Inverses ($\otimes$): Für jedes $n \neq a \in \mathbb{R}$ muss das Inverse a^{-1} existieren, das

$$a \otimes a^{-1} = e = 6$$

erfüllt. Setzen wir die Definition von $\otimes$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(a-5)(a^{-1}-5)+5 &= 6\\ a^{-1}-5 &= \frac{1}{a-5}\\ a^{-1} &= \frac{1}{a-5}+5.\end{aligned}$$

Dieses Element ist offensichtlich definiert für alle $a \neq 5 = n$.
($\frac{1}{2}$ **Punkt**)

DG ($\oplus$, $\otimes$): Schließlich bleibt noch für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ das Distributivgesetz zu zeigen:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \otimes c &= (a+b-5) \otimes c = (a+b-5-5)(c-5)+5 =\\ &= \big((a-5)+(b-5)\big)(c-5)+5 = (a-5)(c-5)+(b-5)(c-5)+5 =\\ &= \big((a-5)(c-5)+5\big) + \big((b-5)(c-5)+5\big) - 5 =\\ &= \big((a-5)(c-5)+5\big) \oplus \big((b-5)(c-5)+5\big) = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

Um die gegebene Gleichung zu lösen, setzen wir in die Definition ein und erhalten

$$(x \otimes x) \oplus x = \big((x-5)^2+5\big) \oplus x = (x-5)^2+5+x-5 = 7$$
$$x^2 - 9x + 18 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18} = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$$

Die Gleichung hat also die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = 6$. (**1 Punkt**)

3. (a) Die angegebene Gleichung ist eine biquadratische Gleichung, und daher können wir rechnen

$$\begin{aligned}z^4 - 10z^2 + 169 &= 0\\ z_{1,2}^2 &= 5 \pm \sqrt{25-169} = 5 \pm \sqrt{-144} = 5 \pm 12i.\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

Um die Lösungen zu finden, müssen wir die Wurzel aus diesen komplexen Zahlen ziehen. Am einfachsten geht das mit Hilfe eines abstrakten Ansatzes $z = a + bi$, denn

$$z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi,$$

und daher finden wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}I:\ a^2 - b^2 &= 5\\ II:\ 2abi &= \pm 12.\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

Die Gleichung II formen wir um

$$a = \frac{\pm 6}{b}$$
$$a^2 = \frac{36}{b^2}.$$

Setzen wir das in Gleichung I ein, so erhalten wir

$$\frac{36}{b^2} - b^2 = 5$$
$$b^4 + 5b^2 - 36 = 0$$
$$b_{1,2}^2 = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{144}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{13}{2} = 4, (-9).$$

Die negative Lösung ist überflüssig, da b reell ist, und somit finden wir $b = \pm 2$. Daraus können wir mit Hilfe von Gleichung II sofort $a = \pm 3$ bestimmen. Die vier Lösungen sind also

$$z_1 = 3 + 2i, \quad z_2 = 3 - 2i = \overline{z_1}, \quad z_3 = -3 - 2i = -z_1, \quad z_4 = -3 + 2i = -\overline{z_1}.$$

(**1 Punkt**)
Das Produkt der Lösungen ist also

$$z_1 z_2 z_3 z_4 = z_1 \overline{z_1}(-z_1)(-\overline{z_1}) = |z_1|^2| - z_1|^2 = |z_1|^4 = \sqrt{9+4}^4 = 13^2 = 169,$$

oder das konstante Glied in der Gleichung (das ist immer so).
(**1 Punkt**)

(b) Wir beginnen jeden Induktionsbeweis mit dem **Induktionsanfang** (hier für $n = 0$):

$$\sum_{k=0}^{0} k(k+1) = 0(0+1) = 0 = \tfrac{1}{3} \cdot 0(0+1)(0+2).$$

Dieser ist also richtig.
(**1 Punkt**)
Dann schreiben wir die **Induktionsvoraussetzung** auf. Für alle $j \leq n$ gelte

$$\sum_{k=0}^{j} k(k+1) = \tfrac{1}{3} j(j+1)(j+2).$$

(**1 Punkt**)
Nun formulieren wir die **Induktionsbehauptung** (die Behauptung, die wir im **Induktionsschritt** beweisen möchten): Zu zeigen ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \tfrac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3).$$

(**1 Punkt**)

Zuletzt beweisen wir unsere Behauptung:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) = \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}\\ &= \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = \\ &= \tfrac{1}{3}\big(n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)\big) = \\ &= \tfrac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3),\end{aligned}$$

was zu beweisen war.
(**1 Punkt**)

4. (a) Zuerst stellen wir die Ebenengleichung für die Ebene ε_2 auf. Die Vektoren sind

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix},$$

und daher haben wir den Ebenennormalvektor

$$\mathfrak{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -15 & 20 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -15 & 20 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 \\ 0 \\ -155 \end{pmatrix},$$

oder parallel dazu

$$\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Die Ebenengleichung ist daher

$$\varepsilon_2 : \; x_1 + 5x_3 = 24 + 5 \cdot 2 = 34.$$

Setzt man für T ein, so erhält man $T = (4, 4, 6)$.
(**1 Punkt**)
Der Mittelpunkt der Kugel liegt in der Ebene ε_1 und auf der Geraden g, die durch T geht und in Richtung Ebenennormale $\mathfrak{n}$ weist. Wir müssen also

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und ε_1 schneiden:

$$\begin{aligned} 3(4+\lambda) - 8 - 2(6+5\lambda) + 1 &= 0 \\ -7 - 7\lambda &= 0 \\ \lambda &= -1. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in g ein, so erhalten wir $M = (3, 4, 1)$.
(**1 Punkt**)
Die Gleichung der Kugel lautet also

$$\kappa: \ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 + (x_3 - 1)^2 = r^2,$$

und r^2 erhalten wir durch Einsetzen des Punktes T, also

$$(4 - 3)^2 + (4 - 4)^2 + (6 - 1)^2 = 26,$$

somit ist die Kugelgleichung

$$\kappa: \ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 + (x_3 - 1)^2 = 26.$$

(**1 Punkt**)
Den Schnitt der Kugel mit der x_1x_2–Ebene findet man durch die Gleichung dieser Ebene $x_3 = 0$. Setzen wir das in die Kugelgleichung ein, so erhalten wir

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = 26 - 1 = 25.$$

Mittelpunkt und Radius lassen sich daraus leicht ablesen:

$$M = (3, 4, 0) \qquad r = 5.$$

(**1 Punkt**)

(b) Beginnen wir damit, die Brennpunkte der Hyperbel zu bestimmen. Dazu transformieren wir die Hyperbelgleichung in Standardform, indem wir durch 20 dividieren:

$$\frac{x_1^2}{5} - \frac{x_2^2}{20} = 1.$$

Wir sehen also $a = \sqrt{5}$ und $b = 2\sqrt{5}$.
(**1 Punkt**)
Aus $e^2 = a^2 + b^2$ ergibt sich dann $e^2 = 25$ und $e = 5$. Die Brennpunkte sind also $F_1 = (-5, 0)$ und $F_2 = (5, 0)$. Die Menge aller Punkte mit senkrechten Brennstrahlen muss $\overrightarrow{XF_1} \perp \overrightarrow{XF_2}$ erfüllen, also verschwindet das innere Produkt dieser beiden Vektoren:

$$0 = \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 5 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - 25 + x_2^2.$$

(**1 Punkt**)
Schließlich müssen die Punkte noch die Hyperbelgleichung erfüllen, und wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I: \ & 4x_1^2 - x_2^2 = 20 \\ II: \ & x_1^2 + x_2^2 = 25. \end{aligned}$$

Addition der Gleichungen führt auf $5x_1^2 = 45$, also $x_1^2 = 9$. Setzt man dieses Ergebnis in II ein, so sieht man sofort $x_2^2 = 16$. Die vier Punkte sind also

$$P_1 = (3, 4), \quad P_2 = (-3, 4), \quad P_3 = (3, -4), \quad P_4 = (-3, -4).$$

(**2 Punkte**)