13 Integralrechnung

13.1 Begriffsbildung

Definition 13.1. Gegeben sei eine Funktion $f\colon y = f(x)$ auf einem Definitionsintervall D. Eine Funktion F heißt *Stammfunktion* der Funktion f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt. Das Aufsuchen einer Stammfunktion heißt *Integrieren*.

Satz 13.2. *Mit jeder Stammfunktion F einer gegebenen Funktion f ist auch jede Funktion $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktion der Funktion f.*
Umgekehrt: Außer $F + c$ gibt es keine weiteren Stammfunktionen von f, d.h. zwei verschiedene Stammfunktionen F_1 und F_2 einer gegebenen Funktion f unterscheiden sich nur um eine additive Konstante c.

Definition 13.3. Gegeben sei eine Funktion $f\colon y = f(x)$. Wenn f eine Stammfunktion F besitzt, so bezeichnen wir die Menge aller Stammfunktionen $F(x) + c$, mit $c \in \mathbb{R}$, als das *unbestimmte Integral* der Funktion f und schreiben:

$$\int f \,\mathrm{d}x \text{ oder } \int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$f(x)$ heißt in diesem Zusammenhang *Integrand*, c heißt *Integrationskonstante*.

13.2 Berechnung von Stammfunktionen (bzw. unbestimmten Integralen

Grundintegrale:

$$\begin{aligned}
\int x^\alpha \,\mathrm{d}x &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1,\\
\int x^{-1} \,\mathrm{d}x &= \ln|x| + c,\\
\int \sin x \,\mathrm{d}x &= -\cos x + c,\\
\int \cos x \,\mathrm{d}x &= \sin x + c,\\
\int \tan x \,\mathrm{d}x &= -\ln|\cos x| + c,\\
\int \cot x \,\mathrm{d}x &= \ln|\sin x| + c,\\
\int e^x \,\mathrm{d}x &= e^x + c,\\
\int a^x \,\mathrm{d}x &= \frac{a^x}{\ln a} + c, a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}.
\end{aligned}$$

Summen- und Differenzenregel:

Das Integral der Summe (Differenz) zweier Funktionen ist gleich der Summe (Differenz) der beiden Integrale:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Also: Summen und Differenzen werden *gliedweise* integriert.

Konstantenregel:

Einen konstanten Faktor im Integranden kann man vor das Integrationszeichen ziehen:

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ für } k \neq 0.$$

Substitutionsmethode:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(y))\phi'(y)\,\mathrm{d}y.$$

Partielle Integration:

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

13.3 Berechnung von bestimmten Integralen

Definition 13.4. Der Wert $F(b)-F(a)$ wird als das *bestimmte Integral* der Funktion $f = F'$ mit der Obergrenze b und der Untergrenze a (kurz: Integral von f von a bis b bzw. Integral von f zwischen a und b) bezeichnet. In Zeichen:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Bemerkung (Numerische Integration). Viele Funktionen besitzen keine durch elementare Funktionen ausdrückbare Stammfunktion und sind daher auch nicht durch Rückführung auf elementare Integrale berechenbar.
Für diese Fälle gibt es *numerische Näherungsverfahren* (Rechtecksformel, Trapezformel, Simpson'sche Formel). Da diese Verfahren den Wert des Integrals nur annähern ist es wichtig den Fehler, die Differenz zum „wahren Wert“, abzuschätzen.

Satz 13.5 (Hauptsatz der Integralrechnung). *Für jede auf a, b stetige Funktion f existiert das (bestimmte) Integral*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sein Wert ist eine reelle Zahl und berechnet sich durch $F(b) - F(a)$, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f bezeichnet. Diese Zahl beschreibt den orientierten Flächeninhalt *der Ordinatenmenge zwischen a und b, d.h. die oberhalb der x-Achse liegenden Teile der Ordinatenmenge haben einen positiven, die unterhalb der x-Achse liegenden Teile einen negativen Flächeninhalt, und das Integral beschreibt die Summe dieser Flächeninhalte.*

Viele Bespiele und eine etwas ausführlichere Einführung in die Integralrechnung finden sich in folgendem Buch (aus welchen auch in diesem Handout zitiert wurde):
Götz, Reichel, Müller, Harnisch, Mathematik-Lehrbuch 8, Österreichischer Bundesschulverlag Schulbuch GmbH & Co.KG, Wien 2007.