Übung: Differentialgleichungen für LAK

WS 16/17

1. Stammfunktionen als Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = f(x)$.

   (a) Sei $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ stetig. Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = f(x)$.

   (b) Sei zusätzlich für $x_0 \in]a,b[$ die Anfangsbedingung $y(x_0) = c_0$ ($c_0 \in \mathbb{R}$) vorgegeben. Ist die zugehörige Lösung eindeutig?

   (c) Sei nun $E =]-1,1[\cup]2,3[$ und $f : E \to \mathbb{R}$ stetig. Ist das Anfangswertproblem

   $$\begin{cases} y'(x) &= x \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

   auf E eindeutig lösbar?

2. Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'(x) = ky(x)$ für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $k \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $y(x) = ce^{kx}$.
   (*Hinweis:* Verwenden Sie die Hilfsfunktion $h(x) := e^{-kx}y(x)$).

3. In einer Bakterienkultur sei die Vermehrungsrate proportional zur derzeitigen Anzahl an Bakterien. Formulieren Sie dies in Form einer Differentialgleichung.

   (a) Angenommen die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 4 Stunden. Wieviele Bakterien sind dann nach 12 Stunden vorhanden?

   (b) Wieviele Bakterien waren es ursprünglich, wenn nach 3 Stunden 10000 und nach 5 Stunden 40000 Bakterien vorhanden sind?

4. Ab dem Zeitpunkt des Todes eines Lebewesens zerfällt der im Körper vorhandene Kohlenstoff C^{14} derart, dass die zum Zeitpunkt t vorhandene Kohlenstoffmenge $x(t)$ einer Differentialgleichung der Form

   $$\dot{x} = ax$$

   mit $a < 0$ genügt. Die mittlere Zerfallsrate $\dot{x}(t)$ ist also der vorhandenen Menge $x(t)$ proportional.

   (a) Berechnen Sie die Proportionalitätskonstante a aus der Information, dass C^{14} eine Halbwertszeit (= Zeitraum, in der jeweils die Hälfte der vorhandenen Menge zerfällt) von 5700 Jahren besitzt.

   (b) Am 19. September 1991 wurde durch Bergwanderer beim 3208 m hohen Tisenjoch in den Ötztaler Alpen eine Eisleiche gefunden. Mithilfe der Radiokohlenstoffdatierung wurde der Todeszeitpunkt des Mannes bestimmt, und somit hat es sich herausgestellt, dass es sich um die einzige (bekannte) erhaltene, durch natürliche Gefriertrocknung konservierte Leiche aus der Kupfersteinzeit (auch als Spät- bzw. Endneolithikum bezeichnet) in Mitteleuropa handelte. Unter der Bekanntgabe dass anhand von Messungen in den Knochen noch 53% des ursprünglichen C14-Gehalts festgestellt wurde, finden Sie das Alter der Mumie.

5. (a) Bestimmen Sie das Richtungsfeld und Isoklinen der Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ auf dem Gebiet $G = \mathbb{R} \times]0, \infty[$.

   (b) Betrachten Sie Ihr Bild aus (a), um die Lösungen der Differentialgleichung zu erraten. Verifizieren Sie, dass es sich tatsächlich um Lösungen handelt

6. (a) Für welche der folgendenden DGL existieren konstante Lösungen?

   (α) $y' = e^{y^2}$, (β) $\dot{E}(t) = \frac{k}{N}(N - E(t))$, ($\gamma$) $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

   (b) Seien I, J Intervalle und $g : I \to \mathbb{R}$, $h : J \to \mathbb{R}$ stetig. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(x) = g(x)h(y)$$

   Zeigen Sie: ist y_0 eine Nullstelle von h, so ist $y(x) \equiv y_0$ eine konstante Lösung.

7. Bestimmen Sie die Ordnung der folgenden (Systeme von) Differentialgleichungen und stellen Sie fest, ob diese linear bzw. autonom sind.

   (a) $y^{(4)} + (x^2 y)'' = 0$ (b) $y'' = x^3 + y + (y')^2$.

   (c) $\begin{aligned} y_1' &= y_1 y_2 \\ y_2' &= y_1 - 4y_2 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} y_1' &= x^5 y_2 - y_1 \\ y_2' &= y_2 + y_1 \end{aligned}$

8. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{x}{1 + e^y}, \quad y(0) = 0.$$

   Können Sie diese Lösung explizit angeben?

9. Die Größe der Thunfischpopulation im Mittelmeer werde (nach Normierung aller Konstanten, etwa Wachstumsrate oder Sättigungsniveau) durch die logistische Gleichung

$$\begin{aligned} y' &= y \cdot (1 - y) \\ y(0) &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

   beschrieben, wenn keine äußeren Einflüsse vorliegen. Wir nehmen nun zusätzlich an, dass Thunfische mit einer konstanten Fangrate $h > 0$ gefangen werden. Begründen Sie verbal, warum die entsprechend modifizierte Differentialgleichung für y von der Form

$$\begin{aligned} y' &= y \cdot (1 - y) - h \\ y(0) &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \qquad (\star)$$

   ist. Lösen Sie dieses Anfangswertproblem für den Wert $h = \frac{3}{4}$ (hohe Fangrate) und zeigen Sie, dass es einen Zeitpunkt $0 < t^* < \pi/\sqrt{2}$ gibt, an dem $y(t^*) = 0$ gilt, also alle Thunfische ausgestorben sind.

10. Nun sei im Modell der vorigen Aufgabe die Fangrate $h = 5/36$ (klein bzw. gemäßigt). Bestimmen Sie die Lösung von $(\star)$ in diesem Fall explizit. Zeigen Sie, dass nun

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 5/6.$$

Gibt es Anfangswerte $0 < y_0 < 1$, für die die Lösung konstant gleich y_0 auf ganz $\mathbb{R}$ ist? Skizzieren Sie die Lösung y zusammen mit den allfälligen konstanten Lösungen.

11. (a) Was versteht man unter der Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I. (Definition, geometrische Bedeutung, Beispiele.)

    (b) Zeigen Sie, dass Lipschitz-Stetigkeit gleichmäßige Stetigkeit impliziert, aber nicht umgekehrt (Gegenbeispiel).

    (c) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion, die Lipschitz-stetig, aber nicht (überall) differenzierbar ist.

    (d) Zeigen Sie, dass jede stetig differenzierbare Funktion auf einem kompakten Intervall automatisch Lipschitz-stetig ist. Zeigen Sie außerdem, dass eine stetig differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall nicht (global) Lipschitz-stetig zu sein braucht

12. Bestimmen Sie explizit die Folge der Picard-Iterierten für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= y \\ y(0) &= C \end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass diese gegen die Lösung konvergiert.

13. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= y^{2/3} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

    (a) Zeigen Sie zunächst, dass die Funktionen $\varphi(x) = 0$ und $\psi_0(x) = \frac{1}{27}x^3$ zwei verschiedene Lösungen sind.

    (b) Zeigen Sie: Unendlich viele weitere Lösungen sind für beliebige $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b < 0 < c$ gegeben durch (für $b \leq c$)

$$\psi_{b,c}(x) := \begin{cases} \frac{1}{27}(x-b)^3 & x < b, \\ 0 & b \leq x \leq c, \\ \frac{1}{27}(x-c)^3 & x > c. \end{cases}$$

    Skizzieren Sie diese Lösungen.

    (c) Wie passt diese Vielfalt von Lösungen zum Satz von Picard-Lindelöf?

14. (freiwillige Aufgabe) *Die Lipschitz Bedingung vom Satz von Picard-Lindelöf ist für Eindeutigkeit hinreichend, aber nicht notwendig:* zeige, dass das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

eine eindeutige Lösung hat.

Hinweis. Methode der getrennten Variablen. Verwenden Sie die Substitution $s = t^{1/3}$ um $\int \frac{1}{1+t^{2/3}} dt$ zu berechnen.

15. Ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= \sin(xy) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

($y_0 \in \mathbb{R}$) eindeutig lösbar? Auf welchem Bereich?

Hinweis. Beweis vom Satz von Picard Lindelöf. Zeigen Sie, dass für jedes Rechteck $Q_N = [x_0 - N, x_0 + N] \times [y_0 - N, y_0 + N]$ ($N \in \mathbb{N}$), die Funktion $f(x, y) = \sin(xy)$ die Lipschitz Bedingung bzgl y mit einer globalen Lipschitz konstante L_N erfüllt. Berechnen Sie dann die entsprechende Konstante $\beta = \min\{N, N/\max_{(x,y)\in Q_N} |f(x, y)|\}$.

16. Zeigen Sie: die Differentialgleichung $y' = f(ax + by + c)$ mit $b \neq 0$ geht durch die Substitution $z := ax + by + c$ in eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen über. Verwenden Sie dies, um Lösungen der folgenden Differentialgleichung zu finden:

$$y' = (x + y)^2$$

17. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

    (a) Was versteht man unter einer Stammfunktion für f? Wiederholen Sie aus der Analysis Bedingungen für die Existenz einer Stammfunktion (Kurvenintegrale, Integrabilitätsbedingung, ...).

    (b) Wiederholen Sie die Begriffe differenzierbare Kurve (Weg, Pfad) und Tangentialvektor.

Geben Sie zu den Differentialgleichungen (mit Anfangsbedingungen) in den folgenden beiden Aufgaben jeweils ein äquivalentes System erster Ordnung (mit entsprechenden Anfangsbedingungen) an:

18. (a) (Nichtlineare Schwingung)

$$\begin{aligned} y'' &= -f(y) \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1 \end{aligned}$$

    ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig).

(b) (Kraftgesetz mit Reibung)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F(t, x, \dot{x}) \\ x(t_0) &= x_0 \\ \dot{x}(t_0) &= x_1 \end{aligned}$$

($m > 0$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig).

19. (a) $y''' = 2y-(y')^2+5y''$. Welche Anfangsbedingungen sind für eindeutige Lösbarkeit erforderlich?

    (b) Lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung:

    $$y^{(m)} = g(x) + a_0(x)y + \ldots a_{m-1}(x)y^{(m-1)}$$

    Welche Anfangsbedingungen sind für eindeutige Lösbarkeit erforderlich? Ist das äquivalente System erster Ordnung selbst linear (Matrixschreibweise)?

20. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' + 2y &= e^{-x} \\ y(0) &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

21. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= 1 - \frac{1}{\sin(y - x + \frac{\pi}{2})} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

22. Zeigen Sie: die Differentialgleichung $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ geht durch die Substitution $z := \frac{y}{x}$ in eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen über. Verwenden Sie dies, um Lösungen der folgenden Differentialgleichung zu finden:

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}.$$

23. Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} - 1 - e^{-\frac{y}{x}} \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

24. Wie lautet die Lösung des folgenden Anfangswertproblems?

$$\begin{aligned} 2x\sin(y) + \cos(y)x^2y'(x) &= 0 \\ y(1) &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

25. Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGL:

$$xy^2 + y - xy' = 0$$

(Hinweis: Finden Sie einen integrierenden Faktor der Form $m(y)$.)

26. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$h(x,y) + g(x,y)y' = 0\,.$$

Zeigen Sie: hängt $f := \frac{\partial_y h - \partial_x g}{h}$ nur von y ab, so ist $m(y) := e^{-F(y)}$ ein integrierender Faktor, wobei F eine Stammfunktion von f bezeichnet.

27. Finden Sie die Lösung $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ des inhomogenen linearen Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 + e^{3x} \end{aligned}$$

mit $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. (Hinweis: Finden Sie zuerst $z := y_1 + y_2$ und $w := y_1 - y_2$).

28. Gegeben ist das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + x \\ y_2' &= 4y_1 - 3y_2 + 2 \end{aligned}$$

auf $I = \mathbb{R}$.

(a) Bilden $\varphi_1(x) = \binom{e^{-x}}{2e^{-x}}$ und $\varphi_2(x) = \binom{xe^{-x}}{(2x-1)e^{-x}}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für die zugehörige homogene Gleichung?

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems mittels der Methode der Variation der Konstanten. Wie kann die allgemeine Lösung des Systems dargestellt werden?

29. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' - y = \sin x \qquad (*)$$

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi_1(x) = e^x$, $\varphi_2(x) = e^{-x}$ eine Basis des Lösungsraums der zugehörigen homogenen Gleichung bilden (Wronski-Determinante).

(b) Bilden Sie das äquivalente 2×2 System und bestimmen Sie eine spezielle Lösung mittels Variation der Konstanten. Wie lautet die allgemeine Lösung von $(*)$?
Bemerkung: ein Fundamentalsystem von Lösungen für das zugehörige homogene System wurde in der Vorlesung gegeben.

30. Es sei $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ eine nicht triviale Lösung des Systems

$$\frac{d\phi}{dt} = A\phi \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie dass die Funktion $t \to ||\phi(t)||$ monoton wachsend ist. $\Big($Hier bezeichnet $||v||$ die Länge des Vektors $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\Big)$.

Hinweiss: Zeige dass $\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2 > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

31. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen für die folgenden Differentialgleichungen.

    (a) $y''' - y'' + y' - y = 0.$

    (b) $y'' - 5y' + 6y = 0.$

32. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0, \quad (x > 0), \tag{$*$}$$

wobei $a, b \in \mathbb{C}$ Konstanten seien. Man zeige: Eine Funktion $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ ist genau dann Lösung von $(*)$ wenn die Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definiert durch $\psi(x) := \varphi(e^x)$ Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + (a-1)y' + by = 0$$

ist. Man gebe ein Fundamentalsystem von $(*)$ für den Fall $a = 1, b = -4$.

33. Es sei $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für die Differentiagleichung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Weiterhin es seien

$$\psi_1 = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \quad \psi_2 = d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2,$$

wobei $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $W(\psi_1, \psi_2)$ die Wronski Determinante die zu $\{\psi_1, \psi_2\}$ entspricht. Es ist zu zeigen:

    (a) $W(\psi_1, \psi_2) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} W(\varphi_1, \varphi_2)$

    (b) ψ_1, ψ_2 sind linear unabhängig genau dann wenn $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

34. Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

   (a) $y^{(3)} - 2y'' - 4y' + 8y = 0$
   (b) $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$

35. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y'' - 3y' + 2y = x$

(b) $y'' - 3y' = x$

(c) $y^{(3)} + y'' + y' = \sin x + \cos x$

(d) $y^{(4)} + 2y'' + y = 25e^{2x}$

36. Die Schwingung eines harmonischen Oszillators der Eigenfrequenz ω_0 unter der Wirkung einer periodischen äußeren Kraft $a\cos(\omega t)$ wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = a\cos(\omega t) \qquad (\omega_0,\, \omega > 0, a \neq 0)$$

   (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.
   (b) Um spezielle Lösungen der inhomogenen Gleichung zu konstruieren, betrachten Sie die Gleichung
   $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = ae^{i\omega t}$$
   Im Fall $\omega \neq \omega_0$ führt der Ansatz $\psi(t) = ce^{i\omega t}$ zum Ziel. Es ist dann $\mathrm{Re}(\psi)$ eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung. Bestimmen Sie diese.

37. Betrachten Sie im Modell der vorigen Aufgabe den Fall $\omega = \omega_0$ (Resonanzfall). Hier empfiehlt sich der Ansatz $\psi(t) = cte^{i\omega_0 t}$. Gehen Sie wieder analog zum vorigen Fall vor. Beschreiben Sie das Verhalten dieser speziellen Lösung für $t \to \infty$.

38. (a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung
   $$y''' - 3y'' = e^{3x}.$$
   (b) Bestimmen Sie eine reellwertige spezielle Lösung der Differentialgleichung
   $$y''' + 2y'' + 2y' = e^{-x}\sin x.$$

39. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Systeme:

(a)

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 + y_2 \end{aligned}$$