Grundbegriffe der Topologie

Wintersemester 2018/19

Andreas Čap

Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien

E-mail address: Andreas.Cap@univie.ac.at

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die erste Version dieses Skriptums ist im Wintersemester 2003/04 entstanden, in dem ich die (damals im Diplomstudium neue), zweistündige Pflichtvorlesung "Grundbegriffe der Topologie" (mit einstündigem Proseminar als Wahlpflichtfach) erstmals gehalten habe. Da sich das Skriptum damals sehr gut bewährt hat, habe ich es später, auch beim Übergang zum Bachelorstudium, nur geringfügig überarbeitet. Im derzeitigen Bachelorcurriculum ist die Vorlesung "Grundbegriffe der Topologie" für das 5. Semester vorgesehen, als Grundlagen stehen somit im wesentlichen die Grundvorlesung über Analysis und lineare Algebra und Geometrie zur Verfügung stehen. Für ambitionierte Studierende sollte ein Besuch auch im dritten Semester möglich sein. In den Vorlesungen über Analysis werden üblicherweise einige allgemeine topologische und metrische Konzepte besprochen. Obwohl es natürlich hilfreich ist, von diesen Begriffen schon einmal gehört zu haben, sollte das zum Verständnis der Vorlesung nicht notwendig sein.

Eine zweistündige Vorlesung über ein so großes Gebiet wie die allgemeine Topologie, deren Konzepte in fast allen Teilen der Mathematik Verwendung finden, stellt natürlich eine Herausforderung bei der Auswahl von Inhalten und Methoden dar. Ich habe mich bemüht, jene Aspekte zu betonen, die in verschiedenen Anwendungen benötigt werden, und eher "interne" Probleme der Punktmengentopologie nur kurz oder gar nicht zu behandeln. Natürlich kommen dabei viele wichtige Themen zu kurz. Ich hoffe aber, dass die Vorlesung eine gute Grundlage liefert, um diese Themen bei Bedarf relativ einfach aus der Literatur lernen zu können. Einzelne Abschnitte des Skriptums sind als "Exkurs" gekennzeichnet. Diese Abschnitte enthalten wichtige Resultate (meist mit vollständigen Beweisen) werden aber (je nach vorhandener Zeit) in der Vorlesung nur kurz oder gar nicht behandelt. Sie sind zur eigenständigen Lektüre oder, bei späterem Bedarf, zum Nachlesen gedacht.

Zum Thema der Punktmengentopologie gibt es sehr viel Literatur, und zwar sowohl Lehrbücher, als auch Referenzwerke. Das Material der Vorlesung sollte im wesentlichen in allen Büchern zu finden sein, die sich nicht ganz auf metrische Räume einschränken. Der Stil und die Präsentation ist natürlich von Buch zu Buch sehr verschieden, und man sollte das passende Buch dem persönlichen Geschmack folgend auswählen. Drei "klassische" Beispiele von deutschsprachigen Lehrbüchern zur Punktmengentopologie sind "Topologie Eine Grundvorlesung" von J. Cigler und H.C. Reichel, Bibliographisches Institut 1987, das Buch "Topologie" von K. Jänich, Springer 1994, und "Mengentheoretische Topologie" von B. von Querenburg, Springer 1979. Bei englischsprachiger Literatur bietet sich natürlich eine noch viel größere Auswahl. Hier ist zu beachten, dass im Englischen "topology" öfters für algebraische Topologie als für Punktmengentopologie verwendet wird. Die Punktmengentopologie wird meist als "general topology" bezeichnet.

Zum Inhalt der einzelnen Kapitel: Als Einstieg wird der aus der Analysis Vorlesung bekannte Übergang vom metrischen Zugang ("ε–δ–Definitionen") zum topologischen Zugang (Umgebungen und offene Mengen) zu Konvergenz und Stetigkeit in Kapitel 1 kurz zusammengefasst und wiederholt. Dann besprechen wir den Unterschied zu den

Konzepten von Cauchy Folgen und gleichmäßiger Stetigkeit, die keine direkte topologische Interpretation erlauben. Eine kurze Besprechung von Konvergenbegriffen für Funktionenfolgen illustriert die Vorteile allgemeiner Begriffe. Schließlich wird noch kurz der topologische Gehalt des Zwischenwertsatzes und des Satzes vom Maximum besprochen.

Im zweiten Kapitel behandeln wir die grundlegende Theorie der topologischen Räume. Metrische Räume und die Spurtopologie werden als Quelle von Beispielen eingeführt. Wir besprechen Inneres, Abschluss und Rand von Teilmengen, Umgebungen und Umgebungsbasen, sowie Basen und Subbasen für Topologien, die beiden Abzählbarkeitsaxiome und Separabilität.

Kapitel 3 ist den Begriffen Stetigkeit und Konvergenz gewidmet, wobei wir gleich mit dem allgemeinen Konzept von Netzen arbeiten. Filter werden nur kurz in einer Bemerkung erwähnt.

Die Hauptthemen von Kapitel 4 sind die Spurtopologie auf einer Teilmenge eines topologischen Raumes sowie die Produkttopologie. Daneben werden allgemeine initiale und finale Topologien kurz besprochen und Homöomorphie wird diskutiert.

Für viele Anwendungen der Topologie sind Kompaktheit und Zusammenhang die wichtigsten Eigenschaften. Diese beiden Eigenschaften bilden den Inhalt von Kapitel 5. Nach einigen grundlegenden Resultaten über kompakte Räume zeigen wir in einem Exkurs dass kompakte Hausdorffräume normal sind und beweisen die fundamentalen Sätze von Urysohn und Tietze über T_4–Räume. Als nächstes besprechen wir Charakterisierungen kompakter Räume mit Hilfe von Netzen und leiten daraus die klassischen Sätze von Tychonov (für endliche Produkte) und Heine–Borel ab. Den Abschluss des Abschnittes über Kompaktheit bildet ein kurzer Exkurs über lokalkompakte Räume. Der Rest von Kapitel 5 studiert kurz Zusammenhang und Bogenzusammenhang.

Das letzte Kapitel des Skriptums beschäftigt sich mit metrischen Räumen. Der Hauptteil des Kapitels ist dem Begriff der Vollständigkeit und der Vervollständigung metrischer Räume gewidmet. Als typische Anwendung der Vollständigkeit beweisen wir den Banach'schen Fixpunktsatz. Während Vollständigkeit selbst keine topologische Eigenschaft ist, liefert der Satz von Baire eine wichtige topologische Eigenschaft solcher Räume. Dieser Satz, der in vielen Anwendungen, vor allem in der Funktionalanalysis, eine bedeutenden Rolle spielt, bildet den Abschluss des Kapitels.

Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei allen StudentInnen bedanken, die mich über Druckfehler früheren Versionen des Skriptums informiert haben.

KAPITEL 1

Einleitung

Als Einstieg in die Vorlesung und als Motivation für die späteren Entwicklungen werden wir kurz einige Teile der Grundvorlesungen über Analysis zusammenfassen. Dies bezieht sich insbesondere auf Begriffe, die mit Konvergenz und Stetigkeit zusammenhängen. Unser Ziel ist einerseits zu sehen, dass sich manche dieser Konzepte statt in der zuerst gelernten "ε–δ–Form" einfacher in "topologischen" Termen (Umgebungen und offene Mengen) formulieren lassen, während andere Konzepte tatsächlich eine Metrik benötigen. Andererseits soll vor allem mit Hilfe von Funktionenräumen gezeigt werden, dass ein allgemeiner Rahmen für diese Konzepte auch schon für die Zwecke der elementaren Analysis nützlich ist.

Zum Verständnis des Kapitels empfehle ich, die folgenden Begriffe aus den Grundvorlesungen kurz zu wiederholen: Mengen, Funktionen, Bilder und Urbilder von Teilmengen, Folgen, Norm und Distanz auf $\mathbb{R}^n$.

Konvergenz und Stetigkeit in $\mathbb{R}^n$

1.1. Die ε–δ–Definitionen. Die Begriffe von Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^n$ und von Stetigkeit von Funktionen, die auf (gewissen Teilmengen von) $\mathbb{R}^n$ definiert sind, werden üblicherweise auf die *euklidische Norm* $\|(x_1,\dots,x_n)\|_2 := \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ aufgebaut. Mit Hilfe dieser Norm definiert man die *euklidische Distanz* $d(x,y) := \|y-x\|_2$ auf $\mathbb{R}^n$.

Betrachten wir nun eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$, also eine Funktion $\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n$, bei der man den Wert der Funktion auf $k\in\mathbb{N}$ als x_k schreibt. Man sagt, die Folge (x_k) *konvergiert* gegen einen Punkt $x\in\mathbb{R}^n$, wenn es für jede reelle Zahl $\varepsilon>0$ einen Index $N\in\mathbb{N}$ gibt, sodass $d(x_k,x)<\varepsilon$ für alle $k\geq N$ gilt.

Für die spätere Verallgemeinerung ist die folgende Sichtweise günstig: Man hat für den Punkt $x\in\mathbb{R}^n$ eine spezielle Familie von Teilmengen gegeben, nämlich die *ε–Kugeln* $B_\varepsilon(x)=\{y\in\mathbb{R}^n : d(x,y)<\varepsilon\}$. Man sollte jede dieser Kugeln als eine Menge von Punkten betrachten, die "nahe bei x liegen". Die Folge (x_k) konvergiert genau dann gegen x, wenn für jede solche Menge U von "nahen" Punkten, ab einem gewissen Index alle Folgenglieder in U liegen. Hier wird "nahe liegen" tatsächlich über einen Abstand definiert wird wir betrachten ineinander geschachtelte Mengen, das ist aber für die allgemeine Perspektive nicht wichtig.

Für eine Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ und einen Punkt $x\in\mathbb{R}^n$ sagt man dann, dass f *stetig in x* ist, wenn es für jede reelle Zahl $\varepsilon>0$ eine reelle Zahl $\delta>0$ gibt, sodass aus $d(x,y)<\delta$ immer $d(f(x),f(y))<\varepsilon$ folgt. Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}^n$ stetig ist. Intuitiv gesprochen bedeutet Stetigkeit in x, dass man dem Funktionswert in x beliebig nahe kommen kann, indem man nur Punkte betrachtet, die hinreichend nahe bei x liegen. Das ist natürlich eine absolute Vorbedingung um (zumindest theoretisch) mit Approximationen arbeiten zu können. (Man bedenke, dass für eine allgemeine Funktion die Funktionswerte in benachbarten Punkten absolut nichts mit einander zu tun haben müssen. Als konkretes Beispiel denke man an die Funktion, die auf den rationalen Zahlen 1 und auf den irrationalen Zahlen 0 ist.)

Die ε–δ–Definition der Stetigkeit lässt sich auch schön mit Hilfe von Kugeln formulieren. Die Bedingung $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ bedeutet ja gerade $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$. Somit ist Stetigkeit in x äquivalent zu der Tatsache, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ gilt. Man benötigt also wieder nur die "Mengen von nahen Punkten", die sowohl in $\mathbb{R}^n$ als auch in $\mathbb{R}^m$ durch die offenen Kugeln beschrieben werden.

1.2. Der Übergang zu topologischen Begriffen. Die Definitionen von Konvergenz und Stetigkeit von oben laufen darauf hinaus, dass gewisse Mengen in ε–Kugeln enthalten sein müssen. Natürlich ist eine Bedingung dieser Art dann auch automatisch für jede Menge erfüllt, die diese Kugel enthält. Motiviert dadurch nennt man eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine *Umgebung* des Punktes $x \in \mathbb{R}^n$, wenn es eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt. Insbesondere ist natürlich für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $B_\varepsilon(x)$ selbst eine Umgebung von x. Die Menge $\mathcal{U}_x$ aller Umgebungen von x heißt das *Umgebungssystem von* x. Das Umgebungssystem hat drei offensichtliche Eigenschaften:

(U1) Für $U \in \mathcal{U}_x$ gilt $x \in U$.
(U2) Für $U \in \mathcal{U}_x$ und $U \subseteq V$ gilt $V \in \mathcal{U}_x$.
(U3) Für $U, V \in \mathcal{U}_x$ gilt $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.

Für den letzten Punkt müssen wir nur beobachten, dass U und V je einen Ball enthalten und dass der kleinere dieser beiden Bälle, dann natürlich im Durchschnitt der beiden Mengen liegt. Natürlich folgt aus (U3) mit Induktion sofort, dass auch der Durchschnitt von endlich vielen Umgebungen von x eine Umgebung von x ist. Mit diesem Begriff lässt sich die Definitionen der Konvergenz aus 1.1 leicht äquivalent umformulieren:

Beobachtung: *Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn es für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}_x$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x_k \in U$ für alle $k \geq N$ gilt.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Zu $U \in \mathcal{U}_x$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt. Da (x_n) gegen x konvergiert, finden wir einen Index $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_k \in B_\varepsilon(x)$ und damit $x_k \in U$ für alle $k > N$ gilt.

($\Leftarrow$) Das ist klar, weil $B_\varepsilon(x) \in \mathcal{U}_x$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. □

Für die Definition der Stetigkeit ist die Umformulierung noch wesentlich effizienter:

Beobachtung: *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in x, wenn für jede Umgebung U von $f(x)$ das Urbild $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Für eine Umgebung U von $f(x)$ gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$ gilt. Da f in x stetig ist, finden wir wie oben bemerkt ein $\delta > 0$, sodass $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ gilt. In Termen von Urbildern sagt das $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)) \subseteq f^{-1}(U)$, also ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x.

($\Leftarrow$) Für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(f(x))$ eine Umgebung von $f(x)$, also ist nach Voraussetzung $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ eine Umgebung von x. Daher gibt es eine Zahl $\delta > 0$, sodass $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ und damit $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ gilt, also ist f stetig in x. □

Beobachtung: *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $x \in \mathbb{R}^n$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$, die gegen x konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei f stetig in x und (x_n) eine Folge, die gegen x konvergiert. Für eine Umgebung U von $f(x)$ ist dann $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x. Weil (x_k) gegen x konvergiert, gibt es einen Index N, sodass $x_k \in f^{-1}(U)$ und damit $f(x_k) \in U$ für alle $k \geq N$ gilt.

($\Leftarrow$) Das ist etwas komplizierter und benötigt spezifische Eigenschaften der Metrik. Zunächst bemerken wir, dass wir diese Richtung beweisen können, indem wir folgendes zeigen. Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die nicht stetig in x ist, gibt es eine Folge (x_n), die gegen x konvergiert, für die aber die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert. Die Verneinung der ε–δ–Definition der Stetigkeit in x ist, dass es eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt, zu der kein "passendes" $\delta > 0$ gibt. Für dieses ε gibt es dann also zu jedem $\delta > 0$ einen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$, für den $d(x, y) < \delta$ aber $d(f(x), f(y)) > \varepsilon$ gilt. Betrachten wir nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $\delta = 1/n$, nennen den entsprechenden Punkt x_n und bilden die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen $d(x, x_k) < 1/k$ konvergiert diese Folge natürlich gegen x, aber wegen $d(f(x), f(x_k)) > \varepsilon$ liegt kein einziges Element der Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $B_\varepsilon(f(x))$. Damit kann aber die Bildfolge nicht gegen $f(x)$ konvergieren. $\square$

Als nächsten Schritt bemerken wir eine besondere Eigenschaft der ε–Kugel $B_\varepsilon(x)$. Für $y \in B_\varepsilon(x)$ ist nach Definition $d(x, y) < \varepsilon$, also $\delta := \varepsilon - d(x, y) > 0$. Für $z \in B_\delta(y)$ ist nach der Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta = \varepsilon$. Das bedeutet aber, dass $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$, also ist $B_\varepsilon(x)$ eine Umgebung von y. Mengen, die Umgebung jedes ihrer Punkte sind, nennt man *offene Teilmengen* von $\mathbb{R}^n$, und Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, deren Komplemente offen sind, heißen *abgeschlossen.* Äquivalent ist eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann offen, wenn es für jeden Punkt $x \in U$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt.

Insbesondere sind der ganze Raum $\mathbb{R}^n$ und die leere Menge $\emptyset$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Ist $\{U_i : i \in I\}$ eine beliebige Familie offener Mengen und $x \in U := \cup_{i\in I} U_i$, dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$. Nach Definition ist U_{i_0} eine Umgebung von x, also ist nach $(U2)$ auch U eine Umgebung von x, also ist U offen. Seien andererseits $U_1, \dots, U_k$ endlich viele offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und $x \in U := U_1 \cap \cdots \cap U_k$. Dann liegt x in jedem U_ℓ, also ist jedes U_ℓ und damit auch U eine Umgebung von x, also U offen. Somit sehen wir, dass beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von offenen Mengen wieder offen sind. Umgekehrt ist eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Umgebung von $x \in \mathbb{R}^n$, wenn es eine offene Menge V gibt, sodass $x \in V$ und $V \subseteq U$ gilt.

Mittels offener Mengen erhält man nun eine schönen Charakterisierung von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ stetig sind, nämlich

Beobachtung: *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei f stetig, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $x \in f^{-1}(U)$ ein Punkt. Dann ist $f(x) \in U$ und weil U offen ist, ist U eine Umgebung von $f(x)$. Da f stetig in x ist, ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x und da der Punkt x beliebig war ist $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

($\Leftarrow$) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und U eine Umgebung von $f(x)$ in $\mathbb{R}^m$. Dann gibt es eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $f(x) \in V$ und $V \subseteq U$. Damit folgt aber $x \in f^{-1}(V)$ und $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, also ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x. Da U beliebig war, ist f stetig in x und da x beliebig war ist f stetig. $\square$

Neben ihrer Einfachheit haben die topologischen Begriffe noch einen weiteren Vorteil: Sie zeigen, dass die Konzepte von Konvergenz und Stetigkeit (und damit natürlich alle daraus abgeleiteten Begriffe und Resultate) nicht so stark von der euklidischen Distanz abhängen, wie es vielleicht auf den ersten Blick erscheint. Betrachten wir etwa die ∞–Norm $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ auf $\mathbb{R}^n$ und die daraus abgeleitete Distanz $\tilde{d}(x, y) = \|y - x\|_\infty$. Offensichtlich gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, also auch $\tilde{d}(x, y) \leq d(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Bezeichnen wir mit $\tilde{B}$ die "Kugeln" bezüglich $\tilde{d}$, dann impliziert das $B_\varepsilon(x) \subseteq \tilde{B}_\varepsilon(x)$ für alle x und all ε. Umgekehrt sieht man leicht, dass

$\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ gilt, und das liefert $\tilde{B}_{\varepsilon/\sqrt{n}}(x) \subseteq B_\varepsilon(x)$ für alle x und ε. Damit sehen wir aber, dass die Normen $\| \; \|_2$ und $\| \; \|_\infty$ zu den selben Umgebungen, also zu den selben Begriffen von offenen Mengen, Konvergenz und Stetigkeit führen. Man kann beweisen, dass dies auch für jede andere Norm auf $\mathbb{R}^n$ gilt. Tatsächlich sind diese Begriffe durch einige wenige schwache Forderungen schon eindeutig festgelegt.

1.3. Cauchy Folgen und gleichmäßige Stetigkeit. Wie wir gesehen haben, lassen sich die Definitionen von Konvergenz und Stetigkeit in Termen von Umgebungen und/oder offenen Mengen umformulieren. Wir werden das in Kürze benutzen, um diese Begriffe im allgemeinen Rahmen von topologischen Räume zu definieren. Das funktioniert für viele verwandte Begriffe, die aus der Analysis bekannt sind, aber nicht für alle. Als Beispiel für Begriffe, die nur in einem eingeschränkteren Rahmen Sinn machen, besprechen wir kurz Cauchy Folgen und gleichmäßige Stetigkeit. Wir werden diese Begriffe später für allgemeine metrische Räume besprechen. Man kann sie weiter auf sogenannte uniforme Räume verallgemeinern, die aber in dieser Vorlesung nicht im Detail besprochen werden.

Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ heißt *Cauchy Folge*, falls es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(x_k, x_\ell) < \varepsilon$ für alle $k, \ell \geq N$ gilt. Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort, dass jede konvergente Folge eine Cauchy Folge ist. Die Umkehrung, nämlich dass jede Cauchy Folge konvergiert, ist eine viel tiefliegendere Tatsache, die als *Vollständigkeit* von $\mathbb{R}^n$ bekannt ist.

Der wesentlich Unterschied zu den vorher behandelten Begriffen ist, dass für die Definition von Konvergenz und Stetigkeit nur Kugeln mit fixem Radius um einen Punkt notwendig waren. Für den Begriff der Cauchy Folge muss man aber für fixes ε die ε–Kugeln um alle Punkte x_k (ab einem gewissen Index) betrachten. Man benötigt also die Tatsache, dass die Wahl einer Zahl ε eine Umgebung (nämlich die ε–Kugel) jedes Punktes in $\mathbb{R}^n$ liefert.

Ganz ähnlich ist die Situation bei der gleichmäßigen Stetigkeit: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, sodass $d(x, y) < \delta$ immer $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ impliziert. Wiederum benötigt man also gleichzeitig die ε–Kugeln um alle Punkte $f(x) \in \mathbb{R}^m$ und die δ–Kugeln um alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n$.

Topologische Konzepte und Resultate in der Analysis

Als nächstes deuten wir kurz an, wie ein allgemeiner Rahmen für Konzepte wie Konvergenz und Stetigkeit schon für aus den Grundvorlesungen bekannte Tatsachen eine konzeptuelle Vereinfachung und Vereinheitlichung liefert.

1.4. Konvergenz von Funktionenfolgen. Aus den Vorlesungen über Analysis sind mindestens zwei Begriffe von Konvergenz für Funktionenfolgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bekannt, nämlich punktweise, und gleichmäßige Konvergenz. Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}^m$. Eine Funktionenfolge (f_k) *konvergiert gleichmäßig* gegen f, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(f(x), f_k(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ und für alle $k \geq N$ gilt.

Um diesen Begriff in einen allgemeinen Rahmen zu stellen, werden wir die Menge $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}^m)$ aller beschränkten Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}^m$ betrachten, und darauf eine Norm durch $\|f\| := \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_2$ definieren. Haben wir das getan, dann können wir wie zuvor $d(f, g) := \|g - f\|_2$ definieren und erhalten damit eine Distanzfunktion auf $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}^m)$. Damit können wir analog wie in 1.1-1.3 vorgehen um alle dort verwendeten Begriffe auf $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}^m)$ zu definieren. Konvergenz in diesem Sinne ist dann genau gleichmäßige Konvergenz.

Nach dem Satz vom Maximum ist jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ beschränkt, also ist die Menge $C([a, b], \mathbb{R}^m)$ der stetigen Funktionen in $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}^m)$ enthalten, und wir können die obige Metrik für stetige Funktionen verwenden. Die Aussage, dass der gleichmäßige Limes einer Folge stetiger Funktionen selbst stetig ist, kann dann so formuliert werden, dass die Teilmenge $C([a, b], \mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}^m)$ abgeschlossen ist.

Betrachten wir speziell den Fall $m = 1$ von reellwertigen Funktionen, dann können wir $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ als eine Funktion $F : C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ interpretieren. Man kann leicht zeigen, dass diese Funktion stetig ist, was zusammen mit den Argumenten aus 1.2 zeigt, dass für eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert, die Folge $\int_a^b f_k(x)dx$ gegen $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert.

Der zweite grundlegende Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen ist die punktweise Konvergenz: Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* gegen eine Funktion f, wenn für jedes $x \in [a, b]$ die Folge $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^m$ gegen $f(x)$ konvergiert. Drückt man die letzte Konvergenzbedingung mittels eines ε aus, so muss man für gegebenes x und ε einen Index N finden, sodass $d(f(x), f_k(x)) < \varepsilon$ für alle $k \geq N$ gilt. Die analoge Bedingung für gleichmäßige Konvergenz ist, dass man zu gegebenem ε einen Index N findet, sodass $d(f(x), f_k(x)) < \varepsilon$ für alle x und für alle $k \geq N$ gilt, was natürlich eine sehr viel stärkere Bedingung ist.

Für die punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen ist ein Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff aus 1.1 nicht offensichtlich. Man kann aber eine Topologie (also ein System von offenen Mengen bzw. Umgebungen) auf dem Raum $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^m)$ aller Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}^m$ finden, sodass das Analogon der Konvergenzbedingung aus 1.2 genau die punktweise Konvergenz liefert. Man kann beweisen, dass diese Topologie nicht durch eine Metrik beschrieben werden kann, siehe 3.9 in [**1**].

1.5. Zwischenwertsatz und Satz vom Maximum. Zum Abschluss der Einleitung besprechen wir kurz zwei topologische Sätze, die in den Vorlesungen über Analysis eine bedeutende Rolle spielen. Der *Zwischenwertsatz* wird meist wie folgt formuliert: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und seien $x_0, x_1 \in I$ mit $f(x_0) < f(x_1)$. Dann gibt es für jeden Wert $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \leq c \leq f(x_1)$ einen Punkt $x \in I$ mit $f(x) = c$.

Die allgemeine Version dieses Satzes ist, dass das Bild eines zusammenhängenden topologischen Raumes unter einer stetigen Funktion selbst zusammenhängend ist. Hierbei bedeutet zusammenhängend zu sein, sich nicht als Vereinigung von zwei nichtleeren disjunkten offenen Teilmengen schreiben zu lassen. Mit diesem Begriff wird der allgemeine Satz fast trivial. Der zweite Schritt ist dann, die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu charakterisieren, und es ist nicht schwierig zu sehen, dass $A \subseteq \mathbb{R}$ genau dann zusammenhängend ist, wenn für alle $a, b \in A$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$ auch $c \in A$ gilt.

In $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ gibt es sehr viele verschiedenartige zusammenhängende Teilmenge, die nicht einfach charakterisiert werden können. Natürlich ist die allgemeine Version des Zwischenwertsatzes auf alle diese Teilmengen anwendbar.

Der *Satz vom Maximum* besagt, dass es für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ einen Punkt $x \in [a, b]$ gibt, sodass $f(y) \leq f(x)$ für alle $y \in [a, b]$. Das beinhaltet einerseits, dass das Bild $f([a, b])$ eine nach oben beschränkte Teilmenge ist, andererseits dass diese Menge ihr Supremum auch enthält.

Die allgemeine Version des Satzes besagt, dass das Bild eines kompakten Raumes unter einer stetigen Funktion ebenfalls kompakt ist. Dabei ist “kompakt” eine topologische Eigenschaft die mittels Überdeckungen durch offene Mengen definiert wird. In dieser allgemeinen Version ist der Satz sehr einfach zu beweisen. Der zweite Schritt ist wiederum, die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. von $\mathbb{R}^n$ zu beschreiben. Es ist einfach zu zeigen, dass jede solche Teilmenge beschränkt und abgeschlossen ist. Schwieriger ist es zu zeigen, dass diese beiden Eigenschaften auch hinreichend für die Kompaktheit sind (Satz von Bolzano–Weierstraß bzw. Heine–Borel).

KAPITEL 2

Topologische Räume

In diesem Kapitel werden wir die grundlegende Theorie topologischer Räume entwickeln. Die auftretenden Begriffe sind sehr allgemein und eher abstrakt. Obwohl wir natürlich verschiedene "wünschenswerte" Eigenschaften von Topologien kennen lernen werden, sollte man nicht erwarten, dass die allgemeine Theorie zeigt, welche Topologien man in einer gegebenen Situation betrachten sollte. Sie liefert nur den Rahmen sowie diverse Möglichkeiten, aus vorhandenen Topologien neue zu konstruieren.

Zum Verständnis des Kapitels empfehle ich, die aus den Grundvorlesungen bekannten Tatsachen über Mengen und Mengenoperationen gründlich zu wiederholen.

Grundlegende Definitionen

Um die Konzepte von Konvergenz und Stetigkeit analog wie in 1.2 formulieren zu können, muss man entweder Umgebungen oder offene Teilmengen vorgeben. Während der Umgebungsbegriff vielleicht intuitiv handlicher ist, hat es sich durchgesetzt die offenen Mengen als grundlegende Objekte zu verwenden und daraus Umgebungen zu definieren. Wie wir sehen werden, ist auch der umgekehrte Weg möglich. Um eine sinnvolle Theorie zu erhalten muss man fordern, dass die gewählten Systeme gewisse Eigenschaften haben, und um die Theorie möglichst allgemein zu halten fordert man so wenige Eigenschaften wie möglich.

2.1. Topologische Räume.

Definition 2.1. (1) Eine *Topologie* auf einer Menge X ist eine Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, die folgende Bedingungen erfüllt:

(O1) $X \in \mathcal{T}$ und $\emptyset \in \mathcal{T}$.

(O2) Sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $U_i \in \mathcal{T}$. Dann ist $\cup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(O3) Für endlich viele Elemente $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ ist auch $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$.

(2) Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X. Wir werden in Zukunft einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ oft nur mit X bezeichnen, es sollte aber immer klar sein, dass wir eine Topologie gewählt haben.

(3) Man *nennt* die in $\mathcal{T}$ enthaltenen Mengen die *offenen Teilmengen* des topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$.

(4) Eine Teilmenge $F \subseteq X$ heißt *abgeschlossen* , wenn $X \setminus F \in \mathcal{T}$ gilt.

(5) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt eine *Umgebung* von x, falls es eine offene Teilmenge $V \in \mathcal{T}$ gibt, sodass $x \in V$ und $V \subseteq U$ gilt. Die Menge $\mathcal{U}_x$ aller Umgebungen von x heißt das *Umgebungssystem* oder der *Umgebungsfilter* von x.

Wir können aus diesen Definitionen sofort einige **Konsequenzen** ableiten:

(i) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\mathcal{F} := \{F \subseteq X : X \setminus F \in \mathcal{T}\}$ die Familie aller abgeschlossenen Teilmengen. Dann gilt:

(A1) $X \in \mathcal{F}$ und $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(A2) Für eine beliebige Familie $\{F_i : i \in I\}$ von Elementen von $\mathcal{F}$ ist $\cap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$.

(A3) Für endlich viele Elemente $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ ist auch $F_1 \cup \cdots \cup F_n \in \mathcal{F}$.

Gibt man sich umgekehrt ein System $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X vor, das die Bedingungen (A1)–(A3) erfüllt, dann definiert $\mathcal{T} := \{U \subseteq X : X \setminus U \in \mathcal{F}\}$ eine Topologie auf X, deren abgeschlossene Mengen genau die Elemente von $\mathcal{F}$ sind.

Beweis. Das folgt direkt aus den Definitionen und den de–Morgan'schen Regeln

$$X \setminus \cup_{i \in I} Y_i = \cap_{i \in I}(X \setminus Y_i)$$
$$X \setminus \cap_{i \in I} Y_i = \cup_{i \in I}(X \setminus Y_i)$$

Der genaue Beweis ist ein Übungsbeispiel. □

(ii) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $U \in \mathcal{U}_x$ für alle $x \in U$ gilt.

Beweis. ($\Rightarrow$) Ist U offen und $x \in U$, dann folgt aus $U \subseteq U$ natürlich $U \in \mathcal{U}_x$.

($\Leftarrow$) Sei $U \subseteq X$ so, dass $U \in \mathcal{U}_x$ für alle $x \in U$ gilt. Dann gibt es zu jedem $x \in U$ eine offene Menge V_x mit $x \in V_x$ und $V_x \subseteq U$. Nach (O2) ist $V := \cup_{x \in U} V_x \subseteq X$ offen und nach Konstruktion ist $V \subseteq U$. Umgekehrt gilt aber für $x \in U$ natürlich $x \in V_x \subseteq V$, also ist $U \subseteq V$ und damit $U = V$ und somit U offen. □

(iii) Die Familie $\{\mathcal{U}_x : x \in X\}$ der Umgebungssysteme erfüllt:

(U1) Jedes $\mathcal{U}_x$ ist nichtleer und für $U \in \mathcal{U}_x$ ist $x \in U$.
(U2) Ist $U \in \mathcal{U}_x$ und $V \subseteq X$ so, dass $U \subseteq V$ gilt, dann ist $V \in \mathcal{U}_x$.
(U3) Für endlich viele $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_x$ ist auch $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{U}_x$.
(U4) Für jedes $U \in \mathcal{U}_x$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}_x$ mit $V \subseteq U$, sodass $V \in \mathcal{U}_y$ für alle $y \in V$ gilt.

Beweis. Nach (ii) ist $X \in \mathcal{U}_x$ für alle $x \in X$. Der Rest von (U1) und (U2) sind aus der Definition offensichtlich. Für (U3) finden für jedes $i = 1, \dots, n$ eine offene Menge V_i mit $x \in V_i \subseteq U_i$. Nach (O3) ist $V := V_1 \cap \cdots \cap V_n$ offen und nach Konstruktion gilt $x \in V \subseteq U_1 \cap \cdots \cap U_n$. In (U4) gibt es nach Definition eine offene Menge V mit $x \in V \subseteq U$ und nach (ii) hat diese die geforderte Eigenschaft. □

(iv) Sei X eine beliebige Menge und $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ ein System von Familien von Teilmengen von X, das die Bedingungen (U1)–(U4) erfüllt. Dann gibt es eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass für jeden Punkt $x \in X$ das Umgebungssystem $\mathcal{U}_x$ gleich $\mathcal{V}_x$ ist.

Beweis. Wir setzen $\mathcal{T} = \{U \subseteq X : \forall x \in U : U \in \mathcal{V}_x\}$ (was in Anbetracht von (ii) die einzige sinnvolle Wahl ist). Nach Definition gilt dann $\emptyset \in \mathcal{T}$. Nach (U1) gibt es für jedes $x \in X$ ein Element $U \in \mathcal{V}_x$ und wegen $X \supseteq U$ folgt $X \in \mathcal{V}_x$ aus (U2). Damit folgt $X \in \mathcal{T}$, also erfüllt $\mathcal{T}$ die Bedingung (O1).

Um (O2) zu verifizieren betrachten wir Elemente $U_i \in \mathcal{T}$ und ihre Vereinigung $U = \cup_{i \in I} U_i$. Zu $x \in U$ finden wir einen Index $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$. Wegen $U_{i_0} \in \mathcal{T}$ gilt $U_{i_0} \in \mathcal{V}_x$ und mittels $(U2)$ folgt $U \in \mathcal{V}_x$. Da $x \in U$ beliebig war liefert das $U \in \mathcal{T}$ und somit ist (O2) erfüllt. Für $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ und $x \in U := U_1 \cap \cdots \cap U_n$ gilt nach Definition $U_k \in \mathcal{V}_x$ für alle k, also folgt $U \in \mathcal{V}_x$ nach (U3). Somit ist auch (O3) erfüllt und $\mathcal{T}$ definiert eine Topologie auf X.

Für $x \in X$ sei nun $\mathcal{U}_x$ das Umgebungssystem bezüglich $\mathcal{T}$. Für $V \in \mathcal{U}_x$ gibt es nach Definition ein Element $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U \subseteq V$. Nach Konstruktion folgt $U \in \mathcal{V}_x$ und damit $V \in \mathcal{V}_x$ wegen (U2). Somit ist $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{V}_x$ für alle $x \in X$. Ist umgekehrt $U \in \mathcal{V}_x$, dann gibt es nach (U4) ein Element $V \in \mathcal{V}_x$ mit $V \in \mathcal{T}$ und $V \subseteq U$. Damit ist $U \in \mathcal{U}_x$, also $\mathcal{U}_x = \mathcal{V}_x$ für alle $x \in X$. Nachdem wir in (ii) offene Mengen durch

Umgebungen charakterisiert haben, sehen wir, dass zwei Topologien auf X, die die selben Umgebungssysteme liefern, schon gleich sein müssen. Damit ist aber die Topologie $\mathcal{T}$ eindeutig bestimmt. $\square$

Beispiel 2.1. (1) Auf jeder Menge X gibt es zwei "extreme" Topologien (die nicht besonders interessant sind): Die *diskrete Topologie* definiert alle Teilmengen der Menge X als offen, d.h. $\mathcal{T}$ ist die ganze Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$. Topologische Räume der Form $(X, \mathcal{P}(X))$ heißen *diskret*. Man sollte sich einen diskreten Raum als eine Ansammlung von isolierten Punkten vorstellen, die nichts miteinander zu tun haben.

Das andere Extrem ist die *Klumpentopologie* oder *indiskrete Topologie*, für die die einzigen offenen Teilmengen X und $\emptyset$ sind. So einen Raum kann man sich tatsächlich als Klumpen ohne jede innere Struktur vorstellen.

(2) Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{F}$ die Menge deren Elemente X und alle endlichen Teilmengen von X sind. Dann erfüllt $\mathcal{F}$ offensichtlich die Bedingungen (A1)–(A3), also erhalten wir eine Topologie auf X, deren abgeschlossene Teilmengen genau die Elemente von $\mathcal{F}$ sind. Diese Topologie heißt die *kofinite* Topologie auf X. Ist die Menge X selbst endlich, dann ist die kofinite Topologie diskret.

(3) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann definieren wir $\mathcal{T}_A := \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$. Dann gilt $A = X \cap A$ und $\emptyset = \emptyset \cap A$, also erfüllt $\mathcal{T}_A$ die Bedingung (O1). Sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $U_i \in \mathcal{T}_A$. Dann finden wir nach Definition für jedes i eine Menge $\tilde{U}_i \in \mathcal{T}$, sodass $U_i = \tilde{U}_i \cap A$ gilt. Dann gilt aber $(\cup_{i\in I}\tilde{U}_i) \cap A = \cup_{i\in I}(\tilde{U}_i \cap A) = \cup_{i\in I}U_i$, also erfüllt $\mathcal{T}_A$ die Bedingung (O2). Analog finden wir für endlich viele Mengen $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}_A$ jeweils eine Menge $\tilde{U}_k \in \mathcal{T}$, sodass $U_k = \tilde{U}_k \cap A$ gilt. Damit ist aber $U_1 \cap \dots \cap U_n = \tilde{U}_1 \cap \dots \cap \tilde{U}_n \cap A$ und $\mathcal{T}_A$ erfüllt (O3). Somit definiert $\mathcal{T}_A$ eine Topologie auf A. Mann nennt diese die *Spurtopologie* bezüglich $\mathcal{T}$ oder die *Teilraumtopologie* auf A . Wir werden diese Topologie in Kapitel 4 von einem konzeptuelleren Standpunkt aus genauer studieren.

2.2. Metrische Räume. Wir werden an dieser Stelle metrische Räume nur als eine Quelle von Beispielen für topologische Räume betrachten, und spezifisch metrische Aspekte in Kapitel 6 besprechen.

Definition 2.2. (1) Eine *Distanzfunktion* auf einer Menge X ist eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften hat:

(D1) "d ist nicht–negativ und trennt Punkte": Für $x, y \in X$ ist $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = x$.
(D2) "Symmetrie": Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.
(D3) "Dreiecksungleichung": Für alle $x, y, z \in X$ ist $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(2) Ein *metrischer Raum* (M, d) ist eine Menge M zusammen mit einer Distanzfunktion d auf M. Man nennt d auch die *Metrik* des metrischen Raumes.

(3) Sei (M, d) ein metrischer Raum, $x \in M$ ein Punkt und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann ist die *ε–Kugel um x* definiert durch $B_\varepsilon(x) := \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\}$.

Proposition 2.2. *Für einen metrischen Raum (M, d) sei $\mathcal{T}$ die Menge jener Teilmengen $U \subseteq M$, sodass für jedes $x \in U$ eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt. Dann definiert $\mathcal{T}$ eine Topologie auf M.*

Bezüglich dieser Topologie sind alle ε–Kugeln offen. Mengen der Form $\{y \in M : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ für $x \in M$ und $\varepsilon \geq 0$, sowie endliche Teilmengen von M sind abgeschlossen.

Beweis. Für den ersten Teil müssen wir die Eigenschaften (O1)–(O3) aus 2.1 verifizieren. (O1) ist aus der Definition offensichtlich. Für (O2) betrachten wir eine Vereinigung $U = \cup_{i\in I}U_i$ von Elementen $U_i \in \mathcal{T}$. Für $x \in U$ gibt es einen Index i_0 mit $x \in U_{i_0}$.

Wegen $U_{i_0} \in \mathcal{T}$ finden wir ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{\varepsilon(x)} \subseteq U_{i_0} \subseteq U$. Da $x \in U$ beliebig war, folgt $U \in \mathcal{T}$, also gilt (O2).

Für (O3) betrachten wir $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ und $x \in U := U_1 \cap \dots \cap U_n$. Für jedes $k = 1, \dots, n$ liegt x in U_k, also finden wir $\varepsilon_k > 0$ mit $B_{\varepsilon_k}(x) \subseteq U_k$. Definiert man nun ε als die kleinste der n Zahlen ε_k, dann ist $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon(x) \subseteq U_k$ für jedes $k = 1, \dots, n$. Damit gilt $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, also ist auch (O3) erfüllt.

Sei nun $x \in M$, $\varepsilon > 0$ und $y \in B_\varepsilon(x)$. Dann ist $d(x, y) < \varepsilon$, also $\delta := \varepsilon - d(x, y) > 0$. Für $z \in B_\delta(y)$ ist nach der Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta = \varepsilon$. Damit ist $z \in B_\varepsilon(x)$, also $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$. Da y beliebig war, ist $B_\varepsilon(x) \in \mathcal{T}$.

Analog sei $y \in M$ ein Punkt mit $d(x, y) > \varepsilon$. Dann ist $\delta := d(x, y) - \varepsilon > 0$ und für $z \in B_\delta(y)$ ist $\varepsilon + \delta = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, z) + \delta$, und damit $d(x, z) > \varepsilon$. Somit ist $\{y : d(x, y) > \varepsilon\} \in \mathcal{T}$ und damit das Komplement $\{z : d(x, z) \leq \varepsilon\}$ abgeschlossen. Die einpunktige Menge $\{x\}$ kann man nach (D1) als $\{z : d(x, z) \leq 0\}$ schreiben, also sind solche Mengen abgeschlossen. Aus der Eigenschaft (A3) aus 2.1 folgt dann, dass jede endliche Teilmenge von M abgeschlossen ist. □

Die in Proposition 2.2 konstruierte Topologie heißt die *metrische Topologie* (bezüglich d) auf M. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar* , falls es eine Metrik d auf X gibt, die als metrische Topologie $\mathcal{T}$ liefert. Aus dem letzten Teil von Proposition 2.2 folgt sofort, dass es topologische Räume gibt, die nicht metrisierbar sind, etwa die indiskrete Topologie auf einer Menge mit mehr als einem Element.

Beispiel 2.2. (1) Auf einer beliebige Menge M kann man die *diskrete Metrik* d durch $d(x, x) = 0$ und $d(x, y) = 1$ für alle $y \neq x$ definieren. Klarerweise ist dann $B_{1/2}(x) = \{x\}$ für alle $x \in M$, also ist die metrische Topologie zu dieser Metrik gerade die diskrete Topologie aus Beispiel (1) von 2.1.

(2) Die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^n$, die in der Analysis verwendet wird, ist gerade die metrische Topologie bezüglich der Euklidischen Distanz aus 1.1 (oder der aus einer anderen Norm gewonnenen Distanz).

(3) Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge. Dann kann man d zu einer Funktion $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ einschränken und diese Funktion erfüllt offensichtlich die Bedingungen (D1)–(D3) aus Definition 2.2. Damit ist auch (A, d_A) ein metrischer Raum und aus Proposition 2.2 erhalten wir die zugehörige metrische Topologie auf A. Andererseits liefert die metrische Topologie $\mathcal{T}$ auf M nach Beispiel (3) aus 2.1 eine Spurtopologie $\mathcal{T}_A$ auf A.

Für $x \in A$ und $\varepsilon > 0$ können wir nun sowohl die ε–Kugel $B_\varepsilon(x) \subseteq M$ bezüglich d, als auch die ε–Kugel bezüglich d_A betrachten, die wir vorübergehend mit $B^A_\varepsilon(x)$ bezeichnen. Dann gilt offensichtlich $B^A_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x) \cap A$ und daraus schließt man leicht (siehe Übungen), dass die metrische Topologie zu d_A mit der Spurtopologie $\mathcal{T}_A$ übereinstimmt.

2.3. Beispiel: Die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Die folgende Konstruktion liefert eine wichtige Familie von metrischen Räumen und damit auch von topologischen Räumen. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ die Menge alle beschränkten Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$, d.h. jener Funktionen, für die es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|f(x)| < K$ für alle $x \in X$ gilt. Für $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ mit zugehörigen Schranken K_f und K_g gilt natürlich $|g(x) - f(x)| < K_f + K_g$, also können wir durch $d(f, g) := \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)|$ eine Funktion $d : \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definieren. Für diese Funktion sind dann die Eigenschaften (D1) und (D2) aus Definition 2.2 offensichtlich erfüllt. Um (D3) zu verifizieren, sei $h \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ eine dritte Funktion. Mittels der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ erhalten wir für fixes $x \in X$ die

Abschätzung

$$|h(x) - f(x)| \leq |h(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \leq d(g, h) + d(f, g).$$

Nachdem das für alle $x \in X$ gilt folgt die Dreiecksungleichung (D3), also ist $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d)$ ein metrischer Raum. Die metrische Topologie bezüglich d heißt die *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz* (vergleiche mit Abschnitt 1.4).

Betrachten wir etwa den Spezialfall $X = \mathbb{N}$, dann haben wir die Menge der beschränkten reellen Folgen zu einem metrischen Raum, und damit auch zu einem topologischen Raum gemacht. "In Wirklichkeit" haben wir der Verifikation, dass d eine Distanzfunktion ist, nur benutzt, dass die Abbildung $(s, t) \mapsto |t - s|$ eine Distanzfunktion auf $\mathbb{R}$ definiert. Die Konstruktion funktioniert analog für beschränkte Funktionen von einer Menge in einen metrischen Raum (siehe Übungen).

Betrachten wir den Spezialfall $X := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist nach dem Satz vom Maximum jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, also können wir die Menge $C([a, b], \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ betrachten und damit macht die Distanzfunktion d von oben auch die Menge $C([a, b], \mathbb{R})$ zu einem metrischen Raum. Damit erhalten wir analog wie die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $C([a, b], \mathbb{R})$. Wir können aber noch mehr zeigen:

Proposition 2.3. *Die Teilmengen $C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ ist in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossen.*

Beweis. Nach Definition müssen wir zeigen, dass die Menge aller unstetigen beschränkten Funktionen offen in $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ ist. Sei also $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die nicht stetig ist. Dann gibt es einen Punkt $x \in [a, b]$, in dem f nicht stetig ist und damit nach 1.2 eine Zahl $\varepsilon > 0$, sodass es für jedes $\delta > 0$ einen Punkt $y \in [a, b]$ mit $|y - x| < \delta$ aber $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$ gibt. Wir behaupten nun, dass eine beschränkte Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $d(f, g) < \varepsilon/3$ ebenfalls unstetig in x sein muss. Dazu beobachten wir, das für $x, y \in [a, b]$ immer

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - g(y)| + |g(y) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \leq |g(y) - g(x)| + \tfrac{2\varepsilon}{3}$$

gilt. Nehmen wir für $\delta > 0$ den Punkt y mit $|y - x| < \delta$ und $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$, dann erhalten wir sofort $|g(y) - g(x)| \geq \varepsilon/3$, also kann g nicht stetig in x sein. $\square$

Bemerkung 2.3. Auf der Menge $C([a, b], \mathbb{R})$ gibt es auch noch andere interessante Distanzfunktionen. Aus der Analysis Vorlesung ist bekannt, dass für stetige Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ auch die Funktion $x \mapsto |g(x) - f(x)|$ stetig ist. Damit kann man durch $d_1(f, g) := \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$ eine Funktion $d_1 : C([a, b], \mathbb{R}) \times C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definieren. Für diese Funktion ist (D2) offensichtlich, (D1) und (D3) folgen aus einfachen Eigenschaften des Integrals, die aus der Analysis bekannt sind (siehe Übungen). Die metrische Topologie auf $C([a, b], \mathbb{R})$ bezüglich d_1 ist sehr verschieden von der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Aus elementaren Eigenschaften des Integrals folgt zwar die Abschätzung $d_1(f, g) \leq (b - a)d(f, g)$, aber es gibt keine Abschätzung in der umgekehrten Richtung.

2.4. Inneres, Abschluss und Rand. Hat man auf einer Menge X eine Topologie $\mathcal{T}$ gewählt, dann erhält man drei Operationen auf Teilmengen von X, die wir als nächstes besprechen wollen.

Definition 2.4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge von X.

(1) Ein Punkt $x \in X$ heißt *innerer Punkt* von A, falls $A \in \mathcal{U}_x$. Die Menge aller inneren Punkte von A heißt das *Innere* A° von A.

(2) Ein Punkt $x \in X$ heißt *Berührungspunkt* von A, wenn $U \cap A \neq \emptyset$ für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}_x$ gilt. Die Menge aller Berührungspunkte von A heißt der *Abschluss* $\overline{A}$ von A.

(3) Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von A, falls es für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}_x$ einen Punkt $y \neq x$ mit $y \in U \cap A$ gibt.

(4) $x \in X$ heißt *Randpunkt* von A, falls jede Umgebung $U \in \mathcal{U}_x$ sowohl Punkte von A, als auch Punkte von $X \setminus A$ enthält. Die Menge aller Randpunkt von A heißt der *Rand* ∂A von A.

Die Begriffe in (1), (2) und (4) sind (hoffentlich) intuitiv einsichtig. Die intuitive Vorstellung für Berührungspunkte (bzw. Randpunkte) sollte sein, dass beliebig nahe bei x Punkte von A (bzw. sowohl Punkte von A als auch Punkte des Komplements von A) liegen. Häufungspunkte werden für Fragen von Konvergenz und Stetigkeit interessant werden und sind an dieser Stelle eher der Vollständigkeit halber angeführt.

Die folgende Proposition sammelt grundlegende Eigenschaften der Operationen “Inneres”, “Abschluss” und “Rand”. Insbesondere zeigt (1), dass A° die größte offene Teilmenge von X ist, die in A enthalten ist, während (2) sagt, dass $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X ist, die A enthält.

Proposition 2.4. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Dann gilt:*

(1) A° ist offen, $A^\circ \subseteq A$ und ist $U \subseteq X$ offen mit $U \subseteq A$, dann ist $U \subseteq A^\circ$.

(2) $\overline{A}$ ist abgeschlossen, $A \subseteq \overline{A}$ und ist $F \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \subseteq F$, dann ist $\overline{A} \subseteq F$.

(3) $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ und diese Teilmenge ist abgeschlossen.

(4) Für das Komplement $X \setminus A$ von A gilt $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$, $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$ und $\partial(X \setminus A) = \partial A$.

Beweis. (1) Sei zunächst $U \subseteq X$ offen mit $U \subseteq A$. Für $x \in U$ ist dann nach Punkt (ii) von 2.1 $U \in \mathcal{U}_x$ also folgt $A \in \mathcal{U}_x$ nach (U2). Damit ist $x \in A^\circ$, also $U \subseteq A^\circ$.

Für $x \in A^\circ$ gilt nach Definition $A \in \mathcal{U}_x$. Nach Eigenschaft $(U1)$ folgt einerseits $x \in A$ und damit $A^\circ \subseteq A$. Andererseits gibt es nach Definition eine offene Teilmenge U mit $x \in U$ und $U \subseteq A$ und wir haben bereits gesehen, dass daraus $U \subseteq A^\circ$ folgt. Damit ist $A^\circ \in \mathcal{U}_x$ und weil das für jedes $x \in A^\circ$ gilt, ist A° nach Aussage (ii) von 2.1 offen.

(4) Die Aussage über den Rand folgt direkt aus der Definition. Die Bedingung $x \in X \setminus \overline{A}$, also $x \notin \overline{A}$ ist nach Definition äquivalent dazu, dass es eine Umgebung von x gibt, die A nicht schneidet, also ganz in $X \setminus A$ liegt. Das ist aber äquivalent zu $X \setminus A \in \mathcal{U}_x$, also zu $x \in (X \setminus A)^\circ$. Somit erhalten wir $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$. Setzen wir für A die Teilmenge $X \setminus B$ ein und benutzen $X \setminus (X \setminus B) = B$, dann erhalten wir $B^\circ = X \setminus (\overline{X \setminus B})$ und daraus die letzte Behauptung.

(2) Für $x \in A$ und $U \in \mathcal{U}_x$ ist $x \in U$, also $U \cap A \neq \emptyset$. Damit folgt $x \in \overline{A}$ und somit $A \subseteq \overline{A}$. Nach (4) ist $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$ und das ist nach (1) offen, also ist $\overline{A}$ abgeschlossen. Ist F abgeschlossen mit $A \subseteq F$, dann ist $(X \setminus A) \supseteq (X \setminus F)$ und da $X \setminus F$ offen ist, erhalten wir aus (1) $(X \setminus F) \subseteq (X \setminus A)^\circ$. Nach (4) folgt $(X \setminus F) \subseteq (X \setminus \overline{A})$, also $\overline{A} \subseteq F$.

(3) Für $x \in X$ ist die Bedingung, dass jede Umgebung von x die Menge A schneidet, äquivalent zu $x \in \overline{A}$. Andererseits ist die Bedingung, dass jede Umgebung auch $X \setminus A$ schneidet, äquivalent zu $A \notin \mathcal{U}_x$, also zu $x \notin A^\circ$. Damit folgt $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. Das ist aber

genau der Durchschnitt der beiden abgeschlossenen Mengen $\overline{A}$ und $X \setminus A^\circ$ und damit abgeschlossen. □

Aus diesem Resultat kann man leicht einige Konsequenzen ablesen: Ist $A = A^\circ$ für eine Teilmenge $A \subseteq X$, dann ist A natürlich offen. Ist umgekehrt A offen, dann ist nach Teil (1) $A \subseteq A^\circ$ also $A = A^\circ$. Somit ist A genau dann offen, wenn $A = A^\circ$ gilt. Analog ist A genau dann abgeschlossen, wenn $A = \overline{A}$ gilt. Insbesondere zeigt das, dass $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ und $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ gelten.

Sind $A, B \subseteq X$ zwei Teilmengen, dann ist $A^\circ \cap B^\circ$ eine offene Teilmenge von X, die in $A \cap B$ enthalten ist. Nach Teil (1) der Proposition gilt somit $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$. Ist andererseits $x \in (A \cap B)^\circ$, dann ist $A \cap B$ eine Umgebung von x. Damit sind aber auch die Obermengen A und B Umgebungen von x, also liegt x in A° und in B°. Damit erhalten wir $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$, und somit $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. Ähnlich ist $A^\circ \cup B^\circ$ eine offene Teilmenge, die in $A \cup B$ enthalten ist, also liefert Teil (1) der Proposition $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$. Hier gilt aber im Allgemeinen keine Gleichheit. Die analogen Resultate für den Abschluss sind $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ (siehe Übungen).

Beispiel 2.4. (1) Sei (M, d) ein metrischer Raum, $x \in M$ ein fixer Punkt und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann ist die ε–Kugel $B_\varepsilon(x)$ in der Teilmenge $\{y \in M : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ enthalten, und wir wissen aus 2.2, dass die letztere Menge abgeschlossen ist. Nach Teil (2) der Proposition gilt also $\overline{B_\varepsilon(x)} \subseteq \{y \in M : d(x, y) \leq \varepsilon\}$. Setzt man $M = \mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Distanz, dann gilt Gleichheit (woran liegt das?). Damit sieht man auch, dass für $M = \mathbb{R}^n$ der Rand $\partial B_\varepsilon(x)$ gerade die Sphäre $\{y : d(x, y) = \varepsilon\}$ vom Radius ε um x ist. Im Allgemeinen kann aber $\{y \in M : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ viel größer sein als der Abschluss von $B_\varepsilon(x)$, wie das Beispiel $\varepsilon = 1$ für eine Menge mit der diskreten Metrik aus Beispiel (1) von 2.2 zeigt.

(2) Betrachten wir die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ der rationalen Zahlen. Nachdem beliebig nahe bei einer rationalen Zahl immer irrationale Zahlen liegen, ist $\mathbb{Q}$ niemals Umgebung einer rationalen Zahl, also ist $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$. Andererseits gibt es für jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ rationale Zahlen, die beliebig nahe bei t liegen. Insbesondere schneidet jedes ε–Intervall um t die Teilmenge $\mathbb{Q}$, also gilt $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Teilmengen eines topologischen Raumes, deren Abschluss der ganze Raum ist, nennt man *dicht*. Damit sehen wir natürlich auch, dass $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ gilt.

Aus Teil (4) von Proposition 2.4 können wir sofort ablesen, dass auch die Teilmenge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen leeres Inneres hat und dicht in $\mathbb{R}$ ist. Das liefert auch ein extremes Beispiel für die Unverträglichkeit des Inneren mit Vereinigungen: Natürlich ist $(\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$. Andererseits gilt aber $\mathbb{Q}^\circ \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

Basen und Subbasen

Als letzten Teil dieses Kapitels besprechen wir einige Möglichkeiten, Analoga der ausgezeichneten ε–Kugeln in metrischen Räume für allgemeine topologische Räume zu betrachten. Zusätzlich liefert das einige nützliche Bedingungen an topologische Räume, die jeweils ausdrücken, dass "der Raum nicht zu groß" (oder zu kompliziert) ist.

2.5. Abzählbarkeit. Zur Erinnerung wiederholen wir kurz einige Tatsachen über abzählbare Mengen: Sei $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Eine unendliche Menge X heißt *abzählbar unendlich* falls es eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \to X$ gibt. Eine Menge X heißt *abzählbar* falls sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Mengen, die nicht abzählbar sind, nennt man *überabzählbar*. Abzählbar unendliche Mengen sind die "kleinsten" unendlichen Mengen. Tatsächlich besitzt jede unendliche Menge eine abzählbar unendliche Teilmenge. Technisch gesehen sind abzählbare Mengen wichtig, weil man sie mit Induktion "abarbeiten" kann.

Es gibt einige technisch nützliche Resultate über abzählbare Mengen:

(i) Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist selbst abzählbar.
(ii) Sind X und Y abzählbar, dann ist auch das Produkt $X \times Y$ abzählbar.
(iii) Sei I eine abzählbare Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei X_i eine abzählbare Menge. Dann ist die Vereinigung $\cup_{i \in I} X_i$ ebenfalls abzählbar.

Nach Definition ist die Menge $\mathbb{N}$ natürlich abzählbar. Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, die gegeben ist durch $f(0) = 0$, $f(2m - 1) = m$ und $f(2m) = -m$ für $m \geq 1$ ist bijektiv, also ist auch $\mathbb{Z}$ abzählbar. Nach (ii) ist auch $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ abzählbar, und man kann $\mathbb{Q}$ als Teilmenge darin auffassen, also ist $\mathbb{Q}$ nach (i) abzählbar. Iterierte Anwendung von (ii) zeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Teilmenge $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar ist.

Die einfachsten Beispiele für überabzählbare Mengen bilden $\mathbb{R}$, die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ (also die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$) und die Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ aller Funktionen von $\mathbb{N}$ in die Menge $\{0, 1\}$. Zwischen diesen Mengen gibt es jeweils bijektive Funktionen, aber es gibt keine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf eine dieser Mengen.

2.6. Umgebungsbasen.

Definition 2.6. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und für $x \in X$ sei $\mathcal{U}_x$ das Umgebungssystem von x.
(1) Eine *Umgebungsbasis* für den Punkt x ist eine Menge $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x$ von Umgebungen von x, sodass es zu jedem $U \in \mathcal{U}_x$ ein $V \in \mathcal{B}_x$ mit $V \subseteq U$ gibt.
(2) Man sagt der Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom* oder "X ist ein *AA1–Raum*" falls jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Der wesentliche Nutzen von Umgebungsbasen ist, dass es oft genügt Bedingungen statt für alle Umgebungen nur für die Elemente einer Umgebungsbasis zu überprüfen. So liegt etwa ein Punkt x klarerweise im Abschluss einer Teilmenge A, wenn jedes Element einer Umgebungsbasis für x die Menge A schneidet. Die Bedeutung des ersten Abzählbarkeitsaxioms ist, dass man in AA1–Räumen üblicherweise mit Folgen arbeiten kann, und nicht die (allgemeineren) Netze benötigt, die wir später kennen lernen werden.

Beispiel 2.6. (1) Für einen beliebigen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und einen Punkt $x \in X$ enthält nach Definition jede Umgebung U von x eine offene Umgebung von x. Damit bilden aber die offenen Umgebungen von x eine Umgebungsbasis für x.

(2) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann enthält jede offene Umgebung von x eine Kugel $B_\varepsilon(x)$ für eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, also bilden diese Kugeln eine Umgebungsbasis für x. Da wir aber zwischen 0 und ε auch eine rationale Zahl finden können ist auch $\mathcal{B}_x := \{B_\varepsilon(x) : \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis für x. Da es eine offensichtliche Bijektion von $\mathcal{B}_x$ auf eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ gibt, sehen wir aus Abschnitt 2.5, dass $\mathcal{B}_x$ abzählbar ist. Somit ist jeder metrische Raum (also auch jeder metrisierbare topologische Raum) ein AA1–Raum.

Man kann die Umgebungsbasis in metrischen Räumen aus Beispiel (2) noch etwas verschönern: Klarerweise bilden auch die Kugeln $B_{1/n}(x)$ eine Umgebungsbasis für x, die noch dazu aus ineinander geschachtelten Mengen besteht. Das funktioniert analog für jeden AA1–Raum, was technisch ziemlich wichtig ist:

Lemma 2.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein AA1–Raum. Dann gibt es für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis $\mathcal{B}_x = \{U_k : k \in \mathbb{N}\}$, sodass $U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$ gilt.*

Beweis. Nach dem ersten Abzählbarkeitsaxiom finden wir eine Umgebungsbasis für x der Form $\{V_k : k \in \mathbb{N}\}$. Definieren wir induktiv $U_0 = V_0$ und $U_k := V_0 \cap \dots \cap V_k$ für $k > 0$. Als Durchschnitt von endlich vielen Umgebungen von x ist U_k eine Umgebung von x, und nach Konstruktion ist $U_{k+1} = U_k \cap V_{k+1}$, also $U_{k+1} \subseteq U_k$ für alle k. Andererseits ist $U_k \subseteq V_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also ist $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis für x. □

2.7. Basen für Topologien.

Definition 2.7. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(1) Eine Familie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ von offenen Mengen heißt eine *Basis* der Topologie $\mathcal{T}$, falls es für jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ und jeden Punkt $x \in U$ ein Element $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V$ und $V \subseteq U$ gibt.

(2) Man sagt, $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, oder "X ist ein AA2–Raum" falls es eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{T}$ gibt.

(3) Ein topologischer Raum heißt *separabel*, falls es eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ gibt, die dicht in X ist, also $\overline{A} = X$ erfüllt.

Analog wie im Fall der Umgebungsbasen genügt es oft, Bedingungen statt für alle offenen Mengen für die Elemente einer Basis der Topologie zu verifizieren. AA2 und Separabilität sind zwei (verwandte) Bedingungen, die sicherstellen, dass ein Raum nicht "zu groß" ist.

Beispiel 2.7. (1) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Nach Definition der metrischen Topologie gibt es für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ und jedes $x \in U$ eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt. Damit bilden die ε–Kugeln eine Basis der metrischen Topologie. Analog wie in Abschnitt 2.6 kann man sich auch auf die ε–Kugeln mit rationalem Radius einschränken.

(2) Aus Beispiel (2) von 2.4 wissen wir, dass die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ dicht ist. Nach Abschnitt 2.5 ist $\mathbb{Q}$ abzählbar, also ist $\mathbb{R}$ separabel. Analog ist $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ eine dichte Teilmenge, also ist auch $\mathbb{R}^n$ separabel.

Lemma 2.7. *Eine Familie $\mathcal{B}$ von Teilmengen einer Menge X ist genau dann Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt.*

(i) $\cup_{U \in \mathcal{B}} U = X$

(ii) *Für $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in U_1 \cap U_2$ gibt es ein $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V \subseteq U_1 \cap U_2$.*

Ist das der Fall, dann liegt eine Teilmenge $U \subseteq X$ genau dann in $\mathcal{T}$, wenn es eine Indexmenge I und für jedes $i \in I$ ein Element $U_i \in \mathcal{B}$ gibt, sodass $U = \cup_{i \in I} U_i$ gilt.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ ist. Da die Elemente von $\mathcal{B}$ nach Definition offen sind, ist für $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ auch $U_1 \cap U_2$ offen, also folgt (ii) direkt aus der Definition einer Basis. Anderseits sind auch beliebige Vereinigungen von Elementen von $\mathcal{B}$ offen. Umgekehrt gibt es nach Definition für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ und einen Punkt $x \in U$ ein Element $B_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_x \subseteq U$. Daraus folgt aber sofort, dass $U = \cup_{x \in U} B_x$ gilt. Damit folgt die letzte Behauptung des Lemmas und daraus folgt (i) wegen $X \in \mathcal{T}$.

Ist umgekehrt $\mathcal{B}$ eine Familie von Teilmengen von X, die (i) und (ii) erfüllt, dann definiert man $\mathcal{T}$ als die Menge aller Teilmengen $U \subseteq X$, sodass es für jedes $x \in U$ ein Menge $V \in \mathcal{B}$ gibt für die $x \in V \subseteq U$ gilt. Wir müssen nur zeigen, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X ist, denn dann ist $\mathcal{B}$ offensichtlich eine Basis. Nach Definition ist $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$ folgt sofort aus (i), also ist (O1) erfüllt. Für $U_i \in \mathcal{T}$ und $x \in U := \cup_{i \in I} U_i$ gibt es einen Index $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$. Wegen $U_{i_0} \in \mathcal{T}$ finden wir $V \in \mathcal{B}$, sodass $x \in V \subseteq U_{i_0}$ gilt. Wegen $U_{i_0} \subseteq U$ und weil x beliebig war, folgt $U \in \mathcal{T}$, also ist (O2) erfüllt. Für $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ und $x \in U_1 \cap U_2$ finden wir $V_i \in \mathcal{B}$ mit $x \in V_i \subseteq U_i$ für $i = 1, 2$. Nach (ii) gibt es ein $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V \subseteq V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. Damit ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ und induktiv schließen wir, dass auch (O3) erfüllt ist. □

Als nächstes können wir den Zusammenhang zwischen Separabilität und dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom klären:

Proposition 2.7. *Jeder AA2–Raum ist separabel. Für metrische Räume sind die beiden Eigenschaften sogar äquivalent.*

Beweis. Sei $\{V_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis für eine Topologie $\mathcal{T}$ auf einer Menge X. Wähle für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_k \in V_k$ und betrachte die abzählbare Teilmenge $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq X$. Sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt, und $U \in \mathcal{U}_x$ eine Umgebung von x. Dann gibt es eine offene Menge V mit $x \in V \subseteq U$, also ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in V_{k_0} \subseteq V \subseteq U$. Insbesondere ist $x_{k_0} \in U$, also $U \cap A \neq \emptyset$. Da U beliebig war ist $x \in \overline{A}$ und da x beliebig war folgt $\overline{A} = X$, also ist X separabel.

Sei umgekehrt (M, d) ein metrischer Raum und $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von M. Dann definieren wir $\mathcal{B} := \{B_{1/n}(x_k) : n, k \in \mathbb{N}, n > 0\}$. Dann ist $\mathcal{B}$ offensichtlich abzählbar. Sei nun $U \subseteq M$ eine beliebige offene Teilmenge und $x \in U$ ein Punkt. Dann gibt es nach Definition eine reelle Zahl $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $1/N < \frac{\delta}{2}$. Da $A \subseteq M$ dicht ist, liegt ein Element von A in $B_{1/N}(x)$, also finden wir einen Index k_0 mit $d(x, x_{k_0}) < 1/N$. Damit ist $x \in B_{1/N}(x_{k_0})$, und diese Kugel liegt in $\mathcal{B}$. Andererseits gilt für $y \in B_{1/N}(x_{k_0})$ die Ungleichung $d(x, y) \leq d(x, x_{k_0}) + d(x_{k_0}, y) < 2/N < \delta$. Damit ist aber $x \in B_{1/N}(x_{k_0}) \subseteq B_\delta(x) \subseteq U$. Somit ist $\mathcal{B}$ eine Basis und daher erfüllt die metrische Topologie auf M das zweite Abzählbarkeitsaxiom. □

2.8. Subbasen. Subbasen sind die kleinsten Familien von offenen Mengen auf die man sich üblicherweise beim Überprüfen von Bedingungen zurückziehen kann. Umgekehrt liefert eine beliebige Familie von Teilmengen eine eindeutige Topologie, die diese Teilmengen als Subbasis hat, was ein einfaches Konstruktionsprinzip für Topologien liefert.

Definition 2.8. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ heißt eine *Subbasis* für die Topologie $\mathcal{T}$, wenn die Menge $\mathcal{B}$, die aus X und allen endlichen Durchschnitten von Elementen von $\mathcal{S}$ besteht, eine Basis für $\mathcal{T}$ ist.

Proposition 2.8. *(1) Ist $\mathcal{S}$ eine beliebige Familie von Teilmengen einer Menge X, dann gibt es eine eindeutige Topologie auf X, für die $\mathcal{S}$ eine Subbasis ist.*
(2) Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gilt: Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ ist genau dann eine Subbasis für $\mathcal{T}$, wenn für jede Topologie $\tilde{\mathcal{T}}$ auf X mit $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$ auch $\mathcal{T} \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$ gilt.

Beweis. Zu einer Menge $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X sei $\mathcal{B}$ die Menge, die aus X und allen endlichen Durchschnitten von Elementen von $\mathcal{S}$ besteht.

(1) Offensichtlich erfüllt $\mathcal{B}$ die Bedingungen (i) und (ii) aus Lemma 2.7, also gibt es nach diesem Lemma eine eindeutige Topologie auf X, für die $\mathcal{B}$ eine Basis, also $\mathcal{S}$ eine Subbasis ist.

(2) ($\Rightarrow$) Sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis für $\mathcal{T}$ und $\tilde{\mathcal{T}}$ eine Topologie auf X mit $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$. Dann folgt mittels (O1) und (O3) sofort $\mathcal{B} \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$ und nach (O2) liegen auch beliebige Vereinigungen von Elementen von $\mathcal{B}$ wieder in $\tilde{\mathcal{T}}$. Nach Lemma 2.7 folgt daraus $\mathcal{T} \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$.

($\Leftarrow$) Sei $\hat{\mathcal{T}}$ die eindeutige Topologie mit Subbasis $\mathcal{S}$ aus (1). Dann gilt nach Voraussetzung $\mathcal{T} \subseteq \hat{\mathcal{T}}$ und nach dem vorigen Schritt folgt aus $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ schon $\hat{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$. Damit ist aber $\mathcal{T} = \hat{\mathcal{T}}$, also $\mathcal{S}$ eine Subbasis für $\mathcal{T}$. □

Beispiel 2.8. Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Definiere $\mathcal{S} := \{U_{x,a,b} : x \in X, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, wobei $U_{x,a,b} := \{f : X \to \mathbb{R} : a < f(x) < b\}$. Die eindeutige Topologie auf $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ mit Subbasis $\mathcal{S}$ heißt die Punkt–offene Topologie oder die *Topologie der punktweisen Konvergenz* . Wir werden sehen, dass der allgemeine Konvergenzbegriff für Folgen (und Netze) in dieser Topologie genau die punktweise Konvergenz liefert.

KAPITEL 3

Stetigkeit und Konvergenz

In diesem Kapitel werden wir die zentralen Begriffe von Stetigkeit und Konvergenz besprechen. Bei der Konvergenz werden wir allerdings nicht nur Folgen betrachten, sondern gleich das (allgemeinere) Konzept von Netzen studieren.

Stetigkeit von Funktionen

3.1. Die grundlegenden Definitionen der Stetigkeit von Funktionen zwischen topologischen Räumen folgen direkt der Motivation aus 1.2.

Definition 3.1. Seien X und Y topologische Räume und sei $x \in X$ ein Punkt.

(1) Man sagt, eine Funktion $f : X \to Y$ ist *stetig in* x, wenn für jede Umgebung U des Punktes $f(x)$ in Y das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ eine Umgebung von x ist.

(2) Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Offensichtlich genügt es in Teil (1), die Bedingung für alle Elemente U einer Umgebungsbasis von $f(x)$ zu verifizieren.

Die Charakterisierung stetiger Funktionen mittels offener Mengen aus Abschnitt 1.2 funktioniert ganz analog in allgemeinen topologischen Räumen:

Proposition 3.1. *Seien X und Y topologische Räume und sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie von Y. Dann sind für eine Funktion $f : X \to Y$ äquivalent:*

(1) f ist stetig.

(2) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen.

(3) Für jede abgeschlossene Teilmenge $F \subseteq Y$ ist $f^{-1}(F) \subseteq X$ abgeschlossen.

(4) Für jedes $U \in \mathcal{S}$ ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen.

Beweis. Die Äquivalenz von (2) und (3) ist offensichtlich, weil für jedes $A \subseteq Y$ natürlich $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ gilt. Da Elemente von $\mathcal{S}$ nach Definition offen sind, ist auch (2)⇒(4) offensichtlich.

(4)⇒(2): Sei $\mathcal{B}$ die von $\mathcal{S}$ erzeugte Basis der Topologie auf Y. Dann gibt es zu $V \in \mathcal{B}$ endlich viele Elemente $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S}$, sodass $V = U_1 \cap \dots \cap U_k$ gilt. Damit ist aber $f^{-1}(V) = f^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f^{-1}(U_k)$. Nach (4) ist jedes $f^{-1}(U_i)$ offen in X also ist $f^{-1}(V)$ nach (O3) offen in X. Ist nur $U \subseteq Y$ eine beliebige offene Teilmenge, dann gibt es nach Lemma 2.7 eine Indexmenge I und für jedes $i \in I$ ein Element $V_i \in \mathcal{B}$, sodass $U = \cup_{i \in I} V_i$ gilt. Damit ist aber $f^{-1}(U) = \cup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ und das ist offen nach (O2).

(1)⇒(2): Sei $U \subseteq Y$ offen und $x \in f^{-1}(U)$. Dann liegt $f(x)$ in der offenen Menge U, also ist U Umgebung von $f(x)$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(U)$ Umgebung von x. Da x beliebig war, ist die Menge $f^{-1}(U)$ Umgebung jedes ihrer Punkte, also offen nach Punkt (ii) von 2.1.

(2)⇒(1): Sei $x \in X$ ein Punkt und $U \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$. Nach Definition gibt es eine offene Teilmenge $V \subseteq Y$ mit $f(x) \in V \subseteq U$. Damit ist aber $x \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$. Nach Bedingung (2) ist $f^{-1}(V)$ offen, also $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x. Da U beliebig ist, ist f stetig in x, und da x beliebig war, ist f stetig. □

Beispiel 3.1. (1) Sei X ein diskreter topologischer Raum. Dann ist jede Teilmenge von X offen, also für jeden topologischen Raum Y jede Funktion $f : X \to Y$ stetig.

Analog ist für jeden topologischen Raum X und einen Raum Y mit der Klumpentopologie jede Funktion $f : X \to Y$ stetig.

(2) Seien (M, d) und $(\tilde{M}, \tilde{d})$ metrische Räume, $f : M \to \tilde{M}$ eine Funktion und $x \in M$ ein Punkt. Dann bilden die Mengen $\{\tilde{x} \in \tilde{M} : \tilde{d}(f(x), \tilde{x}) < \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$ eine Umgebungsbasis für $f(x)$. Somit ist f genau dann stetig in x, wenn das Urbild jeder dieser Umgebungen eine Umgebung von x ist, also eine offen Kugel um x enthält. Daraus folgt sofort, dass f genau dann stetig in x ist, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $d(x, y) < \delta$ immer $\tilde{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$ impliziert. Insbesondere erhalten wir den üblichen Stetigkeitsbegriff für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(3) Betrachte den Raum $C([a, b], \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$ mit der Metrik d aus Abschnitt 2.3. Für stetiges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ können wir $T(f) := \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ bilden, und das definiert eine Funktion $T : C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Wir behaupten, dass diese Funktion stetig ist. Nach Beispiel (2) müssen wir zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, sodass $d(f, g) < \delta$ schon $|T(g) - T(f)| < \varepsilon$ impliziert. Nun ist aber $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g - f)(x)dx$ und $d(f, g) < \delta$ bedeutet gerade, dass $|(g - f)(x)| < \delta$ gilt. Aus der Analysis ist bekannt, dass aus $|(g - f)(x)| < \delta$ immer $|\int_a^b (g - f)(x)dx| < (b - a)\delta$ folgt. Damit sehen wir aber, dass $d(f, g) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ immer $|T(g) - T(f)| < \varepsilon$ impliziert, also ist T stetig.

Wir können Proposition 3.1 auch benutzen, um stetige Funktionen nach $\mathbb{R}^n$ zu charakterisieren:

Korollar 3.1. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann stetig, wenn die Funktionen $f_i : X \to \mathbb{R}$, die definiert sind durch $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, für alle $i = 1, \dots, n$ stetig sind.*

Beweis. Für $i = 1, \dots, n$ sein $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die i–te Projektion, also $p_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$. Offensichtlich ist $|p_i(b) - p_i(a)| \leq d(a, b)$, also sind die p_i stetig. Damit ist für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ die Menge $p_i^{-1}(U_i) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in U\}$ offen in $\mathbb{R}^n$. Wir behaupten, dass $\mathcal{S} := \{p_i^{-1}(U) : U \subseteq \mathbb{R} \text{ offen }, i = 1, \dots, n\}$ eine Subbasis für die Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist. Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller endlichen Durchschnitte von Elementen von $\mathcal{S}$ und sei $\tilde{d}$ die Distanzfunktion zur Norm $\| \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ aus 1.2. Offensichtlich enthält $\mathcal{B}$ jede der Mengen $\{y : \tilde{d}(x, y) < \varepsilon\}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Aus 1.2 wissen wir aber, dass die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^n$ mit der metrischen Topologie von $\tilde{d}$ übereinstimmt. Damit bilden diese Kugeln eine Basis der Topologie, also ist auch die Obermenge $\mathcal{B}$ eine Basis und damit $\mathcal{S}$ eine Subbasis.

Nach der Proposition ist somit $f : X \to \mathbb{R}^n$ genau dann stetig, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ und jedes $i = 1, \dots, n$ die Menge $f^{-1}(p_i^{-1}(U))$ offen in X ist. Nun gilt aber $f(x) \in p_i^{-1}(U)$ genau dann, wenn $p_i(f(x)) = f_i(x) \in U$ gilt, also ist $f^{-1}(p_i^{-1}(U)) = f_i^{-1}(U)$. Somit ist unsere Bedingung äquivalent zur Stetigkeit aller f_i. □

3.2. Komposition. Eine fundamentale Eigenschaft der Stetigkeit ist ihre Verträglichkeit mit Kompositionen. Der einfache Beweis für diese Tatsache ist ein Hinweis darauf, dass die Begriffe gut gewählt sind.

Proposition 3.2. *Seien X, Y, und Z topologische Räume, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen, und sei $x \in X$ ein Punkt. Falls f stetig in x und g stetig in $f(x)$ ist, dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig in x.*

Beweis. Sei $U \subseteq Z$ eine Umgebung von $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Dann ist

$$(g \circ f)^{-1}(U) = \{x \in X : g(f(x)) \in U\} = \{x \in X : f(x) \in g^{-1}(U)\} = f^{-1}(g^{-1}(U)).$$

Da g stetig in $f(x)$ ist, ist $g^{-1}(U) \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$. Da f stetig in x ist, impliziert das aber, dass $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ eine Umgebung von x ist. Damit ist aber nach Definition $g \circ f$ stetig in x. □

Kreativ angewandt liefert dieses einfache Resultat eine Fülle von Konsequenzen:

Korollar 3.2. *Sei X ein topologischer Raum und seien $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen, dann gilt*

(1) Die Vorschriften $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$ definieren stetige Funktionen $f + g, f - g : X \to \mathbb{R}^n$.

(2) Ist $A \subseteq X$ eine dichte Teilmenge, sodass $f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$ gilt, dann ist $f = g$.

(3) Sind $f : X \to \mathbb{R}$ und $g : X \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann definiert auch $fg(x) := f(x)g(x)$ eine stetige Funktion $fg : X \to \mathbb{R}^n$.

Beweis. (1) Betrachten wir zunächst die Addition auf $\mathbb{R}$ als Funktion $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, also $(a, b) \mapsto a + b$. Natürlich gilt $|(a + b) - (a_0 + b_0)| \leq |a - a_0| + |b - b_0|$. Damit folgt aus $d((a, b), (a_0, b_0)) < \varepsilon/2$ sicher $|(a + b) - (a_0 + b_0)| < \varepsilon$, also ist die Addition stetig. Analog definiert $(a, b) \mapsto a - b$ eine stetige Funktion $- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Schreiben wir nun $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ und analog für g, dann ist jede der Komponentenfunktionen stetig. Insbesondere definiert dann für jedes $i = 1, \dots n$ die Vorschrift $x \mapsto (f_i(x), g_i(x))$ eine stetige Funktion $X \to \mathbb{R}^2$. Bilden wir die Komposition mit $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dann sehen wir, dass $x \mapsto f_i(x) + g_i(x)$ eine stetige Funktion $X \to \mathbb{R}$ definiert. Das ist aber gerade die i-te Komponente von $f + g$, also ist $f + g : X \to \mathbb{R}^n$ stetig nach Korollar 3.1. Analog beweist man durch Komposition mit $- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Stetigkeit von $f - g$.

(2) Nach Teil (1) ist $f - g : X \to \mathbb{R}^n$ stetig, also ist $(f - g)^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : f(x) = g(x)\} =: F$ nach Proposition 3.1 eine abgeschlossene Teilmenge von X. Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ bedeutet $\forall a \in A : f(a) = g(a)$ natürlich genau $A \subseteq F$ und wegen der Abgeschlossenheit von F folgt $\overline{A} \subseteq F$ aus Proposition 2.4. Ist A dicht in X, dann gilt somit $X = F$, also $f = g$.

(3) Wir beginnen wieder mit der Multiplikation als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ also mit $(a, b) \mapsto ab$. Wir behaupten, dass diese Funktion stetig ist. In Punkten der Form $(a_0, 0)$ bemerken wir, dass für $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{|a_0|+1}, 1\}$ aus $d((a, b), (a_0, 0)) < \delta$ natürlich $|a| < |a_0| + 1$ und $|b| < \frac{\varepsilon}{|a_0|+1}$ und damit $|ab| = |a||b| < \varepsilon$ folgt. Für Punkte der Form (a_0, b_0) mit $b_0 \neq 0$ rechnen wir

$$|ab - a_0 b_0| = |a(b - b_0) + (a - a_0)b_0| \leq |a||b - b_0| + |a - a_0||b_0|.$$

Setzt man $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2|b_0|}, \frac{\varepsilon}{2(|a_0|+1)}, 1\}$ dann folgt aus $d((a, b), (a_0, b_0)) < \delta$ natürlich $|a| < |a_0| + 1$, $|b - b_0| < \frac{\varepsilon}{2(|a_0|+1)}$ und $|a - a_0| < \frac{\varepsilon}{2|b_0|}$ und damit $|ab - a_0 b_0| < \varepsilon$. Damit ist die Multiplikationsabbildung stetig.

Schreiben wir $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ dann folgern wir analog wir im Beweis von (1), dass $x \mapsto f(x)g_i(x)$ für jedes $i = 1, \dots, n$ eine stetige Funktion $X \to \mathbb{R}$ definiert. Das ist aber genau die i-te Komponente von fg, also folgt die Stetigkeit von fg wieder aus Korollar 3.1. □

Man kann Teil (3) natürlich auch für $n = 1$ anwenden und sieht, dass das punktweise Produkt stetiger reellwertiger Funktionen wieder stetig ist. Induktiv folgt, dass endliche

Summen von endlichen Produkten stetiger Funktionen wieder stetig sind. Betrachten wir zum Beispiel den Raum $M_n(\mathbb{R})$ der reellen $n \times n$–Matrizen als $\mathbb{R}^{n^2}$ (indem wir die Eintragungen von Matrizen irgendwie hintereinander anordnen). Dann schließen wir, dass die Leibniz Formel $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma_1} \dots a_{n\sigma_n}$ für die Determinante eine stetige Funktion $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert. Nun ist die Determinante einer Matrix genau dann ungleich Null, wenn die Matrix invertierbar ist. Da $\{t \in \mathbb{R} : t \neq 0\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, ist ihr Urbild offen in $M_n(\mathbb{R})$, also bilden die invertierbaren Matrizen eine offene Teilmenge von $M_n(\mathbb{R})$.

Netze und Folgen

Zum Studium allgemeiner topologischer Räume benötigt man ein flexibleres Konzept als die aus den Grundvorlesungen bekannten Folgen. Dazu muss man allgemeinere Indexmengen als $\mathbb{N}$ erlauben. Diese Verallgemeinerung ist weitgehend problemlos, der einzige heikle Punkt ist der Begriff der Verfeinerung eines Netzes, der komplizierter ist als der Begriff der Teilfolge, den er verallgemeinert.

3.3. Gerichtete Mengen. Die Glieder einer Folge werden durch die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen indiziert und für Konvergenz und verwandte Begriffe spielt die übliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ eine wichtige Rolle. Die Verallgemeinerung auf Netze besteht darin dass man allgemeinere geordnete Mengen als Indexmengen zulässt. Das erlaubt sowohl größere (also überabzählbare) Indexmengen, als auch allgemeinere Ordnungen. Das ist notwendig, weil es in allgemeinen topologischen Räumen Punkte geben kann, gegen die keine interessanten Folgen konvergieren, siehe [**1**, 2.9].

Aus der Einführung in das mathematische Arbeiten ist der Begriff einer Ordnungsrelation bekannt, der auch als *Halbordnung* bezeichnet wird. Eine Halbordnung auf einer Menge J ist ein Relation $\leq$ auf J, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, also folgendes erfüllt

- Für alle $j \in J$ gilt $j \leq j$.
- Ist $j \leq k$ und $k \leq j$, dann ist $j = k$.
- Aus $j \leq k$ und $k \leq \ell$ folgt $j \leq \ell$.

Eine *Totalordnung* ist eine Halbordnung, für die je zwei Elemente vergleichbar sind, wo also für beliebige Elemente $j, k \in J$ entweder $j \leq k$ oder $k \leq j$ gilt. Ein typisches Beispiel einer Halbordnung, die keine Totalordnung ist, ist die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen einer Menge X mit der Inklusion als Ordnungsrelation, also $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Allgemeine Halbordnungen sind als Indexmengen für eine Verallgemeinerung von Folgen nicht geeignet, man muss noch eine zusätzliche Eigenschaft fordern:

Definition 3.3. Eine *gerichtete Menge* ist eine Menge J zusammen mit einer Halbordnung $\leq$ auf J, sodass für je zwei Elemente $j_1, j_2 \in J$ ein Element $k \in J$ existiert, sodass $k \geq j_1$ und $k \geq j_2$ gilt.

Beispiel 3.3. (1) Ist $\leq$ eine Totalordnung auf J, dann ist $(J, \leq)$ ist eine gerichtete Menge. Für $j_1, j_2 \in J$ gilt nämlich entweder $j_1 \leq j_2$ oder $j_2 \leq j_1$, und wegen $j_1 \leq j_1$ und $j_2 \leq j_2$ ist die Bedingung aus der Definition immer erfüllt. Insbesondere macht die übliche Ordnung die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen zu einer gerichteten Menge.

(2) Sei X ein beliebiger topologischer Raum, $x \in X$ ein Punkt und $\mathcal{B}_x$ eine Umgebungsbasis für x wie in Definition 2.6. (Insbesondere kann man natürlich das ganze Umgebungssystem $\mathcal{U}_x$ als $\mathcal{B}_x$ verwenden.) Wir behaupten, dass die inverse Inklusion, also $U \leq V :\Leftrightarrow V \subseteq U$ die Umgebungsbasis $\mathcal{B}_x$ zu einer gerichteten Menge macht.

Klarerweise definiert $\leq$ eine Halbordnung auf $\mathcal{B}_x$. Für $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_x$ ist $U_1 \cap U_2$ eine Umgebung von x, also gibt es nach Definition einer Umgebungsbasis ein Element $V \in \mathcal{B}_x$ mit $V \subseteq U_1 \cap U_2$. Das bedeutet aber nach Definition $U_1 \leq V$ und $U_2 \leq V$, was die Behauptung beweist. Technisch gesehen ist dies das wichtigste Beispiel für gerichtete Mengen.

3.4. Netze und Konvergenz. Die Definition der Konvergenz von Netzen ist eine offensichtliche Verallgemeinerung des Konvergenzbegriffes für Folgen in $\mathbb{R}^n$ in der Version aus 1.2.

Definition 3.4. (1) Ein *Netz* in einer Menge X ist eine Funktion von einer gerichteten Menge $(J, \leq)$, der *Indexmenge* des Netzes, in die Menge X. Man schreibt üblicherweise den Wert des Netzes in $j \in J$ als x_j und das Netz als $(x_j)_{j\in J}$.
(2) Eine *Folge* ist ein Netz, dessen Indexmenge die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mit der üblichen Ordnung ist.
(3) Sei X ein topologischer Raum und $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungswert* des Netzes (x_j), wenn es für jede Umgebung U von x und jeden Index $j \in J$ einen Index $k \in J$ mit $k \geq j$ gibt, sodass $x_k \in U$ gilt. ("Das Netz liegt immer wieder in U".)
(4) Sei X ein topologischer Raum und $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X. Man sagt, das Netz (x_j) *konvergiert* gegen den Punkt $x \in X$ und schreibt $x_j \to x$, wenn es für jede Umgebung U von x einen Index $j \in J$ gibt, sodass $x_k \in U$ für alle $k \in J$ mit $k \geq j$ gilt. ("Das Netz liegt schließlich in U".)

Natürlich genügt es in den Punkten (3) und (4) statt aller Umgebungen von x die Elemente einer Umgebungsbasis zu betrachten.

Beispiel 3.4. (1) Sei $a < b \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{P}$ die Menge alle Partitionen von $[a, b]$ also die Menge aller Tupel $(x_0, \ldots, x_n)$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Definiere $(y_0, \ldots, y_m) \leq (x_0, \ldots, x_n)$ falls $m \leq n$ und es für jedes $i = 1, \ldots, m-1$ ein $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ gibt, sodass $y_i = x_j$ gilt. (Man sagt dann "$(x_0, \ldots, x_n)$ verfeinert $(y_0, \ldots, y_m)$".) Man sieht leicht, dass $(\mathcal{P}, \leq)$ eine gerichtete Menge ist (siehe Übungen). Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Partition $P = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}$ definiert man nun

$$\bar{I}(f)_P := \textstyle\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$$
$$\underline{I}(f)_P := \textstyle\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$$

Das definiert Netze $(\bar{I}(f)_P)_{P\in\mathcal{P}}$ und $(\underline{I}(f)_P)_{P\in\mathcal{P}}$ in $\mathbb{R}$. Nach Definition ist f genau dann Riemann–integrierbar, wenn diese beiden Netze gegen das selbe Element von $\mathbb{R}$ konvergieren, und dieser Wert ist dann das Riemann–Integral von f.
(2) Sei X eine Menge, $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ die Menge aller beschränkten Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ und d die Distanzfunktion aus Abschnitt 2.3, d.h. $d(f, g) := \sup_{x\in X} |g(x) - f(x)|$. Eine Umgebungsbasis für f in der metrischen Topologie ist dann durch

$$\{g : |g(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X\}$$

gegeben, wobei ε die positiven reellen Zahlen durchläuft. Damit konvergiert ein Netz $(f_j)_{j\in J}$ genau dann gegen f, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $j_0 \in J$ gibt, sodass $|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X$ und alle $j \geq j_0$ gilt. Damit erhalten wir einer Verallgemeinerung des üblichen Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz. Natürlich funktioniert das für $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ auch für die Teilmenge $C([a, b], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen.

3.5. Die Hausdorff–Eigenschaft. In allgemeinen topologischen Räumen kann ein Netz gegen mehrere Punkte konvergieren. Ein extremes Beispiel dafür liefert die kofinite Topologie aus Beispiel (2) von 2.1 auf einer unendlichen Menge X. Betrachten wir etwa $X = \mathbb{N}$ und die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die gegeben ist durch $x_k = k$. Nach Definition enthält eine Umgebung U von $n \in \mathbb{N}$ in der kofiniten Topologie eine offene Menge, die n enthält. So eine offene Menge hat aber endliches Komplement und diese endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein maximales Element N. Für $k > N$ liegen aber dann alle Elemente der Folge in U, also konvergiert die Folge $(x_k)_{k\in N}$ (in der kofiniten Topologie) gegen *jeden* Punkt $n \in \mathbb{N}$

Es gibt aber eine einfache Bedingung an einen topologischen Raum, die sicher stellt (und sogar äquivalent dazu ist, siehe [**1**, 4.2]), dass Netze gegen höchstens einen Punkt konvergieren.

Definition 3.5. Ein topologischer Raum X heißt *Hausdorff Raum* oder T_2*–Raum* falls es zu je zwei Punkten $x \neq y \in X$ Umgebungen $U \in \mathcal{U}_x$ und $V \in \mathcal{U}_y$ gibt, sodass $U \cap V = \emptyset$ gilt.

Proposition 3.5. *Sei X ein Hausdorff Raum und $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X. Dann konvergiert (x_j) gegen höchstens einen Punkt von X.*

Beweis. Nehmen wir an, dass $x_j \to x$ gilt und sei $y \neq x$ ein anderer Punkt von X. Nach Definition finden wir disjunkte Umgebungen $U \in \mathcal{U}_x$ und $V \in \mathcal{U}_y$. Wegen $x_j \to x$ gibt es einen Index $j_0 \in J$ sodass $x_j \in U$ für alle $j \geq j_0$. Würde auch $x_j \to y$ gelten, dann müsste es einen Index $j_1 \in J$ geben, sodass $x_j \in V$ für alle $j \geq j_1$ gilt. Da J gerichtet ist, gibt es einen Index j mit $j \geq j_0$ und $j \geq j_1$, für den dann $x_j \in U \cap V$ gelten würde. Damit kann (x_j) nicht gegen y konvergieren. □

Ist $(x_j)_{j\in J}$ ein konvergentes Netz in einem Hausdorff Raum, dann nennt man den eindeutigen Punkt x, für den $x_j \to x$ gilt, den *Grenzwert* oder den *Limes* des Netzes und schreibt $x = \lim_{j\in J} x_j$.

Ist X ein Hausdorff Raum und $x \in X$ ein Punkt, dann ist die Teilmenge $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen. Für $y \in X \setminus \{x\}$ (also $y \neq x$) gibt es ja eine Umgebung $V \in \mathcal{U}_y$, die eine Umgebung von x nicht schneidet, also insbesondere in $X \setminus \{x\}$ enthalten ist. Damit ist aber $X \setminus \{x\}$ offen, also $\{x\}$ abgeschlossen. Natürlich sind damit alle endlichen Teilmengen von X abgeschlossen.

Die kofinite Topologie auf einer unendlichen Menge X liefert ein Beispiel eines topologischen Raumes der nicht Hausdorff ist, aber in dem jede einpunktige Menge abgeschlossen ist. Jede der Mengen $\{x\} \subseteq X$ ist ja nach Definition abgeschlossen. Andererseits enthält jede Umgebung U eines Punktes $x \in X$ eine offene Menge, die x enthält, also muss $X \setminus U$ endlich sein. Damit kann es für $y \in X$ keine Umgebung $V \in \mathcal{U}_y$ geben, sodass $U \cap V = \emptyset$ gilt, denn dann wäre $X = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ und damit endlich.

Beispiel 3.5. (1) Ist (M, d) ein metrischer Raum, dann ist die metrische Topologie auf M immer Hausdorff. Sind nämlich $x \neq y \in M$ verschiedene Punkte, dann ist $d(x, y) > 0$. Setzt man $\varepsilon := \frac{d(x,y)}{2}$, dann gilt nach der Dreiecksungleichung $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$.
(2) Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ der Raum aller Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz aus Beispiel 2.8. Sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ mit $f \neq g$, dann gibt es einen Punkt $x_0 \in X$ mit $f(x_0) \neq g(x_0)$. Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}|g(x_0) - f(x_0)|$ und betrachte die Mengen $U := \{\varphi : X \to \mathbb{R} : |\varphi(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ und $V := \{\psi : X \to \mathbb{R} : |\psi(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon\}$. Nach Definition sind U und V offen und disjunkt, U enthält f und V enthält g, also ist die Hausdorff Eigenschaft erfüllt.

3.6. Verfeinerungen von Netzen. Die Verallgemeinerung des Begriffes der Teilfolge ist der Begriff der Verfeinerung eines Netzes. Der Begriff ist deutlich komplizierter, weil man allgemeinere Beziehungen zwischen den Indexmengen zulassen muss.

DEFINITION 3.6. (1) Seien $(J, \leq)$ und $(\Lambda, \preceq)$ gerichtete Mengen. Eine Funktion $\varphi : \Lambda \to J$ heißt *Verfeinerungsabbildung* , wenn sie ordnungstreu ist, also $\lambda_1 \preceq \lambda_2 \implies \varphi(\lambda_1) \leq \varphi(\lambda_2)$ erfüllt und es für jedes Element $j \in J$ ein Element $\lambda \in \Lambda$ gibt, sodass $\varphi(j) \geq \lambda$ gilt.

(2) Eine *Verfeinerung* eines Netzes $(x_j)_{j\in J}$ ist ein Netz der Form $(x_{\varphi(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$, wobei Λ eine gerichtete Menge und $\varphi : \Lambda \to J$ eine Verfeinerungsabbildung ist.

Das folgende Resultat ist eine Verallgemeinerung von aus der Analysis bekannten Resultaten für reelle Folgen. Es zeigt einerseits, dass die Begriffe gut gewählt sind, andererseits sieht man aus dem Beweis, wie flexibel der Begriff der Verfeinerung ist:

PROPOSITION 3.6. *Sei X ein topologischer Raum, $(J, \leq)$ eine gerichtete Menge, $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X und $x \in X$ ein Punkt. Dann gilt:*
(1) Falls (x_j) gegen x konvergiert, dann konvergiert auch jede Verfeinerung von (x_j) gegen x.
(2) x ist genau dann Häufungswert von (x_j), wenn es eine Verfeinerung gibt, die gegen x konvergiert.

BEWEIS. (1) Betrachte eine Verfeinerung $(x_{\varphi(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ mit Verfeinerungsabbildung $\varphi : \Lambda \to J$, und sei U eine Umgebung von x. Wegen $x_j \to x$ finden wir einen Index $j_0 \in J$ sodass $x_j \in U$ für alle $j \geq j_0$ gilt. Nach Definition einer Verfeinerung gibt es $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $\varphi(\lambda_0) \geq j_0$. Für $\lambda \succeq \lambda_0$ ist wieder nach Definition $\varphi(\lambda) \geq \varphi(\lambda_0) \geq j_0$, also gilt $x_{\varphi(\lambda)} \in U$ für alle $\lambda \succeq \lambda_0$. Also konvergiert $x_{\varphi(\lambda)}$ gegen x.

(2) ($\Leftarrow$) Sei $(x_{\varphi(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ eine Verfeinerung von $(x_j)_{j\in J}$, die gegen x konvergiert. Sei U eine Umgebung von x und $j_0 \in J$. Nach Definition einer Verfeinerung finden wir $\lambda_1 \in \Lambda$ mit $\varphi(\lambda_1) \geq j_0$. Weil die Verfeinerung gegen x konvergiert, finden wir $\lambda_2 \in \Lambda$ sodass $x_{\varphi(\lambda)} \in U$ für alle $\lambda \succeq \lambda_2$. Nach Definition einer gerichteten Menge gibt es einen Index λ mit $\lambda \succeq \lambda_1$ und $\lambda \succeq \lambda_2$. Damit gilt $\varphi(\lambda) \geq \varphi(\lambda_1) \geq j_0$ und $x_{\varphi(\lambda)} \in U$, also ist x Häufungswert von $(x_j)_{j\in J}$.

($\Rightarrow$) Setze $\Lambda := \{(j, U) \in J \times \mathcal{U}_x : x_j \in U\}$ und definiere $(j_1, U_1) \preceq (j_2, U_2)$ genau dann, wenn $j_1 \leq j_2$ und $U_2 \subseteq U_1$ gilt. Man sieht sofort, dass das eine Halbordnung definiert. Sind (j_1, U_1) und (j_2, U_2) beliebig, dann finden wir $j_0 \in J$ mit $j_0 \geq j_1$ und $j_0 \geq j_2$ und $U_1 \cap U_2$ ist eine Umgebung von x. Da x ein Häufungswert ist, gibt es einen Index $j \geq j_0$, sodass $x_j \in U_1 \cap U_2$ gilt. Damit ist $(j_i, U_i) \preceq (j, U_1 \cap U_2)$ für $i = 1, 2$, also ist $(\Lambda, \preceq)$ eine gerichtete Menge. Nun setzten wir $\varphi(j, U) := j$. Da aus $(j_1, U_1) \preceq (j_2, U_2)$ immer $j_1 \leq j_2$ folgt, ist φ ordnungstreu. Ist $j_0 \in J$ beliebig, dann ist $(j_0, X) \in \Lambda$ und $\varphi(j_0, X) = j_0 \geq j_0$. Damit erhalten wir eine Verfeinerung $(x_{\varphi(j,U)})_{(j,U)\in\Lambda}$.

Sei nun $U_0 \in \mathcal{U}_x$ eine Umgebung. Weil x Häufungswert ist, finden wir einen Index $j_0 \in J$, sodass $x_{j_0} \in U_0$ gilt. Damit ist aber $(j_0, U_0) \in \Lambda$. Ist $(j, U) \in \Lambda$ mit $(j, U) \succeq (j_0, U_0)$, dann ist $U \subseteq U_0$ nach Definition von $\preceq$, und $x_j = x_{\varphi(j,U)} \in U$ nach Definition von Λ. Damit ist aber $x_{\varphi(j,U)} \in U_0$ für alle $(j, U) \succeq (j_0, U_0)$ und die Verfeinerung konvergiert gegen x. □

3.7. Netze und Abschluss. Wir wollen nun zeigen, dass die konvergenten Netze die Topologie eines Raumes bestimmen. Dies zeigt auch erstmals die Bedeutung des ersten Abzählbarkeitsaxioms, das sicher stellt, dass auch die konvergenten Folgen die Topologie bestimmen.

Satz 3.7. *Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit Abschluss $\overline{A}$ und $x \in X$ ein Punkt. Dann gilt:*
(1) Der Punkt x liegt genau dann in $\overline{A}$, wenn es ein Netz $(x_j)_{j\in J}$ mit $x_j \in A$ für alle $j \in J$ gibt, das gegen x konvergiert.
(2) Ist X ein AA1–Raum (siehe Definition 2.6), dann gilt (1) auch für Folgen statt Netze.

Beweis. (1) ($\Leftarrow$) Sei $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz mit $x_j \in A$, das gegen x konvergiert. Ist $U \in \mathcal{U}_x$ eine Umgebung, dann gibt es einen Index $j_0 \in J$, sodass $x_j \in U$ für alle $j \geq j_0$. Insbesondere ist $U \cap A \neq \emptyset$, und da dies für jede Umgebung U gilt, ist $x \in \overline{A}$.

($\Rightarrow$) Ist $x \in \overline{A}$, dann betrachte das Umgebungssystem $\mathcal{U}_x$ als gerichtete Menge mit inverser Inklusion, siehe Beispiel (2) von 3.3. Für $U \in \mathcal{U}_x$ ist $U \cap A \neq \emptyset$, wir wählen einen Punkt $x_U \in U \cap A$ und betrachten das Netz $(x_U)_{U\in\mathcal{U}_x}$. Für eine Umgebung U_0 von x gilt $U \geq U_0$ nach Definition genau dann wenn $U \subseteq U_0$ gilt, also ist $x_U \in U_0$ für alle $U \geq U_0$. Damit konvergiert das Netz (x_U) gegen x.

(2) Wir müssen nur zeigen, dass wir in einem AA1–Raum im Beweis von ($\Rightarrow$) eine Folge statt eines Netzes konstruieren können. Für $x \in \overline{A}$ gibt es nach Lemma 2.6 eine Umgebungsbasis $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ für x, sodass $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots$ gilt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $U_k \cap A \neq \emptyset$, also finden wir einen Punkt $x_k \in U_k \cap A$ und betrachten die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ist U eine beliebige Umgebung von x, dann gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$, sodass $U_N \subseteq U$ gilt. Für $k \geq N$ ist $x_k \in U_k \subseteq U_N \subseteq U$, also konvergiert die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x. □

Beispiel 3.7. Betrachte den Raum $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ der beschränkten Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Metrik d aus Abschnitt 2.3. Dort haben wir gesehen, dass die Teilmenge $C([a,b],\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen abgeschlossen in $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ ist. Aus Beispiel (2) von 3.4 wissen wir, dass die metrischen Topologie auf $B([a,b],\mathbb{R})$ genau die gleichmäßige Konvergenz von Folgen und Netzen liefert. Sei nun $(f_j)_{j\in J}$ ein Netz von stetigen Funktionen, das gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann liegt f im Abschluss von $C([a,b],\mathbb{R})$, also in $C([a,b],\mathbb{R})$ selbst. Dies zeigt, dass der gleichmäßige Limes eines Netzes stetiger Funktionen wieder stetig ist.

3.8. Netze und Stetigkeit 1. Man kann konvergente Netze auch benutzen, um stetige Funktionen zu charakterisieren:

Satz 3.8. *Seien X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Funktion und $x \in X$ ein Punkt. Dann gilt:*
(1) f ist genau dann stetig in x, wenn für jedes Netz $(x_j)_{j\in J}$ in X, das gegen x konvergiert, das Bildnetz $(f(x_j))_{j\in J}$ in Y gegen $f(x)$ konvergiert.
(2) Ist X ein AA1–Raum, dann gilt auch das Analogon von (1) mit Folgen statt Netzen.

Beweis. (1) ($\Rightarrow$) Sei U eine Umgebung von $f(x)$. Da f stetig in x ist, ist $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_x$, also gibt es einen Index $j_0 \in J$ mit $x_j \in f^{-1}(U)$ für alle $j \geq j_0$. Dies bedeutet aber gerade $f(x_j) \in U$ für alle $j \geq j_0$, also $f(x_j) \to f(x)$.
($\Leftarrow$) Ist f nicht stetig in x, dann gibt es eine Umgebung V von $f(x)$, sodass $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist. Damit kann $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x enthalten, also finden wir zu $U \in \mathcal{U}_x$ einen Punkt $x_U \in U \setminus f^{-1}(V)$. Betrachten wir $\mathcal{U}_x$ wieder als gerichtete Menge unter inverser Inklusion, dann definiert $(x_U)_{U\in\mathcal{U}_x}$ ein Netz, das nach Konstruktion gegen x konvergiert. Ebenfalls nach Konstruktion ist aber $x_U \notin f^{-1}(V)$, also $f(x_U) \notin V$. Da V eine Umgebung von $f(x)$ ist, kann das Bildnetz $(f(x_U))_{U\in\mathcal{U}_x}$ nicht gegen $f(x)$ konvergieren.
(2) Wir müssen nur im Beweis von ($\Leftarrow$) für unstetiges f eine passende Folge konstruieren. Dazu betrachten wir eine Umgebungsbasis $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ für x, die $U_i \supseteq U_{i+1}$ für alle i

erfüllt, siehe Lemma 2.6. Ist f unstetig in x, dann finden wir wie oben $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$, sodass $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist. Wie oben folgt $U_k \setminus f^{-1}(V) \neq \emptyset$ und wählen wir x_k in dieser Menge, dann erhalten wir eine geeignete Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Beispiel 3.8. Betrachten wir $C([a,b],\mathbb{R})$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz aus Abschnitt 2.3. Aus Beispiel (3) von 3.1 wissen wir, dass $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ eine stetige Funktion $C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert. Damit sehen wir, dass für ein konvergentes Netz $(f_j)_{j\in J}$ stetiger Funktionen mit Limes f (der nach Beispiel 3.7 selbst stetig ist), das Netz $(\int_a^b f_j(x)dx)_{j\in J}$ gegen $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert.

3.9. Netze und Stetigkeit 2. Es gibt noch einen weiteren technisch nützlichen Zusammenhang zwischen Netzen und stetigen Funktionen. Für eine gerichtete Menge $(J,\leq)$ definiert man eine Topologie auf der Menge $J_\infty := J \cup \{\infty\}$ wie folgt: $U \subseteq J_\infty$ ist genau dann offen, wenn entweder $\infty \notin U$ gilt, oder es einen Index $j_0 \in J$ gibt, sodass $\{j \in J : j \geq j_0\} \subseteq U$ gilt. Dann sind die Bedingungen (O1) und (O2) aus 2.1 offensichtlich erfüllt. Endliche Durchschnitte offener Mengen sind klarerweise offen, sofern wenigstens eine der Mengen den Punkt ∞ nicht enthält. Sind andererseits U_1 und U_2 offen und enthalten beide ∞, dann gibt es Indizes j_i, sodass $\{j : j \geq j_i\} \subseteq U_i$ für $i = 1,2$ gilt. Nach Definition einer gerichteten Menge finden wir einen Index j_0 mit $j_0 \geq j_i$ für $i = 1,2$ und damit ist $\{j : j \geq j_0\} \subseteq U_1 \cap U_2$. Mit Induktion folgt, dass auch (O3) erfüllt ist, also haben wir eine Topologie auf J_∞ definiert.

Proposition 3.9. *Sei X ein topologischer Raum und $f : J_\infty \to X$ eine Funktion. Dann ist f stetig in jedem Punkt $j \in J \subseteq J_\infty$ und f ist genau dann stetig im Punkt $\infty \in J_\infty$, wenn das Netz $(f(j))_{j\in J}$ gegen den Punkt $f(\infty)$ konvergiert.*

Beweis. Für $j \in J \subseteq J_\infty$ ist $\{j\}$ offen, also eine Umgebung von j. Ist U eine Umgebung von $f(j)$, dann ist $\{j\} \subseteq f^{-1}(U)$, also $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von j. Damit folgt die Stetigkeit in j.

Für eine Umgebung U von $f(\infty)$ ist $f^{-1}(U)$ genau dann Umgebung von ∞, wenn es eine offene Menge V gibt, die ∞ enthält und in $f^{-1}(U)$ liegt. Das ist aber äquivalent dazu, dass es einen Index j_0 geben muss, für den $\{j : j \geq j_0\} \subseteq V \subseteq f^{-1}(U)$, also $f(j) \in U$ für alle $j \geq j_0$ gilt. Somit ist aber Stetigkeit in ∞ offensichtlich zu $f(j) \to f(\infty)$ äquivalent. □

3.10. Bemerkungen. (1) In manchen Teilen der Mathematik werden Begriffe von Konvergenz verwendet, die nicht durch Topologien beschrieben werden können. Ein Beispiel für einen (durchaus vernünftigen) Konvergenzbegriff, der nicht durch eine Topologie beschrieben werden kann findet sich in [**1**, 4.2]. Man kann sogar die Konvergenzbegriffe charakterisieren, die von Topologien kommen.
(2) Es gibt eine Umformulierung des topologischen Konvergenzbegriffes, die technisch nützlich ist. Hierbei betrachtet man *Filter* anstatt von Netzen. Diese Version von Konvergenz ist zwar mindestens ebenso handlich wie die Version der Netze, schließt aber nicht direkt an Folgen an. Deshalb wird sie außerhalb der reinen Topologie nur selten verwendet. Wir werden Filter daher nur in Bemerkungen erwähnen, der Hauptteil des Skriptums ist filterlos.

Man definiert einen Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X als eine Familie von Teilmengen von X, sodass $\emptyset \notin \mathcal{F}$ gilt, für $A \in \mathcal{F}$ und $C \subseteq X$ mit $C \supseteq A$ auch $C \in \mathcal{F}$ und schließlich für $A, B \in \mathcal{F}$ auch $A \cap B \in \mathcal{F}$ gilt. Ist X ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt, dann bildet das Umgebungssystem $\mathcal{U}_x$ nach Definition einen Filter auf X. Man sagt, ein Filter $\mathcal{F}$ konvergiert gegen $x \in X$, wenn $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$ gilt. Insbesondere liefert das

Umgebungssystem $\mathcal{U}_x$ einen natürlichen Filter, der gegen x konvergiert. Der Punkt x heißt Häufungspunkt des Filters $\mathcal{F}$, wenn für jedes $A \in \mathcal{F}$ und $U \in \mathcal{U}_x$ der Schnitt $A \cap U$ nichtleer ist.

Eine Verfeinerung eines Filters $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist einfach ein Filter $\mathcal{G}$ auf X, sodass $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gilt. Für eine Funktion $f : X \to Y$ und einen Filter $\mathcal{F}$ auf X definiert man den *Bildfilter* $f(\mathcal{F})$ als $\{A \subseteq Y : \exists B \in \mathcal{F} : f(B) \subseteq A\}$. Offensichtlich ist das ein Filter in Y. Mit diesen Begriffen kann man die Versionen der Sätze 3.6-3.8 für die Konvergenz von Filtern beweisen. (Das ist eine interessante Übungsaufgabe für Ambitionierte).

Es gibt auch eine Möglichkeit, zwischen Filtern und Netzen hin– und herzuschalten. Dabei ordnet man einem Netz $(x_j)_{j\in J}$ in X den Filter $\mathcal{F} := \{A \subseteq X : \exists j_0 \in J : \{x_j : j \geq j_0\} \subseteq A\}$ zu. Ist Umgekehrt $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, dann kann man analog wie in Beispiel (2) von 3.3 die Menge $\mathcal{F}$ mit der inversen Inklusion als gerichtete Menge betrachten. Dann wählt man zu jedem $A \in \mathcal{F}$ einen Punkt $x_A \in A$, und betrachtet das Netz $(x_A)_{A\in\mathcal{F}}$.

Ein wichtiger Punkt, in dem Filter einfacher sind als Netze, ist der Begriff des *Ultrafilters*. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt. Man sieht leicht, dass für jeden Punkt $x \in X$ die Familie $\{A \subseteq X : x \in A\}$ ein Ultrafilter auf X ist (der natürlich gegen x konvergiert). Man nennt einen Filter *frei*, wenn $\cap_{A\in\mathcal{F}} A = \emptyset$ gilt. Um die Existenz freier (und damit interessanter) Ultrafilter zu beweisen, benötigt man das Auswahlaxiom. Insbesondere bedeutet das, dass man keine Beispiele für freie Ultrafilter angeben kann. Der entsprechende Begriff bei Netzen läuft unter dem Namen *universelles Netz* und ist eher unhandlich, siehe [**1**, 4.3]. Ultrafilter bzw. universelle Netze liefern eine elegante und sehr nützliche Charakterisierung kompakter topologischer Räume.

KAPITEL 4

Initiale und Finale Topologien

In diesem Kapitel werden wir zwei allgemeine Konstruktionen von Topologien besprechen. Insbesondere können mit dieser Methode Teilmengen und von Produkte von topologischen Räumen, sowie die Menge der Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf einem topologischen Raum mit natürlichen Topologien ausgestattet werden.

4.1. Vergleich von Topologien; Homöomorphie. Zunächst müssen wir kurz über Vergleiche von Topologien auf einer bzw. auf zwei Mengen sprechen.

Definition 4.1. (1) Seien $\mathcal{T}$ und $\tilde{\mathcal{T}}$ zwei Topologien auf einer Menge X. Dann sagt man "$\mathcal{T}$ ist *gröber* als $\tilde{\mathcal{T}}$" oder "$\tilde{\mathcal{T}}$ ist *feiner* als $\mathcal{T}$", wenn $\mathcal{T} \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$ gilt.

(2) Seien X und Y topologische Räume. Ein *Homöomorphismus* zwischen X und Y ist eine bijektive stetige Funktion $f : X \to Y$ sodass auch die inverse Funktion $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist.

(3) Man sagt, zwei topologische Räume X und Y sind *homöomorph* und schreibt $X \cong Y$, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt.

Bemerkung 4.1. (1) Die Inklusion definiert eine Halbordnung auf der Menge der Topologien auf einer Menge X. Im Allgemeinen ist das keine Totalordnung, d.h. es gibt Topologien $\mathcal{T}$ und $\tilde{\mathcal{T}}$, sodass weder $\mathcal{T} \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$ noch $\tilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$ gilt. Für jede Menge X ist aber die Klumpentopologie die gröbste Topologie auf X und die diskrete Topologie die feinste Topologie auf X.

(2) Sei $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus zwischen topologischen Räumen. Da f bijektiv ist, ist $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle $A \subseteq X$. Nun ist aber $f(A)$ gerade das Urbild der Teilmenge A unter der inversen Funktion $f^{-1} : Y \to X$. Nach Proposition 3.1 ist damit für eine offene (abgeschlossene) Teilmenge $A \subseteq X$ das Bild $f(A)$ ebenfalls offen (abgeschlossen). Zusammen mit der Stetigkeit von f folgt, dass $A \subseteq X$ genau dann offen (abgeschlossen) ist, wenn $f(A) \subseteq Y$ offen (abgeschlossen) ist. Analog ist für $A \subseteq X$ und $x \in A$ die Teilmenge A genau dann eine Umgebung von x, wenn $f(A)$ eine Umgebung von $f(x)$ in Y ist.

Betrachtet man die Bijektion f als eine Identifikation der Mengen X und Y, dann sagt das gerade, dass diese Identifikation auch die Topologien auf den beiden Mengen identifiziert. Daher sind homöomorphe topologische Räume vom Standpunkt der Topologie aus ununterscheidbar.

Das benutzt man, um den Begriff "topologische Eigenschaft" zu definieren. Man nennt eine Eigenschaft topologisch, wenn sie mit X auch jeder zu X homöomorphe Raum besitzt. In diesem Sinne sind Metrisierbarkeit, Separabilität, AA1 und AA2 topologische Eigenschaften. Zeigen wir das etwa für Separabilität: Sei $A \subseteq X$ eine abzählbare Teilmenge mit $\overline{A} = X$ und sei $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus. Dann ist natürlich $f(A) \subseteq Y$ eine abzählbare Teilmenge und wir behaupten, dass ihr Abschluss ganz Y ist. Ist $y \in Y$ ein beliebiger Punkt und $U \subseteq Y$ eine Umgebung von y, dann ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von $f^{-1}(y) \in X$. Weil A dicht ist, ist $f^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$, und für einen Punkt

x in diesem Durchschnitt ist $f(x) \in U \cap f(A)$. Somit ist $y \in \overline{f(A)}$, also $f(A) \subseteq Y$ dicht. Weitere Beweise in dieser Richtung sind empfehlenswerte Übungsbeispiele.

(3) Für jeden topologischen Raum ist $\mathrm{id} : X \to X$ ein Homöomorphismus. Für einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ ist $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls ein Homöomorphismus. Ist $g : Y \to Z$ ein weiterer Homöomorphismus, dann ist $g \circ f$ bijektiv und nach Proposition 3.2 sind $g \circ f$ und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ebenfalls stetig. Damit ist auch $g \circ f$ ein Homöomorphismus. Insbesondere sehen wir, dass Homöomorphie auf jeder Menge topologischer Räume ein Äquivalenzrelation definiert.

Die Spurtopologie

Als Einstieg in das Thema der initialen Topologien wollen geben wir eine konzeptuellere Beschreibung der Spurtopologie.

4.2. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und eine Teilmenge $A \subseteq X$ haben wir die Spurtopologie in Beispiel (3) von 2.1 definiert, indem wir ad hoc offene Teilmengen angegeben haben. Aus Beispiel (3) von 2.2 wissen wir auch schon, dass im Fall metrischer Räume diese Topologie mit der metrischen Topologie der eingeschränkten Metrik übereinstimmt. Wir können nun diese Topologie im allgemeinen Fall schön charakterisieren:

Proposition 4.2. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge und $\mathcal{T}_A := \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$ die Spurtopologie aus Beispiel (3) von 2.1.*

Bezüglich dieser Topologie ist die Inklusionsabbildung $i : A \to X$, $i(a) = a$, stetig und für einen beliebigen topologischen Raum Y ist eine Funktion $f : Y \to A$ genau dann stetig, wenn $i \circ f : Y \to X$ stetig ist.

Beweis. Nach Definition ist für eine Teilmenge $U \subseteq X$ das Urbild $i^{-1}(U) = \{a \in A : i(a) \in U\} = A \cap U$. Ist U offen in X, dann ist somit $i^{-1}(U) \in \mathcal{T}_A$, also ist i stetig. Andererseits ist für eine Funktion $f : Y \to A$ und eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist $(i \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(U \cap A)$. Damit ist aber $i \circ f : Y \to X$ genau dann stetig, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Menge $f^{-1}(U \cap A)$ offen ist. Nach Definition ist das äquivalent zur Stetigkeit von f. □

Sei $f : X \to Y$ eine injektive stetige Funktion zwischen topologischen Räumen. Dann kann man f als Bijektion $f : X \to f(X)$ auffassen. Nach der Proposition ist diese Funktion stetig bezüglich der Spurtopologie auf $f(X)$. Die Funktion $f : X \to Y$ heißt eine *Einbettung*, wenn $f : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus ist.

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Funktion zwischen zwei topologischen Räumen, und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann kann man natürlich die *Einschränkung* $f|_A : A \to Y$ betrachten. Bezeichnet man mit $i : A \to X$ wieder die Inklusion, dann ist $f|_A = f \circ i$, also ist das ebenfalls stetig. Wie wir aber gleich sehen werden, kann man nicht jede stetige Funktion $A \to Y$ als Einschränkung einer stetigen Funktion $X \to Y$ geschrieben werden.

Beispiel 4.2. (1) Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge und U eine offene Teilmenge von X, die in A enthalten ist. Dann ist natürlich $U = U \cap A$, also U offen in A. Ist A selbst offen in X, dann ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ auch $U \cap A$ offen in X, also ist in diesem Fall eine Teilmenge genau dann offen in A, wenn sie offen in X ist.

Analog ist für beliebiges A eine Teilmenge $F \subseteq A$, die abgeschlossen in X ist, auch abgeschlossen in A. Ist A selbst abgeschlossen in X, dann sind Teilmengen von A genau dann abgeschlossen in A, wenn sie abgeschlossen in X sind.

Betrachten wir ein abgeschlossenes Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind für $a < c < b$ die halboffenen Intervalle $[a,c)$ und $(c,b]$ offen in $[a,b]$. Analog sind $(a,c]$ und $[c,b)$ abgeschlossene Teilmengen des offenen Intervalls (a,b).

(2) Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und betrachte die Funktion $f(t) := a+t(b-a)$. Natürlich ist f stetig als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (siehe 3.2). Damit schränkt sich f zu stetigen Bijektionen $[0,1] \to [a,b]$ und $(0,1) \to (a,b)$ ein. Die inverse Funktion zu f ist $s \mapsto \frac{s-a}{b-a}$ und das ist ebenfalls stetig als Einschränkung einer stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Somit ist jedes beschränkte offene Intervall in $\mathbb{R}$ homöomorph zu $(0,1)$ und jedes abgeschlossene Intervall ist homöomorph zu $[0,1]$. Analog zeigt man, dass jedes beschränkte halboffene Intervall homöomorph zu $[0,1)$ ist. Für unbeschränkte Intervalle kann man zum Beispiel benutzen, dass $t \mapsto \tan(t)$ Homöomorphismen $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, sowie $(a, \frac{\pi}{2}) \to (\tan(a), \infty)$ und so weiter, definiert. Insbesondere ist also jedes offene Intervall in $\mathbb{R}$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ selbst.

(3) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge mit $0 \notin A$. Dann definiert $t \mapsto 1/t$ eine stetige Funktion $A \to \mathbb{R}$. Für $t \in A$ ist $|t| > 0$ und für $1 > \varepsilon > 0$ setzen wir $\delta = \min\{\varepsilon|t|, \varepsilon|t|^2(1-\varepsilon)\} > 0$. Für $s \in A$ mit $|t-s| < \delta$ folgt aus $|t| \leq |s| + |t-s|$ sofort $|s| \geq |t| - \delta \geq |t|(1-\varepsilon)$. Damit ist

$$\left|\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{t}\right| = \frac{|s-t|}{|ts|} < \frac{\delta}{|t|^2(1-\varepsilon)} \leq \varepsilon.$$

Ist nun X ein beliebiger topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$ gilt. Dann ist f stetig als Funktion nach $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ also die Funktion $\frac{1}{f} : X \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$, stetig. Aus Korollar 3.2 folgt dann, dass für eine weitere stetige Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ auch die Funktion $\frac{g}{f} : X \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(4) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachten wir die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, die definiert ist durch $F(t) := (t, f(t))$, also $\mathbb{R}$ auf den Graphen von f abbildet. Nach Korollar 3.1 ist F stetig. Da die erste Projektion $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig ist (siehe den Beweis von Korollar 3.1) ist auch ihre Einschränkung auf die Teilmenge $F(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig bezüglich der Spurtopologie. Offensichtlich ist das eine stetige Inverse zu $F : \mathbb{R} \to F(\mathbb{R})$, also ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Einbettung.

(5) Betrachte den Einheitskreis $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann ist die Funktion $f : [0, 2\pi) \to S^1$, die gegeben ist durch $f(t) := (\cos(t), \sin(t))$ bijektiv und stetig, siehe Korollar 3.1. Sei $g = f^{-1}$ die inverse Funktion zu f. Dann ist $g^{-1}([0,1)) = f([0,1)) \subseteq S^1$. Nun ist $[0,1) \subseteq [0,2\pi)$ offen, also eine Umgebung von 0. Die Menge $f([0,1))$ kann aber sicher keine Umgebung von $f(0) = (1,0)$ sein, weil sie keine Punkte unterhalb der y–Achse enthält. Somit ist f zwar eine stetige Bijektion, aber kein Homöomorphismus. Als Funktion $[0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ betrachtet liefert f ein Beispiel für eine stetige Injektion, die keine Einbettung ist.

Initiale Topologien und die Produkttopologie

4.3. Initiale Topologien. Ein Analogon zur Beschreibung der Spurtopologie in Proposition 4.2 gibt es in ganz allgemeinen Rahmen:

Proposition 4.3. *Sei X eine Menge, I eine beliebige Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $f_i : X \to X_i$ eine Funktion in einen topologischen Raum X_i. Dann gibt es eine eindeutige Topologie auf X, sodass für einen beliebigen topologischen Raum Y eine Funktion $f : Y \to X$ genau dann stetig ist, wenn $f_i \circ f : Y \to X_i$ für jedes $i \in I$ stetig ist. Diese Topologie ist die gröbste Topologie, bezüglich derer jedes f_i stetig ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{S} := \{f_i^{-1}(U) : i \in I, U \subseteq X_i \text{ offen}\}$. Dann gibt es nach Proposition 2.8 eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, für die $\mathcal{S}$ eine Subbasis ist. Für $i \in I$ und $U \subseteq X_i$ offen ist $f_i^{-1}(U) \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, also ist jedes $f_i : X \to X_i$ stetig bezüglich $\mathcal{T}$.

Ist $f : Y \to X$ eine Funktion, dann ist nach Proposition 3.1 f genau dann stetig, wenn $f^{-1}(V) \subseteq Y$ für jedes $V \in \mathcal{S}$ offen ist. Das bedeutet aber genau, dass für jedes $i \in I$ und jedes offene $U \subseteq X_i$ die Menge $f^{-1}(f_i^{-1}(U))$ offen in Y sein muss. Nun ist aber $f^{-1}(f_i^{-1}(U)) = (f_i \circ f)^{-1}(U)$, also ist f genau dann stetig, wenn jede der Funktionen $f_i \circ f$ stetig ist.

Ist nun $\tilde{\mathcal{T}}$ eine beliebige Topologie auf X bezüglich welcher alle f_i stetig sind, dann zeigt das obige Argument, dass $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$ gilt. Nach Teil (2) von Proposition 2.8 folgt $\mathcal{T} \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$, also ist $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie bezüglich derer alle f_i stetig sind.

Sei schließlich $\tilde{\mathcal{T}}$ eine Topologie auf X sodass $f : Y \to X$ genau dann stetig bezüglich $\tilde{\mathcal{T}}$ ist, wenn jede der Funktionen $f_i \circ f : Y \to X_i$ stetig ist. Da die Identität auf X stetig als Funktion $(X, \tilde{\mathcal{T}}) \to (X, \tilde{\mathcal{T}})$ ist, sind alle $f_i = f_i \circ \mathrm{id}$ stetig bezüglich $\tilde{\mathcal{T}}$. Von oben wissen wir, dass das $\mathcal{T} \subseteq \tilde{\mathcal{T}}$ impliziert. Betrachten wir umgekehrt die Identität als Funktion $(X, \mathcal{T}) \to (X, \tilde{\mathcal{T}})$ dann ist $f_i \circ \mathrm{id} = f_i$ für jedes i und das ist stetig bezüglich $\mathcal{T}$. Damit ist aber auch diese Identitätsabbildung stetig, was genau $\tilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$ und damit Gleichheit der beiden Topologien impliziert. □

Definition 4.3. Die in der Proposition konstruierte Topologie auf X heißt die *initiale Topologie* auf X bezüglich der Familie $\{f_i : X \to X_i\}$.

Nach Proposition 4.2 ist die Spurtopologie auf einer Teilmenge A eines topologischen Raumes X genau die initiale Topologie bezüglich der Inklusion $i : A \to X$. Man kann nun viele Eigenschaften von initialen Topologien leicht direkt ablesen: Sei etwa $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X. Dann betrachten wir den topologischen Raum J_∞ aus Abschnitt 3.9. Nach Proposition 3.9 konvergiert das Netz (x_j) genau dann gegen einen Punkt $x \in X$, wenn die Funktion $f : J_\infty \to X$, $f(j) = x_j$, $f(\infty) = x$ stetig ist. Nach der Proposition ist das genau dann der Fall, wenn für jedes $i \in I$ die Funktion $j \mapsto f_i(x_j)$, $\infty \mapsto f_i(x)$ stetig ist. Wiederum nach Proposition 3.9 sehen wir, dass $x_j \to x$ genau dann gilt, wenn $f_i(x_j) \to f_i(x)$ für alle $i \in I$ gilt.

Nehmen wir an, dass jeder der Räume X_i ein Hausdorff–Raum ist, siehe 3.5, und dass die Familie f_i *punktetrennend* ist, also für $x \neq y \in X$ ein Index $i \in I$ existiert, sodass $f_i(x) \neq f_i(y)$ ist. Da X_i ein Hausdorff–Raum ist, finden wir offene Umgebungen U von $f_i(x)$ und V von $f_i(y)$, sodass $U \cap V = \emptyset$ gilt. Damit sind aber $f_i^{-1}(U)$ und $f_i^{-1}(V)$ disjunkte offene Umgebungen von x und y, also ist X ein Hausdorff–Raum. Man zeigt weiters, dass im Fall einer abzählbaren Familie $f_i : X \to X_i$ von Funktionen der Raum X ein AA1–Raum bzw. ein AA2–Raum ist, falls jedes X_i ein AA1– bzw. AA2–Raum ist. Insbesondere vererben sich die Eigenschaften "Hausdorff", "AA1" und "AA2" auf beliebige Teilräume (was natürlich auch leicht direkt bewiesen werden kann).

4.4. Die Produkttopologie. Betrachten wir eine Indexmenge I und für jedes $i \in I$ sei X_i eine nichtleere Menge. Denn definiert man die *Produktmenge* (oder einfach das *Produkt*) $\prod_{i\in I} X_i$ der Mengen X_i als die Menge aller jener Funktionen $f : I \to \cup_{i\in I} X_i$, für die $f(i) \in X_i$ für alle $i \in I$ gilt. Für allgemeine Familien benötigt man das Auswahlaxiom um die Existenz solcher Funktionen zu garantieren. Im Fall einer endlichen Indexmenge $\{1, \dots, n\}$ kann man Funktionen $f : \{1, \dots, n\} \to X_1 \cup \cdots \cup X_n$ mit $f(k) \in X_k$ natürlich mit n-Tupeln $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_k \in X_k$ identifizieren und erhält so das übliche Bild des Produktes. Nimmt man andererseits für jedes $i \in I$ eine fixe Menge X als X_i, dann ist nach Definition $X^I := \prod_{i\in I} X$ einfach die Menge aller Funktionen $f : I \to X$.

Für ein Produkt $X = \prod_{i\in I} X_i$ und einen Index $j \in I$ ist die *Projektion* $\mathrm{pr}_j : X \to X_j$ auf den j–ten Faktor definiert durch $\mathrm{pr}_j(f) = f(j)$.

Definition 4.4. Sei $\{X_i : i \in I\}$ eine Familie von topologischen Räumen. Dann definiert man die *Produkttopologie* auf $X = \prod_{i\in I} X_i$ als die initiale Topologie bezüglich der Projektionen $\mathrm{pr}_j : X \to X_j$.

Nach Proposition 4.3 ist für jeden Index $j \in I$ die Projektion $\mathrm{pr}_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ stetig, und eine Funktion $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ genau dann stetig, wenn für jedes $j \in I$ die Funktion $\mathrm{pr}_j \circ f : Y \to X_j$ stetig ist. Für endliche Produkte $X_1 \times \ldots \times X_n$ sind die Funktionen $f_k := \mathrm{pr}_k \circ f$ im Bild der n–Tupel natürlich durch $f(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y))$ gegeben. Wegen der Eindeutigkeit initialer Topologien zeigt Korollar 3.1, dass die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie übereinstimmt.

Betrachten wir den Fall eines Produktes der Form $X^I = \{f : I \to X\}$. Wie oben bemerkt ist $\mathrm{pr}_i(f) = f(j)$ für jedes $j \in I$. Insbesondere sehen wir aus Abschnitt 4.3, dass ein Netz $(f_j)_{j\in J}$ in X^I genau dann gegen die Funktion $f : I \to X$ konvergiert, wenn für jedes $i \in I$ das Netz $(f_j(i))_{j\in J}$ in X gegen den Punkt $f(i)$ konvergiert. Deshalb heißt die Produkttopologie auf X^I auch die Topologie der punktweisen Konvergenz.

Nach Proposition 4.3 ist eine Subbasis für die Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} X_i$ gegeben durch alle Mengen der Form $(\mathrm{pr}_i)^{-1}(U)$, wobei $U \subseteq X_i$ offen ist. Im Fall eines endlichen Produktes $X_1 \times \ldots \times X_n$ und offener Mengen $U_k \subseteq X_k$ ist

$$(\mathrm{pr}_1)^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap (\mathrm{pr}_n)^{-1}(U_n) = U_1 \times \ldots \times U_n \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n.$$

Man überlegt leicht, dass diese Mengen eine Basis für die Produkttopologie bilden. Das liefert eine intuitiv einsichtige Beschreibung der Produkttopologie für endliche Produkte. Bei unendlichen Produkten hat die entsprechende Basis die Form $\prod_{i\in I} U_i$ wobei $U_i \subseteq X_i$ offen ist, aber zusätzlich $U_i = X_i$ für alle bis auf endlich viele Indices i gilt. Man kann auch alle Produkte der Form $\prod_{i\in I} U_i$ für offene Teilmengen $U_i \subseteq X_i$ als Basis einer Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$ verwenden. Dies liefert die sogenannte *Box–Topologie* die aber viel weniger wichtig ist als die Produkttopologie.

Auf dem Funktionenraum Y^X besteht die Subbasis für die Produkttopologie aus Proposition 4.3 aus den Mengen $\{f : X \to Y : f(x) \subseteq U\}$ wobei $x \in X$ ein fixer Punkt und $U \subseteq Y$ eine offene Teilmenge ist. Im Fall $Y = \mathbb{R}$ liefert das genau die Topologie aus Beispiel 2.8.

Die allgemeinen Resultate aus 4.3 implizieren natürlich sofort, dass Produkte von Hausdorff–Räumen wiederum Hausdorff sind. Produkte von höchstens abzählbar vielen AA1– (AA2–) Räumen sind wiederum AA1 (AA2).

Eine schöne Anwendung der Produkttopologie ist die folgende Verallgemeinerung von Teilen von Korollar 3.2.

Proposition 4.4. *Seien X und Y topologische Räume, Y Hausdorff und seien $f, g : X \to Y$ stetige Funktionen. Dann ist die Teilmenge $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X. Insbesondere folgt für eine dichte Teilmenge $A \subseteq X$ aus $f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$ schon $f = g$.*

Beweis. Nach Proposition 4.3 definiert $x \mapsto (f(x), g(x))$ eine stetige Funktion $(f, g) : X \to Y \times Y$. Betrachten wir die *Diagonale* $\Delta := \{(y, y) : y \in Y\} \subseteq Y \times Y$, dann ist $\{x \in X : f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta)$. Daher können wir den Beweis abschließen indem wir zeigen, dass Δ abgeschlossen in $Y \times Y$ ist. Sei dazu $(y, z) \in (Y \times Y) \setminus \Delta$, also

$y \neq z$. Da Y Hausdorff ist, finden offene Teilmengen $U, V \subseteq Y$ mit $y \in U$ und $z \in V$ mit $U \cap V = \emptyset$. Damit ist aber $W := \mathrm{pr}_1^{-1}(U) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(V)$ offen in $Y \times Y$ und $(y, z) \in W$. Die Bedingung $U \cap V = \emptyset$ sagt aber genau, dass $W \cap \Delta = \emptyset$ gilt. Damit ist $(Y \times Y) \setminus \Delta$ offen, also Δ abgeschlossen. □

Eine weitere wichtige Anwendung der Produkttopologie ist, dass sie die Definition topologisch–algebraischer Strukturen ermöglicht. Betrachten wir etwa eine Gruppe G. Dann können wir die Gruppenmultiplikation als Funktion $\mu : G \times G \to G$ und die Inversion als Funktion $\nu : G \to G$ betrachten. Da eine Topologie auf G die Produkttopologie auf $G \times G$ liefert, kann man nun eine *topologische Gruppe* als eine Gruppe G zusammen mit einer Topologie $\mathcal{T}$ auf G definieren, für die Multiplikation und Inversion stetige Funktionen sind. Aus dem Beweis von Korollar 3.2 sehen wir, dass $(\mathbb{R}^n, +)$ für $n \geq 1$ eine topologische Gruppe ist. Zusammen mit den Überlegungen aus Beispiel 4.2 folgt aus, dass $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine topologische Gruppe ist. Ein komplizierteres Beispiel für eine topologische Gruppe ist die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ der invertierbaren $n \times n$–Matrizen, siehe Abschnitt 3.2. Analog kann man topologische Ringe, Körper und Vektorräume definieren. Diese algebraisch–topologischen Strukturen spielen in weiten Teilen der Mathematik eine wichtige Rolle.

Exkurs: Finale Topologien

4.5. Finale Topologien — Quotiententopologie. Dual zu den initialen Topologien gibt es auch finale Topologien. Hier betrachtet man eine Menge X zusammen mit einer Familie $f_i : X_i \to X$ von Funktionen von topologischen Räumen X_i nach X. Man zeigt, dass es in dieser Situation eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X gibt, sodass eine Funktion $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn $f \circ f_i : X_i \to Y$ für jedes i stetig ist. Diese Topologie ist die feinste Topologie auf X bezüglich derer alle f_i stetig sind. Sie heißt die *finale Topologie* bezüglich der Funktionen f_i. Die finale Topologie ist leicht zu beschreiben: $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $f_i^{-1}(U) \subseteq X_i$ für jedes $i \in I$ offen ist. Allerdings gibt es für finale Topologien kaum allgemeine Resultate über schöne Eigenschaften.

Ein wichtiger Spezialfall ist die Quotiententopologie: Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, d.h. eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, also folgendes erfüllt

(i) Für alle $x \in X$ gilt $x \sim x$.
(ii) Aus $x \sim y$ folgt immer $y \sim x$.
(iii) Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt immer $x \sim z$.

Für einen Punkt $x \in X$ ist die *Äquivalenzklasse* $[x]$ definiert als $\{y \in X : y \sim x\}$. Die Äquivalenzklassen zerlegen X in disjunkte Teilmengen. Die Menge der Äquivalenzklassen heißt der *Quotient* von X nach der Relation $\sim$ und wird mit $X/\sim$ bezeichnet. Es gibt eine offensichtliche Funktion $q : X \to X/\sim$, die jedem Punkt $x \in X$ seine Äquivalenzklasse zuordnet. Die *Quotiententopologie* auf $X/\sim$ ist definiert als die finale Topologie bezüglich der Funktion $q : X \to X/\sim$. Nach Definition entsprechen stetige Funktionen $X/\sim \to Y$ genau stetigen Funktionen $X \to Y$, die auf jeder Äquivalenzklasse konstant sind.

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion zwischen topologischen Räumen. Dann definiert $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$ eine Äquivalenzrelation auf X. Natürlich definiert $\underline{f}([x]) := f(x)$ eine Funktion $X/\sim \to Y$, sodass $f = \underline{f} \circ q$ gilt. Die Funktion f heißt eine *Quotientenabbildung*, falls $\underline{f} : X/\sim \to Y$ ein Homöomorphismus ist. Das ist das duale Konzept zu Einbettungen, siehe 4.2.

Beispiel 4.5. Der *reelle projektive Raum* $\mathbb{R}P^n$ ist definiert als die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt in $\mathbb{R}^{n+1}$. Betrachten wir auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Relation $x \sim y$ genau dann, wenn $y = tx$ für eine reelle Zahlt $t \neq 0$ gilt. Man verifiziert sofort, dass dies eine Äquivalenzrelation ist, und $x \sim y$ gilt genau dann, wenn x und y auf der selben Geraden durch Null liegen. Somit können wir $\mathbb{R}P^n$ als die Menge $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation betrachten. Auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ betrachten wir die von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierte Teilraumtopologie und auf $\mathbb{R}P^n$ die davon induzierte Quotiententopologie.

Sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$ und $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Inklusion. Dann ist i stetig (bezüglich der Teilraumtopologie auf S^n) und wir erhalten eine surjektive, stetige Abbildung $f := q \circ i : S^n \to \mathbb{R}P^n$, wobei $q : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ die natürliche Abbildung bezeichnet. Für $x, y \in S^n$ gilt $f(x) = f(y)$ genau dann, wenn $x \sim y$, also wenn $x = \pm y$. Die Funktion $\underline{f} : S^n/\sim \to \mathbb{R}P^n$ ist nach Konstruktion bijektiv und stetig für die Quotiententopologie auf $S^n/\sim$.

Andererseits ist $x \mapsto \|x\|$ natürlich eine stetige Funktion $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, die nur im Nullpunkt verschwindet. Damit definiert $\varphi(x) := \frac{x}{\|x\|}$ eine stetige Funktion $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$. Nun gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $\varphi(x) \sim \varphi(y)$ gilt, also erhalten wir eine Funktion $\mathbb{R}P^n \to S^n/\sim$. Diese ist stetig, weil ihre Komposition mit q gerade die Komposition der kanonischen Abbildung $S^n \to S^n/\sim$ mit φ ist. Man überprüft sofort, dass diese Funktion invers zu $\underline{f}$ ist, also sind $\mathbb{R}P^n$ und $S^n/\sim$ homöomorph und damit ist f eine Quotientenabbildung.

KAPITEL 5

Kompaktheit und Zusammenhang

Kompaktheit und Zusammenhang sind zwei fundamentale topologische Eigenschaften, die in vielen Anwendungen der Topologie eine zentrale Rolle spielen.

Kompakte Räume

Kompakte Räume spielen unter den topologischen Räumen eine ähnliche Rolle wie sie endliche Mengen unter allen Mengen spielen.

5.1. Definition und grundlegende Eigenschaften.

Definition 5.1. Sei X ein topologischer Raum.

(1) Eine *offene Überdeckung* von X ist eine Familie $\{U_i : i \in I\}$ von offenen Teilmengen von X, sodass $\cup_{i\in I} U_i = X$.

(2) Eine *Teilüberdeckung* einer offenen Überdeckung $\{U_i : i \in I\}$ von X ist eine offene Überdeckung der Form $\{U_i : i \in J\}$, wobei $J \subseteq I$ eine Teilmenge ist.

(3) Der Raum X heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(4) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt kompakt, wenn A als topologischer Raum mit der Spurtopologie kompakt ist.

Nach Definition der Spurtopologie sind die offenen Teilmengen von $A \subseteq X$ genau die Schnitte von offenen Teilmengen von X mit A. Damit dann kann man die Bedingung in (4) leicht umformulieren: $A \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn es für jede Familie $\{U_i : i \in I\}$ von offenen Teilmengen von X, sodass $A \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ gilt, eine endliche Teilfamilie $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ gibt, sodass $A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ gilt.

Beispiel 5.1. Sei X ein diskreter Raum. Dann ist jede Teilmenge von X offen, und wir können $\{\{x\} : x \in X\}$ als offene Überdeckung von X betrachten. Diese enthält natürlich nur dann eine endliche Teilüberdeckung, wenn die Menge X selbst endlich ist. Umgekehrt ist jeder endliche Raum offensichtlich kompakt, also ist ein diskreter Raum genau dann kompakt, wenn er endlich ist.

Der entscheidende Schritt zur Beschreibung kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ ist das folgende Resultat.

Lemma 5.1. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist das Intervall $[a, b]$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, sodass $[a, b] \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ gilt. Betrachten wir die Menge A aller Punkte $x \in [a, b]$ sodass es endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k$ gibt, sodass $[a, x] \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$ gilt. Offensichtlich ist $a \in A$, also ist $A \neq \emptyset$. Da nach Konstruktion $A \subseteq [a, b]$ gilt, ist A nach oben beschränkt und besitzt damit ein Supremum $c \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gibt es einen Index $i \in I$ sodass $a \in U_i$ gilt und weil diese Menge offen finden wir $x > a$, sodass $[a, x] \subseteq U_i$ gilt. Damit ist $x \in A$, also $a < x \leq c \leq b$.

Sei nun $i_0 \in I$ so gewählt, dass $c \in U_{i_0}$ gilt. Da c das Supremum von A ist und U_{i_0} offen ist, finden wir Punkte $c' < c < c''$, sodass $c' \in A$ und $[c', c''] \subseteq U_{i_0}$ gilt. Da $c' \in A$ gilt, finden wir Indices $i_1, \ldots, i_n \in I$, sodass $[a, c'] \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ gilt, also ist $[a, c''] \subseteq U_{i_0} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Wäre $c < b$, dann könnte man c'' zwischen c und b wählen, was ein Widerspruch zu $c = \sup(A)$ wäre. Somit ist $c = b$ und die endliche Teilfamilie $\{U_{i_0}, \ldots, U_{i_n}\}$ überdeckt das ganze Intervall $[a, b]$. □

Aus den Definitionen können wir auch leicht zwei fundamentale Eigenschaften ableiten.

Proposition 5.1. *Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.*
(1) Ist X kompakt und A abgeschlossen in X, dann ist A kompakt.
(2) Ist X ein Hausdorff Raum und A kompakt, dann ist A abgeschlossen in X.

Beweis. (1) Sei $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie von offenen Teilmengen von X, sodass $A \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ gilt. Da $A \subseteq X$ abgeschlossen ist, ist $V := X \setminus A$ offen in X. Nach Konstruktion ist $X = V \cup (\cup_{i\in I} U_i)$. Da X kompakt ist, besitzt diese offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, also gibt es Indizes $i_1, \ldots, i_n$ sodass $X = V \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ gilt. Damit ist aber $A \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ und wir haben eine endliche Teilüberdeckung gefunden.

(2) Wir müssen zeigen, dass $X \setminus A$ eine offene Teilmenge von X ist. Sei $x \in X \setminus A$ ein Punkt. Da der Raum X Hausdorff ist, finden wir zu jedem Punkt $a \in A$ offene Umgebungen U_a von x und V_a von a, sodass $U_a \cap V_a = \emptyset$ gilt. Natürlich ist $A \subseteq \cup_{a\in A} V_a$ und da A kompakt ist, besitzt diese offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung $\{V_{a_1}, \ldots, V_{a_n}\}$. Betrachten wir nun die offenen Mengen $U := U_{a_1} \cap \cdots \cap U_{a_n}$ und $V := V_{a_1} \cup \cdots \cup V_{a_n}$, dann gilt nach Konstruktion $x \in U$ und $A \subseteq V$. Andererseits ist $U \cap V = (U \cap V_{a_1}) \cup \cdots \cup (U \cap V_{a_n})$ und das ist leer, weil $U \subseteq U_{a_k}$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt. Insbesondere ist U eine Umgebung von x, die ganz in $X \setminus A$ enthalten ist. □

5.2. Der Satz vom Maximum. Die grundlegende Version des Satzes vom Maximum folgt praktisch direkt aus den Definitionen:

Satz 5.2. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Funktion zwischen topologischen Räumen. Ist X kompakt, dann ist die Teilmenge $f(X) \subseteq Y$ ebenfalls kompakt.*

Beweis. Sei $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie von offenen Teilmengen von Y, sodass $f(X) \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ gilt. Für jedes $i \in I$ sei $V_i := f^{-1}(U_i) \subseteq X$. Dann ist offensichtlich $X = \cup_{i\in I} V_i$ und wegen der Stetigkeit von f ist jede der Mengen V_i offen in X (siehe Proposition 3.1). Damit gibt es aber Indizes $i_1, \ldots, i_n \in I$, sodass $X = V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n}$ gilt, und daraus folgt sofort $f(X) \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. □

Daraus können wir sofort einige wichtige Konsequenzen ableiten:

Korollar 5.2. *(1) Sei X ein kompakter topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es Punkte $x_0, x_1 \in X$, sodass $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ für alle $x \in X$ gilt.*

(2) Kompaktheit ist eine topologische Eigenschaft, d.h. ist X ein kompakter Raum und Y ein topologischer Raum, der homöomorph zu X ist, dann ist auch Y kompakt.

(3) Sei $f : X \to Y$ eine bijektive stetige Funktion zwischen topologischen Räumen. Ist X kompakt und Y Hausdorff, dann ist f ein Homöomorphismus, also die inverse Funktion $f^{-1} : Y \to X$ automatisch stetig.

Beweis. (1) Nach Satz 5.2 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Teilmenge. Die offenen Teilmengen $(-n, n) \subseteq \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$, also ist $f(X)$

in der Vereinigung einer endlichen Teilfamilie enthalten. Damit ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und besitzt daher ein Supremum und ein Infimum. Nach Teil (2) von Proposition 5.1 ist $f(X)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$, also müssen das Supremum und das Infimum in der Teilmenge liegen und daher von der Form $f(x_1)$ und $f(x_0)$ für $x_0, x_1 \in X$ sein.

(2) Ist $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus, dann ist f surjektiv, also $Y = f(X)$ und das ist kompakt nach Satz 5.2.

(3) Ist $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, dann ist A kompakt nach Teil (1) von Proposition 5.1, also ist $f(A) \subseteq Y$ kompakt nach Satz 5.2. Da Y Hausdorff ist, ist $f(A)$ abgeschlossen in Y nach Teil (2) von Proposition 5.1. Nun ist aber $f(A)$ genau das Urbild von A unter der Funktion $f^{-1} : Y \to X$, also folgt die Stetigkeit von f^{-1} aus Proposition 3.1. □

Ist X ein kompakter topologischer Raum, dann ist nach Teil (1) des Korollars jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ beschränkt. Damit können wir die Menge $C(X, \mathbb{R})$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf X als Teilmenge des Raumes $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ der beschränkten Funktionen betrachten. Aus Abschnitt 2.3 kennen wir die Metrik $d(f, g) = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)|$ auf $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, die wir nun natürlich auf den Teilraum $C(X, \mathbb{R})$ einschränken können. Damit ist $C(X, \mathbb{R})$ ein metrischer Raum, und wir behaupten, dass $C(X, \mathbb{R})$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ ist: Ist $f : X \to \mathbb{R}$ beschränkt aber nicht stetig, dann finden wir einen Punkt $x_0 \in X$ und eine Zahl $\varepsilon > 0$, sodass das Urbild von $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ keine Umgebung von x_0 enthält. Damit finden wir für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ einen Punkt $x_U \in U$, sodass $|f(x_U) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ gilt. Ist nun $g : X \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $d(f, g) < \varepsilon/3$, dann ist

$$|f(x_U) - f(x_0)| \leq |f(x_U) - g(x_U)| + |g(x_U) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(x_0)|.$$

Nach Konstruktion sind die beiden äußeren Summanden jeweils $< \varepsilon/3$, also muss $|g(x_U) - g(x_0)| \geq \varepsilon/3$ gelten. Damit ist auch g unstetig in x_0 und die $\varepsilon/3$–Kugel um f liegt ganz in $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \setminus C(X, \mathbb{R})$. Aus 3.4 wissen wir, dass Konvergenz in der metrischen Topologie auf $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ genau gleichmäßige Konvergenz ist, also sehen wir, dass auch in dieser Situation der gleichmäßige Limes eines Netzes stetiger Funktionen selbst stetig ist.

Exkurs: Normale Räume; die Sätze von Urysohn und Tietze

Kompakte Hausdorffräume erfüllen automatisch ein weiteres Trennungsaxiom, das üblicherweise als T_4 bezeichnet wird. Diese Trennungseigenschaft ist wichtig, weil sie zu zwei fundamentalen Resultaten über die Existenz stetiger Funktionen führt.

5.3. Normale Räume; das Lemma von Urysohn.

Definition 5.3. Sei X ein topologischer Raum.
(1) Man sagt, X ist ein T_4–*Raum*, wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq X$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$ gibt.
(2) Der Raum X heißt *normal* wenn er Hausdorff ist und T_4 erfüllt.

Normale Räume bilden eine wichtige Klasse von topologischen Räumen. Wir werden später sehen, dass metrisierbare Räume automatisch normal sind.

Proposition 5.3. *Jeder kompakte Hausdorff Raum ist normal.*

Beweis. Sei X ein kompakter Hausdorff Raum und seien $A, B \subseteq X$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Dann sind A und B selbst kompakt nach Teil (1) von Proposition

5.1. Aus dem Beweis von Teil (2) dieser Proposition sehen wir, dass es zu jedem $b \in B$ disjunkte offene Teilmengen V_b und U_b von X gibt, sodass $b \in V_b$ und $A \subseteq U_b$ gilt. Dann bilden die V_b eine offene Überdeckung von B, also gibt es $b_1, \dots, b_n \in B$, sodass $B \subseteq V := V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_n}$. Setzen wir $U := U_{b_1} \cap \dots \cap U_{b_n}$, dann ist $A \subseteq U$. Nach Konstruktion sind U und V offen und U hat leeren Schnitt mit jedem V_{b_k}, also mit ganz V. □

Man formuliert T_4 oft so, dass man "disjunkte abgeschlossene Mengen durch disjunkte Umgebungen trennen kann". Hierbei ist eine *Umgebung einer Teilmenge* $A \subseteq X$ eine Menge U, zu der es eine offene Teilmenge V von X mit $A \subseteq V \subseteq U$ gibt. Es gibt noch eine andere natürliche Idee wie man Teilmengen A, B eines topologischen Raumes "trennen" kann, nämlich indem man eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ und einen Wert $t_0 \in \mathbb{R}$ findet, sodass $f(x) < t_0$ für alle $x \in A$ und $f(x) > t_0$ für alle $x \in B$ gilt. Das liefert aber sofort disjunkte Umgebungen von A und B: Natürlich sind die Mengen $(-\infty, t_0)$ und (t_0, ∞) offen in $\mathbb{R}$, also sind wegen der Stetigkeit von f die Teilmengen $f^{-1}((-\infty, t_0))$ und $f^{-1}((t_0, \infty))$ offen in X. Nach Konstruktion sind diese Urbilder disjunkt und Umgebungen von A beziehungsweise B.

In Anbetracht der Tatsache, dass wir bis jetzt kaum Resultate über die Existenz von stetigen Funktionen zur Verfügung haben, scheint die Existenz so einer Trennung durch eine stetige Funktion eine wesentlich stärkere Forderung zu sein als die Existenz von disjunkten Umgebungen. Für T_4–Räume kann man aber zeigen, dass man disjunkte abgeschlossene Teilmengen sogar durch besonders schöne stetige Funktionen trennen kann. Bevor wir dieses Resultat formulieren und beweisen können benötigen wir noch eine Beobachtung über T_4–Räume, die allgemein nützlich ist.

Lemma 5.3. *Ein topologischer Raum X erfüllt genau dann T_4, wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq X$ und jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ mit $A \subseteq U$ eine offene Teilmenge $V \subseteq A$ gibt, sodass $A \subseteq V$ und $\overline{V} \subseteq U$ gilt.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Nehmen wir an, dass X ein T_4–Raum ist und $A \subseteq U$ gegeben ist. Dann ist $B := X \setminus U$ abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$, also gibt es nach Voraussetzung offene Teilmengen $V, W \subseteq X$, sodass $A \subseteq V$, $B \subseteq W$ und $V \cap W = \emptyset$ gilt. Damit liegt aber V in der abgeschlossenen Teilmenge $X \setminus W$, die selbst in U enthalten ist. Nach Proposition 2.4 folgt auch $\overline{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Sind abgeschlossene Teilmengen A und B von X gegeben, dann setzen wir $U := X \setminus B$ und finden nach Voraussetzung eine offene Teilmenge V mit $A \subseteq V$ und $\overline{V} \subseteq U$. Dann ist aber $W := X \setminus \overline{V}$ offen, disjunkt zu V und enthält B, also haben wir disjunkte offene Umgebungen von A und B gefunden. □

Satz 5.3 (Lemma von Urysohn). *Sei X ein T_4 Raum und seien $A, B \subseteq X$ disjunkte, abgeschlossene Teilmengen. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, sodass $f(x) = 0$ für alle $x \in A$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in B$ gilt.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $X \setminus B$ offen und $A \subseteq X \setminus B$. Also findet man eine offene Teilmenge $U_{\frac{1}{2}}$ von X, sodass $A \subseteq U_{\frac{1}{2}}$ und $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq X \setminus B$. Dann findet man offene Teilmengen $U_{\frac{1}{4}}$ und $U_{\frac{3}{4}}$ von X, sodass $A \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subseteq U_{\frac{1}{2}}$ und $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subseteq X \setminus B$. Setzt man nun $\Lambda := \{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq k < 2^n\} \subseteq \mathbb{Q}$ dann findet man induktiv eine Familie $\{U_r : r \in \Lambda\}$ von offenen Teilmengen, sodass $A \subseteq U_r$ und $\overline{U_r} \subseteq X \setminus B$ für alle $r \in \Lambda$ sowie $\overline{U_r} \subseteq U_s$ für $r < s \in \Lambda$.

Für $x \in X$ setzt man nun $f(x) = 1$ falls x in keiner der Mengen U_r liegt und sonst $f(x) := \inf\{r \in \Lambda : x \in U_r\}$. Für $x \in A$ ist $x \in U_r$ für alle $r \in \Lambda$, also $f(x) = 0$.

Andererseits hat B leeren Schnitt mit jedem $\overline{U_r}$, also ist $f(x) = 1$ für $x \in B$. Außerdem beobachten wir, dass aus $y \in \overline{U_r}$ für ein $r \in \Lambda$ natürlich $y \in U_s$ für alle $s \in \Lambda$ mit $s > r$ und damit $f(y) \leq r$ folgt. Ist umgekehrt $y \in X$ so, dass $f(y) < r$ für ein $r \in \Lambda$ gilt, dann gibt es ein $s < r$, sodass $y \in U_s$ gilt und damit gilt auch $y \in U_r$. Damit können wir nun beweisen, dass f stetig ist, also dass wir zu gegebenem $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x finden, sodass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in U$ gilt.

Ist $f(x) = 0$, dann finden wir ein $r \in \Lambda$ mit $r < \varepsilon$, und wir betrachten $U = U_r$. Das ist nach Definition offen und $f(y) \leq r < \varepsilon$ für alle $y \in U_r$. Andererseits folgt aus $f(x) = 0 < r$ auch $x \in U_r$, also ist das eine Umgebung mit der geforderten Eigenschaft.

Ist $f(x) = 1$, dann finden wir $r \in \Lambda$ mit $1 - \varepsilon < r$ und wir betrachten $U = X \setminus \overline{U_r}$. Da $f(x) = 1$ ist, liegt x in keiner der Mengen U_s für $s \in \Lambda$, also ist U eine offene Umgebung von x. Für $z \in X$ mit $f(z) < r$ ist $z \in U_r$, also gilt $f(y) \geq r > 1 - \varepsilon$ für alle $y \in U$, und dieser Fall ist erledigt.

Ist schließlich $0 < f(x) < 1$, dann finden wir $r, s \in \Lambda$ mit $f(x) - \varepsilon < r < f(x) < s < f(x) + \varepsilon$ und wir betrachten $U := U_s \setminus \overline{U_r}$. Das ist offen als Durchschnitt der offenen Mengen U_s und $X \setminus \overline{U_r}$. Wegen $f(x) < s$ folgt $x \in U_s$ und $x \in \overline{U_r}$ würde $f(x) \leq r$ implizieren, also ist U eine offene Umgebung von x. Für $y \in U$ ist $y \in U_s$, also $f(y) \leq s < f(x) + \varepsilon$, aber auch $y \notin U_r$, also $f(y) \geq r > f(x) - \varepsilon$. $\square$

Für zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen A und B eines T_4–Raumes X nennt man eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$, die auf A identisch 0 und auf B identisch 1 ist eine *Urysohn–Funktion* für A und B. Ist f so eine Funktion, dann definiert $g(x) := u + (v - u)f(x)$ für $u < v \in \mathbb{R}$ eine stetige Funktion $g : X \to [u, v]$, die auf A identisch gleich u und auf B identisch gleich v ist.

5.4. Der Fortsetzungssatz von Tietze. Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum (also eine Teilmenge mit der Spurtopologie). In 4.2 haben wir bemerkt, dass für eine stetige Funktion $F : X \to Y$ in einen beliebigen topologischen Raum Y die Einschränkung $f := F|_A : A \to Y$ ebenfalls stetig ist. Nun kann man natürlich umgekehrt fragen, ob eine gegebene stetige Funktion $f : A \to Y$ Einschränkung einer stetigen Funktion $F : X \to Y$ ist, also ob sich f stetig auf X fortsetzen lässt. Einfache Beispiele zeigen sofort, dass dies auch für sehr schöne Räume im Allgemeinen nicht möglich ist: Betrachten wir $X = Y = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion $f(t) = 1/t$ stetig als Funktion $A \to Y$ (siehe 4.2), aber offensichtlich gibt es keine stetige Fortsetzung dieser Funktion auf ganz X. Das liegt nicht daran, dass die Funktion f unbeschränkt ist. Betrachtet man etwa $f : A \to Y$, $f(t) = \sin(1/t)$ dann hat diese Funktion Werte in $[-1, 1]$, sie ist stetig als Komposition stetiger Funktionen, aber man zeigt leicht, dass sie keine stetige Fortsetzung besitzt (siehe Übungen).

An diesen Beispielen sieht man schon, dass die Existenz stetiger Fortsetzungen im Allgemeinen eine schwierige Frage ist. Mit Hilfe des Lemmas von Urysohn kann man diese Frage aber für abgeschlossene Teilmengen von T_4–Räumen und reellwertige Funktionen vollständig beantworten. In diesem Fall existiert nämlich immer eine stetige Fortsetzung.

Zunächst noch eine Bemerkung: Für einen beliebigen topologischen Raum X können wir die Menge $C_b(X, \mathbb{R})$ der beschränkten stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ betrachten. Das Argument am Ende von 5.2 zeigt auch hier, dass $C_b(X, \mathbb{R})$ eine abgeschlossene Teilmenge ist. Falls also eine Folge beschränkter stetiger Funktionen $X \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion konvergiert, dann ist dieser Grenzwert ebenfalls stetig.

Satz 5.4 (Fortsetzungssatz von Tietze). *Sei X ein T_4–Raum, $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es eine stetige Funktion $F : X \to \mathbb{R}$, sodass $F|_A = f$ gilt. Hat f Werte in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, dann kann auch F mit Werten in $[a, b]$ gewählt werden.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es für jedes $0 < a \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $\varphi : A \to [-a, a]$ eine stetige Funktion $\Phi : X \to [-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}]$ gibt, sodass $|\Phi(x) - \varphi(x)| \leq \frac{2a}{3}$ für alle $x \in A$ gilt. Dazu bemerken wir, dass $[-a, -\frac{a}{3}]$ und $[\frac{a}{3}, a]$ abgeschlossen in $[-a, a]$ sind, also sind $B_1 := \varphi^{-1}([-a, -\frac{a}{3}])$ und $B_2 := \varphi^{-1}([\frac{a}{3}, a])$ abgeschlossen in A. Da A selbst abgeschlossen in X ist, sind B_1 und B_2 abgeschlossen in X, und natürlich ist $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Nach dem letzten Teil von Abschnitt 5.3 finden wir eine stetige Funktion $\Phi : X \to [-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}]$, die auf B_1 identisch $-\frac{a}{3}$ und auf B_2 identisch $\frac{a}{3}$ ist. Wir behaupten, dass $|\Phi(x) - \varphi(x)| \leq \frac{2a}{3}$ für alle $x \in A$ gilt. Ist $\varphi(x) \leq -\frac{a}{3}$, dann folgt das sofort aus $-a \leq \varphi(x)$ und $\Phi(x) = -\frac{a}{3}$. Analog folgt die Behauptung, falls $\varphi(x) \geq \frac{a}{3}$ gilt. Ist $-\frac{a}{3} < \varphi(x) < \frac{a}{3}$, dann folgt die Behauptung, weil auch $\Phi(x)$ in $[-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}]$ liegt.

Für den eigentlichen Beweis betrachten wir zunächst den Fall, dass $f : A \to \mathbb{R}$ Werte in $[-1, 1]$ hat. Nach der Behauptung finden wir eine stetige Funktion $F_1 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, sodass $|f(x) - F_1(x)| < \frac{2}{3}$ für alle $x \in A$ gilt. Betrachten wir nun die stetige Funktion $f - F_1|_A : A \to [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. Nach der Behauptung finden wir eine stetige Funktion $F_2 : X \to [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$ sodass $|f(x) - (F_1 + F_2)(x)| < \frac{4}{9}$ für alle $x \in A$ gilt. Nehmen wir induktiv an, dass wir für alle $i \leq n$ stetige Funktionen $F_i : X \to [-\frac{2^{i-1}}{3^i}, \frac{2^{i-1}}{3^i}]$ konstruiert haben, sodass $|f(x) - (\sum_{i=1}^n F_i)(x)| < (\frac{2}{3})^n$ für alle $x \in A$ gilt. Dann ist $\sum_{i=1}^n F_i$ stetig als Summe endlich vieler stetiger Funktionen, also ist $f - \sum_{i=1}^n F_i|_A$ eine stetige Funktion $A \to [-(\frac{2}{3})^n, (\frac{2}{3})^n]$. Nach der Behauptung finden wir eine stetige Funktion $F_{n+1} : X \to [-\frac{2^n}{3^{n+1}}, \frac{2^n}{3^{n+1}}]$, sodass $|f(x) - (\sum_{i=1}^{n+1} F_i)(x)| < (\frac{2}{3})^{n+1}$ für alle $x \in A$. Nach Induktion finden wir somit entsprechende Funktionen F_i für alle $i \in \mathbb{N}$.

Für jedes $x \in X$ und $n \in N$ ist $|F_n(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$. Nun ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^\infty (\frac{2}{3})^n$ konvergent mit Limes $\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, also ist $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$. Damit konvergiert aber für jedes $x \in X$ die Reihe $\sum_{n=1}^\infty F_n(x)$ absolut gegen ein Element von $[-1, 1]$ und wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $F(x)$. Für $x \in A$ folgt aus $|f(x) - (\sum_{i=1}^n F_i)(x)| < (\frac{2}{3})^n$ natürlich $F(x) = f(x)$, also ist $F : X \to [-1, 1]$ eine Fortsetzung von f. Betrachten wir F als Element von $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, dann ist

$$d(F, \sum_{i=1}^n F_i) = \sup_{x \in X} |f(x) - (\sum_{i=1}^n F_i)(x)| \leq \sum_{i=n+1}^\infty (\tfrac{2}{3})^i = \tfrac{2^{n+1}}{3^n}.$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 geht, sehen wir, dass die Folge $(\sum_{i=1}^n F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen F konvergiert. Damit ist F stetig und der Beweis im Fall $f : A \to [-1, 1]$ vollständig. Hat f Werte im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, dann wählen wir einen Homöomorphismus $h : [a, b] \to [-1, 1]$ (siehe 4.2). Nach dem vorherigen Schritt finden wir eine stetige Fortsetzung $F : X \to [-1, 1]$ von $h \circ f$ und damit ist $h^{-1} \circ F : X \to [a, b]$ eine stetige Fortsetzung von f.

Für eine allgemeine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ wählen wir einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ (siehe 4.2) und betrachten $h \circ f$ als Funktion $A \to [-1, 1]$. Nach dem ersten Schritt finden wir eine stetige Fortsetzung $F : X \to [-1, 1]$ davon. Nun ist $\{-1, 1\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $[-1, 1]$, also ist $B := F^{-1}(\{-1, 1\})$ abgeschossen in X und nach Konstruktion ist $A \cap B = \emptyset$. Nach Satz 5.3 finden wir eine stetige Funktion $g : X \to [0, 1]$, sodass $g(x) = 1$ für alle $x \in A$ und $g(x) = 0$ für alle $x \in B$. Nach Korollar 3.2 ist gF eine stetige Funktion und nach Konstruktion gilt für $x \in X$ entweder

$|F(x)| < 1$ und $|g(x)| \leq 1$ oder $g(x) = 0$, also hat gF Werte in $(-1, 1)$. Für $x \in A$ ist $g(x) = 1$, also $gF(x) = F(x) = (h \circ f)(x)$, also ist $h^{-1} \circ (gF) : X \to \mathbb{R}$ eine stetig Fortsetzung von f. □

Die Sätze von Tychonov und Heine–Borel

Als nächstes betrachten wir die Frage der Kompaktheit eines Produktes topologischer Räume. Ist $X = \prod_{i \in I} X_i$ das topologische Produkt der Räume X_i aus 4.4, dann ist für jedes $i \in I$ die Projektion $\mathrm{pr}_i : X \to X_i$ stetig und surjektiv. Ist also X kompakt, dann ist $\mathrm{pr}_i(X) = X_i$ kompakt für jedes $i \in I$. Der Satz von Tychonov sagt, dass auch die Umkehrung gilt, also (auch unendliche) Produkte kompakter Räume wiederum kompakt sind. Wir werden den Satz nur für endliche Produkte beweisen. Daraus erhält man leicht die Charakterisierung kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

5.5. Kompaktheit und Netze. Zunächst besprechen wir eine Charakterisierung kompakter Räume durch Netze, die in Spezialfällen aus der Analysis bekannt ist.

Proposition 5.5. *Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:*
(1) X ist kompakt.
(2) "endliche Durchschnittseigenschaft": Ist $\{F_i : i \in I\}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X, sodass $\cap_{i \in I} F_i = \emptyset$ gilt, dann gibt es eine endliche Teilfamilie $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_n}\}$, sodass $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} = \emptyset$.
(3) Jedes Netz $(x_j)_{j \in J}$ in X hat mindestens einen Häufungswert.
(4) Jedes Netz $(x_j)_{j \in J}$ in X besitzt eine konvergente Verfeinerung.

Beweis. Durch Komplementbildung erhalten wir sofort (1)$\Leftrightarrow$(2): Eine Familie $\{F_i\}$ abgeschlossener Mengen entspricht der Familie $\{U_i\}$ offener Mengen via $U_i = X \setminus F_i$ und $F_i = X \setminus U_i$. Nach den de Morgan'schen Regeln entspricht $\cap_{i \in I} F_i = \emptyset$ genau $\cup_{i \in I} U_i = X$, also der Tatsache dass $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung ist. Die Existenz der endlichen Teilfamilie der $\{F_i\}$ entspricht genau der Existenz einer endlichen Teilüberdeckung. Andererseits folgt (3)$\Leftrightarrow$(4) sofort auf Proposition 3.6, die besagt, dass ein Punkt $x \in X$ genau dann Häufungswert eines Netzes, wenn es eine Verfeinerung gibt, die gegen x konvergiert.

(2)$\Rightarrow$(3) Sei $(x_j)_{j \in J}$ ein Netz in X. Für $j \in J$ definieren wir $A_j := \{x_\ell : \ell \in J, \ell \geq j\}$ und setzen $F_j := \overline{A_j}$. Da die Menge J gerichtet ist, finden wir zu je zwei Indizes $j_1, j_2 \in J$ einen gemeinsamen größeren Index. Induktiv folgt, dass wir zu endlich vielen Indizes $j_1, \dots, j_n \in J$ ein Element $j \in J$ mit $j \geq j_k$ für alle $k = 1, \dots, n$ finden. Insbesondere ist dann natürlich $x_j \in A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_n} \subseteq F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$. Damit ist der Durchschnitt über endlich viele F_j immer nichtleer, also folgt $F := \cap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$ nach (2). Für $x \in F$ und $j_0 \in J$ ist nach Definition $x \in F_{j_0} = \overline{A_{j_0}}$. Damit gilt für eine Umgebung $U \in \mathcal{U}_x$ immer $U \cap A_{j_0} \neq \emptyset$, also gibt es einen Index $j \geq j_0$ mit $x_j \in U$. Somit ist x ein Häufungswert des Netzes $(x_j)_{j \in J}$.

(3)$\Rightarrow$(2): Sei $\{F_i : i \in I\}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X sodass jede endliche Teilfamilie nichtleeren Durchschnitt hat. Sei J die Menge aller endlichen Teilmengen von I mit der Inklusion als Ordnung. Natürlich ist das eine Halbordnung und für $A, B \in J$ ist $A \cup B \in J$ eine Menge, die sowohl A als auch B enthält, also ist $(J, \subseteq)$ eine gerichtete Menge. Für $A \in J$ ist nach Voraussetzung $\cap_{i \in A} F_i \neq \emptyset$. Wir wählen einen Punkt x_A in diesem Durchschnitt und betrachten das Netz $(x_A)_{A \in J}$. Nach Voraussetzung hat dieses Netz einen Häufungswert x und wir behaupten, dass $x \in F_i$ für alle $i \in I$ und damit $\cap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ gilt. Für fixes $i \in I$ betrachten wir $\{i\} \in J$. Da x ein Häufungswert ist, finden wir für jede Umgebung U von x eine Menge $A \in J$ mit

$\{i\} \subseteq A$, sodass $x_A \in U$ gilt. Wegen $i \in A$ folgt $x_A \in F_i$, also ist $U \cap F_i \neq \emptyset$. Da dies für alle $U \in \mathcal{U}_x$ gilt ist $x \in \overline{F_i} = F_i$. □

Bemerkung 5.5. (1) Natürlich kann man auch die Analoga der Bedingungen (3) und (4) für Folgen statt Netze betrachten. Das führt zum Begriff eines *folgenkompakten* topologischen Raumes. Der Zusammenhang zwischen Kompaktheit und Folgenkompaktheit ist wesentlich heikler als etwa der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Folgenstetigkeit in Abschnitt 3.8.

(2) Man kann weitere äquivalente Bedingungen zur Kompaktheit angeben, die denen in der Proposition ähnlich sind. Einerseits kann man statt Netzen wiederum Filter verwenden, siehe 3.10. Der wichtigere Schritt ist aber, dass man (unter Verwendung des Auswahlaxioms) Kompaktheit auch äquivalent mittels universellen Netzen bzw. Ultrafiltern charakterisieren kann, wobei die Ultrafilter handlicher sind. Mit Hilfe des Auswahlaxioms kann man zeigen, dass man jeden Filter zu einem Ultrafilter verfeinern kann. (Ohne Benutzung des Auswahlaxioms kann man keine interessanten Beispiele von Ultrafiltern angeben.) Andererseits besitzen Ultrafilter nach Definition keine echte Verfeinerung. Diese beiden Tatsachen implizieren leicht, dass die Kompaktheit eines Raumes X auch äquivalent dazu ist, dass jeder Ultrafilter in X konvergiert.

5.6. Der Satz von Tychonov.

Satz 5.6 (Tychonov). *Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ ein Produkt nichtleerer topologischer Räume. Dann ist X genau dann kompakt, wenn jeder der Räume X_i kompakt ist.*

Beweis. Es bleibt zu zeigen, dass für kompakte Räume X_i auch X kompakt ist. Wir beweisen den Satz nur für zwei Faktoren, was natürlich induktiv das Resultat für endliche Produkte impliziert.

Seien also X_1 und X_2 kompakt, $X = X_1 \times X_2$ und $\mathrm{pr}_i : X \to X_i$ die Projektionen für $i = 1, 2$. Sei $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X und betrachte das Netz $(\mathrm{pr}_1(x_j))_{j\in J}$ in X_1. Da X_1 kompakt ist gibt es nach Proposition 5.5 eine Verfeinerung $(\mathrm{pr}_1(x_{\varphi(\lambda)}))_{\lambda\in\Lambda}$ mit Verfeinerungsabbildung $\varphi : \Lambda \to J$, die gegen einen Punkt $a \in X_1$ konvergiert. Nun betrachten wir das Netz $(\mathrm{pr}_2(x_{\varphi(\lambda)}))_{\lambda\in\Lambda}$ in X_2. Da X_2 kompakt ist, finden wir eine Verfeinerung $(\mathrm{pr}_2(x_{\varphi(\psi(\sigma))}))_{\sigma\in\Sigma}$ mit Verfeinerungsabbildung $\psi : \Sigma \to \Lambda$, die gegen einen Punkt $b \in X_2$ konvergiert. Nun ist $(\mathrm{pr}_1(x_{\varphi(\psi(\sigma))}))_{\sigma\in\Sigma}$ eine Verfeinerung von $(\mathrm{pr}_1(x_{\varphi(\lambda)}))_{\lambda\in\Lambda}$, und konvergiert damit nach Teil (1) von Proposition 3.6 gegen a . Aus Abschnitt 4.3 sehen wir, dass das Netz $(x_{\varphi(\psi(\sigma))})_{\sigma\in\Sigma}$ in X gegen den Punkt $(a, b) \in X$ konvergiert.

Natürlich ist $\varphi \circ \psi : \Sigma \to J$ ordnungstreu als Komposition von ordnungstreuen Funktionen. Bezeichen wir die Ordnungsrelationen auf allen drei Mengen mit $\leq$, dann finden wir andererseits finden wir zu $j \in J$ einen Index $\lambda \in \Lambda$ mit $\varphi(\lambda) \geq j$ und dazu einen Index $\sigma \in \Sigma$ mit $\psi(\sigma) \geq \lambda$. Damit ist aber $(\varphi \circ \psi)(\sigma) \geq \varphi(\lambda) \geq j$, also ist $\varphi \circ \psi$ eine Verfeinerungsabbildung. Wir haben also für ein beliebiges Netz $(x_j)_{j\in J}$ in X eine konvergente Verfeinerung gefunden, also ist X kompakt. □

Mit der Charakterisierung kompakter Räume durch Konvergenz von Ultrafiltern ist der Beweis der allgemeinen Version des Satzes von Tychonov sogar einfacher als der hier gegebene Beweis für endliche Produkte. Man muss nur verifizieren, dass für einen Ultrafilter in $X = \prod_{i\in I} X_i$ und jeden Index $i \in I$ das Bild unter pr_i ein Ultrafilter in X_i ist, was ganz einfach ist. Damit konvergiert jeder der Bildfilter und eine analoge Charakterisierung konvergenter Filter wie die Charakterisierung für Netze aus Abschnitt 4.3 zeigt, dass der ursprüngliche Ultrafilter in X konvergiert. Im Gegensatz zur Version für endliche Produkte von oben, benötigt die allgemeine Version des Satzes von Tychonov das Auswahlaxiom. Man kann nämlich umgekehrt relativ leicht das Auswahlaxiom aus dem

Satz von Tychonov herleiten. Damit sind die beiden Sätze äquivalent (und insbesondere im Rahmen der üblichen Mengenlehre weder beweisbar noch widerlegbar).

Als nächstes leiten wir aus dem Satz von Tychonov für endliche Produkte den Satz von Heine–Borel her.

KOROLLAR 5.6 (Satz von Heine–Borel). *Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

BEWEIS. ($\Rightarrow$) Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die offene Kugel $B_k(0)$. Natürlich ist $\cup_{k\in\mathbb{N}} B_k(0) = \mathbb{R}^n$, also enthält diese Vereinigung A. Da A kompakt ist, liegt diese Teilmenge schon in einer endlichen Vereinigung solcher Kugeln und ist damit beschränkt. Da $\mathbb{R}^n$ ein Hausdorff Raum ist, ist A abgeschlossen nach Teil (2) von Proposition 5.1.

($\Leftarrow$) Da A beschränkt ist, finden wir eine Zahl $M \in \mathbb{R}$, sodass $A \subseteq B_M(0)$ gilt. Natürlich liegt dann A in der Teilmenge $[-M, M]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Aus Lemma 5.1 wissen wir, dass $[-M, M]$ kompakt ist und nach dem Satz von Tychonov ist auch $[-M, M]^n$ kompakt. Da A abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist, ist A auch abgeschlossen in der abgeschlossenen Teilmenge $[-M, M]^n$ und damit kompakt nach Teil (1) von Proposition 5.1. $\square$

Die Richtung ($\Rightarrow$) des Beweises funktioniert natürlich in beliebigen metrischen Räumen, also ist jede kompakte Teilmenge in einem metrischen Raum ist beschränkt und abgeschlossen. Im allgemeinen sind diese Bedingungen aber nicht hinreichend, auch nicht für beliebige Metriken auf $\mathbb{R}^n$. (Man kann leicht Metriken auf $\mathbb{R}^n$ konstruieren, die Werte in $[0, 1]$ und trotzdem die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^n$ liefern. In so einer Metrik ist natürlich jede Teilmenge beschränkt.) Für einige wichtige Beispiele von metrischen Räumen gibt es Charakterisierungen von kompakten Teilmengen die analog zum Satz von Heine–Borel sind. Zum Beispiel liefert der Satz von Arzela–Ascoli eine Charakterisierung kompakter Teilmengen in $C([a, b], \mathbb{R})$.

Exkurs: Zu Kompaktheit verwandte Begriffe

Es gibt einige topologische Begriffe, die Analoga oder Abschwächungen von Kompaktheit darstellen. Beispiele dafür sind *abzählbar kompakte* Räume (jede abzählbare offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung), *Lindelöff* Räume (jede offene Überdeckung besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung), σ–kompakte Räume (der Raum kann als Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen geschrieben werden) und Parakompaktheit (zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$, sodass jedes Element von $\mathcal{V}$ ganz in einem Element von $\mathcal{U}$ liegt, und jeder Punkt eine Umgebung hat, die nur endlich viele Elemente von $\mathcal{V}$ schneidet). Aus Zeitgründen werden wir diese Begriffe nicht im Detail besprechen, sondern uns nur kurz dem lokalen Analogon des Kompaktheitsbegriffs widmen.

5.7. Lokalkompakte Räume. Die Bedeutung lokalkompakter Räume liegt hauptsächlich darin, dass genau auf diesen Räumen leicht mit der Topologie verträgliche Maße gefunden werden können, weshalb sie in der Maßtheorie eine wichtige Rolle spielen.

DEFINITION 5.7. Ein topologischer Raum X heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis besitzt, die aus kompakten Teilmengen von X besteht.

Für einen Hausdorff Raum X genügt es, dass jeder Punkt x eine kompakte Umgebung besitzt: Sei $x \in X$ ein Punkt $K \in \mathcal{U}_x$ kompakt, und $U \in \mathcal{U}_x$ beliebig. Dann ist $K \cap U$ eine Umgebung von x, also gilt $x \in V := (K \cap U)^\circ$ und $V \subseteq K$ impliziert $\overline{V} \subseteq K$, also ist $\overline{V}$ kompakt. Da X ein T_2–Raum ist, ist $\{x\}$ abgeschlossen in X, also auch in $\overline{V}$. Aus Abschnitt 5.3 wissen wir, dass $\overline{V}$ normal ist und wir können Lemma 5.3

auf $\{x\} \subseteq V \subseteq \overline{V}$ anwenden. Das liefert eine offene Teilmenge $W \subseteq \overline{V}$ mit $\{x\} \subseteq W$ und $\overline{W} \subseteq V$. Insbesondere gilt $W \subseteq V$ und daraus folgt sofort, dass W auch offen in X, und damit eine Umgebung von x ist. Damit ist $\overline{W}$ eine Umgebung von x, die nach Konstruktion in U enthalten und als abgeschlossene Teilmenge von $\overline{V}$ kompakt ist. Somit bilden die kompakten Umgebungen von x eine Umgebungsbasis für x.

Beispiel 5.7. (1) Ist X ein kompakter Hausdorff Raum, dann ist natürlich X eine kompakte Umgebung jedes seiner Punkte, also ist X lokal kompakt.

(2) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Umgebung $\{y : d(x, y) \leq 1\}$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt nach Satz 5.6 (Heine–Borel). Somit ist $\mathbb{R}^n$ ein lokal kompakter Raum.

(3) Eine n–dimensionale *topologische Mannigfaltigkeit* ist ein separabler, metrisierbarer topologischer Raum X, sodass jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \in \mathcal{U}_x$ besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Ist $\varphi : U \to V$ so ein Homöomorphismus, und K eine kompakte Umgebung von $\varphi(x)$, die in V enthalten ist, dann ist $\varphi^{-1}(K)$ eine kompakte Umgebung von x. Damit ist X lokal kompakt. Topologische Mannigfaltigkeiten und vor allem die Teilklasse der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten spielen eine wichtige Rolle in weiten Teilen der Mathematik. Ein nicht offensichtliches Beispiel für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist der der reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ aus 4.5.

(4) Auch relativ “kleine” unendlichdimensionale Räume sind nicht lokal kompakt. Betrachten wir die Menge M der endlichen Folgen in $\mathbb{R}$, also Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die ab einem gewissen Index identisch Null sind. Darauf definiert $d((x_k), (y_k)) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k - x_k|$ eine Metrik. Wäre dieser Raum lokal kompakt, dann müsste es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq M$ geben, die eine Kugel der Form $B_{\varepsilon_0}(0)$ für ein fixes $\varepsilon_0 > 0$ enthält. Definiere nun für $i \in \mathbb{N}$ die reelle Folge $e^i = (e^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ durch $e^i_i = \varepsilon_0$ und $e^i_j = 0$ für $j \neq i$, und betrachte die Folge $(e^i)_{i\in\mathbb{N}}$ in M. Nach Konstruktion liegt diese Folge in K, also müsste sie nach Proposition 5.5 einen Häufungswert x besitzen. Nun ist aber nach Konstruktion $d((e^i), (e^j)) = \varepsilon_0$ für all $i \neq j$ und damit kann nach der Dreiecksungleichung die Umgebung $B_{\varepsilon_0/2}(x)$ höchstens eine der Folgen e^i enthalten, ein Widerspruch.

Ein lokal kompakter Hausdorff Raum X der nicht kompakt ist, kann “kompaktifiziert” werden, indem man einen “Punkt im unendlichen” zu X hinzufügt (“Einpunktkompaktifizierung”):

Proposition 5.7. *Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum, der nicht kompakt ist. Dann kann man die Menge $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ so zu einem kompakten Hausdorffraum machen, dass die Inklusion $i : X \to \hat{X}$ eine Einbettung mit dichtem Bild ist.*

Beweis. Wir definieren eine Teilmenge $U \subseteq \hat{X}$ als offen, wenn $U \cap X$ offen in X ist, und, falls $\infty \in U$ gilt, zusätzlich $X \setminus U \subseteq X$ kompakt ist. Man verifiziert leicht direkt, dass dies eine Topologie auf $\hat{X}$ definiert. Um die Hausdorff Eigenschaft zu beweisen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Für $x, y \in X \subseteq \hat{X}$ findet man offene Teilmengen $U, V \in X$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$ und diese sind auch in $\hat{X}$ offen. Ist andererseits $x \in X$, dann gibt es eine kompakte Umgebung K von x in X. Nach Definition ist dann $\hat{X} \setminus K$ eine offene Umgebung von ∞, also können wir jedes $x \in X$ von ∞ trennen.

Nach Definition ist für eine offene Teilmenge $U \subseteq \hat{X}$ immer $U \cap X$ offen in X, also ist die Inklusion $i : X \to \hat{X}$ stetig. Umgekehrt ist jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ auch offen in $\hat{X}$ und daraus folgt sofort, dass i eine Einbettung ist. Da X nicht kompakt ist, schneidet jede offene Teilmenge von $\hat{X}$, die ∞ enthält, die Teilmenge $i(X)$, also ist $i(X)$ dicht in $\hat{X}$. Schließlich sieht man leicht, dass $\hat{X}$ kompakt ist: Für eine offene Überdeckung $\{U_i : i \in I\}$ von $\hat{X}$ finden wir einen Index i_0 mit $\infty \in U_{i_0}$. Dann wird die kompakte Teilmenge $X \setminus U_{i_0}$ von den anderen U_i überdeckt, also finden wir $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$, sodass $X \setminus U_{i_0} \subseteq U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$. Natürlich folgt daraus, dass die Mengen $U_{i_0}, \dots, U_{i_n}$ ganz $\hat{X}$ überdecken. □

Für den lokalkompakten Raum $\mathbb{R}^n$ kann man die Einpunktkompaktifizierung mittels der sogenannten stereographischen Projektion mit der Einheitssphäre $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren.

Zusammenhang

5.8. Zusammenhängende Räume.

Definition 5.8. Sei X ein topologischer Raum.
(1) Eine *Disjunktion* von X ist gegeben durch zwei nichtleere offenen Teilmengen $U, V \subseteq X$, sodass $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$.
(2) Der Raum X heißt *zusammenhängend*, falls X keine Disjunktion besitzt.
(3) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *zusammenhängend*, wenn A als topologischer Raum mit der Spurtopologie zusammenhängend ist.

Bemerkung 5.8. (1) Ist $X = U \cup V$ eine Disjunktion, dann ist die Teilmenge U nach Definition offen. Das Komplement $X \setminus U = V$ ist nach Definition ebenfalls offen, also ist U auch abgeschlossen. Ist umgekehrt $U \subseteq X$ eine nichtleere echte Teilmenge die offen und abgeschlossen ist, dann ist $X = U \cup (X \setminus U)$ eine Disjunktion, also X nicht zusammenhängend. Insgesamt ist also X genau dann zusammenhängend, wenn X und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.
(2) Nach Definition der Spurtopologie lässt sich die Bedingung in (3) leicht umformulieren: $A \subseteq X$ ist genau dann zusammenhängend, wenn für je zwei offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U \cup V$ und $U \cap V \cap A = \emptyset$ entweder $U \cap A = \emptyset$ oder $V \cap A = \emptyset$ gilt.

Lemma 5.8. *Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn für je zwei Elemente $x, y \in A$ mit $x < y$ das ganze Intervall $[x, y]$ in A enthalten ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Nehmen wir indirekt an, dass es Punkte $x < z < y$ gibt, sodass $x, y \in A$ und $z \notin A$ gilt. Dann sind $U = (-\infty, z)$ und $V = (z, \infty)$ offen in $\mathbb{R}$, $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$, $x \in A \cap U$ und $y \in A \cap V$, also erhalten wir eine Disjunktion von A.

($\Leftarrow$) Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen, sodass $A \subseteq U \cup V$ und $U \cap V \cap A = \emptyset$ gelten. Sind $U \cap A$ und $V \cap A$ beide nichtleer, dann finden wir Punkte $x \in U \cap A$ und $y \in V \cap A$, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x < y$ annehmen. Dann gilt $[x, y] \subseteq A$ nach Voraussetzung, also ist $[x, y]$ die disjunkte Vereinigung von $U \cap [x, y]$ und $V \cap [x, y]$. Sei z das Supremum der Menge $U \cap [x, y]$. Da U offen ist und $x \in U$ gilt, ist $z > x$. Damit kann aber z nicht in der offenen Menge V liegen, weil es sonst nicht beliebig nahe bei z Punkte von U geben könnte, also muss $z \in U$ gelten. Damit ist aber $z < y$, und da U offen ist, muss es noch echt größere Punkte im Intervall (z, y) enthalten, ein Widerspruch. Damit ist A zusammenhängend. □

Man verifiziert leicht (siehe Übungen) dass die Bedingung, dass A mit je zwei Punkten auch das Intervall zwischen diesen beiden Punkten enthält äquivalent dazu ist, dass A selbst ein Intervall ist.

Beispiel 5.8. (1) Sei X ein diskreter Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge und $x \in A$ ein Punkt. Dann sind $\{x\}$ und $A \setminus \{x\}$ disjunkte offene Teilmengen von X deren Vereinigung ganz A ist. Damit sind die einzigen nichtleeren zusammenhängenden Teilmengen von X die einpunktigen Teilmengen. Ein Raum mit dieser Eigenschaft heißt *total unzusammenhängend.*

(2) Aus Lemma 5.8 sehen wir, dass eine Teilmenge von $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, die mindestens zwei Punkte enthält, nicht zusammenhängend ist. Damit ist auch $\mathbb{Q}$ total unzusammenhängend.

Die allgemeine Version des Zwischenwertsatzes ist jetzt ganz einfach zu beweisen.

Satz 5.8. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Funktion zwischen topologischen Räumen. Ist X zusammenhängend, dann ist auch die Teilmenge $f(X) \subseteq Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Seien $U, V \subseteq Y$ offene Teilmengen mit $f(X) \subseteq U \cup V$ und $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$. Dann sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen in X, disjunkt wegen $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$ und ihre Vereinigung ist X wegen $f(X) \subseteq U \cup V$. Ist X zusammenhängend, dann ist $f^{-1}(U) = \emptyset$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$, also $U \cap f(X) = \emptyset$ oder $V \cap f(X) = \emptyset$. □

Korollar 5.8. *(1) Zusammenhang ist eine topologische Eigenschaft.*

(2) Ist X ein zusammenhängender topologischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sind $x_0, x_1 \in X$ so, dass $f(x_0) < f(x_1)$ gilt. Dann gibt es für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) < t < f(x_1)$ einen Punkt $x \in X$ mit $f(x) = t$.

Beweis. (1) Ist X zusammenhängend und $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus, dann ist $f(X) = Y$ zusammenhängend nach Satz 5.8.

(2) Nach Satz 5.8 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend, also folgt $[f(x_0), f(x_1)] \subseteq f(X)$ aus Lemma 5.8. □

5.9. Zusammenhangskomponenten. Man kann Zusammenhang in Termen von stetigen Funktionen in diskrete Räume charakterisieren:

Lemma 5.9. *Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Funktion von X in einen diskreten Raum konstant ist.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Funktion von einem zusammenhängenden topologischen Raum X in einen diskreten Raum Y und $y \in f(X) \subseteq Y$ ein Punkt. Dann ist die Teilmenge $\{y\}$ offen und abgeschlossen in Y, also ist $f^{-1}(\{y\})$ offen und abgeschlossen in X. Da diese Teilmenge nicht leer ist und X zusammenhängend ist, muss sie mit X übereinstimmen.

Ist umgekehrt $X = U \cup V$ eine Disjunktion, dann definiert man $f : X \to \{0, 1\}$ durch $f(x) = 0$ für $x \in U$ und $f(x) = 1$ für $x \in V$. Offensichtlich ist diese Funktion stetig für die diskrete Topologie auf $\{0, 1\}$. □

Damit können wir nun leicht zwei wichtige Tatsachen über zusammenhängende Teilmengen von topologischen Räumen beweisen:

Proposition 5.9. *Sei X ein topologischer Raum.*

(1) Ist $A \subseteq X$ eine zusammenhängende Teilmenge und $B \subseteq X$ eine Teilmenge mit $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, dann ist B zusammenhängend. Insbesondere ist $\overline{A}$ zusammenhängend.

(2) ("Kleeblattlemma") Sei $\{A_i : i \in I\}$ eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen von X, sodass es einen Index $i_0 \in I$ gibt für den $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ für alle $i \in I$ gilt. Dann ist die Teilmenge $A := \cup_{i \in I} A_i \subseteq X$ zusammenhängend.

Beweis. (1) Sei $x \in B$ ein Punkt und U eine offene Umgebung von x in B. Dann gibt es eine offene Menge $\tilde{U} \subseteq X$, sodass $U = \tilde{U} \cap B$ ist. Wegen $B \subseteq \overline{A}$ ist $\tilde{U} \cap A = U \cap A \neq \emptyset$. Damit ist aber die Teilmenge A dicht in B. Ist nun Y ein diskreter Raum und $f : B \to Y$

stetig, dann ist $f|_A : A \to Y$ stetig, also konstant, weil A zusammenhängend ist. Da A dicht in B ist, ist f auf B konstant, also B zusammenhängend nach Lemma 5.9.

(2) Sei $f : A \to Y$ eine stetige Funktion in einen diskreten Raum Y. Dann ist für jedes $i \in I$ die Einschränkung $f|_{A_i}$ konstant, weil jedes A_i zusammenhängend ist. Da aber $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ gilt, muss der Wert von f auf jedem A_i mit dem Wert auf A_{i_0} übereinstimmen. Somit ist aber f konstant auf A, also A zusammenhängend. □

Beispiel 5.9. Man kann den Raum $\mathbb{R}^n$ als Vereinigung aller Geraden durch 0 schreiben. Jede dieser Geraden ist natürlich homöomorph zu $\mathbb{R}$ und eine beliebig gewählte fixe Gerade schneidet alle anderen. Somit ist $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend nach dem Kleeblattlemma.

Für einen Punkt $x \in X$ definiert man nun die *Zusammenhangskomponente* K_x von x als die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die den Punkt x enthalten. Da die Menge $\{x\}$ zusammenhängend und in jeder dieser Mengen enthalten ist, sehen wir aus dem Kleeblattlemma, dass die Menge K_x selbst zusammenhängend ist. Somit ist K_x die größte zusammenhängende Teilmenge von X, die den Punkt x enthält. Nach Teil (1) der Proposition ist $\overline{K_x}$ ebenfalls zusammenhängend, also ist $K_x = \overline{K_x}$ und Zusammenhangskomponenten sind automatisch abgeschlossen. Für total unzusammenhängende Räume gilt natürlich $K_x = \{x\}$ für jeden Punkt x.

Zum Abschluss erwähnen wir noch kurz den Begriff des Bogenzusammenhangs. Ein topologischer Raum X heißt *bogenzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Funktion $c : [0, 1] \to X$ gibt, die $c(0) = x$ und $c(1) = y$ erfüllt. Das bedeutet also, dass man je zwei Punkte durch einen stetigen Pfad verbinden kann. Ein bogenzusammenhängender Raum X ist automatisch zusammenhängend. Ist nämlich $X = U \cup V$ eine Disjunktion, dann wählen wir $x \in U$ und $y \in V$ und finden eine stetige Kurve $c : [0, 1] \to X$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$. Dann liefern aber $c^{-1}(U)$ und $c^{-1}(V)$ eine Disjunktion des Intervalls $[0, 1]$, ein Widerspruch. Es gibt aber topologische Räume (auch Teilmengen von $\mathbb{R}^2$) die zusammenhängend, aber nicht bogenzusammenhängend sind. Für bogenzusammenhängende Teilmengen gilt ein Analogon des Kleeblattlemmas. Damit kann man die *Bogenkomponente* eines Punktes $x \in X$ analog zur Zusammenhangskomponente bilden. Dies ist die größte bogenzusammenhängende Teilmenge von X, die x enthält. Allerdings gilt das Analogon von Teil (1) von Proposition 5.9 für bogenzusammenhängende Räume nicht, also sind Bogenkomponenten im Allgemeinen nicht abgeschlossen.

KAPITEL 6

Metrische Räume

Zum Abschluss der Vorlesung besprechen wir kurz metrische Räume, vor allem den Begriff der Vollständigkeit und seine Beziehung zu topologischen Eigenschaften.

6.1. Normalität. Aus Abschnitt 3.5 wissen wir, dass für jeden metrischen Raum (M, d) die metrische Topologie auf M automatisch Hausdorff ist. Wir wollen nun zeigen, dass diese Topologie auch immer normal im Sinn von Definition 5.3 ist.

Als Vorbereitung definieren wir für eine Teilmenge $A \subseteq M$ und einen Punkt $x \in M$ einen Abstand durch $d(x, A) := \inf_{a\in A} d(x, a)$. Nach Definition gilt offensichtlich $d(x, A) \geq 0$. Außerdem gilt $d(x, A) = 0$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Element $a \in A$ mit $a \in B_\varepsilon(x)$ gibt. Das ist aber äquivalent dazu, dass jede Umgebung von x die Teilmenge A schneidet, also zu $x \in \overline{A}$.

Proposition 6.1. *Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist die metrische Topologie auf M normal.*

Beweis. Wir müssen zu abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq M$ mit $A \cap B = \emptyset$ offene Teilmengen $U, V \subseteq M$ mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$ finden, sodass $U \cap V = \emptyset$ gilt. Für jeden Punkt $a \in A$ muss $d(a, B) > 0$ gelten, weil sonst $a \in \overline{B} = B$ gelten würde. Also gibt es eine positive reelle Zahl r_a, sodass $d(a, b) > r_a$ für alle $b \in B$ gilt. Analog finden wir für jedes $b \in B$ eine Zahl $s_b > 0$, sodass $d(a, b) > s_b$ für alle $a \in A$ gilt.

Nun setzen wir $U := \cup_{a\in A} B_{\frac{r_a}{2}}(a)$ und $V := \cup_{b\in B} B_{\frac{s_b}{2}}(b)$. Als Vereinigung offener Mengen sind U und V natürlich offen, und nach Konstruktion gilt $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. Wäre $x \in U \cap V$, dann gäbe es Punkte $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$, sodass $x \in B_{\frac{r_{a_0}}{2}}(a_0)$ und $x \in B_{\frac{s_{b_0}}{2}}(b_0)$ gilt. Nach der Dreiecksungleichung wäre dann aber

$$d(a_0, b_0) \leq d(a_0, x) + d(x, b_0) \leq \frac{r_{a_0} + s_{b_0}}{2} \leq \max\{r_{a_0}, s_{b_0}\},$$

ein Widerspruch zur Definition von r_{a_0} oder s_{b_0}. □

Damit gilt das Lemma von Urysohn aus 5.3 für metrische Räume und man kann abgeschlossene Teilmengen durch stetige Funktionen trennen. In diesem Fall kann man solche Funktionen aber leicht explizit angeben. Man zeigt nämlich leicht, dass für jede Teilmenge $A \subseteq M$ die Funktion $M \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $x \mapsto d(x, A)$ stetig ist. Für disjunkte abgeschlossene Teilmengen $A, B \subseteq M$ ist dann $f(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ eine Urysohn Funktion, siehe [**1**, 3.2].

Vollständigkeit und Vervollständigung

In einem metrischen Raum kann man Cauchy Folgen analog wie in $\mathbb{R}$ definieren. Es gibt auch den Begriff von Cauchy Netzen, für metrische Räume kommt man aber mit Folgen aus.

6.2. Cauchy–Folgen und Vollständigkeit.

Definition 6.2. Sei (M, d) ein metrischer Raum.
(1) Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt eine *Cauchy Folge* , falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(x_k, x_\ell) < \varepsilon$ für alle $k, \ell \geq N$ gilt.
(2) Der metrische Raum (M, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy Folge in M konvergiert.

Lemma 6.2. *In jedem metrischen Raum (M, d) gilt:*
(1) Jede konvergente Folge in M ist eine Cauchy Folge.
(2) Falls eine Cauchy Folge einen Häufungswert hat, dann konvergiert sie gegen diesen.

Beweis. (1) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen einen Punkt $x \in M$ konvergiert und sei $\varepsilon > 0$. Dann finden wir zu $\varepsilon/2 > 0$ einen Index N, sodass für alle $n \geq N$ immer $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ gilt. Nach der Dreiecksungleichung erhalten wir für $k, \ell \geq N$ damit sofort $d(x_k, x_\ell) \leq d(x_k, x) + d(x, x_\ell) < \varepsilon$, also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge.

(2) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in M, $x \in M$ ein Häufungswert der Folge und sei $\varepsilon > 0$. Zu $\varepsilon/2 > 0$ finden wir dann einerseits einen Index N, sodass für $k, \ell \geq N$ immer $d(x_k, x_\ell) < \varepsilon/2$ gilt. Andererseits finden wir nach Definition eines Häufungswerts einen Index $n_0 \geq N$, sodass $d(x_{n_0}, x) < \varepsilon/2$ gilt. Für $n \geq N$ folgt mit der Dreiecksungleichung sofort $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x) < \varepsilon$, also konvergiert die Folge (x_n) gegen x. □

Intuitiv sollte man sich Cauchy Folgen als Folgen vorstellen, die eigentlich konvergieren müssten, außer der Punkt, gegen den sie konvergieren würden, wurde aus dem Raum entfernt. Tatsächlich kann man (durch den Prozess der Vervollständigung, siehe Abschnitt 6.5) diese Punkte auch wieder "hinzufügen".

Man beachte, dass "Cauchy Folge" und "Vollständigkeit" *keine* topologischen, sondern spezifisch metrische Begriffe sind: So bildet etwa der Homöomorphismus $f(t) = \frac{1}{t}$ vom Intervall $(0, \infty)$ auf sich selbst die Cauchy Folge $(\frac{1}{k})_{k\geq 1}$ auf die Folge $(k)_{k\geq 1}$ ab, die natürlich keine Cauchy–Folge ist. Andererseits wissen wir, dass die metrische Topologie auf $(0, 1)$ mit der Teilraumtopologie übereinstimmt (siehe 4.1), also homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist. Nun ist aus der Analysis bekannt, dass der metrische Raum $\mathbb{R}$ vollständig ist, aber $(\frac{1}{k})_{k\geq 1}$ ist eine Cauchy Folge in $(0, 1)$, die nicht konvergiert.

Proposition 6.2. *Sei (M, d) ein metrischer Raum.*
(1) Ist die metrische Topologie auf M kompakt, dann ist (M, d) vollständig.
(2) Ist (M, d) vollständig und $A \subseteq M$ eine Teilmenge, dann ist der metrische Raum (A, d) genau dann vollständig, wenn A abgeschlossen in der metrischen Topologie ist.

Beweis. (1) Eine Cauchy Folge in M hat nach Teil (3) von Proposition 5.5 einen Häufungswert und konvergiert nach Teil (2) von Lemma 6.1 gegen diesen.

(2) Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in (A, d), dann ist es auch eine Cauchy Folge in (M, d). Da (M, d) vollständig ist, konvergiert die Folge in M, und ist $A \subseteq M$ abgeschlossen, dann liegt der Limes nach Satz 3.7 in A. Natürlich konvergiert die Folge dann auch in A gegen den selben Punkt, also ist A vollständig.

Sei umgekehrt $x \in \overline{A}$ ein Punkt. Nach Satz 3.7 gibt es eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deren Glieder in A liegen und die in M gegen x konvergiert. Nach Lemma 6.2 ist (a_k) eine Cauchy Folge in M, also auch in A. Ist A vollständig, dann gibt es einen Punkt $a \in A$, sodass (a_k) in A gegen a konvergiert. Dann konvergiert die Folge auch in M gegen a, also gilt $x = a \in A$, weil M Hausdorff ist. Somit ist aber $\overline{A} = A$, also A abgeschlossen in M. □

Beispiel 6.2. Sei X eine Menge und $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ die Menge der beschränkten Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ mit der Metrik $d(f,g) := \sup_{x\in X} |g(x) - f(x)|$ aus Abschnitt 2.3. Sei $(f_k)_{k\in N}$ eine Cauchy Folge in $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. Für einen fixen Punkt $x \in X$ und $k,\ell \in \mathbb{N}$ ist natürlich $|f_\ell(x) - f_k(x)| \leq d(f_k, f_\ell)$, also ist $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$. Somit existiert für jedes $x \in X$ das Element $f(x) := \lim_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$, und das definiert eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann finden wir einen Index $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(f_k, f_\ell) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k,\ell > N$ gilt. Für einen Punkt $x \in X$ konvergiert die Folge $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$, also finden wir einen Index $\ell_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_{\ell_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\ell_0 \geq N$ annehmen. Damit gilt aber $|f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x) - f_{\ell_0}(x)| + |f_{\ell_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$ für jedes $k \geq N$. Damit sehen wir, dass f beschränkt ist, also in $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ liegt, und $d(f_k, f) < \varepsilon$ für alle $k \geq N$ gilt. Somit konvergiert die Folge (f_k) gegen f, also ist der metrische Raum $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ vollständig.

Ist X ein topologischer Raum, dann wissen wir aus Abschnitt 5.4, dass die Menge $C_b(X,\mathbb{R})$ der beschränkten stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ bildet. Damit ist $C_b(X,\mathbb{R})$ ein vollständiger metrischer Raum nach Teil (2) der Proposition. Ist X ein kompakter topologischer Raum dann ist aus dem selben Grund der Raum $C(X,\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ eine vollständiger metrischer Raum.

6.3. Der Banach'sche Fixpunktsatz. Dieser Satz, der unter anderem im Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen eine zentrale Rolle spielt, stellt ein schönes Beispiel für eine Anwendung der Vollständigkeit dar.

Definition 6.3. Sei (M,d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : M \to M$ heißt eine *Kontraktion* wenn es eine Konstante $K \in [0,1) \subseteq \mathbb{R}$ gibt, sodass $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x,y)$ für alle $x,y \in M$ gilt.

Eine Kontraktion bringt also die Punkte von M näher zusammen. Offensichtlich ist jede Kontraktion stetig, weil für jedes $\varepsilon > 0$ natürlich $f(B_\varepsilon(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ gilt.

Satz 6.3 (Banach'scher Fixpunktsatz). *Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : M \to M$ eine Kontraktion. Dann gibt es einen eindeutigen Punkt $x_0 \in M$, für den $f(x_0) = x_0$ gilt.*

Beweis. Sei $K \in [0,1)$ so, dass $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x,y)$ für alle $x,y \in M$ gilt. Sind $x,y \in M$ Punkte mit $f(x) = x$ und $f(y) = y$, dann ist $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq Kd(x,y)$ nur möglich, wenn $d(x,y) = 0$, also $x = y$ gilt. Damit gibt es höchstens einen Fixpunkt für f.

Sei nun $x \in M$ ein beliebig gewählter Punkt, und betrachte $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$ und allgemein $f^k(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir behaupten, dass die Folge $(f^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in M ist. Sei $C := d(x, f(x)) \in \mathbb{R}$. Nach Definition gilt $d(f(x), f^2(x)) \leq KC$ und induktiv $d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \leq K^k C$ für $k \in \mathbb{N}$. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$d(x, f^k(x)) \leq \sum_{i=0}^{k-1} d(f^i(x), f^{i+1}(x)) \leq C(\sum_{i=0}^{k-1} K^i)$$

Da die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} K^i$ nichtnegative Summanden hat und gegen $\frac{1}{1-K}$ konvergiert, erhalten wir $d(x, f^k(x)) \leq C_1 := \frac{C}{1-K}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir nun $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $K^N C_1 < \varepsilon$ gilt. Dann erhalten wir für $N \leq k < \ell$

die Abschätzung

$$d(f^k(x), f^\ell(x)) \leq K^k d(x, f^{\ell-k}(x)) \leq K^{k-N} K^N C_1 < \varepsilon.$$

Somit ist $(f^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge, und da (M,d) vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen einen Punkt $x_0 \in M$. Da f stetig ist, gilt

$$f(x_0) = f(\lim_k f^k(x)) = \lim_k f(f^k(x)) = \lim_k f^{k+1}(x) = x_0$$

nach Satz 3.8, also ist x_0 ein Fixpunkt. □

6.4. Gleichmäßige Stetigkeit.

Definition 6.4. Seien (M,d) und $(\tilde{M},\tilde{d})$ metrische Räume. Eine Funktion $f : M \to \tilde{M}$ heißt *gleichmäßig stetig* wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass aus $d(x,y) < \delta$ immer $\tilde{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$ folgt.

Die Definition der Stetigkeit für metrische Räume verlangt gerade, dass es für jedes fixe x zu jedem ε ein δ mit der obigen Eigenschaft gibt. Damit ist jede gleichmäßig stetige Funktion automatisch stetig und die zusätzliche Bedingung ist, dass die Wahl von δ unabhängig vom Punkt x möglich ist. Natürlich ist jede Kontraktion (siehe 6.3) automatisch gleichmäßig stetig, weil man $\delta = \frac{1}{K}\varepsilon$ wählen kann. Analog ist eine *Isometrie* $f : (M,d) \to (\tilde{M},\tilde{d})$, also eine Funktion sodass $\tilde{d}(f(x), f(y)) = d(x,y)$ für alle $x, y \in M$ gilt, automatisch gleichmäßig stetig.

Sei $f : (M,d) \to (\tilde{M},\tilde{d})$ gleichmäßig stetig und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in M. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ finden wir ein $\delta > 0$, sodass aus $d(x,y) < \delta$ immer $\tilde{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$ gilt. Da (x_k) eine Cauchy Folge ist, gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_k, x_\ell) < \delta$ für alle $k, \ell \geq N$ gilt. Damit folgt aber $\tilde{d}(f(x_k), f(x_\ell)) < \varepsilon$ für alle $k, \ell \geq N$, also ist $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in $(\tilde{M},\tilde{d})$. Im Gegensatz zu allgemeinen stetigen Funktionen (siehe 6.2) bilden also gleichmäßig stetige Funktionen Cauchy Folgen auf Cauchy Folgen ab.

Das folgende Resultat ist in Spezialfällen schon aus der Analysis bekannt:

Proposition 6.4. *Seien (M,d) und $(\tilde{M},\tilde{d})$ metrische Räume und sei $f : M \to \tilde{M}$ eine stetige Funktion. Ist die metrische Topologie auf M kompakt, dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem Punkt $x \in M$ gibt es eine Zahl $\delta_x > 0$, sodass aus $d(x,y) < \delta_x$ immer $\tilde{d}(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt. Die Familie $\{B_{\frac{\delta_x}{2}}(x) : x \in M\}$ bildet eine offene Überdeckung von M. Da M kompakt ist gibt es endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n \in M$, sodass $M = B_{\frac{\delta_{x_1}}{2}}(x_1) \cup \dots \cup B_{\frac{\delta_{x_n}}{2}}(x_n)$ gilt. Sei nun $\delta := \min\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\} > 0$.

Seien $x, y \in M$ mit $d(x,y) < \delta$. Dann finden wir einen Index $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $d(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2}$ und wegen der Dreiecksungleichung und $\delta \leq \frac{\delta_{x_i}}{2}$ gilt $d(y, x_i) < \delta_{x_i}$. Damit erhalten wir aber

$$\tilde{d}(f(x), f(y)) \leq \tilde{d}(f(x), f(x_i)) + \tilde{d}(f(x_i), f(y)) < \varepsilon.$$

□

6.5. Exkurs: Die Vervollständigung.

Definition 6.5. Sei (M,d) ein metrischer Raum. Eine *Vervollständigung* von (M,d) ist ein vollständiger metrischer Raum $(\hat{M},\hat{d})$ zusammen mit einer Isometrie $i : M \to \hat{M}$, sodass das Bild $i(M)$ in der metrischen Topologie dicht in $\hat{M}$ ist.

Ist $(\hat{M}, \hat{d})$ eine Vervollständigung von (M, d), dann kann man M mit dem Teilraum $i(M) \subseteq \hat{M}$ identifizieren. Da $i(M)$ dicht in $\hat{M}$ ist, gibt es nach Satz 3.7 zu jedem Punkt $\hat{x} \in \hat{M}$ eine Folge in $i(M)$, die gegen $\hat{x}$ konvergiert. Nach Lemma 6.1 ist diese Folge eine Cauchy Folge in $\hat{M}$, also auch in $M \cong i(M)$. Das bedeutet aber, dass man gerade Limiten von Cauchy Folgen zu M dazu geben muss um eine Vervollständigung zu erhalten.

Um eine Vervollständigung von (M, d) zu erhalten genügt es, den Raum M isometrisch in einen vollständigen metrischen Raum $\tilde{M}$ einzubetten. Ist nämlich $i : M \to \tilde{M}$ eine Isometrie, dann setzt man $\hat{M} := \overline{i(M)}$, also den Abschluss des Bildes. Nach Teil (2) ist mit $\tilde{M}$ auch $\hat{M}$ vollständig und nach Konstruktion ist $i(M)$ dicht in $\hat{M}$, also ist $i : M \to \hat{M}$ eine Vervollständigung. Zum Beispiel ist der metrische Raum $(0, 1)$ schon isometrisch in $\mathbb{R}$ eingebettet, also ist die Inklusion $(0, 1) \hookrightarrow [0, 1]$ eine Vervollständigung.

Satz 6.5. *(1) Jeder metrische Raum (M, d) besitzt eine Vervollständigung.*
(2) Sind $i : (M, d) \to (\hat{M}, \hat{d})$ und $j : (M, d) \to (\tilde{M}, \tilde{d})$ Vervollständigungen, dann gibt es eine eindeutige bijektive Isometrie $f : \hat{M} \to \tilde{M}$, sodass $f \circ i = j$ gilt.

Beweisskizze. (1) Betrachte die Menge aller Cauchy Folgen in M. Setze $(x_k) \sim (y_k)$ genau dann, wenn $(d(x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen Null konvergiert. Man verifiziert leicht, dass dies eine Äquivalenzrelation ist, und man definiert $\hat{M}$ als die Menge der Äquivalenzklassen. Schreibe $[x_k]_{k\in\mathbb{N}}$ für die Klasse der Folge (x_k). Für Cauchy Folgen (x_k) und (y_k) in M ist $d(x_k, y_k)$ eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$, also konvergiert diese Folge. Man zeigt leicht, dass der Limes nur von den Äquivalenzklassen der beiden Folgen abhängt, also ist $\hat{d}([x_k]_{k\in\mathbb{N}}, [y_\ell]_{\ell\in\mathbb{N}}) := \lim_k d(x_k, y_k)$ wohldefiniert auf $\hat{M}$. Man verifiziert direkt, dass $\hat{d}$ eine Metrik auf $\hat{M}$ definiert.

Nun definiert man $i : M \to \hat{M}$ indem man $x \in M$ auf die Klasse der konstanten Folge x abbildet. Nach Konstruktion ist das eine Isometrie. Man zeigt leicht, dass für einen gegebenen Punkt $\hat{x} := [x_k]_{k\in\mathbb{N}} \in \hat{M}$ die Folge $(i(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $\hat{M}$ gegen $\hat{x}$ konvergiert. Damit ist $i(M)$ dicht in $\hat{M}$, und es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\hat{M}$ vollständig ist.

Sei also $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in $\hat{M}$. Da $i(M)$ dicht in $\hat{M}$ ist, finden wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_k \in M$ sodass $\hat{d}(i(x_k), \hat{x}_k) < \frac{1}{k}$ gilt. Eine direkte Rechnung zeigt, dass die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in M ist, also kann man den Punkt $[x_k]_{k\in\mathbb{N}} \in \hat{M}$ betrachten. Man rechnet direkt nach, dass die Folge $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Punkt konvergiert.

(2) Für einen Punkt $\hat{x} \in \hat{M}$ gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M, sodass $i(x_k) \to \hat{x}$ gilt. Damit ist aber (x_k) eine Cauchy Folge in M, also ist nach Proposition 6.4 $(j(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in $\tilde{M}$. Da $\tilde{M}$ vollständig ist, konvergiert diese Cauchy Folge gegen einen Punkt $\tilde{x} \in \tilde{M}$.

Für eine weitere Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M, sodass $i(y_k) \to \hat{x}$ verifiziert man direkt, dass $(j(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen den Punkt $\tilde{x}$ konvergiert. Damit erhält man eine wohldefinierte Funktion $f : \hat{M} \to \tilde{M}$ indem man $\hat{x}$ auf $\tilde{x}$ abbildet. Für einen Punkt der Form $i(x) \in \hat{M}$ können wir als Folge die konstante Folge x verwenden, also gilt $f(i(x)) = j(x)$ wie verlangt.

Für $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{M}$ und Folgen (x_k) und (y_k) in M mit $x_k \to \hat{x}$ und $y_k \to \hat{y}$ in $\hat{M}$ zeigt man dann, dass $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_k(d(x_k, y_k)) = \tilde{d}(f(\hat{x}), f(\hat{y}))$ gilt, also ist f eine Isometrie. Vertauscht man in der ganzen Konstruktion die Rollen von $\hat{M}$ und $\tilde{M}$, dann erhält man eine Inverse zu f, also ist f bijektiv. □

6.6. Exkurs: Normierte Vektorräume. Eine zentrale Klasse von Beispielen für metrische Räume bilden normierte Vektorräume. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wie aus der linearen Algebra bekannt ist eine *Norm* auf V eine Funktion $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(N1) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.
(N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

Ein *normierter Vektorraum* ist ein Vektorraum V zusammen mit einer Norm auf V.

Ist $(V, \| \ \|)$ ein normierter Vektorraum, dann definiert man $d(v, w) := \|w - v\|$ für $v, w \in V$. Aus (N1) folgt sofort, dass $d(v, w) \geq 0$ gilt und $d(v, w) = 0$ nur für $v = w$ möglich ist. Aus (N2) für $\lambda = -1$ folgt sofort $d(v, w) = d(w, v)$. Schließlich impliziert (N3) sofort, dass d die Dreiecksungleichung erfüllt, also ist (V, d) ein metrischer Raum. Ist dieser metrischer Raum vollständig, dann heißt $(V, \| \ \|)$ ein *Banachraum*.

Ist die Norm $\| \ \|$ auf V von der Form $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für ein positiv definites inneres Produkt $\langle \ , \ \rangle$ auf V, dann heißt der normierte Raum $(V, \| \ \|)$ ein prä–Hilbertraum und ist er vollständig, dann spricht man von einem Hilbertraum.

Ist $(V, \| \ \|)$ ein allgemeiner normierter Vektorraum, dann kann man den metrischen Raum (V, d) wie in Abschnitt 6.5 beschrieben vervollständigen. Wie im Beweis von Satz 6.5 kann man die Vervollständigung $\hat{V}$ als die Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchy Folgen in V schreiben. Schreiben wir wieder $[v_k]_{k \in \mathbb{N}}$ für die Klasse einer Cauchy Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Dann kann man $\hat{V}$ wieder zu einem Vektorraum machen, indem man $[v_k]_{k \in \mathbb{N}} + [w_\ell]_{\ell \in \mathbb{N}} := [v_k + w_k]_{k \in \mathbb{N}}$ und $\lambda [v_k]_{k \in \mathbb{N}} := [\lambda v_k]_{k \in \mathbb{N}}$ definiert. Bezüglich dieser Operationen ist die Inklusion $i : V \to \hat{V}$ dann eine lineare Abbildung. Weiters zeigt man, für eine Cauchy Folge (v_k) in V die Folge $(\|v_k\|)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ ist, und dass $\|[v_k]_{k \in \mathbb{N}}\| := \lim_k \|v_k\|$ eine wohldefinierte Norm auf $\hat{V}$ liefert. Diese Norm liefert als Metrik gerade $\hat{d}$ und sie erfüllt $\|i(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$. Somit kann man normierte Vektorräume zu Banachräumen vervollständigen. Analog ist die Vervollständigung eines prä–Hilbertraumes in natürlicher Weise ein Hilbertraum.

Eine Variante dieser Konstruktion, die in der modernen Zahlentheorie eine wichtige Rolle spielt ist die Konstruktion des Körpers der *p–adischen Zahlen* für eine Primzahl p. Für eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ sei $\nu(m) \in \mathbb{N}$ dadurch definiert, dass $p^{\nu(m)}$ die höchste Potenz der Primzahl p ist, die m teilt. Offensichtlich ist $\nu(mn) = \nu(m) + \nu(n)$ und man sieht leicht, dass $\nu(m + n) \geq \min\{\nu(m), \nu(n)\}$ gilt.

Nun definieren wir eine Funktion $\| \ \|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ durch $\|0\|_p = 0$ und $\|\frac{m}{n}\|_p := p^{\nu(n)-\nu(m)}$. (Man könnte auch $a^{\nu(n)-\nu(m)}$ für eine beliebige Zahl $a > 1$ verwenden.) Aus den Eigenschaften von ν folgt leicht, dass $\|rs\|_p = \|r\|_p + \|s\|_p$ sowie $\|r + s\|_p \leq \max\{\|r\|_p, \|s\|_p\}$ für alle $r, s \in \mathbb{Q}$ gelten. Definiert man $d_p(r, s) := \|s - r\|_p$, dann ist dies natürlich nicht–negativ und kann nur für $r = s$ verschwinden. Außerdem ist $\|-1\|_p = 1$, also $\|-r\|_p = \|r\|_p$ für alle $r \in \mathbb{Q}$, also gilt $d_p(r, s) = d_p(s, r)$. Schließlich ist

$$d_p(r, t) = \|t - r\|_p = \|(t - s) + (s - r)\|_p \leq \max\{d_p(r, s), d_p(s, t)\},$$

also erhalten wir sogar eine verstärkte Version der Dreiecksungleichung. Daraus sieht man, dass $\| \ \|_p$ sich stark vom üblichen Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ unterscheidet.

Jedenfalls macht d_p die Menge $\mathbb{Q}$ zu einem metrischen Raum. Die entsprechende Topologie auf $\mathbb{Q}$ heißt die *p–adische Topologie*. Nach dem Rezept in 6.5 kann man nun den metrischen Raum $(\mathbb{Q}, d_p)$ zu einem Raum $\widehat{\mathbb{Q}_p}$ vervollständigen, dessen Elemente Äquivalenzklassen von Cauchy Folgen in $(\mathbb{Q}, d_p)$ sind. Indem man Cauchy–Folgen elementweise addiert und multipliziert kann man $\widehat{\mathbb{Q}_p}$ wiederum zu einem Körper machen. Dieser heißt der *Körper der p–adischen Zahlen*. Die Topologie auf $\widehat{\mathbb{Q}_p}$ ist eher ungewöhnlich: Sie ist lokal kompakt (siehe 5.7) und total unzusammenhängend (siehe Beispiel (1) von 5.8) aber nicht diskret.

Der Satz von Baire

6.7. Baire'sche Räume. Wir haben in 6.2 bereits bemerkt, dass Vollständigkeit keine topologische Eigenschaft ist. Wir wollen nun eine topologische Eigenschaft besprechen, die für die metrische Topologie eines vollständigen metrischen Raumes immer erfüllt ist. Diese Eigenschaft spielt eine wichtige Rolle in vielen Anwendungen der Topologie, vor allem in der Funktionalanalysis.

DEFINITION 6.7. Sei X ein topologischer Raum.

(1) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *nirgends dicht*, wenn ihr Abschluss leeres Inneres besitzt, also $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ gilt.

(2) Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt *mager*, wenn es eine Familie $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ von abzählbar vielen nirgends dichten Teilmengen von X gibt, sodass $Y = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ gilt.

(3) Ein topologischer Raum X heißt ein *Baire'scher Raum*, wenn X keine nichtleere offene Teilmenge besitzt, die mager ist.

Offensichtlich ist jede Teilmenge einer nirgends dichten Menge selbst nirgends dicht. Man kann also nirgends dichte Teilmengen als besonders "kleine" Teilmengen von X betrachten. Man zeigt (siehe Übungen bzw. [**1**, 3.5]), dass eine Vereinigung von endlich vielen nirgends dichten Teilmengen von X selbst nirgends dicht ist. Damit liegt es nahe, als nächst größere Mengen die mageren Mengen zu betrachten. Da Teilmengen nirgends dichter Teilmengen nirgends dicht sind, sind Teilmengen magerer Mengen selbst mager. Wir können nun äquivalenten Charakterisierungen von Baire'schen Räumen angeben.

PROPOSITION 6.7. *Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:*

(1) X ist ein Baire'scher Raum.

(2) Ist $A \subseteq X$ mager, dann ist $A^\circ = \emptyset$.

(3) Ist $A \subseteq X$ mager, dann ist $X \setminus A$ dicht in X.

(4) Ist $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Familie offener Teilmengen $U_n \subseteq X$, sodass jedes U_n dicht in X ist, dann ist $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq X$ eine dichte Teilmenge.

BEWEIS. (1)⇒(2) ist klar, weil mit A auch die Teilmenge $A^\circ \subseteq A$ mager ist, und (2)⇒(1) ist offensichtlich. (2)⇔(3) ist ebenfalls offensichtlich, weil $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$ gilt.

(3)⇒(4) Für jedes n ist die Teilmenge $A_n := X \setminus U_n$ abgeschlossen in X und $\overline{U_n} = X$ impliziert $(A_n)^\circ = \emptyset$. Damit ist jedes A_n nirgends dicht, also $X \setminus (\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mager. Nach (3) ist das Komplement $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X.

(4)⇒(3) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \subseteq X$ nirgends dicht, sodass $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ gilt. Dann ist natürlich auch jedes $\overline{A_n}$ nirgends dicht, und die Vereinigung dieser Abschlüssen enthält A, also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass jedes A_n abgeschlossen und nirgends dicht ist. Dann ist aber $U_n := X \setminus A_n$ offen und dicht in X, und nach (4) ist $X \setminus A = X \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X. □

BEISPIEL 6.7. (1) In einem Hausdorffraum X ist für jedes $x \in X$ die Teilmenge $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen. Soferne die Teilmenge $\{x\}$ nicht offen ist, ist sie nirgends dicht. Wenn also keine der Teilmengen $\{x\}$ offen ist, dann ist jede abzählbare Teilmenge von X mager.

Das können wir insbesondere auf den Teilraum $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ anwenden, der selbst abzählbar ist. Damit ist in $\mathbb{Q}$ *jede* Teilmenge mager, also kann $\mathbb{Q}$ kein Baire'scher Raum sein.

(2) Neben dem Satz von Baire, den wir im nächsten Abschnitt besprechen werden gibt es noch einen weiteren wichtigen allgemeinen Satz über die Baire–Eigenschaft: Jeder lokal kompakte Hausdorff Raum (und damit insbesondere jeder kompakte Hausdorff Raum) ist ein Baire'scher Raum, siehe [**1**, 5.4]. Die ist ein weiterer Grund für die Bedeutung lokal kompakter Räume.

6.8. Der Satz von Baire.

SATZ 6.8 (Baire). *Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist M mit der metrischen Topologie ein Baire'scher Raum.*

BEWEIS. Wir verifizieren Eigenschaft (4) aus Proposition 6.7. Für $n \geq 1$ sei $U_n \subseteq X$ offen und dicht. Sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt, und betrachte die Umgebung $B_r(x)$ von x für $r > 0$. Da U_1 dicht in X ist, ist $B_r(x) \cap U_1$ nichtleer und offen, also finden wir einen Punkt $x_1 \in B_r(x) \cap U_1$ und eine Zahl $r_1 > 0$, sodass $B_{2r_1}(x_1) \subseteq B_r(x) \cap U_1$. Dann gilt $\overline{B_{r_1}(x_1)} \subseteq B_r(x) \cap U_1$, und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r_1 < 1$ annehmen. Da U_2 dicht in X ist, finden wir $x_2 \in B_{r_1}(x_1) \cap U_2$ und r_2 mit $0 < r_2 < \frac{1}{2}$, sodass $\overline{B_{r_2}(x_2)} \subseteq B_{r_1}(x_1) \cap U_2 \subseteq B_r(x) \cap U_1 \cap U_2$. Induktiv finden wir Punkte x_k und reelle Zahlen r_k mit $0 < r_k < \frac{1}{k}$, sodass

$$\overline{B_{r_k}(x_k)} \subseteq B_{r_{k-1}}(x_{k-1}) \cap U_k \subseteq \cdots \subseteq B_r(x) \cap (U_1 \cap \cdots \cap U_k).$$

Betrachten wir nun die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nach Konstruktion ist $x_\ell \in B_{r_k}(x_k)$ für alle $\ell \geq k$ und $r_k < \frac{1}{k}$, also ist x_k eine Cauchy Folge. Da M vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen einen Punkt $x_0 \in X$. Nach Konstruktion ist $x_0 \in \overline{B_{r_k}(x_k)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, und diese Menge liegt in $B_r(x) \cap (U_1 \cap \cdots \cap U_k)$. Somit ist $x_0 \in B_r(x) \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n)$. Da x und r beliebig waren, ist die Menge $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X. □

Nach dem Satz ist also insbesondere $\mathbb{R}^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Baire'scher Raum.

BEISPIEL 6.8. (1) Schon für $M = \mathbb{R}$ liefert der Satz von Baire überraschende Anwendungen. Wir können zum Beispiel zeigen, dass es keine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die genau dann in einem Punkt t stetig ist, wenn $t \in \mathbb{Q}$ gilt.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Für $n \geq 1$ sei $U_n \subseteq \mathbb{R}$ die Vereinigung aller jener offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}$, für die $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ in einem offenen Intervall der Länge $\frac{1}{n}$ enthalten ist. Als Vereinigung offener Mengen ist U_n natürlich offen in $\mathbb{R}$. Sei nun $t_0 \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Ist f stetig in t_0, und $n \geq 1$ beliebig, dann finden wir eine offene Umgebung U von t_0, deren Bild unter f im Intervall $(f(t_0) - \frac{1}{2n}, f(t_0) + \frac{1}{2n})$ liegt. Damit ist $t_0 \in U_n$ und da dies für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $t_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Ist umgekehrt $t_0 \in U_n$, dann finden wir eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in U$, deren Bild unter f in einem Intervall der Länge $\frac{1}{n}$ enthalten ist. Dieses Intervall muss aber dann in $(f(t_0) - \frac{1}{n}, f(t_0) + \frac{1}{n})$ enthalten sein. Damit sehen wir aber, dass $t_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ genau dann gilt, wenn f im Punkt t_0 stetig ist.

Damit sehen wir, dass für jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Menge der Punkte $t \in \mathbb{R}$, in denen f stetig ist, als Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ geschrieben werden kann. (Man nennt so eine Teilmenge eine G_δ–Menge.) Wir behaupten nun, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ keine G_δ–Menge ist. Nehmen wir an, dass $\mathbb{Q} = \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ für offene Teilmengen $U_n \subseteq \mathbb{R}$ gilt. Dann ist jedes U_n dicht in $\mathbb{R}$, weil es $\mathbb{Q}$ enthält, also ist $A_n := X \setminus U_n$ abgeschlossen und hat leeres Inneres. Nun ist $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nach Konstruktion gerade $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, also wäre diese Teilmenge mager. Da aber auch $\mathbb{Q}$ mager ist wäre somit $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ mager, ein Widerspruch zum Satz von Baire.

(2) Eine typische Anwendung des Satzes von Baire ist das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit: Sei X ein Baire'scher topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Familie stetiger Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Nehmen wir an, dass es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Konstante $K_x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|f(x)| \leq K_x$ für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt. ("Die Familie $\mathcal{F}$ ist punktweise beschränkt.") Dann gibt es eine nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ und eine Konstante K, sodass $|f(y)| \leq K$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $y \in U$ gilt. ("Die Familie $\mathcal{F}$ ist gleichmäßig beschränkt auf U.")

Zum Beweis setze $E_n := \{x \in X : \forall f \in \mathcal{F} : |f(x)| < n\}$. Dann kann man E_n als $\cap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}([-n, n])$ schreiben. Weil jedes $f \in \mathcal{F}$ stetig ist, ist jede der Mengen $f^{-1}([-n, n])$ abgeschlossen in X, also ist E_n abgeschlossen in X. Da die Familie $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt ist, liegt jedes $x \in X$ in einem E_n, also ist $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Wäre $(E_n)^\circ = \emptyset$ für alle n, dann wäre jedes E_n nirgends dicht, also $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ mager, ein Widerspruch zu X Baire'sch. Somit finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $U := (E_{n_0})^\circ \neq \emptyset$ gilt, und nach Definition ist $|f(y)| < n_0$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $y \in U$.

Literaturverzeichnis

[1] J. Cigler, H.C.Reichel, *Topologie* Eine Grundvorlesung, BI Hochschultaschenbücher 121, Bibliographisches Institut, 1987.

[2] K. Jänich, *Topologie* Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, Berlin, 1994. x+239 pp.

[3] B. von Querenburg,*Mengentheoretische Topologie* Hochschultext. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979. x+209 pp.

[4] R. Engelking, *General topology* Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989. viii+529 pp.

Index