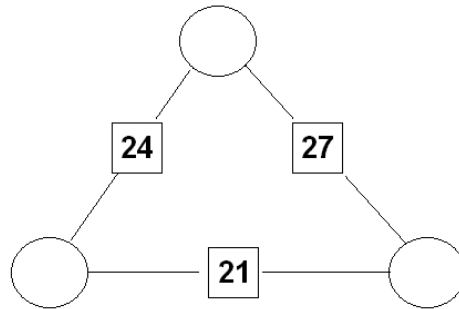


Übungsaufgaben zur Schulmathematik „Arithmetik und Algebra“, WiSe 2015/16

1	Erklären Sie für Schüler anschaulich die Addition der beiden Zahlen 387 und 456 in der Stellenwerttafel, indem Sie (gezeichnete oder Magnet-) „Plättchen“ in die entsprechenden Felder „legen“, verschieben, bündeln, etc.! <table><tr><td>T</td><td>H</td><td>Z</td><td>E</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	T	H	Z	E				
T	H	Z	E						
2	Erklären Sie an der Subtraktion 6000-3253, inwiefern die Entbündelungstechnik aus Kapitel 0 der Vorlesung bei manchen Aufgaben zu Schwierigkeiten führen kann!								
3	Es ist <i>kein</i> Charakteristikum des Zehnersystems, dass schriftliche Rechenverfahren so gut funktionieren, wie wir es gewohnt sind. Führen Sie die schriftliche Multiplikation von 234_5 und 432_5 im Fünfersystem durch und erklären Sie jeden Rechenschritt! Machen Sie die Probe durch Umrechnen ins Zehnersystem!								
4	Sogenannte „Klecksaufgaben“ werden in der Volksschule dazu eingesetzt, das Verständnis von Rechenkalkülen zu vertiefen. Geben Sie zu den folgenden Aufgaben zumindest je eine Lösung an und beurteilen Sie jeweils den Schwierigkeitsgrad! a) $\begin{array}{r} 2 \ 3 \ 4 \ ? \cdot 7 \\ 1 \ 6 \ 4 \ 2 \ 2 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 4 \ ? \ 2 \ ? \cdot 4 \\ 1 \ 7 \ 3 \ 1 \ 2 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 2 \ ? \ ? \ 7 \cdot 4 \\ ? \ 4 \ 2 \ ? \end{array}$ d) $\begin{array}{r} ? \ 1 \ ? \ ? \cdot 6 \\ 2 \ ? \ ? \ 9 \ 0 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} ? \ ? \cdot ? \\ 1 \ 3 \ 2 \end{array}$ f) $\begin{array}{r} 4 \ 7 \cdot ? \ ? \\ ? \ ? \ 6 \ ? \\ ? \ ? \ 3 \\ ? \ ? \ ? \ ? \end{array}$								
5	Erklären Sie schülergerecht anhand einer Stellenwerttafel (gerne mit Magnetplättchen) die Multiplikation einer mehrstelligen, natürlichen Zahl mit einer Zehnerpotenz als Multiplikator!								
6	a) Führen Sie die Division $(235)_6: (5)_6$ anhand einer geeigneten Stellenwerttafel mit Hilfe von Plättchen vor! b) Ebenso für $(646)_7: (4)_7$.								
7	Oft hören Schülerinnen und Schüler „Die Division durch 0 ist sinnlos!“ oder „Durch 0 dividieren ist verboten!“. Geben Sie mindestens zwei Möglichkeiten an, wie man diese Tatsache begreiflich machen kann! Recherchieren Sie dazu in verschiedenen Schulbüchern der 1. Klasse (und geben Sie die Schulbücher bei Ihrer Präsentation an)!								
8	a) Versuchen Sie folgende Rechenstrategie für $42: 6$ von Matthias nachzuvollziehen: $\begin{aligned} 40: 5 &= 8 \\ 42 - 40 &= 2 \\ 2 + 5 &= 7 \\ \text{Ergebnis: } &7 \end{aligned}$ b) Erklären Sie seine Strategie im Kontext „42 Zuckerl sollen an 6 Kinder verteilt werden“! c) Versuchen Sie zu errahnen, wie Matthias wohl $49: 7$ berechnen würde!								

9	In einem Schulbuch für die Volksschule findet man folgende Seite (Quelle: Das Zahlenbuch, Klasse 1). Geben Sie an, welche unterschiedlichen Zahlaspekte dabei angesprochen werden! 
10	Zeigen Sie die Richtigkeit folgender Identitäten mittels vollständiger Induktion: a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ b) $x \neq 1: 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$. Zeigen Sie dies auch ohne vollständige Induktion!
11	Begründen Sie die beiden Gesetze von der <i>Konstanz der Summe</i> bzw. der <i>Differenz</i>! Wählen Sie eine geeignete Veranschaulichung und erklären Sie anhand dieser! $(a + c) + (b - c) = a + b$ $(a + c) - (b + c) = a - b$
12	Begründen Sie das <i>Assoziativgesetz der Multiplikation</i> und das <i>Distributivgesetz</i>! Wählen Sie jeweils eine geeignete Veranschaulichung und erklären Sie anhand dieser!
13	Begründen Sie genetisch folgende Umkehrgesetze (Veranschaulichungen und Erklärungen) für natürliche Zahlen: $1) \quad (a \cdot b) : b = a$ $2) \quad (a : b) \cdot b = a$ Deklarieren Sie dabei klar, in welcher Weise Sie Multiplizieren (Multiplikand, Multiplikator?) und Dividieren (Messen, Teilen?) verstehen!
14	Arithmogone Arithmogone sind „Rechenvielecke“, wobei die Ecken (Kreise) mit natürlichen Zahlen so ausgefüllt werden sollen, dass auf den Seiten (Quadrate) genau die jeweilige Summe der beiden benachbarten Ecken (Kreise) steht. Es sind produktive Aufgaben zum sogenannten „operativen Prinzip“: Wie wirken sich Veränderungen (hier des Ansatzes) aus? Durch das vielfältige Probieren wird einerseits das Kopfrechnen geübt und andererseits (hoffentlich) die Struktur der Aufgabe entdeckt.



Dreiecke:

a) Wie können schon Kinder in der 1. Klasse (sogar schon Grundschule) diese Aufgabe lösen – ohne Algebra (Gleichungen)?

Tipp: Setzen Sie in einen Kreis zunächst eine geschätzte (beliebige) Zahl und füllen Sie im oder gegen den Uhrzeigersinn die anderen Kreise aus. Wie verändern sich die anderen Zahlen, wenn Sie die Anfangszahl um 1 erhöhen/verkleinern (→ „operatives Prinzip“)?

Könnten Sie sich noch eine andere Methode ohne Algebra (Gleichungen) vorstellen?

b) Geben Sie sich andere Zahlen auf den Seiten des Dreiecks vor und versuchen Sie das neue Rechendreieck wieder zu „lösen“!

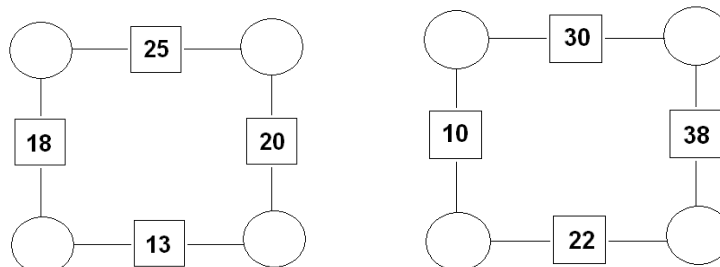
c) Können Sie eine Aufgabe mit natürlichen Zahlen in den Quadraten (auf den Seiten) finden, die *nicht* mit natürlichen Zahlen lösbar ist?

Vierecke:

d) Suchen Sie bei den folgenden Vierecken Lösungen! Gibt es mehrere / genau eine / keine?

Ist die Lage bei Vierecken im Prinzip genau die gleiche wie bei Dreiecken?

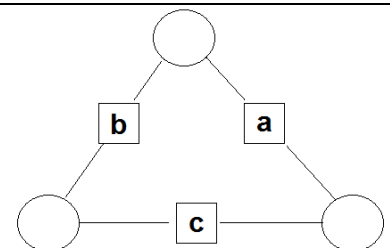
Wenn nein, worin besteht der prinzipielle Unterschied?



e) Können Sie eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung an die Zahlen auf den Seiten (d. h. in den kleinen Quadraten) angeben, wann so ein „Rechenquadrat“ lösbar ist?

15

Finden und begründen Sie die genaue Bedingung an die drei natürlichen Zahlen a, b, c in den Quadraten, so dass das Rechendreieck in $\mathbb{N}$ lösbar ist!



16

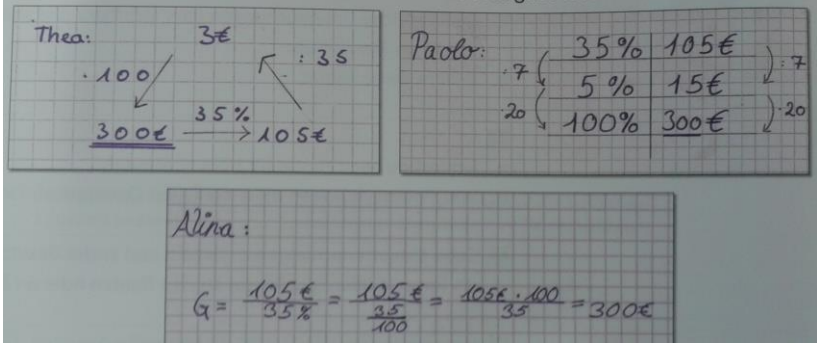
Zeige, oder widerlege durch ein Gegenbeispiel ($a, b, c \in \mathbb{N}$):

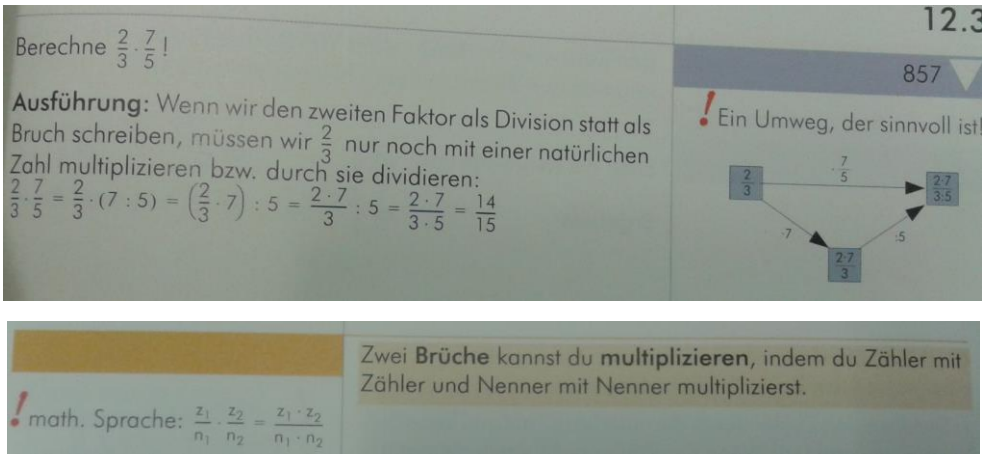
a) Aus $a|b$ und $a|c$ folgt: $a^2|bc$

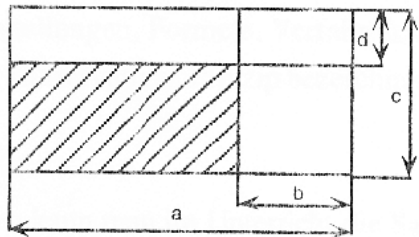
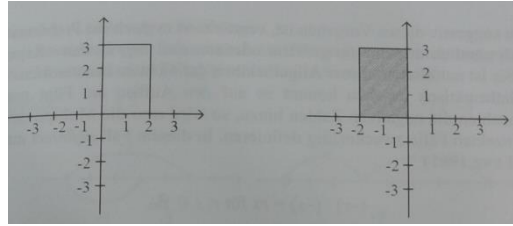
b) Aus $a|bc$ folgt: $a|b$ oder $a|c$

c) Aus $a|b$ und $a|c$ folgt: $a|5b + 3c$

17	a) Warum reicht es beim Test, ob eine Zahl n eine Primzahl ist, die Teilbarkeit von n nur durch Primzahlen $p \leq \sqrt{n}$ zu testen? b) Erklären Sie genau, warum aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen die folgenden beiden Sätze klar sind: Satz vom kgV: Jedes gemeinsame Vielfache $gV(a,b)$ ist ein Vielfaches des $kgV(a,b)$. Satz vom kgV und ggT: $kgV(a,b) \cdot ggT(a,b) = a \cdot b$
18	Teilbarkeit durch 7 1-3-2-Regel: 7 teilt genau dann die Zahl mit den Ziffern cba, wenn $1 \cdot a + 3 \cdot b + 2 \cdot c$ durch 7 teilbar ist. Beispiel: 154 ist durch 7 teilbar, weil $1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 21$ durch 7 teilbar ist. Bei Zahlen mit mehr als 3 Stellen teilt man die Zahl von hinten in Dreierblöcke, wendet auf jeden die 1-3-2-Regel an (bei den <i>geraden</i> Dreierblöcken <i>negativ!</i>) und addiert. Beispiel: Wir prüfen, ob die Zahl 94 261 285 699 durch 7 teilbar ist: $1 \cdot 9 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 - 3 \cdot 8 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 3 \cdot 9 = 7$. Somit ist 94 261 285 699 durch 7 teilbar. Begründen Sie, warum diese Regel funktioniert!
19	Schon Adam Ries benutzte zur Überprüfung von Addition, Subtraktion und Multiplikation die sogenannte <i>Neunerprobe</i> mit Hilfe der <i>Neunerreste</i> der Zahlen (sogar in seinem „Wappen“ zu sehen, Holzschnitt von 1550): $45\,623 + 3\,487 = 49\,110$ Summe (Produkt, Differenz) der beiden Neunerreste (bei Bedarf wieder Neunerrestbildung!) ↓ 6 Neunerrest von 45 623 → 2 4 ← Neunerrest von 3 487 6 ↑ Neunerrest des Ergebnisses  Man sagt „die Neunerprobe stimmt“, wenn sich im Kreuz oben und unten dieselben Werte ergeben (hier zweimal der Wert 6). Beantworten und begründen Sie: • Was steckt hinter diesem Prinzip? (Begründen Sie für Summe, Differenz und Produkt) • Ist das Ergebnis sicher richtig, wenn die Neunerprobe stimmt? • Ist das Ergebnis sicher falsch, wenn die Probe nicht stimmt? • Warum nimmt man für so eine Probe nicht die Dreierreste?
20	Begründen Sie die folgende „Merkregel“ für die Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer natürlichen Zahl schülergerecht für die 2. Klasse AHS! „Rechne zunächst ohne Komma! Das Resultat hat so viele Nachkommastellen wie die ursprüngliche Dezimalzahl!“

21	Thea, Paolo und Alina bearbeiten dieselbe Aufgabe:  a) Formulieren Sie die Aufgabe! b) Erklären Sie die drei Rechenwege! Welches Verfahren halten Sie für besonders günstig? Warum? c) Geben Sie zu jeder der Strategien jeweils eine Aufgabe an, die sich mit der Strategie besonders gut lösen lässt! Begründen Sie!														
22	a) Der Preis einer Ware wird zunächst um 10% erhöht und danach wieder um 10% verkleinert. Lukas ist der Meinung, dass man am Ende wieder genau so viel zahlt wie am Anfang. Gehen Sie schüleradäquat auf Lukas Äußerung ein! b) Wenn man beim Bauernladen 10 Flaschen Fruchtsaft kauft, bekommt man eine zusätzliche Flasche derselben Sorte gratis dazu. Wie viel Prozent beträgt der Rabatt? Reflektieren Sie dabei über mögliche Schülerfehler! c) In einem Bekleidungsgeschäft erhält man zum Sommerschlussverkauf 15% Rabatt. Jemand bezahlt für ein Kleidungsstück 170 Euro. Wie hoch ist der reguläre Verkaufspreis? Reflektieren Sie dabei über mögliche Schülerfehler!														
23	Schülern passieren - wenn Sie Rechenregeln rein schematisch anwenden - leicht Fehler durch Verwechslungen. Entdecken Sie die Fehler in den folgenden (fingierten) Schülerlösungen! Erklären Sie, wie es jeweils zu dem Fehler gekommen ist! Liste häufiger Fehler (nach PADBERG): <table border="0"> <tbody> <tr> <td>1. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$</td> <td>4. a) $0,45 < 0,238$</td> </tr> <tr> <td>b) $\frac{3}{5} + 6 = \frac{3+6}{5}$</td> <td>b) $0,23 = \frac{23}{10}$</td> </tr> <tr> <td>2. a) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7}$</td> <td>5. a) $3,48 + 4,2 = 7,50$</td> </tr> <tr> <td>b) $4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{28}$</td> <td>b) $0,45 + 7 = 0,52$</td> </tr> <tr> <td>3. a) $\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = \frac{9:3}{10} = \frac{3}{10}$</td> <td>6. $0,4 \cdot 0,2 = 0,8$</td> </tr> <tr> <td>b) $2 : \frac{2}{3} = \frac{2:2}{3} = \frac{1}{3}$</td> <td>7. a) $5 : 0,1 = 0,5$</td> </tr> <tr> <td></td> <td>b) $0,36 : 0,9 = 4$</td> </tr> </tbody> </table>	1. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$	4. a) $0,45 < 0,238$	b) $\frac{3}{5} + 6 = \frac{3+6}{5}$	b) $0,23 = \frac{23}{10}$	2. a) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7}$	5. a) $3,48 + 4,2 = 7,50$	b) $4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{28}$	b) $0,45 + 7 = 0,52$	3. a) $\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = \frac{9:3}{10} = \frac{3}{10}$	6. $0,4 \cdot 0,2 = 0,8$	b) $2 : \frac{2}{3} = \frac{2:2}{3} = \frac{1}{3}$	7. a) $5 : 0,1 = 0,5$		b) $0,36 : 0,9 = 4$
1. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$	4. a) $0,45 < 0,238$														
b) $\frac{3}{5} + 6 = \frac{3+6}{5}$	b) $0,23 = \frac{23}{10}$														
2. a) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7}$	5. a) $3,48 + 4,2 = 7,50$														
b) $4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{28}$	b) $0,45 + 7 = 0,52$														
3. a) $\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = \frac{9:3}{10} = \frac{3}{10}$	6. $0,4 \cdot 0,2 = 0,8$														
b) $2 : \frac{2}{3} = \frac{2:2}{3} = \frac{1}{3}$	7. a) $5 : 0,1 = 0,5$														
	b) $0,36 : 0,9 = 4$														
24	Wie kann man im Kontext des „Pizza-Verteilens“ ohne Rechnung erklären, dass $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$ bzw. allgemein für $m < n$ gilt: $\frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1}$ bzw. $\frac{m}{n} < \frac{m+k}{n+k}$? Wie sehen die entsprechenden Ungleichungen und die zugehörige Argumentation für $m > n$ aus?														
25	Ein sehr häufiger Schülerfehler ist $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$ Kann diese „Methode“ in manchen Fällen für positive Bruchzahlen ($a, b, c, d > 0$) das richtige Ergebnis der Addition bringen? Wenn ja, in welchen? Wenn nein, warum nicht?														

26	a) Stellen Sie mit Hilfe einer Visualisierung dar, was sich Schülerinnen und Schüler unter der Rechnung $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$ vorstellen sollen! (Hinweis: siehe Vorlesung!) b) Nehmen Sie die folgende Einführung der Bruchmultiplikation in einem Schulbuch genau unter die Lupe! Welche Voraussetzungen braucht man dafür? Für wie sinnvoll halten Sie diese Einführung? 
27	Bruchzahlen werden in der (Hochschul-)Mathematik als Mengen eingeführt, die ausschließlich auf die natürlichen Zahlen und ihre Rechengesetze aufbauen. Beispielsweise wird die Bruchzahl $\frac{2}{3}$ definiert als die Menge $\left[\frac{2}{3}\right] := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* 2b = 3a\}$. a) Geben Sie einige Elemente der Menge $\left[\frac{2}{3}\right]$ an! Machen Sie daran deutlich, warum es sinnvoll ist, alle diese Elemente zu einer Menge zusammenzufassen! b) Man sagt, dass zwei Zahlenpaare (a, b) und (c, d) in Relation zueinander stehen (d. h. $(a, b) \sim (c, d)$), wenn gilt: $ad = bc$. Zeigen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist! c) Definieren Sie auf der entsprechenden Menge aller Äquivalenzklassen eine Addition bzw. eine Multiplikation! Diese sollen der üblichen Addition bzw. Multiplikation von Bruchzahlen entsprechen. d) Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen aus c) das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz erfüllen!
28	Ist es möglich eine Gerade so ins Koordinatensystem durch den Koordinatenursprung $O = (0 0)$ zu legen, dass sie keine weiteren ganzzahligen Gitterpunkte mehr enthält? Wenn nein, warum nicht. Wenn ja, was lässt sich über die Gerade sagen? Gibt es dann eher wenige oder eher viele solche Geraden?
29	Begründen Sie: Durch den Divisionsalgorithmus wird jedem Bruch eine endliche oder eine periodische Dezimalzahl zugeordnet.
30	Schreiben Sie die periodischen Dezimalzahlen $0,25\bar{1}$; $0,63\bar{5}$; $0,431\bar{7}$ in Bruchform an! Erklären Sie das zugehörige Verfahren schülergerecht!
31	„Auf Zahlen treten“: Entwickeln Sie ausgehend von folgendem Bild einen Arbeitsauftrag für Schüler zur Einführung der negativen Zahlen im Unterricht! Gestalten Sie ein entsprechendes Arbeitsblatt dazu! Überlegen Sie, welche Grundvorstellungen und Rechenregeln die Schüler dabei entwickeln sollen! (Hinweis: Verwenden Sie zur Lösung der Aufgabe bitte <u>keinen</u> anderen Kontext, wie z. B. Temperatur, Schulden, usw. Bleiben Sie einfach beim Kontext „Vor- und Zurückgehen auf den Zahlenkarten“!) 

32	Was ist aus der fachdidaktischen Perspektive zu folgendem „Schulbuchbeweis“ für die Regel $(-b) \cdot (-d) = (+b \cdot d)$ zu sagen? Anhand der folgenden Figur erkennt man, dass der Inhalt des schraffierten Rechtecks auf zwei Arten dargestellt werden kann: $(a - b) \cdot (c - d) = ac - bc - ad + bd$ Setzt man $a = c = 0$, so ergibt sich $(-b) \cdot (-d) = bd$.																	
33	Formulieren Sie ausgehend von „Von einem Konto werden schon seit einigen Tagen jeden Tag 5€ abgebucht, momentan ist der Kontostand bei 0“ einen Kontext, in dem klar wird, dass die Rechenregel „Minus mal minus ergibt plus“ vernünftig ist, z. B. $(-5) \cdot (-4) = +20$; geben Sie auch die nötigen zugehörigen Erklärungen!																	
34	Betrachten Sie folgende Visualisierung von „Minus mal Minus ist Plus“: Das weiße Rechteck links stellt das Produkt $2 \cdot 3$ dar. Um das Produkt $(-2) \cdot 3$ darzustellen, klappt man das Rechteck um die y-Achse, es erscheint die schwarze Rückseite des Rechtecks. Schwarz signalisiert „Minus“, also: $(-2) \cdot 3 = -6$. a) Stellen Sie – dieser Idee folgend – auch $2 \cdot (-3)$ und $(-2) \cdot (-3)$ dar! b) Beurteilen Sie die Anschaulichkeit dieser Visualisierung für den Unterricht! Wofür ist diese Visualisierung geeignet, wofür nicht?																	
35	Folgender Arbeitsauftrag ist aus dem Schulbuch mathbu.ch 7 entnommen (die kleinen schwarzen bzw. weißen Quadrate stehen für Boxen, also z.B. Zündholzschachteln, die kleinen schwarzen Punkte für getrocknete Bohnen). Zusätzlich zu den aufgezeichneten Bohnen steht den Schülern ein Bohnenvorrat zur Verfügung. Knack die Box Legt mit Bohnen und leeren Boxen die beiden folgenden Anordnungen: <table border="1"><thead><tr><th>Anordnung A</th><th>Anordnung B</th></tr></thead><tbody><tr><td>■ ■</td><td>□ □ □ . . .</td></tr></tbody></table> Nehmt Bohnen aus dem Bohnenvorrat und füllt die Boxen so, dass folgende Bedingungen erfüllt werden: - In beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden (insgesamt, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt). - In Boxen gleicher Farbe liegen jeweils gleich viele Bohnen. Wie viele Bohnen können in den schwarzen bzw. in den weißen Boxen liegen? Erfindet selbst solche Paare von Anordnungen! Versucht die Boxen so zu füllen, dass die beiden Bedingungen von oben erfüllt sind. Gibt es immer (mehrere) Möglichkeiten die Boxen entsprechend zu füllen? Vielleicht helfen Euch Tabellen der folgenden Art beim übersichtlichen Aufschreiben Eurer Ergebnisse! <table border="1"><thead><tr><th>Anz. der Bohnen in einer schwarzen Box</th><th></th><th></th><th></th><th></th><th></th></tr></thead><tbody><tr><td>Anz. der Bohnen in einer weißen Box</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table>		Anordnung A	Anordnung B	■ ■	□ □ □ . . .	Anz. der Bohnen in einer schwarzen Box						Anz. der Bohnen in einer weißen Box					
Anordnung A	Anordnung B																	
■ ■	□ □ □ . . .																	
Anz. der Bohnen in einer schwarzen Box																		
Anz. der Bohnen in einer weißen Box																		
	a) Welches Ziel verfolgt dieser Arbeitsauftrag? An welcher Stelle im Unterrichtsverlauf würden Sie ihn einsetzen? Begründen Sie! b) Bearbeiten Sie die Aufgabe! c) Welche Variablenbegriffe tauchen hier auf? d) Auf welchen Typ Gleichung führt der Arbeitsauftrag?																	

36

Bearbeiten Sie folgende Aufgabe für Schülerinnen und Schüler (statt Bohnen werden hier Streichhölzer verwendet):

2 Suche zu jeder Tabelle eine passende Boxenanordnung und formuliere die Gleichung. Jedes x und jedes dazugehörige y der Tabelle muss für die Boxenanordnung und die Gleichung passen.

I	x	1	2	3	4	5	6	7	II	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	2	4	6	8	10	12	14		y	3	4	5	6	7	8	9

III	x	3	4	5	6	7	8	9	IV	x	2	4	6	8	10	12	14
	y	1	2	3	4	5	6	7		y	1	2	3	4	5	6	7

V	x	1	2	3	4	5	6	7	VI	x	3	3	3	3	3	3	3
	y	-	3	-	2	-	1	-		y	1	2	3	4	5	6	7

VII	x	1	2	3	4	5	6		VIII	x	1	1	1	1	1	1	1
	y	5	4	3	2	1	0			y	1	2	3	4	5	6	7

A  =  oder $x + 2 = y$

B  =  

C  = 

D   = 

E  =  

F    =    

G   =  

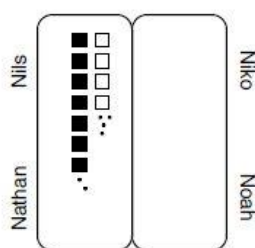
H   =  

I   =  

J   =  

37

In dieser Aufgabe finden Sie einen Transkriptausschnitt (aus der Dissertation von Dagmar Melzig, Universität Duisburg-Essen), der die Bearbeitung von „Knack die Box“ durch vier Schüler zeigt. Sie sind dabei von folgender Situation ausgegangen, die sie auf dem Tisch mit Boxen und Bohnen ausgelegt haben:



- 1 Nils Lass' mal versuchen mit jeweils einem oben drauf (# beginnt, auf jede schwarze Box eine Bohne zu legen).
- 2 Nathan #
beginnt, auf jede weiße Box eine Bohne zu legen
- 3 Nils Nee, da nicht, da nicht, da nicht (# nimmt die Bohnen, die Nathan auf die weißen Boxen gelegt hat, wieder herunter und legt dann weiter Bohnen auf die schwarzen Boxen).
- 4 Nathan # nimmt ebenfalls eine Bohne von einer weißen Box und legt sie stattdessen auf eine noch nicht besetzte schwarze
- 5 Niko (in nachäffendem Tonfall) Pack mal jeweils eine Bohne oben drauf.
- 6 Nils Ok, das wär'n dann zwei (zeigt auf die beiden einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen), drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun (zeigt während des Zählens nacheinander auf die Bohnen auf den schwarzen Boxen – oder auf die Boxen selbst(?)). # Neun, vier (umschließt mit den Fingern die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen; in dieser Position verharrt er)
- 7 Nathan # Zehn, elf, zwölf, 13 (zeigt während des Zählens nacheinander auf die weißen Boxen)
- 8 Noah # setzt sich und fegt Radiergummi-Krümeln vom Tisch.
- 9 Nils Ja (lässt dabei die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen los). Genau.
- 10 Nathan legt eine Bohne auf eine weiße Box

siehe nächste Seite!

11	Nils	Nein, passt nicht (<i>nimmt Nathans Bohne wieder von der weißen Box weg</i>)
12	Nathan	Passt nicht. Dann müssen wir, nehmen wir, dann nehmen wir eben andere Zahlen.
13	Nils	Nee, das geht nicht, # mit eins geht nicht. Tu mal zu jedem
14	Niko	# Nee.
15	Beob.	<i>legt Heftstreifen auf den Tisch</i>
16	Nathan	(<i>an Beobachterin gerichtet</i>) Wofür ist das?
17	Beob.	Wird gleich erklärt.
18	Nils	# Tu mal zu jedem zwei hin (<i>beginnt, auf jede schwarze Box eine zweite Bohne zu legen</i>)
19	Noah	# wendet sich seiner Mappe zu, nimmt Bleistift und Lineal zur Hand, legt beides wieder weg, nimmt seinen Füller, schiebt das Lineal hin und her; schaut dabei immer wieder auf sein Arbeitsblatt; ist damit bis zum Ende dieser Szene beschäftigt
20	Nathan	(<i>nimmt sich einen Heftstreifen</i>) Ich möchte einen roten.
21	Niko	# hilft Nils beim Auffüllen der Bohnen auf den Boxen.
22	Nils	# Gib noch mal ein paar her (<i>guckt, ob Nathan noch Bohnen bei sich liegen hat; dort sind aber keine</i>) Ma, Nathan! # (<i>nimmt sich stattdessen Bohnen aus dem Vorrat, der vor Niko liegt</i>).
23	Nathan	# (<i>legt den Heftstreifen zurück</i>) Für mich ist der rote reserviert.
23.1	Noah	<i>beginnt, etwas in seine Mappe zu schreiben, und ist damit bis zum Ende der nächsten Szene beschäftigt; schaut zwischendurch immer wieder auf (auf sein Arbeitsblatt oder die aufgebaute Boxensituation?)</i>
24	Nils	Ok, wieviel sind das (<i>macht neben der Anordnung mit den schwarzen Boxen eine kreisende Handbewegung</i>), zwei (<i>zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen</i>), 14 (<i>zeigt entlang der schwarzen Boxen; legt eine Bohne, die offenbar auf die Nachbarbox gekullert ist, wieder zurück, so dass auf allen schwarzen Boxen je zwei Bohnen liegen</i>), 16 (<i>zeigt auf die Anordnung mit den schwarzen Boxen</i>) minus vier (<i>zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen</i>) 12 #, dann muss hier drei ## (<i>zeigt auf eine weiße Box</i>). Zwei, drei.
25	Nathan	# Sind 12.
26	Niko	## nimmt Bohnen aus dem Vorrat. Er schaut dann zu Nils und Nathan, die sich ihren Blättern zuwenden, um die Lösung aufzuschreiben, und legt die Bohnen wieder weg.
27	Nathan	Zwei, drei?
28	Nils	Zwei, drei. (<i>nickt</i>)
29	Nathan	Sauber, Nils. (<i>Nils und Nathan schreiben das Ergebnis auf.</i>)
30	Nils	Jetzt versuchen wir das mal mit dre (<i>beginnt je eine dritte Bohne auf die schwarzen Boxen zu legen</i>)
31	Niko	# schreibt etwas in seine Tabelle
32	Nathan	# Mit dre. Ok, dre, drei, sechs, neun, zwölf, 15 ##, 18, ### 21 (<i>zeigt nacheinander auf die schwarzen Boxen</i>) minus zwei (<i>zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen</i>) sind
33	Nils	## hat nun auf vier schwarze Boxen Bohnen gelegt. Er bricht das Auffüllen der Bohnen ab und schaut Nathan beim Zählen zu.
34	Niko	### 21.
35	Niko	Sind 17 (<i>zeigt auf die Anordnung mit den weißen Boxen</i>).
36	Nathan	Sieb-, 16

siehe nächste Seite!

Etwas später:

61	Nathan	Mit zehn,
62	Nils	Eh, mit zehn,
63	Nathan	Mit zehn müsste passen
64	Nils	70 (zeigt auf die schwarzen Boxen) minus zwei sind <u>68</u> #, 68 (.) passt,
65	Niko	# wendet sich wieder dem Tisch zu.
66	Nathan	Passt (will das Ergebnis aufschreiben)
67	Niko	<u>Äh</u> ,
68	Nils	Warte mal, sind zehn und 17 (Nathan, Nils und Niko schreiben nun das Ergebnis auf)

a) Versuchen Sie nachzuvollziehen, was die einzelnen Schüler in dieser Szene tun und zu welchem Zweck sie es tun! Versuchen Sie herauszufinden, wie die Schüler denken und ob bzw. wie sie sich aufeinander beziehen! Stellen Sie Ihre Überlegungen gut strukturiert in der Übung vor!

b) Welche Rollen übernehmen sie jeweils im Lösungsprozess?

c) An welchen Stellen des Lösungsprozesses wird eher *arithmetisch* agiert, an welchen Stellen *algebraisch*? Welche Rolle spielt das Material bzw. die Ablösung vom Material dabei?

38

Nachstehend finden Sie zwei Schulbuchseiten!

a) Bearbeiten Sie die gestellten Aufgaben so, wie es der Altersstufe angemessen ist!

b) Welche Seite würden Sie als Einstieg in das Thema „Variablen“ eher verwenden? Begründen Sie Ihre Antwort!

1 Variablen als Platzhalter

Das Knopfrätsel funktioniert wie die sonst üblichen Zahlenrätsel. Der Knopf oder ein anderes Zeichen steht an der Stelle einer bestimmten Ziffer. Die Knöpfe sind Platzhalter und es gilt: Gleicher Knopf bedeutet gleiche Ziffer.



→ Löst das Knopfrätsel durch Probieren. Überlegt zunächst, welchen Wert der blaue Knopf haben kann. Begründet eure Überlegungen.

→ Erfindet eigene Rätsel und lasst sie von euren Nachbarn lösen.

Als Platzhalter oder Variablen werden unterschiedliche Zeichen wie z.B. □, ◇, △, ○, ☆, ... benutzt.

In der Mathematik werden als Variablen häufig Buchstaben verwendet wie z.B. a, b, g, h, x, y, α, β, γ, ...

Streichholzketten und Würfelbauten

Auch mit Würfeln kann experimentiert werden.

3 Bei einem Würfel sind 5 Quadrate sichtbar, 1 Quadrat ist verdeckt. Bei zwei aufeinander liegenden Würfeln sieht man 9 Quadrate, 3 sind verdeckt.



Mit Streichhölzern kann man verschiedene Muster legen und untersuchen.

1 Wie viele Streichhölzer braucht man für 1 Quadrat, wie viele für 2, wie viele für 3, wie viele für 4, ...? Könnt ihr Regelmäßigkeiten entdecken? Beschreibt sie. Seht euch die Tabellen an. Erklärt sie und setzt die Einträge fort.

Anzahl der Quadrate	Anzahl der Hölzer insgesamt	Anzahl der Hölzer für den Umfang
1	4 $1 + 1 \cdot 3$	4 $2 + 1 \cdot 2$
2	7 $1 + 2 \cdot 3$	6 $2 + 2 \cdot 2$
3	...	...
...	...	...

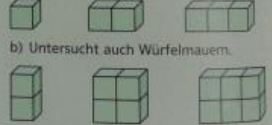
Beschreibt die Regelmäßigkeit mit einem Rechenausdruck.

2 Mit Streichhölzern können auch Dreiecksketten gelegt werden.



a) Untersucht die Anzahl der Hölzer für die gesamte Figur und für den Umfang.
b) Beschreibt die Regelmäßigkeiten. Tragt eure Überlegungen in eine Tabelle ein.
c) Stellt die Ergebnisse in der Klasse vor.

4 ... noch mehr Würfelbauten
a) Stellt Untersuchungen über sichtbare und verdeckte Quadrate an. Beschreibt die Regelmäßigkeiten. Verwendet Tabellen und Rechenausdrücke.
b) Untersucht auch Würfelmauern.



5 Baut Mauern und Figurenketten nach eigenen Regeln. Beschreibt die Gesetzmäßigkeiten und beschreibt diese durch Rechenausdrücke. Stellt eure Ergebnisse in der Klasse vor.



Im Rahmen einer Studie wurde Schülerinnen und Schülern aus Essen und St. Petersburg folgende Aufgabe gestellt:

Wie viele Würfelflächen sind bei folgender, auf einem Tisch liegender Würfelschlange der Länge 5 sichtbar? (Man darf die Würfelschlange dabei von allen Seiten außer von unten betrachten.) Wie viele Flächen sind bei Würfelschlängen der Längen 1, 2, 3, ..., n sichtbar?



Geben Sie zu jeder der folgenden verbal formulierten Strategien eine passende Berechnungsformel an, in der die Strategie noch „sichtbar“ ist! Versuchen Sie dann, die untenstehenden Schülerlösungen den Strategien zuzuordnen!

Betrachtet die Quadrate pro Reihe:

- Zählt die drei Reihen hintereinander und dann die beiden Quadrate an den Enden
- Zählt die drei Reihen gebündelt und dann die Quadrate an den Enden

Betrachtet die Quadrate pro Würfel:

- Zählt das obere, vordere und hintere Quadrat der Würfel und dann die beiden Quadrate an den Enden
- Zählt die Quadrate der beiden äußeren Würfel (je vier Quadrate) und dann die Quadrate der inneren Würfel (je drei Quadrate)

Erkennt die Veränderung:

- Zeigt, welche Quadrate mit jedem neuen Würfel verdeckt werden bzw. hinzukommen

Beispiel: Julia

Würfelschlange	1	2	3	4	5	10	n
Würfelflächen	5	8	11	$4+4+2+4$ 14	$5+5+2+5$ 17	$10+10+2+10$ 32	
							$n+n+2+n$ $n \cdot 3 + 2$

Beispiel: Olga

Würfelschlange	1	2	3	4	5	n
Würfelflächen	5	$5+5-2=8$	$5+5+5-4=11$	$5 \cdot 4 - 6 = 14$	$5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 17$	$5 \cdot n - (n-1) \cdot 2$

Beispiel: Nina

Würfelschlange	1	2	3	4	5	
Würfelflächen	5	8	11	14	17	

$5 + 5 - 2 = 8$
 $6 + 6 - 4 = 8$
 $5 + 3 \cdot (n-1)$
 $5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 17$
 $5 \cdot n - (n-1) \cdot 2 = 11$

Beispiel: Verena

Anzahl Würfel	1	2	3	4	5	n	6
Sichtbare	5	8	11	14	17	$n+n+n+2$	20
							$6+6+6+2$
							$10+10+10+2$

Beispiel: Daniel



1 Würfel
5 sichtbare Quadrate

2 Würfel
8 Quadrate

3 Würfel
11 Quadrate

5 Würfel
17 Quadrate

$$n \cdot 3 + 2$$

Beispiel: Nikita

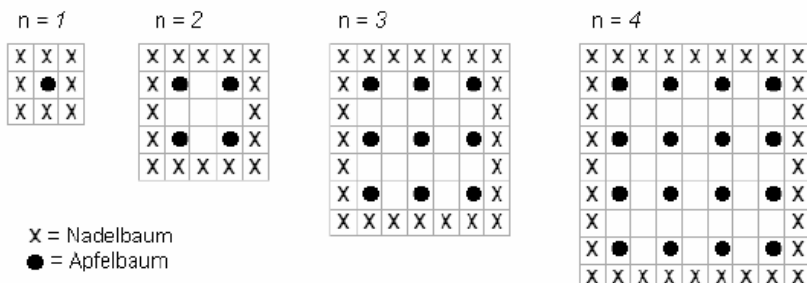
Würfelschlange	1	2	3	4	5	n
Würfelflächen	5	8	11	14	17	$5 + 3 \cdot (n-1)$
						$5 + 3 \cdot (10-1) = 32$

40

Aus einer PISA-Aufgabe:

Ein Bauer pflanzt Apfelbäume an, die er in einem quadratischen Muster anordnet. Um diese Bäume vor dem Wind zu schützen, pflanzt er Nadelbäume um den Obstgarten herum.

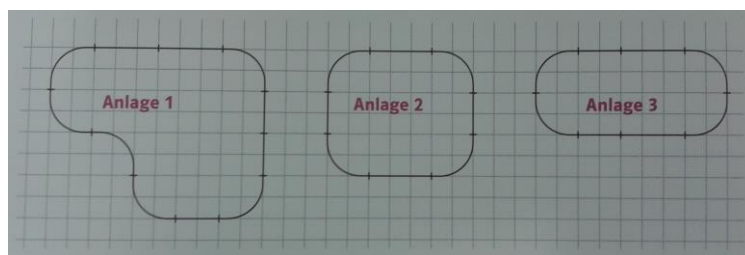
Im folgenden Diagramm siehst du das Muster, nach dem Apfelbäume und Nadelbäume für eine beliebige Anzahl (n) von Apfelbaumreihen gepflanzt werden:



Stellen Sie je eine Formel für die Anzahl der Apfel- und Nadelbäume in Abhängigkeit von n auf! Begründen Sie jene für die Nadelbäume auf mindestens drei verschiedene Arten!

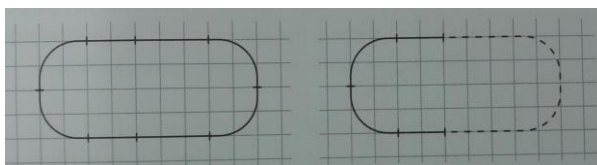
41

Elektrische Modelleisenbahnen gibt es in verschiedenen Baugrößen. Das kleinste System ist die Baugröße Z. Die Schienen und Wagen sind dort im Maßstab 1 : 220 nachgebaut. Aus den Schienenstücken des Startersets lassen sich folgende Gleisanlagen bauen:



a) Was könnte der Term $3a + 2b + 6c$ in Zusammenhang mit Anlage 1 bedeuten? Wofür stehen die Variablen a , b und c ? Stellen Sie entsprechende Terme auch für Anlage 2 und Anlage 3 auf! Was können Schülerinnen und Schüler aus dieser Aufgabe lernen?

b) Welche Rechnung passt zu folgendem Bild?



c) Visualisieren Sie das Kommutativgesetz der Addition, das Assoziativgesetz der Addition und das Distributivgesetz $2 \cdot (a + b) = 2a + 2b$ möglichst einfach mit Hilfe geeigneter Schienenstücke!

42

Legen Sie mindestens fünf Bekannten, Freunden oder Verwandten unterschiedlicher Altersgruppen die Professoren-Studenten-Aufgabe vor:

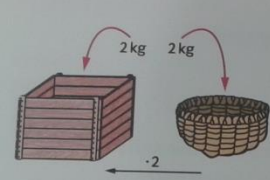
Es sei S die Anzahl der Studenten und P die Anzahl der Professoren an einer Universität. Auf einen Professor kommen 6 Studenten. Drücken Sie das durch eine Gleichung mit Hilfe von S und P aus!

a) Befragen Sie Ihre Probanden (egal, ob sie richtig oder falsch geantwortet haben) danach, was sie sich zu der Gleichung vorstellen, wie sie bei der Lösung vorgegangen sind bzw. was ihnen vielleicht Schwierigkeiten bereitet hat! Machen Sie die Personen mit fehlerhaften Antworten durch Zahlenbeispiele auf den Fehler aufmerksam und fragen Sie noch einmal! (Sie sollten natürlich sachlich bleiben und Ihre Probanden nicht bloßstellen oder in eine unangenehme Prüfungssituation manövrieren.)

b) Sammeln Sie die Ergebnisse (Lösungen, Gesprächsnotizen, Zeichnungen, etc.) und bereiten Sie das interessanteste Beispiel für die Übung vor! Stellen Sie auch vor, wie Sie bei falschen Antworten interveniert haben!

43

Bearbeiten Sie folgende Aufgabe auf dem Darstellungsniveau einer 2. Klasse!



1 Folgende Situationen liegen vor.

A Eine Kiste ist doppelt so schwer wie ein Korb. Man füllt in beide noch 2 kg.

B Eine Kiste und ein Korb wiegen zusammen 18 kg. Man nimmt 2 kg aus der Kiste und gibt sie in den Korb.

C Ein Korb ist doppelt so schwer wie eine Kiste. Man füllt in beide noch 2 kg.

D Ein Korb ist halb so schwer wie eine Kiste. Man füllt 2 kg von der Kiste in den Korb.

a. Ordne die Skizze der richtigen Situation A, B, C oder D zu. Zeichne Skizzen zu den verbleibenden Situationen.

b. Eine der Situationen A, B, C oder D wurde links mithilfe einer Tabelle und algebraisch notiert. Um welche Situation handelt es sich?

c. Notiere Tabellen zu den anderen Situationen und stelle sie jeweils algebraisch dar.

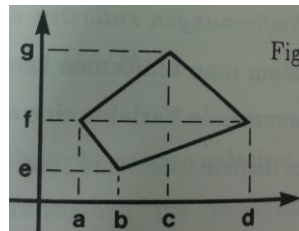
Tabelle			
vorher		nachher	
Kiste	Korb	Kiste	Korb
12	6	10	8
10	8	8	10

Algebraisch

	Kiste	Korb
vorher:	x	y
Beziehung	$x + y = 18$	
nachher:	$x - 2$	$y + 2$

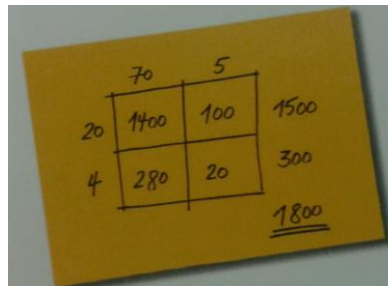
44

Geben Sie eine möglichst einfache Formel für den Flächeninhalt des Vierecks an! Von welchen der Koordinaten hängt dieser Flächeninhalt ab, von welchen nicht? Begründen Sie die Antwort auch geometrisch!



45

Im Notizheft von Sam findet sich folgende Rechnung:



	70	5	
20	1400	100	1500
4	280	20	300
			<u>1800</u>

- Was hat Sam hier ausgerechnet?
- Welchen Vorteil hat Sams Methode?
- Welches Rechengesetz steckt hinter Sams Methode? Schreiben Sie mit Variablen an!
- Schlagen Sie in mindestens drei Schulbüchern der 3. Klasse nach, wie dort die drei binomischen Formeln eingeführt werden! Gibt es Unterschiede? Wofür würden Sie sich in Ihrem Unterricht entscheiden?

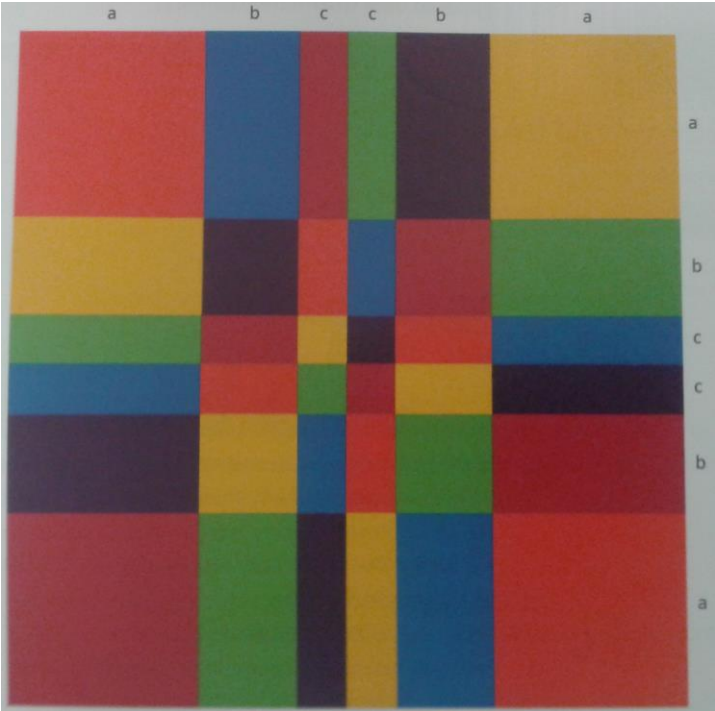
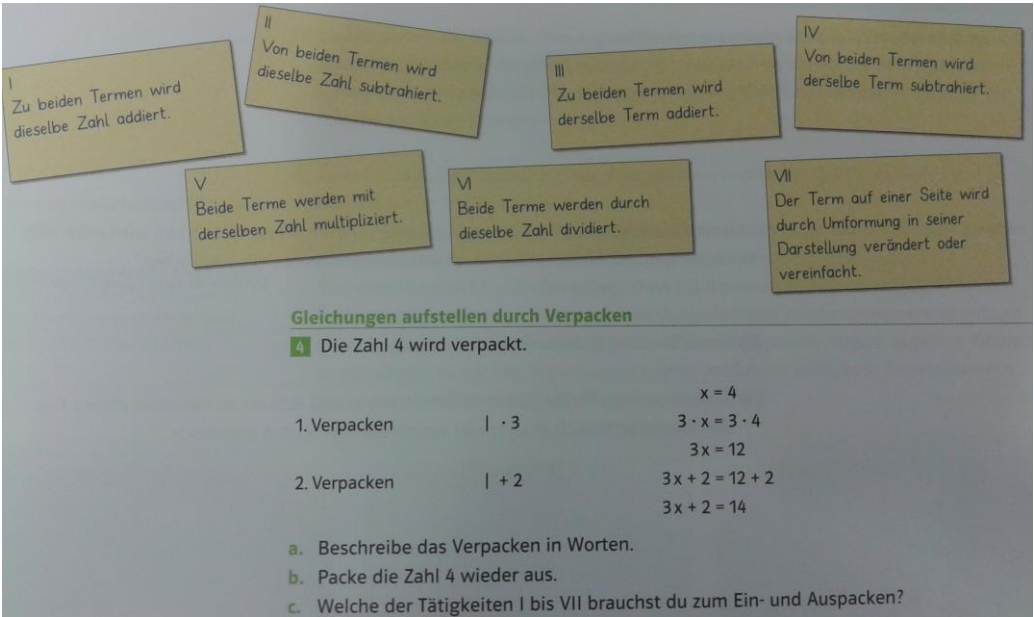
46

a) Schüler werden manchmal dazu angehalten, Terme wie $xy + 3(x + y)$ auch zu beschreiben: „Das ist eine Summe, bei der der 1. Summand ein Produkt aus den Faktoren x und y ist, der 2. Summand ist ein Produkt aus der Zahl 3 und der Summe aus x und y .“ Welchen Sinn haben derartige Übungen? Welche Anforderungen stellt dies an die Schüler? Lohnt sich der Aufwand?

b) Die folgenden Terme sollen vereinfacht werden. Ordnen Sie diese nach ihrem Schwierigkeitsgrad! Begründen Sie Ihre Entscheidung!

$$3a + 4b + 2a + 6b; \quad \frac{2}{3}r + \frac{1}{4}r; \quad 2x + 3x; \quad 2(x + y) + 3(x + 2y); \quad \frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s - \frac{1}{3}r + \frac{1}{2}s;$$

$$8(a + 2b) - 4(a - b); \quad 0,3m + 1,5n - 2,4m - 0,8n$$

47	a) Unter welchen Bedingungen kann der Fall $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ eintreten? Wie können Sie den Schülern klar machen, dass dies nicht im Widerspruch zur binomischen Formel steht? b) Manche Schüler haben Schwierigkeiten, eine Gleichung wie $x = y$ zu akzeptieren. Woran kann das liegen? Wie kann man das Problem lösen? c) An der Tafel steht $0 < -x$. Ein Schüler protestiert: „Es muss heißen: $0 > -x$“. Wie können Sie ihm helfen? d) Wie können Sie Ihren Schülern klar machen, dass man durch Einsetzen konkreter Zahlen wohl die Fehlerhaftigkeit einer Termumformung, nicht aber ihre Korrektheit beweisen kann?
48	Der Schweizer Maler Richard Paul Lohse hat 1983 das quadratische Bild „6 komplementäre Farbreihen“ gemalt. Erstellen Sie ein Arbeitsblatt zum Thema „Terme und Termumformungen“ für Schülerinnen und Schüler zu diesem Bild und lösen Sie die darauf gestellten Aufgaben auch selbst! 
49	Folgende Passage findet man in einem deutschen Schulbuch zum Thema „Gleichungslösen“:  a) Bearbeiten Sie diese Aufgabe selbst! b) Diskutieren Sie eingehend den didaktischen Nutzen der Passage! Nennen Sie dazu mindestens drei Aspekte!

50	Lösen Sie diese Aufgabe einerseits mit und andererseits ohne Algebra: Auf einem Tisch stehen zwei Gläser mit jeweils der gleichen Menge Rot- bzw. Weißwein. Aus dem Rotwein wird ein Löffel heraus genommen und in den Weißwein gegeben. Es wird nun gut umgerührt und dann ein Löffel vom dadurch entstandenen Weiß-Rotwein-Gemisch zurück in das Glas mit dem Rotwein gegeben. Befindet sich jetzt mehr Weißwein im Rotwein oder mehr Rotwein im Weißwein?						
51	Finden Sie die Fehler in den folgenden Bearbeitungen! i) Jeder Mensch hat sein Normalgewicht! <i>Beweis:</i> G ... tatsächliches Gewicht eines bestimmten Menschen, N ... Normalgewicht für einen Menschen dieser Größe $\ddot{U}$... Übergewicht dieses Menschen $\begin{aligned} G &= N + \ddot{U} \quad - N \\ G - N &= \ddot{U} \quad \cdot (G - N) \\ (G - N) \cdot (G - N) &= (G - N) \cdot \ddot{U} \\ GG - 2GN + NN &= G\ddot{U} - N\ddot{U} \quad + GN - NN - G\ddot{U} \\ GG - GN - G\ddot{U} &= GN - NN - N\ddot{U} \\ G \cdot (G - N - \ddot{U}) &= N \cdot (G - N - \ddot{U}) \quad : (G - N - \ddot{U}) \\ G &= N \end{aligned}$ ii) 5 ist gleich 4 (oder: alle Zahlen sind gleich) <i>Beweis:</i> $\begin{aligned} -20 &= -20 \\ 25 - 45 &= 16 - 36 \\ 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} &= 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} \\ \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 \\ 5 - \frac{9}{2} &= 4 - \frac{9}{2} \\ 5 &= 4 \end{aligned}$						
52	a) Lösen Sie folgende Schulbuchaufgabe! a. Welche Gleichung gehört zu welchem Text? Ordne zu, wo es geht und löse die Gleichungen. <table><tr><td>A $x + 14 = 8x$</td><td>B $x + 15 = 4 \cdot (x + 9)$</td><td>C $x + 15 = 4x + 9$</td></tr><tr><td>D $3 \cdot (x + 1) = 15 - x$</td><td>E $2 \cdot (x - 6) = x : 2$</td><td>F $2x - 6 = x : 2$</td></tr></table> I Wenn ich vom Doppelten einer Zahl 6 subtrahiere, erhalte ich die Hälfte der Zahl. II Wenn ich zu einer Zahl 15 addiere, erhalte ich 9 mehr als ihr Vierfaches. III Wenn ich das Dreifache einer Zahl um 1 vergrößere, erhalte ich 15 weniger als die Zahl. IV Wenn ich zu einer Zahl 1 addiere und das Ergebnis verdreifache, erhalte ich gleich viel, wie wenn ich die Zahl von 15 subtrahiere. V Wenn ich zu einer Zahl 14 addiere, erhalte ich 8. VI Wenn ich zu einer Zahl 14 addiere, erhalte ich ihr Achtfaches. b. Formuliere Texte zu den nicht zugeordneten Gleichungen und löse sie. c. Notiere die Gleichungen der verbliebenen Texte und löse sie. b) Entwerfen Sie eine Prüfungsaufgabe, die dieselben Kompetenzen erfordert, die auch zur Lösung von a) nötig sind! Lösen Sie Ihre Aufgabe! Stellen Sie außerdem dar, worauf Sie bei der Aufgabenerstellung besonders geachtet haben! (Hinweis: Die Aufgabe in b) muss nicht zwangsläufig nach demselben „Muster“ wie a) aufgebaut sein, Sie dürfen ruhig kreativ werden!)	A $x + 14 = 8x$	B $x + 15 = 4 \cdot (x + 9)$	C $x + 15 = 4x + 9$	D $3 \cdot (x + 1) = 15 - x$	E $2 \cdot (x - 6) = x : 2$	F $2x - 6 = x : 2$
A $x + 14 = 8x$	B $x + 15 = 4 \cdot (x + 9)$	C $x + 15 = 4x + 9$					
D $3 \cdot (x + 1) = 15 - x$	E $2 \cdot (x - 6) = x : 2$	F $2x - 6 = x : 2$					

53	Folgende Interviewtranskripte sind dem Buch „Didaktische Probleme der elementaren Algebra“ von G. Malle entnommen: a) Kurt soll die Gleichung $2z = \frac{4}{3}$ lösen. Das Interview verläuft wie folgt: K: Nun dividiert durch zwei, $z = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{6}$. I: Was hast du dir dabei gedacht? K: Zwei Ganze mit 6 Drittel und der Bruch dividiert ist gleich mit Kehrwert multipliziert, $z = \frac{4}{6}$, kann man wieder kürzen, $z = \frac{2}{3}$. b) Auch Angelika löst diese Gleichung: b) Angelika (14) löst die Gleichung $2z = \frac{4}{3}$ aufgrund eines kleinen inhaltlichen Anstoßes durch den Interviewer zunächst dadurch, daß sie durch 2 dividiert, und erhält $z = \frac{2}{3}$. Sie erklärt aber anschließend, daß ihr diese Methode nicht gefällt und daß sie die Gleichung lieber anders lösen möchte. Sie erweitert 2 zu $\frac{6}{3}$ und geht so vor: A: Ja! (Schreibt) $z = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{6}$, gekürzt, $z = \frac{2}{3}$. ... Man könnte auch durch $\frac{2}{1}$ oder mal $\frac{1}{2}$. Es kommt das gleiche heraus: $\frac{2}{3}$. I: Was ist für dich einfacher, zu erweitern oder gleich durch 2 zu dividieren? A: Für mich ist es einfacher, mit Drittel zu rechnen, weil das ist anschaulicher. I: Was heißt für dich anschaulicher? A: Daß ich dann gleich kürzen kann und dann $z = \frac{2}{3}$... I: Der Rechenweg ist dann aber länger. A: Aber anschaulicher! c) Barbara soll den Term $(x \cdot y)^2$ ausmultiplizieren. B: $(x \cdot y)^2$... Dazu brauche ich eine Formel. I: Was für eine Formel? B: Weiß nicht, ich denke gerade nach. (Pause). Ich kann die Formel nicht. I: Meinst du die Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$? B: Nein. Da gibt es ja normal gar keine, oder? I: Hm, du hast gesagt, daß du zum Ausrechnen von $(xy)^2$ eine Formel brauchst. B: Sicher, ja, eine Formel. Aber da muß normal plus oder minus stehen. Aber da steht ein Mal. I: Was ist, wenn ein Mal steht? B: Dann gibt es keine Formel. I: Wie rechnest du es dann aus? B: Weiß nicht! Versuchen Sie nachzuvollziehen, wie die Schüler/innen denken und stellen Sie diese Gedanken vor! Welche Überschrift könnte man aus didaktischer Sicht über diese drei Transkripte setzen? Wie würden Sie im Unterricht mit diesen Lösungen umgehen?
54	Lösen Sie folgende einfache Bruchgleichung mit einem Parameter: Einerseits mit Parameter a und Lösungsvariable x, andererseits umgekehrt ($a, x \in \mathbb{R}$): $\frac{x}{x+a} = 2$
55	Lösen Sie die Gleichung $\sqrt{x+7} - x - 7 = -6$. Wie viele Lösungen gibt es?

Aufgaben für den Computereinsatz

Bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgaben mit Hilfe von GeoGebra! Starten Sie bei der Präsentation in den Übungen jeweils mit einem leeren GeoGebra-Dokument und erklären Sie jeden Bearbeitungsschritt!

C1	a) Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 351, 728 und 5291. b) Ermitteln Sie das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 24, 50 und 60. c) Ermitteln Sie die Primfaktordarstellung von 1368.
C2	Lösen Sie die Gleichung $\frac{3x-4}{7} = 25$ so, dass die Lösung i) als Bruch, ii) in Dezimaldarstellung ausgegeben wird!
C3	Lösen Sie folgende einfache Bruchgleichung mit einem Parameter im CAS: Einerseits mit Parameter a und Lösungsvariable x , andererseits umgekehrt ($a, x \in \mathbb{R}$): $\frac{x}{x+a} = 2$ Vergleichen Sie die von GeoGebra ausgegebene Lösung mit jener aus Aufgabe 53! Nehmen Sie Stellung dazu!
C4	Zeigen Sie, wie im CAS von GeoGebra die unterschiedlichen Lösungsfälle für lineare Gleichungssysteme (3 Gleichungen in 3 Variablen) ausgegeben werden! Wählen Sie dazu selbst geeignete Gleichungssysteme!
C5	Erstellen Sie im Grafikfenster von GeoGebra ein Applet, das die Eigenschaft $f(x+1) = f(x) + k$ am Graphen einer linearen Funktion f mit $f(x) = kx + d$ verdeutlicht!
C6	Demonstrieren Sie mit Hilfe eines Schiebereglers für r , wie sich der Funktionsgraph verändert, wenn man an der Funktion f mit $f(x) = x $ folgende Transformationen vornimmt: a) $g(x) = f(x+r)$ b) $h(x) = f(x) + r$ c) $i(x) = r \cdot f(x)$ d) $j(x) = f(r \cdot x)$

Zusatzaufgaben

Aufg. 32 Hans 11.4	Eine bei den Ägyptern wichtige Frage war, ob ein Bruch als <i>Summe verschiedener Stammbrüche</i> darstellbar ist. Zeigen Sie, dass im Bereich zwischen 0 und 1 a) alle Stammbrüche $\frac{1}{n}$ selbst und b) alle Brüche $\frac{2}{n}$ mit Zähler 2 als <i>Summe zweier verschiedener Stammbrüche</i> darstellbar sind. Bemerkung: Bei b) ist die nahe liegende Zerlegung $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ nicht erlaubt, weil die Stammbrüche <i>nicht verschieden</i> sind.															
Aufg. 38 Hans 13.4	Das Seil ist immer 1 m länger . . . Ein Band oder ein Seil, das immer um 1 m länger ist als eine (variable) Strecke auf dem Boden, wird mit seinen Enden an die Enden der Strecke am Boden gehalten. Dann ist das Seil natürlich nicht gespannt, und man kann es an einem beliebigen Punkt vom Boden abheben und spannen. Aber wie weit geht das? a) Abheben in der Mitte des Seiles Stellen Sie sich vor, das Seil ist immer um genau einen Meter länger als die Strecke s am Boden, und man hebt es immer in der Mitte senkrecht an, so dass sich dabei eine gewisse Höhe h_M ergibt (Index M für Mitte). Wie wird sich die Höhe h_M in Abhängigkeit von der Strecke s auf dem Boden verändern? Ohne Rechnung: Wird diese Höhe mit wachsendem s größer werden, gleich bleiben, oder kleiner werden? Schätzen Sie die Höhe $h_M(s)$ bei den Werten von $s = 1, 10, 100, 1000$ m in Form einer Tabelle. <table><tr><td>Bodenstrecke s (in m)</td><td>1</td><td>10</td><td>100</td><td>1000</td></tr><tr><td>Seillänge L (in m)</td><td>2</td><td>11</td><td>101</td><td>1001</td></tr><tr><td>Höhe h_M (in m)</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> b) Ohne Rechnung: Machen Sie eine Freihandskizze für den vermuteten, rein qualitativen Verlauf des Graphen der Funktion $s \mapsto h_M(s)$. c) Bestimmen Sie dann den Funktionsterm der Funktion $s \mapsto h_M(s)$ und zeichnen Sie ihren Graphen; vergleichen Sie mit Ihren Schätzwerten bzw. mit der Freihandskizze des Graphen! Was bedeutet das für $\lim_{s \rightarrow \infty} h_M(s)$? d) Bearbeiten Sie a) bis c) für den Fall, dass man das Seil nicht in der Mitte, sondern an einem Randpunkt der Strecke abhebt (am Rand steht dabei ein Stück Seil senkrecht nach oben): $s \mapsto h_R(s)$ (Index R für Rand). Was fällt dabei im Vergleich zu c) besonders auf? e) Finden Sie eine rein geometrische Möglichkeit (<i>ohne</i> Rechnen, Formeln, Algebra), die zu beobachtenden Phänomene (Wachstumsverhalten, keine Grenzwerte) der Abhebedistanz für wachsende Werte von s in beiden Fällen Schülern/innen der 2. Klasse plausibel zu machen (ohne Pythagoras)?	Bodenstrecke s (in m)	1	10	100	1000	Seillänge L (in m)	2	11	101	1001	Höhe h_M (in m)				
Bodenstrecke s (in m)	1	10	100	1000												
Seillänge L (in m)	2	11	101	1001												
Höhe h_M (in m)																
Aufg. 16 S Hans 5.3	Testen Sie die folgenden Methoden zur Berechnung von Quadratzahlen zunächst an einigen Beispielen und beweisen Sie danach allgemein ihre Gültigkeit! a) Für die Berechnung von x^2, wenn $25 \leq x \leq 75$: Addiere zu (subtrahiere von) 25 den Abstand $50 - x$ und hänge das Quadrat dieses Abstands zweistellig an! Bsp 57^2: $25 + 7 = 32$, $7^2 = 49$, also: 3249 b) Für die Berechnung von x^2, wenn $75 \leq x \leq 125$: Addiere zu (subtrahiere von) x den Abstand $100 - x$ und hänge das Quadrat dieses Abstands zweistellig an! Bsp 88^2: $88 - 12 = 76$, $12^2 = 144$, also: 7744 c) Für die Berechnung von x^2, wobei x eine zweistellige Zahl mit Einerstelle 5 ist: Multipliziere die Zehnerziffer von x mit der um 1 vergrößerten Ziffer und hänge 25 an!															
Aufg. 14 Hans 4.5	Schreiben Sie mit jeweils genau 4 Vierern und den Rechenzeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und mit Klammern die Zahlen 0 bis 10.															