# Proseminar zu
# Reelle Analysis in mehreren Variablen und Komplexe Analysis in einer Variablen für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

*Wintersemester 2008/2009*

CHRISTOPH ABLEITINGER
PETER RAITH

1) Zeige, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2) Beweise, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

3) Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit $d_1\Big(\big(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\big), \big(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\big)\Big) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Zeige, dass $d_1$ eine Metrik ist.

4) Für $x = \big(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\big) \in \mathbb{R}^2$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei $d_1$ die in Beispiel 3) definierte Metrik, $d_2$ die übliche Metrik (also $d_2(x,y) := |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ ) und $d_\infty$ die durch
$$d_\infty(x,y) := \max\big\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\big\}$$
definierte Metrik. Skizziere $B(0,1)$ für jede dieser Metriken.

5) Betrachte $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ mit der Metrik $d(f,g) := \sup\limits_{x\in[0,1]} \big|f(x)-g(x)\big|$. Berechne $d(x,x^2)$.

6) Definiere auf $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ eine „Metrik“ $d$ durch $d(f,g) := \displaystyle\int_0^1 \big|f(x)-g(x)\big|\,dx$. Zeige, dass $d$ wirklich eine Metrik ist.
*Bemerkung*: Man kann zeigen, dass $\|f\|_1 := \displaystyle\int_0^1 \big|f(x)\big|\,dx$ eine Norm ist. Dabei kann man statt $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ auch $C\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ verwenden, soferne die Integralgrenzen entsprechend geändert werden.

7) Betrachte $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ mit der in Beispiel 6) definierten Metrik $d$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ sei durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 5-15nx\,, & \text{falls } x\in\big[0,\frac{1}{3n}\big],\\ 4nx-3n+1\,, & \text{falls } x\in\big[\frac{3}{4}-\frac{1}{4n},\frac{3}{4}\big],\\ 3n+1-4nx\,, & \text{falls } x\in\big[\frac{3}{4},\frac{3}{4}+\frac{1}{4n}\big],\\ 0\,, & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert.

a) Skizziere $f_n$.

b) Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ gilt (bezüglich der in Beispiel 6) definierten Metrik $d$).

c) Bestimme den punktweisen Grenzwert der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vergleiche dieses Ergebnis mit dem Grenzwert aus Beispiel b).

d) Gib ein Beispiel einer Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, die $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$ in unserer Metrik $d$ erfüllt, aber bei der $\lim\limits_{n\to\infty} g_n\big(\frac{1}{3}\big) = +\infty$ gilt.

8) Untersuche, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bezüglich der üblichen Metrik (also der Metrik $d(x,y) := |x-y|$) offen, bzw. abgeschlossen sind (Begründungen geben).

a) $[3,7]\,.$ b) $[-1,3)\,.$ c) $\mathbb{R}\,.$

d) $(-2,5)\,.$ e) $\{x\in\mathbb{R} : x>2\}\,.$ f) $[-4,2]\cup(6,8)\,.$

g) $(-\infty,5)\cup(7,8)\,.$ h) $[-\pi,\sqrt{2}]\,.$ i) $[1,5]\cap\mathbb{Q}\,.$

9) In diesem Beispiel sei der Grundraum $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Metrik (also der Metrik $d(x,y) := |x-y|$). Untersuche, ob folgende Mengen offen, bzw. abgeschlossen sind (Begründungen geben).

a) $(0,1)\cap\mathbb{Q}\,.$ b) $[0,1)\cap\mathbb{Q}\,.$ c) $[0,1]\cap\mathbb{Q}\,.$

d) $(\pi,+\infty)\cap\mathbb{Q}\,.$ e) $(-\infty,\sqrt{7})\cap\mathbb{Q}\,.$ f) $\{x\in\mathbb{Q} : x^2<2\}\,.$

g) $\{x\in\mathbb{Q} : x\ge 0 \text{ und } x^2<2\}\,.$ h) $\{x\in\mathbb{Q} : x>0 \text{ und } x^2<5\}\,.$

10) In $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Metrik untersuche (Begründungen geben), welche der folgenden Teilmengen offen, bzw. abgeschlossen sind (dabei ist stets $x = \binom{x_1}{x_2}$).

a) $\Big\{x\in\mathbb{R}^2 : \Big(\dfrac{x_1-2}{5}\Big)^2 + \Big(\dfrac{x_2-8}{3}\Big)^2 < 1\Big\}\,.$

b) $\big\{x\in\mathbb{R}^2 : |x|\le 3\big\} \cup \Big\{x\in\mathbb{R}^2 : (x_1+18)^2 + \Big(\dfrac{x_2}{2}\Big)^2 < 1\Big\}\,.$

c) $\big\{x\in\mathbb{R}^2 : x_1>0 \text{ und } x_1x_2=1\big\}\,.$ d) $\big\{x\in\mathbb{R}^2 : 3x_1+5x_2\ge 15\big\}\,.$

e) $\big\{x\in\mathbb{R}^2 : 5x_1+8x_2>40\big\}\cup\big\{x\in\mathbb{R}^2 : |x|\le 2\big\}\,.$

11) Bestimme den Abschluss, das Innere und den Rand der Mengen aus Beispiel 8), Beispiel 9) und Beispiel 10).

12) Die Menge $\mathbb{R}$ sei mit der üblichen Metrik versehen. Für $n\in\mathbb{N}$ sei $U_n := \big(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\big)\,.$ Zeige, dass für jedes $n\in\mathbb{N}$ die Menge $U_n$ offen ist. Weiters bestimme $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n\,,$ und untersuche ob diese Menge offen oder abgeschlossen ist (Beweise!).

13) Zeige mit Hilfe der Definition der Abgeschlossenheit mittels konvergenter Folgen, dass folgende Eigenschaften in einem metrischen Raum $(M, d)$ gelten.

a) Sei $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie abgeschlossener Mengen. Dann ist $\bigcap_{j\in J} A_j$ abgeschlossen (beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen).

b) Falls $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abgeschlossene Mengen sind, dann ist auch die Menge $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ abgeschlossen (endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen).

14) Seien $(M_1, d_1)$, $(M_2, d_2)$ metrische Räume, sei $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion, und sei $x_0 \in M_1$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Die Funktion $f$ ist stetig in $x_0$.

(2) Zu jeder offenen Menge $U \subseteq M_2$, für die die Eigenschaft $f(x_0) \in U$ gilt, gibt es eine offene Menge $V \subseteq M_1$ mit $x_0 \in V$ und $V \subseteq f^{-1}(U)$.

(3) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

*Anleitung*: Zeige (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1). Führe den Beweis für (3) $\Longrightarrow$ (1) indirekt.

15) Welche der Mengen aus den Beispielen 8) und 10) sind zusammenhängend (Begründungen geben)?

16) Untersuche, welche der Mengen in Beispiel 9) zusammenhängend sind (Begründungen geben)?

17) Seien $(M_1, d_1)$, $(M_2, d_2)$ metrische Räume, sei $f : M_1 \to M_2$ eine stetige Funktion, und sei $B \subseteq M_1$ zusammenhängend. Zeige, dass $f(B)$ zusammenhängend ist.

18) Auf $C\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ definiere die Metrik $d$ wie in Beispiel 6). Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$, die durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right], \\ nx + \frac{1-n}{2}\,, & \text{falls } x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right], \\ 1\,, & \text{falls } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1\right], \end{cases}$$

definiert ist.

a) Skizziere $f_n$.

b) Zeige, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge (bezüglich unserer Metrik $d$) ist.

c) Beweise, dass es kein $f \in C\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ gibt, sodass $f_n \to f$ (bezüglich unserer Metrik $d$) gilt.

d) Ist $\Big(C\big([0, 1], \mathbb{R}\big), d\Big)$ vollständig?

19) Welche der Mengen in den Beispielen 8) und 10) sind kompakt (Begründungen geben)?

20) Für welche der Mengen in Beispiel 9) liegt Kompaktheit vor (Begründungen geben)?

21) Gib ein Beispiel einer unendlichen, kompakten Teilmenge von $\mathbb{Q}$ an.

22) Sei $(C, d)$ ein kompakter metrischer Raum, und sei $A \subseteq C$ abgeschlossen. Zeige, dass $A$ kompakt ist.
*Hinweis*: Beweise, dass $A$ folgenkompakt ist.

23) Es sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *nach oben halbstetig* in $x_0 \in M$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $d(x, x_0) < \delta$ gilt. Falls $f$ in jedem $x \in M$ nach oben halbstetig ist, dann heißt $f$ nach oben halbstetig (auf $M$).
Betrachte $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik. Zeige, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{für } x \in \mathbb{Z}, \\ 0\,, & \text{sonst,} \end{cases}$$

nach oben halbstetig ist. Ist $f$ auch stetig? Untersuche, ob die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0\,, & \text{sonst,} \end{cases}$$

nach oben halbstetig ist.

24) Es sei $(C, d)$ ein kompakter metrischer Raum, und $f : C \to \mathbb{R}$ sei eine nach oben halbstetige Funktion. Beweise dass $f$ ein Maximum besitzt, also dass es ein $m \in C$ gibt, das $f(m) = \max\{f(x) : x \in C\}$ erfüllt.

25) Gib ein Beispiel eines kompakten metrischen Raumes $(C, d)$ und einer nach oben halbstetigen Funktion $f : C \to \mathbb{R}$, die kein Minimum besitzt.

26) Gib alle komplexen Nullstellen der folgenden Polynome an.
a) $z^3 - 1\,.$ b) $z^6 - 1\,.$ c) $z^7 - 1\,.$

27) Von den folgenden Polynomen gib alle komplexen Nullstellen an.
a) $z^4 - 1\,.$ b) $z^5 - 32\,.$ c) $z^{19} - 1\,.$
d) $z^6 + 1\,.$ e) $z^9 + 1\,.$ f) $z^5 - i\,.$

28) Bestimme alle komplexen Nullstellen des Polynoms

$$z^{22} + z^{21} + z^{20} + z^{19} + z^{18} + z^{17} + z^{16} + z^{15} + z^{14} + z^{13} + z^{12} + \\ + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\,.$$

*Anleitung*: Wende zunächst die Formel für die endliche geometrische Reihe an.

29) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, und der Punkt $x_0 \in (a, b)$ erfülle $\left|f'(x_0)\right| < 1\,.$ Zeige, dass es ein $q < 1$ und ein offenes Intervall $U$ mit $x_0 \in U$ und $\overline{U} \subseteq (a, b)$ gibt, sodass $\left|f(x) - f(y)\right| \leq q|x - y|$ für alle $x, y \in \overline{U}$ gilt.
*Anleitung*: Verwende die Stetigkeit von $f'$ und den Mittelwertsatz.

30) Beweise den folgenden *Satz*:
Sei $T : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, und $x_0 \in (a, b)$ erfülle $Tx_0 = x_0$ und $\left|T'x_0\right| < 1\,.$ Dann gibt es ein offenes Intervall $U \subseteq (a, b)$ mit $x_0 \in U$, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x_0$ für alle $x \in U$ gilt.
*Anleitung*: Verwende Beispiel 29) und den Banach'schen Fixpunktsatz.

31) Für die Funktion $f(x) := x^3 - 3x$ löse die folgenden Aufgaben.
a) Bestimme die Nullstellen von $f$.
b) Führe das Newtonverfahren für $f$ mit dem Startwert $\sqrt{\frac{3}{5}}$ durch.

32) Wende das Newtonverfahren auf die Funktion $f(x) := 13x^4 - 113x^2 + 100$ an, wobei als Startwert 2 gewählt wird.

33) Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ erfüllt. Angenommen für ein $x \in (a,b)$ erfüllt die durch $x_1 := x$ und
$$x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad \text{für } n > 1$$
definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass $x_n \in (a,b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gebe ein $x_0 \in (a,b)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Beweise, dass $f(x_0) = 0$ gilt.

34) Finde eine Nullstelle von $f(x) := 17x - 1800000000 + 3e^{7x}$. Gib den Wert der Nullstelle auf 20 Stellen nach dem Komma (also mit einem Fehler von höchstens $5 \times 10^{-21}$) an.
*Hinweis*: Verwende einen Computer. Wie kann man sich sicher sein, dass man den Wert auf 20 Stellen genau hat?

35) Berechne die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen.
a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_1}^2 + \sin x_2 \\ x_1 e^{3x_2} - 4 \end{pmatrix}$.
b) $f(x) := \begin{pmatrix} \arctan x \\ 3^x \\ 4x^2 + 11 \end{pmatrix}$.
c) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 {x_5}^7 - e^{x_3} \\ {x_1}^3 e^{x_5} + \log(1 + {x_2}^2) \\ 5x_1x_3x_4 + {x_2}^{x_5} \end{pmatrix}$.
d) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(x_1x_3) \\ \sqrt[5]{{x_1}^6 x_3 + \arcsin x_2} \\ x_1 e^{{x_3}^2} + 4x_3 \\ x_1{x_2}^4 x_3 \end{pmatrix}$.
e) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := {x_3}^2 \arctan(x_1x_4) + \sqrt{3 + {x_2}^4 + {x_4}^2} - \cos x_5$.

36) Verwende die Definition der Richtungsableitung, um für die folgenden Funktionen $f$ die Richtungsableitung von $f$ im Punkt $x_0$ in Richtung $v$ (jeweils in der normierten und der nicht normierten Version) zu bestimmen.
a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x_1 \\ x_1 + 5x_2 \\ {x_1}^2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8 \\ x_1x_2 - 3 \end{pmatrix}$, $x_0 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
b) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := {x_1}^2 + 3x_1x_2 - 2x_2 + 6$, $x_0 := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
c) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 \\ x_1x_2 + 5 \\ 4x_3 \end{pmatrix}$, $x_0 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

37) Bestimme die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_1}^2 x_2 x_3 - 3 \\ 17x_1 - {x_2}^3 x_3 \end{pmatrix}$ definiert ist.

38) a) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \sin x_1 + {x_2}^2 x_3$. Berechne $\operatorname{grad} f$.

b) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_1}^2 + \tan(x_2 x_5) + 3x_4 e^{x_3} \\ 2x_1 x_2 + 2{x_3}^5 + 7^{x_2} - x_4 \\ \arctan x_3 - x_4 {x_5}^2 + 8 \\ \cosh x_1 + x_4 x_5 - \log(1 + {x_5}^4) \\ 3x_3 - 7x_5 \end{pmatrix}$. Berechne $\operatorname{div} f$.

c) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := x_3 \sin x_1 + e^{x_1 x_4 - 3x_2}$. Berechne $\operatorname{grad} f$.

d) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x_1 + {x_2}^2 - e^{x_2 x_3} \\ \cos x_1 + 8x_2 + 3x_1 e^{x_1 x_3} \\ x_1 + 5x_2 - x_3 \end{pmatrix}$. Berechne $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

e) Sei $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sin x_1 + \sin x_2 \\ x_1 e^{x_2} - x_1 {x_3}^2 \\ 3x_3 + x_1 \cos x_3 \end{pmatrix}$. Berechne $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

39) Definiere die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (dabei ist $x = \binom{x_1}{x_2}$) durch

$$f(x) := \begin{cases} x_1 x_2 \frac{2{x_1}^2 + 5{x_2}^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Berechne $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0)$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0)$.

40) Untersuche, ob die Funktionen in Beispiel 35) differenzierbar sind (Begründungen geben). Soferne sie differenzierbar sind, gib ihre Ableitungen an.

41) Sind lineare Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (aus der linearen Algebra weiß man, dass $\varphi(x) = Ax$ für eine reelle $m \times n$-Matrix $A$) differenzierbar? Was ist ihre Ableitung? Wie ist die Situation bei affinen Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (das heißt $\varphi(x) = Ax + b$ für eine reelle $m \times n$-Matrix $A$ und ein $b \in \mathbb{R}^m$).

42) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, die durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \cos x_3 + 5 \\ {x_1}^2 + x_2 \sin x_3 \\ x_1 + {x_3}^3 \\ {x_1}^2 + x_2 x_3 \end{pmatrix}$$

definiert ist.

a) Berechne die Ableitung von $f$.

b) Bestimme die Ableitung von $f$ in $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Verwende Beispiel b) um die Richtungsableitung von $f$ im Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ in Richtung $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ (in der normierten und der nicht normierten Version) zu berechnen.

43) Für die folgenden Funktionen $f$ berechne die Ableitung von $f$ (dort, wo diese Funktion vernünftig definiert und differenzierbar ist), die Ableitung von $f$ an der Stelle $x_0$, und die Richtungsableitung von $f$ im Punkt $x_0$ in Richtung $v$.

a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_2}^2 + {x_5}^{x_3} \\ x_4 + x_3 \log x_2 \\ 2x_5 + \arcsin x_1 + 3{x_4}^5 \end{pmatrix}$, $x_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3{x_1}^3 x_2 - 4x_1 + 3x_2 \\ 4{x_1}^2 + {x_2}^6 - 9x_1 \\ 5 \arctan x_1 + 4x_2 \\ 2{x_1}^3 - x_1 x_2 \end{pmatrix}, \ x_0 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v := \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}.$

c) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3{x_2}^2 + 2x_1 x_3 \\ {x_1}^2 x_2 x_3 \\ {x_1}^2 - 3x_2 x_3 \end{pmatrix}, \ x_0 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ v := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$

d) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2{x_1}^2 x_3 + 5x_2 \cos x_4 - x_1 + 2x_3 \\ {x_1}^{\sin x_4} + x_2 + 3{x_3}^2 \end{pmatrix}, \ x_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \ v := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$

44) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x = \binom{x_1}{x_2})$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{{x_1}^2 x_2}{{x_1}^2 + {x_2}^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

definiert. Beweise, dass $f$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist, und dass $f$ in 0 stetig, aber nicht differenzierbar ist.

45) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{cases} \frac{{x_1}^2 x_2}{{x_1}^4 + {x_2}^2}, & \text{falls } \binom{x_1}{x_2} \neq \binom{0}{0}, \\ 0, & \text{falls } \binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{0}, \end{cases}$$

definiert. Zeige, dass im Punkt $\binom{0}{0}$ alle Richtungsableitungen von $f$ existieren (Berechne sie!). Ist $f$ stetig, bzw. differenzierbar in $\binom{0}{0}$ (Begründungen)?

46) Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x = \binom{x_1}{x_2})$ berechne für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung von $f$ im Punkt 0 in Richtung $v$. Weiters untersuche, ob $f$ stetig, bzw. differenzierbar in 0 ist.

a) $f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 {x_2}^3}{{x_1}^2 + {x_2}^6}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

b) $f(x) := \begin{cases} \frac{{x_1}^5 {x_2}^5}{({x_1}^{10} + {x_2}^2)^3}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

47) a) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass $\operatorname{div} \operatorname{rot} f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt.

b) Gib ein Beispiel einer zweimal partiell differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, für die $\operatorname{div} \operatorname{rot} f(0) \neq 0$ ist.

48) Definiere $f : \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 3, \ -1 \leq x_2 \leq 1 \right\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := 5 + 9x_1 - 3{x_1}^2 - {x_1}^3 + \frac{1}{{x_2}^2 + 1}.$$

Berechne das Maximum von $f$.

49) Finde die kritischen Punkte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2 - {x_2}^2$. Weiters untersuche das Verhalten von $f$ in der Nähe der kritischen Punkte.

50) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch
$$f\binom{x_1}{x_2} := \left(2{x_1}^6 - 15{x_1}^4 + 24{x_1}^2 - 11\right)e^{x_2} + e^{-16{x_2}^2}$$
definiert. Bestimme alle kritischen Punkte und lokalen Extrema von $f$, und untersuche, ob es sich um lokale Minima oder Maxima handelt.

51) Betrachte die Funktion $f : \left\{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x_1 \le 3,\ -1 \le x_2 \le 1\right\} \to \mathbb{R}$, die durch
$$f\binom{x_1}{x_2} := \left(2{x_1}^6 - 15{x_1}^4 + 24{x_1}^2 - 11\right)e^{x_2} + e^{-16{x_2}^2}$$
definiert ist. Bestimme das Maximum (bzw. die Maxima) von $f$.

52) Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne die kritischen Punkte. Weiters bestimme für jeden kritischen Punkt $x$ die zweite Ableitung $d^2 f_{(x)}$, stelle fest, ob $d^2 f_{(x)}$ positiv (oder negativ) definit ist, und untersuche das Verhalten von $f$ in der Nähe von $x$.

a) $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2 + {x_2}^3$.   b) $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2 + {x_2}^4$.

c) $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2 - {x_2}^4$.   d) $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2$.

53) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 x_2 + 5 \\ 7 - 3x_2 \\ 8{x_1}^2 e^{x_2+4} + 5x_3 \end{pmatrix}$ definiert. Gibt es eine Umgebung $U$ von $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, sodass $f$ auf $U$ invertierbar ist? Was weiß man dann über $f^{-1}$?

54) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f\binom{x_1}{x_2} := \begin{pmatrix} e^{x_1}\cos x_2 \\ e^{x_1}\sin x_2 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass $f$ nicht bijektiv ist.

b) Beweise, dass es für alle $x \in \mathbb{R}^2$ eine Umgebung $U$ von $x$ und eine Umgebung $V$ von $f(x)$ gibt, sodass $f : U \to V$ bijektiv ist.

55) Betrachte die Gleichung $\sin y - e^{-x^2} + 1 = 0$.

a) Gibt es eine Umgebung von 0 und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, sodass man $y = f(x)$ schreiben kann?

b) Berechne die Funktion $f$ aus Beispiel a). Finde ein maximales Intervall $I$, auf dem man $f$ als Lösung der Gleichung definieren kann.

c) Zeige, dass es eine von $f$ verschiedene Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ gibt (wobei $f$ und $I$ wie in Beispiel b) sind), die $\sin g(x) - e^{-x^2} + 1 = 0$ erfüllt.

d) Finde unendlich viele verschiedene Funktionen, die wie in Beispiel c) sind.

56) Für die folgenden Gleichungen untersuche, ob es eine Umgebung $U$ von 0 und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ gibt, sodass man $y = f(x)$ schreiben kann. Weiters untersuche, ob $f$ auf $U$ differenzierbar ist, und gib $f'(x)$ (implizit), sowie $f'(0)$ (als Zahlenwert) an.

a) $xy + (\cos x)e^y - e^x = 0$.   b) $xy + (\cos x)(\sin y) + x^2 e^y = 0$.

c) $y^2 - x = 0$.   d) $y^3 - x^2 = 0$.   e) $e^y + x^2 = 0$.

f) $x^2 + e^x \tan y = 0$.   g) $y^2 - x^2 = 0$.   h) $y^3 - x^4 = 0$.

57) Betrachte die Gleichungen
$$y_1y_2 + {y_1}^2x_2e^{x_1-3} + 7x_3e^{y_2-1} + x_1{x_3}^2 - x_1 = 0\ ,$$
$${y_1}^2 - 9e^{y_1-5} + 5x_3y_2 - x_1y_2 - x_1e^{x_2} = 0\ .$$
Beweise, dass es eine Umgebung $U$ von $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt, sodass man lokal die Lösungen der obigen Gleichungen als $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ schreiben kann. Weiters berechne $df_{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

58) Zeige, dass es für die Gleichung
$$2y^5 + 3x^2 + 4x - 2x^3e^{y-3} + 25 = 0$$
eine Umgebung $U$ von 7 und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f(7) = 3$ gibt, sodass man lokal die Lösungen der obigen Gleichung als $y = f(x)$ schreiben kann. Kann man $U$ so wählen, dass $f$ stetig differenzierbar ist? Bestimme $f'(7)$.

59) Man betrachte die Gleichungen
$$x_1 + 7x_2 - 6x_3 + y_1 - 3y_2 + 2y_4 + x_1x_2 + x_1{y_2}^2 + y_3y_4 + 45 = 0\ ,$$
$$4x_1 - 7x_2 - 2x_3 - y_3 + y_4 + 2x_1x_3 + x_3e^{y_2-1} - 49 = 0\ ,$$
$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 14y_1 + 3y_2 - 5y_3 + y_4 - 2{y_4}^3 + x_2{y_1}^2 + 3{x_3}^2{y_3}^3 + 9y_1y_4 - 21 = 0\ ,$$
$$3x_1 - 9x_2 + x_3 + 2y_1 + 10y_2 - 4y_3 - 13y_4 - {x_1}^2x_3 + 2x_1{y_4}^2 + 3{y_2}^2y_3 - 55 = 0\ .$$
Beweise, dass es eine Umgebung $U$ von $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^4$ mit $f\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gibt, sodass man lokal die Lösungen der obigen Gleichungen als $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ schreiben kann. Kann $U$ so gewählt werden, dass $f$ stetig differenzierbar ist? Weiters berechne $df_{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

60) Definiere $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := x^tAx + a^tx + a_0$, wobei $A$ eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix ist, $a \in \mathbb{R}^n$ und $a_0 \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ zeige, dass $dg_{(x)} = 2\Big(x^tA + \frac{1}{2}a^t\Big)$ gilt.

61) Seien $A$ eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix, $a \in \mathbb{R}^n$ und $a_0 \in \mathbb{R}$. Weiters sei $p \in \mathbb{R}^n$ so, dass $p^tAp + a^tp + a_0 = 0$ und $Ap + \frac{1}{2}a \neq 0$ erfüllt sind. Beweise, dass $\mathcal{T} := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : p^tAx + \frac{1}{2}a^tx + \frac{1}{2}a^tp + a_0 = 0\Big\}$ die Tangentialebene an die Hyperfläche 2. Ordnung $M := \big\{x \in \mathbb{R}^n : x^tAx + a^tx + a_0 = 0\big\}$ im Punkt $p$ ist.

62) Berechne das Minimum und das Maximum der Funktion

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$$

auf $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \frac{{x_1}^2}{25} + \frac{{x_2}^2}{9} + \frac{{x_3}^2}{4} = 1 \right\}$.

63) Finde das Minimum und das Maximum von

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := {x_1}^7 + {x_2}^7 + {x_3}^7$$

auf $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 9,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \right\}$.

64) Beweise, dass für $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\ldots$ , $x_n > 0$ das harmonische Mittel kleiner oder gleich dem geometrischen Mittel ist, das heißt, dass

$$\frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}} \leq \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j}$$

gilt.

65) Finde jenen Punkt auf der dreidimensionalen Ebene

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3} + x_4 + x_5 &=& 2\,, \\ 2x_1 \phantom{{}+ x_2} + x_3 - 2x_4 \phantom{{}+x_5} &=& 18\,, \end{array}$$

der vom Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ den kleinstmöglichen Abstand hat, und berechne diesen Abstand.

66) Bestimme das Maximum der Funktion

$$f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2 x_2 - {x_1}^2 - {x_2}^2$$

auf $\left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 9 \right\}$.

67) Der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^6 + {x_2}^6 + {x_3}^6 \leq 192 \right\}$ soll der volumsgrößte Quader eingeschrieben werden. Bestimme die Abmessungen und das Volumen dieses Quaders.

68) Finde das Maximum der Funktion

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := {x_1}^5 + 16{x_2}^5 + {x_3}^5$$

auf $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 30,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \right\}$.

69) Berechne das Maximum von

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := {x_1}^2 {x_2}^7 x_3 {x_4}^6$$

auf $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \frac{{x_1}^2}{288} + \frac{{x_2}^2}{112} + \frac{{x_3}^2}{64} + \frac{{x_4}^2}{24} = 1 \right\}$.

70) Man soll der Menge $\left\{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^6 + {x_2}^6 \le 2\right\}$ ein Rechteck eingeschrieben werden, und zwar so, dass die Fläche möglichst groß wird. Bestimme die Abmessungen und die Fläche dieses Rechtecks.

71) Welcher Punkt der Menge $M := \left\{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^2 = 108x_2\right\}$ hat vom Punkt $\binom{64}{54}$ den kleinstmöglichen Abstand? Wie groß ist dieser Abstand?

72) Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{xt^2}}{t}\,dt\,.$ b) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\,.$ c) $\displaystyle\int_{x^2}^{x^5} \frac{e^t-1}{t}\,dt\,.$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{xt^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)}{t}\,dt\,.$ e) $\displaystyle\int_{x^2}^{e^x} \frac{6e^{x^2t^4}}{t}\,dt\,.$

73) Falls $n \in \mathbb{N}$, definiere $a_n := \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$

a) Für $n \in \mathbb{Z}$ berechne $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx\,.$

b) Verwende Beispiel a) um zu zeigen, dass $\displaystyle\frac{2}{(n+1)\pi} \le |a_n| \le \frac{2}{n\pi}$ gilt.

c) Beweise, dass $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

d) Zeige, dass $\displaystyle\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

74) Unter Verwendung von Beispiel 73) beweise, dass das Integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert, aber $\displaystyle\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$ divergiert.

75) Welchen Wert ergibt $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx\,?$

76) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $b > 0$. Berechne $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^b - x^a}{\log x}$ und $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x^b - x^a}{\log x}$. Leite daraus ab, dass $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx$ existiert.

77) Bestimme $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 - x}{\log x}\,dx\,.$ (Dieses Integral existiert nach Beispiel 76)).

*Anleitung*: Für $y > 0$ definiere $F(y) := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^y - x}{\log x}\,dx\,.$ Bestimme zuerst $F'(y)$, und berechne daraus $F(3)$.

78) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Zeige, dass $A$ genau dann Jordan-messbar ist und $\lambda(A) = 0$ erfüllt, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ endlich viele offene Quader $B_1, B_2, \ldots, B_k$ ($B_j = (a_j, b_j)$ für $j = 1, 2, \ldots, k$) mit $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ und $\sum_{j=1}^{k} \lambda(B_j) < \varepsilon$ gibt.
*Hinweis*: Arbeite mit dem äußeren Jordanmaß $\overline{\lambda}(A)$ und dem inneren Jordanmaß $\underline{\lambda}(A)$.

79) Berechne $\iint_A (3x_1 + 2{x_2}^2)$ für $A := \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \right\}$ auf zwei Arten.

80) Für $A := \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0,\ x_1 - x_2 \geq 0,\ 3x_1 + 4x_2 \leq 21 \right\}$ bestimme $\iint_A 2{x_1}^6 x_2$.

81) Schreibe die folgenden Integrale als iterierte Integrale, bei denen zuerst nach $x$ und dann nach $y$ integriert wird. Weiters skizziere den Bereich $A$, über den das Doppelintegral durch die entsprechenden Integrale berechnet wird.

a) $\displaystyle\int_0^5 \left( \int_0^x f\binom{x}{y}\, dy \right) dx$.

b) $\displaystyle\int_1^2 \left( \int_{x^3}^8 f\binom{x}{y}\, dy \right) dx$.

c) $\displaystyle\iint_A f\binom{x}{y}$, wobei $A := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 4 \right\}$ ist.

82) Finde die Werte der folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\iiint_A {x_1}^2 x_3$, wobei

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \right\}$$

ist.

b) $\displaystyle\iiint_A (x_1 x_2 + 2x_3)$, wobei

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ 6x_1 + 15x_2 + 10x_3 \leq 60 \right\}$$

ist.

83) Sei $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 4761\, {x_1}^2 + 324\, {x_2}^2 + 2116\, {x_3}^2 \leq 171396 \right\}$.

a) Bestimme $\displaystyle\iiint_A 1$.

b) Berechne $\displaystyle\iiint_A ({x_1}^2 + {x_2}^2)$.

84) Betrachte die Menge $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 4,\ 0 \leq x_3 \leq 3 \right\}$. Berechne

$$\iiint_A ({x_1}^2 + {x_2}^2).$$

85) Bestimme das Volumen des Zylinders $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq r^2,\ 0 \leq x_3 \leq h \right\}$, wobei $r > 0$ und $h > 0$, indem man $\iiint\limits_A 1$ berechnet.

86) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Definiere $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a \leq x_1 \leq b,\ {x_2}^2 + {x_3}^2 \leq f(x_1)^2 \right\}$ ($A$ ist der Körper, der entsteht, wenn der Graph von $f$ um die $x$-Achse gedreht wird). Indem man $\iiint\limits_A 1$ berechnet, leite eine (bereits bekannte) Formel für das Volumen von $A$ her.

87) Für $r > 0$ berechne das Volumen der 7-dimensionalen Kugel

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^7 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2 + {x_6}^2 + {x_7}^2 \leq r^2 \right\}.$$

88) Bestimme $\int\limits_A 1$, wobei

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8 : 144{x_1}^2 + 400{x_2}^2 + 225{x_3}^2 + 400{x_4}^2 + \right.$$

$$\left. + 3600{x_5}^2 + 900{x_6}^2 + 400{x_7}^2 + 3600{x_8}^2 \leq 3600 \right\}$$

ist.

89) Für die Menge $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 144{x_1}^2 + 441{x_2}^2 + 784{x_3}^2 + 1764{x_4}^2 \leq 7056 \right\}$ berechne das Integral $\iiiint\limits_A ({x_1}^2 + {x_3}^2)$.

90) Bestimme die folgenden Kurvenintegrale.

a) $\int\limits_c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3+1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$, wobei $c$ das Geradenstück von $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist.

b) $\int\limits_c \begin{pmatrix} {x_2}^2 x_3+5 \\ x_1+2x_3 \\ x_1 {x_3}^3+8 \end{pmatrix}$, wobei $c(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ 2+t^2 \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 3$ ist.

c) $\int\limits_c \begin{pmatrix} x_1-x_2-2 \\ x_1 x_2+7 \end{pmatrix}$, wobei $c$ der einmal in positiver Richtung durchlaufene Kreis um $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Radius 3 ist.

91) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_2}^2 \\ 4{x_1}^2 \end{pmatrix}$. Skizziere die folgenden Kurven $c$ und berechne die entsprechenden Kurvenintegrale $\int_c f$.

a) $c(t) := \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 1$.

b) $c(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

92) Es sei $f$ wie in Beispiel 91). Kann man eine stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\left(dF_{(x)}\right)^t = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ finden? Wenn man so ein $F$ finden kann, gib so ein $F$ an, und wenn man so ein $F$ nicht finden kann, begründe warum es so ein $F$ nicht gibt.

93) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{x_1}{{x_1}^2+{x_2}^2} \\ \frac{x_2}{{x_1}^2+{x_2}^2} \end{pmatrix}$. Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $\left(dF_{(x)}\right)^t = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$? Bestimme $F$, soferne es so ein $F$ gibt.

94) Für die Funktion $f$ aus Beispiel 93) berechne das Kurvenintegral $\int_c f$ für die folgenden Kurven $c$.

a) $c$ ist der einmal in positiver Richtung durchlaufene Kreis um $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit Radius 6.

b) $c(t) := \begin{pmatrix} 3-2\cos t \\ 4\sin t \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ (Skizziere diese Kurve).

c) $c$ ist das einmal in positiver Richtung durchlaufene Dreieck mit den Eckpunkten $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

*Hinweis*: Verwende Beispiel 93).

95) Die *Astroide* erhält man, wenn man einen Kreis mit Radius $\frac{a}{4}$ auf der Innenseite eines Kreises mit Radius $a$ abrollen lässt. Man kann sie (und das kann für dieses Beispiel verwendet werden) durch die Parameterdarstellung $c(t) := \begin{pmatrix} a\cos^3 t \\ a\sin^3 t \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 2\pi$ beschreiben. Berechne die Bogenlänge der Astroide. Weiters bestimme das Kurvenintegral $\displaystyle\int_c \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

96) Was bedeutet das in Beispiel 95) berechnete Kurvenintegral?
*Hinweis*: Wende den Satz von Greene an.

97) Es sei $c$ die einmal in positiver Richtung durchlaufene Ellipse

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x_1-3}{7}\right)^2 + \left(\frac{x_2-4}{3}\right)^2 = 1 \right\}.$$

Berechne $\displaystyle\int_c \begin{pmatrix} {x_1}^2+2x_2-3 \\ 3x_1+x_2+7 \end{pmatrix}$.

98) Betrachte die Halbkugeloberfläche

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 36,\ x_3 \ge 0 \right\}.$$

Berechne die Oberfläche von $A$, sowie das Oberflächenintegral $\displaystyle\iint_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

99) Bestimme die Oberfläche des Paraboloids
$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^2 + {x_2}^2 - x_3 = 0,\ {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 4 \right\}.$$

100) Es sei $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \leq 9,\ x_3 \geq 0 \right\}$, und $\partial A$ sei die Oberfläche von $A$. Bestimme $\displaystyle\iint\limits_{\partial A} \begin{pmatrix} 7x_1 - x_2 + 3x_2x_3 + 5 \\ {x_1}^2 - 5x_2 - 2x_3 - 4 \\ 8x_1 + x_3 + 3{x_2}^2 - 2 \end{pmatrix}$.

101) Für $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 4{x_1}^2 + 9{x_2}^2 + 36{x_3}^2 \leq 36 \right\}$ berechne
$$\iint\limits_{\partial A} \begin{pmatrix} 2x_1 - x_1{x_2}^2 + x_2{x_3}^4 \\ 3{x_1}^2x_2 + x_1{x_3}^2 + {x_2}^3 \\ 5{x_1}^2{x_2}^2 + 4{x_3}^2 - 2x_3 \end{pmatrix},$$
wobei $\partial A$ die Oberfläche von $A$ ist.

102) Bestimme $\displaystyle\iint\limits_{\partial A} \begin{pmatrix} 5x_1 - {x_2}^2x_3 + {x_3}^6 - 6x_2 + 2 \\ {x_1}^3{x_3}^2 + 8x_1{x_3}^5 + 5x_1 + 2x_2 \\ 3{x_1}^2x_2 + 5x_2e^{x_1} + 2x_1 - 3x_3 - 6 \end{pmatrix}$, wobei
$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 36{x_1}^2 + 100{x_2}^2 + 225{x_3}^2 \leq 900,\ x_2 \geq 0 \right\}$$
und $\partial A$ die Oberfläche von $A$ ist.

103) Betrachte die Halbkugeloberfläche $A$ aus Beispiel 98), ihren Rand $\partial A$, und die Funktion $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 \\ x_3 + 5 \end{pmatrix}$. Berechne $\displaystyle\int\limits_{\partial A} f$.

104) Definiere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 7x_1 + 10x_3 \\ 15{x_3}^2 - 7x_2 \\ 2x_1 + 4 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass $f = \operatorname{rot} g$ für $g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5{x_3}^3 \\ {x_1}^2 + 4x_1 - 5{x_3}^2 \\ 7x_1x_2 \end{pmatrix}$ gilt.

b) Bestimme $\displaystyle\iint\limits_{A} f$, wobei $A$ die Halbkugeloberfläche aus Beispiel 98) ist.

105) Es sei die Oberfläche $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 9{x_1}^2 + 16{x_2}^2 + 64{x_3}^2 = 576,\ x_1 \geq 0 \right\}$, und $\partial A$ sei der Rand von $A$. Berechne $\displaystyle\int\limits_{\partial A} \begin{pmatrix} 3{x_1}^5 + 7\sin x_1 + 2 \\ 12{x_2}^2 - 8x_2 - 5 \\ 2e^{{x_3}^2} - 6{x_3}^2 + 3x_3 \end{pmatrix}$.

106) Berechne.

a) $(1+5i)(3-4i)$. b) $\dfrac{39+4i}{7-2i}$. c) $\sqrt{5+12i}$.

d) $e^{2\pi i}$. e) $2e^{\frac{\pi i}{4}}$. f) $\dfrac{39+2i}{5-6i}$.

g) Die Lösung von $(2+5i)z^2-(42+18i)z+(80+55i)=0$.

h) Die Lösung von $z^4=16i$.
*Hinweis*: Rechne in Polarkoordinaten.

107) Bei den folgenden Funktionen gib maximale Teilmengen von $\mathbb{C}$ an, auf denen sie (komplex) differenzierbar sind. Was ist ihre Ableitung?

a) $f(z):=e^z$. b) $f(z):=\dfrac{1}{z}$.

c) $f(z):=\dfrac{1}{(z-(5-2i))^8}$. d) $f(z):=z^2e^{(1+3i)z}\cos(2iz^3-6)$.

e) $f(z):=z^2\sin\dfrac{1}{z}$. f) $f(z):=\dfrac{z}{z^2-1}$.

108) Zeige, dass die Funktion $f(z):=|z|$ für jedes $z\in\mathbb{C}$ nicht (komplex) differenzierbar ist.
*Anleitung*: Verwende die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen.

109) Berechne das Kurvenintegral von $z^2$ entlang des einmal in positiver Richtung durchlaufenen Kreises mit Radius 5 um $3+2i$ mittels direkter Rechnung.

110) Mittels direkter Rechnung berechne das Kurvenintegral der folgenden Funktionen entlang des einmal in positiver Richtung durchlaufenen Kreises mit Radius 2 um 0.

a) $f(z):=z^n$ für $n\in\mathbb{N}_0$.

b) $f(z):=\dfrac{1}{z}$.

c) $f(z):=\dfrac{1}{z^n}$ für $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

111) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$. Weiters gib alle $z\in\mathbb{C}$ an, für die diese Potenzreihe konvergiert.

112) Betrachte die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n$. Bestimme ihren Konvergenzradius und gib alle $z\in\mathbb{C}$ an, für die diese Potenzreihe konvergiert. Mit welcher Funktion stimmt diese Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzgebietes überein?

113) Berechne die Potenzreihenentwicklung der folgenden Funktionen, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

a) $f(z):=e^{z-8}$ um 3. b) $f(z):=\dfrac{1}{z-7}$ um 4.

c) $f(z):=\sin z$ um $\frac{\pi}{2}$. d) $f(z):=e^{z-i}$ um $5+2i$.

114) Berechne.

| | | |
|---|---|---|
| a) $\log(-2)$ . | b) $i^{2i}$ . | c) $2^i$ . |
| d) $(1+i)^{(1+i)}$ . | e) $\log\left(1+i\sqrt{3}\right)$ . | f) $(e^\pi)^i$ . |

115) Löse die folgenden Aufgaben für die Funktion $f(z) := \dfrac{5}{z-4}$ .

a) Bestimme die Laurentreihenentwicklung von $f$ um 7, bei der 0 im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Gib die Laurentreihenentwicklung von $f$ um 7 an, bei der 5 im Konvergenzgebiet liegt, und bestimme das entsprechende Konvergenzgebiet.

116) Für die Funktion $f(z) := \dfrac{3}{z-2+5i}$ löse folgende Aufgaben.

a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von $f$ um $4+2i$, bei der 0 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Bestimme die Laurentreihenentwicklung von $f$ um $4+2i$, bei der $10i$ im Konvergenzgebiet liegt, und gib den entsprechenden Konvergenzbereich an.

117) Die Funktion $f$ sei durch $f(z) := \dfrac{1}{z-1}$ definiert.

a) Bestimme die Laurentreihenentwicklung von $f$ um 0, bei der $\frac{1}{2}$ im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

b) Finde die Laurentreihenentwicklung von $f$ um 0, bei der 2 im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

c) Die Funktion $f$ hat in 0 offensichtlich keine Singularität, trotzdem gilt für die Laurentreihe $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ in Beispiel b), dass $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$. Wieso ist das möglich?

118) Betrachte die Funktion $f(z) := \dfrac{5z^2-37z+129}{z^3-16z^2+77z-98}$ .

a) Berechne die Partialbruchzerlegung von $f$.

b) Finde die Laurentreihenentwicklung von $f$ um 7, bei der 0 im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

c) Bestimme die Laurentreihenentwicklung von $f$ um 7, bei der 5 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

d) Was für eine Singularität besitzt $f$ im Punkt 7?

e) Bestimme $\lim\limits_{z\to 7} f(z)$ .

119) Es sei die Funktion $f$ durch $f(z) := \dfrac{7z-155}{z^2-82z-255}$ definiert.

a) Bestimme alle isolierten Singularitäten von $f$. Sei $z_0$ diejenige isolierte Singularität von $f$ deren Betrag minimal ist.

b) Gib die Laurentreihenentwicklung von $f$ um $z_0$ an, bei der 0 im Konvergenzgebiet liegt, und bestimme den entsprechenden Konvergenzbereich.

c) Finde die Laurentreihenentwicklung von $f$ um $z_0$, bei der 100 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.

d) Welche Art von Singularität von $f$ liegt im Punkt $z_0$ vor?
e) Berechne $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

120) Löse folgende Aufgaben für die Funktion $f(z) := \dfrac{2z^2 + 19z - 1407}{z^3 - 29z^2 + 119z + 1445}$.
a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von $f$ um 17, bei der 0 im Konvergenzgebiet liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
b) Finde die Laurentreihenentwicklung von $f$ um 17, bei der 50 im Konvergenzbereich liegt, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
c) Welche Art von Singularität besitzt die Funktion $f$ im Punkt 17?
d) Welchen Wert ergibt $\lim\limits_{z \to 17} f(z)$?

121) Definiere die Funktion $f$ durch $f(z) := \dfrac{e^z - 1}{z}$.
a) Bestimme die Laurentreihenentwicklung von $f$ um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
b) Welche Art von Singularität besitzt $f$ im Punkt 0?
c) Berechne $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$.

122) Die Funktion $f$ sei durch $f(z) := z^2 \sin \dfrac{1}{z}$ definiert.
a) Berechne die Laurentreihenentwicklung von $f$ um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
b) Was für eine Singularität besitzt $f$ im Punkt 0?
c) Bestimme $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$.

123) Betrachte die Funktion $f$, die durch $f(z) := e^{-\frac{1}{z^2}}$ definiert ist.
a) Finde die Laurentreihenentwicklung von $f$ um 0, und gib das entsprechende Konvergenzgebiet an.
b) Welche Art von Singularität besitzt $f$ im Punkt 0?
c) Berechne $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$.

124) Es sei die Funktion $f$ durch $f(z) := \dfrac{2z - 6 - 24i}{z^2 + 2z - 15}$ definiert. Berechne das Kurvenintegral von $f$ entlang des einmal in positiver Richtung durchlaufenen Kreises mit Radius 4 um den Mittelpunkt $2 + 3i$.

125) Für die Funktion $f$, die durch $f(z) := \dfrac{2z - 5}{z^2 - 11z + 28}$ definiert ist, berechne das Kurvenintegral von $f$ entlang des einmal in positiver Richtung durchlaufenen Kreises mit Radius 3 um $5 + i$.

126) Bestimme $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1}\, dx$.

127) Berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx\,.$

128) Welchen Wert ergibt $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^2}{x^6+1}\,dx\,?$