# Proseminar zu
# Einführung in die Analysis

*Sommersemester 2009*

Roland Steinbauer
Peter Raith

1) Es sei $a_0 := 3$ und $b_0 := 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $a_n := \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ und $b_n := \dfrac{3}{a_n}$.

   a) Beweise, dass $a_n b_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

   b) Zeige, dass $a_n - b_n = \dfrac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{2(a_{n-1} + b_{n-1})}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

   c) Beweise, dass $b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

   d) Welche reelle Zahl $\gamma$ erfüllt $b_n < \gamma < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$?

2) Es seien $a_n, b_n$ wie in Beispiel 1) definiert.

   a) Was bedeutet $b_0 = 1 < b_1 < b_2 < \cdots < a_2 < a_1 < a_0 = 3$? Wie beweist man diese Aussage?
   *Hinweis*: Für den Beweis verwende Beispiel 1) c).

   b) Welche reelle Zahl $\gamma$ erfüllt $b_0 = 1 < b_1 < b_2 < \cdots < \gamma < \cdots < a_2 < a_1 < a_0 = 3$ (Was bedeutet das überhaupt?)?
   *Hinweis*: Verwende Beispiel 1) d).

   c) Beweise, dass $0 < a_n - b_n \leq \dfrac{4}{2^{(2^n)}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

   d) Finde alle reellen Zahlen $\gamma$, die die Beziehung in Beispiel b), bzw. in Beispiel 1) d) erfüllen.

3) Definiere $a_n, b_n$ wie in Beispiel 1).

   a) Bestimme $b_1$ und $a_1$ (als Bruchzahlen).

   b) Finde $b_2$ und $a_2$ (als Bruchzahlen).

   c) Berechne (mit dem Taschenrechner oder dem Computer) $(b_1, a_1)$, $(b_2, a_2)$, $(b_3, a_3)$, $(b_4, a_4)$ und $(b_5, a_5)$ (als Dezimalzahlen mit jeweils mindestens 10 Stellen hinter dem Komma).

   d) Bestimme (mit dem Computer) $(b_n, a_n)$ für ein passendes $n$ so, dass man $\gamma$ aus Beispiel 1) d) (bzw. Beispiel 2) b)) auf 100 Stellen nach dem Komma genau (als Dezimalzahl) angeben kann. Wie groß muss man $n$ wählen?

4) Zwischen dem Zeitpunkt 0 und dem Zeitpunkt 12 sei die Geschwindigkeit eines Flugzeugs zum Zeitpunkt $t$ gleich $t^3 - 15t^2 + 48t + 76$. Zu welchem Zeitpunkt hat dieses Flugzeug die höchste Geschwindigkeit, und wie hoch ist diese Geschwindigkeit?

5) Es seien $A$, $B$ und $C$ Mengen. Zeige, dass $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ gilt.

6) Berechne:
a) $(2+5i)(-2-i)+(3+4i)$.
b) $(-3+2i)^2$.
c) $(1+i)^3$.
d) $i^7$.
e) $\dfrac{7+11i}{5+3i}$.
f) $\dfrac{34-13i}{2-7i}$.
g) $\sqrt{45+28i}$.

7) Finde alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $(5+3i)z^2 + (-13-35i)z + (16+98i) = 0$ erfüllen.

8) Berechne:
a) $|3+4i|$.
b) $|15-8i|$.
c) $\overline{4+17i}$.
d) $e^{\pi i}$.
e) $\left(e^{\frac{2\pi i}{23}}\right)^{23}$.

9) Berechne $g \circ f$ für folgende Funktionen.
a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^2$.
b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + 1$.
c) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$, $g(x) = e^x$.
d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2$, $g(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 2x \\ \sin x \end{pmatrix}$.
e) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ {x_1}^2 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_5 \end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1} - x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + \sin x_2 \end{pmatrix}$.

10) Für die folgenden Funktionen $f$ gib jeweils „vernünftige“ Teilmengen von $\mathbb{R}$ an, auf denen sie definiert sind. Weiters skizziere ihre Graphen.
a) $f(x) := \dfrac{1}{x}$.
b) $f(x) := \sin x$.
c) $f(x) := \sqrt{x}$.
d) $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$.
e) $f(x) := e^x$.
f) $f(x) := \dfrac{1}{x^2+1}$.
g) $f(x) := \dfrac{1}{x^2-25}$.
h) $f(x) := \sqrt{x^4-4}$.
i) $f(x) := \dfrac{12}{x^2-14x+49}$.
j) $f(x) := \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

11) Seien $M_1$ und $M_2$ Mengen und $f : M_1 \to M_2$ sei eine Funktion. Weiters sei $(A_j)_{j \in J}$ eine Familie von Teilmengen von $M_2$. Beweise, dass $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(A_j)$ gilt.

12) Es seien $M_1$ und $M_2$ Mengen, $f : M_1 \to M_2$ sei eine Funktion, und es sei $A \subseteq M_2$.
   a) Zeige, dass $f\big(f^{-1}(A)\big) \subseteq A$ gilt.
   b) Finde ein Beispiel, bei dem $f\big(f^{-1}(A)\big) \neq A$ gilt.

13) Beweise den folgenden *Satz*:
   Es seien $M_1$ und $M_2$ Mengen und $f : M_1 \to M_2$ sei eine Funktion. Dann ist $f$ genau dann surjektiv, wenn $f\big(f^{-1}(A)\big) = A$ für alle Teilmengen $A$ von $M_2$ gilt.

14) Durch vollständige Induktion nach $n$ beweise, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

15) Mittels vollständiger Induktion zeige, dass die folgenden Formeln für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,.$
   b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$
   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\,.$

16) Zeige mit vollständiger Induktion, dass
$$\sum_{j=1}^{n} j^2(j+1) = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + n^2(n+1) = \frac{1}{12}(n+2)(n+1)n(3n+1)$$
   für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

17) Verwende vollständige Induktion um
$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$
   für alle $n \geq 2$ zu beweisen.

18) Beweise die *Bernoulli'sche Ungleichung*:
   Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx\,.$
   *Anleitung*: Verwende vollständige Induktion.

19) Für $n \in \mathbb{N}$ berechne:
   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,.$  b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\,.$  c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 5^k \binom{n}{k}\,.$
   *Hinweis*: Verwende den binomischen Lehrsatz.

20) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\dfrac{2x-9}{x-6} > x - 2$ gilt.

21) Löse die folgenden Ungleichungen (in $\mathbb{R}$).

a) $(x+1)^2 < x^2\,.$ b) $\dfrac{21}{x-4} \le x\,.$ c) $\dfrac{x+2}{x-3} < \dfrac{x+2}{2}\,.$

22) Finde alle reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen.

a) $|x-4| \le 2\,.$ b) $|2x-5| < |x+3|\,.$

23) Löse die folgenden Ungleichungen (in $\mathbb{R}$).

a) $\dfrac{7x-20}{x-4} \le x+1\,.$ b) $\dfrac{8x+23}{x-5} < 3x+5\,.$

24) Betrachte die Menge $A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \le 2\}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$. Ist $A$ nichtleer und nach oben beschränkt (letzteres heißt, dass es in $\mathbb{Q}$ eine obere Schranke von $A$ gibt)? Besitzt $A$ ein Supremum (in $\mathbb{Q}$)?

25) a) Es seien $a \in \mathbb{C}$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$ gilt.

b) Seien $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ und $n, m \in \mathbb{Z}$. Beweise, dass dann $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$ gilt.

26) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die (übliche) Fibonacci-Folge, also $a_1 := 1$, $a_2 := 1$ und $a_n := a_{n-2} + a_{n-1}$ für $n > 2$. Beweise durch Induktion nach $n$, dass

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

27) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch $x_n := \dfrac{3n+1}{n+2}$ definiert.

a) Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\,.$

b) Beweise das Ergebnis aus Beispiel a) mit der Definition des Grenzwerts.

c) Mit Hilfe der Definition des Grenzwerts zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \dfrac{29}{10}\,.$

28) Bestimme den Grenzwert der folgenden Folgen und beweise das Ergebnis mit Hilfe der Definition des Grenzwerts.

a) $a_n := \dfrac{2n^2+5n+6}{n^2+n+4}\,.$ b) $x_n := \dfrac{4n^2+7n-2}{n^3+6n^2+3n+8}\,.$

c) $b_n := \dfrac{3n^3+9n^2+7n+8}{n^3+3n^2+2n+7}\,.$

29) a) Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2+12n+48}{n^2+5n+6}$ und beweise das Ergebnis mit der Definition des Grenzwerts.

b) Zeige mit Hilfe der Definition des Grenzwerts, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^2+18n+29}{n^2+2n+4} \neq \dfrac{801}{100}$ gilt.

30) Von den folgenden Folgen bestimme den Grenzwert und beweise das Ergebnis mit der Definition des Grenzwerts.

a) $a_n := \dfrac{5n^3 + 7n^2 + 12n + 19}{n^3 + 2n^2 + 5n + 3}$.  b) $a_n := \dfrac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 4}$.

c) $x_n := \dfrac{7n^2 + 10n + 5}{3n^2 + 4n + 6}$.

31) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}$. Es gebe ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters gelte $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Beweise, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ gilt.

32) Berechne (bzw. zeige die Divergenz) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n^2}$.
*Hinweis*: Verwende Beispiel 31).

33) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$. Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ gilt.

34) Es sei $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ gilt.

35) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(5 + \dfrac{1}{n}\right)^3 - 5^3\right)$.  b) $\lim\limits_{n\to\infty} 5^n\left(3\left(2 + \dfrac{1}{5^n}\right)^2 - 12\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\left(6\left(4 + \dfrac{1}{2^n}\right)^3 - 384\right)$.

*Hinweis*: Verwende den binomischen Lehrsatz.

36) Berechne die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n\right)$.  b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3n+1} - \sqrt{n}}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 12n + 3} - \sqrt{n^2 - 4n + 7}\right)$.

37) Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch $a_n := \dfrac{n^{10}}{\left(1 + \frac{1}{10}\right)^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

a) Mit Hilfe eines Computers (oder Taschenrechners) berechne $a_5$, $a_{10}$, $a_{20}$, $a_{30}$, $a_{40}$ und $a_{50}$.
*Hinweis*: Verwendet man Mathematica so kann man durch
```
folge[n_]=(n^10)/(1+(1/10))^n
```
die Folge $(a_n)$ definieren. Indem man
```
N[folge[10]]
```
eingibt, erhält man dann den Wert von $a_{10}$.

b) Welche Vermutung über den Grenzwert von $(a_n)$ würde Beispiel a) nahelegen?

c) Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

d) Unter Verwendung eines Computers berechne $a_{2000}$.

*Hinweis*: Wenn man Mathematica verwendet, dann kann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ durch

```
Limit[folge[n],n->Infinity]
```

berechnet werden. Zur Lösung von Beispiel c) ist diese „Methode“ selbstverständlich nicht zulässig, also bitte Beispiel c) vorher lösen.

38) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $a_1 := \sqrt{2}$ und $a_n := \sqrt{2+a_{n-1}}$ für $n > 1$ definiert. Berechne (bzw. zeige die Divergenz) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

39) Bestimme die folgenden Grenzwerte (bzw. zeige die Divergenz).

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\pi n)$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$. c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{17}n\right)$.

40) Die Zahl $e$ wurde durch $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} := \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ definiert.

a) Verwende diese Definition um mit Hilfe eines Computers oder Taschenrechners Näherungswerte für $e$ zu bestimmen.

*Hinweis*: Falls man Mathematica verwendet, kann man $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$ durch

```
Sum[1/n!,{n,0,10}]
```

berechnen. Also bekommt den Zahlenwert auf 20 Stellen indem man

```
N[Sum[1/n!,{n,0,10}],20]
```

eingibt. Übrigens kann man auch

```
Sum[1/n!,{n,0,Infinity}]
```

eingeben um $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ zu berechnen (in diesem Fall ist dann aber das Ergebnis nicht sehr überraschend).

b) Bekanntlich gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Unter Verwendung eines Computers oder Taschenrechners verwende diese Folge um Näherungswerte für $e$ zu bestimmen.

c) Welche der beiden Methoden liefert bessere Näherungswerte, bzw. welches der beiden Verfahren konvergiert schneller?

41) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^n - 4^n}{7^n + 2^n}$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{12^n + 9^n + 5^n}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n + 15 + \frac{\sin n}{8^n}}{n + \frac{n^3}{3^n}}$.

42) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die (übliche) Fibonacci-Folge (siehe Beispiel 26)). Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

43) Berechne (bzw. zeige die Divergenz) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right)$.

44) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.  b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{1000^n}$.  c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+5^n}{n!}$.

45) Berechne die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1000n^4}$.  b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2^n+n}}{\sqrt[n]{n!}}$.  d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3-n^2-7n+15}$.

46) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $a_n := 2+(-1)^n\dfrac{2n^2+5n-1}{2n^2-4n+3}$ definiert. Bestimme alle Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiters berechne $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

47) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Für jedes $r\in\mathbb{R}$ gebe es einen Häufungswert $\tilde{b}\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($+\infty$ und $-\infty$ sind als Häufungswerte zugelassen) mit $\tilde{b}<r$. Zeige, dass $-\infty$ ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

48) Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{4n^2+1}{n^2-3n+4} + \frac{3}{\sqrt[n]{n!+6n}}, & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k\in\mathbb{N}, \\ \frac{n^2}{8^n} + \frac{3n^2-2n-5}{n^2+2}, & \text{falls } n = 6k+1 \text{ für ein } k\in\mathbb{N}, \\ 2\sqrt[n]{n^3+3} + \frac{8n^2+1}{2n^2-3n+4}, & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k\in\mathbb{N}, \\ \frac{3-2n^2}{n^2-2n+6}, & \text{falls } n = 6k+4 \text{ für ein } k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Bestimme die Menge aller Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiters berechne $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

49) Nachdem $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, und daher auch $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ abzählbar ist, gibt es eine bijektive Funktion $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n := f(n)$. Bestimme die Menge aller Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiters berechne $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

50) Für die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimme alle Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiters berechne $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

a) $a_n := (-1)^n\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dfrac{5n+3}{n+1}$.

b) $a_n := \sqrt[n]{17^n+n^2}$.

c) $a_n := \dfrac{4n\cos\frac{\pi n}{3} + \frac{n^2}{4^n} + 1}{n+\sin\frac{\pi n}{7} + \sqrt[n]{2n+5}}$.

51) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei folgendermaßen definiert. Falls $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $k \in \mathbb{N}_0$ mit $2^k \leq n < 2^{k+1}$, und es sei $a_n := \dfrac{1+\frac{1}{k+1}}{n-2^k+1}$.

a) Fixiere ein beliebiges $j \in \mathbb{N}$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere $n_k := 2^k + j - 1$ (offensichtlich ist dann $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Sei jetzt $k > j$ (dann ist $2^k > j$). Berechne $a_{n_k}$.

b) Es seien $j$ und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie in Beispiel a). Berechne $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

c) Bestimme die Menge aller Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Berechne $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

52) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) := 14x + 5$ definiert ist.

a) Zeige mit der Definition der Stetigkeit, dass $f$ stetig in 2 ist.

b) Mit Hilfe der Definition der Stetigkeit beweise, dass $f$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

53) Definiere die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0\,, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ Beweise mit Hilfe der Definition der Stetigkeit, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $f$ nicht stetig in $x$ ist.

54) Die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sei durch

$$f(x) := \begin{cases} -1\,, & \text{falls } x^2 < 2, \\ 1\,, & \text{falls } x^2 > 2, \end{cases}$$

definiert. Mit Hilfe der Definition der Stetigkeit beweise, dass die Funktion $f$ stetig auf $\mathbb{Q}$ ist.

55) Berechne $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ und beweise das Ergebnis mit Hilfe der Definition des Grenzwerts.

56) Bestimme $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^6 - 117\,649}{x-7}$.

57) Berechne die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 12} \dfrac{x^2-8x-48}{x-12}$.

b) $\lim\limits_{x\to 12^+} \dfrac{x^2-8x-48}{|x-12|}$.

c) $\lim\limits_{x\to 12^-} \dfrac{x^2-8x-48}{|x-12|}$.

d) $\lim\limits_{x\to 12} \dfrac{x^2-8x-48}{|x-12|}$.

58) Gib die folgenden Definitionen.

a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$.

b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$.

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \alpha$.

e) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = +\infty$.

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

59) Betrachte die Funktion $f$, die durch $f(x) := \dfrac{1}{x-3}$ definiert ist. Berechne die folgenden Grenzwerte (führe die Beweise mit den entsprechenden Definitionen).

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$. b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$. c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. e) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$.

f) Formuliere analoge Resultate für $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$. Was ändert sich an den Beweisen?

60) Sei $x_0 \in [a,b)$, und seien $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ Funktionen. Es gebe ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in [a,b)$ und es gelte $\lim\limits_{x\to {x_0}^+} g(x) = 0$. Beweise, dass $\lim\limits_{x\to {x_0}^+} f(x)g(x) = 0$ gilt.

61) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 17^+} (x-17)\cos\frac{1}{x-17}$. b) $\lim\limits_{x\to 17^+} \dfrac{(x-17)^4}{x^2+5}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}$. d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\sin\frac{1}{x}$. e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{21}\sin\frac{1}{x}$.

*Hinweis*: Verwende Beispiel 60).

62) Was ergibt $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\dfrac{1}{x}$?

63) Zeige, dass die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind.

a) $f(x) := \sin(x^2)$. b) $f(x) := e^{\sin x}$.

c) $f(x) := \cos\dfrac{3x-5}{x^2+6}$.

*Anleitung*: Die Funktionen sin, cos und $e^x$ können als stetig vorausgesetzt werden.

64) Untersuche, ob die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind.

a) $f(x) := \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$ b) $f(x) := \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

c) $f(x) := \begin{cases} x^8\sin\frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$ d) $f(x) := \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

65) Zeige, dass $\sqrt{5}$ eine reelle Zahl ist.

66) Beweise, dass $\sqrt[7]{31}$ eine reelle Zahl ist.

67) Betrachte die in Beispiel 54) definierte Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Die Einschränkung dieser Funktion auf $[0,2] \cap \mathbb{Q}$ ergibt eine stetige Funktion $g : [0,2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ (man verwendet die Schreibweise: $g = f|_{[0,2]\cap\mathbb{Q}}$, und oft auch die schlampige Schreibweise $g = f$). Berechne $g(0)$ und $g(2)$. Gibt es ein $x \in [0,2] \cap \mathbb{Q}$ mit $g(x) = 0$?

68) Gib drei verschiedene Beispiele von stetigen Funktionen $f : [-3,5] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, die die Bedingungen $f(-3) < 0$ und $f(5) > 0$ erfüllen, aber für die es kein $x \in [-3,5] \cap \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$ gibt.

69) Finde ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : [0,1) \to [0,1)$, die keinen Fixpunkt besitzt.

70) Sei $f : [0,1) \to [0,1)$ eine stetige surjektive Funktion. Beweise, dass $f$ einen Fixpunkt besitzt.

71) Berechne folgende Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{5}{n}\right)^n$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$. c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{3n}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{5^3} + \cdots + \dfrac{1}{5^n}\right)$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \left(\dfrac{1}{7}\right) + \left(\dfrac{1}{7}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{7}\right)^3 + \cdots + (-1)^n\left(\dfrac{1}{7}\right)^n\right)$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \left(\dfrac{5}{12}\right) + \left(\dfrac{5}{12}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{12}\right)^3 + \cdots + \left(\dfrac{5}{12}\right)^n\right)$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{6}\left(1 + \left(\dfrac{5}{12}\right) + \left(\dfrac{5}{12}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{12}\right)^3 + \cdots + \left(\dfrac{5}{12}\right)^n\right)$.

72) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n^2]{e} - 1\right)$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3n]{e} - 1\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\left(e^{\frac{1}{2^{n-1}}} - 1\right)$. d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{7} - 1\right)$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} 8^n\left(5^{\frac{17}{8^n}} - 1\right)$. f) $\lim\limits_{n\to\infty} n^5\left(\sqrt[n^5]{12} - 1\right)$.

73) Zwei SpielerInnen $A$ und $B$ spielen das folgende Spiel mit einem Würfel. Wenn der/die SpielerIn $A$ einen Sechser würfelt, dann hat er/sie gewonnen. Ansonsten ist $B$ mit dem Würfeln an der Reihe. Dabei gewinnt $B$, falls er/sie eine ungerade Augenzahl würfelt. Andernfalls ist wieder $A$ mit dem Würfeln an der Reihe. Dabei beginnt $A$ mit dem Würfeln, und das Spiel wird so lange fortgesetzt, bis einE SpielerIn gewonnen hat. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass $A$ gewinnt.

74) Berechne:

a) $e^{2\log x}$. b) $e^{x \log 15}$. c) $e^{\log x + \log 3}$.

d) $e^{8\log x + \log 19}$. e) $5e^{3\log x^7}$. f) $e^{x^3 \log x}$.

75) Vereinfache die folgenden Ausdrücke.

a) $\log 15 - \log 3$. b) $\log x^6$. c) $\log x + \log 11$.

d) $3\log 2 + \log 3$. e) $\log e^{3x}$. f) $\frac{1}{2}\log 25$.

76) Schreibe die folgenden Funktionen als Linearkombination von $\sin x$ und $\cos x$.

a) $\sin\Big(x - \dfrac{\pi}{4}\Big)$.  b) $\cos\Big(x + \dfrac{\pi}{3}\Big)$.

c) $\sin\Big(x + \dfrac{\pi}{6}\Big)$.  d) $\cos\Big(x - \dfrac{5\pi}{3}\Big)$.

77) Berechne die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 5^n \sin\dfrac{1}{5^n}$.  b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin\dfrac{\pi}{2n}$.  c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \sin\dfrac{5\pi}{6n^3}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^4\Big(\cos\dfrac{1}{n^2} - 1\Big)$.  e) $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n\Big(\cos\dfrac{\pi}{2^n} - 1\Big)$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\cos\dfrac{2\pi}{n} - 1\Big)$.  g) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin\dfrac{2\pi}{n^2}$.

78) Berechne:

a) $\tan\dfrac{\pi}{4}$.  b) $\tan\Big(-\dfrac{\pi}{4}\Big)$.  c) $\tan\dfrac{3\pi}{4}$.

d) $\tan\dfrac{\pi}{6}$.  e) $\tan\dfrac{\pi}{3}$.  f) $\tan 2\pi$.

g) $\tan\dfrac{16\pi}{3}$.  h) $\tan\dfrac{3\pi}{2}$.  i) $\tan\dfrac{33\pi}{4}$.

79) Gib ein Beispiel einer beschränkten, stetigen Funktion $f : [0,1) \to \mathbb{R}$, die weder ein Minimum noch ein Maximum besitzt.

80) Definiere $C\big([0,1]\big)$ als die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Für $f \in C\big([0,1]\big)$ definiere $\|f\|_\infty$ durch $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

a) Sei $f \in C\big([0,1]\big)$. Zeige, dass es ein $x \in [0,1]$ mit $|f(x)| = \|f\|_\infty$ gibt.

b) Begründe, dass für verschiedene Funktionen im Allgemeinen das in Beispiel a) gefundene $x$ verschieden ist. Genauer gesagt, gib Beispiele für $f, g \in C\big([0,1]\big)$ mit $\{x \in [0,1] : |f(x)| = \|f\|_\infty\} \cap \{x \in [0,1] : |g(x)| = \|g\|_\infty\} = \emptyset$.

81) Es seien $C\big([0,1]\big)$ und $\|f\|_\infty$ wie in Beispiel 80) definiert. Beweise, dass die folgenden Eigenschaften gelten.

a) $\|f\|_\infty \geq 0$ für alle $f \in C\big([0,1]\big)$.

b) $\|f\|_\infty = 0$ gilt genau dann, wenn $f = 0$.

c) $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle $f \in C\big([0,1]\big)$.

d) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ für alle $f, g \in C\big([0,1]\big)$.

*Bemerkung*: Auf Grund der obigen Eigenschaften nennt man $\|.\|_\infty$ eine Norm auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$.

82) Welche der folgenden Funktionen sind gleichmäßig stetig. Gib dabei auch jeweils exakte Beweise (für die gleichmäßige Stetigkeit, bzw. dafür, dass die Funktion nicht gleichmäßig stetig ist).

a) $f : [3,7] \to \mathbb{R},\ f(x) := x^{1000}$.  b) $f : (-6,3) \to \mathbb{R},\ f(x) := 5^x$.

c) $f : (0,4] \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{x^3}{x+1}$.  d) $f : (1,6] \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

e) $f : [-2, 8) \to \mathbb{R},\ f(x) := x^7 - x^3 + 5x^2 + 2\,.$

83) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ berechne $f'(3)$ mit Hilfe der Definition der Ableitung.

84) Beweise (ohne $e^x$ und log zu verwenden):

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x^n)' = nx^{n-1}\,.$
*Anleitung*: Verwende die Produktregel und Induktion.

b) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $(x^n)' = nx^{n-1}\,.$
*Anleitung*: Quotientenregel.

85) Zeige (ohne $e^x$ und log zu verwenden):

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in (0, +\infty)$ gilt $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}\,.$
*Anleitung*: Inversenregel.

b) Für alle $q \in \mathbb{Q}$ und alle $x \in (0, +\infty)$ gilt $(x^q)' = qx^{q-1}\,.$
*Anleitung*: Kettenregel.

86) Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) := x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 8\,.$

b) $f(x) := \dfrac{1}{x^3 + 2}\,.$ c) $f(x) := 3\log x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{17}{x^2} - \dfrac{2}{x^6}\,.$

d) $f(x) := \sin(3x) + \tan^2 x - 3e^{2x}\,.$

e) $f(x) := \big(1 + \big(2 + (3 + (4 + x^6)^2)^3\big)^4\big)^5\,.$

87) Für die folgenden Funktionen bestimme die Ableitungen.

a) $f(x) := 2^x\,.$ b) $f(x) := x^{x^7+3x}\,.$ c) $f(x) := x^x\,.$

d) $f(x) := \sin\Big(\log\Big(\dfrac{x^2 + 14}{(x-3)^5}\Big)\Big) + 6^{5x}\,.$

e) $f(x) := (\log x)^{-7x}\,.$ f) $f(x) := (x + x^4)^x\,.$

g) $f(x) := x^{x^2 \cos(4x)}\,.$ h) $f(x) := \Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big)^x\,.$

88) Bei den folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestimme $f'(x)$ für alle $x$, in denen $f$ differenzierbar ist. Weiters skizziere den Graphen von $f$.

a) $f(x) := \begin{cases} 4x^2 - 24x + 43\,, & \text{falls } x \geq 3, \\ 7\,, & \text{falls } x < 3. \end{cases}$

b) $f(x) := \begin{cases} x^2 + 4x + 8\,, & \text{falls } x \geq -3, \\ 5\,, & \text{falls } x < -3. \end{cases}$

89) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ definiert. Für welche $x$ ist $f$ differenzierbar (Beweise!)? Berechne $f'(x)$ für alle $x$, in denen $f$ differenzierbar ist.

90) Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Bestimme $f'(x)$ für alle $x$, in denen $f$ differenzierbar ist, und bestimme $f''(x)$ für alle $x$, in denen $f$ 2-mal differenzierbar ist. Weiters untersuche die Stetigkeit von $f'$ und $f''$.

91) EinE Bauer/Bäurin möchte auf seinem/ihrem (ebenen) Grundstück eine Viehweide einrichten und mit einem Zaun umgeben. Diese Viehweide soll rechteckig sein. Es stehen 260 m Zaun zur Verfügung. Welche Abmessungen soll diese Viehweide haben, wenn die Tiere möglichst viel Weidefläche haben sollen (und wie groß ist dann die Weidefläche)?

92) Der Ellipse $\dfrac{{x_1}^2}{18} + \dfrac{{x_2}^2}{2} \leq 1$ soll das größte achsenparallele Rechteck eingeschrieben werden. Welche Abmessungen muss dieses Rechteck haben, und wie groß ist dann die Fläche?

93) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Für welche reelle Zahl $x$ nimmt $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (x - a_j)^2$ den kleinstmöglichen Wert an?

94) Sei $a \in \mathbb{R}$, und $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion, die die Eigenschaft $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ erfüllt. Beweise, dass die Funktion $f$ ein Minimum $m$ besitzt, und dass $m \in \{x \in (a, +\infty) : f'(x) = 0\}$ gilt.

95) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Weiters sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $(a, b)$ differenzierbar ist und $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ erfüllt. Zeige, dass die Funktion $f$ ein Minimum $m$ besitzt, und dass $m \in \{a\} \cup \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$ gilt.

96) Besitzen die folgenden Funktionen Minima (Begründungen angeben!)? Falls sie Minima besitzen, bestimme diese.

a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := e^{x-1} + \dfrac{1}{x}\,.$

b) $f : [2, 7) \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{9}{7 - x} - 2x^2 + 15x - 19\,.$

c) $f : [3, 8) \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{1}{8 - x} - x^2 + 11x + 3\,.$

*Hinweis*: Verwende die Beispiele 94) und 95).

97) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} 60000\, x^4 \sin \frac{1}{x} - e^x + x + 2\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ definiert. Zeige, dass $f$ in 0 ein (striktes) lokales Maximum besitzt.

98) Es sei $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$. Bestimme die Abmessungen (und die Fläche) des flächengrößten Rechtecks, das eine Diagonale der Länge $d$ besitzt.

99) Für die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ finde einen konkreten Wert, der den Mittelwertsatz erfüllt (also finde $\xi \in (0, 2)$ mit $f(2) - f(0) = f'(\xi)(2 - 0)$.

100) Unter Verwendung des Mittelwertsatzes beweise den folgenden *Satz* (einfache Version der *Regel von de l'Hospital*):
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiters seien $f$ und $g$ differenzierbar auf $(a, b)$. Es gelten $f(a) = g(a) = 0$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b]$. Ferner existieren die Grenzwerte $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ und $\lim_{x\to a^+} g'(x)$ und es gelte $\lim_{x\to a^+} g'(x) \neq 0$. Dann existiert $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a^+} f'(x)}{\lim_{x\to a^+} g'(x)}$.

101) Berechne $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 + 2x - 15}{e^{x-3} + x - 4}$.
*Anleitung*: Verwende das Beispiel 100).

102) Bekanntlich gilt $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x > 0$, und daher ist der Tangens streng monoton wachsend. Warum ist dann $\tan \frac{\pi}{4} > \tan \frac{3\pi}{4}$, obwohl $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ gilt?

103) Finde die Monotonieintervalle, die lokalen Extrema und Wendepunkte der folgenden Funktionen und skizziere ihre Graphen.
a) $\displaystyle\frac{1}{x^2 + 1}$.  b) $\displaystyle\frac{3x + 29}{21 - 4x - x^2}$.  c) $e^{-x^2}$.

104) Gib Bereiche an, in denen die Funktionen aus Beispiel 103) konvex, bzw. konkav sind.

105) Betrachte die Funktion $\sin x$ (als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
a) Berechne $f'\left(\frac{20\pi}{3}\right)$.
b) Was sagt wegen Beispiel a) der Satz über die inverse Funktion aus?
c) Finde ein maximales Intervall $I$, das $\frac{20\pi}{3}$ enthält, sodass $f|_I$ invertierbar ist. Wie sieht $f(I)$ aus?
d) Bestimme die Umkehrfunktion in Beispiel c).

106) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} -5x - 8\,x^2 \sin \frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ definiert.
Beweise, dass für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Funktion $f$ in einem offenen Intervall, das $\frac{1}{2\pi n}$ enthält, invertierbar ist.

107) Betrachte wieder die Funktion $f$ aus Beispiel 106).
a) Berechne $f'(0)$.
b) Zeige, dass es kein offenes Intervall $I$ mit $0 \in I$ gibt, sodass $f|_I$ injektiv ist.
c) Warum kann man hier den Satz über die inverse Funktion nicht anwenden?

108) Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^3$. Zeige, dass $f'(0) = 0$ gilt, aber $f$ trotzdem in einem offenen Intervall, das 0 enthält, invertierbar ist.

109) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $e^{-2x} + 7 \sin x - 4x$ definiert. Beweise, dass es ein offenes Intervall $I$ mit $0 \in I$ gibt, sodass $f$ auf $I$ invertierbar ist.

110) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{1}{x^4+1}$ .
- a) Bestimme die Maxima und Minima von $f$.
- b) Untersuche Monotonieintervalle, Wendepunkte und Intervalle, auf denen $f$ konvex, bzw. konkav ist. Weiters skizziere den Graphen von $f$.
- c) Ist $f$ gleichmäßig stetig (Beweis!)?

111) Differenziere die folgenden Funktionen.
- a) $\log \arcsin x$ .
- b) $f(x) := x^{\arctan x}$ .
- c) $\sqrt[3]{\arccos(xe^x)}$ .

112) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \arctan x$ definiert.
- a) Untersuche Monotonieintervalle, lokale Extrema, Wendepunkte und Intervalle, auf denen $f$ konvex, bzw. konkav ist. Weiters skizziere den Graphen von $f$.
- b) Ist $f$ gleichmäßig stetig (Beweis!)?

113) Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen.
- a) $f(x) := \sqrt[5]{\cosh x}$ .
- b) $f(x) := \arctan\bigl(\tanh x\bigr)$ .
- c) $f(x) := \log\bigl(\operatorname{arcsinh}(e^x)\bigr)$ .
- d) $f(x) := \sin\bigl(\operatorname{arctanh} x\bigr)$ .
- e) $f(x) := \operatorname{arctanh}\Bigl(\dfrac{1}{\cosh x}\Bigr)$ .
- f) $f(x) := \tanh\bigl(\sin\bigl(\operatorname{arcsinh} x\bigr)\bigr)$ .

114)
- a) Beweise, dass $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.
- b) Zeige, dass $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt.

115) Bei einem radioaktiven Stoff sei die Abnahme zum Zeitpunkt $t$ das dreifache der vorhandenen Stoffmenge. Bezeichnet man mit $x(t)$ die zum Zeitpunkt $t$ vorhandene Stoffmenge, so gilt also $\dot{x}(t) = -3x(t)$ . Zum Zeitpunkt 0 seien 24 Einheiten (eine „Einheit“ ist eine sehr sehr große Anzahl von Atomen dieses Stoffes) vorhanden.
- a) Bestimme $x(t)$ (explizit).
- b) Berechne jenen Zeitpunkt $T$, zu dem genau die Hälfte der ursprünglichen Stoffmenge (Stoffmenge zum Zeitpunkt 0) vorhanden ist.
  *Bemerkung*: Man nennt $T$ die Halbwertszeit dieses Stoffes.

116) Betrachte einen radioaktiven Stoff. Es sei $x(t)$ die zum Zeitpunkt $t$ vorhandene Stoffmenge. Unser Stoff erfülle die Zerfallsgleichung $\dot{x}(t) = -kx(t)$ , wobei $k > 0$ eine reelle Zahl ist. Die zum Zeitpunkt 0 vorhandene Stoffmenge sei $x_0$, wobei $x_0 > 0$. Weiters sei $T$ die Halbwertszeit dieses Stoffes, also $T$ ist so gewählt, dass $x(T) = \dfrac{x_0}{2}$ gilt (wir betrachten $k$ und $x_0$ als bekannt, $T$ als vorläufig noch unbekannt).
- a) Berechne $x(t)$.
- b) Bestimme $T$.
- c) Hängt $T$ von $x_0$ ab?
- d) Zeige, dass $x(t+T) = \dfrac{x(t)}{2}$ für alle $t$ gilt.

117) Die allgemeine Situation sei wie in Beispiel 116), jedoch betrachten wir jetzt $x_0$ und $T$ als bekannt, $k$ hingegen als vorläufig unbekannt.
   a) Bestimme $k$.
      *Hinweis*: Verwende Beispiel 116).
   b) Lässt sich in der Praxis eher $k$ oder $T$ durch direkte Messungen bestimmen?

118) Bei einer physikalischen Schwingung (mit Reibung) eines Körpers der Masse 1 betrage die Reibungskraft das 14-fache der Geschwindigkeit des Körpers, und die „zurückziehende Kraft" das 53-fache des Abstands des Körpers von der Ruhelage. Bezeichnet man mit $x(t)$ den Abstand des Körpers von der Ruhelage, so gilt daher
$$\ddot{x}(t) = -14\dot{x}(t) - 53x(t)\,.$$
Bestimme $x(t)$.

119) Löse die folgenden Differenzialgleichungen.
   a) $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) = 0\,.$ b) $\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) - 21x(t) = 0\,.$
   c) $\ddot{x}(t) - 11\dot{x}(t) + 28x(t) = 0\,.$ d) $\dot{x}(t) - 6x(t) = 0\,.$

120) Bestimme die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.
   a) $\ddot{x}(t) - 9x(t) = 0\,.$ b) $\ddot{x}(t) + 49x(t) = 0\,.$ c) $\ddot{x}(t) = 0\,.$
   d) $\dot{x}(t) + 23x(t) = 0\,,\ x(0) = 42\,.$

121) Finde die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.
   a) $\ddot{x}(t) + 11\dot{x}(t) + 24x(t) = 0\,.$
   b) $\ddot{x}(t) - 6\dot{x}(t) + 34x(t) = 0\,,\ x(0) = 6\,,\ \dot{x}(0) = 3\,.$
   c) $\ddot{x}(t) - 16\dot{x}(t) + 48x(t) = 0\,.$
   d) $\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 25x(t) = 0\,,\ x(0) = 2\,,\ \dot{x}(0) = -3\,.$

122) Berechne die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.
   a) $\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) + 40x(t) = 0\,.$ b) $\ddot{x}(t) - 12\dot{x}(t) + 36x(t) = 0\,.$
   c) $\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) - 85x(t) = 0\,,\ x(0) = 9\,,\ \dot{x}(0) = 1\,.$

123) Bestimme die Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen.
   a) $(1+t)\dot{x}(t) = 2x(t)\,,\ x(0) = 7\,.$ b) $(1+t)\dot{x}(t) = -5x(t)\,.$
   c) $(1+t)\dot{x}(t) = \dfrac{1}{3}x(t)\,.$ d) $(1+t)\dot{x}(t) = -\dfrac{7}{4}x(t)\,,\ x(0) = -2\,.$

124) Welche zweimal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen folgende Bedingungen?
   a) $f''(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   b) $f''(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0\,,\ f'(0) = 1\,.$
   c) $f''(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1\,,\ f'(0) = 0\,.$

125) Finde alle zweimal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen.
   a) $f''(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   b) $f''(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0\,,\ f'(0) = 1\,.$
   c) $f''(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1\,,\ f'(0) = 0\,.$

126) Berechne die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^x - 1}{\log(1+x)}$.

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{e^{x-\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{e^{x-3} - 1}{\log \frac{x}{3}}$.

127) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^7}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$, wobei $a \in \mathbb{R}$.