Proseminar zu
Angewandte Mathematik für
Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Wintersemester 2013/2014

PETER RAITH

1) In einer Stadt soll ein U-Bahn-Netz gebaut (bzw. erweitert) werden. Diskutiere mögliche dazupassende Fragestellungen, Modelle, Lösungsansätze, ...
Bemerkung: Es geht nicht um eine Lösung des Problems (das wäre auch zu umfangreich), sondern um passende Ansätze zu diskutieren.

2) Es seien A und B zwei reelle $n \times n$-Matrizen, und $v \in \mathbb{R}^n$. Auf einem Computer soll ABv ausgerechnet werden (die Eintragungen von A, B und v seien bereits auf dem Computer abgespeichert). Da die notwendigen Additionen in Vergleich zu den Multiplikationen einen extrem geringen Zeitaufwand benötigen, vernachlässigen wir sie, das heißt wir tun so, als ob die für eine Addition notwendige Zeit 0 wäre. In den folgenden Fällen bestimme den (ungefähren) Zeitaufwand um $(AB)v$, sowie um $A(Bv)$ zu berechnen (suche jeweils dem Ergebnis angepasste Einheiten, um das Ergebnis auszudrücken).
   a) Zunächst sei $n = 10\,000$ (also $n = 10^4$) und unser Computer schaffe 10^9 Multiplikationen (also 1 Milliarde) pro Sekunde.
   b) Jetzt sei $n = 10^6$ (also 1 Million) und die Computerkapazität betrage 10^{14} Multiplikationen pro Sekunde.
   c) Schließlich sei $n = 10^6$ und der Computer schaffe 10^{10} Multiplikationen pro Sekunde.

3) Betrachte einen Computer, der Zahlen (Dezimalzahlen) auf 4 Stellen (Gleitkommadarstellung) darstellen kann. Beim Durchführen einer Rechenoperation rechnet der Computer zunächst intern das genaue Ergebnis aus, und rundet dieses (nach den üblichen Regeln) auf 4 Stellen (dieses vierstellige Ergebnis wird dann abgespeichert). Nun sei $a = 24.73$, $b = 4.678$ und $c = 7.131$. Welche Ergebnisse liefert unser Computer für $(ab)c$ und $a(bc)$?

4) Nehmen wir wieder unseren Computer aus Beispiel 3). Es sei $a = 36.72$, $b = 8.528$ und $c = 4.238$. Bestimme die Werte, die der Computer für $(a+b)c$ und $ac+bc$ liefert (dabei ist wie üblich $ac+bc$ als $(ac)+(bc)$ zu lesen).

5) Noch einmal betrachten wir den Computer aus Beispiel 3). Es sei $a = 81.57$ und $b = 6.874 \times 10^{-6}$.
   a) Berechne den Wert, den der Computer für $a + b$ erhält.
   b) Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung $a + x = a$?
   c) Finde eine Zahl c (im Computer darstellbar), sodass der Computer ein Ergebnis $c + b$ liefert, das ungleich c ist.
   d) Suche eine (im Computer darstellbare) Zahl d, sodass der Computer für $a+d$ denselben Wert wie d erhält.

6) Die auf $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ definierte Funktion $f(x) := x\left(\left(3 + \frac{5}{x}\right)^2 - 9\right)$ werde ausgewertet, indem man zunächst $w_1 := \frac{5}{x}$, dann $w_2 := 3 + w_1$, dann $w_3 := {w_2}^2$, dann $w_4 := w_3 - 9$, und schließlich $f(x) = xw_4$ berechnet. Wir benützen einen Computer, der Zahlen auf 5 Stellen (Gleitkommadarstellung) darstellen kann, und der analog wie in Beispiel 3) beschrieben rechnet.
   a) Welche Werte liefert unser Computer für $f(100)$, $f(10\,000)$ und $f(1\,000\,000)$? Vergleiche diese Werte mit den tatsächlichen Funktionswerten.
   b) Finde den Wert für $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, den wir erhalten, wenn wir mit diesem Computer versuchen diesen Grenzwert auszurechnen.
   c) Berechne $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

7) Betrachte die auf $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ definierte Funktion $f(x) := \sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}}$.
   a) Kann die direkte Auswertung dieser Ausdrücke für große x zu „Auslöschung“ führen?
   b) Finde einen zu $f(x)$ äquivalenten Ausdruck, der für große x nicht zu „Auslöschung“ führt.
   c) Ein Computer kann Zahlen auf 8 Stellen (Gleitkommadarstellung) darstellen, und rechnet analog wie in Beispiel 3) beschrieben (auch die Quadratwurzel wird zunächst auf mehr Stellen genau ausgerechnet, und dann gerundet). Bestimme die Werte, die dieser Computer für $f(1000)$ liefert, und zwar sowohl mit der direkten Methode (wie in Beispiel a)), als auch mit der in Beispiel b) gefundenen Methode. Weiters vergleiche diese Ergebnisse mit dem tatsächlichen Wert von $f(1000)$.

8) a) Mit einem Computer, der Zahlen auf 3 Stellen (Gleitkommadarstellung) darstellen kann, und der analog wie in Beispiel 3) beschrieben rechnet, wird $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ berechnet. Finde den Wert, den man dabei erhält.
   b) Welchen exakten Wert erhält man für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$? Vergleiche den nummerischen Wert dieser Lösung mit dem Ergebnis von Beispiel a).
   Hinweis: Wenn man das Ergebnis dieser Reihe nicht weiß, dann kann man es mit einem Computer, etwa unter Verwendung von Mathematica, bestimmen.

9) Löse das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 7 \, , \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 &= 21 \, , \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3 \, , \\ 3x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 4x_4 &= -8 \, . \end{aligned}$$

10) a) Mit Hilfe des Gauß-Verfahrens löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 &= 3 \, , \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 &= 7 \, , \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 4 \, , \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 5 \, , \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 7 \, . \end{aligned}$$

b) Zu der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ bestimme eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, sodass $A = LR$ gilt.

c) Berechne $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

11) Uns steht wieder der in Beispiel 3) beschriebene Computer zur Verfügung. Unter „Zuhilfenahme“ dieses Computers löse das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 6.541 \times 10^{-3}\, x_1 + 4.147 \times 10^{-3}\, x_2 + 0.6871\, x_3 &= 15.27 \, , \\ 31.28\, x_1 + 19.77\, x_2 + 7.295\, x_3 &= 1385 \, , \\ 8.257\, x_1 + 4.086\, x_2 + 4.439\, x_3 &= 378.3 \, . \end{aligned}$$

12) a) Bestimme die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 - x_5 - 2x_6 &= 4 \, , \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 - 2x_5 - 3x_6 &= 5 \, , \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 - 2x_6 &= 5 \, , \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 - 4x_5 + x_6 &= 9 \, , \\ 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 6x_4 - 7x_5 - 2x_6 &= 4 \, , \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 - 5x_6 &= 7 \, . \end{aligned}$$

b) Berechne $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 5 & 8 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 6 & -7 & -2 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

13) a) Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 6\ , \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 6\ , \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 7\ , \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 &= 2\ , \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 3\ . \end{aligned}$$

b) Berechne $\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & -7 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -6 & -3 & 3 \\ 4 & -7 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

14) Es sei $A = (a_{j,k})_{j,k=1}^n$ eine diagonaldominante $n \times n$-Matrix (d.h.: $|a_{j,j}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{j,k}|$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Beweise, dass dann auch für $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die im Gauß-Verfahren auftretenden Matrizen A_r diagonaldominant sind.

15) Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 57.93 & 8.427 & 12.84 & 5.904 \\ 2.813 & 31.75 & 18.62 & 2.356 \\ 9.726 & 1.891 & 28.27 & 7.082 \\ 2.836 & 8.241 & 1.993 & 14.83 \end{pmatrix}.$$

Für die Rechnungen in diesem Beispiel „verwende“ wieder den in Beispiel 3) beschriebenen Computer.

a) Untersuche, ob A diagonaldominant ist.

b) Ist es sinnvoll für diese Matrix A das Gauß-Verfahren ohne Pivotsuche zu verwenden?

c) Berechne $\det A$.

d) Finde die Lösung des Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 3581 \\ 2094 \\ 2659 \\ 793.5 \end{pmatrix}$.

e) Mit einem Computer (etwa unter Verwendung von Mathematica) berechne genauere nummerische Werte für die Beispiele c) und d) und vergleiche diese mit den bei diesen Beispielen bestimmten Ergebnissen.

16) Unter „Zuhilfenahme“ des in Beispiel 3) beschriebenen Computers bestimme die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 17.83\,x_1 + 10.64\,x_2 + 12.39\,x_3 &= 1729\ , \\ 2.318\,x_1 + 1.392\,x_2 + 9.476\,x_3 &= 883.6\ , \\ 8.631\,x_1 + 4.978\,x_2 + 15.79\,x_3 &= 1655\ . \end{aligned}$$

17) Untersuche die folgenden Fragen für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 31\ , \\ 3x_1 - x_2 &= 39\ , \\ 3x_1 + 5x_2 &= -12\ , \\ 5x_1 + 4x_2 &= 1\ . \end{aligned}$$

a) Besitzt dieses Gleichungssystem eine (exakte) Lösung?

b) Was versteht man unter einer „besten Lösung“ eines Gleichungssystems?
c) Finde die „beste Lösung“ dieses Gleichungssystems.

18) Suche die „beste Lösung“ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 12 , \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 , \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 &= 24 , \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 25 . \end{aligned}$$

19) Für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 12 , \\ 2x_1 + x_2 &= 15 , \\ x_1 - x_2 &= 13 , \\ 2x_1 - x_2 &= 16 , \\ 4x_1 - x_2 &= 20 , \\ 3x_1 - 2x_2 &= 1 , \end{aligned}$$

bestimme die „beste Lösung“.

20) Von einer Funktion sind die Funktionswerte y_j an den Stellen x_j für $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bekannt, wobei $n \geq 3$ (das bedeuted: $f(x_j) = y_j$ für $j = 1, 2, \ldots, n$). Wir wollen diese Funktion durch ein Polynom vom Grad ≤ 2 approximieren. Dabei suchen wir ein Polynom $p(x)$ vom Grad ≤ 2, sodass $\sum_{j=1}^{n} \Big(p(x_j) - y_j\Big)^2$ so klein wie möglich ist.

a) Beschreibe, wie man dabei vorgeht.
b) In der folgenden Tabelle findet man die Daten für eine Funktion, die an den Stellen -1, 0, 1, 3 und 7 bekannt ist.

j	1	2	3	4	5
x_j	-1	0	1	3	7
y_j	-33	15	37	-72	28

Finde in diesem konkreten Beispiel das oben beschriebene Polynom $p(x)$.

21) Berechne die „beste Lösung“ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 &= 43 , \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 9 , \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 25 , \\ 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 &= 63 , \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 32 , \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= -23 , \\ 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 &= 65 . \end{aligned}$$

22) Finde die „beste Lösung“ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 32 , \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 28 , \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 , \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 . \end{aligned}$$

23) Bestimme die „beste Lösung“ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 22\ , \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 16\ , \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 67\ , \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 61\ . \end{aligned}$$

24) Für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

berechne die Pseudoinverse (Moore-Penrose-Inverse) A^+.

25) a) Bestimme die Pseudoinverse (Moore-Penrose-Inverse) A^+ von

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Suche die „beste Lösung“ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 + x_3 &= 15\ , \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 14\ , \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 8\ , \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 10\ , \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 7\ . \end{aligned}$$

26) Berechne die Pseudoinversen (Moore-Penrose-Inversen) A^+ der folgenden Matrizen A.

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

c) $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

d) $A := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

27) Kann man mit Mathematica die Pseudoinverse (Moore-Penrose-Inverse) einer Matrix berechnen? Wenn ja, wie lautet der entsprechende Befehl? Wie kann man mit Mathematica die „beste Lösung“ eines überbestimmten linearen Gleichungssystems finden? Selbst wenn man mit Mathematica die Pseudoinverse berechnen kann, beantworte die letzte Frage (auch) ohne die Pseudoinverse zu verwenden.

28) Analog wie in Beispiel 20) kann man Funktionen auch durch Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 approximieren. Zur Lösung dieses Beispiels verwende einen Computer (etwa mit Mathematica). Betrachte die Funktion $x \mapsto \sin x$.

a) Bestimme ein Polynom $p(x)$ vom Grad ≤ 3, das an den Stellen 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ und 2π „am Besten“ mit $\sin x$ übereinstimmt. Dabei gib die Koeffizienten auf 20 Stellen genau an. *Hinweis*: Um unnötig lange Rechenzeiten zu vermeiden, verwende bei den Zwischenergebnissen auf 1000 Stellen (oder 100 Stellen) gerundete Werte an Stelle der exakten Werte.

b) Plotte das Polynom $p(x)$ aus Beispiel a) zwischen 0 und 2π.

c) Vergleiche den Plot des Polynoms $p(x)$ aus Beispiel a) mit einem Plot von $\sin x$.

d) Wie kann man $\sin x$ mittels der Potenzreihenentwicklung durch ein Polynom vom Grad ≤ 7 approximieren? Vergleiche den Plot dieses Polynoms mit dem Plot des Polynoms $p(x)$ aus Beispiel a).

29) Betrachte den Raum L^2 $\big(L^2\big([0,1],\mathbb{C}\big)\big)$. Für $f,g \in L^2$ definiere $\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,.$

a) Zeige, dass damit ein inneres Produkt definiert ist.

b) Leite daraus ab, dass durch $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f,f\rangle}$ eine Norm auf L^2 gegeben ist.

30) a) Beweise durch direkte Rechnung (ohne Verwendung komplexer Zahlen), dass

$$\mathcal{B} := \{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos(2\pi nx) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sqrt{2}\sin(2\pi nx) : n \in \mathbb{N}\}$$

ein Orthonormalsystem auf L^2 bildet (also $\|f\|_2 = 1$ für alle $f \in \mathcal{B}$ und $\langle f,g\rangle = 0$ für alle $f \neq g \in \mathcal{B}$).

b) Betrachte den von

$$\mathcal{B}_n := \{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos(2\pi kx) : k = 1,2,\ldots,n\} \cup \{\sqrt{2}\sin(2\pi kx) : k = 1,2,\ldots,n\}$$

erzeugten Teilraum V_n von L^2. Beschreibe die Orthogonalprojektion $\mathcal{F}_n$ auf V_n durch Angabe einer Formel, die angibt wie man für beliebige $f \in L^2$ die Orthogonalprojektion $\mathcal{F}_n f$ bestimmen kann. Gib so eine Formel an, die möglichst einfach gebaut ist, und insbesondere direkt mit Integralen und nicht mit inneren Produkten aufgebaut ist.

31) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in L^2, $f \in L^2$ und es gelte $f_n \to f$ in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$). Weiters sei $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kx)$ die Fourierreihe von f und für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_0(n) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(n)\cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(n)\sin(2\pi kx)$ die Fourierreihe von f_n. Beweise, dass $\lim_{n\to\infty} a_k(n) = a_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\lim_{n\to\infty} b_k(n) = b_k$ für $k \in \mathbb{N}$ gelten.

Anleitung: Ist $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikx}$ die Fourierreihe von f und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(n) e^{2\pi ikx}$ die Fourierreihe von f_n, dann ist die zu beweisende Aussage zu $\lim_{n\to\infty} c_k(n) = c_k$ für $k \in \mathbb{Z}$ äquivalent. Jetzt kann man $c_k = \langle f, e^{2\pi ikx}\rangle$ und $c_k(n) = \langle f_n, e^{2\pi ikx}\rangle$ verwenden.

32) Die Reihe $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nx)$ konvergiere in L^2 (das bedeutet bezüglich $\|.\|_2$). Es gibt also ein $f \in L^2$ mit $f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nx)\,.$ Bestimme die Fourierreihe von f.

Anleitung: Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $f_n := a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2\pi kx)\,.$ Berechne die Fourierreihe von f_n und verwende Beispiel 31).

33) Es konvergiere die Reihe $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$ in L^2 (das bedeutet bezüglich $\|.\|_2$). Beweise, dass es ein $f \in L^2$ gibt, deren Fourierreihe gleich

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$$

ist.
Anleitung: Verwende Beispiel 32).

34) Finde die Fourierreihen der folgenden Funktionen.
a) $\sin(2\pi x)$. b) $3\cos(8\pi x)$. c) $17\cos(756\pi x)$.
d) $1 + 3\cos(14\pi x) + 2\cos(4\pi x)$. e) $2\cos(2\pi x) + 7\cos(4\pi x)$.
f) 7. g) $31 + 24\sin(8\pi x)\cos(8\pi x)$.
h) $8\cos(2\pi x) + 15\sin(4\pi x) + \sin(24\pi x)$.

35) Betrachte die Funktion $f(x) := x$.
a) Berechne die Fourierreihe von f.
b) Konvergiert die Fourierreihe in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$)? Wenn sie (in L^2) konvergiert, gib ihren Grenzwert an.
c) Untersuche für welche x die Fourierreihe (punktweise) konvergiert.
d) Für welche x konvergiert die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe in jenen Punkten, in denen sie zwar konvergiert, aber der Grenzwert ungleich $f(x)$ ist?
e) Konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig? Soferne sie (gleichmäßig) konvergiert bestimme ihren Grenzwert.

36) Definiere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x - x^2$.
a) Bestimme die Fourierreihe von f.
b) Untersuche die Konvergenz der Fourierreihe in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$). Gib ihren Grenzwert an, falls sie (in L^2) konvergiert.
c) Für welche x konvergiert die Fourierreihe (punktweise)?
d) Gib an für welche x die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$ konvergiert. Weiters finde jene Werte, gegen die die Fourierreihe in den Punkten konvergiert, in denen sie zwar konvergiert, aber der Grenzwert ungleich $f(x)$ ist.
e) Ist die Fourierreihe sogar gleichmäßig konvergent? Im Falle der (gleichmäßigen) Konvergenz bestimme den Grenzwert.

37) a) Berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. b) Bestimme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
Anleitung: Verwende Beispiel 36).

38) Löse folgende Aufgaben für die Funktion $f(x) := \left|x - \frac{1}{2}\right|$.
a) Berechne die Fourierreihe von f.
b) Konvergiert die Fourierreihe in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$)? Finde ihren Grenzwert, wenn sie (in L^2) konvergiert.
c) Bestimme diejenigen x, für die die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$ konvergiert. Für die Werte x, in denen die Fourierreihe zwar konvergiert, aber der Grenzwert nicht $f(x)$ ist, gib an, gegen welchen Wert die Fourierreihe konvergiert.

d) Untersuche die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe (dabei ist der Grenzwert anzugeben, falls sie (gleichmäßig) konvergiert).

39) Für die folgenden Reihen untersuche, ob sie in L^2 (das bedeutet bezüglich $\|.\|_2$) konvergieren. Weiters gib jeweils an, ob es eine Funktion f in L^2 gibt, die diese Reihe als Fourierreihe hat.

a) $-\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos(2\pi nx)\,.$ b) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin(2\pi nx)\,.$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2\pi nx)\,.$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^5\sin(4\pi nx)\,.$

40) Betrachte die Funktion $f(x) := \sin x\,.$

a) Finde die Fourierreihe von f.

b) Ist die Fourierreihe in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$) konvergent? Soferne sie (in L^2) konvergiert bestimme ihren Grenzwert.

c) Für welche x konvergiert die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$? Weiters gib für jene Punkte x, in denen die Fourierreihe zwar konvergiert, aber nicht gegen $f(x)$, den Grenzwert der Fourierreihe an.

d) Erhalten wir sogar gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe? Finde den Grenzwert, falls gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

41) Definiere die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x - \frac{1}{2}\,.$

a) Berechne die Fourierreihe von f.

b) Erhalten wir Konvergenz der Fourierreihe in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$)? Finde ihren Grenzwert, falls sie (in L^2) konvergiert.

c) Für welche x konvergiert die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$? Weiters gib für jene Punkte x, in denen die Fourierreihe zwar konvergiert, aber der Grenzwert nicht $f(x)$ ist, an, gegen welchen Wert die Fourierreihe konvergiert.

d) Untersuche die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe. Soferne sie (gleichmäßig) konvergiert bestimme ihren Grenzwert.

42) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} x\,, & \text{falls } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 0\,, & \text{falls } \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$ definiert.

a) Bestimme die Fourierreihe von f.

b) Untersuche die Konvergenz der Fourierreihe in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$). Weiters gib ihren Grenzwert an, wenn sie (in L^2) konvergiert.

c) Finde diejenigen Punkte x, in denen die Fourierreihe (punktweise) gegen $f(x)$ konvergiert. Bei denjenigen x, in denen die Fourierreihe zwar konvergiert, aber der Grenzwert ungleich $f(x)$ ist, gib an, gegen welchen Wert die Fourierreihe konvergiert.

d) Konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig? Im Falle der (gleichmäßigen) Konvergenz bestimme ihren Grenzwert.

43) a) Zeige, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos(2\pi nx)$ in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$) konvergiert.

b) Definiere $f \in L^2$ durch

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n}\cos(2\pi nx)\ .$$

Wegen Beispiel a) gibt es so ein $f \in L^2$. Bestimme die Fourierreihe von f.
Hinweis: Verwende Beispiel 32).

c) Betrachte die Fourierreihe von f aus Beispiel b). Untersuche die Konvergenz dieser Fourierreihe an den Stellen 0 und $\frac{1}{2}$. Gib auch jeweils die Werte an, gegen die die Fourierreihe konvergiert.

44) Betrachte die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(2\pi nx)\,.$
Für die Lösung dieses Beispiels verwende den folgenden *Satz*, der vielleicht in der Analysis gemacht wurde:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, und sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^s$. Es gebe ein $C \in \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft $\left|\sum_{j=1}^{n} b_j\right| \le C$ erfüllt ist.
Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\,.$

a) Zeige, dass die Reihe für alle $x \in [0,1]$ (punktweise) konvergiert.
Anleitung: Um zu zeigen, dass es eine Konstante C mit $\left|\sum_{j=1}^{n} \sin(2\pi jx)\right| \le C$ gibt, verwende, dass $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$ ($\operatorname{Im} z$ ist der Imaginärteil der komplexen Zahl z) und $|\operatorname{Im} z| \le |z|$.

b) Konvergiert diese Reihe in L^2?

45) a) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in L^2 (eigentlich: Repräsentanten von Elementen aus L^2), $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen f. Zeige, dass $f_n \to f$ in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$) gilt.

b) Die Reihe $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nx)$ konvergiere gleichmäßig. Konvergiert sie auch in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$)?

c) Konvergiert die Reihe $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nx)$ in L^2 (also bezüglich $\|.\|_2$), wenn sie punktweise konvergiert?

46) Finde ein Polynom p vom Grad ≤ 3, das $p(-2) = -14$, $p(1) = 4$, $p(2) = 38$ und $p(4) = 328$ erfüllt.

47) Bestimme ein Polynom p vom Grad ≤ 3 mit $p(-3) = 48$, $p(-1) = -2$, $p(2) = 28$ und $p(3) = 66$.

48) Berechne die diskrete Fouriertransformation der folgenden Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} 9\\3\\5\\3 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 4\\12\\8\\8 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 47\\29\\35\\37 \end{pmatrix}$.

49) a) Finde die diskrete Fouriertransformation von $\begin{pmatrix} 37 \\ 35 \\ 45 \\ 35 \end{pmatrix}$.

b) Bestimme die inverse diskrete Fouriertransformation von $\begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ -19 \\ 17 \end{pmatrix}$.

50) Betrachte das Polynom $p(x) := x^3 - 13x + 12$. Verwende das Horner-Schema um folgende Aufgaben zu lösen.

a) Berechne $p(2)$.

b) Finde ein Polynom $q(x)$ und eine Zahl a, sodass $p(x) = \big(x-2\big)q(x) + a$ gilt.

c) Bestimme die Nullstellen von p.

51) Bestimme die Nullstellen der folgenden Polynome.

a) $p(x) := x^5 + 31x^4 - 824x^2 + 2224x - 1680$.

b) $p(x) := 2x^4 + 9x^3 + 11x^2 - 4$.

c) $p(x) := 24x^3 - 50x^2 - 23x + 21$.

d) $p(x) := 3x^4 - 17x^3 - x^2 + 65x - 50$.

52) Definiere $p(x) := x^6 - x^5 - 282x^4 + 1096x^3 + 32x^2 - 4368x + 4320$.

a) Bestimme die Werte $p^{(n)}(3)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Führe die Division mit Rest von p durch $(x-3)$ durch.

c) Berechne die Nullstellen von p.

53) Es sei $p(x) := 5x^5 - 42x^4 + 54x^3 + 128x^2 - 99x - 126$.

a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ bestimme $p^{(n)}(1)$.

b) Finde die Nullstellen von p.

c) Führe die Division mit Rest von p durch $(x-1)$ durch.

54) Für das Polynom aus Beispiel 50) führe das Newton-Verfahren durch.

a) Gib eine möglichst einfache Funktion an (bzw. gib eine möglichst einfache Rekursionsformel an), die das Newton-Verfahren für dieses Polynom beschreibt.

b) Führe einen Schritt des Newton-Verfahrens für den Startwert 0 durch (exakte Rechnung). Kann man bereits vermuten gegen welche Nullstelle das Newton-Verfahren für den Startwert 0 konvergiert?

c) Verwende einen Computer (etwa mit Mathematica) um das Newton-Verfahren für obiges Polynom mit dem Startwert 0 so lange durchzuführen, bis man den Grenzwert (die Nullstelle) auf 100 Stellen genau „erhält“. Wie viele Iterationen benötigt man dafür?

55) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Verwende das Newton-Verfahren um eine Methode zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt[5]{a}$ anzugeben.

56) Finde Näherungswerte für $\sqrt[5]{7}$ mit der in Beispiel 55) gewonnenen Methode unter Zuhilfenahme eines Computers (etwa mit Mathematica). Wie viele Iterationsschritte benötigt man, um das Ergebnis auf 10 Stellen, bzw. auf 100 Stellen genau zu erhalten?
Hinweis: Um unnötig lange Rechenzeiten zu vermeiden runde die Zwischenergebnisse auf 1000 Stellen, und um Platz zu sparen lass nicht mehr als 100 Stellen anzeigen.

57) Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei durch $f(x) := e^x + 5x - \cos x - 1$ definiert.

a) Zeige, dass $\left|f'(x)\right| \geq 4$ und $\left|f''(x)\right| \leq 4$ für alle $x \in [-1,1]$ gelten.

b) Beschreibe das Newton-Verfahren für f durch eine möglichst einfache Funktion (oder durch eine möglichst einfache Rekursionsformel).

c) Führe (mit exakten Rechnungen!) einen Schritt des Newton-Verfahrens für f mit dem Startwert 0 durch.

d) Betrachte den Startwert 0 und $\delta = 1$. Gib eine Abschätzung für die Abweichung des Wertes nach n Schritten des Newton-Verfahrens von der Nullstelle von f (ohne den exakten Wert dieser Nullstelle zu kennen!).

e) Unter Verwendung von Beispiel d) gib an, wieviele Schritte notwendig sind, um die Nullstelle von f auf 10, bzw. 100, bzw. 1000 Stellen genau zu bestimmen.

f) Verwende Beispiel d) und einen Computer (etwa mit Mathematica) um die Nullstelle von f auf mindestens 100 Stellen genau zu bestimmen.
Hinweis: Runde die Zwischenergebnisse auf 1000 Stellen um unnötig lange Rechenzeiten zu vermeiden.

58) Bestimme näherungsweise eine Nullstelle von $f(x) := e^{7x} + \sin x - 23000$. Verwende dazu die Startwerte 1 und 2. Welcher der beiden Startwerte ist der „Bessere“? Gib die Nullstelle auf 10 Stellen genau an.

59) Analog zu Beispiel 55) gib ein Verfahren an, um $\sqrt[6]{11}$ näherungsweise zu bestimmen. Für den Startwert $\frac{3}{2}$ und $\delta = \frac{1}{2}$ finde Abschätzungen für den Fehler nach n Schritten (ohne den exakten Wert zu kennen!). Wieviele Schritte sind notwendig, um $\sqrt[6]{11}$ auf 10, bzw. 100, bzw. 1000 Stellen genau zu bestimmen? Bestimme $\sqrt[6]{11}$ auf mindestens 10 Stellen.

60) Betrachte die Funktion $f(x) := 13x^4 - 113x^2 + 100$. Wende das Newton-Verfahren mit dem Startwert 2 auf diese Funktion an.