Eine auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ differenzierbare Funktion, bei der in 0 alle Richtungsableitungen existieren, aber die nicht stetig in 0 ist

Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \begin{cases} \frac{4{x_1}^6 x_2}{({x_1}^4 + {x_2}^2)^2}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ für $x := \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. Als rationale Funktion mit ${x_1}^4 + {x_2}^2 > 0$ für $x \neq 0$ ist f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wollen wir jetzt die Richtungsableitung $\partial_v f(0)$ von f an der Stelle 0 in Richtung v bestimmen. Setze dazu $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist dann

$$\begin{aligned} \partial_v f(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{4(tv_1)^6(tv_2)}{t((tv_1)^4 + (tv_2)^2)^2} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{4t^7 {v_1}^6 v_2}{t^5(t^2 {v_1}^4 + {v_2}^2)^2} = \lim_{t\to 0} t^2 \frac{4{v_1}^6 v_2}{(t^2{v_1}^4 + {v_2}^2)^2} = 0\ , \end{aligned}$$

falls $v_2 \neq 0$. Im Fall $v_2 = 0$ ist $\partial_v f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^9 {v_1}^8} = 0$. Somit ist $\partial_v f(0) = 0$ für alle $v \neq 0$.

Jetzt untersuchen wir die Stetigkeit von f an der Stelle 0, indem wir uns entlang der Kurve $\left(\begin{smallmatrix} t \\ t^2 \end{smallmatrix}\right)$ dem Punkt 0 nähern. Es ist

$$\lim_{t\to 0} f\left(\begin{smallmatrix} t \\ t^2 \end{smallmatrix}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{4(t)^6(t^2)}{((t)^4 + (t^2)^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{4t^8}{(2t^4)^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1 \neq 0 = f(0)\ ,$$

und daher ist f nicht stetig an der Stelle 0. Weil f an der Stelle 0 nicht stetig ist, kann f an der Stelle 0 auch nicht differenzierbar sein.