Eine auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbare Funktion, bei der 0 der einzige kritische Punkt und ein lokales Maximum ist, aber 0 kein (globales) Maximum ist

Betrachte die durch $f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) := 18{x_1}^3 e^{x_2} - 27{x_1}^2 e^{x_2} + e^{-16{x_2}^2}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wir setzen $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Offensichtlich gilt $f(x) = 9(2x_1 - 3){x_1}^2 e^{x_2} + e^{-16{x_2}^2}$. Weiters gelten $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 54{x_1}^2 e^{x_2} - 54 x_1 e^{x_2} = 54(x_1 - 1)x_1 e^{x_2}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 9(2x_1 - 3){x_1}^2 e^{x_2} - 32 x_2 e^{-16{x_2}^2}$. Weil die partiellen Ableitungen stetig sind, ist f stetig differenzierbar und es gilt

$$df_{(x)} = \begin{pmatrix} 54(x_1 - 1)x_1 e^{x_2} & 9(2x_1 - 3){x_1}^2 e^{x_2} - 32 x_2 e^{-16{x_2}^2} \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen erhält man $\frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2}(x) = 108 x_1 e^{x_2} - 54 e^{x_2} = 54(2x_1 - 1)e^{x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = 54 x_1 (x_1 - 1) e^{x_2}$ und $\frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2}(x) = 9(2x_1 - 3){x_1}^2 e^{x_2} - 32 e^{-16{x_2}^2} + 1024{x_2}^2 e^{-16{x_2}^2} = 9(2x_1 - 3){x_1}^2 e^{x_2} + (1024{x_2}^2 - 32)e^{-16{x_2}^2}$. Nachdem die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, ist f zweimal stetig differenzierbar und es gilt

$$d^2 f_{(x)} = \begin{pmatrix} 54(2x_1 - 1)e^{x_2} & 54 x_1 (x_1 - 1) e^{x_2} \\ 54 x_1 (x_1 - 1) e^{x_2} & 9(2x_1 - 3){x_1}^2 e^{x_2} + (1024{x_2}^2 - 32)e^{-16{x_2}^2} \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Um die kritischen Punkte von f zu bestimmen, beweisen zur zuerst folgende Hilfsresultate.

Lemma 1. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{\frac{x}{e}} \geq x$.*

Beweis. Betrachte $f(x) := e^{\frac{x}{e}} - x$. Es ist dann $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Weiters ist

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{e}}}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) \underset{\text{Regel von de l'Hospital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{e}} \frac{1}{e}}{1} = +\infty .$$

Deshalb gibt es ein R, sodass $\frac{e^{\frac{x}{e}}}{x} \geq 2$ für alle $x \geq R$. Für $x \geq R$ gilt daher $f(x) = e^{\frac{x}{e}} - x \geq x$ und deshalb ist $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Somit besitzt f ein Minimum m, und da f differenzierbar ist muss $f'(m) = 0$ gelten. Weil $f'(x) = e^{\frac{x}{e}} \frac{1}{e} - 1$ gilt, ist $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = e$. Außerdem ist $f(e) = 0$, und daher ist $0 \leq f(x) = e^{\frac{x}{e}} - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, woraus sich die gewünschte Ungleichung ergibt. $\square$

Lemma 2. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x e^{-x^2} < e^{-\frac{x}{4}}$.*

Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle.

1. Fall: $x \leq 0$: Da $e^{-\frac{x}{4}} > 0$ erhalten wir $\underbrace{x}_{\leq 0} \underbrace{e^{-x^2}}_{> 0} \leq 0 < e^{-\frac{x}{4}}$, womit die Ungleichung in diesem Fall gezeigt ist.

2. Fall: $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$: Hier ist dann $x^2 \geq \frac{x}{\sqrt{2}}$ und daher $e^{-x^2} \leq e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}$. Wegen Lemma 1 ist $x \leq e^{\frac{x}{e}}$, und daraus ergibt sich

$$\underbrace{x}_{\leq e^{\frac{x}{e}}} \underbrace{e^{-x^2}}_{\leq e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}} \leq e^{\frac{x}{e} - \frac{x}{\sqrt{2}}} = e^{x\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} .$$

Nun ist $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2}$ und $\sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$, woraus sich $\frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{15} < -\frac{1}{4}$ ergibt. Somit ist $x e^{-x^2} \leq e^{x\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} < e^{-\frac{x}{4}}$, wodurch die gewünschte Ungleichung auch in diesem Fall bewiesen wurde.

3. Fall: Es bleibt der Fall $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ zu betrachten: Man erhält $\underbrace{x}_{<\frac{1}{\sqrt{2}}} \underbrace{e^{-x^2}}_{\leq 1} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $-\frac{x}{4} > -\frac{1}{4\sqrt{2}}$. Weil $e \leq 4$ ist, ist $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \leq 2$ und daher $\frac{1}{2} \leq \log 2$. Deshalb ist $\log \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \log 2 \leq -\frac{1}{4}$, woraus man $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq e^{-\frac{1}{4}} < e^{-\frac{1}{4\sqrt{2}}}$ erhält. Somit ergibt sich $xe^{-x^2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < e^{-\frac{1}{4\sqrt{2}}} < e^{-\frac{x}{4}}$, wodurch auch in diesem Fall die gewünschte Ungleichung gezeigt wurde. $\square$

Lemma 3. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-4xe^{-16x^2} < e^x$.*

Beweis. Einsetzen von $-4x$ in Lemma 2 ergibt $-4xe^{-16x^2} < e^x$. $\square$

Jetzt wollen wir die kritischen Punkte, also diejenigen x mit $df_{(x)} = 0$, für unsere anfangs definierte Funktion f bestimmen. Bereits in (1) haben wir die Ableitung von f bestimmt. Wenn x ein kritischer Punkt ist, dann muss also $54(x_1 - 1)x_1 e^{x_2} = 0$ gelten. Also muss $x_1 = 1$ oder $x_1 = 0$ gelten. Falls $x_1 = 1$ gilt, dann müsste $0 = 9(2x_1 - 3){x_1}^2 e^{x_2} - 32x_2 e^{-16{x_2}^2} = -9e^{x_2} + 8 \underbrace{\left(-4x_2 e^{-16{x_2}^2}\right)}_{<e^{x_2} \text{ wegen Lemma 3}} < -e^{x_2} < 0$ gelten, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Somit muss $x_1 = 0$ gelten, und dann muss auch $0 = 9(2x_1 - 3){x_1}^2 e^{x_2} - 32x_2 e^{-16{x_2}^2} = -32x_2 \underbrace{e^{-16{x_2}^2}}_{\neq 0}$ gelten, woraus sich $x_2 = 0$ ergibt. Deshalb ist $0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ der einzige kritische Punkt von f.

Aus (2) erhalten wir $d^2 f_{(0)} = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}$. Nachdem es sich dabei um eine Diagonalmatrix handelt, sind die Eigenwerte die Diagonalelemente. Weil diese negativ sind, ist $d^2 f_{(0)}$ negativ definit, und deshalb ist an der Stelle 0 ein lokales Maximum von f.

Offensichtlich ist $f(0) = 1$ und $f\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 37$. Da $f\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 37 > 1 = f(0)$ gilt, kann 0 kein globales Maximum von f sein.