Proseminar zu
Lineare Algebra und Mehrdimensionale Analysis für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Wintersemester 2024/2025

Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$ bezeichne $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$ das (Standard-) innere Produkt von x und y (wird auch manchmal als $x \cdot y$ geschrieben), und $|x| := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$ den Betrag (Länge, Zweinorm) von x.

1) a) Zeige, dass $\langle x, y \rangle = y^t x$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.
   b) Für $x \in \mathbb{R}^n$ zeige, dass $|x|^2 = x^t x = \langle x, x \rangle$ gilt.

Eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix A heißt *positiv definit*, falls $x^t A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ gilt (analog wäre *negativ definit*, falls $x^t A x < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$). Um Nachzurechnen ob eine Matrix positiv (negativ) definit ist (zuerst einmal schauen, ob die Matrix symmetrisch ist!), kann man direkt mit der Definition nachrechnen und Quadratisch Ergänzen. Im Allgemeinen ist es am effektivsten mittels des strikten Gauß-Verfahren umzuformen. Die Matrix ist genau dann positiv definit, wenn am Ende alle Diagonalelemente positiv sind (und genau dann negativ definit, wenn am Ende alle Diagonalelemente negativ sind). Beim strikten Gauß-Verfahren lässt man zunächst die erste Zeile unverändert, und zieht von den anderen Zeilen (also zweite bis n-te Zeile) entsprechende Vielfache der ersten Zeile ab, sodass in der ersten Spalte ab der zweiten Zeile nur Nuller stehen. Dann lässt man die ersten beiden Zeilen unverändert, und zieht von den weiteren Zeilen (also dritte bis n-te Zeile) entsprechende Vielfache der zweiten Zeile ab, sodass in der zweiten Spalte ab der dritten Zeile nur Nuller stehen. Man führt das solange fort, bis unterhalb der Diagonale nur Nuller stehen. Tritt in der Rechnung einmal in der Diagonale die Zahl 0 auf, dann ist die Matrix weder positiv definit noch negativ definit.

Musterbeispiel: Zeige, dass $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 \\ -9 & 29 & -28 \\ 12 & -28 & 87 \end{pmatrix}$ positiv definit ist.

LÖSUNG: Offensichtlich ist A symmetrisch.

$$\begin{array}{ccc} 3 & -9 & 12 \\ -9 & 29 & -28 \\ 12 & -28 & 87 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 3 & -9 & 12 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 39 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 3 & -9 & 12 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}.$$

Nachdem alle Diagonalelemente positiv sind, ist A positiv definit.

2) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & -2 & 4 \\ 3 & 11 & -16 & -12 & 16 \\ -6 & -16 & 41 & 15 & -23 \\ -2 & -12 & 15 & 51 & -21 \\ 4 & 16 & -23 & -21 & 66 \end{pmatrix}$ zeige, dass A positiv definit ist.

3) Zeige, dass $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 4 & -8 \\ -4 & 9 & -9 & -7 & 13 \\ 6 & -9 & 29 & 3 & -31 \\ 4 & -7 & 3 & 86 & -16 \\ -8 & 13 & -31 & -16 & 91 \end{pmatrix}$ positiv definit ist.

4) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Berechne AB, BA, $(AB)^2$ und A^2B^2.

5) Mit $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (kurz mit C^1 bezeichnet) wird der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet. Welche der folgenden Mengen sind Teilräume von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (Begründungen geben)?
   a) $A := \{f \in C^1 : f(0) = 0\}$.
   b) $A := \{f \in C^1 : f(0) = 1\}$.
   c) $A := \{f \in C^1 : f(1) = 0\}$.
   d) $A := \{f \in C^1 : f(7) \geq 5\}$.
   e) $A := \{f \in C^1 : f'(6) \leq 8\}$.
   f) $A := \{f \in C^1 : f'(-4) = 0\}$.
   g) $A := \{f \in C^1 : f(3) + f'(3) = 0\}$.
   h) $A := \{f \in C^1 : 4f(2) - 3f'(-5) = 3\}$.
   i) $A := \{f \in C^1 : f' = f\}$.

6) Stelle fest ob die folgenden Mengen Teilräume von $\mathcal{P}_8$ (die Menge der Polynome vom Grad ≤ 8) sind, und begründe jeweils die Behauptungen.
   a) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : p(3) = 6\}$.
   b) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : p'(5) = 0\}$.
   c) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : p' = 5p\}$.
   d) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : 3p(0) + 4p'(-2) \leq 6\}$.
   e) $A := \mathcal{P}_3$ (Polynome vom Grad ≤ 3).
   f) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : p'' - 6p' + 8p = x^2 + 3x + 8\}$.
   g) $A := \{p \in \mathcal{P}_8 : p'' - p' - 6p = 0\}$.

7) Für die folgenden Matrizen A berechne die inverse Matrix A^{-1}.

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & -3 \\ -5 & -6 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.   b) $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -7 & 3 & 9 & 6 \\ -2 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -2 & -7 & -3 \\ 3 & -3 & -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Es sei $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis des Vektorraums V (eigentlich müsste man $\mathcal{B}$ als geordnetes n-Tupel von Vektoren schreiben und nicht als Menge). Um die Darstellung eines Vektors $v \in V$ bezüglich $\mathcal{B}$ zu finden, berechnet man aus der Gleichung $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$ die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ ist dann die gesuchte Darstellung. Will man eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ bezüglich $\mathcal{B}$ darstellen, so stellt man zunächst $\varphi(v_1)$ bezüglich $\mathcal{B}$ dar und erhält damit die erste Spalte der gesuchten Matrix. Anschließend stellt man dann $\varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n)$ bezüglich $\mathcal{B}$ dar und erhält damit die weiteren Spalten.

Musterbeispiel: Betrachte $V := \{a_1 e^{3x} + a_2 x + a_3 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ mit der Basis $\mathcal{B} := \{1, x, e^{3x} - 5x + 6\}$.

a) Stelle $f := 4e^{3x} - 7x + 3$ bezüglich $\mathcal{B}$ dar.

b) Stelle die lineare Abbildung $\varphi(f) := f' + 5f$ bezüglich $\mathcal{B}$ dar.

LÖSUNG: a) $4e^{3x} - 7x + 3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot (e^{3x} - 5x + 6) = \lambda_3 e^{3x} + (\lambda_2 - 5\lambda_3)x + (\lambda_1 + 6\lambda_3)1$. Durch Koeffizientenvergleich erhält man $\lambda_3 = 4$, $\lambda_2 - 5\lambda_3 = -7$ und $\lambda_1 + 6\lambda_3 = 3$, woraus sich $\lambda_1 = -21$, $\lambda_2 = 13$ und $\lambda_3 = 4$ ergibt. Also ist $\left(\begin{smallmatrix} -21 \\ 13 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ die Darstellung von f bezüglich $\mathcal{B}$.

b) Zunächst ist $\varphi(1) = 5$ und die Darstellung bezüglich $\mathcal{B}$ ist $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Weiters ist $\varphi(x) = 1 + 5x$ und die Darstellung bezüglich $\mathcal{B}$ ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Schließlich ist $\varphi(e^{3x} - 5x + 6) = 8e^{3x} - 25x + 25$, und wenn man $8e^{3x} - 25x + 25 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot (e^{3x} - 5x + 6)$ setzt, so ergibt sich $\lambda_1 = -23$, $\lambda_2 = 15$ und $\lambda_3 = 8$, also ist die Darstellung bezüglich $\mathcal{B}$ ist $\left(\begin{smallmatrix} -23 \\ 15 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$. Damit ist $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 & -23 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ die Darstellung von φ bezüglich $\mathcal{B}$.

8) Es sei $V := \{a_1 e^{7x} + a_2 x + a_3 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ mit der Basis $\mathcal{B} := \{1, x, e^{7x} + 3x + 4\}$.
   a) Stelle $f := 6e^{7x} + 9x + 13$ bezüglich $\mathcal{B}$ dar.
   b) Gib die Darstellung der linearen Abbildung $\varphi(f) := f' - 3f$ bezüglich $\mathcal{B}$ an.

9) Auf $\mathbb{R}^2$ betrachte die Basis $\mathcal{B} := \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$. Stelle die Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ (also die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$) bezüglich $\mathcal{B}$ dar.

Musterbeispiel: Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge, die $x_n = 7x_{n-1} + 26x_{n-2} - 72x_{n-3}$ für alle $n \geq 3$ erfüllt.

a) Setze $X_n := \left(\begin{smallmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{smallmatrix}\right)$. Finde eine Matrix A, sodass $X_n = AX_{n-1}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

b)Stelle die Matrix A aus Beispiel a) bezüglich der Basis $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \\ 81 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ dar.

c) Verwende b) um eine Formel für X_n herzuleiten.

d) Unter Verwendung von c) finde eine Formel für x_n.

e) Löse die Differenzengleichung $x_0 = 10$, $x_1 = 16$, $x_2 = 230$ und die $x_n = 7x_{n-1} + 26x_{n-2} - 72x_{n-3}$ für alle $n \geq 3$ erfüllt.

LÖSUNG: a) Unsere Differenzengleichung ergibt $x_{n+2} = 7x_{n+1} + 26x_n - 72x_{n-1}$. Daher ist $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ 7x_{n+1}+26x_n-72x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -72 & 26 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -72 & 26 & 7 \end{pmatrix} X_{n-1}$, also $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -72 & 26 & 7 \end{pmatrix}$.

b) Setze $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 81 \end{pmatrix}$ und $v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}$. Es ist $Av_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 2v_1$ und dessen Darstellung bezüglich $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$ daher $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Weiters ist $Av_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 81 \\ 729 \end{pmatrix} = 9v_2$ und dessen Darstellung bezüglich $\mathcal{B}$ daher $\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$. Schließlich ist $Av_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -64 \end{pmatrix} = -4v_3$ und dessen Darstellung bezüglich $\mathcal{B}$ daher $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Daher ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ die Darstellung von A bezüglich $\mathcal{B}$.

c) Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ kann als $v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ für passende $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ geschrieben werden. Jetzt behaupten wir, dass $A^n v = c_1 2^n v_1 + c_2 9^n v_2 + c_3(-4)^n v_3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Für $n = 0$ ist $A^0 v = v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = c_1 2^0 v_1 + c_2 9^0 v_2 + c_3(-4)^0 v_3$. Nun sei $n \geq 1$. Dann ist $A^n v = A(A^{n-1}v) = A(c_1 2^{n-1} v_1 + c_2 9^{n-1} v_2 + c_3(-4)^{n-1} v_3) = c_1 2^{n-1} \underbrace{Av_1}_{=2v_1} + c_2 9^{n-1} \underbrace{Av_2}_{=9v_2} + c_3(-4)^{n-1} \underbrace{Av_3}_{=-4v_3} = c_1 2^n v_1 + c_2 9^n v_2 + c_3(-4)^n v_3$, wodurch unsere Behauptung mittels vollständiger Induktion bewiesen ist. Somit ist $X_n = c_1 2^n v_1 + c_2 9^n v_2 + c_3(-4)^n v_3$ für passende $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

d) Nachdem x_n die erste Komponente von X_n ist und die ersten Komponenten von v_1, v_2 und v_3 jeweils 1 sind, erhalten wir aus Beispiel c), dass es passende $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $x_n = c_1 2^n + c_2 9^n + c_3(-4)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

e) Wegen Beispiel d) ist $x_n = c_1 2^n + c_2 9^n + c_3(-4)^n$. Außerdem ist $10 = x_0 = c_1 + c_2 + c_3$, $16 = x_1 = 2c_1 + 9c_2 - 4c_3$ und $230 = x_2 = 4c_1 + 81c_2 + 16c_3$. Wir lösen dieses Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 9 & -4 & 16 \\ 4 & 81 & 16 & 230 \end{array}\right. \to \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 7 & -6 & -4 \\ 0 & 77 & 12 & 190 \end{array}\right. \to \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 7 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 78 & 234 \end{array}\right. ,$$

woraus sich $c_1 = 5$, $c_2 = 2$ und $c_3 = 3$ ergibt. Daher gilt $x_n = 5 \times 2^n + 2 \times 9^n + 3 \times (-4)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

10) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erfülle $x_n = 11x_{n-1} - 24x_{n-2}$ für alle $n \geq 2$.
   a) Setze $X_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$. Finde eine Matrix A, sodass $X_n = AX_{n-1}$ für alle $n \geq 1$ gilt.
   b) Für die in Beispiel a) gefundene Matrix A finde die Darstellung bezüglich der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$.
   c) Unter Verwendung von Beispiel b) leite eine Formel für X_n her.
   d) Verwende Beispiel c) um eine Formel für x_n zu finden.
   e) Löse die Differenzengleichung $x_0 = 8$, $x_1 = 34$ und $x_n = 11x_{n-1} - 24x_{n-2}$ für alle $n \geq 2$.

11) Betrachte die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die $x_n = 15x_{n-1} - 44x_{n-2}$ für alle $n \geq 2$ erfüllt.
   a) Setze $X_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ und finde eine Matrix A, sodass $X_n = AX_{n-1}$ für alle $n \geq 1$ gilt.
   b) Stelle die Matrix A aus Beispiel a) bezüglich der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$ dar.
   c) Gib eine Formel für x_n an.
   d) Nun löse die Differenzengleichung $x_0 = 11$, $x_1 = 65$ und $x_n = 15x_{n-1} - 44x_{n-2}$ für alle $n \geq 2$.

12) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$. Berechne

$$\det\begin{pmatrix}
\cos\alpha_{n-1} & -\sin\alpha_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\sin\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2} & \cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2} & -\sin\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\sin\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3} & \cos\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3} & \sin\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3} & -\sin\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2}\sin\alpha_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\sin\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2}\ldots\sin\alpha_3\cos\alpha_2 & \cos\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2}\ldots\sin\alpha_3\cos\alpha_2 & \sin\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\sin\alpha_{n-3}\ldots\sin\alpha_3\cos\alpha_2 & \sin\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\sin\alpha_{n-4}\ldots\sin\alpha_3\cos\alpha_2 & \cdots & -\sin\alpha_{n-1}\ldots\sin\alpha_3\sin\alpha_2 & 0 \\
\sin\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2}\ldots\sin\alpha_2\cos\alpha_1 & \cos\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2}\ldots\sin\alpha_2\cos\alpha_1 & \sin\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\sin\alpha_{n-3}\ldots\sin\alpha_2\cos\alpha_1 & \sin\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\sin\alpha_{n-4}\ldots\sin\alpha_2\cos\alpha_1 & \cdots & \sin\alpha_{n-1}\ldots\cos\alpha_2\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_{n-1}\ldots\sin\alpha_2\sin\alpha_1 \\
\sin\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2}\ldots\sin\alpha_2\sin\alpha_1 & \cos\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2}\ldots\sin\alpha_2\sin\alpha_1 & \sin\alpha_{n-1}\cos\alpha_{n-2}\sin\alpha_{n-3}\ldots\sin\alpha_2\sin\alpha_1 & \sin\alpha_{n-1}\sin\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\sin\alpha_{n-4}\ldots\sin\alpha_2\sin\alpha_1 & \cdots & \sin\alpha_{n-1}\ldots\cos\alpha_2\sin\alpha_1 & \sin\alpha_{n-1}\ldots\sin\alpha_2\cos\alpha_1
\end{pmatrix}.$$

Anleitung: Entwickle nach der ersten Zeile. Hebe anschließend aus den Spalten passend heraus, und vereinfache dann. Formal müsste man die Formel mit vollständiger Induktion beweisen.

13) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1} \in \mathbb{R}$, und sei $t \in \mathbb{R}$. Bestimme

$$\det\begin{pmatrix}
a_1\cos\varphi_1 & -a_1 t\sin\varphi_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & a_2 t\cos\varphi_1\cos\varphi_2 & -a_2 t\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a3\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & a_3 t\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 & a_3 t\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3 & -a_3 t\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n-2}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2} & a_{n-2}t\cos\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2} & a_{n-2}t\sin\varphi_1\cos\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2} & a_{n-2}t\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3\sin\varphi_4\ldots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2} & \cdots & -a_{n-2}t\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2} & 0 \\
a_{n-1}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} & a_{n-1}t\cos\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} & a_{n-1}t\sin\varphi_1\cos\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} & a_{n-1}t\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3\sin\varphi_4\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} & \cdots & a_{n-1}t\sin\varphi_1\ldots\cos\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} & -a_{n-1}t\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \\
a_n\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} & a_n t\cos\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} & a_n t\sin\varphi_1\cos\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} & a_n t\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3\sin\varphi_4\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} & \cdots & a_n t\sin\varphi_1\ldots\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} & a_n t\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}
\end{pmatrix}.$$

Anleitung: Zunächst hebe passend aus Zeilen und Spalten heraus. Verwende dann Beispiel 12), wobei beachtet werden muss, dass die Indizes der Winkel unterschiedlich sind.

Bemerkung: Die in Beispiel 13) berechnete Determinante wird für die Anwendung der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale auf n-dimensionale Ellipsoidkoordinaten (verallgemeinerte n-dimensionale Polarkoordinaten) benötigt.

14) a) Gilt $\det\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = (\det A) \cdot (\det D) - (\det B) \cdot (\det C)$, falls es sich bei A, B, C, D jeweils um $n \times n$-Matrizen handelt?

b) Berechne $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 5 & -7 & -7 & 3 \\ -3 & 5 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

c) Für $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ und $D := \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ bestimme $\det A$, $\det B$, $\det C$, $\det D$ und $(\det A) \cdot (\det D) - (\det B) \cdot (\det C)$.

Es seien $r, s \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^r$ offen (d. h. für jedes $x \in U$ gibt es ein $\rho > 0$, sodass alle $y \in \mathbb{R}^r$ mit $|y - x| < \rho$ ebenfalls $y \in U$ erfüllen), $f : U \to \mathbb{R}^s$ eine Funktion und $x_0 \in U$. Man nennt die Funktion f (mehrdimensional) differenzierbar an der Stelle x_0, wenn es eine lineare Funktion $df_{(x_0)} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$ (also eine $s \times r$-Matrix) gibt, sodass $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\left|f(x) - f(x_0) - df_{(x_0)}(x - x_0)\right|}{|x - x_0|} = 0$ gilt. Falls f differenzierbar an der Stelle x_0 ist, nennt man $df_{(x_0)}$ die (erste) Ableitung von f an der Stelle x_0.
Unter der partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ der Funktion f versteht man die (komponentenweise) Ableitung von f nach x_j, wobei $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_r$ als konstant betrachtet werden ($\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ist ein s-dimensionaler Vektor). Falls f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann existieren auch die partiellen Ableitungen an der Stelle x_0 und es gilt $df_{(x_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_r}(x_0)\right)$ (die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, aber beachte den später erwähnten Satz). Etwas allgemeiner als die partielle Ableitung ist die Richtungsableitung. Dazu sei $v \in \mathbb{R}^r$, $v \neq 0$ (oft wird $|v| = 1$ vorausgesetzt, aber das ist nicht unbedingt nötig). Man nennt $\partial_v f(x_0) := \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ die Richtungsableitung von f an der Stelle x_0 in Richtung v. Also sind die partiellen Ableitungen die Richtungsableitungen von f in Richtung der Einheitsvektoren. Wenn f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann existieren auch für jedes $v \neq 0$ die Richtungsableitungen an der Stelle x_0 in Richtung v und es gilt $\partial_v f(x_0) = df_{(x_0)}(v)$ (das folgt im Wesentlichen aus der mehrdimensionalen Kettenregel, die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht).
Von besonderer Bedeutung ist der folgende Satz.
Satz: *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^r$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^s$ eine Funktion. Falls alle partiellen Ableitungen auf U existieren und in x_0 stetig sind, dann ist f differenzierbar an der Stelle x_0.*
Aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen (auf U) folgt also die Differenzierbarkeit der Funktion (auf U). Man nennt f dann stetig differenzierbar, und nennt sie auch C^1-Funktion.

Musterbeispiel: Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_1}^2 x_3 + e^{x_2 - 3} \\ 8x_1 + 3x_2x_3 \end{pmatrix}$ definiert.

a) Für $x_0 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ bestimme $df_{(x_0)}$ (genaue Begründung geben!).
b) Berechne die Richtungsableitung $\partial_v f(x_0)$ von f an der Stelle x_0 in Richtung $v := \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$.
Lösung: Zunächst einmal ist (wir berechnen die partiellen Ableitungen und schreiben sie als Matrix) $df_{(x)} = \begin{pmatrix} 2x_1x_3 & e^{x_2-3} & {x_1}^2 \\ 8 & 3x_3 & 3x_2 \end{pmatrix}$. Die Ableitung existiert, weil die partiellen Ableitungen stetig sind.
a) Wir brauchen nur mehr x_0 die obige Formel einsetzen, also $df_{(x_0)} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$.
b) Hier ist $\partial_v f(x_0) = df_{(x_0)}(v) = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

15) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, die durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \cos x_3 + 5 \\ {x_1}^2 + x_2 \sin x_3 \\ x_1 + {x_3}^3 \\ {x_1}^2 + x_2x_3 \end{pmatrix}$ definiert ist.

a) Bestimme die Ableitung von f in $x_0 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Für $v := \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ berechne die Richtungsableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v.

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ (bzw. auf Teilmengen davon definierte Funktionen) und passenden Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^s$ kann man das (mehrdimensionale) Riemann-Integral $\int_A f$ definieren. Hier lassen wir die (eigentlich notwendigen) technischen Details weg, und beschäftigen uns mit den Methoden solche Integrale zu berechnen. Zunächst einmal ist der *Satz von Fubini* wichtig, der besagt, dass man das mehrdimensionale Integral als mehrfaches eindimensionales Integral (mit passenden Grenzen – das kann dann durchaus mühsam werden!) über die entsprechenden Variablen berechnen kann. Wenn die Menge A ein achsenparalleler Quader ist, dann ist es relativ einfach diesen Satz anzuwenden.

Musterbeispiel: Berechne $\displaystyle\int_A \left(x_1{}^2 + x_1x_2\right)$ für $A := \left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 3\right\}$.

LÖSUNG: Es ist

$$\int_A \left(x_1{}^2 + x_1x_2\right) = \int_0^3 \Bigg(\underbrace{\int_0^4 \left(x_1{}^2 + x_1x_2\right) dx_1}_{= \left(\frac{x_1{}^3}{3} + \frac{x_1{}^2x_2}{2}\right)\Big|_0^4 = \frac{64}{3} + 8x_2} \Bigg) dx_2 =$$

$$= \underbrace{\int_0^3 \frac{64}{3}\, dx_2}_{\underset{\text{Integral aus der Volksschule}}{=} \frac{64}{3}\times 3 = 64} + \underbrace{\int_0^3 8x_2\, dx_2}_{= 4x_2{}^2\big|_0^3 = 36} = 64 + 36 = 100\ .$$

Man kann es auch so rechnen:

$$\int_A \left(x_1{}^2 + x_1x_2\right) = \int_0^4 \left(\int_0^3 \left(x_1{}^2 + x_1x_2\right) dx_2\right) dx_1 =$$

$$= \int_0^4 \Bigg(\underbrace{\int_0^3 x_1{}^2\, dx_2}_{\underset{\text{Integral aus der Volksschule}}{=} 3x_1{}^2} + \underbrace{\int_0^3 x_1x_2\, dx_2}_{= \frac{x_1x_2{}^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{9x_1}{2}} \Bigg) dx_1 =$$

$$= \underbrace{\int_0^4 \left(3x_1{}^2 + \frac{9x_1}{2}\right) dx_1}_{= \left(x_1{}^3 + \frac{9x_1{}^2}{4}\right)\Big|_0^4 = 64+36=100} = 100\ . \qquad \diamond$$

Besonders wichtig ist die Transformationsformel (mehrdimensionale Substitutionsregel). Diese besagt, dass für eine (bis auf Nullmengen) auf einer Umgebung U von A bijektiven und stetig differenzierbaren Funktion $T : U \to T(U)$, bei der $\det dT$ dort (bis auf Nullmengen) das Vorzeichen nicht ändert, für eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{R}$

$$\int_A (f \circ T)\, |\det dT| = \int_{T(A)} f$$

gilt.

Jetzt seien $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}$, $a_1, a_2, \ldots, a_s > 0$. Bei dem Ellipsoid

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s : \sum_{j=1}^s \left(\frac{x_j}{a_j}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

kann man s-dimensionale Ellipsoidkoordinaten verwenden:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 t \cos\varphi_1 \ , \\ x_2 &= a_2 t \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \ , \\ x_3 &= a_3 t \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \ , \\ &\vdots \\ x_{s-1} &= a_{s-1} t \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \dots \sin\varphi_{s-2} \cos\varphi_{s-1} \ , \\ x_s &= a_s t \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \dots \sin\varphi_{s-2} \sin\varphi_{s-1} \ , \end{aligned}$$

wobei $0 \le t \le 1$, $0 \le \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s-2} \le \pi$ und $0 \le \varphi_{s-1} \le 2\pi$. Hier wäre $T\begin{pmatrix} t \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 t \cos\varphi_1 \\ a_2 t \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ \vdots \\ a_s t \sin\varphi_1 \dots \sin\varphi_{s-1} \end{pmatrix}$. Für die s-dimensionale Kugel $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s : \sum_{j=1}^s {x_j}^2 \le r^2 \right\}$ wäre einfach $a_1 = a_2 = \dots = a_s = r$. Wir wollen jetzt in Beispiel 16) dT und $\det dT$ berechnen.

16) Sei T die oben angeführte Transformation auf s-dimensionale Ellipsoidkoordinaten.
   a) Bestimme dT.
   b) Berechne $\det dT$.
      Anleitung: Verwende Beispiel a) und Beispiel 13).
   c) Zeige, dass $\det dT > 0$ für $t > 0$ und $0 < \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s-2} < \pi$ gilt.

Musterbeispiel: Bestimme das Volumen der Kugel $A := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \le r^2 \right\}$, also berechne $\int_A 1$.
LÖSUNG: Hier ist

$$\begin{aligned} x_1 &= rt \cos\varphi_1 \ , \\ x_2 &= rt \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \ , \\ x_3 &= rt \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ , \end{aligned}$$

wobei $0 \le t \le 1$, $0 \le \varphi_1 \le \pi$ und $0 \le \varphi_2 \le 2\pi$. Man erhält $\det dT = r^3 t^2 \sin\varphi_1$. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_A 1 &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} r^3 t^2 \sin\varphi_1 \, d\varphi_2 \right) d\varphi_1 \right) dt = \\ &= r^3 \int_0^1 t^2 \left(\int_0^\pi \sin\varphi_1 \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi_2}_{\underset{\text{Integral aus der Volksschule}}{=} 2\pi \times 1 = 2\pi} \right) d\varphi_1 \right) dt = \\ &= 2\pi r^3 \int_0^1 t^2 \left(\underbrace{\int_0^\pi \sin\varphi_1 \, d\varphi_1}_{= -\cos\varphi_1 |_0^\pi = 2} \right) dt = 4\pi r^3 \underbrace{\int_0^1 t^2 \, dt}_{= \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}} = \frac{4\pi}{3} r^3 \ , \end{aligned}$$

womit wir die bekannte Formel für das Volumen der Kugel gezeigt haben. ◇

Musterbeispiel: Es sei $A := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x_1}{5}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{2}\right)^2 \le 1 \right\}$. Berechne $\int_A {x_1}^2$.

LÖSUNG: Wir haben hier ein Ellipsoid mit $a_1 = 5$, $a_2 = 3$ und $a_3 = 2$. Setze

$$\begin{aligned} x_1 &= 5t\cos\varphi_1\ , \\ x_2 &= 3t\sin\varphi_1\cos\varphi_2\ , \\ x_3 &= 2t\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ , \end{aligned}$$

wobei $0 \le t \le 1$, $0 \le \varphi_1 \le \pi$ und $0 \le \varphi_2 \le 2\pi$. Dann ist $\det dT = 30t^2\sin\varphi_1$. Somit ist

$$\int_A {x_1}^2 = \int_0^1 \Big(\int_0^\pi \Big(\int_0^{2\pi} \underbrace{(5t\cos\varphi_1)^2 30t^2\sin\varphi_1}_{=750t^4\cos^2\varphi_1\sin\varphi_1} d\varphi_2 \Big) d\varphi_1 \Big) dt =$$

$$= 750\int_0^1 t^4 \Big(\int_0^\pi \cos^2\varphi_1\sin\varphi_1 \Big(\underbrace{\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi_2}_{\underset{\text{Integral aus der Volksschule}}{=} 2\pi\times 1 = 2\pi} \Big) d\varphi_1 \Big) dt =$$

$$= 1500\pi\int_0^1 t^4 \Big(\underbrace{\int_0^\pi \cos^2\varphi_1\sin\varphi_1\, d\varphi_1}_{\underset{\left(\substack{s=\cos\varphi_1 \\ ds=-\sin\varphi_1\, d\varphi_1}\right)}{=} \int(-s^2)\,ds = -\frac{s^3}{3} = -\frac{\cos^3\varphi_1}{3}\Big|_0^\pi = \frac{2}{3}} \Big) dt = 1000\pi \underbrace{\int_0^1 t^4\, dt}_{=\frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}} = 200\pi\ ,$$

also ist $\int_A {x_1}^2 = 200\pi$. ◇

17) a) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ beweise, dass $\displaystyle\int_0^\pi \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^\pi \sin^{n-2} x\, dx$ gilt.
Anleitung: Schreibe $\sin^n x = \sin^{n-1} x \sin x$, verwende dann partielle Integration und wende dann die Formel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ an.

b) Verwende Beispiel a) um

$$\int_0^\pi 1\, dx\,,\ \int_0^\pi \sin x\, dx\,,\ \int_0^\pi \sin^2 x\, dx\,,\ \int_0^\pi \sin^3 x\, dx\,,$$
$$\int_0^\pi \sin^4 x\, dx\,,\ \int_0^\pi \sin^5 x\, dx\ \text{ und }\ \int_0^\pi \sin^6 x\, dx$$

zu berechnen.

18) Für $r > 0$ sei $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2 + {x_6}^2 \le r^2 \right\}$. Bestimme $\int_A 1$ (also berechne das Volumen einer 6-dimensionalen Kugel).
Hinweis: Verwende die Ergebnisse aus Beispiel 17) b) für die in dieser Rechnung auftretenden Integrale.

19) Für die folgenden Funktionen f berechne die Ableitung von f (dort, wo diese Funktion vernünftig definiert und differenzierbar ist), die Ableitung von f an der Stelle x_0, und die Richtungsableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v.

a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} {x_2}^2 + {x_5}^{x_3} \\ x_4 + x_3\log x_2 \\ 2x_5 + \arcsin x_1 + 3{x_4}^5 \end{pmatrix}$, $x_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3{x_2}^2 + 2x_1x_3 \\ {x_1}^2 x_2 x_3 \\ {x_1}^2 - 3x_2x_3 \end{pmatrix}$, $x_0 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Musterbeispiel: Betrachte die durch $f(x) := \begin{cases} \frac{4{x_1}^6 x_2}{({x_1}^4+{x_2}^2)^2}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ für $x := \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Berechne für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung von f an der Stelle 0 in Richtung v und untersuche die Differenzierbarkeit der Funktion f an der Stelle 0.

LÖSUNG: Sei $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$. Es ist die Richtungsableitung $\partial_v f(0)$ von f an der Stelle 0 in Richtung v dann

$$\partial_v f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{4(tv_1)^6(tv_2)}{t((tv_1)^4+(tv_2)^2)^2} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{4t^7{v_1}^6 v_2}{t^5(t^2{v_1}^4+{v_2}^2)^2} = \lim_{t\to 0} t^2 \frac{4{v_1}^6 v_2}{(t^2{v_1}^4+{v_2}^2)^2} = 0\,,$$

falls $v_2 \neq 0$. Im Fall $v_2 = 0$ ist $\partial_v f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^9{v_1}^8} = 0$. Somit ist $\partial_v f(0) = 0$ für alle $v \neq 0$.

Jetzt untersuchen wir die Stetigkeit von f an der Stelle 0, indem wir uns entlang der Kurve $\left(\begin{smallmatrix} t \\ t^2 \end{smallmatrix}\right)$ dem Punkt 0 nähern. Es ist

$$\lim_{t\to 0} f\left(\begin{smallmatrix} t \\ t^2 \end{smallmatrix}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{4(t)^6(t^2)}{((t)^4+(t^2)^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{4t^8}{(2t^4)^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1 \neq 0 = f(0)\,,$$

und daher ist f nicht stetig an der Stelle 0. Weil f an der Stelle 0 nicht stetig ist, kann f an der Stelle 0 auch nicht differenzierbar sein.

20) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei für $x := \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ durch $f(x) := \begin{cases} \frac{32{x_1}^7{x_2}^3}{({x_1}^2+{x_2}^6)^4}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$ definiert.
   a) Bestimme für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Richtungsableitung von f an der Stelle 0 in Richtung v.
   b) Untersuche die Differenzierbarkeit der Funktion f an der Stelle 0.
   Hinweis: Durch Betrachten geeigneter Kurven untersuche die Stetigkeit von f.

21) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für $x := \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ durch $f(x) := \begin{cases} \frac{224{x_1}^6{x_2}^9}{({x_1}^{12}+{x_2}^2)^5}\,, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$
   a) Für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ berechne die Richtungsableitung von f an der Stelle 0 in Richtung v.
   b) Untersuche die Differenzierbarkeit der Funktion f an der Stelle 0.

Man kann ähnlich wie die erste Ableitung auch die zweite Ableitung $d^2 f_{(x_0)}$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$ definieren, diese ist eine bilineare Abbildung $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$. Hier lassen wir die Definition weg und beschäftigen uns dann nur mit der zweiten Ableitung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion (die Definition folgt unten) $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$. Sei jetzt $U \subseteq \mathbb{R}^s$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es ist dann $df_{(x_0)}$ eine $1 \times s$-Matrix, also ein s-dimensionaler Zeilenvektor. Weiters seien jetzt $j, k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Die zweite partielle Ableitung (nach x_k und x_j) ist dann als $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_k} f\right)$ definiert (also zuerst wird nach x_k und nachher nach x_j differenziert). Im Fall $j = k$ schreibt man $\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}$. Falls für die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ alle zweiten

Ableitungen (also für alle $j, k \in \{1, 2, \ldots, s\}$) existieren und diese stetig sind, dann nennt man f zweimal stetig differenzierbar (auf U), und man nennt sie auch C^2-Funktion. In diesem Fall gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ für alle $j, k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ (im Allgemeinen gilt das nicht!). Außerdem ist f dann zweimal differenzierbar, und für $x_0 \in U$ gilt

$$d^2 f_{(x_0)}(y_1, y_2) := {y_2}^t \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_s}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_s}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_s}^2}(x_0) \end{pmatrix} y_1 .$$

Dabei ist die Matrix $d^2 f_{(x_0)}$ eine symmetrische Matrix.

22) Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für $x = \binom{x_1}{x_2}$ durch $f(x) := 7{x_1}^3 x_2 + 4e^{x_2 - 3}$ definiert.
   a) Berechne die erste und die zweite Ableitung von f.
   b) Für $x_0 := \binom{2}{3}$ bestimme $f(x_0)$, $df_{(x_0)}$ und $d^2 f_{(x_0)}$.

23) Definiere die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für $x = \binom{x_1}{x_2}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x_1 x_2 \frac{2{x_1}^2 + 5{x_2}^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2} , & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 , & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Berechne $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0)$ und $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0)$.

Wieder sei $U \subseteq \mathbb{R}^s$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man nennt x_0 ein lokales Maximum von f, falls es ein $\rho > 0$ gibt, sodass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U$ mit $|x - x_0| < \rho$ gilt. Analog heißt x_0 ein lokales Minimum von f, falls es ein $\rho > 0$ gibt, sodass $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U$ mit $|x - x_0| < \rho$ gilt. Schließlich nennt man x_0 ein lokales Extremum, wenn x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist. Es gilt der folgende Satz (mit 0 ist der Zeilenvektor mit allen Eintragungen 0 gemeint).
Satz: *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^s$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in x_0 differenzierbar ist. Falls f in x_0 ein lokales Extremum hat, dann gilt $df_{(x_0)} = 0$.*
Wenn $df_{(x_0)} = 0$ gilt, dann nennt man x_0 einen kritischen Punkt von f. Also jedes lokale Extremum einer differenzierbaren Funktion ist ein kritischer Punkt. Umgekehrt muss aber nicht jeder kritische Punkt ein lokales Extremum von f sein (denke etwa im Eindimensionalen an die Funktion x^3). Eine gewisse Bedeutung hat der folgende Satz.
Satz: *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^s$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.*
(1) *Falls $df_{(x_0)} = 0$ gilt und $d^2 f_{(x_0)}$ negativ definit ist, dann besitzt f in x_0 ein lokales Maximum.*
(2) *Falls $df_{(x_0)} = 0$ gilt und $d^2 f_{(x_0)}$ positiv definit ist, dann besitzt f in x_0 ein lokales Minimum.*

24) Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne die kritischen Punkte. Weiters bestimme für jeden kritischen Punkt x die zweite Ableitung $d^2 f_{(x)}$, stelle fest, ob $d^2 f_{(x)}$ positiv (oder negativ) definit ist, und untersuche das Verhalten von f in der Nähe von x.
   a) $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2 + {x_2}^3$.
   b) $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2 + {x_2}^4$.
   c) $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2 - {x_2}^4$.
   d) $f\binom{x_1}{x_2} := {x_1}^2$.

25) Betrachte die durch
$$f(x) := 2x_1{x_2}^2e^{-x_1+6} - 10{x_2}^2e^{-x_1+6} + 6x_2 - 3{x_2}^2$$
für $x = \binom{x_1}{x_2}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Finde die kritischen Punkte von f und stelle fest, ob es sich dabei um lokale Maxima oder lokale Minima handelt.

Sucht man das Maximum, bzw. Minimum einer Funktion (es ist damit das globale Maximum, bzw. globale Minimum gemeint, und es könnte sich auch um die globalen Maxima, bzw. globalen Minima handeln, denn diese müssen ja nicht eindeutig sein), so ist es nicht sinnvoll lokale Maxima, bzw. lokale Minima zu bestimmen. Zunächst einmal sollte man im Inneren des betrachteten Gebiets die kritischen Punkte und die entsprechenden Funktionswerte bestimmen (eventuell auch Punkte, an denen die Funktion nicht differenzierbar ist und die entsprechenden Funktionswerte). Danach untersucht man noch den Rand des Gebiets. Beim größten so erhaltenen Funktionswert hat man dann das Maximum, beim kleinsten das Minimum.

26) Berechne das Maximum der folgenden Funktionen (auf den jeweils angegebenen Intervallen, der maximale Funktionswert ist als Dezimalzahl anzugeben).
   a) $f : [0,4] \to \mathbb{R},\ f(x) := -6x^3 + 162x - 243\,.$
   b) $f : [0,3] \to \mathbb{R},\ f(x) := -9x^3 + 88x\,.$
   c) $f : [0,4] \to \mathbb{R},\ f(x) := -6x^2 + 24x - 15\,.$
   d) $f : [0,3] \to \mathbb{R},\ f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 4x\,.$

   Bemerkung: Die Ergebnisse dieses Beispiels sind für die folgenden beiden Beispiele nützlich.

27) Auf $A := \{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le 4, 0 \le x_2 \le 3\}$ bestimme das Maximum von
$$f\binom{x_1}{x_2} := 54x_1x_2 - 2{x_1}^3x_2 - 9{x_2}^3\,.$$

28) Für die auf $A := \{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le 4, 0 \le x_2 \le 3\}$ durch
$$f\binom{x_1}{x_2} := 8x_1x_2 - 2{x_1}^2x_2 + 2{x_2}^3 - 9{x_2}^2 + 4x_2$$
definierte Funktion berechne das Maximum.

29) Setze $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \left(\frac{x_1}{13}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{8}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_4}{2}\right)^2 \le 1 \right\}$. Bestimme $\int_A {x_2}^2$.

   Hinweis: Für die in dieser Rechnung auftretenden Integrale verwende passende Substitutionen und die Ergebnisse aus Beispiel 17) b).

30) Untersuche, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bezüglich der üblichen Metrik (also der Metrik $d(x,y) := |x-y|$) offen, bzw. abgeschlossen sind (Begründungen geben). Welche dieser Mengen sind kompakt (Begründungen geben).
   a) $[-1,3)$. b) $(-6,2) \cup (11,14)$. c) $\mathbb{R}$.
   d) $[3,7]$. e) $(-2,5) \cap \mathbb{Q}$. f) $[4,+\infty)$.

31) In $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Metrik untersuche (Begründungen geben), welche der folgenden Teilmengen offen, bzw. abgeschlossen, bzw. kompakt sind (dabei ist stets $x = \binom{x_1}{x_2}$).
   a) $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x_1 - 2}{5}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - 8}{3}\right)^2 < 1 \right\}.$
   b) $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 3 \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 + 18)^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 < 1 \right\}.$
   c) $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ und } x_1x_2 = 1 \right\}.$
   d) $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x_1 - 3}{7}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - 6}{4}\right)^2 \le 1 \right\}.$

32) Als Grundraum betrachte $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Metrik (also der Metrik $d(x, y) := |x - y|$). Welche der folgenden Teilmengen sind offen, bzw. abgeschlossen, bzw. kompakt (Begründungen geben).

a) $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. b) $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. c) $\left(0, \sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Q}$.

d) $\left(\sqrt{5}, \pi\right) \cap \mathbb{Q}$. e) $\left(-\sqrt{11}, +\infty\right) \cap \mathbb{Q}$. f) $\left[\sqrt{7}, 3\right] \cap \mathbb{Q}$.

33) Die Menge $\mathbb{R}$ sei mit der üblichen Metrik versehen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n := \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$. Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge U_n offen ist. Weiters bestimme $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, und untersuche ob diese Menge offen oder abgeschlossen ist (Beweise!).

Um Extrema von Funktionen unter Nebenbedingungen zu bestimmen kann man die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren verwenden. Die Grundlage dazu ist das folgende Resultat.
Satz: *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^s$ offen, $x_0 \in U$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k < s$. Weiters seien $g_1, g_2, \ldots, g_k : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $g_j(x_0) = 0$ für $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, und $f : U \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion, die in x_0 differenzierbar ist. Falls f in x_0 ein lokales Extremum auf*

$$\{x \in U : g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \ldots, g_k(x) = 0\}$$

hat und falls $\left\{dg_{1(x_0)}, dg_{2(x_0)}, \ldots, dg_{k(x_0)}\right\}$ linear unabhängig ist, dann gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, sodass

$$df_{(x_0)} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j dg_{j(x_0)}$$

gilt.
Für die praktische Anwendung dieses Satzes definiert man die Funktion

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} := f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} - \textstyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}.$$

Es ist dann $dF = \left(df - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j dg_j \;\; g_1 \;\; \ldots \;\; g_k\right)$, und daher ergibt der obige Satz, dass $dF_{(x_0)} = 0$. Man setzt also die Ableitung von F gleich 0 und sucht so nach den Extrema. In der Praxis setzt man die partiellen Ableitungen nach $x_1, \ldots, x_s$ gleich 0 und beachtet die Nebenbedingungen (Nullsetzen der Ableitungen nach λ_j liefert nur die bekannten Nebenbedingungen).
Hat man nur eine Nebenbedingung ($g(x) = 0$), so setzt man die Funktion einfach

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \\ \lambda \end{pmatrix} := f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} - \lambda g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}.$$

Musterbeispiel: Dem Ellipsoid $\left\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{75} + \frac{x_2^2}{27} + \frac{x_3^2}{12} \le 1\right\}$ soll der volumsgrößte achsenparallele Quader eingeschrieben werden. Berechne die Abmessungen und das Volumen dieses Quaders.
LÖSUNG: Wir können annehmen, dass der Quader symmetrisch um 0 liegt. Ist $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ mit $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ Eckpunkt des Quaders, so hat dieser die Seitenlängen $2x_1$, $2x_2$ und $2x_3$, und das Volumen $f(x) = 8x_1x_2x_3$. Wäre $\frac{x_1^2}{75} + \frac{x_2^2}{27} + \frac{x_3^2}{12} < 1$, so können wir etwa x_1 um so viel erhöhen, dass $\frac{x_1^2}{75} + \frac{x_2^2}{27} + \frac{x_3^2}{12} = 1$ gilt, und erhalten einen Quader mit größerem (oder gleich großem) Volumen. Deshalb können wir annehmen, dass $g(x) = \frac{x_1^2}{75} + \frac{x_2^2}{27} + \frac{x_3^2}{12} - 1 = 0$ erfüllt ist. Wir müssen also das Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ bestimmen, wobei $x_1 \in$

$\left[0, \sqrt{75}\right]$, $x_2 \in \left[0, \sqrt{27}\right]$ und $x_3 \in \left[0, \sqrt{12}\right]$. Definiere $F := 8x_1x_2x_3 - \lambda\left(\frac{x_1^2}{75} + \frac{x_2^2}{27} + \frac{x_3^2}{12} - 1\right)$. Wir berechnen die partiellen Ableitungen von F und setzen sie 0 (Nullsetzen der partiellen Ableitung nach λ liefert nur die bekannte Nebenbedingung, daher lassen wir sie weg).

$$\begin{aligned} 0 &= 8x_2x_3 - 2\lambda\frac{x_1}{75} \\ 0 &= 8x_1x_3 - 2\lambda\frac{x_2}{27} \\ 0 &= 8x_1x_2 - 2\lambda\frac{x_3}{12}\,. \end{aligned}$$

Jetzt multiplizieren wir die erste Gleichung mit x_1 (und bringen $8x_1x_2x_3$ auf die andere Seite, und multiplizieren mit (-1)), die zweite mit x_2 und die dritte mit x_3 und erhalten

$$\begin{aligned} 8x_1x_2x_3 &= 2\lambda\frac{x_1^2}{75} \\ 8x_1x_2x_3 &= 2\lambda\frac{x_2^2}{27} \\ 8x_1x_2x_3 &= 2\lambda\frac{x_3^2}{12}\,. \end{aligned}$$

Addieren der drei Gleichungen ergibt dann wegen der Nebenbedingung

$$24x_1x_2x_3 = 2\lambda\left(\frac{x_1^2}{75} + \frac{x_2^2}{27} + \frac{x_3^2}{12}\right) = 2\lambda.$$

Setzt man jetzt $24x_1x_2x_3$ für 2λ in der ersten Gleichung ein, so ergibt sich $x_1^2 = 25$, also $x_1 = 5$. Analog erhält man aus den anderen beiden Gleichungen $x_2 = 3$ und $x_3 = 2$, und es ist $f\left(\begin{smallmatrix}5\\3\\2\end{smallmatrix}\right) = 240$. Nun betrachten wir den Rand. Dieser besteht aus jenen Punkten des Ellipsoids (im ersten Oktanten), die $x_j = 0$ für ein $j \in \{1, 2, 3\}$ erfüllen (aus $x_1 = \sqrt{75}$ folgt $x_2 = x_3 = 0$, aus $x_2 = \sqrt{27}$ folgt $x_1 = x_3 = 0$ und aus $x_3 = \sqrt{12}$ folgt $x_1 = x_2 = 0$). In diesen Fällen nimmt die Funktion f den Wert $0 < 240$ an. Somit hat der volumsgrößte Quader die Seitenlängen 10, 6 und 4, und sein Volumen ist 240.

34) Auf der Menge

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^6 : \frac{x_1^2}{486} + \frac{x_2^2}{294} + \frac{x_3^2}{216} + \frac{x_4^2}{96} + \frac{x_5^2}{54} + \frac{x_6^2}{24} = 1,\right.$$
$$\left. x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0\right\}$$

bestimme das Maximum der Funktion $f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{smallmatrix}\right) := x_1x_2x_3x_4x_5x_6\,.$

35) Berechne das Maximum von

$$f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{smallmatrix}\right) := x_1^3x_2x_3^2x_4$$

auf $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 : \frac{x_1^2}{84} + \frac{x_2^2}{63} + \frac{x_3^2}{56} + \frac{x_4^2}{28} = 1,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0\right\}$.

36) Löse die folgende Aufgabe sowohl auf die „klassische Methode“ (etwa x_2 durch x_1 ausdrücken, und dann in die Funktion einsetzen) als auch mit den Lagrange'schen Multiplikatoren.
Der Ellipse $\frac{{x_1}^2}{18} + \frac{{x_2}^2}{2} \leq 1$ soll das flächengrößte achsenparallele Rechteck eingeschrieben werden. Welche Abmessungen muss dieses Rechteck haben, und wie groß ist dann die Fläche?

37) Finde das Maximum der Funktion
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := {x_1}^2 {x_2}^7 x_3 {x_4}^6$$
auf $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \frac{{x_1}^2}{288} + \frac{{x_2}^2}{112} + \frac{{x_3}^2}{64} + \frac{{x_4}^2}{24} = 1,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \right\}$.

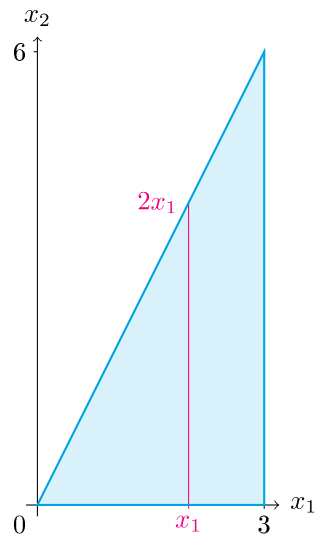
38) Berechne das Minimum und das Maximum der Funktion
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$$
auf $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \frac{{x_1}^2}{25} + \frac{{x_2}^2}{9} + \frac{{x_3}^2}{4} = 1 \right\}$.

39) Man soll der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : {x_1}^6 + {x_2}^6 \leq 2 \right\}$ ein Rechteck einschreiben, und zwar so, dass die Fläche möglichst groß wird. Berechne die Abmessungen und die Fläche dieses Rechtecks.

40) Bestimme auf der Menge
$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 : \frac{{x_1}^2}{270} + \frac{{x_2}^2}{240} + \frac{{x_3}^2}{135} + \frac{{x_4}^2}{15} + \frac{{x_5}^2}{15} + \frac{{x_6}^2}{10} = 1, \right.$$
$$\left. x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \right\}$$
das Maximum der Funktion $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} := {x_1}^2 x_2 x_3 {x_4}^4 x_5 {x_6}^6$.

41) Es soll der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : {x_1}^{10} + {x_2}^{10} + {x_3}^{10} + {x_4}^{10} \leq 236\,196 \right\}$ der volumsgrößte achsenparallele Quader (stets vierdimensional gemeint) eingeschrieben werden. Bestimme die Abmessungen und das Volumen dieses Quaders.

Musterbeispiel: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $\binom{0}{0}$, $\binom{3}{0}$ und $\binom{3}{6}$. Berechne $\int_A 2{x_1}^3 x_2$.
LÖSUNG: Zuerst machen wir eine Skizze.



Nach dem Satz von Fubini kann man hier entweder zuerst nach x_1 und dann nach x_2 oder zuerst nach x_2 und dann nach x_1 integrieren. Wir entscheiden uns für die zweite Möglichkeit, und nachdem unser letztes Integral dann das Integral nach x_1 ist, müssen wir uns den kleinstmöglichen und den größtmöglichen Wert für x_1 überlegen. Aus der Skizze sehen wir, dass hier $0 \leq x_1 \leq 3$ gilt, also haben wir $\int_0^3 \dots \, dx_1$. Jetzt müssen wir uns für ein festes $x_1 \in [0,3]$ den kleinstmöglichen und den größtmöglichen dazugehörigen Wert für x_2 überlegen. Betrachtet man die rosa Linie in der Skizze, so zeigt uns diese für ein festes x_1 die dazugehörigen Werte für x_2, und wir sehen, dass $0 \leq x_2 \leq 2x_1$ gilt. Deshalb ist

$$\int_A 2{x_1}^3 x_2 = \int_0^3 \Bigg(\underbrace{\int_0^{2x_1} 2{x_1}^3 x_2 \, dx_2}_{= {x_1}^3 {x_2}^2 \big|_0^{2x_1} = 4{x_1}^5} \Bigg) \, dx_1 =$$

$$= \underbrace{\int_0^3 4{x_1}^5 \, dx_1}_{= \frac{2}{3}{x_1}^6 \big|_0^3 = 486} = 486\,,$$

also $\displaystyle\int_A 2{x_1}^3 x_2 = 486\,.$ ◇

42) Berechne $\displaystyle\int_A x_1 \sin(x_1 x_2)$, wobei $A := \{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ ist.

43) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \\ \sqrt{3\pi} \end{pmatrix}$. Bestimme $\displaystyle\int_A 18{x_1}^2 \sin(x_1 x_2)\,.$

44) Für die Menge $A := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^5 : \left(\frac{x_1}{9}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{7}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{5}\right)^2 + \left(\frac{x_4}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_5}{2}\right)^2 \leq 1 \right\}$ berechne $\displaystyle\int_A \left({x_1}^2 + {x_2}^2\right).$
Hinweis: Für die in dieser Rechnung auftretenden Integrale verwende $\cos^2 = 1 - \sin^2$ und die Ergebnisse aus Beispiel 17) b).

45) Beweise, dass $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ existiert.

Für das folgende Beispiel darf die Existenz des gesuchten Integrals vorausgesetzt werden (diese kann man aus der Rechnung beweisen). Man kann auch für $\int_{\mathbb{R}^s} f$ Ellipsoidkoordinaten (bzw. Polarkoordinaten) verwenden, soferne das Integral existiert. Wie im Standardfall verwendet man diese Koordinaten, wobei man $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = 1$ setzt. Die Grenzen für $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{s-1}$ bleiben gleich wie im Standardfall, nur bei t ändern sich die Grenzen auf $0 \leq t < +\infty$.

46) Berechne $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-({x_1}^2+{x_2}^2)}$.

47) Bestimme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.