Proseminar zu
Eindimensionale Analysis für
Lehramtskandidatinnen und -kandidaten

Sommersemester 2025

Musterbeispiel: Löse $\frac{4x-5}{x-2} < x$.
LÖSUNG: Beachte, dass für $c > 0$ die Ungleichung $a < b$ zu $ac < bc$ äquivalent ist, und für $c < 0$ die Ungleichung $a < b$ zu $ac > bc$ äquivalent ist.
1. Fall: Angenommen $x > 2$. Dann ist $x - 2 > 0$ und daher $\frac{4x-5}{x-2} < x$ zu

$$4x - 5 < x(x - 2) = x^2 - 2x$$

äquivalent, letzteres ist zu $0 < x^2 - 6x + 5$ äquivalent. Da $x = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 = 1, 5$ die Nullstellen von $x^2 - 6x + 5$ sind, gilt $x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1)$, also ist $\frac{4x-5}{x-2} < x$ zu $0 < (x-5)(x-1)$ äquivalent. Ein Produkt ist genau dann positiv, wenn beide Faktoren positiv (also $x > 5$ und $x > 1$, daher $x > 5$) oder beide negativ (also $x < 5$ und $x < 1$, daher $x < 1$) sind. Hier kann wegen $x > 2$ der Fall $x < 1$ nicht eintreten, und auf $x > 5$ hat die Bedingung $x > 2$ keinen Einfluss, somit ist $\frac{4x-5}{x-2} < x$ zu $x \in (5, +\infty)$ äquivalent.
2. Fall: Angenommen $x < 2$. Hier ist $x - 2 < 0$ und daher $\frac{4x-5}{x-2} < x$ zu

$$4x - 5 > x(x - 2) = x^2 - 2x$$

äquivalent, und das zu $0 > x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1)$ äquivalent (Nullstellen wurden bereits im 1. Fall berechnet). Ein Produkt ist genau dann negativ, wenn einer Faktoren positiv und der andere negativ ist (also $x > 5$ und $x < 1$, was offensichtlich nicht geht, oder $x < 5$ und $x > 1$, also $x \in (1, 5)$). Wegen $x < 2$ ist $\frac{4x-5}{x-2} < x$ zu $x \in (1, 2)$ äquivalent.
Insgesamt ist also $\frac{4x-5}{x-2} < x$ zu $x \in (1, 2) \cup (5, +\infty)$ äquivalent.

1) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\dfrac{2x-9}{x-6} > x - 2$ gilt.

2) Finde die Lösungen der folgenden Ungleichungen (in $\mathbb{R}$).

a) $\dfrac{7x-20}{x-4} \leq x + 1\,.$ b) $\dfrac{8x+23}{x-5} < 3x + 5\,.$

Musterbeispiel: Sei $a_n := \dfrac{5n^2+17n+19}{n^2+3n+7}$. Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und führe den Beweis mit Hilfe der Definition des Grenzwerts.

LÖSUNG: Zunächst ist $a_n = \dfrac{5n^2+17n+19}{n^2+3n+7} = \dfrac{5+\overbrace{\frac{17}{n}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{19}{n^2}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{7}{n^2}}_{\to 0}} \to 5$, also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - 5| = \frac{|5n^2+17n+19-5n^2-15n-35|}{|n^2+3n+7|} =$$

$$= \frac{|2n-16|}{n^2+3n+7} \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \frac{2n+\overbrace{16}^{\leq 16n}}{n^2+\underbrace{3n}_{\geq 0}+\underbrace{7}_{\geq 0}} \leq \frac{2n+16n}{n^2+0+0} = \frac{18n}{n^2} = \frac{18}{n},$$

und deshalb

$$|a_n - 5| \leq \frac{18}{n}. \tag{1}$$

Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig). Wegen des Archimedischen Axioms gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{18}{\varepsilon}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $N > \frac{18}{\varepsilon}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ (beliebig). Weil $n \geq N > \frac{18}{\varepsilon}$ ergibt sich $\frac{18}{n} < \varepsilon$. Daher gilt wegen (1), dass $|a_n - 5| \leq \frac{18}{n} < \varepsilon$. Damit haben wir gezeigt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$ gilt. $\square$

3) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch $x_n := \dfrac{3n+1}{n+2}$ definiert. Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und beweise das Ergebnis mit der Definition des Grenzwerts.

4) Bestimme den Grenzwert der folgenden Folgen und beweise das Ergebnis mit Hilfe der Definition des Grenzwerts.
   a) $a_n := \dfrac{2n^2+5n+6}{n^2+n+4}$.
   b) $x_n := \dfrac{4n^2+7n-2}{n^3+6n^2+3n+8}$.
   c) $b_n := \dfrac{3n^3+9n^2+7n+8}{n^3+3n^2+2n+7}$.

5) Von den folgenden Folgen bestimme den Grenzwert und beweise das Ergebnis mit der Definition des Grenzwerts.
   a) $a_n := \dfrac{5n^3+7n^2+12n+19}{n^3+2n^2+5n+3}$.
   b) $a_n := \dfrac{2n^2+3n-1}{n^2+4}$.
   c) $x_n := \dfrac{7n^2+10n+5}{3n^2+4n+6}$.

Für Beispiel 6) c) darf der folgende Satz verwendet werden.
Satz. *Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und für $k \in \mathbb{Z}$ gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0$.

6) Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch $a_n := \dfrac{n^{18}}{\left(1+\frac{6}{100}\right)^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

a) Mit Hilfe eines Computers (oder Taschenrechners) berechne a_5, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{40}, a_{50} und a_{100}.

b) Welche Vermutung über den Grenzwert von (a_n) würde Beispiel a) nahelegen?

c) Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

7) Berechne (bzw. zeige die Divergenz) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

Achtung! Die folgende Argumentation ist falsch, wenn man $\lim_{n\to\infty} a_n$ für die durch $a_1 := 2$ und $a_n := 2a_{n-1} - 1$ für $n > 1$ definierte Folge bestimmen will.
Setze $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2a_{n-1} - 1) = 2a - 1$, und deshalb ist $a = 1$, also $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
Hier wurde der Fehler gemacht, dass die Konvergenz angenommen, aber nicht bewiesen wurde! Man müsste die Konvergenz der Folge beweisen. In diesem Fall ist aber $a_n = 1 + 2^{n-1}$ (kann man durch Induktion zeigen), und daher $a_n \to +\infty$, also es gilt sicher nicht $a_n \to 1$.
Richtig wäre bei ähnlichen Beispielen folgende Vorgangsweise (siehe auch das folgende Musterbeispiel). Zunächst ist es sinnvoll anzunehmen, dass die Folge konvergiert, und den Grenzwert zu bestimmen. Es muss dann aber die Konvergenz der Folge noch bewiesen werden. In vielen Fällen funktioniert dass, indem man beweist, dass die Folge monoton und beschränkt ist. Indem man a_2 ausrechnet und mit a_1 vergleicht, kann man einmal vermuten, dass die Folge monoton fallend oder steigend ist (falls $a_2 \le a_1$ monoton fallend, und falls $a_2 \ge a_1$ monoton steigend). Dann probiert man durch Induktion die Monotonie zu beweisen. Weiters probiert man durch Induktion zu beweisen, dass im Fall der monoton fallenden Folge diese nach unten beschränkt ist, und im Fall der monoton steigenden Folge diese nach oben beschränkt ist, wobei sich für die Schranke der vermutete Grenzwert anbietet. Bei einer monotonen und beschränkten Folge hat man die Konvergenz, und der Grenzwert muss daher der zuvor berechnete sein.

Musterbeispiel: Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_1 := 4$ und $a_n := \sqrt{16a_{n-1} + 57}$ für $n > 1$ definiert. Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
LÖSUNG: Angenommen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wäre konvergent (beachte, dass wegen ihrer Definition $a_n \ge 0$ für alle n gilt). Setze $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{16a_{n-1}+57} \underbrace{=}_{\text{da } x \mapsto \sqrt{16x+57} \text{ stetig ist}} \sqrt{16a+57}\,,$$

und daher $a^2 = 16a + 57$, also $a^2 - 16a - 57 = 0$. Als Lösung erhält man $a = 8 \pm \sqrt{8^2 + 57} = 8 \pm 11 = -3, 19$. Da $a \ge 0$ muss dann $a = 19$ gelten.
Jetzt muss noch bewiesen werden, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Es ist $a_2 = \sqrt{16a_1 + 57} = \sqrt{16 \times 4 + 57} = 11 > 4 = a_1$. Wir beweisen durch Induktion, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend ist (monoton steigend würde genügen). Nachdem $a_1 < a_2$ gilt, ist der Induktionsanfang bereits gezeigt. Nun sei $n > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $a_{n-1} < a_n$. Deshalb ist $16a_{n-1} + 57 < 16a_n + 57$ und weil $x \mapsto \sqrt{x}$ streng monoton steigend ist gilt $a_n = \sqrt{16a_{n-1}+57} < \sqrt{16a_n+57} = a_{n+1}$. Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend.
Jetzt zeigen wir durch Induktion, dass $a_n < 19$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt ($a_n \le 19$ würde genügen). Für $n = 1$ ist $a_1 = 4 < 19$, womit der Induktionsanfang gezeigt ist. Es sei jetzt $n > 1$. Nach

Induktionsvoraussetzung ist $a_{n-1} < 19$. Also ist $16a_{n-1} + 57 < 16 \times 19 + 57 = 361$ und weil $x \mapsto \sqrt{x}$ streng monoton steigend ist erhält man $a_n = \sqrt{16a_{n-1} + 57} < 19$. Daher ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt.
Weil die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und nach oben beschränkt ist, ist sie konvergent. Ihr Grenzwert muss daher der oben berechnete Wert sein. Deshalb ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 19$. $\square$

8) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $a_1 := 2$ und $a_n := \sqrt{8a_{n-1} + 9}$ für $n > 1$ definiert. Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

9) Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{12^n + 9^n + 5^n}$.

10) Für die durch $a_1 := 3$ und $a_n := \sqrt{12a_{n-1} + 405}$ für $n > 1$ definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ berechne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Man nennt $\alpha := \limsup_{n\to\infty} a_n$ den *Limes Superior* dieser Folge, falls α der größte Wert ist, sodass es eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to \alpha$ gibt. Für nicht nach oben beschränkte Folgen wird oft der Wert $+\infty$ als Limes Superior zugelassen, und der Wert $-\infty$, falls $a_n \to -\infty$ (sonst müsste man bei der Definition des Limes Superior fordern, dass die Folge beschränkt ist). Analog dazu nennt man $\beta := \liminf_{n\to\infty} a_n$ den *Limes Inferior* dieser Folge, wenn β der kleinste Wert ist, sodass es eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to \beta$ gibt. Bei nicht nach unten beschränkten Folgen wird oft der Wert $-\infty$ als Limes Inferior zugelassen, und der Wert $+\infty$, falls $a_n \to +\infty$. Die Menge der Grenzwerte von Teilfolgen einer Folge wird als Menge der Häufungswerte dieser Folge bezeichnet. Also ist der Limes Superior der größte Häufungswert, und der Limes Inferior der kleinste Häufungswert.
Als Beispiel dazu betrachten wir die Folge $a_n := (-1)^n$. Für gerade n ist $a_n = 1 \to 1$, und für ungerade n ist $a_n = -1 \to -1$. Hier ist die Menge der Häufungswerte gleich $\{-1, 1\}$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = -1$. Im Allgemeinen kann die Menge der Häufungswerte komplizierter sein, sie kann auch abzählbar oder überabzählbar sein!
Für Reihen kann man den Wurzeltest folgendermaßen formulieren.
Satz. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.*
(1) *Falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*
(2) *Wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.*
Während beim Wurzeltest in beiden Fällen der Limes Superior verwendet wird, ist es beim Quotiententest im zweiten Fall der Limes Inferior. Jetzt formulieren wir den Quotiententest.
Satz. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*
(1) *Falls $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*
(2) *Wenn $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.*

11) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei durch $a_n := \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^n, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \end{cases}$ definiert.

a) Untersuche die Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und berechne den Wert dieser Reihe.

b) Berechne $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

c) Jetzt berechne $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ und $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

d) Kann man bei dieser Reihe die Konvergenz (bzw. Divergenz) mit Hilfe des Wurzeltests zeigen? Und kann man die Konvergenz (bzw. Divergenz) dieser Reihe mit Hilfe des Quotiententests zeigen?