ÜBUNGEN ZU ANALYSIS IN EINER VARIABLE

ROLAND DONNINGER

(1) Rufen Sie sich in Erinnerung, wie die rationalen Zahlen im Studium eingeführt wurden. Welche Begriffe sind dafür notwendig? Welche konzeptuellen Schwierigkeiten gibt es? Vergleichen Sie den Hochschulzugang mit der Schule (nehmen Sie zum Beispiel ein Schulbuch Ihrer Wahl zur Hand oder erinnern Sie sich an den eigenen Unterricht). Wie spricht man dort über rationale Zahlen? Welche Aspekte sind mathematisch einwandfrei und wo wird auf die Anschauung zurückgegriffen?

(2) Sei $k \in \mathbb{Z}$ und k^2 gerade. Zeigen Sie, dass dann auch k gerade sein muss.

(3) Sei $(G, \oplus)$ eine abelsche Gruppe. Üblicherweise wird die Abbildung $\oplus : G \times G \to G$ abkürzend geschrieben als $\oplus(a, b) =: a \oplus b$ ("Verknüpfungsschreibweise"). Wie lauten die Gruppenaxiome, wenn man auf diese abkürzende Schreibweise verzichtet, also die "Abbildungsschreibweise" beibehält?

(4) Sei $\odot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in "Verknüpfungsschreibweise" definiert durch $a \odot b := a^b$. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\odot$ nicht assoziativ ist.

(5) Zeigen Sie: In einer Gruppe gibt es genau ein neutrales Element und genau ein inverses Element. Was folgt daraus für Körper?

(6) Sei $K := \{O, I\}$ mit den Verknüpfungen $\oplus, \otimes : K \times K \to K$

$$\begin{aligned} O \oplus O &:= O & \qquad O \otimes O &:= O \\ I \oplus O &:= I & I \otimes O &:= O \\ O \oplus I &:= I & O \otimes I &:= O \\ I \oplus I &:= O & I \otimes I &:= I \end{aligned}$$

in der üblichen abkürzenden Schreibweise. Zeigen Sie, dass $(K, \oplus, \otimes)$ ein Körper ist. Können Sie sich eine Anwendung dieses Körpers in der Praxis vorstellen?

(7) Nehmen Sie Ihr altes Schulbuch zur Hand und versuchen Sie herauszufinden, wie und mit welcher Motivation die reellen Zahlen dort eingeführt wurden. Welche Schritte sind mathematisch akzeptabel und was wirkt suspekt? Ist der Zugang aus der Schule für die wissenschaftliche Mathematik geeignet? Falls ja, warum? Falls nein, warum nicht?

(8) Sei $(K, \oplus, \otimes)$ ein Körper und $a, b \in K$.
   (a) Zeigen Sie, dass $a \otimes 0_K = 0_K$, wobei 0_K das neutrale Element bezüglich $\oplus$ bezeichnet. Warum muss man hier etwas beweisen? Ist es nicht "eh klar", dass "0 mal irgendwas gleich 0 ist"?
   (b) Zeigen Sie weiters, dass aus $a \otimes b = 0_K$ folgt, dass $a = 0_K$ oder $b = 0_K$. Diese Eigenschaft heißt *Nullteilerfreiheit*. Haben Sie eine Erklärung für diesen Namen?

(9) Diese Aufgabe zeigt, wie die Bruchrechenregeln aus den Körperaxiomen folgen. Sei $(K, \oplus, \otimes)$ ein Körper. Für $a \in K$ bezeichnen wir das inverse Element bezüglich $\otimes$ mit $\frac{1}{a}$, d.h. $a \otimes \frac{1}{a} = 1_K$, wobei 1_K das neutrale Element bezüglich $\otimes$ ist. Weiters schreiben wir verkürzend $a \otimes \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Zeigen Sie, dass
   (a) $\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{a \otimes c}{b \otimes d}$
   (b) $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{(a \otimes d) \oplus (b \otimes c)}{b \otimes d}$

für alle $a, c \in K$ und $b, d \in K \setminus \{0_K\}$ gilt, wobei 0_K das neutrale Element bezüglich $\oplus$ bezeichnet.

(10) Sei $(K, \oplus, \otimes)$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in K$. Wie üblich verwenden wir die Potenzschreibweise

$$a^m := \underbrace{a \otimes a \otimes \cdots \otimes a}_{m \text{ Faktoren}}.$$

Zeigen Sie, dass $a^{m+n} = a^m \otimes a^n$, $(a^m)^n = a^{mn}$ und $(a \otimes b)^m = a^m \otimes b^m$.

(11) Bei der ersten Bekanntschaft mit negativen Zahlen sorgt "Minus mal Minus = Plus" oft für Erstaunen. Formulieren Sie diese Tatsache mathematisch in einem abstrakten angeordneten Körper $(K, \otimes, \oplus, \prec)$ und zeigen Sie, dass sie zwingend aus den Axiomen folgt. Ist dafür die volle Struktur eines Körpers notwendig?

(12) Wir wissen aus der Schule, dass sich bei Ungleichungen das Ungleichheitszeichen bei Multiplikation mit einer negativen Zahl umdreht. Formulieren Sie diese Aussage mathematisch präzise in einem abstrakten angeordneten Körper $(K, \otimes, \oplus, \prec)$ und beweisen Sie sie.

(13) Sei $A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Zeigen Sie, dass 2 eine obere Schranke von A ist.

(14) Wir betrachten den angeordneten Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$. Sei $A := \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}$. Zeigen Sie, dass $\sup A = 1$.

(15) Entwickeln Sie analog zur Vorlesung den Begriff der *größten unteren Schranke* in einem angeordneten Körper $(K, \otimes, \oplus, \prec)$ und definieren Sie das Infimum $\inf A$ einer Teilmenge $A \subset K$.

(16) Sei $(K, \otimes, \oplus, \prec)$ ein angeordneter Körper und $A \subset K$. Weiters bezeichne $0_K \in K$ das neutrale Element bezüglich $\oplus$ und

$$-A := \{b \in K : \exists a \in A : a \oplus b = 0_K\}.$$

Die Teilmenge $-A \subset K$ besteht also genau aus den inversen Elementen bezüglich $\oplus$ der Elemente in A. Zeigen Sie, dass

$$\inf A \oplus \sup(-A) = 0_K.$$

Was bedeutet das konkret in $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$?

(17) Skizzieren Sie die folgenden Mengen auf der Zahlengerade.

$$A := \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \geq 2\}, \qquad B := \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq 1\}$$

(18) Formulieren und beweisen Sie die „umgekehrte" Dreiecksungleichung vollständig.

(19) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

(20) Bei Einstellungstests und Ähnlichem wird oft zur Überprüfung der logischen Denkfähigkeit die Fortsetzung von Zahlenfolgen gefordert. Ein einfaches Beispiel ist etwa die Aufgabe, die Folge $2, 4, 6$ fortzusetzen. Was ist von solchen Aufgaben zu halten und welche Antwort würde wirklich das logisch-mathematische Verständnis nachweisen? Stellen Sie sich vor, Sie müssen Ihr Gegenüber bei einem Einstellungstest von Ihrer Antwort überzeugen und untermauern Sie Ihre Argumentation durch ein konkretes Beispiel.

(21) Beschreiben Sie in Worten, wie die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert ist. Berechnen Sie f_5 mit der Hand und f_{30} mit Hilfe eines Taschenrechners oder Computers. Berechnen Sie im Gegensatz dazu das 30. Glied der Folge $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$. Warum ist das

ganz leicht, während für die Fibonacci-Folge ein technisches Hilfsmittel notwendig ist?

(22) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Was kann man daher über $\lim_{n\to\infty} a_{n+1000}$ oder $\lim_{n\to\infty} a_{n+k}$ für $k \in \mathbb{N}$ sagen?

(23) Beweisen Sie direkt aus der Definition, dass die Folge $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

(24) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_n := \begin{cases} n^2 & \text{für } n \leq 1000 \\ \frac{1}{n} & \text{für } n \geq 1001 \end{cases}.$$

Zeigen Sie direkt aus der Definition, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

(25) Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe folgende Eigenschaft: Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $M_\epsilon \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| \leq 5\epsilon$$

für alle $n \geq M_\epsilon$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

(26) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_n - a| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

(27) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit der Eigenschaft, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|a_n - b_n| < \epsilon$$

für alle $n \geq N_\epsilon$. Zeigen Sie, dass dann auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

(28) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und dass

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$$

gilt.

(29) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Weiters existiere ein $\delta > 0$, sodass $|a_n| > \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass daraus $|a| \geq \delta$ folgt. Zeigen Sie weiters, dass die stärkere Aussage $|a| > \delta$ im Allgemeinen nicht gilt.

(30) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und folgern Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

(31) Formulieren und beweisen Sie die Monotonieeigenschaft des Grenzwerts (Hinweis: Beweis durch Widerspruch).

(32) Erklären Sie das Heron-Verfahren geometrisch und leiten Sie die Rekursionsformel aus der Vorlesung her. Verwenden Sie das Heron-Verfahren, um $\sqrt{2}$ auf 20 Stellen genau zu berechnen (mit Hilfe von Technologie).

(33) Sei $x > 0$. Wir definieren $a_n \in \mathbb{R}$ rekursiv durch $a_1 := 1$ und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(34) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4}{(3n+2)^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}.$$

(35) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2+n} - \sqrt{n}\right), \qquad \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n}\left(\sqrt{2+n} - \sqrt{n}\right)\right].$$

(36) Zeigen Sie direkt aus der Definition, dass $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

(37) Welche der angegebenen Ausdrücke könnten Teilfolgen von $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $(\frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}, \dots)$
(b) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$
(c) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$
(d) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \dots)$
(e) $(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots)$
(f) $(10^{-10}, 10^{-11}, 10^{-12}, 10^{-15}, \dots)$

(38) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeigen Sie, dass jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergiert und den Grenzwert a hat.

(39) Kommentieren Sie die folgenden Aussagen in Bezug auf ihre mathematische Korrektheit. Geben Sie Beispiele und Gegenbeispiele, um Ihre Argumentation zu untermauern.

- Wenn eine Folge gegen einen Grenzwert konvergiert, kommt sie diesem beliebig nahe, erreicht ihn aber nie.
- Eine konvergente Folge erreicht ihren Grenzwert im Unendlichen.
- Bei einer konvergenten Folge liegen unendlich viele Folgenglieder in einer Umgebung des Grenzwerts.
- Bei einer konvergenten Folge liegen in jeder Umgebung des Grenzwerts unendlich viele Folgenglieder.
- Eine konvergente Folge kommt ihrem Grenzwert immer näher.
- Eine Folge, die nicht konvergiert, ist unbeschränkt.
- Jede beschränkte Folge konvergiert.

(40) Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Was passiert bei $q = 1$?

(41) Formulieren und beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung.

(42) Beweisen Sie, dass $0,\dot{3}$ eine Dezimaldarstellung der rationalen Zahl $\frac{1}{3}$ ist.

(43) Welche rationale Zahl wird durch die Dezimaldarstellung $0,\dot{2}$ dargestellt?

(44) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

(45) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(46) Zeigen Sie, dass „absolute Konvergenz bei Folgen“ nicht Konvergenz impliziert. Zeigen Sie also, dass aus der Existenz von $\lim_{n\to\infty} |a_n|$ im Allgemeinen nicht folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(47) Berechnen Sie mit Hilfe eines Computers die Partialsumme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

der harmonischen Reihe für $n = 100$, $n = 1000$, $n = 10000$. Wie weit können Sie das treiben, bis Ihr Computer „aufgibt“ und welche Partialsummen erreichen Sie damit?

(48) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dann und nur dann konvergiert, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \epsilon$$

für alle $n \geq m \geq N_\epsilon$.

(49) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit Grenzwert a. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ konvergiert und beweisen Sie die Ungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - a\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(50) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ so, dass

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $M \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert.

(51) Formulieren und beweisen Sie das Majorantenkriterium.

(52) Diese Aufgabe behandelt das sogenannte *Wurzelkriterium*. Sei $q \in (0, 1)$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq q$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert.

(53) Nehmen Sie ein Schulbuch Ihrer Wahl und stellen Sie fest, wie die Exponentialfunktion dort eingeführt wird. Welche Aspekte der Definition sind mathematisch akzeptabel und wo wird „geschummelt“? Wird das „Schummeln“ thematisiert oder stillschweigend darüber hinweggegangen?

(54) Formulieren und beweisen Sie den binomischen Lehrsatz.

(55) Berechnen Sie mit Hilfe eines Computers oder Taschenrechners rationale Approximationen der Eulerschen Zahl e direkt aus der Definition über die Partialsummen der Exponentialreihe. Wieviele Terme brauchen Sie, um die ersten 10 Nachkommastellen korrekt zu bekommen? Was schließen Sie daher gefühlsmäßig über die Konvergenzgeschwindigkeit? Wie glauben Sie berechnet der Taschenrechner die Zahl e?

(56) Beweisen Sie die absolute Konvergenz der Cosinusreihe.

(57) Nehmen Sie ein Schulbuch Ihrer Wahl und versuchen Sie herauszufinden, wie der Begriff der Stetigkeit eingeführt wird. Erklären Sie, was Sie daran gut finden und was schlecht. Wo werden Kompromisse eingegangen hinsichtlich der mathematischen Rigorosität und warum ist das in der Schule erforderlich?

(58) Sei $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie direkt aus der Definition, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) := ax$, stetig ist.

(59) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ stetig ist. Wie verträgt sich diese Beobachtung mit „Schulbuchdefinitionen" der Stetigkeit?

(60) Bestimmen Sie durch Negation der Definition der Stetigkeit, was es streng formal heißt, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ *nicht* stetig ist.

(61) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie (streng formal), dass f im Punkt 0 nicht stetig ist.

(62) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$. Weiters seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $fg : A \cap B \to \mathbb{R}$ und $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ mit $D := \{x \in A \cap B : g(x) \neq 0\}$ stetig sind.

(63) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann ein $\delta > 0$ existiert, sodass $f(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Wie verhält es sich, wenn man die Bedingung $f(x_0) > 0$ durch $f(x_0) \geq 0$ ersetzt?

(64) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, unter Verwendung der Stetigkeit bei 0, dass die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 stetig ist.

(65) Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt und nichtleer. Zeigen Sie, dass dann eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ existiert, sodass

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \inf A.$$

(66) Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und nichtleer. Zeigen Sie, dass dann eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus A$ mit

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \sup A$$

existiert.

(67) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz und zeigen Sie anhand von geeigneten Beispielen, dass er nicht gilt, falls
  (a) die Funktion nicht stetig ist,
  (b) der Definitionsbereich kein Intervall ist.

(68) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Zeigen Sie, dass jeder Wert im Intervall $[f(a), f(b)]$ von f angenommen wird, also dass für jedes $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ existiert mit $f(x) = y$.

(69) Zeigen Sie, dass das stetige Bild eines Intervalls ein Intervall ist, also dass jede stetige Funktion Intervalle auf Intervalle abbildet. [Hinweis: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall dann und nur dann, wenn A aus mindestens zwei Punkten besteht und für je drei Punkte $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ und $a, c \in A$ auch $b \in A$ gilt.]

(70) Zeigen Sie, dass abgeschlossene Intervalle abgeschlossen sind. [Sprachlich gesehen eine herrliche Aufgabe. Alle Nichtmathematiker*innen, die das lesen, halten uns für verrückt. Aber der Punkt ist natürlich, dass die Begriffe „abgeschlossenes Intervall" und „abgeschlossen" (für Mengen) unterschiedlich definiert sind. Wir zeigen also in dieser Aufgabe, dass die Bezeichnungen vernünftig gewählt sind.]

(71) Sei $D := [0, 1] \cup (2, 3]$ und $f : D \to f(D)$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{für } x \in (2, 3] \end{cases}.$$

  (a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Berechnen Sie $f(D)$.
(c) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.
(d) Zeigen Sie, dass $f^{-1} : f(D) \to D$ nicht (überall) stetig ist.

(72) Seien $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad (ab)^x = a^x b^x, \qquad e^x = \exp(x), \qquad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

(73) Zeigen Sie direkt aus der Definition, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, differenzierbar ist mit Ableitung $f'(x) = 3x^2$.

(74) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 differenzierbar ist und

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

gilt.

(75) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_{-n}(x) = x^{-n}$. Zeigen Sie, dass f_{-n} differenzierbar ist und

$$f'_{-n}(x) = -nx^{-n-1}.$$

(76) Verwenden Sie das Korollar über die Ableitung der Umkehrfunktion um die Ableitung der Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, gegeben durch $f(x) = \sqrt[3]{x}$, zu berechnen.

(77) Zeigen Sie, dass die dritte Wurzel $\sqrt[3]{\cdot} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ bei 0 nicht differenzierbar ist.

(78) Formulieren und beweisen Sie die Quotientenregel der Differentialrechnung.

(79) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$x^k - y^k = (x - y) \sum_{\ell=0}^{k-1} x^\ell y^{k-1-\ell}.$$

(80) Zeigen Sie, dass $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $\sin' = \cos$.

(81) (a) Definieren Sie die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(b) Skizzieren Sie den Graphen von exp. Welche Eigenschaften von exp verwenden Sie für die Skizze? Beschreiben Sie kurz, wie man diese Eigenschaften beweist.
(c) Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ sei $f_{a,b,c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_{a,b,c}(x) = ae^{b(x-c)}$. Erklären Sie ausgehend von $f_{1,1,0}$, wie sich der Graph der Funktion $f_{a,b,c}$ ändert, wenn man die Parameter a, b, c variiert.

(82) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar. Weiters habe f im Punkt x_0 ein lokales Minimum. Zeigen Sie, dass dann $f'(x_0) = 0$ gilt.

(83) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f streng monoton fallend.

(84) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist die Ableitung stetig?

(85) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Weiters existiere ein Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$. Zeigen Sie, dass f im Punkt x_0 ein lokales Maximum hat.

(86) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

(87) Sei $y \in \mathbb{R}$ und $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f_y(x) = &[\cos(x+y) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)]^2 \\ &+ [\sin(x+y) - \cos(x)\sin(y) - \sin(x)\cos(y)]^2 . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $f_y'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(88) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

(a) Wiederholen Sie die Definition der Obersumme $\mathcal{O}_Z(f)$ für eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}([a, b])$ und erklären Sie die Bedeutung anhand einer Skizze.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{\mathcal{O}_Z(f) : Z \in \mathcal{Z}([a, b])\}$$

nach unten beschränkt ist.

(89) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in [a, b]\} = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} + \sup\{g(x) : x \in [a, b]\}$$

im Allgemeinen *nicht* gilt.

(90) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $X, Y \in \mathcal{Z}([a, b])$ Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$. Konstruieren Sie eine *gemeinsame* Verfeinerung $Z \in \mathcal{Z}([a, b])$ von X und Y.

(91) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Sei $Z \in \mathcal{Z}([a, b])$ eine Zerlegung. Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}_Z(cf) = c\mathcal{U}_Z(f)$ und $\mathcal{O}_Z(cf) = c\mathcal{O}_Z(f)$ gilt und schließen Sie daraus, dass

$$\int_* cf = c \int_* f, \quad \text{und} \quad \int^* cf = c \int^* f.$$

(92) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \leq \inf\{g(x) : x \in [a, b]\}$$

und

$$\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \leq \sup\{g(x) : x \in [a, b]\}.$$

Schließen Sie daraus, dass $\mathcal{U}_Z(f) \leq \mathcal{U}_Z(g)$ und $\mathcal{O}_Z(f) \leq \mathcal{O}_Z(g)$ für jede Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}([a, b])$.

(93) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, gleichmäßig stetig ist.