ОБЪЕМ ЗНАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ[1]

Предлагаемый вниманию читателей «Объем знаний по математике для восьмилетней школы» разработан группой членов Комиссии по математическому образованию математического отделения АН СССР (И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров, А. И. Маркушевич, А. Д. Мышкис, Д. К. Фаддеев, И. М. Яглом) и публикуется как материал для дальнейших обсуждений. Порядковые номера в тексте не указывают на порядок прохождения отдельных тем — этот порядок должен определяться программой курса математики, которую «объем знаний» не заменяет.

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

1. Натуральные числа. Системы счисления (со специальным вниманием к десятичной и двоичной). Разложение на простые множители (без доказательства единственности). Простейшие признаки делимости (на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10).

2. Положительные скалярные величины. Процесс измерения, приводящий к обыкновенным и десятичным дробям. Зависимость числового выражения величины от единицы измерения. Инвариантный смысл геометрических и физических формул типа $a^2+b^2=c^2$ (теорема Пифагора), $v=\frac{S}{t}$ (определение скорости).

Замечание. Внимание к случаю несоизмеримости в восьмилетней школе может оставаться факультативным.

3. Четыре арифметических действия с положительными рациональными числами, записанными в виде обыкновенных или десятичных дробей.

Замечание. Нет необходимости добиваться быстроты и беглости в манипулировании с дробями с большими знаменателями или перегружать учащихся вычислениями с более чем 4—6-значными числами. Но принципиальные вопросы должны быть выяснены полностью вплоть до возможности и единственности представления любого рационального числа несократимой дробью и понимания всех возможностей, представляющихся при «обращении» простой дроби в десятичную. Следует приучить учащихся к беглому выполнению прикидок типа

$$(1{,}3\cdot 10^{11})^2\sim 1{,}7\cdot 10^{22}.$$

4. Прямая и обратная пропорциональность. Процентные вычисления.

5. Приближенные вычисления. Понятие об абсолютной и относительной погрешности, абсолютная погрешность суммы и разности, относительная погрешность произведения и частного. Вычисления с заданным числом «значащих цифр». Пользование таблицами, включая линейную интерполяцию с наглядным пониманием ее смысла.

Замечание. Материал этого пункта естественно проходить в два приема: в курсе арифметики и в седьмом-восьмом классе.

6. Извлечение квадратного корня с любой заданной точностью.

7. Нуль и отрицательные числа, абсолютное значение числа. Общее понятие о системе рациональных чисел и системе действительных чисел. Смысл арифметических действий над произвольными действительными числами. Геометрическое изображение чисел на числовой оси.

Замечание. Рассказ учителя о существовании иррациональных чисел обязателен. Специальное внимание к возможности формального определения действительного

[1] Публикуя разработанный комиссией АН СССР проект «Содержания математического образования в восьмилетней школе» редакция журнала начинает широкое обсуждение перспектив дальнейшего развития школьного математического образования. Дискуссия по этим вопросам и коллективные поиски ученых и учителей средней школы помогут лучше определить пути дальнейшего подъема уровня школьного математического образования в нашей стране и совершенствования программ по математике для средней школы.

числа и доказательствам иррациональности $\sqrt{2}$ и т. п. — факультативны.

8. Употребление букв для обозначения чисел. Равенства и тождества. Свойства равенств. Основные свойства алгебраических действий. Тождественные преобразования. Целые и рациональные выражения, приведение их к каноническому виду (многочлена и отношения многочленов). Формулы сокращенного умножения.

Замечание 1. Должно быть дано представление о том, что «основные свойства действий» могут рассматриваться как аксиомы, лежащие в основе значительной части алгебры (на ученом языке, не обязательном в школе: теории полей).

Замечание 2. В части разложения на множители и сокращения алгебраических дробей можно ограничиться простейшими случаями. Деление многочленов «с остатком» в восьмилетней школе не предусматривается.

9. Решение уравнений и систем уравнений. Полное овладение приемами решения линейных систем (практически — с двумя, тремя неизвестными, но с пониманием общности, например, метода исключения), квадратного уравнения с одним неизвестным и уравнений, легко приводимых к линейным и квадратным. Простейшие системы нелинейных уравнений с ясным пониманием смысла понятия «решение системы уравнений».

Замечание. Уравнения «с буквенными коэффициентами» в принципе не должны затруднять кончающих восьмилетнюю школу, но исследование зависимости решения от параметров может проводиться лишь в простейших случаях.

10. Прямоугольная система координат на плоскости. Геометрическая интерпретация одного уравнения с двумя неизвестными и системы двух уравнений с двумя неизвестными.

11. Основные свойства неравенств. Неравенство

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

Геометрический смысл неравенств с одним и двумя неизвестными.

Замечание. Нет необходимости систематизировать правила решения неравенств и систем неравенств. Важнее научить решать задачи такого типа, где на плоскости $x^2+y^2<1$, где $x^2+y^2>1$, где $xy>1$?

12. Функции и их графики. Специальное изучение функций

$$y=ax+b,\ y=ax^2+bx+c,\ y=x^3.$$

Обратная функция, специально

$$y=\frac{a}{x},\ y=\sqrt{x},\ y=\sqrt[3]{x}.$$

13. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Логарифмическая и показательная функции

$$y=\log_a x,\ y=a^x,\ a>0.$$

Устройство и употребление таблиц десятичных логарифмов и антилогарифмов и логарифмической линейки. Практика логарифмических вычислений.

Замечание. Так как знакомство с логарифмической линейкой без понимания ее устройства имеет сомнительную образовательную ценность, небольшая практика употребления таблиц должна *предшествовать* обращению к линейке.

14. Отрицательные и дробные показатели степени. Преобразование иррациональных выражений.

Замечание. Обязательны лишь простейшие задачи, сводящиеся непосредственно к пониманию определения

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[m]{a^n},\quad a^{-\alpha}=\frac{1}{a^\alpha}$$

и применению соотношений

$$a^x a^y=a^{x+y},\ (a^x)^y=a^{xy}.$$

ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрические фигуры и тела. Равенство фигур и тел.

2. Отрезки и углы. Симметрия относительно прямой и относительно точки.

3. Треугольники, их частные виды, признаки равенства, все случаи построения по заданным сторонам и углам, соотношения между углами и сторонами (против большей стороны лежит больший угол, сумма двух сторон больше третьей).

4. Параллельность и параллельный перенос. Углы между параллельными и секущей. Сумма внутренних углов треугольника, теорема о равенстве внешнего угла треугольника сумме внутренних, с ним не смежных.

5. Четырехугольники и их частные виды. Выпуклые многоугольники, сумма внешних и сумма внутренних углов.

6. Вращение, ориентированные углы произвольной величины. Повороты[2].

7. Окружность; взаимное положение двух окружностей. Хорды и касательные, центральные и вписанные углы.

[2] Вращение на углы α и $\alpha+360°$ приводит к одному и тому же «повороту».

8. Основные геометрические построения. Знакомство с методом «геометрических мест» (возможно, в более современной терминологии).

9. Прямые и плоскости в пространстве, углы между ними. Простейшие многогранники: тетраэдр, параллелепипед и его частные виды, призмы, пирамиды. Круглые тела: цилиндр, конус, шар.

10. Измерение отрезков, углов и дуг, площадей и объемов. Длина окружности. Площади многоугольников (формулы для площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции). Площадь круга. Объемы и поверхности пространственных тел (площадь боковой поверхности цилиндра, конуса, сферы, объем призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара).

Замечание. В случаях площади круга, площадей поверхностей и объемов пространственных тел имеется в виду не сообщение готовых формул, а их наглядное обоснование (например, с помощью принципа Кавальери, принимаемого без доказательства). Должны быть явно сформулированы свойства аддитивности и инвариантности площадей и объемов при перемещении фигур, однако никакого варианта строгой теории площадей и объемов в восьмилетней школе не предусматривается.

11. Пропорциональность отрезков, отсекаемых параллельными на двух секущих. Подобие треугольников, многоугольников и произвольных фигур.

Замечание. В центре внимания должно находиться общее понятие подобия произвольных фигур (хорошо известное уже из практики обращения с планами и картами), пропорциональность соответствующих расстояний и равенство соответствующих углов. Должно быть выяснено, что при коэффициенте подобия k отношение соответствующих площадей есть k^2, а объемов — k^3. При рассмотрении пропорциональных отрезков случай несоизмеримости может быть лишь отмечен, без углубления в связанные с ним трудности. Гомотетия может быть рассмотрена как метод построения подобных фигур.

12. Метрические соотношения в треугольнике. Теорема Пифагора. Синус, косинус и тангенс углов от 0° до 180°. Теорема синусов и косинусов для произвольного треугольника. Решение задач с употреблением таблиц тригонометрических функций.

Замечание. Можно сообщить общее определение тригонометрических функций любого угла и вычертить их графики. Но формальная сторона изучения этих функций должна быть сведена к минимуму, необходимому при решении простейших задач с употреблением функций в пределах 0—180°. Из «формул приведения» строго необходимы с этой точки зрения только $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$, $\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$.

13. Понятие о векторных величинах. Простейшие операции над векторами.

Замечание. Так как учащиеся встретятся с векторами на уроках физики, представляется естественным не избегать их и в геометрии. Возможно, однако, ограничиться минимальным объемом сведений о векторах: рассматривать только связанные векторы, складывая их по «правилу параллелограмма», и операции сложения векторов и умножения вектора на число. В виде одного из применений полезно дать формулу для деления отрезка (заданного радиусами-векторами его концов) в данном отношении.

14. Понятие о координатном методе в геометрии. Расстояние между двумя точками. Употребление уравнений прямой и окружности при решении геометрических задач.

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Некоторое увеличение объема знаний по сравнению с действующими программами оправдано тем, что темпы прохождения материала в младших классах могут быть несколько увеличены, что позволит раньше вводить простейшие алгебраические представления (решение уравнений, отрицательные числа) и начинать изучение геометрии. Предположительно числовая ось и отрицательные числа могут появиться в IV классе, а решение уравнений и ранее.

2. Геометрическая прогрессия, показательная и логарифмическая функции вводятся в программу в связи с их большим общеобразовательным интересом (показательные кривые роста хозяйства и т. п.) и практическим значением логарифмических вычислений. Считается, что существование непрерывной функции a^x, определенной при всех действительных значениях x, может быть просто постулировано после рассмотрения поведения геометрических прогрессий с достаточно близким к единице знаменателем (что соответствует историческому пути возникновения логарифмов). Возможны и другие не слишком обременительные пути изложения этого раздела.

3. Элементы строгого логического рассуждения должны вводиться постепенно (причем не обязательно по преимуществу в гео-

метрии); Это также может служить источником дополнительного резерва времени. Желательно, чтобы идея возможности геометрии и алгебры как дедуктивной теории, опирающейся только на аксиомы, была достаточно выпукло изложена в рассказе учителя в VIII классе. Но начинать следует с доказательств таких теорем, как теорема о сумме углов треугольника или теорема Пифагора, где необходимость доказательства понятна, а результат интересен.

4. Нет необходимости увеличивать (за указанные выше пределы) количество подлежащих запоминанию теорем элементарной геометрии. Свойства вписанных и описанных четырехугольников, теорема о схождении высот треугольника в одной точке, метрические соотношения в круге и т. д. могут служить хорошим материалом для «задач на доказательство».

5. Специальные виды движений (симметрия относительно прямой и относительно точки, повороты) рассматриваются как преобразования геометрических *фигур*. Идея геометрического преобразования как взаимно однозначного отображения всей плоскости «на самою себя» в явном виде появится в программе девятого класса.

А. Н. КОЛМОГОРОВ (Москва)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

В 1963/64 учебном году в обязательные программы девятых классов школ РСФСР был введен раздел «Геометрические преобразования на плоскости», рассчитанный на 30 часов занятий. Лишь с запозданием раздел был обеспечен первой частью пособия В. Г. Болтянского и И. М. Яглома [1]. Спешность подготовки этого пособия легко обнаружить, сравнивая издание 1963 года со вторым изданием 1964 года[1]. С переходом на десятилетнее обучение интересующий нас раздел выпал из временных переходных рекомендаций министерства на 1964/65 учебный год.

Пособие В. Г. Болтянского и И. М. Яглома охватывало только геометрические преобразования на плоскости. Стереометрию, программы, изданные в 1963 году, рекомендовали изучать в традиционном духе. Симметрии, переносы и вращения в стереометрической части этой программы совсем не упоминаются. Это лишний раз подчеркивает легкомыслие всего замысла реформы. В соответствии с программой 1963 года было, однако, написано несколько учебников, поданных на проводившийся в 1964 году конкурс. Лучшие из этих учебников в главах, посвященных геометрическим преобразованиям на плоскости, довольно близки к пособию В. Г. Болтянского и И. М. Яглома, но при переходе к стереометрии, подчиняясь программе, о преобразованиях забывают. Интересную попытку изложения стереометрии, построенного на рассмотрении геометрических преобразований, предпринял А. И. Фетисов [2]. Книга эта не доведена до состояния учебника, но принятая в ней система изложения стереометрии заслуживает внимания.

В такой обстановке разумно со всей серьезностью заново обсудить место изучения геометрических преобразований в школьной геометрии. Вопрос о роли геометрических преобразований в школьном курсе геометрии можно ставить по-разному. Выделим условно четыре подхода к делу:

---

[1] В § 18 первого издания авторы «доказывают» ошибочную теорему 4, которую им пришлось во втором издании заменить новой. В первом издании вызывали недоумение «доказательства» теорем, помеченных № 1, в § 5, 13, 18 и 23. Во втором издании сами эти «доказательства» оставлены без изменений, но в § 34 сказано (стр. 50), что это совсем не доказательства, а «пояснения с помощью листа бумаги или кальки».

В § 34 авторы сообщают, что все обычное школьное изложение вопросов о равенстве фигур и движениях основано на «порочном круге», и делают невразумительную ссылку на различие между «физическим» и «геометрическим» движением. Во втором издании авторы пытаются исправить впечатление от этого сообщения, намечая целых два выхода из затруднения. Мы увидим далее, что второй из намеченных выходов (с аксиомой, проиллюстрированной рисунком 95) совпадает с системой изложения, принятой в старых изданиях учебника А. Киселева. Конечно, у А. Киселева никакой «полной системы аксиом» нет, но как раз основное допущение, о котором сейчас идет речь, сформулировано явно в качестве утверждения, принимаемого как «очевидное» без доказательства. Положение с движениями в этом традиционном изложении геометрии ничем не хуже положения с прямыми, отрезками и т. п. См., впрочем, об этом далее.