Программа по математике для средней школы

ОБЪЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1. Задачей обучения математике в средней школе является прочное и сознательное овладение математическими знаниями и навыками, а) нужными в повседневной жизни и работе каждому члену современного общества, б) составляющими необходимую основу изучения в школе других наук, в) достаточными для самостоятельного продолжения образования после школы, чтения научно-популярной и технической литературы и т. п. Велико значение изучения математики и для общего развития умственных способностей учащихся, формирования навыков логического мышления, воображения и изобретательности. Содействуя пониманию строения всей системы наук и роли научного метода в практике, обучение математике вносит свой вклад в формирование научного коммунистического мировоззрения учащихся.

Введение в VII—X классах факультативных занятий позволяет гармонически сочетать обязательное для всех математическое образование с потребностями учащихся, проявляющих к математике и основанным на ней разделам науки и техники особенный интерес. Вместе с тем надо подчеркнуть, что основательное усвоение обязательного курса средней школы должно давать доступ в высшие учебные заведения всех профилей. После введения в действие новых программ программы вступительных экзаменов в высшую школу будут с ними согласованы.

2. Публикуемые сейчас программы должны послужить основой для написания новых учебников и экспериментального преподавания. На основе этого опыта программы перед их введением в массовое употребление могут быть в деталях уточнены. Этим объясняется, что в некоторых случаях публикуемые программы избегают излишней на этом этапе детализации. Вместе с тем программы достаточно конкретны для того, чтобы уже сейчас служить основой для подготовки учителей к переходу на обновленное содержание школьного курса математики.

Указания на рекомендуемые методы изложения материала и уровень трудности задач, обязательных для всех учащихся, носят лишь примерный характер.

3. В общих чертах структура действующих в настоящее время в нашей школе программ является достижением педагогической мысли конца XIX в., когда в школьный курс алгебры были введены элементы «функционального мышления». При составлении новых программ было естественно найти в них надлежащее место для понятия производной и интеграла.

Кроме того, при составлении новых программ приходилось считаться с возрастанием в современной математике и практике ее применений (с употреблением современной вычислительной техники) роли элементов математической логики и начальных понятий теории множеств. Наконец, нельзя было обойти без внимания большую роль векторных представлений в физике и возможность очень простого и логичного векторного построения всего курса геометрии.

В новых программах начальные понятия дифференциального исчисления вводятся в IX классе и широко используются в дальнейшем курсе, облегчая изучение традиционных вопросов (исследование поведения функций и т. п.). Понятие интеграла вводится в X классе и используется затем при вычислении объемов тел.

Векторы вводятся в VII классе и широко употребляются в курсе физики VIII класса. В IX классе употребление векторов позволяет дать более простое и законченное изложение курса стереометрии.

Осторожнее программы подходят к введению понятий и обозначений математической логики и начальных представлений теории множеств. Более широкое их употребление в школе еще остается дискуссионным.

4. Важное значение для успешного обучения математике имеет педагогически правильное сочетание индуктивных и дедуктивных методов. В младших классах (IV класс) основную роль должны играть индуктивные, в частности опытные, методы установления фактов, в том числе использование непосред-

ственного практического опыта учащихся. В геометрии, например, для этой цели следует шире использовать вырезание фигур из бумаги и т. п.

Опыт показал, что содержательное и доходчивое индуктивное обоснование фактов обеспечивает на раннем этапе обучения более глубокое и прочное усвоение изучаемого материала, чем формально-дедуктивное. Слишком раннее введение обычно заучиваемых на память дедуктивных доказательств не только не способствует развитию логического мышления учащихся, но, как правило, искусственно задерживает его, часто на длительный срок.

Программа предполагает, что обучение навыкам дедуктивного мышления проводится на всех этапах обучения. Но роль дедукции должна возрастать с известной постепенностью. Дедуктивные доказательства как самостоятельный элемент математической теории должны появиться лишь тогда, когда изучаемый материал даст школьникам возможность осознать их необходимость.

Предлагается значительно шире пользоваться явным указанием на то, что отдельные факты, допускающие доказательство, но убедительные наглядно, принимаются в школе без доказательства.

В дальнейшем роль дедуктивного метода усиливается. Программа по математике создает благоприятные условия для того, чтобы на протяжении достаточного периода времени воспитать потребность в дедуктивных доказательствах, выработать правильное представление о строении дедуктивной научной теории, об аксиоматической системе построения науки. Однако надо тщательно избегать погони за видимостью «строгости», часто иллюзорной.

5. Программа составлена с учетом многообразных связей со смежными дисциплинами и трудовым обучением. В частности, аппарат, необходимый для изучения на достаточно высоком уровне курса физики, как правило, подготавливается на уроках математики: в IV—V классах вводятся простейшие буквенные формулы, в V классе — отрицательные числа. Приступая к изучению механики на уроках физики, учащиеся уже знают уравнение равномерного движения $s=vt$, умеют графически решать задачи на движение. К VIII классу они владеют необходимыми сведениями о векторах и операциях над ними.

Вместе с тем некоторые новые математические идеи, для овладения которыми желателен расширенный запас физических представлений, предваряются на уроках физики: понятие скорости произвольного движения вводится на уроках физики несколько ранее понятия производной на уроках математики, что дает возможность разобрать ряд задач с физическим содержанием на уроках математики. Гармонические колебания изучаются на уроках математики после изучения темы «Колебания и волны» на уроках физики.

Усиление внимания к приближенным вычислениям в VII классе и методам вычислений в VIII классе также будет способствовать осуществлению связи математики с другими школьными дисциплинами.

Измерительные и геодезические работы на местности явно указаны только в VII классе. Но они желательны уже с IV класса. Особенно широкие возможности для них имеются в VII классе (мензульная съемка, измерение площадей с оценкой точности результата) и начале VIII класса (применение тригонометрических функций, решение треугольников).

6. Прочность формирования навыков достигается на большом числе достаточно простых упражнений и задач. Необходимо отказаться от громоздких и трудоемких задач и упражнений, решение которых представляет лишь специальный интерес для ограниченного числа учащихся. Во многих случаях заучивание формул должно быть заменено созданием привычки пользоваться справочником.

7. Расширение идейного содержания программ по математике осуществляется без значительного увеличения времени на ее изучение. В основном это достигается за счет более раннего введения элементов алгебры и геометрии в IV—V классах, возможность которого проверена в достаточно широком эксперименте. Эта предварительная подготовка позволяет при изучении алгебры и геометрии в следующих классах двигаться несколько более быстрыми темпами.

Некоторую экономию времени дает, как уже указывалось выше, применение элементов дифференциального и интегрального исчисления при изложении традиционных школьных вопросов (в частности, при построении графиков, исследовании функций и вычислении объемов) и векторных методов в изложении геометрии. Произведено и освобождение программы от ряда традиционных вопросов, не имеющих большого значения. Из курса алгебры полностью исключена тема «Комплексные числа» (следует заметить, что ее изучение в значительно большем объеме, чем это имеет место в действующей программе, предполагается в курсе «Дополнительные главы и вопросы математики» в IX и X классах).

СХЕМА ПРОГРАММЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

I. ВОСЬМИЛЕТНЯЯ ШКОЛА

Арифметика и начала алгебры (IV—V классы)

IV класс

(6 час. в неделю, всего 210 час., из них 30 час. на геометрию)

1. Натуральные числа — 105 час.
2. Десятичные дроби — 75 »

V класс

(6 час. в неделю, всего 210 час., из них 35 час. на геометрию)

3. Положительные и отрицательные числа — 80 час.
4. Обыкновенные дроби. Действия с обыкновенными и десятичными дробями — 95 »

Алгебра (VI—VIII классы)

VI класс

(4 часа в неделю, всего 140 час.)

1. Основные понятия — 10 час.
2. Прямая и обратная пропорциональность. Одночлены — 40 »
3. Целые выражения — 48 »
4. Уравнения и системы уравнений — 42 часа

VII класс

(3 часа в неделю в первом полугодии, 4 часа в неделю во втором полугодии, всего 122 часа)

5. Рациональные выражения — 42 часа
6. Неравенства — 20 час.
7. Корни — 16 »
8. Квадратные уравнения — 44 часа

VIII класс

(4 часа в неделю, всего 140 час.)

9. Арифметическая и геометрическая прогрессии — 15 час.
10. Дробные показатели степени. Показательная функция и логарифмы — 70 »
11. Организация вычислений и вычислительная техника — 30 »

Повторение — 25 »

Геометрия (IV—VIII классы)

IV класс

(30 час., распределены в течение года)

1. Основные геометрические понятия — 30 час.

V класс

(35 час., распределены в течение года)

2. Геометрические построения — 35 час.

VI класс

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

3. Равенство плоских фигур. Логическое строение геометрии — 20 час.
4. Многоугольники — 50 »

VII класс

(3 часа в неделю в первом полугодии и 2 часа в неделю во втором полугодии, всего 88 час.)

5. Начальные сведения по стереометрии — 15 час.
6. Геометрические величины — 25 »
7. Подобие — 38 »
8. Преобразования движения и подобия — 10 »

VIII класс

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

9. Метрические соотношения в треугольнике. Тригонометрические функции — 35 час.
10. Окружность. Вписанные и описанные многоугольники — 20 »

Повторение — 15 »

II. СТАРШИЕ КЛАССЫ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Алгебра и начала анализа (IX—X классы)

IX класс

(3 часа в неделю, всего 105 час.)

1. Принцип математической индукции. Элементы комбинаторики — 15 час.
2. Бесконечные последовательности и пределы — 15 »
3. Производная и ее применения — 45 »
4. Тригонометрические функции, их графики и производные — 30 »

X класс

(3 часа в неделю, всего 105 час.)

5. Производная показательной функции и логарифма — 15 час.
6. Интеграл — 12 »
7. Тригонометрические функции (продолжение) — 40 »
8. Системы уравнений и неравенств, счетно-электронные машины — 18 »

Повторение — 20 »

Геометрия (IX—X классы)

IX класс

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

1. Прямые и плоскости; координаты и векторы в пространстве — 70 час.

X класс

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

2. Многогранники и тела вращения — 50 час.
Повторение — 20 »

ВОСЬМИЛЕТНЯЯ ШКОЛА

Арифметика и начала алгебры (IV—V классы)

Предполагается, что из первых трех классов учащиеся вынесли твердые навыки в выполнении четырех арифметических действий с натуральными числами и некоторый опыт в обращении с простейшими дробями.

В курсе арифметики и начал алгебры проводится повторение и систематизация ранее полученных учащимися сведений о натуральных числах. С этой целью естественно привлекать понятия «множество», «элемент множества», «принадлежность». Содержание перечисленных понятий разъясняется на конкретных примерах. В дальнейшем учащиеся знакомятся с понятиями «объединение множеств», «общая часть» или «пересечение множеств», «пустое множество», «часть множества» или «подмножество». Эти понятия используются при изучении вопросов делимости, при рассмотрении уравнений и неравенств, при построении простейших графиков.

Техника выполнения арифметических действий к концу курса должна быть доведена до полной отчетливости и уверенности в способности справиться с вычислениями со сколь угодно большими числами. Однако, как правило, достаточно ограничиваться вычислениями с 3-, 4-, 5-значными числами.

Составление и решение уравнений занимают большое место на протяжении всего курса. Сначала уравнения решаются на основе зависимостей между компонентами и результатами действий, позднее (в третьей теме) формулируются некоторые правила, включая правила перемены знака при перенесении члена из одной части уравнения в другую. В итоге учащихся не должно затруднять решение линейных уравнений вида

$$0{,}5x - 7 = 0{,}3x - 15,$$

$$2\frac{1}{2}x + 3\frac{2}{3} = 7 + x.$$

Раннее введение уравнений позволяет поновому организовать обучение решению текстовых задач. На достаточно убедительных примерах раскрываются преимущества алгебраического способа решения перед арифметическим. В остальных случаях учащемуся самому предоставляется право выбора метода решения задачи.

Тождественные преобразования основываются на законах арифметических действий.

Введение выражений, содержащих переменные, служит началом работы над понятием функции.

Рассмотрение формул расширяет применение букв. Ими обозначаются не только числа, но и выражения, содержащие переменные.

Во всем курсе используются знаки неравенств, знакомые учащимся уже из начальных классов. Навыки в обращении с неравенствами приобретаются постепенно.

Пояснения к отдельным темам

Тема 1. Уже в первой теме наряду с повторением и систематизацией сведений о натуральных числах начинают формироваться понятия выражения, уравнения, неравенства. При этом широко используются графические иллюстрации, основанные на изображении натурального ряда последовательностью точек на луче.

Изучение арифметических действий позволяет развивать и закреплять вычислительные навыки учащихся. Особое внимание уделяется трудным случаям умножения и деления, действиям с нулем и единицей.

Повторение коммутативного и ассоциативного законов умножения целесообразно связать с вычислением площадей прямоугольников и объемов прямоугольных параллелепипедов (последний вопрос будет новым для учащихся). Законы арифметических действий применяются к обоснованию действий с многозначными числами, используются при преобразовании выражений. Для более глубокого понимания порядка выполнения действий полезны упражнения в составлении выражений.

Тема 2. Работа над темой начинается с формирования понятия обыкновенной дроби как результата деления и как результата измерения. При этом продолжается выполнение (по соображению) действий с обыкновенными дробями в простейших случаях.

Десятичные дроби вводятся как способ записи дробей со знаменателем вида 10^n, и далее внимание сосредоточивается на выработке прочных навыков сложения, вычитания, умножения и деления десятичных дробей. В итоге учащиеся должны легко и быстро справляться с вычислениями типа

$$28{,}6 + 1{,}4 - (6{,}595 + 3{,}405) - 17{,}6 : 2{,}5.$$

Умножению числа на десятичную дробь можно предпослать в качестве исходного пункта задачу вычисления площади прямоугольника.

Тема 3. При введении действий с положительными и отрицательными числами выясняется сохранение уже известных для случая положительных чисел законов действий. Числовая прямая служит основным средством при изучении сложения и вычитания положительных и отрицательных чисел. (Модуль числа определяется как расстояние точки, изображающей число, до начальной точки.) Здесь же появляется раскрытие скобок и приведение подобных членов. Уровень сложности тождественных преобразований, предлагаемых учащимся, не должен быть выше трудностей преобразований типа

$$3(2{,}5x + 2{,}8) - 4(1{,}2x + 1{,}5) = 2{,}7x + 2{,}4.$$

В связи с изучением осей координат рассматриваются примеры графиков (движение поездов с остановками, графики температуры, стоимости и др.), что поможет изучению физики в VI классе.

Тема 4. Изучение обыкновенных дробей должно подготовлять учащихся к изучению алгебраических дробей.

Основное внимание в начале темы сосредоточивается на выработке навыков действий с положительными обыкновенными дробями. Лишь постепенно включают положительные десятичные дроби и отрицательные числа.

В результате учащиеся должны уверенно справляться с вычислениями вида

$$45{,}09 : 1{,}5 - \left(2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{2} - 2{,}5 \cdot 2\frac{1}{2}\right) : 5\frac{2}{3}.$$

В этой теме дается также первое представление о точности приближенного значения. При вычислении десятичных приближений обыкновенной дроби дается первоначальное представление о бесконечной десятичной дроби.

В связи с формулой $s = vt$ и ее графической иллюстрацией опять рассматриваются графики движения и другие простейшие графики.

Формулы применяются для записи зависимостей между числами и величинами

$$S = \frac{1}{2}ah; \; V = abc \quad \text{и т. п.}$$

и для записи правил действий $\left(\text{например, } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}\right)$.

Алгебра (VI—VIII классы)

Программа по математике восьмилетней школы предполагает несколько поднять логический уровень изложения материала, опираясь на весьма осторожное использование элементов логики и соответствующей символики; увеличить внимание к развитию вычислительных навыков (приближенные вычисления, пользование таблицами).

Рекомендуется несколько ограничить по сравнению со сложившейся традицией требования к выполнению сложных преобразований, предоставив выполнение преобразований, требующих изобретательности или знания специальных приемов, учащимся, проявляющим повышенный интерес к математике. Но требования к безошибочности выполнения элементарных преобразований и точной формулировке результата (например, при нахождении решений системы уравнений) должны быть совершенно твердыми.

Решением уравнений учащиеся занимаются на протяжении всего курса. В теме 4 лишь суммируются и систематизируются относящиеся сюда основные понятия.

Через весь курс проходит и изучение функций с построением соответствующих графиков. Специальное внимание к «области определения» функции и «области значений» естественно связать с темой 5. В программе специально указаны лишь функции

$$y = ax + b, \; y = \frac{k}{x}, \; y = ax^2, \; y = ax^3,$$

$$y = \sqrt{x}, \; y = \sqrt[3]{x}, \; y = a^x, \; y = \lg x.$$

Однако полезно рассмотреть и график функции $y = |x|$, а в связи с десятичными приближениями ввести обозначения $[x]$ для целой части x и $\{x\}$ для дробной части x и вычертить соответствующие графики. В теме 10 при изучении логарифмических вычислений $[x]$ и $\{x\}$ получат названия «характеристика» и «мантисса» x.

Дробные показатели степени непосредственно связываются с введением показательной функции. Поэтому степенные функции

$$y = x^\alpha$$

с произвольным показателем степени лишаются их традиционного места в курсе алгебры. При наличии времени их целесообразно рассмотреть в конце темы 10 (см. далее пояснения к этой теме).

Упражнения в составлении графиков и исследовании поведения функций должны охватывать значительно более разнообразный материал. В частности, в упражнениях должны появиться все типы расположения графика квадратного трехчлена (без каких-либо подлежащих заучиванию правил).

В связи с изучением уравнений и неравенств естественно познакомить учащихся с общими логическими понятиями «высказывания» и «предиката» и с употреблением элементарных логических символов следования ($\Rightarrow$) и равносильности ($\Leftrightarrow$). Знакомые учащимся с IV класса операции соединения и пересечения множеств при изучении систем уравнений можно обозначать специальными символами ($\cup$ и $\cap$).

Пояснения к отдельным темам

Тема 1. В первой теме приводятся в систему сведения по алгебре, приобретенные в IV—V классах. Уточняются понятия выражения (числового и содержащего переменные), тождественного равенства выражений, уравнения.

Тема 2. Систематическое изучение функций начинается с рассмотрения примеров функциональных зависимостей эмпирического происхождения и их графиков.

Алгебра рациональных одночленов обладает известной законченностью и охватывает много практически важных задач. Знакомство с отрицательными показателями степени позволит учащимся в курсе физики понять стандартные обозначения единиц измерения физических величин ($г \cdot см^{-3}$ для плотности и т. п.) и выполнять вычисления с большими и малыми числами (масса молекулы, число молекул в кубическом сантиметре и т. п.), пользуясь записями типа $2{,}31 \cdot 10^{-23}$ и т. п.

Желательно, чтобы в курсе математики и физики нашло место понятие размерности геометрических и физических величин и было показано, что формулы, вид которых не зависит от выбора единиц измерения, должны быть однородны.

Возможно связать с темой 2 первое знакомство с вычислениями на логарифмической линейке без теории ее устройства, которая будет дана лишь в теме 10.

Тема 3. Здесь и далее программа подчеркивает целевую установку тождественных преобразований: приведение определенного типа выражений к стандартному виду.

Несколько неопределенной остается цель разложения на множители. Поэтому в данной теме уместно показать, предваряя темы 4 и 5, его применение к решению уравнений и сокращению дробей.

Общая запись стандартного вида многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ была бы еще трудна. Достаточно выписать конечное число членов последовательности выражений:

$$\begin{aligned}&a,\\&ax+b,\\&ax^2+bx+c,\\&ax^3+bx^2+cx+d,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Задачи на разложение на множители не должны быть трудными. Например,

$$x^3 + ax^2 - x - a = (x^2-1)(x+a) = \\ = (x-1)(x+1)(x+a).$$

Тема 4. Здесь в числе упражнений целесообразно рассмотреть примеры квадратных уравнений, решаемых разложением на множители, и примеры нелинейных систем, подобранных так, чтобы их алгебраическое решение не представляло трудностей, но соответствующие им геометрические картины были бы разнообразны: например, четыре решения системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

изображаются точками пересечения окружности и пары прямых и т. п. Несколько задач, в которых решение нелинейных систем выступает в качестве полезного аппарата реальных геометрических или физических задач, можно решить позднее при изучении темы 8, где после сведения системы к квадратному уравнению получившееся квадратное уравнение решают, пользуясь таблицами квадратных корней.

Тема 5. Примеры преобразований

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{y-x}{y+x};$$

$$\frac{x^2 + ax + bx + ab}{x^2 - a^2} = \frac{x+b}{x-a}.$$

Тема 6. Оценка результата приближенных вычислений по «методу границ» может составить основной материал упражнений на действия с неравенствами.

Как и в теме 4, здесь желательно рассмотреть отдельные примеры нелинейных неравенств ($x^2 < 1$, $x^2 + y^2 < 1$ и т. п.).

Тема 7. В связи с извлечением корней впервые возникает потребность уточнения представлений об алгоритме получения приближений любой точности. Здесь можно ограничиться «методом проб», но постановка вопроса о более эффективном алгоритме уместна и разбор итерационного алгоритма для вычисления $\sqrt{x}$ $\quad y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{x}{y_n}\right)$ следует рекомендовать.

Тема 8. После знакомства с разложением квадратного трехчлена на линейные множители учащимся предлагается несколько задач на решение квадратных неравенств. Заучивание каких-либо правил решения квадратных неравенств программа не предусматривает. Полное исследование квадратного трехчлена в IX классе послужит иллюстрацией общих приемов исследования функций при помощи производной.

Тема 9. Вначале рассматриваются примеры различных числовых последовательностей. На достаточном числе примеров должна быть понята техника вычислений по рекуррентным формулам. Необходимо, чтобы с самого начала учащиеся воспринимали общий член последовательности как функцию его номера и строили соответствующие графики.

Тема 10. Обобщение понятия степени на случай дробных показателей непосредственно связывается с построением показательной функции.

Целесообразно исходить из двух свойств степени с целым показателем:

1) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$,

2) При $a > 1$ степень a^x возрастает с возрастанием x, при $0 < a < 1$ — убывает.

Предполагая, что эти свойства сохраняются при всех значениях x, легко выводится формула

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Существование определенной при всех значениях x функции, обладающей свойствами 1) и 2), принимается без доказательства.

Формула

$$a^x = 10^{(\lg a)\,x}$$

дает возможность решать задачи на показательную функцию с реальным содержанием (радиоактивный распад и т. п.).

Желательно познакомить учащихся с логарифмической и полулогарифмической сеткой, показав, что на логарифмической сетке прямолинейны графики функций вида

$$y = Ax^b,$$

а на полулогарифмической — графики функций вида

$$y = Ca^x.$$

Это весьма важно, так как логарифмическая и полулогарифмическая сетки находят все большее употребление при графическом изображении зависимостей между величинами, числовые значения которых меняются в широких пределах.

Знакомство с логарифмической и полулогарифмической сеткой естественно начать с изображения на них эмпирических зависимостей между величинами, меняющимися в широких пределах (изобразив, например, рост производства электрической энергии в дореволюционной России и СССР на полулогарифмической сетке, что даст возможность судить о темпах роста по наклону кривой).

При наличии времени для семейства функций

$$y = x^\alpha$$

с параметром α графики на логарифмической сетке сопоставляются с традиционными графиками в первом квадранте плоскости (x, y).

Упражнения на преобразование иррациональных выражений и решение иррациональных уравнений следует ограничить простейшими примерами типа уравнений

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = a; \quad \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1\frac{1}{2}$$

и т. п.

Тема 11. С оценкой точности приближенных вычислений учащимся приходится иметь дело в темах 6 и 7 VII класса и в теме 10 VIII класса. Здесь лишь подводятся итоги. Выясняется роль абсолютных погрешностей при оценке точности приближенного значения суммы и разности и относительных погрешностей — в случае произведения и частного. С линейной интерполяцией учащиеся встречались, по существу, уже при обращении к столбцам поправок в таблицах квадратных корней и логарифмов. Теперь уместно рассмотреть вопрос в общем виде.

Расписка формул для ручных вычислений служит естественным введением в понимание программирования в его современной форме.

Геометрия (IV—VIII классы)

В IV классе геометрия имеет по преимуществу наглядный характер. В конце программы заслуживает выделения в качестве теоремы с доказательством (может быть, первой во всем курсе) предложение о равенстве вертикальных углов.

В V классе основное внимание уделяется выполнению геометрических построений и знакомству с преобразованиями на оперативном уровне. Курс геометрии еще сохраняет индуктивный характер: внимание чаще направлено на ясную логическую формулировку выводов из эмпирических наблюдений, чем на ведение доказательств. Но вместе с тем в V классе усиливается роль дедуктивных рассуждений. Четко выделяются доказательства некоторых содержательно интересных теорем (о длине перпендикуляра и наклонных, о сумме углов треугольника и др.).

Задача построения геометрии на основе явно высказанных основных допущений (аксиом) ставится в VI классе. При изучении темы 3 устанавливается список предложений, принимаемых без доказательства, который может быть довольно длинным и включать в себя сильную форму аксиомы параллельных (через каждую точку вне прямой может быть проведена одна, и только одна, прямая, параллельная данной), наличие у двух окружностей с расстоянием между центрами, меньшим суммы и большим разности радиусов, ровно двух точек пересечения и т. п. Список предложений, принимаемых без доказательства, не заучивается. В дальнейшем построении курса планиметрии необоснованные логические выводы должны быть по возможности избегнуты. Исключение допустимо только в применении к рассуждениям, опирающимся в строго научном курсе геометрии на «аксиомы порядка» и «аксиомы непрерывности» (их полная формулировка была бы неуместна в восьмилетней школе).

Курс геометрии восьмилетней школы несколько облегчен по сравнению с традиционным в отношении числа включенных в программу более специальных теорем (в программе не упоминаются теоремы о произведении отрезков секущей в круге, о точках пересечения высот и медиан треугольника, формула Герона и т. п. Многие из них должны сохраниться в качестве «задач на доказательство»).

В восьмилетней школе не дается систематического курса стереометрии. В теме 5 лишь систематизируются сведения, используемые в курсе черчения.

Отчетливое изложение общих понятий площади и объема произвольных фигур дается в X классе. Однако все рассуждения о площадях многоугольников ведутся в VI классе с полной логической отчетливостью на основе двух допущений: а) формула площади прямоугольника, б) аддитивность площади многоугольников. В теме 4 объем призмы дается либо лишь с эвристическим доказательством, либо со ссылкой на принцип Кавальери. Приняв без доказательства теорему о пропорциональности объема кубу коэффициента подобия, можно без обращения к предельным переходам вывести объем пирамиды. Понятия о длине окружности, площади круга, объеме цилиндра окончательно уточняются лишь в IX—X классах.

Идея геометрических преобразований проведена через весь курс V—VII классов. В V классе учащиеся на оперативном уровне знакомятся с тремя видами движения плоских фигур, научаясь фактически строить фигуры, повернутые на некоторый угол, перенесенные параллельно на некоторое расстояние и симметричные к данной относительно оси.

В VI классе устанавливается степень подвижности плоских фигур и выводится, что при задании положения точки и выходящего из нее луча фигура может быть расположена двумя способами относительно оси симметрии. В VII классе гомотетия изучается в связи с умножением вектора на число, здесь устанавливается, что произвольное преобразование подобия сводится к движению и гомотетии.

Общие формулировки, относящиеся к геометрическим преобразованиям как взаимно однозначным отображениям плоскости на себя и к их групповым свойствам, к числу обязательных программных требований не относятся. Аналитическая координатная запись поворота дается лишь в IX классе.

Пояснения к отдельным темам

Тема 1. Здесь широко применяется вырезание фигур из бумаги и картона, перегибание листа бумаги, работы с клетчатой бумагой. Лишь постепенно наряду с этим начинают привлекаться линейка и угольник. Циркуль впервые появляется как измеритель при сравнении отрезков и позднее — в связи с построением окружностей.

Тема 2. Сосредоточение внимания на геометрических построениях в V классе позволяет решить две задачи: 1) подготовку к курсу черчения, который в VI классе почти непосредственно начинается с построения проекций пространственных фигур, 2) ознакомление учащихся в оперативном плане со всеми представлениями, которые кладутся начиная с VI класса в основу систематического построения планиметрии.

Очень важно, чтобы учащиеся получили здесь хороший набор чертежных принадлежностей (желательно, включая чертежную доску и рейсшину).

При решении задач на построение учащиеся начинают систематически пользоваться комплексом инструментов — линейкой, циркулем, угольником. Выбор задач на построение и число решенных задач должны обеспечить создание устойчивых навыков в выполнении простейших построений. При обосновании правильности тех или иных построений («разделить данный отрезок пополам», «провести через данную точку перпендикуляр к данной прямой», «разделить данный угол пополам» и т. д.) естественно использовать соображения симметрии.

Понятие направления возникает в связи с проведением прямых. Непосредственное проведение большого числа параллельных (с помощью линейки и угольника) убеждает в том, что пучок параллельных однократно покрывает плоскость (т. е., по существу, дает представление об аксиоме параллельности), и делает естественным введение угла между направлениями. (В пучке параллельных различают два направления, так что угол между двумя направлениями определяется однозначно.)

Теоремы о признаках равенства треугольников рассматриваются как следствие из однозначности соответствующих построений.

Тема 3. На основе изученного в классе материала выводится, что любая фигура может быть совмещена с ей равной при помощи параллельного переноса, сопровождаемого поворотом или симметрией.

Теоремы о перпендикуляре к отрезку, проведенному через его середину, о биссектрисе угла и о свойствах равнобедренного треугольника дают дополнительный материал для обсуждения роли аксиом и теорем в геометрии. По существу, здесь же возможно познакомить учащихся с понятиями обратной и противоположной теорем, необходимых и достаточных условий и способом доказательства от противного. В программе этот материал указан в конце следующей темы, с тем чтобы там была проведена его систематизация.

Тема 4. При изучении многоугольников выделяются их свойства и признаки. Теорема Пифагора может быть доказана, например, индийским способом — при помощи двукратного вырезания из квадрата со стороной $a+b$ четырех прямоугольных треугольников с катетами a и b. Ее раннее появление в программе открывает путь к большому числу интересных примеров и задач в курсе алгебры.

Тема 5. Главная цель темы состоит в систематизации полученных на уроках черчения сведений о плоскостях и прямых в пространстве и простейших пространственных телах. Особого внимания заслуживают свойства проекций пространственных фигур.

Все существенно стереометрические факты при изучении этой темы принимаются без доказательства. Но на их основе полезно доказать, например, равенство диагоналей прямоугольного параллелепипеда и т. п.

Тема 6. Параллельное рассмотрение направленных отрезков, дуг и углов облегчает восприятие каждого из этих понятий. Здесь можно указать на так называемое «правило Шаля»: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ для направленных отрезков и соответственно $\smile AB+\smile BC=\smile AC$ для направленных дуг. Для характеристики поворотов достаточно направленных углов в пределах от $-180°$ до $+180°$, но можно из кинематических соображений ввести и углы от $-\infty$ до $+\infty$.

После знакомства с различными видами скалярных величин естествен переход к векторам, характеризующим параллельные переносы в произвольном направлении.

Дистрибутивность умножения векторов на число и теоремы о пропорциональности отрезков, отсекаемых параллельными на сторонах угла, тесно связаны друг с другом. Программа не предрешает, что должно появиться ранее. Поскольку понятия иррационального числа у учащихся еще нет, при доказательстве ограничиваются умножением на рациональное число или соизмеримыми отрезками.

Тема 7. Изучение подобия начинается с общего понятия подобия произвольных фигур, имеющего прочную опору в привычке пользоваться планами и картами, моделями в различных масштабах. После доказательства признаков подобия треугольников устанавливается, что при подобии произвольных фигур соответствующие углы равны. Подобие многоугольников рассматривается как частный случай подобия произвольных фигур.

Центральная гомотетия доставляет удобное средство построения подобных фигур и связывается с умножением вектора на число.

В конце темы может быть дано некоторое уточнение представлений о площади и объеме произвольной фигуры (с помощью сети квадратов на плоскости или кубов в пространстве), хотя окончательное изложение этого вопроса относится лишь к программе X класса. Здесь же во всяком случае должен быть сформулирован закон изменения площадей и объемов при подобных преобразованиях. Это позволяет дать вывод формулы для объема пирамиды (треугольная пирамида разбивается на две подобные ей пирамиды вдвое меньших линейных размеров и две призмы).

Тема 8. Здесь заканчивается в восьмилетней школе изучение геометрических преобразований.

Обязательным является ясное понимание различия между движениями, сохраняющими и меняющими ориентацию. Проще всего это достигается путем связывания с перемещаемой фигурой «координатного репера». Различие между правой и левой системой координат имеет и самостоятельное значение. Для физики оно особенно существенно в трехмерном пространстве, но это делает тем более желательным предварительное знакомство с ним в более простом случае плоскости.

Тема 9. Здесь предполагается некоторая практика пользования таблицами значений тригонометрических фукнций; рекомендуется построить графики этих функций (в градусной мере угла). Доказательство теоремы косинусов можно связать с формулой для расстояния между двумя точками, заданными своими координатами: если вершина A треугольника ABC совпадает с началом координат, а вершина B лежит на оси абсцисс, то координаты точек B и C имеют вид $(c, 0)$ и $(b \cos A, b \sin A)$ и, следовательно,

$$a^2 = BC^2 = (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Значительной практики решения косоугольных треугольников, преследующей своей целью приобретение соответствующих навыков, тема не предусматривает.

Тема 10. Эта тема доставляет богатый материал для задач и упражнений, закрепляемый и в процессе повторений курса VIII класса. При доказательстве свойств окружности естественно пользоваться соображениями симметрии. Связь длины окружности с периметрами описанных и вписанных правильных многоугольников позволяет указать метод вычисления числа π и оценить это число. Боковая поверхность круговых цилиндра и конуса определяется с помощью разверток этих поверхностей; их объемы даются без строгого вывода или связываются с каким-либо вариантом принципа Кавальери.

СТАРШИЕ КЛАССЫ (IX—X) СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Алгебра и начала анализа

В первых двух темах заканчивается работа над последовательными обобщениями понятия числа. В первой теме знакомство с принципом математической индукции углубляет представления учащихся о строении системы натуральных чисел. В начале второй темы естественно повторить основные свойства системы рациональных чисел и сведения об измерении величин из курса геометрии VII класса. Установив, что каждое рациональное число представляется бесконечной периодической десятичной дробью, учащиеся знакомятся с полной системой действительных чисел, представляемых бесконечными десятичными дробями произвольного вида. Тема «Комплексные числа» отнесена к факультативному курсу «Дополнительные главы и вопросы математики», где ее естественно изучать непосредственно после темы 2 основного курса.

Далее алгебраическая проблематика отступает на второй план вплоть до заключительной темы 8 (системы уравнений и неравенств). Но темы 3—7 дают много поводов для продолжения работы по углублению навыков в алгебраических преобразованиях, решению и исследованию уравнений и неравенств. Эти возможности должны быть широко использованы.

Начала математического анализа составляют органическую часть курса. Понятие производной вводится в конце первого полугодия IX класса. Введение этого понятия подготовлено тем, что скорость и ускорение при неравномерном движении рассматриваются в курсе физики VIII класса. Производные от тригонометрических функций изучаются в курсе математики в конце IX класса, а в начале X класса они применяются в курсе физики при изучении темы «Колебания и волны». Производная показательной функции появляется в курсе математики в самом начале X класса и может быть использована на уроках физики при изучении затухающих колебаний.

Тригонометрические функции изучаются в IX и X классах. В первой части (IX класс) дается весь материал, необходимый для вычисления производной тригонометрических функций и, следовательно, для изучения темы «Колебания и волны». Изучение этой темы в курсе физики в X классе обеспечивает непрерывность работы учащихся с тригонометрическими функциями.

Примеры уравнения показательного роста

$$y' = ky$$

и гармонических колебаний

$$y'' = -k^2 y$$

достаточны для того, чтобы учащиеся получили представление о роли дифференциальных уравнений при изучении реальных явлений.

Программа предусматривает лишь первое знакомство с понятием интеграла, без какой-либо систематизации правил интегрирования (достаточное число иллюстративных примеров может быть разобрано с непосредственным обращением к таблице производных элементарных функций, которая должна служить итогом изучения тем 3, 4 и 5).

При изучении темы «Интеграл» естественно уточнить понятие площади произвольной плоской фигуры, что было невозможно осуществить в восьмилетней школе из-за отсутствия понятия предела.

Пояснения к отдельным темам

Тема 1. Принцип математической индукции может быть сформулирован в форме утверждения: множество натуральных чисел, содержащее единицу и вместе с n содержащее $n+1$, совпадает с полным множеством всех натуральных чисел. Эта формулировка позволяет наглядно почувствовать, что принцип математической индукции является аксиомой, характеризующей структуру системы натуральных чисел.

При изучении элементов комбинаторики не обязательно держаться классической схемы. Треугольник Паскаля может сначала появиться, например, непосредственно при рассмотрении последовательного образования произведений

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

откуда легко непосредственно вывести рекуррентную формулу

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m.$$

Для числа перестановок можно считать стандартным обозначение $n!$. Формула

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

может быть выведена и минуя понятие «размещения» (которое не указано в программе в качестве обязательного).

Программа факультативного курса «Дополнительные главы и вопросы математики» предусматривает изучение параллельно с темой 1 основного курса темы «Начала теории вероятностей», которая может быть связана и с открывающей основной курс физики IX класса темой «Основы кинетической теории газов». Было бы очень желательно, чтобы некоторые примеры на подсчет вероятностей (без какой-либо развернутой «теории») вошли и в основной курс математики.

Тема 2. Здесь не предусматривается изучение формальных определений суммы и произведения действительных чисел и тем более обоснование сохранения для действительных чисел свойств арифметических действий и т. п. Обязательному усвоению и запоминанию подлежит только конечный итог: в расширенной системе чисел верна теорема о существовании предела ограниченной монотонной последовательности, сохраняются обычные свойства арифметических операций и неравенств, любое действительное число с любой заданной точностью приближается рациональным числом.

Тема 3. В программе не выделено в отдельный пункт понятие непрерывности функции. Но во всяком случае должно быть достигнуто понимание того обстоятельства, что для основных элементарных функций

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Тема 4 содержит традиционно изучаемый в школе материал. Новым вопросом является вывод производных тригонометрических функций, подготовленный рассмотрением формул синуса и косинуса суммы и разности аргументов.

Тема 5. При изучении закона показательного роста предполагается рассмотрение примеров, в частности из экономики, биологии и др.

В предположении (принимаемом без доказательства), что существует

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{a^\Delta - 1}{\Delta} = c,$$

легко устанавливается формула

$$(a^x)' = ca^x.$$

Число e может появиться как основание, при котором коэффициент c равен единице.

Тема 6. Обращение к рассмотрению площадей под графиком функции создает наглядную опору для усвоения определения интеграла. Поэтому применения интеграла к вычислению площадей плоских фигур естественно рассмотреть здесь же. Применения интеграла к вычислению объемов и площадей поверхностей отнесены к курсу геометрии.

Тема 7. При вычислении производной

$$y = c\cos(kx + \Theta) \qquad (1)$$

(что необходимо для понимания гармонических колебаний) может быть приведена (без вывода, но с необходимыми пояснениями) формула производной функции от функции. То обстоятельство, что (1) дает общее решение уравнения $y'' = -k^2y$, не доказывается (хотя рассказ о задаче с начальными условиями для этого уравнения желателен).

Вывод формулы для суммы двух гармонических колебаний с одинаковым периодом приобретает наглядность при векторной интерпретации. Существенно понимание причин того, что сумма является тоже гармоническим колебанием с тем же периодом, сама же формула не предназначается для запоминания.

Тема 8. Ранее в программе явно упоминались системы уравнений только в теме 4 VI класса и теме 7 VII класса. Но естественно, что практика решения систем уравнений не должна прерываться при прохождении дальнейших тем. В заключительной теме 8 лишь подводится окончательный итог этой работы. Введение (в курсе геометрии IX класса) координат в пространстве с выводом уравнений плоскости и сферы позволяет дать понятие о геометрической интерпретации уравнений с тремя неизвестными.

Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными позволяет без выкладок обосновать классификацию возможных типов множества решений такой системы. Лишь для системы двух уравнений разумно дать алгебраический критерий единственности решения в форме $\Delta \neq 0$.

В классе достаточно разобрать примеры задач из области линейного программирования с двумя неизвестными (сводящиеся к рассмотрению пересечения нескольких полуплоскостей). Но в обзорном порядке необходимо дать представление о современных возможностях решения систем линейных уравнений и неравенств с большим числом неизвестных. Это даст учащимся возможность понять достаточно конкретным образом значение электронной вычислительной техники.

Геометрия

Программа не предрешает, будет ли изложение начал стереометрии начинаться с перечисления пространственных аксиом соединения или же, опираясь на наглядные соображения, будут сформулированы свойства операций над векторами, которые и лягут в основу дальнейшего дедуктивного построения курса в качестве аксиом.

На первом пути кажется неизбежным по-прежнему опираться при изложении стереометрии на всю совокупность ранее установленных фактов планиметрии, не смущаясь тем, что курс планиметрии восьмилетней школы либо совсем лишен аксиоматической базы (в ныне действующих учебниках упоминаются лишь отдельные примеры аксиом), либо (в соответствии с пожеланиями этого проекта) может быть построен на основе избыточной трудно обозримой системы аксиом.

Второй путь позволяет предложить вниманию учащихся обозримую полную аксиоматику геометрии. Но для нашей школы он является совсем новым.

Пояснения к отдельным темам

Тема 1. Предполагается, что учащиеся уже знакомы с основными фактами, относящимися к взаимному расположению прямых и плоскостей в пространстве, из занятий черчением и из курса геометрии восьмилетней школы. Теорема о трех перпендикулярах может быть сформулирована в терминах ортогональных проекций: проектирование на плоскость и последующее проектирование на лежащую на этой плоскости прямую приводит к тому же результату, что и непосредственное проектирование на прямую.

Включение в программу вопроса о применении параллельных проекций к изображению пространственных фигур связано со следующими соображениями. Чертежи и рисунки, выполняемые при доказательстве теорем стереометрии и анализе стереометрических задач, обычно делаются в «произвольной» параллельной проекции. Полный разбор вопросов о степени их произвола выходит за пределы обязательной программы. Однако постановка вопроса о допустимых изображениях простейших геометрических фигур должна быть ясна учащимся.

Уравнение плоскости получается из обращения в нуль скалярного произведения перпендикулярных векторов в форме $\bar{n}(\bar{r}-\bar{r}_0)=0$, откуда непосредственно вытекает координатная форма уравнения $Ax+By+Cz+D=0$.

Тема 2. Формулы объемов пространственных тел выводятся средствами интегрального исчисления (с использованием понятия первообразной). Это позволяет дать единообразное определение объема всех изучаемых тел и существенно облегчит вывод формул.

ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

Арифметика и начала алгебры

IV класс

(6 час. в неделю, всего 210 час., из них 30 час. на геометрию)

1. Натуральные числа — 105 час.

Чтение и запись многозначных чисел. Изображение чисел точками на луче. Сравнение чисел. Неравенство.

Законы арифметических действий: коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность. Сложение, вычитание, умножение и деление многозначных чисел.

Числовые выражения. Выражения, содержащие переменные. Числовое значение выражения. Преобразование выражений на основе законов арифметических действий.

Применение уравнений к решению задач.

Замечание. В связи с изучением законов действий вводится понятие объема прямоугольного параллелепипеда.

2. Десятичные дроби — 75 час.

Измерение величин. Десятичная система мер. Десятичная дробь. Изображение десятичных дробей точками на прямой. Сравнение десятичных дробей.

Сложение, вычитание, умножение и деление десятичных дробей. Округление чисел. Среднее арифметическое. Решение задач на проценты. Вычисление площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда.

V класс

(6 час. в неделю, всего 210 час., из них 35 час. на геометрию)

3. Положительные и отрицательные числа — 80 час.

Положительные и отрицательные числа. Изображение чисел точками на прямой (числовая прямая). Модуль числа. Сравнение чисел.

Сложение. Противоположные числа. Вычитание. Расстояние между двумя точками числовой прямой. Алгебраическая сумма. Умножение. Возведение в степень. Деление.

Преобразование выражений: раскрытие скобок, вынесение общего множителя за скобку, приведение подобных членов.

Оси координат. Абсцисса и ордината точки на плоскости. Построение точки по ее координатам.

Графики движения. Графики температуры, стоимости и др.

4. Обыкновенные дроби. Действия с обыкновенными и десятичными дробями — 95 час.

Делимость чисел. Делители числа. Простые числа. Признаки делимости чисел. Разложение чисел на простые множители. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа. Наименьшее общее кратное.

Обыкновенная дробь. Изображение дробей точками на прямой. Приведение дробей к общему знаменателю. Сокращение дробей. Сравнение дробей.

Четыре арифметических действия с обыкновенными и десятичными дробями.

Десятичные приближения обыкновенной дроби.

Действия с рациональными числами любого знака. Законы действий.

Вычисления по формулам. Формула $s = vt$. Формулы длины окружности, площади прямоугольника, треугольника и круга, объема прямоугольного параллелепипеда. Формулы площади квадрата и объема куба.

Алгебра

VI класс

(4 часа в неделю, всего 140 час.)

1. Основные понятия — 10 час.

Употребление букв в алгебре. Уравнения и тождества.

2. Прямая и обратная пропорциональность. Одночлены — 40 час.

Отношения величин и чисел. Пропорции. Основное свойство пропорции. Нахождение неизвестного члена пропорции.

Понятие функции. Прямая и обратная пропорциональность. Графики функций

$$y = kx; \ y = \frac{k}{x}.$$

Степени с целым показателем (положительным, нулевым и отрицательным). Формула

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Одночлены и их приведение к стандартному виду:

$$kx^l y^m z^n.$$

Запись больших и малых чисел в виде $k \cdot 10^n$.

3. Целые выражения — 48 час.

Преобразование любого целого выражения в многочлен (сумма одночленов). Стандартный вид многочлена от одного переменного.

Формулы сокращенного умножения:

$$(a \pm b)^2; \ (a + b)(a - b); \ (a \pm b)^3;$$
$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

Примеры разложения на множители.

Графики линейной функции и функций ax^2, ax^3. Примеры графиков многочленов второй и третьей степени.

4. Уравнения и системы уравнений — 42 часа.

Свойства равенств. Множество решений системы уравнений и его геометрическое изображение в случае одного и двух неизвестных.

Решение систем линейных уравнений.

VII класс

(3 часа в неделю в первом полугодии и 4 часа во втором полугодии, всего 122 часа)

5. Рациональные выражения — 42 часа.

Преобразование любого рационального выражения в отношение двух многочленов. Сокращение алгебраических дробей при помощи разложения числителя и знаменателя на множители.

Примеры уравнений с неизвестными в знаменателе.

6. Неравенства — 20 час.

Свойства неравенств. Действия с неравенствами. Применение к оценке точности приближенных вычислений.

Неравенства первой степени с одним и двумя неизвестными, их геометрический смысл. Множество решений неравенств, равносильность неравенств.

7. Корни — 16 час.

Функция, обратная данной. График функции $y=\sqrt{x}$.

Нахождение квадратного корня по графику и по таблице. Понятие о способах вычисления квадратного корня с любой заданной точностью. Понятие корня любой степени; функция $y=\sqrt[3]{x}$.

Таблицы квадратов, кубов, квадратных и кубических корней.

8. Квадратные уравнения — 44 часа.

Общая формула решения. Теорема Виета и обратная к ней. Разложение квадратного трехчлена на множители. Примеры уравнений и систем, приводимых к квадратным.

VIII класс

(4 часа в неделю, всего 140 час.)

9. Арифметическая и геометрическая прогрессии — 15 час.

Рекуррентные определения последовательностей. Формулы общего члена и суммы n членов арифметической и геометрической прогрессий.

10. Дробные показатели степени. Показательная функция и логарифмы — 70 час.

Обобщение понятия степени. Показательная функция. Формулы:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};\ (a^x)^y = a^{xy};\ (ab)^x = a^x b^x.$$

График показательной функции.

Десятичные логарифмы, формулы:

$$\lg(xy) = \lg x + \lg y;\ \lg\frac{x}{y} = \lg x - \lg y;$$

$$\lg x^n = n \lg x;\ a^x = 10^{(\lg a)x}.$$

Таблицы логарифмов. Примеры вычислений с таблицами. Логарифмическая шкала и логарифмическая линейка. Приведение выражений, содержащих только знаки операций умножения, деления, возвышения в степень и извлечения корня, к стандартному виду $kx^\alpha y^\beta z^\gamma$.

Примеры решения иррациональных уравнений.

11. Организация вычислений и вычислительная техника — 30 час. Неравенство

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

Приближенные вычисления. Абсолютная и относительная погрешности. Правила подсчета цифр при приближенных вычислениях. Линейная интерполяция.

Организация вычислений. Расписка формул для ручных вычислений. Понятие о программировании для машинных вычислений.

Понятие об арифметическом устройстве электронных вычислительных машин (ЭВМ).

Повторение — 25 час.

Геометрия

IV класс

(30 час., распределены в течение года)

1. Основные геометрические понятия — 30 час.

Геометрическое тело, поверхность, линия. Прямая линия, луч, отрезок. Ломаная линия, ее длина. Сравнение длины ломаной линии с длиной отрезка, соединяющего ее концы. Соотношение между сторонами треугольника.

Угол. Сравнение углов. Биссектриса угла. Развернутый и полный угол. Прямой угол и его построение при помощи чертежного угольника. Виды треугольников.

Перпендикуляр к прямой и его построение при помощи чертежного угольника. Расстояние от точки до прямой. Осевая симметрия. Окружность, центр, радиус, диаметр, хорда, дуга. Градусное измерение углов. Транспортир. Смежные и вертикальные углы.

V класс

(35 час., распределены в течение года)

2. Геометрические построения — 25 час.

Построения циркулем и линейкой. Основные построения. Построение фигур, симметричных данным относительно прямой. Построение фигур, повернутых на заданный угол.

Построение параллельных прямых линейкой и угольником, рейсшиной. Пучок параллельных, направление, угол между двумя направлениями. Построение фигур, перенесенных по заданному направлению на заданное расстояние.

Перпендикуляр и наклонные.

Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей.

Треугольник и его элементы. Сумма углов в треугольнике. Построение треугольников по трем элементам (четыре случая). Признаки равенства треугольников. Построение прямоугольных треугольников. Признаки равенства прямоугольных треугольников.

VI класс

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

3. Равенство плоских фигур. Логическое строение геометрии — 20 час.

Совмещение фигур при помощи параллельного переноса, поворота и осевой симметрии.

Понятие об аксиомах геометрии. Теорема, условие и заключение. Примеры теорем: о множестве точек, равноудаленных от концов отрезка, от сторон угла, от двух прямых.

4. Многоугольники — 50 час.

Полоса, параллелограмм, ромб, прямоугольник, их симметрия. Свойства диагоналей параллелограмма, ромба, прямоугольника. Трапеция и ее свойства.

Выпуклые фигуры. Выпуклые многоугольники. Сумма внешних и внутренних углов многоугольника.

Формулы площади треугольника, параллелограмма, трапеции. Площадь произвольного многоугольника. Теорема Пифагора.

Обратная и противоположная теоремы. Метод доказательства от противного. Необходимые и достаточные условия.

VII класс

(3 часа в неделю в первом полугодии и 2 часа в неделю во втором полугодии, всего 88 час.)

5. Начальные сведения по стереометрии — 15 час.

Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей. Углы между прямыми и плоскостями. Ортогональные проекции.

Куб, параллелепипед, призма, пирамида.

6. Геометрические величины — 25 час.

Измерение отрезков, углов и дуг. Направленные отрезки и дуги. Векторы, сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Дистрибутивность умножения относительно сложения. Теоремы о пропорциональности отрезков, отсекаемых на сторонах угла.

7. Подобие — 38 час.

Подобие произвольных фигур. Коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников.

Гомотетия. Мензульная съемка. Применения гомотетии и подобия к решению задач на построение.

Отношение площадей и объемов подобных фигур. Объем и боковая поверхность призмы и пирамиды.

8. Преобразования движения и подобия на плоскости — 10 час.

Заключительный обзор. Движения, сохраняющие и меняющие ориентацию. Правая и левая система координат. Аналитическая запись параллельного переноса, осевой симметрии и гомотетии в подходящей системе координат.

VIII класс

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

9. Метрические соотношения в треугольнике. Тригонометрические функции — 35 час.

Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора.

Расстояние между двумя точками, заданными своими координатами. Уравнение окружности.

Определение тригонометрических функций (синус, косинус и тангенс), их изменение при изменении угла в пределах от 0° до 180°. Значение тригонометрических функций для углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90°. Тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha;\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha;$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Таблицы тригонометрических функций. Решение прямоугольных треугольников.

Теорема косинусов. Формулы площади треугольников. Теорема синусов. Решение косоугольных треугольников.

10. Окружность, вписанные и описанные многоугольники — 20 час.

Свойство диаметра, перпендикулярного к хорде. Свойство дуг, заключенных между параллельными хордами. Вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника; окружность, вписанная в треугольник. Вписанные и описанные четырехугольники. Вписанные и описанные правильные многоугольники, их периметры и площади.

Длина окружности, площадь круга. Цилиндр и конус, их объемы и боковые поверхности.

Повторение — 15 час.

ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТАРШИХ КЛАССОВ (IX—X) СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Алгебра и начала анализа

IX класс

(3 часа в неделю, всего 105 час.)

1. Принцип математической индукции. Элементы комбинаторики — 15 час.

Примеры применения принципа индукции к выводу различных формул (сумма членов геометрической прогрессии, сумма квадратов членов натурального ряда и др.).

Треугольник Паскаля.

Бином Ньютона.

2. Бесконечные последовательности и пределы — 15 час.

Определение предела. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Периодические десятичные дроби.

Иррациональные числа как непериодические десятичные дроби. Доказательство иррациональности $\sqrt{2}$. Существование предела ограниченной монотонной последовательности (без доказательства). Число π.

Бесконечно малые. Теорема о пределах суммы, произведения и частного (без доказательства).

3. Производная и ее применения — 45 час.

Предел функции. Производная.

Производная суммы, произведения, частного, x^n при целом n, обратной функции.

Возрастание и убывание функций, максимумы и минимумы.

Исследование квадратного трехчлена.

Применение производной в геометрии (касательная) и физике (скорость, ускорение).

4. Тригонометрические функции, их графики и производные — 30 час.

Обобщение понятия об угле. Радианное измерение углов и дуг. Предел отношения хорды к дуге.

Тригонометрические функции числового аргумента, их графики, четность и нечетность, периодичность. Синус и косинус суммы и разности. Производные тригонометрических функций.

X класс

(3 часа в неделю, всего 105 час.)

5. Производная показательной функции и логарифма — 15 час.

Производная показательной функции. Уравнение показательного роста. Логарифмическая функция с произвольным основанием, формула

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Производная логарифма.

6. Интеграл — 12 час.

Первообразная функция. Определенный интеграл и его применение к вычислению площадей. Формула Ньютона — Лейбница.

7. Тригонометрические функции (продолжение) — 40 час.

Гармонические колебания, уравнение $y'' = -k^2y$, сложение гармонических колебаний с общим периодом.

Формулы приведения.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Тригонометрические функции суммы и разности двойного и половинного аргументов.

Понятие об обратных тригонометрических функциях.

8. Системы уравнений и неравенств. Счетно-электронные машины — 18 час.

Множество решений линейных и нелинейных уравнений и неравенств и систем уравнений и неравенств. Геометрическая интерпретация на прямой, плоскости и в пространстве.

Задачи с практическим содержанием, приводящиеся к решению системы уравнений и неравенств. Понятие о линейном программировании. Беседа о современной вычислительной технике.

Повторение — 20 час.

Геометрия

IX класс

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

1. Прямые и плоскости; координаты и векторы в пространстве — 70 час.

Понятие о логической структуре геометрии (определения, аксиомы, теоремы).

Параллельность прямых и плоскостей в пространстве. Связка параллельных прямых. Направление. Векторы на плоскости и в пространстве; параллельный перенос. Сложение векторов, умножение вектора на число. Разложение вектора по трем направлениям.

Параллельное проектирование (на плоскость). Применение к построению изображений пространственных фигур.

Перпендикулярность прямых и плоскостей. Ортогональное проектирование на плоскость и на прямую.

Углы между прямыми и плоскостями. Площадь проекции. Теорема о трех перпендикулярах.

Координаты вектора и точки в прямоугольной системе координат. Скалярное произведение, его выражение через координаты, свойства скалярного произведения. Уравнение плоскости. Расстояние между двумя точками в пространстве. Уравнение сферы.

X класс

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

2. Многогранники и тела вращения — 50 час.

Многогранные углы. Плоские и двугранные углы многогранного угла.

Призма и параллелепипед. Пирамида. Усеченная пирамида. Куб и правильный тетраэдр. Боковая и полная поверхности призмы и пирамиды.

Поверхности вращения и тела вращения.

Понятие объема. Объем параллелепипеда, призмы, цилиндра, пирамиды, конуса, шарового сегмента и шара. Поверхности круглых тел (цилиндр, конус, сферический сегмент, сфера).

Задачи на поверхности и объемы.

Повторение — 20 час.

К новым программам по математике

А. Н. КОЛМОГОРОВ
(Москва)

Публикуемые в этом номере программы по математике являются окончательным итогом работы математической секции Комиссии по определению содержания среднего образования АН СССР и АПН СССР и утверждены Министерством просвещения СССР в качестве основы для работы над новыми учебниками. Предусмотрено, что программы могут быть уточнены перед их введением с учетом предложений авторов учебников и результатов экспериментального преподавания. Но следует исходить из того, что содержание работы с каждым классом определено программами в основном окончательно. По сравнению с опубликованным в 1967 г. предварительным проектом (см. «Математика в школе», № 1) сделаны три существенных изменения в распределении материала:

1) Знакомство с отрицательными числами перенесено в V класс, что позволяет полностью изучить четыре арифметических действия с десятичными дробями в IV классе.

2) Изменена планировка последних тем курса алгебры в VI—VIII классах, причем знакомство с логарифмами в VIII классе ограничено сведениями, необходимыми для понимания употребления таблиц десятичных логарифмов и логарифмической линейки.

3) Из обязательной программы исключены начала теории вероятностей, тема «Принцип математической индукции и элементы комбинаторики» помещена в начале IX класса, а тема «Системы уравнений и неравенств» превращена в заключительную для всего школьного курса алгебры.

Первое из этих изменений облегчает переход на новые программы в IV классе. Это соображение было, видимо, решающим для большинства членов комиссии. Мне лично принятое теперь решение кажется и по существу правильным. Преимущества раннего введения отрицательных чисел при решении задач алгебраическими методами в IV классе были бы еще довольно иллюзорными. Во всяком случае в тексте одного из учебников, составлявшегося убежденными сторонниками раннего введения отрицательных чисел, я нашел очень мало задач, при решении которых отрицательные числа были бы нужны. Зато в этом учебнике для IV класса оказалось много задач, авторам которых пришлось искусственно подбирать данные для того, чтобы избежать дробных ответов.

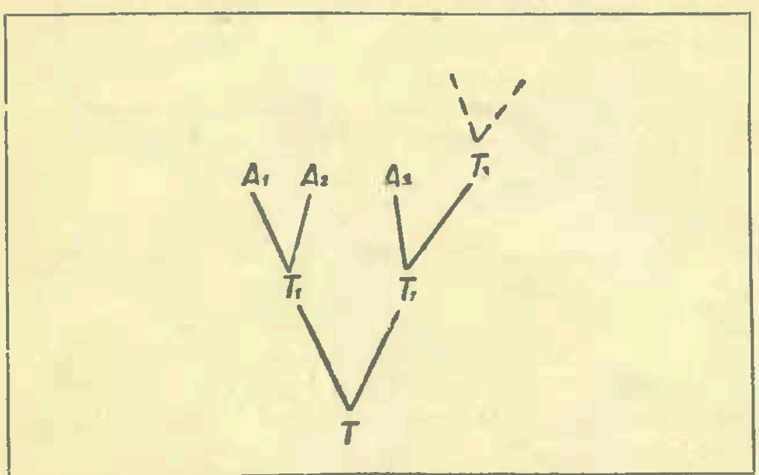
Упрощение изложения темы «Дробные показатели степени, показательная функция и логарифмы» было достигнуто в поисках компромисса между желанием большинства членов комиссии иметь показательную функцию и логарифмы в VIII классе и бурно выражавшимися в учительской среде сомнениями в осуществимости этого желания. Новая редакция программы в этом пункте исходит из тезиса, что самое введение степеней с дробными показателями степени естественно связать с построением и изучением показательной функции. Один из вариантов осуществления этой идеи показан в моих статьях, опубликованных в № 1 и 2 «Математики в школе» за этот год. При таком подходе к делу изучение степенной функции с произвольным показателем степени превращается в побочную тему, не занимающую прежнего места в школьном курсе. Мне лично представляется, что степенная функция с произвольным показателем все же должна была бы быть упомянута в тексте программы, а не только в порядке пожеланий в объяснительной записке.

Решение об исключении из обязательной программы даже самых начальных сведений из теории вероятностей, по-видимому, правильно ввиду неподготовленности нашей школы к их введению. Но члены комиссии были единодушны в сожалениях на этот счет. Не могу здесь не сослаться на свою статью, где простой и наглядный подход к понятию вероятности пропагандируется для факультативных занятий (см. этот номер журнала, стр. 63—72).

Внимательные читатели обнаружат в окончательном тексте программы ряд менее крупных сокращений и изменений фомулировок, отвечающих, как мы надеемся, преобладавшим при обсуждении предшествующего проекта пожеланиям об упрощении программы.

Особо следует сказать о геометрической части программы. Перенесение изучения кинематики и динамики точки в векторном изложении в курсе физики из IX класса в начало VIII побудило составителей программы по математике найти для векторов надлежащее место в программе геометрии VII класса и подчеркнуть необходимость достаточного внимания к векторам уже в восьмилетней школе. В остальном окончательный вариант программы по геометрии лишь более последовательно проводит тенденции, которыми составители руководствовались и в предварительном варианте.

Уже при обсуждении предварительного варианта программы вызвало споры предложение вводить довольно большое количество допущений откровенно без доказательства. В новом тексте объяснительной записки излагается с некоторыми уточнениями позиция составителей программы по этому вопросу. Мы считаем, что практика преподавания геометрии в VI—VIII классах в настоящее время слишком часто направлена на создание лишь иллюзии «строгости». Преподаватели математики из курса педагогических институтов хорошо знают, что все научные системы изложения геометрии на основе аксиом сложны, а список употребляемых при этом аксиом длинен. Но в школьной практике укоренился обычай указывать лишь «примеры аксиом». Самый список этих примеров аксиом обычно до смешного короток. По-видимому, чаще всего учащимся ни разу не предлагают провести анализ какого-либо доказательства с выяснением всех лежащих в его основе аксиом. Между тем такое упражнение следовало бы настойчиво рекомендовать: теорема T доказана со ссылкой на теоремы T_1 и T_2, теорема T_1 доказана со ссылкой на аксиомы A_1 и A_2, теорема же T_2 — со ссылкой на аксиому A_3 и теорему T_3 и т. д., до тех пор пока в качестве допущений останутся одни аксиомы. Но при современной структуре учебника по геометрии для VI—VIII классов попытка провести такой анализ за редкими исключениями (специально подобранной теоремы T) обречена на провал.



Мне уже неоднократно приходилось писать на страницах «Математики в школе» о том, что следование классической евклидовской схеме изложения начал планиметрии, по которой довольно долго ограничиваются теоремами «абсолютной геометрии» (в терминологии Лобачевского), не опирающимися на постулат о параллельных, в нашей школьной практике давно потеряло всякий разумный смысл [1]. Значительно более простая система изложения, где параллельность и параллельный перенос используются с самого начала, давно разработана и осуществлена во многих иностранных учебниках.

Но трудность заключается в том, что готового образца логического строения курса планиметрии, пригодного для наших VI—VIII классов, ни в нашей, ни в зарубежной учебной литературе, по-видимому, нет. Составители программы постарались сформулировать такой заказ, но в программе, связывающей инициативу авторов будущих учебников, было бы неуместно давать на этот счет слишком жесткие указания. Со своей стороны я надеюсь выступить в одном из следующих номеров «Математики в школе» с конкретными предложениями на этот счет.

Для IX—X классов при изложении стереометрии наиболее привлекательной кажется последовательно векторная точка зрения. В VII—VIII классах на уроках математики и физики учащиеся привыкнут к обращению с векторами (на практике по преимуществу с лежащими в одной плоскости). Это позволяет в начале курса IX класса явно сформулировать аксиомы векторного пространства, пригодные в любом числе измерений, обратить внимание на одномерный случай скалярных величин и сформулировать аксиомы, характеризующие двумерный и трехмерный случаи. Возможность заново построить на этой основе планиметрию может быть только указана. Систематическому же построению стереометрии посвящается весь курс IX класса. Я надеюсь, что наш журнал примет меры к тому, чтобы возможная логическая схема такого построения курса IX класса была тоже освещена в ближайших номерах.

[1] В одном из недавно изданных учебников сначала доказывается существование параллельных, потом вводится постулат о единственности параллельной, а непосредственно за тем говорится, что при отказе от этого постулата можно получить геометрию Лобачевского и геометрию Римана, в которой параллельных совсем нет. Связь доказательства существования параллельных с допущением о том, что прямая делит плоскость на две части, в большинстве современных учебников позабыта.