# НОВЫЕ ПРОГРАММЫ

## ПРОЕКТ ПРОГРАММЫ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ [1]

В составлении программы принимали участие **В. Г. Болтянский, А. Н. Колмогоров, Ю. Н. Макарычев, А. И. Маркушевич, Г. Г. Маслова, К. И. Нешков, А. Д. Семушин, А. И. Фетисов, А. А. Шершевский, И. М. Яглом.**

Окончательная редакция объяснительной записки принадлежит **А. Н. Колмогорову, А. И. Маркушевичу** (вводная часть, арифметика, алгебра и начала анализа) и **И. М. Яглому** (геометрия).

**Содержание**



[1] Редакция журнала просит учителей математики, научных работников и методические объединения учителей высказать свои замечания и предложения по содержанию публикуемого проекта программы по математике.

### ОБЪЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

#### *Общие принципы*

1. Составление публикуемых сейчас программ является ответственным этапом работы по существенному усовершенствованию постановки преподавания математики в школе, рассчитанной на ряд лет. Программы эти должны послужить основой для написания новых учебников и экспериментального преподавания. Лишь после одобрения этих учебников и внесения необходимых изменений в программу преподавание по этим программам сделается обязательным в массовой школе.

Такой широкий подход к делу позволил не ограничиваться текущими поправками, а заново с общих принципиальных позиций пересмотреть вопрос о содержании школьного курса математики и об оптимальных путях изучения этого содержания. Вместе с тем этот подход к делу обусловил и некоторые особенности публикуемых программ. Составители стремились с достаточной отчетливостью определить содержание обучения на каждый год. В объяснительной записке иногда даются конкретные указания относительно уровня трудности задач, решение которых должно быть усвоено всеми учащимися. Вместе с тем, чтобы не стеснять излишне работу авторских коллективов, которые будут работать над новыми учебниками, и преподавателей экспериментальных школ, составители избегали излишней детализации программных указаний там, где им представлялось желательным оставить свободу для испытания различных возможных систем изучения материала. В частности, следует иметь в виду, что по каждой теме (снабженной номером и указанием числа часов) дается систематизированное перечисление подлежащего усвоению материала, которое может не совпадать с порядком изучения материала внутри темы. В тех случаях, когда распределение материала между темами и последовательность изучения отдельных выделенных в программе тем представляются составителям еще подлежащими обсуждению, это указывается в объяснительной записке.

Следует заметить, что в комиссии, готовившей программы, подвергалось тщательному обсуждению и распределение числа часов между темами. Если оно заметно отклоняется от существующей традиции, то это отражает взгляды составителей на удельный вес отдельных тем.

В общих чертах структура действовавших до настоящего времени школьных программ по математике является достижением педагогической мысли конца XIX в., когда возникла мысль о необходимости введения в курс алгебры элементов «функционального мышления». В отличие от опыта почти всех зарубежных стран в программах наших школ общего профиля до последнего времени отсутствовали начала дифференциального и интегрального исчисления.

При самом бережном отношении к накопившемуся ценному опыту работы школы необходимо искать пути существенного усовершенствования содержания школьного математического образования в направлении сближения школьного преподавания со строением математической науки и потребностями смежных наук и техники. Необходимо соединить повышение логического уровня преподавания с его возможно большей наглядностью и ориентацией на органическую связь с содержательной естественнонаучной интерпретацией математических фактов.

По новой программе начальные понятия дифференциального исчисления вводятся в IX классе и широко используются в дальнейших главах курса математики. При достаточно наглядном изложении, опирающемся на геометрические и физические представления, этот материал не труден для IX класса. Имеется опыт его изучения в девятых классах массовой школы. Именно при таком его размещении он служит упрощению и облегчению изучения традиционных вопросов (исследования функций и т. п.). Понятие интеграла вводится в X классе и используется затем при вычислении объемов тел.

Иначе программа подходит к введению элементов математической логики и теории множеств. В программе рекомендуется лишь постепенное и очень осторожное введение простейших терминов и обозначений из этой области, в частности, в связи с объяснением принципов работы вычислительных машин (в VII классе).

2. Важное значение для успешного обучения математике имеет педагогически правильное сочетание индуктивных и дедуктивных методов. В младших классах основную роль должны играть индуктивные, в частности опытные, методы установления фактов, в том числе использование непосредственного практического опыта учащихся. В геометрии, например, для этой цели следует шире использовать вырезание фигур из бумаги и т. п.

Опыт показал, что содержательное и доходчивое индуктивное обоснование фактов обеспечивает на раннем этапе обучения более глубокое и прочное усвоение изучаемого материала, чем формально-дедуктивное. Слишком раннее введение обычно заучиваемых на память дедуктивных доказательств не только не способствует развитию логического мышления учащихся, но, как правило, искусственно задерживает его, часто на длительный срок.

Программа предполагает, что обучение навыкам дедуктивного мышления проводится на всех этапах обучения. Формирование понятия о дедуктивном построении научной дисциплины следует осуществлять с большой постепенностью и осторожностью.

Сначала дедуктивное обоснование изучаемых закономерностей (в тех случаях, когда оно необходимо, например, признаки делимости, свойство вертикальных углов) дается на отдельных конкретных примерах в форме пояснений, не предназначенных для заучивания. Дедуктивные доказательства как самостоятельный элемент математической теории должны появиться лишь тогда, когда изучаемый материал даст школьникам возможность осознать их необходимость.

В дальнейшем роль дедуктивного метода усиливается. Программа по математике создает благоприятные условия для того, чтобы на протяжении достаточного периода времени воспитать потребность в дедуктивных доказательствах, выработать правильное представление о строении дедуктивной научной теории, об аксиоматической системе построения науки. Явное раскрытие сущности аксиоматического метода в геометрии и алгебре должно стать завершающим моментом в общей системе математической подготовки учащихся.

3. Программа составлена с учетом многообразных связей со смежными дисциплинами и трудовым обучением. Раннее введение отрицательных чисел и простейших буквенных формул (IV—V классы) существенно поможет началу курса физики в VI классе. Уравнение равномерного движения $s=vt$ и графическое решение задач на движение на уроках математики предваряют изучение механики на уроках физики. Понятие скорости произвольного движения вводится на уроках физики несколько ранее понятия производной на уроках математики, что дает возможность разобрать ряд задач с физическим содержанием на уроках математики. Гармонические колебания изучаются на уроках математики после изучения темы «Колебания и волны» на уроках физики. Такое взаимодействие двух предметов, не избегающее разбора физических задач на уроках математики и предварения некоторых новых математических идей на уроках физики, кажется составителям программы не только допустимым, но во многих случаях и наиболее желательным.

Систематическое использование логарифмической линейки при вычислениях (без рассмотрения принципов ее устройства) программа предусматривает с VII класса (тема 7), где она находит широкое применение при выполнении различных вычислительных работ.

Вместе с тем, первое знакомство с логарифмической линейкой может быть проведено в VI классе при изучении темы 2, что создаст более благоприятные условия для изучения алгебры и геометрии, так как в этом случае может быть значительно облегчена вычислительная часть курса математики.

Знакомство с вычислениями по формулам в V классе, решение систем линейных уравнений в конце VI класса, использование логарифмической линейки при вычислениях, начиная с VII класса, может обслужить потребности смежных предметов — физики, химии и трудового обучения. Знакомство с графиками на логарифмической и полулогарифмической сетке в конце VIII класса открывает возможность широкой практики по математической обработке эмпирических данных из любых разделов естествознания и общественных наук (например, графики роста промышленности на полулогарифмической сетке). Существенно для связей с другими дисциплинами и трудовым обучением предусматриваемое программой увеличение внимания к приближенным вычислениям в VII классе.

Измерительные и геодезические работы на местности не указаны явно в программе, но они желательны уже в IV классе. Особенно широкие возможности для них имеются в конце VII класса (мензульная съемка, измерение площадей с оценкой точности результата) и начале VIII (применение тригонометрических функций, решение треугольников).

4. В условиях всеобщего образования на всех этапах обучения изучаемый материал должен быть доступен всем. Основательность усвоения расширенного круга идей требует очень большой четкости логических формулировок, но вместе с тем и отказа от распространенной в школьной практике погони за видимостью «строгости» и систематичности дедуктивного построения курса (часто весьма иллюзорных). Предлагается значительно шире пользоваться явным указанием на то, что отдельные факты, допускающие доказательство, но убедительные наглядно, принимаются в школе без доказательства.

5. Твердость усвоения навыков должна быть гарантирована безусловно. Например, учащиеся должны безошибочно производить арифметические и алгебраические выкладки. Эти навыки для учащихся, не проявляющих повышенного интереса к математике, должны достигаться на большом числе достаточно простых упражнений и задач. Во многих случаях заучивание формул должно быть заменено созданием привычки пользоваться справочниками. Подчинение характера предназначенного для всех общего образования интересам тех учащихся, которые после восьмилетней школы идут в техникумы, а из десятых классов — в технические высшие учебные заведения, является недопустимым. Впрочем, можно думать, что приводимые далее указания, ограничивающие характер требований в отношении трудности решаемых задач, не снижают уровень, фактически достигаемый в настоящее время в большинстве школ.

6. В программах указано несколько «бесед учителя». Практика такого ознакомления учащихся с важными научными идеями, о которых в школе всем учащимся можно дать только общее представление, приоткрывающее перед ними перспективы дальнейшего изучения математики и ее роли в естествознании и технике, вероятно, должна быть еще более расширена. (При таком ознакомлении учащихся с более трудными вопросами большую помощь могут оказать серии наглядных пособий и кинофильмы.)

В проекте учебного плана средней школы начиная с VII класса выделяются часы на факультативные занятия по выбору (см. общую объяснительную записку к проекту программ). В связи с освобождением части учебного времени для факультативных занятий число часов на изучение математики в двух старших классах сокращено с шести по действующему в настоящее время учебному плану до пяти. Программы факультативных математических курсов находятся в стадии разработки. Предполагается, что наибольшее распространение получит постановка для седьмых — десятых классов общего курса «Дополнительные главы и вопросы математики», рассчитанного на два часа в неделю. Предварительный проект программы для IX—X классов прилагается.

Вероятно, многие учащиеся девятых и десятых классов захотят соединить дополнительные занятия математикой по прилагаемой программе с дополнительными занятиями черчением, физикой, радиотехникой и т. д. К общему курсу «Дополнительные главы и вопросы математики» могут примыкать такие факультативные курсы, как «Вычислительная математика» и «Программирование». Можно думать, что в той или иной комбинации курс «Дополнительные главы и вопросы математики» заинтересует значительную часть учащихся старших классов. Всюду, где в одной школе, или в близко расположенных школах, имеется несколько параллельных старших классов, следует рекомендовать введение этого курса. Опытный учитель может организовать занятия по «Дополнительным главам и вопросам математики» и с небольшими группами учащихся девятых — десятых классов.

Составители программ последовательно стояли на той точке зрения, что в общем курсе математики, обязательном для всех учащихся, предпочтение должно быть отдано вопросам наиболее широкого общеобразовательного значения, изучение которых содействует формированию научного мировоззрения и помогает понять место математики в системе наук и в практической деятельности человека. Эти соображения привели к тому, что в программе старших классов занимают большое место элементы математического анализа и уделено некоторое место начальным понятиям теории вероятностей.

Составители с большим сожалением отказались в общеобязательной программе от темы «Комплексные числа». Но они считали, что сохранение этой темы в том сокращенном объеме, в котором она представлена в действующей сейчас программе (без геометрической интерпретации умножения, формулы Муавра и применения ее к извлечению корней), мало целесообразно. Зато в курсе «Дополнительные главы и вопросы математики» удалось поместить тему «Комплексные числа» достаточно рано и использовать эти числа в ряде приложений.

Несколько углубляются в курсе «Дополнительные главы и вопросы математики» знания по арифметике натуральных чисел (элементы теории делимости с доказательством единственности разложения на простые множители). К дополнительному курсу мы отнесли и явную формулировку принципа математической индукции (рассуждения по индукции, естественно, культивируются и в общем курсе).

Наглядное знакомство с простейшими геометрическими преобразованиями по новой программе предусмотрено в восьмилетней школе. В старших классах тема «Геометрические преобразования» входит в программу факультативных занятий. Здесь доказываются теоремы Шаля на плоскости и в пространстве и дается отчетливое представление о группе преобразований.

Составители программ исходят из допущения, что обязательная программа вступительных экзаменов в вузы должна соответствовать программе основного курса математики в средней школе.

Предварительное знакомство в средней школе с началами математического анализа позволит студентам с самого начала лучше воспринимать преподавание основных естественнонаучных и технических дисциплин. Мы думаем, что это преимущество вполне компенсирует необходимость после перехода на новые программы в средней школе знакомить студентов в вузе с комплексными числами и формулировать принцип математической индукции.

Вместе с тем мы не закрываем глаза на то, что факультативные занятия математикой в школе будут доставлять прошедшим их учащимся дополнительную тренировку, а следовательно, некоторое фактическое преимущество на конкурсных экзаменах в вузы. Но на конкурсных экзаменах и сейчас имеют преимущество абитуриенты, затратившие на дополнительные занятия математикой достаточные усилия. Введение помогающих этому факультативных занятий в массовой школе сделает дополнительную тренировку по математике, необходимую для успеха на конкурсе, доступной более широким кругам молодежи.

## *Пояснения к структуре программ*

Программы составлены в соответствии с таким распределением времени:

| | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | Всего |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Арифметика и начала алгебры | 5 | 5 | — | — | — | — | — | 10 |
| Алгебра | — | — | 4 | 3/4 | 4 | — | — | $11\frac{1}{2}$ |
| Алгебра с началами анализа | — | — | — | — | — | 3 | 3 | 6 |
| Геометрия | 1* | 1* | 2 | 3/2 | 2 | 2 | 2 | $12\frac{1}{2}$ |
| Итого | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 40 |

Курс «Дополнительные главы и вопросы математики» для IX класса обладает некоторой законченностью. После занятий по этому курсу учащиеся в X классе могут вместо курса «Дополнительные главы и вопросы математики», выбрать факультативные занятия вычислительной математикой, физикой и т. п.

Часы на геометрию в IV—V классах (*) распределяются по всему курсу математики. Выделенным в расписаниии отдельным предметом геометрия становится с VI класса.

Расширение содержания программ в старших классах осуществляется без сокращения времени на основные традиционные темы отчасти за счет введения элементов алгебры и геометрии в IV—V классах. Возможность большей идейной нагрузки в этих классах доказана достаточно широким экспериментом. Произведено и освобождение программ в старших и средних классах от ряда традиционных излишне специальных вопросов (см. далее замечания к отдельным пунктам программы).

Программы рассчитаны на систематическую работу на протяжении всего школьного курса, предполагающую возвращение к ранее усвоенному лишь в порядке краткого повторения в начале новых тем. Следуя в этом отношении «линейной» системе построения курса математики, программы предусматривают, однако, расчленение курса на отчетливо выделенные законченные этапы. Желательно, чтобы это расчленение доходило и до сознания учащихся. К концу V класса заканчивается арифметика в смысле умения свободно производить выкладки с рациональными числами и ставится задача систематического построения алгебры. В начале IX класса учащиеся должны понимать, что перед ними впервые (после пропедевтики в курсе VII класса) стоит задача последовательного изучения предельных процессов, характерных для «высшей математики» в традиционном, но не потерявшем интереса понимании этого выражения. Этому должно соответствовать наличие для IV—V, VI—VIII, IX—X классов отдельных учебников.

Курс геометрии без изменения названия расчленен на три этапа с тем же распределением по классам. Первый этап (IV—V классы) в отношении логического уровня имеет пропедевтический характер. Лишь постепенно появляются доказательства отдельных интересных теорем. Но весь этот материал в VI классе не проходится заново, а лишь частично пересматривается с восполнением некоторых доказательств при изучении темы 4. В течение второго этапа (VI—VIII классы) заканчивается систематическое построение планиметрии и даются сведения по стереометрии в связи с черчением, что существенно важно для подготовки учащихся к практической работе, а также для тех учащихся, которые непосредственно после VIII класса приступят к овладению той или иной профессией, связанной с техникой.

На третьем этапе дается систематическое построение стереометрии с использованием векторов и координат и представление об аксиоматическом подходе к геометрии.

Курс геометрии IX класса дан одной темой, так как именно здесь желательна работа по выработке новой системы изложения (по этой же причине не расчленен материал, вошедший в тему 4 VI класса).

### ВОСЬМИЛЕТНЯЯ ШКОЛА

#### Арифметика и начала алгебры

(IV—V классы)

Предполагается, что из первых трех классов учащиеся вынесли твердые навыки в выполнении четырех арифметических действий с натуральными числами и некоторый опыт в обращении с простейшими дробями, позволяющий им «по соображению» производить выкладки типа:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6};\ \frac{1}{5}:2=\frac{1}{10};\ \frac{1}{5}\cdot 2=\frac{2}{5}\ \text{и т. п.}$$

В курсе арифметики и начал алгебры проводятся повторение и систематизация ранее полученных учащимися сведений о натуральных числах. Основой систематизации служит осмысливание понятия «число» и операций над числами с привлечением понятий «множество», «элемент множества», «принадлежность». Содержание перечисленных понятий разъясняется на различных конкретных примерах множеств и усваивается в процессе выполнения упражнений.

С понятиями «множество», «объединение множеств», «общая часть», или «пересечение» множеств, «пустое множество», «часть множества» или «подмножество» учащиеся знакомятся постепенно.

Эти понятия используются при изучении вопросов делимости чисел, при рассмотрении систем уравнений и неравенств, при формировании понятия функции, где рассмотрение примеров конечных множеств и соответствий между ними весьма целесообразно.

Техника выполнения арифметических действий к концу курса должна быть доведена до полной отчетливости (в смысле безошибочности результата) и уверенности в способности справиться с вычислениями со сколь угодно большими числами. Однако, как правило, достаточно ограничиваться вычислениями с 3-, 4-, 5-значными числами, выходя за эти пределы лишь в отдельных упражнениях.

Составление и решение уравнений занимают большое место на протяжении всего курса. Сначала уравнения решаются на основе зависимостей между компонентами и результатами действий, позднее (во второй теме) формулируются некоторые правила, вплоть до правила перемены знака при перенесении члена из одной части уравнения в другую. В итоге учащихся не должно затруднять решение линейных уравнений вида: $0{,}5x - 7 = 0{,}3x - 15$.

Раннее введение уравнений позволяет поновому организовать обучение решению текстовых задач. На достаточно убедительных примерах раскрываются преимущества алгебраического способа перед арифметическим.

В дальнейшем учащемуся самому предоставляется право выбора метода решения задачи.

Тождественные преобразования основываются на законах арифметических действий.

С введением понятия выражения, содержащего переменные, положено начало формирования понятия функции.

При введении понятия «формула» применение букв расширяется. Ими обозначаются не только числа, но и выражения, содержащие переменные.

Во всем курсе используются знаки неравенств, знакомые учащимся из начальных классов. Навыки в обращении с неравенствами приобретаются постепенно.

### *Пояснения к отдельным темам*

*Тема 1.* Уже в первой теме появляется изображение натурального ряда последовательностью точек на луче.

Изучение арифметических действий позволяет развивать и закреплять вычислительные навыки учащихся. Особое внимание уделяется трудным случаям умножения и деления, действиям с нулем и единицей.

Повторение коммутативного и ассоциативного законов умножения целесообразно связать с вычислением площадей прямоугольников и объемов прямоугольных параллелепипедов (последний вопрос будет новым для учащихся).

Законы арифметических действий применяются к обоснованию действий с многозначными числами, используются при преобразовании выражений. Для более глубокого понимания порядка действий полезны упражнения в составлении выражений.

*Тема 2.* В теме «Целые числа» появляется раскрытие скобок и приведение подобных членов. Уровень сложности тождественных преобразований, предлагаемых учащимся, не должен быть выше преобразований типа: $(2x+3)-(3x-2) = -x+5$.

Изучение отрицательных чисел до дробей оказывается полезным не только для решения уравнений, но и для закрепления вычислительных навыков: в однообразную работу по выполнению арифметических действий включается новый элемент, требующий размышления (необычность выполнения вычитания и сложения, необходимость определения знака числа). Знакомство с отрицательными числами окажется полезным на уроках географии и природоведения.

Положительные и отрицательные числа вводятся как характеристики направленных величин и их изменений. Числовая прямая служит основным средством при изучении сложения и вычитания целых чисел.

Модуль числа определяется как расстояние точки, изображающей число, до начальной точки.

*Тема 3.* В этой теме основное внимание уделяется сложению и вычитанию десятичных дробей, вырабатываются прочные навыки умножения и деления десятичной дроби на целое число. Умножение и деление на дробь относятся к V классу.

*Тема 4.* Позиционные системы рассматриваются в теме 4 после деления с остатком, так как для изображения числа по системе с данным основанием применяется операция деления с остатком. Обозначение степени используется как в связи с представлением числа в данной системе, например, $50 = 2^5 + 2^4 + 2$, так и при разложении чисел на множители: $48 = 2^4 \cdot 3$.

*Тема 5.* Умножению числа на дробь можно предпослать в качестве исходного пункта задачу вычисления площади прямоугольника.

Изучение обыкновенных дробей должно подготовлять учащихся к изучению алгебраических дробей.

Основное внимание в теме 5 сосредоточивается на выработке навыков действий с положительными числами. В этой теме дается первое представление о точности приближенного значения. При вычислении десятичных приближений обыкновенной дроби дается первоначальное представление о бесконечной десятичной дроби.

*Тема 6.* В связи с формулой $s = vt$ и ее графической интерпретацией желательно заняться графиками движения (график движения поездов с остановками и т. п.), что поможет изучению курса физики в начале VI класса.

Вообще, в этой теме широко применяются буквенные записи зависимостей между числами и величинами в виде формул:

$$S = \frac{1}{2}ah; \; V = abc \text{ и т. п.}$$

Здесь же записываются основные свойства действий

$$a \cdot b = b \cdot a, \; (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \; a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

и правила действий с дробями:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}; \; \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

На протяжении всей темы совершенствуются навыки действий с любыми рациональными (не только положительными) числами.

### Алгебра

### (VI—VIII классы)

На алгебру в VI—VIII классах план 1962 г. отводил 8 годовых часов (преподавание алгебры начиналось во втором полугодии VI класса). По новым программам мы имеем $11^1/_2$ годовых часов. Кроме того, при осуществлении новых программ в IV—V классах учащиеся будут приходить в VI класс со значительными знаниями по алгебре. Поэтому включение новых тем в VIII классе удается осуществить без сокращения общего числа часов на темы, соответствующие программам 1962 г., как показывает следующая таблица:

| Программа 1962 г. | Число часов | Новая программа | Число часов |
|---|---|---|---|
| Темы «Алгебраические выражения» и «Рациональные числа. Уравнения» VI класса | 36 | Переходят в IV—V классы | |
| Остальные темы | 240 | Темы 1—5*, 7—8 | 283 |
| | | Темы 9—11 | 90 |
| Повторение | 10 | Повторение | 20 |

* См. схему программ на стр. 17—18.

По темам, соответствующим содержанию программ 1962 г., предполагается:

1) Несколько поднять логический уровень изложения материала, опираясь на введение элементов логики с использованием (впрочем, весьма осторожным) соответствующей символики,

2) Увеличить внимание к развитию вычислительных навыков (приближенные вычисления, пользование таблицами) [2].

[2] Не следует в VI—VIII классах упускать из виду и закрепление навыков грубой оценки ожидаемого результата арифметических выкладок.

3) Ограничить по сравнению со сложившейся традицией требования к выполнению искусственных сложных преобразований. Для достижения ясности по этому вопросу мы даем далее примеры задач, которые должны охарактеризовать уровень требований, предъявляемых *ко всем учащимся.*

Представляется существенным установить более жесткие требования в отношении безошибочности выполнения элементарных преобразований, предоставив решение сложных задач, требующих изобретательности или знания специальных приемов, учащимся, проявляющим повышенный интерес к математике.

Введение в программу восьмилетней школы дробных показателей степени и показательной функции позволяет придать логическую законченность ряду обобщений, начинающемуся введением отрицательных показателей степени. Не требует длинных пояснений общеобразовательный интерес знакомства с геометрической прогрессией и показательной функцией. Изучение логарифмической функции позволяет дать обоснование употреблению логарифмической линейки и расширяет запас вычислительных навыков.

Как уже говорилось в объяснительной записке к программе IV—V классов, решением уравнений учащиеся занимаются на протяжении всего курса. В теме 4 лишь суммируются и систематизируются относящиеся сюда основные понятия. Через весь курс проходит и изучение функций с построением соответствующих графиков. Специальное внимание к «области определения функции» и «области ее значений» желательно связать с темой 5. При изучении темы 7 целесообразно рассмотреть и некоторые нетрадиционные графики:

$$y = |x|; \ y = |x - a|; \ y = \frac{x}{|x|}$$

и т. п., не увлекаясь слишком сложными примерами. В связи с десятичными приближениями разумно ввести обозначения $[x]$ для целой части $x$ и $\{x\}$ для дробной части $x$ и вычертить соответствующие графики. В теме 11 при изучении логарифмических вычислений благодаря этому окажутся заранее заготовленными понятия «характеристики» и «мантиссы».

В программе специально указаны функции:

$$y = ax + b; \ y = \frac{k}{x}; \ y = ax^2; \ y = ax^3;$$

$$y = \sqrt{x}; \ y = a^x; \ y = \log_a x; \ y = Ax^b.$$

Исследование квадратного трехчлена отнесено к программе IX класса, где оно связывается с понятием производной. Этот запас функций достаточен для выработки навыков в изучении зависимости вида графика от параметров и представлений о связи функции и обратной ей функции.

Рассмотрение зависимости вида графика дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

от параметров может быть рекомендовано, но в программу не входит. Степенная функция

$$y = Ax^b$$

с произвольным показателем степени явно упоминается лишь в самом конце программы, где обнаруживается, что график ее на логарифмической сетке всегда прямолинеен. Изучение зависимости вида ее обычного графика от показателя $b$ естественно рассматривать лишь как одно из возможных упражнений.

### *Пояснения к отдельным темам*

*Тема 1.* Здесь или позднее могут быть введены обозначения следования ($\Rightarrow$) и равносильности ($\Leftrightarrow$) высказываний. Можно думать, что символическое обозначение облегчит понимание и употребление понятия равносильности уравнений. Несколько позднее в геометрии формулируется принцип доказательства от противного. Вводя обозначение для отрицания высказывания ($\overline{A}$), можно записать принцип доказательства от противного в виде логического тождества

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}).$$

*Тема 2.* Алгебра рациональных одночленов обладает известной законченностью и охватывает очень много практически важных задач.

Понятие размерности достаточно объяснить на примерах, показав, что числовое выражение работы меняется в $ml^2t^{-2}$ раз, если единицы массы, длины и времени меняются соответственно в $m$, $l$ и $t$ раз, и т. п. Но принцип однородности формул, имеющих инвариантный геометрический или физический смысл, надо явно сформулировать.

*Тема 3.* Здесь и далее программы подчеркивают целевую установку тождественных преобразований: приведение определенного типа выражений к стандартному виду.

Несколько неопределенной остается цель разложения на множители. Поэтому в данной теме уместно показать, предваряя темы 4 и 5, его применение к решению уравнений и сокращению дробей.

Общая запись стандартного вида многочлена

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

была бы еще трудна. Достаточно выписать конечное число членов последовательности выражений

$$a,$$
$$ax+b,$$
$$ax^2+bx+c,$$
$$ax^3+bx^2+cx+d,$$
$$\cdots\cdots\cdot$$

Задачи на разложение на множители не должны быть трудными. Упражнения типа

$$x^3+ax^2-x-a=(x^2-1)(x+a)=$$
$$=(x-1)(x+1)(x+a)$$

лежат уже на границе обязательных требований.

*Тема 4.* Здесь желательны примеры квадратных уравнений, которые решаются разложением на множители, и примеры нелинейных систем, подобранные так, чтобы их алгебраическое решение не представляло трудностей, но соответствующие им геометрические картины были разнообразны: например, четыре решения системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=4\ , \\ x^2-y^2=0 \end{cases}$$

изображаются точками пересечения окружности и пары прямых и т. п. Несколько задач, в которых решение нелинейных систем выступает в качестве полезного аппарата реальных геометрических или физических задач, можно решить позднее при изучении темы 8, где после сведения системы к квадратному уравнению получившееся квадратное уравнение решают, пользуясь таблицами квадратных корней.

*Тема 5.* Примеры преобразований, обязательных для учащихся:

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{y-x}{y+x};\quad \frac{x^2+ax+bx+ab}{x^2-a^2}=\frac{x+b}{x-a}.$$

*Тема 6.* Здесь особое внимание уделяется двоичной системе счисления (включая двоичные дроби). В виде минимума объясняется устройство двоичного сумматора. Желательно рассмотреть технические способы реализации функций одного или двух двоичных («булевских») переменных и рассказать о значении этих функций в математической логике.

*Тема 7.* В связи с извлечением корней впервые возникает потребность уточнения представлений об а л г о р и т м е получения приближений любой точности. При недостатке времени можно ограничиться «методом проб», но постановка вопроса о более эффективном алгоритме здесь уместна и разбор итерационного алгоритма для вычисления $\sqrt{x}$:

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}\left(y_n+\frac{x}{y_n}\right)$$

следует рекомендовать.

Знакомство с двоичной системой счисления в теме 6 даст еще одну возможность показать очень простой и в то же время эффективный алгоритм извлечения квадратного (и без заметных дополнительных трудностей — кубического) корня.

Техника оценки погрешностей доводится до полной ясности. Вывод самой трудной формулы

$$\Delta(a:b)=\frac{b\Delta a-a\Delta b}{b(b+\Delta b)}$$

после темы 5 посилен. Заменяя $b+\Delta b$ на $b$, получаем

$$\frac{\Delta(a:b)}{a:b}\approx\frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta b}{b}.$$

Оценки для суммы, разности и произведения получаются еще проще.

Вопрос о линейной интерполяции получит новое освещение в IX классе после знакомства с понятием производной. Поэтому здесь подход может быть чисто практическим. При вычислении поверхностей и объемов геометрических тел не предусматривается ни доказательство, ни запоминание формул; гораздо важнее создать умение работать со справочником.

*Тема 8.* Исследование квадратного трехчлена проводится в IX классе с использованием понятия производной. При решении систем полезно сформулировать вывод о сводимости системы квадратного и линейного уравнений с двумя неизвестными к квадратному уравнению с одним неизвестным. Примеры не должны быть сложны. Изученный материал применяется при решении неравенств.

*Тема 9.* Обязательны лишь явно указанные в программе формулы для арифметической и геометрической прогрессий. Однако на достаточном числе примеров должна быть понята техника вычисления по рекуррентным формулам. Особенно желательны упражнения с разностями высших порядков, с выводом формул суммы квадратов и суммы кубов (не для запоминания!). Желательно практическое ознакомление с индуктивными доказательствами (без обязательной словесной формулировки «принципа математической индукции»).

*Тема 10.* Примеры иррациональных уравнений для обязательных контрольных работ:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=a;\quad \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1\frac{1}{2}.$$

*Тема 11.* Понятие иррационального числа не включено в программу VIII класса. Это не мешает учителю объяснить, почему $\sqrt{2}$ не может быть рациональным, и рассказать в общих чертах о том, что во всех задачах, с которыми учащийся в VIII классе будет иметь дело, операции над иррациональными числами могут быть заменены операциями над их рациональными приближенными значениями. Показательная функция $a^x$, $a \geqslant 0$ уже определена для рациональных $x$ в теме 10. Остается лишь отнестись к ней именно как к функции, т. е. рассмотреть, в частности, ее график. Любознательным учащимся, у которых этот вопрос возникает, сообщается без доказательства, что определение с сохранением основных свойств обобщается и на иррациональные значения $x$.

В программе указан минимальный запас формул, позволяющих понять основные применения показательной функции и правила логарифмических вычислений при заданном основании логарифмов.

### Геометрия
### (IV—VIII классы)

Часы, отводимые на геометрию в IV—V классах, распределяются в течение года по усмотрению учителя. Общее число часов (65) достаточно для того, чтобы учащиеся могли усвоить программный материал и приобрести некоторые навыки в геометрических построениях.

В этих классах геометрия строится как естественнонаучная дисциплина, обобщающая наблюдения над окружающим миром. К концу V класса значение логического элемента в преподавании геометрии усиливается.

Примерное сопоставление числа часов, отводимых на геометрию в восьмилетней школе раньше и по настоящей программе, дано в следующей таблице:

| Программа 1962 г. | Число часов | Новая программа | Число часов |
|---|---|---|---|
| Темы «Основные понятия», «Треугольники» VI класса | 46 | Переходят в IV—V классы | |
| Остальные темы | 188 | Темы 4, 6, 8—11 | 193 |
| | | Новые темы 5, 7 | 20 |
| Повторение | 12 | Повторение | 15 |

Следует иметь в виду, что курс планиметрии в ряде отношений облегчен по сравнению с традиционным. Так, от учащихся предполагается не требовать изложения доказательств признаков равенства треугольников, ограничиваясь констатацией факта и ссылкой на однозначность соответствующих построений; не входят в программу теоремы о метрических соотношениях в круге, о точках пересечения медиан и высот треугольника, о вписанных и описанных четырехугольниках, о сегменте, вмещающем данный угол, формула Герона и т. п. (Многие из исключенных теорем появятся в курсе в качестве «задач на доказательство».)

Свойства непрерывности, порядка и движений появляются по мере надобности и принимаются без доказательства. Основное положение о степени подвижности плоских фигур (положение фигуры на плоскости задается указанием точки, исходящего из нее луча и ориентации) предполагается сообщить учащимся лишь в VII классе (при изучении темы 7).

Программа уделяет большое внимание геометрическим преобразованиям. При этом овладение относящимися сюда понятиями расчленяется на несколько этапов. В IV—V классах уместен экспериментальный подход к геометрическим преобразованиям: при изучении осевой симметрии широко используется перегибание листа бумаги, а при первом ознакомлении с центральной симметрией и поворотом — вращение фигуры, закрепленной булавкой. В теме «Параллельность и перпендикулярность. Осевая и центральная симметрии» в VI классе устанавливаются основные свойства симметрии (частично уже известные учащимся из курса IV—V классов); в дальнейшем ссылки на эти свойства заменят апелляцию к эксперименту. В последней теме VI класса (тема 5) рассматривается параллельный перенос. Поворот появляется в теме 6 (VII класс), в теме 7 сопоставляются все виды движения. В теме 8 рассматриваются преобразования подобия, в частности центральная гомотетия.

Геометрические преобразования в восьмилетней школе рассматриваются лишь как преобразования фигур.

*Пояснения к отдельным темам*

*Тема 1.* В IV классе геометрия имеет по преимуществу наглядный характер. Широко применяется вырезание фигур из бумаги и картона, перегибание листа бумаги. Большую роль играет использование клетчатой бумаги; лишь постепенно наряду с этим начинают привлекаться линейка и угольник. Циркуль впервые появляется в связи со сравнением отрезков (циркуль-измеритель) и позже — в связи с построением окружностей. Здесь же указывается, что диаметр окружности является ее осью симметрии. В конце программы IV класса заслуживает выделения в качестве (быть может, первой во всем курсе геометрии) теоремы предложение о равенстве вертикальных углов.

*Тема 2.* В V классе логический элемент в курсе геометрии усиливается, однако число теорем должно оставаться еще очень скромным: теорема о сумме углов треугольника, теоремы о площади параллелограмма, треугольника и трапеции, теорема Пифагора. Признаки равенства треугольников формулируются как вывод из опыта построения треугольников по их элементам. Так, например, из того, что две окружности с центрами $A$ и $B$, где $AB = c$, и радиусами соответственно $b$ и $a$ пересекаются в двух симметричных относительно прямой $AB$ точках $C$ и $C_1$ (значит, треугольники $ABC$ и $ABC_1$ равны — их можно совместить, перегнув лист бумаги вдоль прямой $AB$), вытекает, что два треугольника с соответственно равными сторонами равны.

Оперативная сторона геометрии в V классе заключается в создании начальных навыков в геометрическом черчении. Очень важно, чтобы учащиеся получили здесь хороший набор чертежных принадлежностей (желательно включая чертежную доску и рейсшину).

При решении задач на построение учащиеся начинают систематически пользоваться комплексом инструментов: линейка, циркуль, угольник. Выбор задач на построение программой не фиксирован, однако общее число решенных задач должно быть достаточным для создания устойчивых навыков. При обосновании правильности тех или иных построений («разделить данный отрезок пополам», «провести через данную точку перпендикуляр к данной прямой», «разделить данный угол пополам» и т. д.) естественно использовать соображения симметрии.

Понятие направления возникает в связи с проведением параллельных прямых. Непосредственное проведение большого числа параллельных (с помощью линейки и угольника) убеждает в том, что пучок параллельных однократно покрывает плоскость (т. е. по существу дает представление об аксиоме параллельности), и делает естественным введение угла между направлениями. (В пучке параллельных различают два направления, так что угол между двумя направлениями определяется однозначно.) Понятие параллелограмма естественно связать с рассмотрением отрезков параллельных прямых, заключенных между параллельными; здесь же уместно сказать о расстоянии между параллельными прямыми.

*Тема 3.* Теорема Пифагора может быть установлена, например, индусским способом — при помощи двукратного вырезания из квадрата со стороной $a + b$ четырех прямоугольных треугольников с катетами $a$ и $b$.

*Темы 4* и *5.* В VI классе внимание учащихся привлекается к задаче систематического построения геометрии, выделению исходных допущений, оставляемых без доказательств, и отчетливому проведению доказательств дальнейших теорем. По существу дело идет об установлении избыточной «системы аксиом» (хотя и недостаточной для чисто дедуктивного построения всей геометрии). С этого момента эксперимент перестает быть основным орудием познания и служит лишь для иллюстрации и проверки правильности (подкрепления) выводов. Само слово «аксиома» в программе восьмилетней школы не указано, поскольку перечень допущений, принимаемых здесь без доказательств, настолько велик, что именовать их все аксиомами было бы затруднительно. Впрочем, в рассказе учителя об истории геометрии вполне уместно в начале VI класса сказать о роли аксиом в геометрии и дать примеры аксиом, упомянув, что удовлетворительное аксиоматическое построение геометрии было проведено лишь в самом конце XIX в.

Идея последовательно-логического построения геометрии не должна в VI классе декларироваться — она должна возникнуть в процессе познания новых фактов, а не предшествовать изучению фактов. Указанные в программе VI класса общелогические понятия должны вводиться с большой осторожностью и постепенно, лишь на той стадии изучения курса геометрии, когда накопленный материал создаст базу для рассматриваемых обобщений, — так, понятие обратной теоремы должно следовать за первыми примерами взаимно-обратных теорем, а не предшествовать им.

Процесс освоения перечисленных в конце темы общих понятий может быть продолжен и за рамки VI класса.

Тема 5 может быть изучена и непосредственно после первой части темы 4 (параллельность) — вопрос о выборе порядка изложения на всем протяжении VI класса остается открытым.

Умение строить доказательства, приобретенное в VI классе, должно быть доведено до свободного использования соображений симметрии — задачи типа: «Доказать равенство заключенных внутри равнобедренного треугольника $ABC$ отрезков прямых $AM$ и $BM$, где $M$ — точка высоты (оси симметрии треугольника!) $CD$» (но не более сложные) — не должны вызывать у учащихся затруднений.

*Тема 6* заметно сокращена за счет отнесения ряда второстепенных теорем и построений в число задач. Направленные углы и дуги вводятся в связи с поворотом. Программа не фиксирует смысла термина «направленный угол»: множество значений направленных углов может заключаться между $-180°$ и $+180°$ или между $-\infty$ и $+\infty$; впрочем, второе понимание термина «направленный угол» кажется нам предпочтительнее.

*Тема 7.* Включение этой обобщающей темы связано с завершением рассмотрения отдельных типов движений (осевая и центральная симметрии, параллельный перенос, поворот).

*Тема 8.* Изложение сильно сокращено по сравнению с традиционным. Все теоремы о пропорциональных отрезках выводятся из одной теоремы о пересечении трех параллельных двумя произвольными секущими. Тема об измерении отрезков естественно связывается с алгебраическим материалом. Поскольку понятие действительного числа на этой стадии изучения математики отсутствует, тонкости, связанные с соизмеримостью или несоизмеримостью отрезков, здесь обходятся.

Изучение подобия начинается с обсуждения общего понятия о подобии произвольных фигур. После доказательства признаков подобия треугольников устанавливается, что подобие (пропорциональность линейных размеров) влечет за собой конформность (равенство соответствующих углов). Подобие многоугольников рассматривается как частный случай общего понятия подобия. Центральная гомотетия вводится лишь в связи с построением подобных фигур.

*Тема 9* не предусматривает никаких доказательств стереометрических теорем; цель ее заключается в некоторой систематизации полученных на уроках черчения основных представлений о плоскостях и прямых в пространстве, о простейших пространственных телах.

*Тема 10.* Точное определение длины кривой этой темой не предполагается (такое определение должно быть дано при изучении темы I курса «Алгебра и начала анализа» в IX классе). На интуитивном уровне подобие позволяет установить, что длина окружности пропорциональна радиусу ($l = 2\pi R$), а площадь — квадрату радиуса ($S = \pi R^2$). Совпадение множителя $\pi$ в обоих случаях поясняется разбиением круга на большое число секторов. В этой теме дается обзор формул поверхностей объемов геометрических тел.

Понятие подобия используется для установления характера зависимости площади поверхности ($S$) и объемов ($V$) геометрических тел от их линейных размеров. Дается понятие о размерности.

Для любознательных учащихся в факультативном порядке могут быть проведены доказательства с использованием принципа Кавальери.

*Тема 11.* Здесь предполагается некоторая практика пользования таблицами значений тригонометрических функций; рекомендуется построить графики этих функций (в градусной мере угла). Доказательство теоремы косинусов можно связать с формулой для расстояния между двумя точками, заданными своими координатами: если вершина $A$ треугольника $ABC$ совпадает с началом координат, а вершина $B$ лежит на оси абсцисс, то координаты точек $B$ и $C$ имеют вид $(c, 0)$ и $(b \cos A, b \sin A)$ и, следовательно,

$$a^2 = BC^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Значительной практики решения косоугольных треугольников, преследующей своей целью приобретение соответствующих навыков, тема не предусматривает.

*Тема 12.* Не предусматривается ни доказательство, ни запоминание формул поверхностей и объемов круглых тел. Гораздо важнее создать умение работать со справочником.

## СТАРШИЕ КЛАССЫ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ (IX—X классы)

### Алгебра и начала анализа

Существенной особенностью курса «Алгебра и начала анализа» является включение в нее производной, интеграла и элементов теории вероятностей.

Понятие производной, наглядный смысл которого крайне прост и по существу уже известен из физики (скорость), вводится в первом полугодии IX класса с тем, чтобы систематически употреблять его при изучении квадратного трехчлена, показательной и тригонометрической функций.

Понятие интеграла вводится в X классе.

В теме «Начала теории вероятностей» учащиеся ознакомятся с ее простейшими понятиями.

Завершается курс ознакомлением учащихся с простейшими сведениями об электронных вычислительных машинах.

### *Пояснения к отдельным темам*

*Тема 1.* Здесь кажется уместным (если это не было сделано ранее) воспользоваться теоретико-множественной терминологией: множество решений системы есть пересечение множеств решений входящих в нее уравнений. Хорошо разобрать и примеры, требующие понятия объединений множеств: множество решений уравнения $x^2 - y^2$ есть объединение множеств решений уравнений $x+y=0$ и $x-y=0$.

Исследуя систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными с равным нулю определителем, достаточно установить на основе геометрической интерпретации, что в этом случае система либо вовсе не имеет решений, либо равносильна одному уравнению первой степени. Полезно разобрать некоторые другие примеры систем уравнений с буквенными коэффициентами.

*Тема 2.* Здесь желательно дать доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$. Какой-либо систематически излагаемой теории иррациональных чисел не предусматривается. Несколько более подробное обоснование может входить в факультативный курс «Дополнительные главы и вопросы математики».

От такта преподавателя зависит объем сведений, излагаемых в осведомительном порядке. Обязательному усвоению и запоминанию подлежит только конечный итог: в расширенной системе чисел верна теорема о существовании предела ограниченной монотонной последовательности, сохраняются обычные свойства арифметических операций и неравенств, любое действительное число с любой заданной точностью приближается рациональным.

*Тема 3.* Должно быть достигнуто умение для простейших функций (например, $y = x^2$) находить по $x_0$ и $\varepsilon > 0$ такое $\delta > 0$, для которого из $|x - x_0| < \delta$ следует $|y - y_0| < \varepsilon$. После изучения в VII классе вопроса об оценке погрешности это не представляет большой трудности.

Понятие производной в эвристическом порядке может появиться уже на первых уроках, посвященных данной теме (см. статью А. Н. Колмогорова в журнале «Математика в школе», 1965, № 6).

*Тема 4* содержит традиционно изучаемый в школе материал. Новым вопросом является вывод производных тригонометрических функций, подготовленный рассмотрением формул синуса и косинуса суммы и разности аргументов.

*Тема 5.* При изучении закона показательного роста предполагается рассмотрение примеров, в частности, из экономики, биологии и др.

*Тема 6.* Понятие интеграла вводится через понятие первообразной, связь интеграла с площадью под графиком функции — без строгого доказательства.

В предложении (принимаемом без доказательства), что существует

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{a^{\Delta} - 1}{\Delta} = c,$$

легко устанавливается формула $(a^x)' = ca^x$. Число $e$ может появиться как основание, при котором коэффициент $c$ равен единице.

Применения интеграла к вычислению объемов и площадей поверхностей относятся к курсу геометрии.

*Тема 7.* Программа исходит из предположения, что в области решения тригонометрических уравнений все ограничивается несколькими примерами.

При вычислении производной от

$$y = c\cos(kx + \theta) \tag{1}$$

(что необходимо для понимания гармонических колебаний) может быть приведена (с эвристическим, нестрогим выводом) формула производной функции от функции. То обстоятельство, что (1) дает общее решение уравнения $y'' = -k^2y$, не доказывается (хотя рассказ о задаче с начальными условиями для этого уравнения желателен). Предполагается, что сложение гармонических колебаний разъясняется с привлечением геометрических иллюстраций.

*Тема 8.* Элементы комбинаторики подчинены изучению начал теории вероятностей. Самостоятельное их рассмотрение и введение терминов теории соединений остается факультативным.

Курс завершается беседой учителя о применении электронных вычислительных машин в науке и народном хозяйстве (*тема 9*). Программа предусматривает там, где это возможно, проведение экскурсии на вычислительный центр. Ознакомление с принципом действия электронных вычислительных машин и программированием выносится на факультативные занятия.

### Геометрия

Курс геометрии в IX—X классах отличается от традиционного широким применением векторов и координат. Известные преимущества аналитических методов над чисто синтетическими позволяют упростить многие разделы программы, — так, например, использование скалярного произведения заметно облегчает вывод предложений о перпендикулярности прямых и плоскостей. (В частности, если определить перпендикулярность прямой и плоскости условием обращения в нуль скалярных произведений $\boldsymbol{la}$ и $\boldsymbol{lb}$, где $\boldsymbol{l}$ — направляющий вектор прямой, а $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы, определяющие плоскость, то теорема о двух перпендикулярах традиционного курса геометрии становится почти очевидной.)

Программа не предрешает, будет ли изложение начал стереометрии начинаться с перечисления пространственных аксиом соединения, или же, опираясь на наглядные соображения, будут сформулированы свойства операций над векторами, которые и лягут в основу дальнейшего дедуктивного построения курса в качестве основных допущений (аксиом). Во всех случаях доказательство дистрибутивности скалярного умножения проводится с использованием простейших стереометрических фактов.

Вывод формул для объемов простейших пространственных тел проводится методами интегрального исчисления.

*Пояснения к отдельным темам*

*Тема 1.* Предполагается, что учащиеся уже знакомы с основными фактами, относящимися к взаимному расположению прямых и плоскостей в пространстве, из занятий черчением и из курса геометрии восьмилетней школы. Здесь же полученные ранее знания систематизируются и упорядочиваются. Теорема о трех перпендикулярах может быть сформулирована в терминах ортогональных проекций: проектирование на плоскость и последующее проектирование на лежащую на этой плоскости прямую приводит к тому же результату, что и непосредственное проектирование на прямую.

Программа воздерживается от слишком детального перечисления теорем, так как оно зависит от избранной системы изложения стереометрии.

Включение в программу вопроса о применении параллельных проекций к изображению пространственных фигур связано со следующими соображениями. Чертежи и рисунки, выполняемые при доказательстве теорем стереометрии и анализе стереометрических задач, обычно делаются в «произвольной» параллельной проекции. Полный разбор вопроса о степени их произвола выходит за пределы обязательной программы. Однако постановка вопроса о допустимых изображениях простейших геометрических фигур должна быть ясна учащимся.

В связи с понятием скалярного произведения естественно вновь обратиться к теореме косинусов.

*Тема 2.* Эта тема является непосредственным продолжением предшествующей. Теорию многогранных углов и вопрос о мере многогранного угла удобно объединить с изучением элементов сферической геометрии; однако такой путь изложения требует дополнительного времени и не может быть рекомендован как обязательный.

Определение общего понятия правильного многогранника и постановка задачи перечисления таких многогранников программой не предусматриваются; ознакомление учащихся с правильным октаэдром (но не с додекаэдром или икосаэдром!) может быть произведено в процессе решения задач.

Формулы для объемов пространственных тел выводятся средствами интегрального исчисления (с использованием понятия первообразной).

Курс геометрии завершается заключительной беседой об аксиоматической методе в геометрии; в этой беседе может быть рассмотрен вопрос о неевклидовой геометрии Лобачевского и недоказуемости аксиомы параллельности.

## СХЕМА ПРОГРАММЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

### I. ВОСЬМИЛЕТНЯЯ ШКОЛА

#### Арифметика и начала алгебры

(IV—V классы)

*IV класс*

(6 час. в неделю, всего 210 час., из них 30 час. на геометрию)

1. Натуральные числа — 85 час.
2. Целые числа — 45 »
3. Десятичные дроби — 50 »

*V класс*

(6 час. в неделю, всего 210 час. из них 35 час. на геометрию)

4. Делимость чисел — 20 час.
5. Действия с обыкновенными и десятичными дробями — 85 »
6. Рациональные числа. Формулы и координаты — 70 »

#### Алгебра (VI—VIII классы)

*VI класс*

(4 часа в неделю, всего 140 час.)

1. Систематизация приобретенных в IV—V классах представлений о задачах алгебры — 12 час.

2. Отношения, пропорции, одночлены — 40 час.
3. Целые выражения — 48 »
4. Уравнения и системы уравнений — 40 »

*VII класс*

(3 часа в неделю в первом полугодии и 4 часа в неделю во втором полугодии, всего 122 часа)

5. Рациональные выражения — 40 час.
6. Системы счисления. Арифметические устройства вычислительных машин — 10 »
7. Неравенства. Приближенные вычисления. Извлечение корней. — 72 часа

*VIII класс*

(4 часа в неделю, всего 140 час.)

8. Квадратные уравнения — 30 час.
9. Числовые последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии — 25 »
10. Дробные показатели степени — 30 »
11. Показательная и логарифмическая функции — 35 »
Повторение — 20 »

**Геометрия**

(IV—VIII классы)

*IV класс*

(30 час., распределено в течение года)

1. Основные геометрические понятия — 30 час.

*V класс*

(35 час., распределено в течение года)

2. Геометрические построения — 25 час.
3. Площади — 10 »

*VI класс*

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

4. Параллельность и перпендикулярность. Осевая и центральная симметрии — 60 час.
5. Параллельный перенос — 10 »

*VII класс*

(3 часа в неделю в первом полугодии и 2 часа в неделю во втором полугодии, всего 88 час.)

6. Окружность и поворот — 30 час.
7. Движения — 10 »
8. Пропорциональность отрезков. Подобие фигур — 36 »
9. Систематизация сведений по стереометрии, полученных на уроках черчения (распределено в течение года) — 12 »

*VIII класс*

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

10. Измерение площадей и объемов — 25 час.

11. Метрические соотношения в треугольнике. Тригонометрические функции — 30 час.
Повторение — 15 »

## II. СТАРШИЕ КЛАССЫ (IX—X) СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

**Алгебра и начала анализа**

*IX класс*

(3 часа в неделю, всего 105 час.)

1. Системы уравнений и неравенств — 15 час.
2. Бесконечные последовательности и пределы — 15 »
3. Непрерывные функции, предел функции, производная — 45 »
4. Тригонометрические функции, их графики и производные — 30 »

*X класс*

(3 часа в неделю, всего 105 час.)

5. Производная показательной функции и логарифма — 8 час.
6. Интеграл — 12 »
7. Тригонометрические функции (продолжение) — 40 »
8. Начала теории вероятностей — 23 »
9. Сведения об электронных вычислительных машинах — 2 »
Повторение — 20 »

**Геометрия**

*IX класс*

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

1. Расположение прямых и плоскостей. Координаты и векторы в пространстве — 70 час.

*X класс*

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

2. Многогранники и тела вращения — 50 час.
Повторение — 20 »

# ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

**Арифметика и начала алгебры**

*IV класс*

(6 час. в неделю, всего 210 час., из них 30 час. на геометрию)

1. *Натуральные числа* — 85 час.

Чтение и запись многозначных чисел. Изображение чисел точками на луче. Сравнение чисел.

Законы арифметических действий: коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность. Сложение, вычитание, умножение и деление многозначных чисел.

Числовые выражения. Выражения, содержащие переменные. Числовое значение выражения. Преобразование выражений на основе законов арифметических действий.

Применение уравнений к решению задач.

*Замечание.* В связи с изучением законов действий вводится понятие объема прямоугольного параллелепипеда.

2. *Целые числа* — 45 час.

Положительные и отрицательные числа. Изображение чисел точками на прямой (числовая прямая). Модуль числа. Сравнение чисел.

Сложение. Законы сложения. Роль нуля при сложении. Противоположные числа. Вычитание. Расстояние между двумя точками числовой прямой. Алгебраическая сумма. Умножение. Законы умножения. Правило знаков при умножении. Роль единицы при умножении. Деление.

Преобразование выражений: раскрытие скобок, вынесение общего множителя за скобку, приведение подобных членов.

3. *Десятичные дроби* — 50 час.

Измерение величин. Десятичная система мер. Десятичная дробь.

Изображение десятичных дробей точками на прямой. Сравнение десятичных дробей.

Сложение и вычитание. Умножение и деление на целое число.

### *V класс*

(6 час. в неделю, всего 210 час., из них 35 час. на геометрию)

4. *Делимость чисел* — 20 час.

Понятие о степени. Деление с остатком. Позиционные системы счисления (десятичная, двоичная). Делители числа. Простые и составные числа. Признаки делимости чисел. Разложение чисел на простые множители. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа. Наименьшее общее кратное.

5. *Действия с обыкновенными и десятичными дробями* — 85 час.

Обыкновенная дробь. Изображение дробей точками на прямой. Приведение дробей к общему знаменателю. Сокращение дробей. Сравнение дробей.

Четыре арифметических действия с обыкновенными и десятичными дробями. Законы действий. Приближенное значение числа. Погрешность приближенного значения. Округление чисел. Десятичные приближения обыкновенной дроби. Проценты.

6. *Рациональные числа. Формулы и координаты* — 70 час.

Действия с рациональными числами любого знака.

Вычисления по формулам. Формула $s=vt$. Формулы длины окружности, площади прямоугольника, треугольника и круга, объема прямоугольного параллелепипеда. Формулы площади квадрата и объема куба. Формула процентов. Среднее арифметическое.

Оси координат. Абсцисса и ордината точки на плоскости. Построение точки по ее координатам.

Графики движения. Графики температуры, стоимости и др.

## Алгебра

### *VI класс*

(4 часа в неделю, всего 140 час.)

1. *Систематизация приобретенных в IV—V классах представлений о задачах алгебры* — 12 час.

Употребление букв в алгебре. Уравнения и тождества. Понятие функции.

2. *Отношения, пропорции, одночлены* — 40 час.

Отношения величин и чисел. Пропорции. Основное свойство пропорции. Нахождение неизвестного члена пропорции. Прямая и обратная пропорциональности. Графики $y=kx$; $y=\frac{k}{x}$.

Степени с целым показателем (положительным, нулевым и отрицательным). Формулы:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Одночлены и их приведение к стандартному виду:

$$kx^l y^m z^n.$$

Запись больших и малых чисел в виде $k \cdot 10^n$.

Размерность геометрических и физических формул.

3. *Целые выражения* — 48 час.

Преобразование любого целого выражения в многочлен (сумму целых одночленов). Стандартный вид многочлена от одного переменного.

Разложение на множители и формулы сокращенного умножения:

$$(a \pm b)^2; \quad (a \pm b)^3; \quad (a+b)(a-b).$$

Графики линейной функции и функций $ax^2$, $ax^3$. Примеры графиков других многочленов второй и третьей степени.

4. *Уравнения и системы уравнений* — 40 час.

Свойства равенств. Множество решений системы уравнений и его геометрическое изображение в случае одного и двух неизвестных.

Решение систем линейных уравнений.

### *VII класс*

(3 часа в неделю в первом полугодии и 4 часа в неделю во втором полугодии, всего 122 часа)

5. *Рациональные выражения* — 40 час.

Преобразование любого рационального выражения в отношение двух многочленов. Сокращение алгебраических дробей при помощи разложения числителя и знаменателя на множители.

Примеры уравнений с неизвестными в знаменателе.

6. *Арифметические устройства вычислительных машин* — 10 час.

Двоичная система счисления — арифметическая основа электронных вычислительных машин (ЭВМ). Перевод целых и дробных чисел из двоичной системы в десятичную и обратный перевод (на примерах).

Двоичная арифметика. Двоичное сложение на двоичном сумматоре (основном элементе арифметического устройства ЭВМ).

7. *Неравенства. Приближенные вычисления. Извлечение корней.* — 72 часа.

Свойства неравенств. Действия с неравенствами. Неравенство:

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

Неравенства первой степени с одним и двумя неизвестными, их геометрический смысл. Множество решений неравенств, равносильность неравенств.

Абсолютная и относительная погрешности. Оценка погрешности суммы, разности, произведения и частного приближенных чисел.

Правила подсчета цифр в приближенных вычислениях. Логарифмическая линейка.

Обратная функция. График функции $y=\sqrt{x}$.

Нахождение квадратного корня по графику, по таблице, на логарифмической линейке и при помощи алгоритма, дающего приближения любой точности. Понятие об извлечении корней любой степени.

Таблицы квадратов, кубов, квадратных и кубических корней.

Линейная интерполяция.

Вычисления (по формулам) объемов и поверхностей призм, пирамид, цилиндров, конусов, шара.

### *VIII класс*

(4 часа в неделю, всего 140 час.)

8. *Квадратные уравнения* — 30 час.

Общая формула решения. Теорема Виета и обратная к ней. Примеры уравнений и систем, приводимых к квадратным.

9. *Числовые последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии* — 25 час.

Рекуррентные определения последовательностей. Формулы общего члена и суммы $n$ членов арифметической и геометрической прогрессий.

10. *Дробные показатели степени* — 30 час.

Приведение выражений, содержащих только знаки операций умножения, деления, возвышения в степень и извлечения корня, к стандартному виду $kx^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$.

Примеры более сложных преобразований иррациональных выражений и решений иррациональных уравнений.

11. *Показательная и логарифмическая функции* — 35 час.

Показательная функция. Формулы:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

График показательной функции. Логарифмическая функция и ее график. Формулы:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\log_a x^c = c \log_a x; \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Таблицы логарифмов и «антилогарифмов». Примеры вычислений с таблицами.

График степенной функции $y=Ax^b$ на логарифмической сетке, график показательной функции на полулогарифмической сетке.

*Повторение* — 20 час.

## Геометрия

### *IV класс*

(30 час., распределено в течение года)

1. *Основные геометрические понятия* — 30 час.

Геометрическое тело, поверхность, линия. Прямая линия, луч, отрезок. Ломаная линия, ее длина. Сравнение длины ломаной линии с длиной отрезка, соединяющего ее концы. Соотношение между сторонами треугольника.

Угол. Сравнение углов. Биссектриса угла. Развернутый и полный угол. Прямой угол и его построение при помощи чертежного угольника. Виды треугольников.

Перпендикуляр к прямой и его построение при помощи чертежного угольника. Расстояние от точки до прямой. Осевая симметрия.

Окружность, центр, радиус, диаметр, хорда, дуга. Градусное измерение углов. Транспортир. Смежные и вертикальные углы.

### *V класс*

(35 час., распределено в течение года)

2. *Геометрические построения* — 25 час.

Построение циркулем и линейкой: основные построения, построение фигур, симметричных данной фигуре относительно прямой или точки. Построение фигур, повернутых на заданный угол.

Построение параллельных прямых линейкой и угольником, рейсшиной. Пучок параллельных, направление. Угол между двумя направлениями. Параллелограмм, его центр симметрии.

Треугольник и его элементы. Сумма углов треугольника. Построение треугольников по трем элементам (четыре случая). Признаки равенства треугольников. Построение прямоугольных треугольников. Признаки равенства прямоугольных треугольников.

3. *Площади* — 10 час.

Нахождение площадей при помощи разрезания и складывания фигур. Площадь параллелограмма, треугольника, трапеции. Теорема Пифагора.

*Замечание.* Формулы длины окружности и площади круга (без доказательства) включены в курс арифметики и начал алгебры, V класс.

### *VI класс*

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

4. *Параллельность и перпендикулярность. Осевая и центральная симметрии* — 60 час.

Свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей (прямая и обратная теоремы). Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат, их свойства.

Выпуклые фигуры. Выпуклые многоугольники. Сумма внешних и сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.

Соотношения между сторонами и углами треугольника.

Наклонная и ее проекция. Свойства перпендикуляра и наклонной. Свойство перпендикуляра, проходящего через середину отрезка. Свойство биссектрисы угла. Равнобедренный треугольник.

Свойства осевой и центральной симметрии.

Теорема, условие и заключение. Обратная и противоположная теоремы. Метод доказательства от противного.

Необходимые и достаточные условия.

5. *Параллельный перенос* — 10 час.

Определение параллельного переноса. Равенство фигур, получающихся друг из друга при параллельном переносе. Решение задач на параллельный перенос.

### *VII класс*

(3 часа в неделю в первом полугодии и 2 часа в неделю во втором полугодии, всего 88 час.)

6. *Окружность и поворот* — 30 час.

Окружность и круг. Взаимное положение прямой и окружности; секущая и касательная.

Взаимное положение двух окружностей; пересекающиеся и касающиеся окружности, внутреннее и внешнее касание.

Направленные углы и дуги. Поворот и его свойства.

Зависимость между хордами, дугами и центральными углами одной и той же окружности. Измерение углов и дуг. Свойство диаметра, перпендикулярного к хорде. Свойство дуг, заключенных между параллельными хордами. Вписанные углы.

Окружности, вписанные в треугольник и описанные около треугольника. Правильные многоугольники.

7. *Движения* — 10 час.

Движения и их свойства. Понятие об ориентации. Собственные и несобственные движения.

Виды симметрии фигур. Фигуры, имеющие несколько осей симметрии.

8. *Пропорциональность отрезков. Подобие фигур* — 36 час.

Измерение отрезков. Отношение отрезков. Пропорциональность отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на секущих.

Подобие. Коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников.

Гомотетия как метод построения подобных фигур. Мензульная съемка.

9. *Систематизация сведений по стереометрии, получаемых на уроках черчения* (распределено в течение года) — 12 час.

Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей. Углы между прямыми и плоскостями.

Развертка призмы, пирамиды, цилиндра, конуса.

### *VIII класс*

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

10. *Измерение площадей и объемов* — 25 час.

Измерение площадей при помощи квадратной сетки. Отношение площадей подобных фигур. Площадь прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции. Площадь многоугольника.

Длина окружности и площадь круга.

Понятие об объеме. Понятие о подобии в пространстве, отношение объемов подобных тел.

11. *Метрические соотношения в треугольнике. Тригонометрические функции* — 30 час.

Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора. Вычисление расстояния между двумя точками, заданными своими координатами. Уравнение окружности.

Тригонометрические функции острого и туного углов: синус, косинус и тангенс. Изменение тригонометрических функций при изменении аргумента от 0° до 180°. Значения тригонометрических функций для углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

Таблицы тригонометрических функций. Тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha;$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha; \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Решение прямоугольных треугольников. Теорема косинусов, формула площади треугольника, теорема синусов. Решение косоугольных треугольников.

*Повторение* — 15 час.

## ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТАРШИХ КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ (IX—X классы)

### Алгебра и начала анализа

### *IX класс*

(3 часа в неделю, всего 105 час.)

1. *Системы уравнений и неравенств* — 15 час.

Уточнение представлений о множестве решений системы уравнений и неравенств и о равносильности систем уравнений и неравенств.

Исследование системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

2. *Бесконечные последовательности и пределы* — 15 час.

Определение предела. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Периодические десятичные дроби.

Иррациональные числа как непериодические десятичные дроби. Доказательство иррациональности $\sqrt{2}$. Существование предела ограниченной монотонной последовательности (без доказательства). Длина окружности и число $\pi$.

Бесконечно малые. Теоремы о пределах суммы, произведения и частного.

3. *Непрерывные функции, предел функции. Производная* — 45 час.

Определение непрерывности. Непрерывность рациональных функций в каждой точке их области определения. Производная.

Производная суммы, произведения, частного, $x^n$ при целом $n$, обратной функции.

Возрастание и убывание функций, максимумы и минимумы.

Исследование квадратного трехчлена.

Применение производной в геометрии (касательная) и физике (скорость, ускорение).

4. *Тригонометрические функции, их графики и производные* — 30 час.

Обобщение понятия об угле. Радианное измерение углов и дуг. Предел отношения хорды к дуге.

Тригонометрические функции числового аргумента, их графики, четность и нечетность, периодичность. Синус и косинус суммы и разности. Непрерывность тригонометрических функций, их производные.

### *X класс*

(3 часа в неделю, всего 105 час.)

5. *Производная показательной функции и логарифма* — 8 час.

Производная показательной функции. Уравнение показательного роста. Производная логарифма.

6. *Интеграл* — 12 час.

Первообразная функция. Определенный интеграл и его применение к определению площади под кривой. Формула Ньютона — Лейбница.

7. *Тригонометрические функции* — 40 час. (продолжение)

Формулы приведения.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

Тригонометрические функции суммы и разности двойного и половинного аргументов.

Понятие об обратных тригонометрических функциях.

Гармонические колебания, уравнение $y'' = -k^2y$. Сложение гармонических колебаний с общим периодом.

8. *Начала теории вероятностей* — 23 час.

Понятие вероятности. Подсчет вероятности как отношения числа благоприятствующих случаев к общему числу случаев. Независимые испытания. Схема Бернулли. Треугольник Паскаля. Формулы:

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}; \quad C_n^m = C_n^{n-m};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Бином Ньютона.

Беседа учителя о законе больших чисел и статистических закономерностях.

9. *Применение электронных вычислительных машин в науке и народном хозяйстве* — 2 часа.

Беседа учителя о применении электронных вычислительных машин в науке и народном хозяйстве.

Экскурсия на вычислительный центр.

*Повторение* — 20 час.

### Геометрия

*IX класс*

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

1. *Расположение прямых и плоскостей; координаты и векторы в пространстве* — 70 час.

Логическое строение геометрии (определения, аксиомы, теоремы).

Параллельность прямых и плоскостей в пространстве. Связка параллельных прямых. Направление. Векторы на плоскости и в пространстве и параллельные переносы. Сложение векторов, умножение вектора на число. Разложение вектора по трем направлениям.

Параллельное проектирование (на плоскость). Применение к построению изображений пространственных фигур.

Перпендикулярность прямых и плоскостей. Ортогональное проектирование на плоскость и на прямую.

Углы между прямыми и плоскостями.

Площадь проекции. Теорема о трех перпендикулярах.

Координаты вектора и точки в прямоугольной системе координат. Скалярное произведение, его выражение через координаты, свойство скалярного произведения. Расстояние между двумя точками в пространстве.

*X класс*

(2 часа в неделю, всего 70 час.)

2. *Многогранники и тела вращения* — 50 час.

Многогранные углы. Плоские и двугранные углы многогранного угла.

Призма и параллелепипед. Пирамида. Усеченная пирамида. Куб и правильный тетраэдр. Боковая и полная поверхности призмы и пирамиды. Поверхности вращения и тела вращения.

Понятие объема. Объем параллелепипеда, призмы, цилиндра, пирамиды, конуса, шарового сегмента и шара. Поверхности круглых тел (цилиндр, конус, сферический сегмент, сфера). Задачи на поверхности и объемы.

Заключительная беседа учителя об аксиоматическом методе в геометрии.

*Повторение* — 20 час.

## ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ КУРСЫ

### Дополнительные главы и вопросы математики

IX класс. (2 часа в неделю, всего 70 час.)

Тема 1. *Множества и операции над ними* (8 час.).

Проходится в связи с изучением систем уравнений и неравенств по общей программе.

Тема 2. *Натуральные числа и принцип математической индукции* (8 час.).

Делимость, разложение на простые множители (доказательство единственности). Принцип математической индукции. Дополнительные задачи на числовые последовательности.

Тема 3. *Обобщение понятия числа. Комплексные числа* (12 час.).

Поле рациональных чисел. Иррациональные числа. Поле действительных чисел. Комплексные числа и их геометрическая интерпретация.

Тема 4. *Алгебраические уравнения любой степени* (12 час).

Делимость многочленов, теорема Безу, теорема о существовании корня (без доказательства). разложение многочленов на линейные множители. Решение задач на составление уравнений и систем уравнений.

Тема 5. *Задачи и дополнительные вопросы дифференциального исчисления* (8 час.).

В частности — производная функции от функции. Решение задач с использованием понятия производной.

Тема 6. *Геометрические преобразования* (22 час.).

Теорема Шаля на плоскости и в пространстве. Преобразования подобия на плоскости и в пространстве. Проекции и аффинные преобразования плоскости. Понятие о группе преобразований. Решение геометрических задач.

X класс. (2 часа в неделю, всего 70 час.)

Тема 1. *Интеграл* (10 час.).

Интеграл как предел суммы. Применения в геометрии и механике.

Натуральный логарифм как $\int\frac{dx}{x}$. Число $e$ и показательная функция $e^x$ при действительном $x$.

Тема 2. *Комплексные числа и тригонометрия* (14 час.).

Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра. Корни из единицы и двучленные уравнения.

$e^{ix}$ при действительном $x$ и формулы Эйлера. Применения к теории колебаний.

*Решение задач по всем разделам курса* (34 час.). (Это время может быть использовано концентрированно или распределенно в соответствии с материалом общего курса). Особое внимание уделяется стереметрическим задачам на развитие пространственных представлений.

*Темы по выбору преподавателя* (12 час.).

Например:

*Дифференциальные уравнения и их значение в естествознании* (12 час.).

Геометрическая интерпретация уравнения первого порядка (поле направлений). Понятие о задачах с начальными условиями. Теоремы существования и единственности. Примеры дифференциальных уравнений.

*Дополнительные вопросы теории вероятностей* (12 час).

Математическое ожидание. Дисперсия и закон больших чисел (доказательство в форме теоремы Чебышева).

*Понятие о неевклидовых геометриях и об аксиоматическом методе в геометрии* (12 час.).

Например, избранные теоремы геометрии на сфере с доказательствами и рассказ учителя о геометрии Лобачевского и других системах геометрии.