НОВЫЕ ПРОГРАММЫ

НОВЫЕ ПРОГРАММЫ И НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ КУРСА МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

А. Н. КОЛМОГОРОВ (Москва)

I

Первый вариант опубликованного в № 1 «Математики в школе» проекта программы был составлен в 1965 г. и отпечатан в количестве 4000 экземпляров, что позволило весной 1966 г. провести довольно широкое его обсуждение с группами учителей, работниками институтов усовершенствования учителей и педагогических институтов, в университетах и в АН СССР. Многие высказанные при обсуждении пожелания учтены составителями программ. В ряде разделов программы заметно упрощены. Но по некоторым вопросам обсуждение выявило столь существенные расхождения мнений, что составители и центральная комиссия по содержанию среднего образования не могут рассчитывать на единодушное одобрение сделанного выбора. Я начну с обзора основных выявившихся при обсуждении разногласий.

1. Не было полного единодушия в отношении целесообразности более раннего прохождения ряда разделов в восьмилетней школе. Хотя наши предложения и были одобрены большинством участников обсуждения, повторю вкратце мотивировку наших предложений.

Переход на предметное преподавание с IV класса делает, по нашему мнению, вполне осуществимым более раннее введение алгебраических идей (отрицательные числа, уравнения, буквенные обозначения, числовая ось и числовая плоскость, простейшие функциональные зависимости в IV и V классах). Замечу по этому поводу, что составители программ для IV—V классов подошли очень осторожно к оценке ожидаемых результатов изучения арифметики в первых трех классах. Наши программы IV—V классов не полностью используют материал, намеченный в проекте новых программ для I—III классов (которые, по моему личному мнению, нуждаются в некотором упрощении).

Более раннее начало знакомства с алгеброй позволяет без какой-либо перегрузки новыми идеями поместить в программе VIII класса геометрическую прогрессию, показательную и логарифмическую функции. С предоставлением по окончательному проекту учебного плана дополнительного часа на математику в VIII классе (6 вместо существующих 5) возражения против этого предложения делаются еще менее основательными. Далее я скажу несколько слов о методической стороне дела.

2. В окончательном тексте проекта сохранены указания, ограничивающие степень трудности обязательных для всех учащихся упражнений, которые вызвали много нападок со стороны ревнителей «выработки навыков». Подчеркну здесь еще раз, что, как это сказано в пояснениях к программам, дело идет не

о снижении требований к твердости и отчетливости знаний и привычке к безошибочности выполнения алгебраических преобразований и т. п., а лишь о предупреждении тенденции к натаскиванию в решении специфически школьных искусственных задач. Я еще вернусь к этому вопросу позднее, а сейчас скажу лишь следующее. Несомненно, что навыки в выполнении некоторых основных, постоянно встречающихся во всей дальнейшей работе операций должны быть доведены до автоматизма. Это относится не только к четырем арифметическим действиям, но и к простейшим алгебраическим преобразованиям или к эскизному изображению (от руки, без чертежных инструментов!) простейших геометрических фигур. Но круг этих навыков, доводимых до автоматизма, а следовательно, и до определенной скорости выполнения, должен быть очень ограничен. Нет, например, никакой необходимости включать в их число логарифмирование и «потенцирование» замысловатых, искусственно придуманных выражений и т. п. К этим вопросам я тоже еще вернусь позднее.

3. Органическое и достаточно раннее (в IX классе) введение в курс средней школы элементов математического анализа одобрено большинством участников обсуждения. Но сомнения по поводу доступности этого материала высказывались многими учителями, а принципиально отрицательное отношение ко всему начинанию — некоторыми работниками вузов. Замечу, впрочем, что введение в программу средней школы начал математического анализа было одобрено научно-методическим советом по математике Министерства высшего и специального среднего образования СССР, составленным, в основном, из работников высшей технической школы.

С точки зрения влияния курса математики на формирование общего научного мировоззрения учащихся не меньшее значение имеет введение в курс средней школы простейших понятий теории вероятностей. Оно при обсуждении первого варианта программ не вызвало явных возражений, но оставалось при этом обсуждении в тени. В его принципиальной осуществимости у составителей программ по существу нет сомнений: имеется в виду очень простой и наглядный материал. Но следует учесть, что (в отличие от элементов математического анализа) здесь мы совсем не имеем опыта в постановке преподавания в массовой школе. В ближайшие годы можно будет такой опыт накопить при проведении факультативных занятий.

4. Со стороны многих участников обсуждения резкую критику вызвало явное упоминание в первом варианте программ начальных понятий и обозначений теории множеств и математической логики и элементов общей алгебры (понятия группы, кольца, поля). В понимании авторов проекта дело шло не о включении в программы дополнительного материала, а в первую очередь о более современном (и по существу более простом и доходчивом) изложении вопросов, которые в неявной форме подразумеваются и в традиционном курсе. По сравнению с начинаниями по введению элементов «современной математики», которые получили широкое распространение в школьной практике ряда других стран, наши предложения были очень скромны. Тем не менее обсуждение обнаружило, что наши предложения недостаточно подготовлены широкой пропагандой идей «современной математики». Любопытно, что наши предложения встретили резкие возражения, в частности, в среде авторитетных представителей смежных наук — физики и механики.

В публикуемом окончательном проекте программ часть наших предложений, относящихся к элементам теории множеств и математической логики, из основного текста, формулирующего обязательные требования, перенесена в пожелания в пояснениях к программам, а часть — в программы факультативных занятий. К уступчивости в этом отношении авторы программ склонились отчасти из-за опасений, что в неумелых руках попытки модернизации логической структуры школьного курса могут вместо пользы принести вред.

5. Много нападок было сделано на формулировки (в пояснениях к программам), относящиеся к логическому уровню курса геометрии в VI—VIII классах. Я думаю, однако, что эти нападки в значительной мере основаны на недоразумении. Предлагая принимать без доказательства признаки равенства треугольников и говоря, что в строгом смысле слова аксиоматическое построение геометрии неосуществимо в курсе, начинающемся в VI классе, мы боремся лишь с распространенной тенденцией создавать в школьном изложении видимость строгости. К этому вопросу я тоже еще вернусь далее.

II

Закончив обзор дискуссии 1966 г., я попытаюсь пояснить общие установки составителей программ, разобрав некоторые частные вопросы в качестве примеров.

Одной из основных задач мы считали достижение идейной стройности курса математики в средней школе. При этом я имею в виду следующие требования: 1) всюду, где это воз-

можно, учащихся надо прямыми путями вести к современным и рациональным методам решения проблем и задач; 2) переход к новому кругу идей должен быть по возможности мотивирован понятным для учащихся способом; 3) каждое направление работы учащегося, будучи начато, должно быть доведено до тех минимальных результатов, которые его действительно оправдывают; школа не должна заниматься наполнением памяти учащихся заготовками, которые в школьном курсе не найдут достойного употребления, в надежде, что они учащимся когда-либо пригодятся.

Первым из этих требований составители руководствовались, рекомендуя раннее введение алгебраической символики при записи общих формул решения типовых задач и при решении уравнений. По этой же причине программы рекомендуют раннее введение отрицательных чисел.

Делались удачные опыты еще более раннего ознакомления учащихся с отрнцательными числами. Составители программ остановились на IV классе, потому что в этом классе вводнтся предметное преподавание: естественно, что преподаватели математики более подготовлены к осуществлению новшеств в преподавании арифметики и начал алгебры.

Естественный с логической точки зрения порядок начала систематического курса арифметики: натуральные числа и за ннми полная система целых чисел

..., —2, —1, 0, 1, 2, 3, ...,

приводит к тому, что изображение чисел точками «числовой прямой» предшествует систематическому изучению дробей. Но учащиеся знакомятся с простейшими дробями еще в первых трех классах. На шкале медицинского термометра оии без труда найдут точки с отметками $37\frac{1}{10}$ или $37\frac{2}{10}$. При вычерчивании графиков измеиения температуры воздуха (предусмотрением программой первых трех классов) очи, конечно, будут изображать ход температуры иепрерывиой линией и не удивятся тому, что переход от отрицательных температур к положительным может по графику упасть на $7\frac{1}{2}$ часов утра, и т. п. Эти иавыки лишь систематизируются и обобщаются в последней теме IV класса (где прямо указаио «изображение десятичных дробей точками на прямой»).

Для иллюстрации второго из высказанных общих требований рассмотрим расположенные рядом в программе VIII класса по алгебре темы 9, 10 и 11. Они позволяют продемонстрировать учащимся исторический путь развития математики, приведший к современному определению показательной и логарифмической функций. Уже при прохождении темы 9 можно сопоставить арифметическую прогрессию

$$0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots$$

с геометрической прогрессией

$$1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ \ldots$$

и, заметив, что сложению членов первой прогрессии соответствует умножение членов второй прогрессии, рассказать о первых таблицах логарифмов. При прохождении темы 10 полезно поставить задачу интерполяции геометрической прогрессии

$$1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ \ldots.$$

Положив, например,

$$b = 10^{0.0001} = \sqrt[10000]{10}$$

и сопоставив прогрессию

$$1,\ b,\ b^2,\ \ldots,\ b^{10000} = 10$$

с прогрессией

$$0;\ 0{,}0001;\ 0{,}0002;\ \ldots,$$

получим не что иное, как четырехзначную таблицу антилогарифмов, имеющуюся в сборнике Брадиса. Полезно, не откладывая, изготовить по этой таблице на миллиметровой бумаге и в большом масштабе график зависимости

$$y = b^n \text{ от } x = 0{,}0001 \cdot n.$$

Формально безукоризненное введение показательной функции невозможно без введения иррациональных чисел, но не требует какой-либо развернутой их теории. Надо лишь вспомнить, что для рациональных r и s в теме 10 было доказано, что при $a > 1$ из $r < s$ вытекает $a^r < a^s$, понять, пользуясь построенным графиком $y = 10^x$, что это неравенство обозначает монотонность **определенной при рациональных x** функции a^x, и принять без доказательства: существует одна-единственная **определенная для всех x** монотонная функция a^x, которая при рациональных x принимает значения

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \text{ если } x = \frac{p}{q}$$

и

$$a^x = a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}, \text{ если } x = -\frac{p}{q}.$$

Мне представляется, что в сильном классе разговор об иррациональных числах неизбежно возникнет еще на седьмом году обучения (иррациональность $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и т. д.). В таком классе указанная выше формулировка основного допущения относительно показательной функции должна быть усвоена на восьмом году обучения. Если же у восьмиклассников не будет потребности разобраться в вопросе о том, каждой ли точке прямой можно поставить в соответствие рациональное число, эта формулировка может быть дана при неизбежном повторении свойств показательной функции в первой теме X класса. Ничего больше-

го, чем эта формулировка, не следует требовать в средней школе. Принятое сейчас определение (см. напр., § 174 второй части учебника Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой) имело бы преимущества лишь в случае, если бы оно употреблялось для вывода свойств степеней с иррациональными показателями. Если же они принимаются без доказательства, то выигрыш по сравнению с определением, опирающимся на наше допущение, оказывается иллюзорным.

В осуществлении второго из наших основных требований формальное введение иррациональных чисел как непериодических десятичных дробей отложено до момента, когда потребность в нем достаточно назрела. Не по небрежности авторов, а ради того, чтобы необходимость этого шага была полнее воспринята, определение предела последовательности появляется ранее формального введения иррациональных чисел. Предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^n}\right)=\frac{1}{9}$$

существует в системе рациональных чисел, а предел десятичных приближенных значений по недостатку для $\sqrt{2}$ в системе рациональных чисел не существует и т. д. Этот порядок, впрочем, не предлагается в качестве обязательного. Тот или иной вариант формального определения суммы и произведения произвольных действительных чисел должен быть дан в учебнике, но доказательство свойств арифметических действий над действительными числами не только не предусмотрено программой, но и определенно не рекомендуется в качестве обязательного материала (даже в сильном классе).

Сформулированными выше общими установками объясняется и раннее введение производной. Вычисление отношения приращений

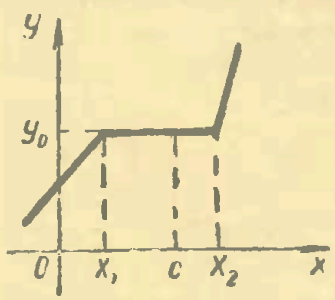
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

для функции $y=x^2$ столь просто, что может даже предшествовать формулировке определения предела функции — служить мотивировкой для него. Не откладывая, разумно рассмотреть и применение к выводу формулы для скорости падающего тела (считая пропорциональность пройденного пути квадрату времени эмпирически найденным законом, как это и было в действительности для Галилея).

Вся тема исследования функций на возрастание и убывание, максимумы и минимумы проходится с использованием производной, начиная с исследования квадратного трехчлена. Большое внимание, уделяемое в школе этой теме, вполне разумно, но при ее изучении не следует осложнять для учащихся понимание дела чрезмерно общими определениями, которые излишни при исследовании простейших функций. Я думаю, что в средней школе достаточно определение «точки локального максимума» как точки, в которой возрастание сменяется убыванием.

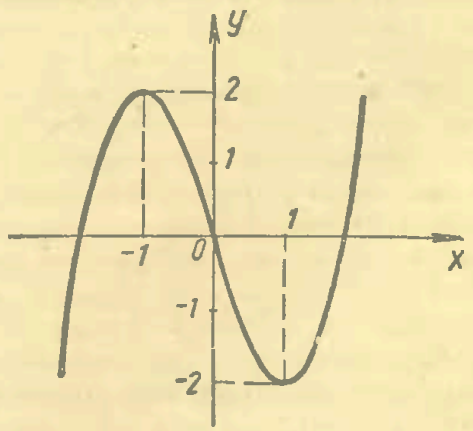
Замечу по этому поводу, что, ограничиваясь определенными на отрезке $[a, b]$ функциями, удовлетворяющими «условию Дирихле» (отрезок разбивается на конечное число отрезков монотонности), мы можем сформулировать теорему: абсолютный максимум на отрезке $[a, b]$ достигается либо на одном из концов, либо в одной из точек локального максимума.

Принятое же в больших курсах анализа определение точек «локального максимума» и «локального минимума» неизбежно приводит к необходимости объяснять учащимся, что в точке c, лежащей внутри интервала постоянства функции (см. черт. 1, воспроизводящий рис. 275 из второй части учебника Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой), функция имеет одновременно и локальный максимум, и локальный минимум Осмысливание этого звучащего парадоксально утверждения, хотя и является хорошим упражненнем в формальной логике, на этом этапе чрезмерно отвлечет внимание учащихся от простой и наглядной картины смены отрезков возрастания и отрезков убывания функции, которая только и будет встречаться в реально интересных для них задачах.



Черт. 1

Совсем несообразное положенне создано в X классе на текущий год, когда уж введен в массовое употребление учебник Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой, написанный в расчете на изучение производных, но само это изучение отменено. В тех классах, в которых будут педантично следовать крупному шрифту учебника, учащиеся будут тратить силы на усвоение университетского общего определения точек «локального максимума» и «локального минимума» и разбираться в отмеченном выше парадоксе, но так и не смогут найти локальные максимумы и минимумы функции $y=x^3-3x$ (см. черт. 2), вычислив ее производную:



Черт. 2

$$y'=3x^2-3$$

и решив уравнение

$$3x^2-3=0.$$

Большой жертвой, связанной с сокращением общего числа обязательных занятий математикой в старших классах, является в публикуемом сейчас проекте исключение из обязательной программы комплексных чисел. Но по этому поводу я должен заметить, что, следуя третьему из высказанных выше основных требований к построению школьного курса, мы считаем сохранение темы «Комплексные числа» в объеме действующих сейчас программ, когда, например, тригонометрическая форма комплексного числа изучается, но сложение аргументов при умножении из программы исключено, не имеющим разумного смысла. Представление о том минимальном объеме сведений о комплексных числах, при котором их изучение кажется нам продуктивным, дает наша программа факультативных занятий, где комплексные числа вводятся в IX классе и широко используются как в чисто алгебраическом аспекте, так и в связи с тригонометрией и колебаниями.

III

Введение в программы средней школы начал анализа и теории вероятностей отражает лишь сдвиги в строении самой математической науки, происшедшие в XVII—XVIII вв. Но отношение математиков к основам своей науки сильно изменилось за последние десятилетия. Если еще в начале XX в. теория множеств и математическая логика, исследование произвольных, как тогда говорили, «абстрактных» групп, колец и полей, многомерная геометрия, или геометрия римановских пространств, рассматривались лишь как важные надстройки над зданием «классической математики», надстройки, излагаемые только в специальных лекциях для университетских студентов старших курсов или составляющие содержание программ подготовки магистерских экзаменов молодыми людьми, «готовящимися к профессорскому званию», то сейчас все более укрепляется тенденция начинать серьезное знакомство с математикой с изучения в общей форме основных типов математических структур: «структур порядка», алгебраических структур «группы», «кольца», «поля», топологических структур и т. д. Структуры классической математики возникают в качестве естественных частных случаев: например, структура действительных чисел в качестве структуры архимедовски упорядоченного поля с аксиомой полноты.

В получивших большое распространение попытках математиков многих стран систематически культивировать подобный подход «сверху» (от логически простейших структур к наиболее полезным на первых порах их специализациям) в средней и даже в начальной школе, по-видимому, есть многое от моды и временных увлечений новизной. Любопытно, что у нас в стране такого рода экспериментами особенно склонны увлекаться математики, занятые не конкретной математической работой, а «основаниями математики», математической логикой, общими идеями кибернетики, семантикой, семиотикой и т. п., либо ученые специалисты по методике.

Не придерживаясь этих модных увлечений, составители программ в первом их варианте наметили весьма умеренную, по их мнению, схему введения элементов современного подхода к основным математическим понятиям в школьное преподавание. В окончательном проекте составители осторожнее, чем им хотелось бы. Но, по-видимому, такая еще большая осторожность соответствует реальному положению с подготовкой не только нашего учительства, но и методистов и преподавателей педагогических институтов.

Насколько велика здесь опасность неудачных попыток введения непривычных для школьной практики понятий, видно по недавней попытке ввести простейшие теоретико-множественные понятия и обозначения в учебник по геометрии для VI—VIII классов (К. С. Барыбин, Геометрия, «Просвещение», 1966). Здесь говорится, что «множество конечно, если оно имеет последний элемент». Автор выводит отсюда, что множество натуральных чисел бесконечно. Но как быть с множеством целых отрицательных чисел? Для пересечения геометрических фигур вводится теоретико-миожественное обозначение $a \cap b$. Запись $a \cap b = M$ интерпретируется как выражение того факта, что линии a и b пересекаются в точке M. Как быть с линиями, пересекающимися в двух точках, не объясняется, просто же запись $a \cap b$ читается: «линии a и b пересекаются», т. е. оказывается не обозначением множества, а записью высказывания

$$a \cap b \neq \varnothing.$$

Но мы думаем, что следует уже для VII—VIII классов разработать программу факультативного курса, в котором начала математической логики, являющиеся необходимой предпосылкой для понимания устройства современных вычислительных машин и теории множеств (главным образом конечных!) получат достаточно широкое развитие, а начала общей алгебры будут поняты на материале вычислений по модулю m (в частности, по модулю 2).

В духе наших первоначальных предположений выдержан проект программы «Дополнительных глав и вопросов математики» для IX класса, которая начинается с небольшой темы «Множества и операции над ними» и кончается понятием о группах геометрических преобразований. При более полном, чем

в основном курсе, освещении вопроса о последовательных этапах обобщения понятия числа здесь уместно дать и примеры не числовых колец и полей (уже упоминавшиеся кольца и поля вычетов по модулю m), а в самом конце остановиться и на общем («абстрактном») понятии группы. В X классе на факультативных занятиях задачи комбинаторики и теории вероятностей естественно разбирать в терминах теории конечных множеств, а всей совокупностью приобретенных представлений воспользоваться при освещении вопроса об аксиоматическом методе в геометрии.

IV

В заключение вернусь к затронутому ранее вопросу о выработке навыков и тренировке в решении задач. Сейчас в этом отношении существует очень большое расхождение между реальным положением вещей в большинстве школ и рекомендациями, основанными на опыте наиболее «строгих» учителей. Обследования показывают неспособность учащихся безошибочно проводить самые элементарные преобразования, правильно читать самые простые графики, не говоря уже о вычерчивании несколько более сложных, рекомендации же, например, Московского городского института усовершенствования учителей предполагают, что все учащиеся должны набить себе руку в скоростном выполнении самых замысловатых преобразований и скоростном решении каверзных (хотя по существу и тривиальных) задач.

В дидактических материалах этого института для X класса (1966) варианты контрольных работ распределены по трудности. Вариант № 1 каждой контрольной работы предназначен для слабых учащихся.

Работа № 12 на 20 минут

Вариант № 1

Прологарифмировать:

1) $x = \dfrac{(a^2+b^2)^3 \operatorname{tg}^2\alpha \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 2\beta}}{(a-b)^2 \operatorname{tg}^2\beta \sqrt{a^2-b^2}}$.

2) $x = \dfrac{1}{2a}\sqrt[4]{\dfrac{1}{ab^2\sqrt[3]{c^2}}}$.

3) Пропотенцировать:

$$\log x = -\frac{1}{7}\log \sec^2\alpha + 3\left(\frac{1}{3}\log c - \frac{2}{21}\log\cos\alpha\right).$$

4. Можно ли вычислить $\log \sin 300°$?

Достижение беглости в выполнении алгебраических преобразований необходимо для продуктивной, сознательной работы. Например, при прохождении темы «Производная» выкладка

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$

должна производиться автоматически, не отвлекая внимания от осмысливания ее результата. Но разумные требования в этом направлении в применении к тем учащимся, для которых изучение математики является лишь элементом общего образования, по моему мнению, очень далеки от вытекающих из приведенных выше пожеланий Московского института усовершенствования учителей.

Можно, впрочем, надеяться, что общие установки новых программ встретят сейчас большее понимание в свете недавних решений ЦК КПСС и Совета Министров о средней школе. Введение факультативных занятий по выбору в VII—X классах является необходимым дополнением к подчеркнуто общеобразовательному характеру основного курса математики в старших классах.

В принципе всеми признавалось, что школьное преподавание не должно быть подчинено интересам тех учащихся, которые после школы направляются в вузы. Но, несмотря на это, задачам продолжения изучения математики в технологических и физико-математических вузах (а тем более, специальной задаче подготовки учащихся к успешному прохождению конкурсных вузовских экзаменов) посвящались многие высказывания, и оба мотива играли большую роль в обсуждении. В последнее время сложилась обстановка, когда оценка работы учителя математики в старших классах стала зависеть в значительной мере от успеха его учеников на конкурсных экзаменах в наиболее труднодоступных вузах. Весьма сомнительно, что преувеличенное внимание к разучиванию специальных приемов решения специфически конкурсных задач полезно и для того незначительного меньшинства учащихся, которые в эти труднодоступные вузы попадут. Во всяком же случае несомненно, что для большинства учащихся эта тенденция сильно снижает реальные результаты прохождения школьного курса математики: искусственные частности забываются, а основные представления остаются смутными и неполными.

Естественно, однако, что интересы той части учащихся, которые немедленно после школы или через несколько лет попадут в вузы, не должны быть и позабытыми. Мы исходим из предположения, что программы вступительных экзаменов в вузы будут включать

лишь материал из обязательной школьной программы. Чтобы выводы были достаточно конкретными, разумно рассмотреть отдельно интересы большинства технических вузов и педагогических институтов, которые принимают сейчас студентов без большого конкурса, и отдельно — интересы вузов с повышенными требованиями и большим конкурсом при приеме. В применении к этим последним говорить об их общедоступности для учащихся, неспособных или не желающих затратить на изучение математики дополнительные усилия, является лицемерием. Естественно, что в эти вузы практически будут попадать в основном учащиеся, которые, кроме серьезного усвоения обязательного школьного курса, займутся дополнительно решением более трудных задач по этому курсу, и такое положение будет только справедливым, если в этом им будет помогать школа, а не частные репетиторы. Мы думаем, что в этом состоит *одна из задач* широкой организации факультативных занятий по выбору.

Что же касается более широкого круга вузов, то сейчас они страдают не от того, что выпускники школ не умеют достаточно хорошо решать хитроумные показательные и тригонометрические уравнения, а от недостаточного их общего математического развития, вплоть до отсутствия представлений об оценке абсолютной и относительной ошибки при приближенных вычислениях. Вместе с тем в вузах самого различного профиля устоявшееся наглядное понимание смысла таких основных понятий, как понятие производной, создаст новые возможности построения курсов физики и других естественнонаучных и технических дисциплин.

Наконец, мы думаем, что проектируемое расширение идейного содержания школьного курса математики будет особенно полезно для тех учащихся, которые попадут в вузы не непосредственно после школы, а после стажа трудовой деятельности. Интересные и связанные с важными применениями общие математические представления, закрепленные разбором достаточно простых и естественных примеров, прочнее сохранятся и больше помогут при возвращении к теоретическим занятиям в вузе через несколько лет, чем быстро забываемые узкоспециализированные навыки, относящиеся к отдельным специальным типам задач.

Для вузов же с большим конкурсом расширение идейного содержания программ тоже окажется полезным даже с точки зрения разумной постановки вступительных экзаменов, создавая возможность проверять с большой полнотой способность к сознательному усвоению идей и расширяя базу для выбора задач «на сообразительность».

V

Предполагается, что новые программы будут вводиться в таком порядке:

Классы	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Полностью . .	69	70	71	72	73	74	75
С некоторыми упрощениями . . .	—	—	—	—	69	70	71

Следует иметь в виду, что в отношении сроков введения новых программ математика стоит на последнем месте по сравнению с другими предметами. По-видимому, это вызвано тем, что содержание среднего образования в его математической части до настоящего времени оставалось наиболее архаичным и отставшим от требований времени. Эти сроки позволяют создать до введения новых программ совершенно новые учебники, проверяя отдельные главы по мере их написания в экспериментальной работе в школе.

Мы думаем, что наш проект программ является здоровой основой для такой работы [1]. Возможно, что предложения авторов учебников и эксперимента в школе приведут к выводу о необходимости некоторых передвижек в распределении материала, иногда даже и между классами. Но общая структура курса от этого не должна сильно измениться.

Идет, например, еще спор о порядке расположения в IV—V классах знакомства с отрицательными числами, обыкновенными и десятичными дробями. Составители программ выразили по этому поводу свое мнение, но для возможности работы над учебниками для VI—VIII классов существенно лишь общее согласие о том, что в VI класс учащиеся будут приходить со сформировавшимися начальными представлениями о системе всех рациональных чисел (которые лишь систематизируются в начале VI класса), употреблении букв и решении уравнений. Возможны споры об изучении показательной и логарифмической функций в VIII или IX классе, но существенно согласие относительно необходимости вместить в программу IX—X классов начала анализа (первые понятия о производной и интеграле) и теории вероятностей.

[1] Во всяком случае по курсам математики в IV—V классах, алгебры в VI—VIII классах и алгебры с началами анализа в IX—X классах. О геометрии в VI—X классах см. далее.

Возможной альтернативой к проекту программ является перемещение в VIII класс предела последовательности (с суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии и превращением периодических десятичных дробей в простые), понятия о действительных числах (с еще большим упрощением этой темы) и подходящей для повторения всего курса восьмилетней школы темы «Системы уравнений и неравенств». В этом случае программа IX класса могла бы начинаться с темы «Показательная и логарифмическая функции».

Меня лично, однако, в составленном нами проекте программ привлекает возможность непосредственного перехода от дробных показателей степени к показательной функции, по существу даже слияния этих двух тем в одну. Я думаю, что такой подход к делу может привести к значительной экономии сил учащихся и необходимого времени.

При постановке вопроса о том, какой смысл надо приписать выражению a^x при различных x, для которых ранее это выражение не имело смысла, вполне естественно считать именно x переменным и постепенно строить график функции

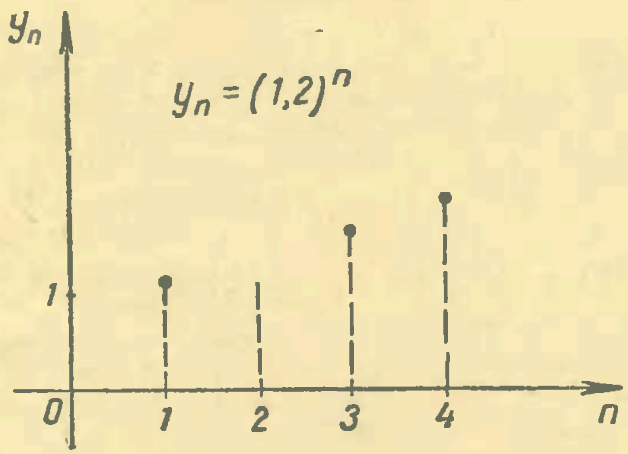
$$y = a^x.$$

Конечно, для этого учащиеся должны быть заранее приучены к мысли, что функция может быть определена на любом множестве, в частности на конечном или на множестве натуральных чисел. Но именно это и имеют в виду составители программ. Предполагается, что последовательность

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

будет с самого начала рассматриваться как функция

$$y_n = f(n),$$



Черт. 3

определенная только для натуральных значений аргумента, и что учащиеся привыкнут при прохождении темы «Числовые последовательности» изображать последовательности графиками и рассматривать эти графики как частный случай графиков функций (см. черт. 3).

VI

Если я назвал действующие сейчас программы архаичными, то особенно это относится к геометрии. Составители проекта программ находились здесь в затруднительном положении, так как по существу следовало бы начинать не с составления новых программ, а с работы по выяснению желательной логической структуры школьного курса геометрии. Ориентироваться здесь приходится по преимуществу на иностранный опыт, а на отечественную экспериментальную работу в школах — лишь в применении к младшим классам.

Основные тенденции перестройки школьного курса геометрии, сейчас нашедшие уже самое широкое признание, можно сформулировать в виде трех положений.

1) Формирование начальных геометрических представлений происходит в младших классах.

2) Логическая структура систематического курса геометрии в средних классах заметно упрощается по сравнению с евклидовской традицией. Развитие привычки к строгим логическим доказательствам на этом этапе соединяется с открытым признанием права принимать без доказательства избыточную систему допущений.

3) Курс геометрии в старших классах строится на основе векторных представлений. При этом естественно и обращение к координатному методу (однако в качестве вспомогательного, так что изложение не делается от этого обращения менее «геометрическим»).

Первое из этих положений, по-видимому, является достаточно общепризнанным в нашей методической литературе, хотя до настоящего времени и недостаточно реализуется в массовой школе. Я думаю, что наш проект программ в целом правильно определяет запас геометрических представлений, который должен быть накоплен до начала систематического курса геометрии.

Проект программ предлагает начинать систематический курс геометрии в VI классе. Этот курс геометрии задуман не в духе евклидовской традиции, а в соответствии с вторым из сформулированных выше положений. По моему мнению, хорошим образцом осуществления этого замысла остается французский учебник Эмиля Бореля, написанный еще в 1905 г. При таком понимании систематического курса геометрии средних классов возможно, что его разумно было бы начинать несколько раньше — например, со второго полугодия V класса. Возможность начинать систематический курс геометрии в V классе с самого начала отстаивалась некоторыми членами комиссии.

Курс этот можно построить не с меньшей, а с значительно большей «логической строгостью», чем это принято сейчас, если пополнить список допущений, принимаемых открыто без доказательства (не так важно,

будут ли они называться «аксиомами»), примерно следующим образом:

1) Принимаются без доказательства свойства порядка на прямой. Принимается без доказательства (но с явной формулировкой), что прямая, пара лучей с общим началом и простая замкнутая ломаная делят плоскость на две части.

2) Аксиома параллельных принимается в самом начале курса в сильной форме: через точку проходит одна и только одна прямая, параллельная данной прямой.

3) Параллельный перенос определяется как перемещение всех точек фигуры в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Постулируется, что параллельный перенос есть движение, т. е. сохраняет длину отрезков и величину углов.

4) Постулируется достаточная подвижность фигур: кроме уже указанного в п. 3), возможность поворотов в плоскости вокруг центра и отражения по симметрии относительно прямой.

5) Постулируются свойства ориентации плоских фигур (сохранение ориентации при переносах и поворотах и изменение на противоположную при осевой симметрии).

6) Без доказательства постулируются свойства пересечения прямой и окружности и двух окружностей (что делает тривиальным вывод третьего признака равенства треугольников).

7) Подобие *определяется* через равенство отношений соответствующих отрезков. Постулируется: а) существование фигуры, подобной данной, с произвольным коэффициентом подобия, б) равенство соответствующих углов в подобных фигурах.

Допущения 7а) и 7б) позволяют, в частности, обойти все трудности, возникающие в теме «Подобие» из-за отсутствия ясных представлений об иррациональных числах. Например, теорема «Треугольники с соответственно равными углами подобны» получает очень простое доказательство.

Пусть соответствующие углы $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ равны. Построим $\triangle A''B''C''$, подобный $\triangle ABC$, с

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{A'B'}{AB}.$$

Так как $A''B'' = A'B'$, то, по второму признаку равенства треугольников, $\triangle A''B''C''$ равен $\triangle A'B'C'$ и, следовательно, подобен $\triangle ABC$.

Я понимаю, что эти беглые замечания недостаточны. Но задача создания для средних классов достаточно простого и в то же время логически корректного курса геометрии *на существенно обновленной основе* представляется мне одной из самых важных во всей предпринимаемой реформе школьного курса математики. Я не счел возможным обойти ее молчанием.

Составители проекта программы были единодушны в мнении о необходимости достаточно развитых элементов стереометрии в восьмилетней школе. Было бы недопустимым нарушением практической направленности всего преподавания в средней школе, если бы курс геометрии VI—VIII классов оставался совершенно оторванным от курса черчения, который по новому учебному плану проходится полностью в VII—VIII классах и геометрическое содержание которого сводится в основном к изучению проекций пространственных фигур, предполагающем достаточно ясные представления о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве и углах между ними. С нашей точки зрения, речь может идти не о снятии темы 9 проекта программ в VII классе, а об увеличении отводимого на нее времени. Упрощение логической структуры курса планиметрии в V—VII классах, возможно, позволит это сделать.

Представляется подлежащим обсужденню и размещение материала, который в проекте программ помещен в теме 10, но не самая его обязательность в восьмилетней школе. Ведь в современном экспериментальном преподавании почти весь этот материал распределяется по курсу IV—V классов.

При обсуждении возможностей изложения элементов стереометрии в восьмилетней школе следует иметь в виду, что основное содержание первой главы второй части учебника А. П. Киселева допускает логически корректное, *крайне простое* изложение при некотором расширении числа допущений, принимаемых без доказательства.

Можно, например:

а) постулировать транзитивность параллельности прямых в пространстве;

б) распространив данное выше определение параллельного переноса на пространственные фигуры, постулировать равенство фигур, полученных одна из другой параллельным переносом;

в) постулировав возможность вращения фигур вокруг оси (что делается и в учебнике А. П. Киселева), принять без доказательства, что при вращении пересекающей ось под прямым углом прямой получается плоскость.

Читатель может без большого труда проверить, насколько простым делается доказательство остальных теорем о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве, если помириться с тем, что эти узловые предложения просто принимаются в качестве дополнительных аксиом. Естественно, что это не мешает поставить перед более сильными и интересующимися математикой учащимися задачу их доказательства.

VII

Отдельно следует выделить проблему введения в школьный курс векторных представлений и построения курса геометрии в старших классах на векторной основе. Составители проекта программ много спорили о месте первого появления в программе векторов. Сначала последняя геометрическая тема VI класса называлась «Параллельные переносы и векторы». В заботах об упрощении программ упоминание векторов в этом месте было снято. Обсуждался вопрос о знакомстве с векторами в начале VIII класса, что позволило бы с самого начала связать тригонометрические функции с рассмотрением векторов и их проекций. В конце концов векторы сохранились только в программе IX класса.

Опубликованный проект программ был составлен до того, как окончательно определилась структура курса физики. В окончательном варианте курс физики разделен на два концентра: первый концентр в VI—VII классах, а второй в VIII—X классах. Второй концентр начинается с механики с систематическим культивированием векторных представлений, поэтому заслуживает нового обсуждения возможность появления и в курсе математики векторов в начале VIII класса.

В нашей объяснительной записке говорится о построении курса геометрии в IX—X классах *на векторной основе* в качестве одной из возможностей. Включение в программу средней школы понятия «векторное пространство» с формулировкой его свойств в виде аксиом имело бы очень большое значение, объединяя и освещая по-новому значительную часть курсов математики и физики. Сопоставление системы скалярных величин как «одномерного векторного пространства», системы векторов на плоскости как «двумерного векторного пространства» и естественного с практической и интуитивной точек зрения «трехмерного векторного пространства», надо думать, в принципе вполне доступно среднему школьнику старших классов, а общеобразовательный эффект такого расширения обязательных для всех старшеклассников математических представлений был бы огромен.

В странах, где окончание курса средней школы приурочивается не к семнадцатилетнему, а к восемнадцатилетнему возрасту, необходимость такого развернутого знакомства с понятием векторного пространства, по-видимому, является теперь общепринятой. Новые официальные французские программы требуют изучения векторов на плоскости в IV классе (по французскому счету), т. е. в возрасте 13—14 лет. Более прогрессивные учебники, получившие уже достаточно широкое распространение, понимают это требование программ так, что понятия «векторное пространство» и его «размерность» формулируются во II классе (т. е. для учащихся 15—16-летнего возраста).

Следует, однако, ясно представлять себе, что аксиоматическому постулированию основных свойств векторов должно предшествовать наглядное знакомство и длительная практика в обращении с ними. Поместить и это предварительное наглядное знакомство с векторами, и систематическое изложение концепции векторного пространства в IX классе затруднительно. Все разрешилось бы просто, если бы удалось поместить первое знакомство с векторами в VIII классе. Тогда было бы возможно с полной уверенностью рекомендовать векторную систему построения заключительного курса геометрии в IX—X классах в качестве обязательной. Как уже отмечалось, во Франции такой переход на векторную точку зрения признается осуществимым и с учащимися меньшего возраста, чем возраст наших учеников IX—X классов.

Таким образом, я думаю, что доработка нашего проекта программ по геометрии должна идти не в направлении отказа от изложенных выше принципиальных установок, но в направлении их более последовательного и сбалансированного проведения. Не случайно выше, говоря о том, что опубликованный проект программ, по мнению составителей, является здоровой основой для работы по написанию учебников, я ограничил это утверждение учебниками для IV—V классов и учебниками для VI—X классов по алгебре и началам анализа. Для того чтобы можно было спокойно и уверенно работать над новыми учебниками геометрии, по существу следовало бы срочно проделать предварительную работу: одному или нескольким коллективам ученых и учителей с использованием иностранного опыта составить и опубликовать проект (или несколько проектов) «логического скелета» школьного курса геометрии (исходные допущения и основная цепь теорем с доказательствами) в форме, доступной для критики и экспериментального употребления достаточно опытными учителями.

VIII

В заключение я хочу подчеркнуть, что дело идет не об очередной перекройке программ, а о решающем переходе на существенно новый и более высокий уровень постановки преподавания математики в наших школах. Опубликованный проект программ является лишь первым шагом в этом направлении. Дальнейшая работа, в частности, над учебниками, может быть доведена до благополучного конца лишь при самом тесном сотрудничестве школьных учителей, методистов и представителей математической науки. Предполагается, что параллельно над учебниками для каждого класса и каждого предмета будут работать несколько авторских коллективов. Очень важно, чтобы в каждом из них было сбалансировано представительство учительского опыта и понимания научных предпосылок рационального построения школьного курса. Надо думать, что и в своей окончательной форме учебники, написанные разными авторскими коллективами, сохранят определенные индивидуальные черты. Но следует надеяться, что работа этих коллективов не будет совершенно независимой, а уже на начальных и промежуточных этапах послужит для постепенного уточнения обязательных для всех программных требований.