МЕТОДИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ

А. Н. КОЛМОГОРОВ (Москва)

ОБ УЧЕБНИКАХ НА 1966/67 УЧЕБНЫЙ ГОД
«АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ» Е. С. КОЧЕТКОВА И Е. С. КОЧЕТКОВОЙ, Ч. II

В большей своей части учебник является переработкой издания 1965 г. При переработке авторам удалось устранить ряд недостатков первого издания. В целом книга составляет приемлемую базу для работы десятых классов. Как и в первой части, большим достижением авторов является подбор упражнений (всего в двух частях их 2251). Учителя должны только позаботиться о подборе дополнительных содержательных текстовых задач. Задач с интересным реальным содержанием в книге мало. Но в части подбора упражнений, подкрепляющих теоретическое изложение материала и предупреждающих возможные ошибки в понимании, авторы проявили изобретательность.

Я постарался далее отметить все те места, где изложение материала неудовлетворительно с логической стороны. Их больше, чем должно было бы быть в учебнике, напечатанном в двух миллионах экземпляров, но не так много, чтобы существенно мешать использованию учебника. Хуже то, что учебник труден и иногда изложение осложнено без надобности. Число параграфов, теорем, формулировок, набранных жирным шрифтом, кажется мне преувеличенным. Учитель должен тщательно обдумать, что из этих формулировок рекомендовать для запоминания. Преследуя чисто практическую цель, перехожу к замечаниям по отдельным местам учебника, требующим при работе учителя особенного внимания. Особенно рекомендую подумать о возможностях упрощений, указанных мной под пунктами 3 и 5. Не потеряли еще интереса и некоторые из замечаний, сделанных по первому изданию 1965 г. в № 3 «Математики в школе» за 1966 г.

1. В связи с материалом § 149 было бы естественно ввести направленные вдоль осей координат единичные векторы (орты) $\bar{e}_x$ и $\bar{e}_y$, записать произвольный вектор в виде

$$\bar{r} = x\bar{e}_x + y\bar{e}_y, \qquad (1)$$

где x и y — координаты вектора $\bar{r}$, и отметить, что для единичного вектора формула (1) приобретает вид

$$\bar{e} = \cos\alpha\,\bar{e}_x + \sin\alpha\,\bar{e}_y, \qquad (2)$$

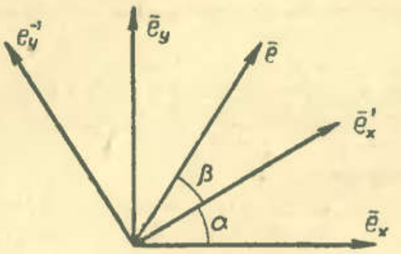
где α — угол, образуемый вектором $\bar{e}$ с вектором $\bar{e}_x$. Для единичных векторов, связанных с системой координат (x', y'), получаем[1]

$$\begin{cases} \bar{e}'_x = \cos\alpha\,\bar{e}_x + \sin\alpha\,\bar{e}_y, \\ \bar{e}'_y = -\sin\alpha\,\bar{e}_x + \cos\alpha\,\bar{e}_y. \end{cases} \qquad (3)$$

Это легко воспринимаемое расширение материала § 149 позволяет довести до конца намерение авторов учебника связать в § 150 вывод «формул сложения» с преобразованием координат. В самом деле, повернув вектор $\bar{e}'_x$ на угол β, получим вектор $\bar{e}$, который из век-

[1] Первая из формул (3) есть просто формула (2), записанная для вектора $\bar{e}'_x$, а вторая получается из формулы (2) при помощи формул приведения § 111:

$$\bar{e} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\bar{e}_x + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\bar{e}_y = -\sin\alpha\,\bar{e}_x + \cos\alpha\,\bar{e}_y.$$



Черт. 1

тора $\bar{e}_x$ получается поворотом на угол $\alpha+\beta$ (черт. 1).

Выкладка

$$\bar e = \cos\beta \bar e_x' + \sin\beta \bar e_y' =$$
$$= \cos\beta(\cos\alpha \bar e_x + \sin\alpha \bar e_y) +$$
$$+ \sin\beta(-\sin\alpha \bar e_x + \cos\alpha \bar e_y) =$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\,\bar e_x +$$
$$+ (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\,\bar e_y$$

приводит непосредственно к формулам

$$\left.\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Во всем выводе не остается ничего искусственного. Позднее, знакомясь с геометрической интерпретацией умножения комплексных чисел (см. далее п. 7), учащиеся встретятся еще раз по существу с той же самой выкладкой.

2. § 152—167 представляются мне хорошо написанными, но трудно согласиться с тем, как авторы учебника расправились в § 168 со сложением гармонических колебаний одинаковой частоты. Специальный случай приведения к виду

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

суммы

$$a\sin\omega t + b\cos\omega t$$

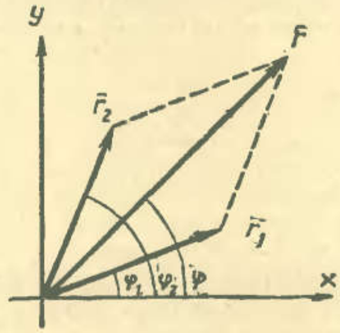
действительно имеет свой круг применений (например, в теории рядов Фурье). Но с точностью до замены ωt на x эта задача уже разобрана в § 167, и не понятно, зачем ею занимать еще один параграф. Что же касается электротехники, ссылкой на нужды которой открывается § 168, то для нее основной интерес представляет общий случай сложения двух колебаний вида

$$y_1(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi_1),\quad y_2(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi_2).$$

Формулы для A и φ в этом общем случае довольно сложны, но принципиальная возможность записать сумму

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

в виде (1) может быть объяснена учащимся без выкладок, если опереться на геометрическое определение гармонических колебаний, данное в § 165. Слагаемые y_1 и y_2 представляют собой проекции на ось ординат векторов $\bar r_1$ и $\bar r_2$, которые вращаются с одинаковой скоростью, а сумма $y = y_1 + y_2$ — проекцию векторной суммы $\bar r = \bar r_1 + \bar r_2$ (см. черт. 2).



Черт. 2

Это рассмотрение интересно, нетрудно и соответствовало бы названию § 168. В настоящем же его виде § 168 выглядит как бюрократическая отписка на запрос объяснить учащимся задачу, поставленную в заголовке параграфа.

Что касается явных формул для A и φ в общем случае, то их вывод полезно дать в качестве задачи на раздел курса геометрии «решение треугольников». Запоминать эти формулы, конечно, не следует, но поместить их в мелком шрифте учебника по алгебре и элементарным функциям было бы полезно.

3. § 174—175, посвященные общим свойствам показательной и логарифмической функций, не вызывают возражений в смысле формальной корректности изложения. Но изложение это можно было бы сделать значительно более наглядным и доходчивым. После напоминания определения степени с рациональным показателем и доказательства теорем 1 и 2 из § 174 следовало бы сразу рассмотреть функцию

$$y = a^x,$$

не пугаясь того, что она определена пока только при рациональных значениях аргумента x. Подчеркнув, что теоремы 1 и 2 выражают не что иное, как монотонность этой функции, можно обратиться к ее табличному и графическому изображению. При $a=10$ можно воспользоваться обычными таблицами «антилогарифмов». Учащиеся легко убедятся в том, что построенные по этим таблицам точки (x, y) хорошо «ложатся» на непрерывную кривую. После этого задача распространения определения функции $y=a^x$ на случай иррациональных значений аргумента с сохранением свойства монотонности получает полную наглядность. На табличные и графические иллюстрации следовало бы не пожалеть места и на страницах учебника.

Так как само формальное введение степеней с иррациональным показателем в § 175 все равно осуществляется аподиктически — без доказательства корректности определения (подстрочное примечание на стр. 67), то вполне допустимо сразу сформулировать без доказательства предложение о том, что существует (и притом единственное) распространение определения функции $y=a^x$ на иррациональные показатели x с сохранением монотонности. Это позволит заметно упростить изложение свойств показательной функции в § 179. Усвоение материала § 180 тоже будет хорошо подготовлено и не представит никаких трудностей.

Можно было бы в самом начале главы VIII использовать сведения по истории логарифмов. Ведь дело началось именно с вычисления таблиц показательной функции. К сожалению, математическая сторона истории открытия логарифмов в § 200 изложена в учебнике так, что это изложение не принесет никакой пользы даже наиболее продвинутым учащимся.

4. § 172 и 198 содержат хорошо выбранные примеры, в которых графический способ решения уравнений действительно полезен. Но после того как был разобран вопрос об интерполяции в таблицах (прямой в § 105, 189 и 190 и обратной в § 106), было бы естественно дать примеры на употребление «правила ложного положения». Отмечу здесь же полную неудовлетворительность § 240, посвященного применению производной к графическому решению уравнений. Можно было этой темы в учебнике совсем не касаться, но, вводя параграф с таким названием, следовало рассказать о методе Ньютона, а не отделываться разбором специальной и нетипичной задачи.

5. Крупный шрифт главы IX соответствует программе, но по существу мне кажется несколько запоздалым. Если уже говорить вновь о способах задания функций, то следовало бы не повторять хорошо известное еще из курса восьмилетней школы, а указать более отчетливо, что табличный способ задания при всей его практической полезности не может доставить точного *определения* функции, за исключением функции, определенной лишь в конечном числе точек. По поводу графического способа задания в его обычном «наивном» понимании следует подчеркнуть его приближенный характер[2]. Следует более отчетливо сформулировать ту идею, что для математики существенно иметь для рассматриваемых функций точные *логические определения*. Хороший пример логического определения функций без выписывания явных «аналитических формул» доставляют функции

$$y=[x] \text{ (целая часть } x),$$
$$y=\{x\} \text{ (дробная часть } x).$$

Можно отметить, что иногда функции определяются как обратные к функциям, заданным аналитическими формулами. Например, в силу монотонности функции

$$y=x^5+x$$

оказывается определенной обратная к ней функция

$$x=\varphi(y),$$

хотя мы и не знаем соответствующей аналитической формулы.

Мне кажется, что все, что здесь говорится о монотонных функциях, о четных и нечетных функциях, о периодических функциях, об обратной функции, можно было бы разместить в надлежащих местах предшествующих глав. Наоборот, то, что здесь говорится о возрастании и убывании функций и об экстремальных значениях функций, при восстановлении в обязательной программе темы «Производная и ее применения» могло бы проходиться там. Но это замечание относится уже к программе, а не к учебнику.

В § 209 неудачно доказательство *леммы*. Создается впечатление, что здесь нужны какие-то выкладки, в то время как наглядное доказательство при помощи симметрии относительно биссектрисы первого и третьего координатного углов является с логической стороны безукоризненным.

Преподаватель должен внимательно отнестись к изложению определений § 205. В самом начале важно подчеркнуть, что для функции, постоянной на всем интервале $[a, b]$, ее постоянное значение является как ее абсолютным максимумом, так и ее абсолютным минимумом. Усвоив это обстоятельство, учащийся уже не будет чрезмерно удивлен появлением у функции, изображенной на рисунке 275, точки $x=c$, являющейся одновременно и точкой локального минимума и точкой локального максимума.

Можно, однако, отклоняясь от учебника, ограничиться рассмотрением функций, для ко-

[2] Впрочем, понятию «график функции» придают и строгий математический смысл. Это множество точек (x, y) числовой плоскости, для которых $y=f(x)$. См. учебное изложение вопроса, опубликованное мной в № 6 «Математики в школе» за 1965 г.

торых область изменения разбивается на конечное число промежутков монотонного возрастания и монотонного убывания. Для них вполне достаточны более наглядные понятия строгого локального максимума и строгого локального минимума, которыми в этом случае можно и ограничиться.

6. Существенными мне представляются дефекты изложения в главе XI (комплексные числа). Если читать после § 243 непосредственно § 248 (включая мелкий шрифт), а за ним § 249, 250, 251, то получится корректное, но крайне формальное изложение теории комплексных чисел, определяемых как символы вида $a+ib$. В этой концепции действительно среди комплексных чисел имеется число

$$0+0i,$$

которое не следует смешивать с обычным нулем системы действительных чисел[3]. На надлежащем месте (с точки зрения этой формальной концепции) в § 250 оговаривается, что с определенного места разрешается вместо $a+0i$ писать сокращенно просто a. Следовало бы только с несколько большей торжественностью сказать здесь: таким образом, задача, поставленная в § 243, решена — после идентификации комплексных чисел вида $a+0i$ с обычными действительными числами *а оказывается, что поле комплексных чисел* (сначала построенное заново) *является расширением поля действительных чисел.* Наконец, вводится соглашение — обозначать $0+bi$ просто bi, а $1\cdot i$ — просто i, после чего искусственная формальная конструкция приводит к полному обоснованию традиционного «наивного» обращения с комплексными числами.

Я считал бы законным решением задачи согласования педагогических требований доступности с требованиями математической строгости, если бы вся эта формальная концепция была последовательно изложена в одном или двух дополнительных параграфах, набранных мелким шрифтом.

Но решительной неудачей авторов является то, что § 244—247, предшествующие § 248, и даже упражнения к этим параграфам отягощены включением в них осколков еще не изложенной формальной концепции (ее связное изложение начинается в § 248). При изучении § 244—247 учащиеся, казалось бы, имеют право считать, что поле комплексных чисел *уже является* расширением поля действительных чисел и уже содержит число i, и спокойно считать, что

$$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ \frac{1}{i}=-i,$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\ ^4.$$

Но в угоду концепции, усвоение которой для них даже и впоследствии останется не обязательным, им рекомендуется вести выкладки в более сложной форме, что без объяснений § 248 никак не обосновано.

Существенно подчеркнуть, что более естественный «наивный» подход к делу вовсе не обязательно связан с «логическими погрешностями». Он может быть вполне корректным, если допустить *гипотетичность* всего построения: *мы изучаем, что получится, если допустить, что у поля действительных чисел имеется расширение, включающее в себя число i, обладающее свойством*

$$i^2=-1.$$

Я настоятельно рекомендую именно этот путь для первого знакомства с комплексными числами[5]. Постановка задачи дана в учебнике в § 243. Материал § 244—250 излагается с понятными отклонениями от учебника. Начиная с § 251 можно вновь следовать учебнику.

Отложив оправдание такого изложения, построенного на допущении о возможности желательного нам расширения, мы получаем то преимущество, что это оправдание может уже опираться на знакомство с геометрической интерпретацией комплексных чисел.

Сделаю еще два более специальных замечания. Материал § 255 сделался бы более прозрачным, если бы была выделена задача нахождения *корней* из ± 1. Конечно, интерес этой темы без геометрической интерпретации (расположение корней в вершинах правильного многоугольника) крайне ограничен. Эта геометрическая интерпретация появляется лишь в мелком шрифте § 258, причем в виде простой констатации факта без объяснения, которое требовало бы геометрической интерпретации умножения комплексных чисел. В § 249 авторы учебника даже специально говорят, что умножение комплексных чисел не допускает «простой» геометрической интерпретации. Между тем эта геометрическая интерпретация может быть получена даже без тригонометрических выкладок. Достаточно заметить, что умноже-

[3] В первом издании учебника Кочетковых присутствовал даже соответствующий термин «комплексный нуль», набранный жирным шрифтом в заголовке § 45 (издание 1965 г.).

[4] А не обязательно

$$\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i.$$

[5] Есть еще другая возможность: отправляться от понимания числа i как оператора поворота на 90°, примененного к векторам на плоскости. Но она требует предварительного изложения операторной интерпретации действительных чисел.

ние комплексного числа z на действительное число a интерпретируется умножением на это же число a вектора, изображающего z, а умножение на i — поворотом на 90°. Пользуясь ассоциативностью умножения и законом дистрибутивности, отсюда без труда можно вывести интерпретацию умножения на произвольное комплексное число $c = a + ib$.

7. В первом издании учебника (1965) принцип математической индукции был назван «теоремой». Теперь слово «теорема» исключено из текста учебника, но за формулировкой принципа следуют слова, которые учащиеся воспримут как его *доказательство*. Для вдумчивого учащегося остается неясным, является это доказательство дедуктивным или индуктивным. Дедуктивным оно, видимо, быть не может, а про обычную индукцию сказано в § 261, что она не гарантирует от ошибок, а принцип математической индукции мы еще только обосновываем. Надо думать, что многие учащиеся обратятся к учителю с вопросом, нет ли тут «порочного круга». Ответ учителю придется искать за пределами учебника.

Замечу еще, что в главе XII было бы хорошо дать примеры *индуктивных определений* и даже сформулировать *теорему* (ее в самом деле можно доказать, пользуясь принципом математической индукции): если задано значение u_1 и закон образования u_{n+1} по заданным $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то этим однозначно определяется последовательность

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots.$$

И, наконец, еще совсем специальное замечание про многочлен

$$x^2+x+41.$$

Хорошо было бы сказать, что он принимает простые значения при всех натуральных x, не превосходящих 39. К сожалению, случай типичен: у авторов учебника слишком мало желания возбудить интерес учащихся, сообщая им что-либо поражающее воображение.

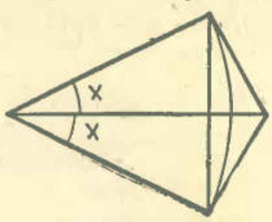
8. Вторая часть главы IX (§ 211—215, посвященные пределу функции) и глава X («Производная и ее применение к исследованию функций») набраны петитом, так как уже после написания учебника эти разделы были исключены из обязательной программы десятых классов на 1966/67 учебный год. Я уже имел случай высказать свои взгляды на преподавание этих разделов в «Математике в школе» (№ 4 и 6 за 1965 г.). Поэтому ограничусь немногими замечаниями по тексту учебника. В § 213 следует сказать, что неравенство

$$\sin x < x$$

равносильно геометрическому утверждению, что хорда короче дуги, а неравенство

$$x < \operatorname{tg} x$$

вытекает из геометрического принципа, что дуга короче объемлющей выпуклой ломаной (черт. 3). Если проанализировать предпосылки



Черт. 3

доказательства, приведенного в учебнике, то обнаружится, что оно в конечном счете опирается (через геометрическое определение длины окружности и длины дуги) именно на упомянутые сейчас геометрические представления. Аналогично и в § 214, не возражая против данного авторами формального доказательства, следует подчеркнуть геометрический смысл результата: отношение длины дуги к длине хорды стремится к единице при стягивании дуги в точку.

Известно, что строгое доказательство формулы производной функции от функции несколько деликатно, но основной замысел этого доказательства, основанный просто на тождестве

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

крайне прост, как и окончательный результат. Сообщение результата без доказательства было бы, мне кажется, полезнее разбора с доказательством специального случая § 230.

Наоборот, основную теорему § 237 было бы естественно дать с доказательством (которое очень просто). При общем уровне учебника, не избегающего сравнительно деликатных доказательств в значительно менее важных специальных случаях, было бы естественно и в самом начале не оставлять совсем без доказательства теоремы о пределах (стр. 165), доказав, например, с полной тщательностью теорему 3 и сказав, что учащиеся могут попробовать самостоятельно доказать остальные.

9. Выполняя указания программы (в настоящее время не действующей), авторы учебника в § 233 дали вывод формулы бинома Ньютона, основанный на установленной в § 232 связи коэффициентов многочлена с его производными. В § 234 установлено равенство

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

а в § 235 укороченная формула бинома Ньютона

$$(1+x)^n \approx 1 + C_n' x = 1 + nx \qquad (1)$$

«применяется» к приближенным вычислениям. Что касается этого последнего параграфа, то было бы значительно естественнее из определения производной получить приближенное равенство

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (2)$$

и рассматривать (1) как частный случай (2). Совокупность § 232—235 получилась прежде всего *неинтересной.* По-видимому, если не считать, что средняя школа должна просто заготовлять формулы, которые могут понадобиться в высшей школе, то попытку оторвать формулу бинома Ньютона от элементов комбинаторики следует признать неудавшейся. Наоборот, прямо поставленная задача подсчета числа подобных членов вида $a^x b^{n-x}$ в разложении $(a+b)^n$ способна возбудить непринужденный интерес учащихся. Быть может, всего естественнее поскорее вывести индуктивную формулу и при ее помощи выписать достаточно много строк «треугольника Паскаля» и лишь после этого связать C_n^m с числом сочетаний из n по m. Мы все еще продолжаем только мечтать о введении в среднюю школу элементов теории вероятностей, но появление в учебнике треугольника Паскаля позволило бы хотя бы в факультативном порядке рассказать о вероятностях сразу кое-что интереснее.

10. Высказанная выше оценка характера упражнений, естественно, основана лишь на выборочном с ними знакомстве. Приведу один пример невнимательного отношения к реальному содержанию задач. Формула для прочности балки с прямоугольным сечением, о которой идет речь в задаче 1956, относится к прогибу горизонтальных балок, поперечное сечение которых лежит в вертикальной плоскости. Прочность пропорциональна ширине и квадрату высоты этого сечения. Только при этих пояснениях учащийся оценит естественность результата: при рациональном изготовлении балки из круглого бревна высота сечения будет в $\sqrt{2}$ раз больше ширины. При разборе первой части учебника я уже говорил об общем пренебрежении составителей приближенными вычислениями, хорошо выполненными чертежами, задачами реального содержания. Отмечу в связи с этим досадное нежелание авторов в нужных случаях пользоваться графиками с разными масштабами по осям (см. уродливые чертежи на стр. 208). В отдельности это мелочи, но недостаток общего стиля в этих отношениях должен быть оценен учителем и компенсирован на занятиях.

Все сказанное не меняет общего заключения, что переход на новый учебник в сложившейся обстановке, когда другой альтернативой было снабжение учащихся двумя учебниками («Алгебра» Киселева и «Тригонометрия» Новоселова) и двумя задачниками, был обоснован. Впервые в одной книге собрано в основном все необходимое для работы и расположено в соответствии с программой. В части тригонометрии характер изложения мало изменился по сравнению с учебником Новоселова, но объединение изучения всех элементарных функций в одной книге дало некоторые преимущества. Изложение алгебраического материала, входившего в учебник Киселева, стало заметно более современным [6]. Включение в книгу начал дифференциального исчисления, несомненно, поможет учителям подготовиться к работе по этим разделам курса в будущем и заинтересует лучших учащихся.

[6] Это не значит, что отдельные методические удачи учебника А. П. Киселева не заслуживают теперь никакого внимания.

ИТОГИ КОНТРОЛЬНЫХ И ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ РАБОТ ЗА 1965/66 УЧЕБНЫЙ ГОД

В истекшем учебном году Министерство просвещения РСФСР продолжало изучение качества знаний, умений и навыков по математике. С этой целью в конце учебного года были проведены контрольные работы в массовых и вечерних школах 20 территорий Федерации. Работы выполняли около 2 млн. учащихся переводных классов массовых и около 100 тыс. учащихся вечерних (сменных) школ [1].

[1] Об итогах контрольных работ по математике в вечерних школах см. «Вечерняя средняя школа», 1967, № 2.